



Universidad de Valladolid

**Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales**

Grado en Economía

**Teoría de Juegos y Subastas
en Economía y Empresa**

Presentado por:

Daniel Sanz Calvo

Valladolid, 25 de Junio de 2015

ÍNDICE

1. Introducción	3
2. Juegos	4
3. Subastas.....	7
3.1. Comienzo y evolución de las subastas	8
3.2. Tipos básicos de subastas	10
3.2.1. Subastas de un solo bien.....	10
3.2.2. Subastas de múltiples bienes	11
4. Teoría de las subastas.....	16
4.1. Modelo de Referencia	17
5. Letras del tesoro	24
5.1. Funcionamiento de la subasta	24
5.2. Caso práctico	26
6. Conclusiones	30
Anexo 1	31
Referencias bibliográficas.....	32

1. INTRODUCCIÓN

Vivimos en un mundo globalizado en el que diariamente se producen un gran número de acuerdos y transacciones económicas, no solo entre países, sino también entre empresas y particulares. Gran parte de estas operaciones se producen mediante subastas, por lo que su estudio se antoja indispensable para entender un poco mejor el funcionamiento del entorno en el que vivimos.

Este trabajo trata de explicar el funcionamiento de las subastas, centrándose en última instancia en el mecanismo de las subastas de las letras del tesoro del Banco de España.

Para ello, primeramente se explica qué son los juegos y los diferentes tipos que existen de acuerdo a distintos criterios. Seguidamente se exponen los elementos básicos de éstos, así como las posibles formas de representarlos y los diferentes conceptos de solución.

Posteriormente se hace un breve repaso histórico sobre los comienzos y desarrollos de las subastas para acto seguido exponer los tipos básicos de subastas tanto de un bien como de varios bienes y cómo se consigue el equilibrio. De esta forma se podrá saber ante qué tipo de subasta nos encontramos cuando nos referimos a las letras del tesoro.

Una vez visto todo lo anterior, se procede a esbozar la teoría de las subastas y los supuestos más extendidos para su estudio (Modelo de Referencia) además de las hipótesis del Teorema del Ingreso Equivalente, ya que resultará muy útil para poder comprender el mecanismo de puja de los jugadores que se presenten a las subastas de las letras del tesoro.

A la postre, se explica qué son las letras del tesoro y cómo funcionan sus subastas para finalmente representar un caso práctico dilucidario en el que se lleva a cabo una subasta ficticia. En este ejemplo se mostrará el resultado tanto de una subasta discriminatoria, como de precio uniforme (usado en la actualidad) para así poder comparar ambos tipos.

Por último se enumeran una serie de conclusiones generales sobre el trabajo presentado.

2. JUEGOS

La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas en la que se estudian situaciones de conflicto entre diferentes agentes. Su ámbito de aplicación es muy variado, siendo uno de los campos de mayor estudio la economía. Las situaciones analizadas se describen con modelos matemáticos que ayudan a la toma de decisiones en estos ambientes de incertidumbre y de intereses opuestos.

Atendiendo a distintos criterios podemos encontrarnos con diferentes tipos de juegos: cooperativos o no cooperativos, estáticos o dinámicos y con información completa o con información incompleta.

a) Juegos cooperativos o no cooperativos

Si nos encontramos ante un juego cooperativo, los jugadores buscan ponerse de acuerdo entre ellos (prácticas colusivas) para alcanzar una utilidad superior a la que habrían conseguido de no haberlo hecho. Para ello, los jugadores se apoyan en estrategias conjuntas, es decir, se ayudan entre ellos, cooperan. Los grupos que forman los jugadores entre ellos se denominan coaliciones.

Lo contrario a lo explicado anteriormente sería un juego no cooperativo. En este juego los jugadores no buscan ponerse de acuerdo con otros, sino que actúan por cuenta propia. Toman las decisiones sin pactar con terceros, con independencia de que, si se hubieran puesto de acuerdo, podrían seguramente haber alcanzado una utilidad mayor.

b) Juegos estáticos o dinámicos

Cuando nos hallamos ante un juego estático, la toma de decisiones se produce de forma simultánea, por lo que todos los jugadores actúan en una sola jugada sin saber cómo han actuado el resto de jugadores.

En cambio, en un juego dinámico, la toma de decisiones se produce de manera secuencial (cada vez actúa un jugador), por lo que hay varias jugadas. Entonces, podría darse el caso de que cuando actúe algún jugador, este quizás sepa las acciones que habrían tomado los jugadores que actuaron antes, por lo que la estrategia que llevaría a cabo tendría en cuenta las acciones ya ejecutadas por el resto de jugadores.

c) Juego con información completa o incompleta

Los juegos con información completa (como puede ser el ajedrez) no son el tipo de juego más habitual, ya que normalmente va a haber información que no va a saber el resto de jugadores, pero estos juegos son muy útiles como ejemplos didácticos (dilema del prisionero) para comprender mejor la Teoría de Juegos. Este tipo de juego consiste en que todos los jugadores conocen exactamente cuáles son las estrategias del resto de jugadores, así como sus utilidades, por lo que a partir de esta información actuarán de una u otra forma.

El juego con información incompleta es el más común. En este caso los jugadores desconocen de forma total o parcial las estrategias del resto de jugadores y/o sus utilidades, es decir, que no precisan de una información perfecta acerca del resto de jugadores, algo que resulta obvio.

Una vez contemplados los diferentes tipos de juegos, vamos a proceder a analizar los elementos básicos de un juego, los cuales son: jugadores, estrategias, pagos e información.

Los jugadores son las personas físicas o jurídicas que participan en el juego, los cuales forman sus estrategias de acuerdo con la información que tienen del resto de jugadores y del juego y a partir de estas informaciones toman la mejor decisión para ellos en función de cual sea su utilidad.

Las estrategias, como se ha señalado anteriormente, las llevan a cabo los jugadores, las cuales son un conjunto de acciones que ha de hacer el jugador dependiendo de en qué situación se encuentre este y de qué estrategias han llevado a cabo el resto de jugadores (si nos encontráramos en un juego dinámico).

Por tanto los jugadores tienen unas estrategias las cuales les indican qué acciones llevar a cabo y estas acciones dan unos resultados, unos pagos (o recompensas). Los pagos de un juego asocian a cada resultado la utilidad de cada jugador. En el caso particular de encontrarnos en un juego con dos jugadores y un conjunto de estrategias finito se confeccionará una matriz de pagos.

A continuación se mostrará las dos formas posibles en las que se puede representar un juego no cooperativo: forma normal (forma estratégica) y forma extensiva (árbol de juego).

La representación en forma normal del juego se realiza mediante una matriz de pagos la cual tiene forma de tabla. Esta representación solamente es válida cuando nos hallamos en juegos estáticos y no cooperativos. En la columna de la izquierda y en la fila superior se representan las estrategias de cada jugador (en el ejemplo mostrado sería delatar o no delatar). Dentro de la tabla es donde se representan los pagos (en este ejemplo años de cárcel) que obtiene cada jugador dependiendo de la estrategia llevada a cabo por cada uno de estos. El primer pago de cada cuadro es el correspondiente en este caso al jugador 1, mientras que el segundo pago pertenece al jugador 2.

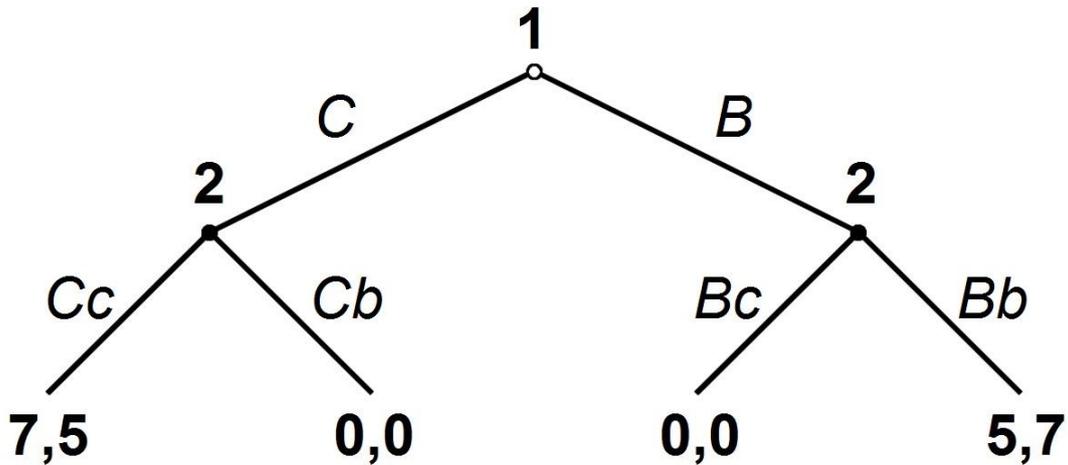
Tabla 1: Ejemplo representación juego en forma normal

		Jugador 2	
		Delatar	No delatar
Jugador 1	Delatar	8 , 8	1 , 10
	No delatar	10 , 1	2 , 2

Ejemplo: El dilema del prisionero

La representación en forma extensiva del juego tiene forma de árbol invertido y dependiendo de la estrategia que se lleve a cabo se toma un camino u otro. Cada nódulo del árbol representa las acciones que puede tomar cada jugador. En la base del árbol podemos encontrar los pagos que obtiene cada jugador de llevarse a cabo las acciones que han derivado finalmente en ese punto. Esta representación sirve exclusivamente para los juegos dinámicos y no cooperativos. En el ejemplo que se muestra a continuación el jugador 1 es el que elige en primer lugar y puede actuar de dos formas posibles, o ir al concierto (C) o ir al baloncesto (B) y una vez tomada esta decisión el jugador 2 del mismo modo tendrá que elegir entre las dos posibilidades, o acudir al concierto (O) o ir a ver el partido de baloncesto (b). Existen cuatro posibles soluciones (Cc, Cb, Bc, Bb), por lo que hay cuatro combinaciones de pagos donde el primer número corresponde siempre a los pagos que recibirá el jugador 1 y el segundo número a los que recibirá el jugador 2.

Tabla 2: Ejemplo representación juego en forma extensiva



Ejemplo: Elección de pareja entre ópera y baloncesto

La forma normal se utiliza, como ya hemos visto, para juegos estáticos con información completa cuya solución básica es el Equilibrio de Nash (EN). El Equilibrio de Nash es la mejor acción que puede llevar a cabo un jugador de acuerdo a las acciones que han acometido el resto de jugadores (esto no implica que el resultado obtenido sea el mejor posible para todos los jugadores, pudiera ocurrir que si estos actuaran de forma cooperativa obtuvieran un resultado todavía mejor).

Muchos tipos de subastas se pueden modelizar como un juego estático de información incompleta. En este caso la solución adecuada es el concepto de Equilibrio Bayesiano de Nash (EBN) introducido por Harsanyi, en el cual cada jugador tiene que imaginar el comportamiento del resto de jugadores.

3. SUBASTAS

En un mundo tan globalizado como en el que vivimos hay un gran número de transacciones económicas y muchas de estas se llevan a cabo a través de las subastas. Pero, ¿qué es una subasta? Una subasta es la venta organizada de un bien o servicio en la que los compradores compiten entre ellos ofreciendo cantidades denominadas pujas. La adjudicación del bien o servicio y la cantidad

que se paga por él se realiza en función de las pujas de acuerdo con una regla predeterminada.

La Teoría de Subastas se aplica a multitud de campos, como puede ser a mercados que se abren a la competencia (mercado de electricidad al por mayor) o al análisis de potenciales abusos de posición dominante que puede haber en algún mercado.

Las subastas tienen fijadas con anterioridad las reglas del proceso de venta. Estas reglas además son conocidas por todos los agentes que van a participar en la subasta y existe la certeza de que se van a cumplir. De todas formas, habrá ocasiones en las que exista un grado de incertidumbre por parte de los compradores, debido a que el vendedor no tiene capacidad de auto-compromiso.

3.1. COMIENZO Y EVOLUCIÓN DE LAS SUBASTAS

Se sabe que en la antigüedad los romanos dieron un gran uso a las subastas, de hecho la palabra en castellano subasta procede del latín. Los romanos clavaban unas lanzas (*hasta* en latín) para delimitar el terreno dónde se iba a celebrar la subasta. Así, la subasta tenía lugar debajo (*sub* en latín) de las lanzas. Uniendo estas dos palabras en latín, formamos la palabra subasta (debajo de las lanzas). De forma parecida, hallamos el origen de la palabra subasta en inglés (*auction*). Los romanos vendían los esclavos realizando una subasta ascendente en la que el precio del esclavo se incrementaba (*auctio* en latín) con cada puja.

Las subastas que comienzan a aparecer en sociedades relativamente avanzadas cumplen indispensablemente con dos premisas:

1. Una suficiente concentración de población.
2. La existencia de una moneda.

Estos requisitos son básicos para que se den las subastas en las sociedades, pues se necesita un número óptimo de compradores y vendedores y se necesita también una moneda común entre estos para poder valorar y pujar por el bien o servicio.

Prácticamente antes del siglo XVII no se realizaban subastas salvo alguna pequeña excepción, según señala Shubik (1983). En la antigua Babilonia existía un mercado anual de esposas. Todas las muchachas en edad de casarse eran

subastadas al mejor postor. El comprador que más pujaba adquiría y se casaba con la joven. Este proceso empezaba con la chica considerada más guapa, se realizaban diferentes pujas u ofertas y la persona que realizara la más alta se quedaba con la muchacha. Otro ejemplo lo encontramos en la antigua Grecia para la concesión de minas. Pero sin duda la difusión que dan los romanos a las subastas es lo más destacable de la antigüedad. No solo eran utilizadas para diferentes concesiones, sino que también se usaban para los botines de guerra, esclavos, e incluso se llegó a subastar el propio Imperio Romano (193 d.C.). Con la caída del Imperio Romano Occidental, las subastas prácticamente desaparecen hasta el siglo XVII. El motivo de la desaparición es el incumplimiento de las dos premisas necesarias anteriormente mencionadas para que haya subastas. Además en oriente existía la ideología de negociación y no de subastas, mientras que en occidente durante toda la Edad Media prevalecía el trueque y la autosuficiencia.

Las subastas vuelven a aparecer para nunca más quedar en el olvido en el siglo XVII. En esta época se empiezan a utilizar diferentes tipos de subasta que veremos más adelante. Además es en este siglo cuando se introduce el típico martillo con el que golpea el subastador para adjudicar el bien o servicio al comprador que haya llevado a cabo la mayor puja.

Dos siglos después, a comienzos prácticamente del siglo XIX, concretamente en el año 1799 se crea una asociación en Inglaterra (*Select Society of Auctioneers*) para formar a los subastadores y crear una confianza en torno a ellos, pues los subastadores habían adquirido tiempo atrás fama de realizar prácticas deshonestas. En Francia se introduce otra novedad, son pioneros en incluir un tiempo límite para pujar. Una vez que se había presentado la mayor puja, se encendían tres velas (cuando se encendía una vela, se esperaba a que se consumiese para encender la siguiente) y si pasado ese tiempo nadie más pujaba, se adjudicaba el bien subastado a la mayor puja. Si por el contrario, algún comprador aumentaba la puja, se prorrogaba el tiempo con dos velas.

Un siglo más tarde, las subastas adquirieron una mayor importancia y se extendieron de igual forma a nuevos bienes y servicios (tabaco, madera, fruta, pieles, coches usados,...). También cobraron gran importancia las subastas con

sobre cerrado en Estados Unidos. El uso principal que se las daba era para adquirir bienes de elevado coste, como pueden ser bienes industriales o contratos militares. En este siglo se debe señalar la importancia de la figura del Estado en las subastas. La mayor parte de las compras del Estado son mediante subasta con sobre cerrado. Pero también adquiere gran importancia el Estado como subastador, vendiendo desde títulos de deuda pública (en los que nos centraremos más adelante) hasta derechos de explotación y venta de empresas públicas. Con todas las variedades de subastas realizadas por el Estado se ha impulsado la Teoría de Subastas.

Un último acontecimiento relevante en torno a las subastas ha sido el desarrollo de internet. La empresa eBay en el año 2001 subastaba más de un millón de artículos al día, muestra de la fuerte repercusión que ha tenido internet en las subastas.

3.2. TIPOS BÁSICOS DE SUBASTAS

Nos referimos a subastas en este caso tanto cuando se intenta vender un bien o bienes (el subastador es el vendedor) como cuando se intenta comprar un bien o bienes (el subastador es el comprador).

Cabe destacar dos grupos básicos de subastas:

- Subasta de un solo bien.
- Subasta de múltiples bienes.

3.2.1. Subastas de un solo bien

El autor Vickrey (1961) dividía las subastas de un único bien en cuatro tipos básicos. Aunque estas subastas aceptan diferentes variantes, el funcionamiento de estas se asemejan, por lo que nos centraremos exclusivamente en los cuatro tipos básicos.

a) Subasta inglesa

Es el tipo de subasta más conocido y usado. También es conocida como subasta ascendente puesto que el precio del bien se va incrementando sucesivamente a medida que los compradores aumentan el valor de sus pujas, hasta que finalmente ningún comprador supere la última puja, momento en el que se adjudica el bien al mejor postor por el precio que se alcanzó en la última

puja (o sea, la suya propia). Adquiere por tanto el bien o servicio un único comprador. Cada comprador puede pujar por el bien cuantas veces quiera, siempre y cuando su puja sea superior a la más alta en ese momento. Por tanto, los compradores deben conocer el nivel actual de la puja.

b) Subasta holandesa

Este método que se comenzó a usar para la venta de flores en Holanda (de ahí su nombre), no es tan popular como la subasta inglesa pero sí muy utilizado, ya que se usa por ejemplo para la venta de deuda por parte de los Estados. A esta subasta se la conoce también con el nombre de subasta descendente debido a que en esta clase de subasta, el subastador valora el bien a un precio muy elevado y empieza entonces a disminuir este de forma progresiva hasta que finalmente algún comprador acepta ese precio.

c) Subasta con sobre cerrado al primer precio

En este tipo de subasta, los posibles compradores realizan sus pujas en un sobre cerrado, adjudicándose el bien o servicio al mejor postor y pagando por este el precio por el que se pujó. En este caso los posibles compradores desconocen las pujas del resto de compradores y además solo pueden realizar una puja, algo que no ocurría en los dos tipos de subastas anteriores.

d) Subasta con sobre cerrado al segundo precio

Esta subasta es muy similar a la anterior debido a que la única diferencia reside en que el mejor postor no paga el precio de su puja, sino que paga la segunda puja más alta. A esta subasta también se le conoce con el nombre de subasta de Vickrey.

3.2.2. Subastas de múltiples bienes

También se puede subastar varios bienes en una misma subasta. Nos encontramos con tres tipos diferentes de subastas con el formato de sobre cerrado para M bienes homogéneos. Debemos partir de la condición de que cada bien es exactamente igual al resto de bienes o muy similar. De esta forma las ofertas que se realicen en la puja alcanzarán el valor que cada comprador esté dispuesto a pagar por la primera, segunda,... unidades del bien. Esta premisa, cuyo objetivo es simplificar el planteamiento no ocurre siempre. El motivo es que

en ocasiones se realizan estas subastas para diferentes bienes pero que son prácticamente iguales (podríamos además afirmar que estos bienes serían sustitutivos perfectos).

El funcionamiento de cada una de las tres modalidades de subasta de bienes homogéneos con sobre cerrado es el siguiente: a cada puja se le atribuye una curva de demanda inversa (función decreciente) la cual representa el precio por el que ha pujado el comprador. De igual forma se puede realizar tantas pujas como desee el comprador mientras estas sean hechas dentro de la fecha límite. Pueden pujar los compradores hasta la fecha límite tantas veces como deseen. Una vez finalizada la fecha límite, el subastador abre todos los sobres y halla el precio de equilibrio igualando las ofertas recibidas con las demandas.

a) Subasta discriminatoria

También conocida como subasta de varios precios o como subasta pay-as-bid. Los compradores en este tipo de subasta presentan sus pujas mediante sobres cerrados. Entonces el subastador calculará con todas las pujas realizadas el precio de equilibrio o precio de corte. Finalmente el comprador obtendrá la cantidad por la que pujó situada en el precio de equilibrio, pero no pagará el precio de equilibrio, sino que pagará el precio por el que pujó.

Esta clase de subasta es la generalización de la subasta de múltiples unidades al primer precio. Sin embargo, resulta muy complicado hallar el equilibrio de esta subasta, es decir, el Equilibrio de Nash, pero se puede obtener a partir de tres supuestos de simetría:

1. Primer supuesto: cuando analicemos la subasta al primer precio, consideraremos que los compradores son simétricos, es decir, que la distribución de información tanto de los gobiernos como de los compradores es simétrica.
2. Segundo supuesto: supondremos que todos los compradores consideran simétrica cada unidad de bien. Esto significa que los compradores dan a cada unidad del bien un valor marginal constante, siendo el valor de todas las unidades el mismo en cualquier instante de tiempo.
3. Tercer supuesto: dictamina que los compradores deben ser simétricos en sus limitaciones de capacidad.

Una vez dados estos tres supuestos, la solución que obtenemos es eficiente y similar a la subasta con sobre cerrado al primer precio de un solo bien.

b) Subasta de precio uniforme

A esta variedad de subasta se le conoce también con el nombre de subasta no discriminatoria. El proceso de subasta de este tipo se asemeja al anterior (subasta discriminatoria) porque el comienzo es el mismo; los compradores presentan sus pujas con sobres cerrados y obtendrán la cantidad de bienes por los que hayan pujado en el precio de equilibrio. Pero lo que ocurre en este caso, es que el comprador esta vez pagará por los bienes adquiridos el precio de equilibrio, no importando si la puja de esos bienes era superior al precio de equilibrio.

Este método de subasta surge ante la posible existencia de una mayor o menor información por parte de los compradores. Este problema genera que los compradores con una menor información acaben pagando más por exactamente los mismos bienes que los compradores con una mayor información. Por este motivo, los compradores con menos información acabarán siendo menos agresivos en sus pujas y no se alcanzará en estas subastas el verdadero valor de los bienes.

Por este motivo surge la subasta de precio uniforme, en la cual todos los compradores pagan el precio de equilibrio por cualquier unidad del bien, se haya pujado lo que se haya pujado. De esta forma, los compradores con menor información no tendrán el riesgo de pagar más que el resto de compradores, por lo que acudirán a las subastas más compradores y se podrá alcanzar el verdadero valor de los bienes subastados. Sin embargo, este tipo de subasta no es eficiente.

c) Subasta de Vickrey de múltiples unidades

Al igual que sucede con los dos tipos de subasta anteriores, en esta clase de subasta los compradores presentan sus pujas en sobres cerrados y lograrán obtener tantos bienes como pujas hayan conseguido realizar en el precio de equilibrio. A diferencia de los tipos de subasta vistos anteriormente, en este proceso el comprador pagará por los bienes adquiridos el coste de oportunidad

(en relación con las pujas presentadas) de cada unidad de bien que haya conseguido.

Este tipo de subasta es la generalización de la subasta con sobre cerrado al segundo precio. Como en los casos expuestos anteriormente, los compradores presentan los sobres cerrados con las diferentes pujas, las cuales comprenden las curvas de demanda inversa y cada postor adquiere la cantidad que haya demandado en el precio de equilibrio. En cambio, en vez de pagar el precio por el que se ha pujado o el precio de equilibrio por cada unidad, el comprador pagará el coste de oportunidad por cada unidad ganada.

A continuación, a modo de aclaración sobre estos tres métodos de subasta de múltiples unidades se ha elaborado una tabla con un ejemplo de una subasta. Cada comprador realiza 5 pujas (ordenadas de mayor a menor valoración) y dependiendo del método de subasta utilizado, pagarán una u otra cantidad por cada bien obtenido:

Tabla 3: Ejemplo de subasta con múltiples unidades

Comprador	Valor de la puja	Subasta discriminadora	Subasta de precio uniforme	Subasta de Vickrey
Comprador 1				
1ra unidad	56	56	42	42
2da unidad	47	47	42	38
3ra unidad	44	44	42	35
4ta unidad	37			
5ta unidad	33			
Comprador 2				
1ra unidad	53	53	42	37
2da unidad	47	47	42	33
3ra unidad	42			
4ta unidad	38			
5ta unidad	35			

Fuente: Auction Theory for the New Economy p. 146

Como se observa en la tabla, según la subasta discriminatoria si ordenamos todas las pujas de mayor a menor valoración (56, 53, 47, 47 y 44) vemos que el comprador 1 se llevará 3 bienes y el comprador 2 se llevará 2, pagando por cada bien el precio de la oferta establecida. Fijándonos en la siguiente columna, la subasta de precio uniforme varía únicamente en cuanto a la cantidad que tiene que desembolsar cada comprador. En este caso, la oferta más alta rechazada (la cual no ha conseguido obtener el bien) fija el precio al que se pagarán todas las pujas adjudicadas, 42. En la última columna, la cual muestra la subasta de Vickrey, se fijan los precios a partir del coste de oportunidad. En este caso el coste de oportunidad del comprador 1 para conseguir una unidad adicional (su cuarta unidad) es de 42 (la puja más alta rechazada del comprador 2), el coste de oportunidad de la siguiente unidad será por tanto la segunda puja más alta rechazada del comprador 2, o sea 38, y lo mismo sucedería con la siguiente unidad adicional que tendría un valor de 35. De igual forma que se usa este mecanismo para hallar el precio de los bienes para el comprador 1, se usa para el del comprador 2 (en este caso se cogerían las pujas perdedoras del otro comprador).

Además de estos tipos de subasta con múltiples unidades, podemos añadir a estos los tipos de subastas explicados al principio (subasta holandesa y subasta inglesa) ya que pueden usarse para múltiples bienes, aunque como veremos los resultados son equivalentes a los modelos visualizados previamente.

a) Subasta holandesa con múltiples unidades

El subastador comienza poniendo un precio alto a los bienes, para el cual no exista ninguna puja. Entonces, como habíamos visto anteriormente, el subastador comienza a bajar el precio hasta que los compradores estén dispuestos a comprar. Entonces se venden los bienes al precio que haya aceptado el comprador. Prosigue la subasta bajando el precio, pues habrá más compradores que se unan a la subasta a precios inferiores, hasta que finalmente se vendan la totalidad de los bienes.

La subasta holandesa con múltiples unidades equivale a la subasta discriminatoria en cuanto a resultado. Sin embargo, sus estrategias no son

equivalentes porque si los valores de los compradores no son independientes (la información disponible para un comprador podría afectar a la valoración de las unidades por otros compradores) entonces en la subasta holandesa de múltiples unidades cuando un comprador aceptase el precio en el que se encontrase la puja podría suceder que otros compradores aumentasen por este suceso el valor que ellos otorgan a los bienes. Donde sí equivalen las estrategias de este tipo de subasta es en la subasta con sobre cerrado al primer precio.

b) Subasta inglesa con múltiples unidades

Al contrario que ocurre con la subasta holandesa, el subastador comienza incorporando un precio bajo a los bienes y lo va aumentando de forma gradual. Cada comprador que quiera comprar al precio de la puja, indica cuántas unidades está dispuesto a comprar. De esta forma a medida que el precio va aumentando los compradores reducen las unidades que están dispuestos a comprar. La subasta concluye una vez se ha pujado por todos los bienes, es decir, cuando la oferta y la demanda están en equilibrio (cuando coinciden). El precio al que se venden los bienes es el precio que ha surgido de dicho equilibrio.

La subasta inglesa de múltiples unidades y la subasta de precio uniforme son equivalentes en el resultado. Al igual que las estrategias de la subasta con sobre cerrado al segundo precio corresponden con las mismas estrategias que la subasta inglesa.

4. TEORÍA DE LAS SUBASTAS

A partir del trabajo realizado por Vickrey (1961) se empieza a utilizar la Teoría de Juegos, tanto para analizar las subastas y las estrategias como para acometer las pujas. Pero de todas formas, el desarrollo de esta teoría en el análisis de las subastas se lleva a cabo lentamente ya que todavía no tiene una importancia relevante y porque todavía predomina el enfoque de Friedman (1956) y no será hasta la década de los ochenta cuando su desarrollo comience a acelerarse, produciéndose un gran número de publicaciones de investigación al respecto.

Antes de imponerse el “Modelo de Referencia” y ser el modelo más extendido en la Teoría de Subastas prevalecían unas cuantas ideas propuestas en el trabajo de Friedman llevadas a cabo en 1956.

Friedman usaba modelos con competidores no estratégicos, es decir, que los competidores del jugador (los otros potenciales compradores) no seguían un comportamiento estratégico. Esto quiere decir que no analiza el comportamiento del resto de jugadores ni las repercusiones que tendrían sus estrategias en las del jugador. Por tanto Friedman se dedica a buscar estrategias de puja, partiendo desde el punto de vista de una empresa, suponiendo estable el comportamiento del resto de jugadores (siguen las mismas pautas que en el pasado). Para llevar este enfoque a buen puerto, se realizan análisis estadísticos de las pujas presentadas.

Pero estos modelos carecían de realidad y tenían unas cuantas limitaciones, como señala Laffont (1997). La búsqueda de una estrategia de puja en entornos determinados no es aplicable a contextos más generales y es ineficaz para predecir el comportamiento de los jugadores en nuevos entornos debido a que se suponía que el resto de jugadores seguían las mismas pautas que en el pasado.

Por las limitaciones anteriormente mencionadas se evoluciona de modelo, en el cual las tasaciones de los jugadores sobre el bien que se va a pujar es conocida por el resto, es decir, las valoraciones de los jugadores son de dominio público. Es en este modelo cuando empieza a utilizarse la Teoría de Juegos.

Una ventaja de este modelo es que se genera un equilibrio en la forma más sencilla del Equilibrio de Nash. Además, dependiendo de cuál sea el tipo de subasta (tanto subasta al segundo precio como subasta inglesa), el resultado va a coincidir con el Modelo de Referencia.

4.1. MODELO DE REFERENCIA

Muchos de los resultados de la Teoría de Subastas están basados en este modelo y además gran parte de la investigación llevada a cabo sobre esta teoría se basa en modificar algún supuesto de este modelo. En este modelo la reputación relevante es la de los compradores. Nos hallamos por tanto ante el

modelo más importante de la Teoría de Subastas y el más extendido, el Modelo de Referencia (“*Benchmark Model*”).

El jugador solo conoce la valoración que da este al bien subastado y no la valoración que dan el resto de jugadores. Estamos por consiguiente ante un modelo con información incompleta (juegos bayesianos). Ante esta ignorancia el jugador lo que hará será realizar diferentes suposiciones sobre el valor que atribuyen el resto de jugadores al bien subastado, para así poder tener una precaria idea sobre cómo pujarán estos. Asimismo, el jugador tiene que pensar cómo vaticinarán el resto de jugadores el valor que da este al bien para poder pronosticar sus pujas.

Cabe señalar algunos supuestos para el Modelo de Referencia:

- El número de compradores se designa por la letra N $i = 1, \dots, N$.
- Las pujas son continuas y son números reales no negativos $b_i \in [0, \infty)$.
- Las valoraciones de los compradores (v_i) son independientes e idénticamente distribuidas ($F(v_i)$) donde $F(x)$ es la función de distribución de las valoraciones ($V_{min}, V_{máx}$).

Dado que la aplicación de estos supuestos podría ser excesivamente complicada, Harsanyi (1967) propone añadir una etapa inicial en la que el azar señale el “tipo” de jugador que es cada uno. Todos los jugadores tienen las mismas creencias sobre la distribución de probabilidades del resto de candidatos.

Para este modelo la idea que se utiliza de equilibrio es el Equilibrio Bayesiano de Nash (EBN). Es similar al Equilibrio de Nash, pero hay una diferencia respecto a la definición de estrategia (esta definición cambia al situarnos en juegos con información incompleta) ya que consiste en llevar a cabo una acción para cada uno de los posibles “tipos” que el jugador podría llegar a asumir, concepto que acabamos de ver en este apartado y que no teníamos en el modelo con información completa. Cabe señalar también que las estrategias tienen que incorporar todas las posibles acciones que haría el jugador dependiendo del “tipo” de jugador que es cada uno, lo cual viene determinado por el azar.

Pero para alcanzar el Equilibrio Bayesiano de Nash el jugador tiene que presumir el comportamiento del resto de jugadores ante su puja, del mismo modo

que el resto de jugadores hará lo mismo. Y para poder pensar como están pensando los otros jugadores, el jugador necesita imaginar su propio comportamiento. En otras palabras, cada jugador tiene que recapacitar sobre cómo habría actuado ante todas las alternativas posibles. La solución no es por tanto un número concreto en una puja, sino que es una función cuya variable independiente es la valoración. En definitiva el Equilibrio Bayesiano de Nash lo integran un conjunto de estrategias en la que la estrategia del jugador obtiene el mejor resultado posible dependiendo de las estrategias que lleven a cabo los otros jugadores.

A continuación se describen los cuatro supuestos básicos del Modelo de Referencia en la Teoría de Subastas:

1. **Valoraciones independientes privadas.** Es un supuesto, aunque bien podrían ser dos diferentes. Por una parte el comprador sabe la propia valoración que hace del valor del bien. Este supuesto indica que no existe información relevante que sea ignorada por algún jugador, porque de ser así los jugadores no podrían valorar con exactitud el bien a subastar. Por otra parte, las valoraciones de los jugadores no están correlacionadas, por lo que un jugador no puede obtener información sobre la valoración que realizan el resto de jugadores a partir de su propia valoración. No sabe por tanto en cuánto valoran el bien el resto de jugadores.
2. **Compradores simétricos.** Este supuesto indica que las valoraciones de los jugadores tienen un mismo origen, todas salen de la misma distribución de probabilidad (los jugadores son iguales “ex-ante”). De este modo el subastador observa a todos los jugadores de manera similar.
3. **Compradores neutrales al riesgo.** Los jugadores tienen funciones de utilidad del dinero lineales por lo que para ellos es lo mismo maximizar su utilidad esperada o sus ganancias esperadas.
4. **Los pagos son una función únicamente de las pujas.** En este supuesto se considera que el vendedor únicamente puede hacer depender los posibles pagos realizados por los compradores de las pujas presentadas.

Además de estos supuestos básicos, podemos destacar los siguientes aspectos adicionales:

- No existe coste alguno, ni por parte del comprador ni por parte del vendedor en preparaciones de pujas.
- No existen prácticas colusivas entre los compradores, es decir, no pactan entre ellos para beneficiarse y dañar a un tercer comprador.
- El número de compradores es conocido por todos. Al igual que también son conocidas las actitudes hacia el riesgo y las distribuciones de probabilidad de las valoraciones de los compradores.
- El vendedor tiene capacidad de auto-compromiso, lo que viene a significar que este cumplirá siempre con las normas estipuladas.

Dependiendo del tipo de subasta ante la que nos hallemos habrá una u otra estrategia de equilibrio, es decir, un Equilibrio Bayesiano de Nash.

a) Subasta inglesa

Los jugadores que se presenten a este tipo de subasta tienen una estrategia que va a ser la mejor para ellos con independencia de cuales sean las estrategias llevadas a cabo por el resto de jugadores (estrategia dominante). Esta estrategia radica en permanecer en la subasta hasta el momento en que el precio de la puja sea igual a la valoración que hace el jugador del objeto subastado. De no llevarse a cabo esta estrategia, nunca se podrá obtener un resultado mejor.

El resultado que se obtendrá tras la subasta será eficiente (el jugador que haya dado una mayor valoración al objeto pujado es quien se lo lleva) siempre y cuando todos los posibles compradores lleven a cabo esta estrategia. Pero este jugador no pagará lo que considera que vale el objeto (v_1), sino que paga la valoración que tenía el segundo comprador, debido a que su puja sería la segunda más elevada (v_2). La diferencia entre lo que paga el jugador que ha ganado y lo que hubiera estado dispuesto a pagar (su propia valoración) son las ganancias netas que obtiene.

$$\text{Ganancias} = v_1 - v_2$$

En este caso el vendedor no logra extraer el máximo beneficio, pues el ganador ha obtenido un excedente.

b) Subasta con sobre cerrado al segundo precio

La estrategia de los jugadores en este tipo de subasta reside en realizar una puja por el objeto que sea igual a la valoración que da del mismo, independientemente de lo que haga el resto de jugadores. Estamos por tanto, al igual que en la subasta inglesa, ante una estrategia débilmente dominante.

El autor Vickrey (1961) demuestra que existe estrategia débilmente dominante, es decir, que ningún jugador lograría aumentar sus ganancias realizando una puja diferente por el objeto, tanto si la puja es superior, como si es inferior:

- Puja inferior a su valoración. Para empezar, si realiza esta puja, el jugador tendrá menos posibilidades de obtener el bien por el que se puja. Y aunque lo obtuviera, lo que pagará por él será lo que ha pujado el segundo jugador con la puja más elevada, con independencia de que el jugador que hubiera ganado haya pujado menos cantidad del valor que daba al bien.
- Puja superior a su valoración. En el hipotético caso de que el jugador ganara la subasta, a este le podría perjudicar, porque podría llegar a pagar un precio superior por el que valoraba el bien, siempre y cuando el segundo precio mayor sea superior a su valoración. Por el contrario, si obtiene el bien y el segundo precio es inferior a su valoración, lo mismo le hubiera dado al jugador haber pujado más por el bien, porque al final pagará lo mismo que si hubiera pujado por su valoración.

Queda demostrado que la mejor opción para los jugadores es decir la verdad, hacer una puja por el valor que consideran que vale el objeto.

Tanto las estrategias de esta subasta como de la subasta inglesa son equivalentes desde el punto de vista estratégico y el jugador que obtiene el bien es el que tiene la mayor valoración de este, por tanto, la asignación es eficiente.

c) Subasta holandesa

En esta puja, el jugador pujará por el objeto sin tener conocimiento de las decisiones por las que han optado el resto de jugadores. Además, en este caso, si el jugador resulta el vencedor de la puja, pagaría la cantidad por la que ha pujado. El resultado obtenido es independiente de las aptitudes de los jugadores

ante el riesgo y del supuesto que se lleve a cabo sobre las correlaciones de las valoraciones del resto de jugadores. Por este motivo y porque desde un punto de vista estratégico el escenario en el que se encuentran todos los jugadores es el mismo, nos centraremos en analizar las subastas al primer precio.

d) Subasta con sobre cerrado al primer precio

En este tipo de puja y dado que en caso de ganar, se pagará íntegramente lo pujado, el jugador se pregunta qué puja máxima necesitaría para ganar la puja (siempre y cuando no exceda su valoración personal) teniendo en cuenta también que cuanto mayor sea esta, menor o nulo será el excedente. En este caso, la estrategia que se lleve a cabo no va a ser la mejor que se pueda lograr con independencia de lo que hagan el resto de jugadores. No existe entonces en esta subasta una estrategia dominante.

El resultado a este problema deriva de hacer suposiciones sobre cuál sería la puja máxima que cada jugador haría, suponiendo que la valoración del jugador sea la más alta. Una vez que presupone qué valor es el más alto, el jugador realiza la puja que coincide con ese valor.

Matemáticamente la función de puja de equilibrio según McAfee y McMillan (1987) sería:

$$b_i = B(v_i) = v_i - \frac{\int_{V_{\min}}^{v_i} [F(v_i)]^{N-1} dv_i}{F(v_i)^{N-1}}$$

La puja del comprador i (b_i), la cual será una determinada cantidad ofertada ($B(v_i)$) sería igual a la valoración real que da el mismo del objeto pujado (v_i) menos la cantidad que este cree que puede sacar de excedente, suponiendo la estimación que hace cada jugador restante sobre el valor más alto que estos dan al objeto pujado. Esta función tiene tres características:

1. Las pujas de todos los jugadores van a ser inferiores a las cantidades máximas que los jugadores están dispuestos a pagar. En otras palabras, el vendedor sabe que se podría alcanzar una puja mayor.
2. La función $B(v_i)$ es creciente en el número de jugadores. Cuantos más jugadores haya, cuanto mayor sea la competencia, las pujas serán más elevadas.

3. Si el número de jugadores tiende a infinito, las pujas de cada jugador tenderán al valor que los jugadores otorgaban al objeto subastado. En este caso no habría excedentes (no se obtendrían ganancias).

A continuación, y a modo de ejemplo, supondremos que las distribuciones de las valoraciones de los compradores son uniformes, por lo que la función de puja de equilibrio sería:

$$b_i = B^C(v_i) = \frac{(v_i + V_{min})^{N-1}}{N - 1}$$

El vendedor obtendrá los mismos ingresos con independencia del modelo de subasta que se lleve a cabo. En los dos primeros tipos de subasta (subasta inglesa y subasta con sobre cerrado al segundo precio), el precio a pagar era igual a la segunda valoración más elevada, mientras que en los dos últimos (subasta holandesa y subasta con sobre cerrado al primer precio) los jugadores presentaban pujas por debajo de su valoración pero iguales a la valoración que ellos esperaban que sería la más alta tras la de ellos, por lo que, de igual forma, se paga también por la segunda valoración más alta. Este razonamiento se generaliza en el “Teorema del Ingreso Equivalente”¹, (siempre y cuando se cumplan los supuestos del Modelo de Referencia) el cual establece dos requisitos para que esto siempre se cumpla:

- Que en equilibrio, el jugador que tenga la valoración más elevada del bien adquiera este.
- Que aquel jugador que tenga la valoración mínima posible del bien, tenga una utilidad esperada igual a cero.

De igual forma, los cuatro tipos de subastas vistos anteriormente forman el mecanismo de venta óptimo (desde la perspectiva del vendedor) si se lleva a cabo una política de precios mínimos óptima. Esto significa que resulta indiferente elegir cualquiera de los tipos de subasta visto anteriormente, ya que todos estos pueden maximizar los ingresos esperados del vendedor.

“Las formas simples de subastas son las mejores entre un enorme conjunto de mecanismos de venta posibles”².

¹ Véase Riley y Samuelson (1981) y Myerson (1981).

² McAfee y McMillan (1987 pp. 714).

5. LETRAS DEL TESORO

Una vez analizados los diferentes tipos de subastas, tanto de un objeto como de varios, vamos a proceder a explicar el funcionamiento de la subasta de las letras del tesoro del Gobierno español, para posteriormente realizar un caso práctico aplicando la teoría vista hasta este momento.

Antes de comenzar explicando el funcionamiento de este tipo de subasta hay que definir y explicar unos conceptos clave a tener en cuenta. Lo primero, una letra del tesoro es un instrumento financiero de renta fija pública a corto plazo (pueden ser a 3, 6, 9, 12 o 18 meses) la cual se emite a descuento (se compran las letras a un precio menor al nominal y una vez finalizado el plazo el comprador recibe el valor nominal de las letras, que es de 1000€, siendo la diferencia entre estos dos valores el interés que se obtiene por esta clase de deuda). Las letras del tesoro son emitidas por el Tesoro Público, el cual es un órgano adscrito a la Secretaría de Estado de Economía y Apoyo a la Empresa del Ministerio de Economía y Competitividad.

Una vez aclarados estos conceptos se prosigue con la explicación del funcionamiento de la subasta de las letras del tesoro.

5.1. FUNCIONAMIENTO DE LA SUBASTA

A la subasta de las letras del tesoro acuden diferentes entidades, a las cuales vamos a denominar compradores, que realizan sus pujas con el método de sobre cerrado.

Una vez que da comienzo la subasta, los compradores pueden presentar tantas peticiones de compra (ofertas) como deseen, las cuales pueden ser de dos tipos diferentes:

- **Oferta no competitiva:** en esta petición de compra no se indica el precio al que el comprador desea adquirir las letras. El precio al que se adjudicarán las letras será el precio medio ponderado que se obtenga en la subasta de estas mediante la oferta competitiva. Son por tanto ofertas pasivas.
- **Oferta competitiva:** en este tipo de oferta se indica tanto el precio al que el comprador está dispuesto a obtener los títulos, como la cantidad de títulos que se desean.

Una vez finalizado el tiempo para realizar ofertas, el subastador, en este caso el Tesoro Público, adjudica la cantidad de títulos subastados a los compradores. Estas adjudicaciones se llevan a cabo en dos etapas diferentes:

1. Primera etapa: en esta etapa se adjudica la cantidad que corresponde a las ofertas no competitivas.
2. Segunda etapa: la cantidad de títulos restantes, los que quedan después de haber adjudicado parte de estos en la primera etapa, se reparten entre las ofertas competitivas.

La primera etapa no tiene ningún secreto ya que se adjudican tantas letras como la cantidad que se haya demandado a un precio de venta que se obtendrá más adelante.

En cambio, el proceso de la segunda etapa es menos sencillo. Lo primero que se hace en esta etapa es ordenar de mayor a menor el precio ofertado en la oferta competitiva por los compradores. A continuación se empieza a adjudicar las letras del tesoro, comenzando a repartirlas por el comprador que haya pujado más alto por ellas. Este proceso continúa con las pujas más elevadas, hasta que finalmente se adjudican todos los títulos que entraban en la subasta. En caso de que se hubiera pujado el mismo precio y no hubiera letras suficientes para repartir entre todos los compradores (algo que únicamente ocurriría en el último nivel de pujas adjudicadas), estas se adjudicarán proporcionalmente a las cantidades pedidas. El precio que se pagarán por las letras dependerá de si nos encontramos ante una subasta discriminatoria, en la cual cada comprador pagará lo pujado por las letras, o ante una subasta de precio uniforme, en la que todos los compradores pagarán por las letras el precio de equilibrio, salvo aquellas peticiones aceptadas que estén por debajo del precio medio ponderado, en las cuales se pagará por el valor ofertado.

Finalmente se halla el precio medio ponderado de las letras del tesoro de la oferta competitiva. El precio que obtengamos será el precio que pagarán los compradores por las letras adquiridas en la oferta no competitiva y, en el caso de hallarnos en una subasta de precio uniforme, este será el precio para todas las ofertas aceptadas que tengan un valor superior al precio medio ponderado.

En el Anexo 1 pueden verse datos reales de la última subasta de las letras del tesoro.

5.2. CASO PRÁCTICO

Una vez explicada la teoría del funcionamiento de la subasta de las letras del tesoro, para entenderlo mejor llevaremos a cabo un caso práctico.

Supongamos que el Tesoro Público desea emitir deuda a 12 meses, o sea, unas letras del tesoro de esta duración, por un valor de 2.400 millones de euros. Entonces, convoca a mediados del mes una subasta a sobre cerrado. A esta acuden un total de 8 compradores diferentes, los cuales tienen diferentes estrategias, pues a unos les interesa conseguir deuda a cualquier precio debido a que poseen unos fondos con unos clientes y está estipulado en esos fondos que parte de estos han de ser letras del tesoro (razón por la que a veces se acaba pagando un tipo de interés negativo) y a otros compradores, en cambio, les interesa únicamente conseguir deuda si consiguen un jugoso tipo de interés. En la siguiente tabla se muestra las diferentes pujas que han realizado los 8 compradores expresadas en millones de euros:

Tabla 4: Ofertas competitivas y no competitivas de los compradores

	Oferta competitiva	Oferta no competitiva
Alfa (α)	150	170
Beta (β)	880	0
Gamma (γ)	300	100
Delta (δ)	235	15
Épsilon (ϵ)	265	0
Dseta (ζ)	370	75
Eta (η)	270	40
Theta (θ)	580	0

Elaboración propia

Está estipulado que las ofertas no competitivas tengan que comprarse por una cuantía de 200.000€, por lo que si las ofertas superan esta cuantía, estas deben ser múltiplos de 200.000€ (200 letras del tesoro a 1.000€). En este ejemplo al tratarse los datos de millones de euros se cumple que las ofertas no competitivas son múltiplos de 200.000€.

Las ofertas no competitivas han alcanzado la cifra de 400 millones de euros. Mientras que las ofertas competitivas toman un valor de 3.050 millones de euros.

A los 2.400 millones de euros que entraban en la subasta le restamos 400 millones de las ofertas no competitivas, las cuales se adjudican directamente a cada comprador. El montante restante es de 2.000 millones de euros, los cuales toca adjudicar de mayor a menor precio ofertado, por lo que el siguiente paso será ordenar las pujas de mayor a menor valor. En la tabla anterior no se había mostrado el precio al que los compradores realizaban las ofertas competitivas, pero en esta tabla se muestran las pujas y se ordenan de mayor a menor valor (el precio ofertado se presenta en porcentaje y el resto de cantidades en millones de euros):

Tabla 5: Valores de las ofertas competitivas de los compradores

Precio	α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	Total	Acumulado
99%	10		25					20	55	55
98%	10		50		20		20	30	130	185
97'75%	50		80		45	70	40	40	325	510
97,50%	50		145	5	50	100	80	50	480	990
97'25%	10	130		35	50	200	130	70	625	1615
97%	10	300		45	100			80	535	2150
96'75%	10	250		50				110	420	2570
96'50%		200		100				180	480	3050

Elaboración propia

En primer lugar se adjudican 55 millones de euros al 99%, después 130 millones de euros al 98%, después 325 millones de euros al 97'75%, después 480 millones de euros al 97'50%, después 625 millones de euros al 97'25% y finalmente los 385 millones de euros restantes al 97%. Al no quedar más letras del tesoro, las pujas con un precio inferior no se adjudican.

A continuación y dado que las cantidades demandadas al 97% son superiores (535 millones) a las adjudicaciones (385 millones) se reparten estas de manera proporcional entre los diferentes compradores que hayan pujado por esta cantidad, de tal forma que obtendrán el 71'962617% de las letras por las que han pujado a ese precio. Por tanto, Alfa adquiere 7'20 millones, Beta 215'89 millones, Delta 32'38 millones, Épsilon 71'96 millones y Theta 57'57 millones.

Es el momento de hallar el precio medio ponderado de esta subasta:

$$(0'99 \cdot 55) + (0'98 \cdot 130) + (0'9775 \cdot 325) + (0'975 \cdot 480) + (0'9725 \cdot 625) + (0'97 \cdot 385)/2000$$

El resultado de este cálculo es 0'9744, lo que significa que los compradores que hayan participado en la puja no competitiva pagarán un 97'44% del valor nominal de las letras (974'40€ por letra).

Una vez hemos realizado todo este proceso, cabe distinguir, como se ha mencionado previamente, entre la subasta discriminatoria y subasta de precio uniforme, ya que el precio de compra variará sensiblemente.

a) Subasta discriminatoria

Si el Tesoro Público ha realizado este tipo de subasta, cada comprador pagará por las letras adquiridas en la oferta competitiva el precio por el que ha pujado. A modo de ejemplo para vislumbrarlo mejor, hallaremos lo que tiene que pagar el comprador Delta (δ):

- 15 millones al precio medio ponderado (97'44%) = 14.616.000€
- 5 millones al 97'50% = 4.875.000€
- 35 millones al 97'25% = 34.037.500€
- 32'38 millones al 97% = 31.408.600€
- Total a pagar por Delta = 84.937.100€

Como las letras del tesoro son al descuento, se paga el precio medio ponderado en el caso de las ofertas no competitivas y el precio por el que se ofertaron las letras en las ofertas competitivas y, al vencimiento, (al cabo de un año en este caso) se recibe el 100% del valor de la letra, o sea, el valor nominal. Por lo que en el ejemplo anterior de Delta, este comprador recibirá al finalizar los 12 meses el siguiente montante:

$$15000000\text{€} + 5000000\text{€} + 35000000\text{€} + 32380000\text{€} = 87380000\text{€}$$

Una vez calculado cuánto ha de pagar Delta y cuánto recibirá una vez finalicen las letras, podemos hallar el tipo de interés anual que ha conseguido:

$$\frac{87380000 - 84937100}{84937100} \times 100 = 2'876\%$$

b) Subasta de precio uniforme

En este caso suponemos que el Tesoro Público realiza una subasta de precio uniforme (este es el sistema que se utiliza en la práctica), por tanto, el precio que se pagará por las ofertas que tengan un valor superior al precio medio ponderado será el precio medio ponderado (el mismo precio que se paga por las letras en las ofertas no competitivas), mientras las ofertas aceptadas que tengan un valor inferior al precio medio ponderado pagarán el valor de la oferta (es decir, pagarán un precio más bajo que el precio medio ponderado). Vamos a obtener lo que hubiera pagado el comprador Delta (δ):

- 15 millones al 97'44% (precio medio ponderado) = 14.616.000€
- 5 millones al 97'44% (en vez de al 97'50%) = 4.872.000€
- 35 millones al 97'25% = 34.037.500€
- 32'38 millones al 97% = 31.408.600€
- Total a pagar por Delta = 84.934.100€

Dado que las letras del tesoro son al descuento, Delta pagará, en el caso de las ofertas no competitivas y de las ofertas superiores al precio medio ponderado, el 97'44% del valor nominal (1.000€). En cambio, para las ofertas aceptadas que estén situadas por debajo del precio medio ponderado, pagará lo ofertado. Al finalizar el año de vencimiento (al tratarse en este caso de letras a 12 meses) el comprador recibirá el 100% del valor de la letra, en otras palabras, el valor nominal. Por tanto, Delta obtendrá al finalizar el año la siguiente cantidad:

$$15000000\text{€} + 5000000\text{€} + 35000000\text{€} + 32380000\text{€} = 87380000\text{€}$$

Una vez calculado cuanto tiene que pagar Delta y cuanto recibirá (independientemente de si estamos ante una subasta discriminatoria o ante una subasta de precio uniforme, la cuantía que se recibirá será la misma) hallamos el tipo de interés anual que ha obtenido Delta en esta transacción:

$$\frac{87380000 - 84934100}{84934100} \times 100 = 2'879\%$$

6. CONCLUSIONES

La solución de los juegos en forma normal, los cuales se usan para juegos estáticos con información completa, es el Equilibrio de Nash. En cambio, la solución de los juegos en forma extensiva, modelizados como juegos estáticos con información incompleta, es el Equilibrio Bayesiano de Nash.

Las subastas gozan a día de hoy de gran importancia porque se aplican a multitud de campos y, cada vez en mayor medida, sobre todo en materia de transacciones económicas.

La subasta holandesa con múltiples unidades equivale en cuanto a resultado a la subasta discriminatoria y en cuanto a estrategia a la subasta con sobre cerrado al primer precio.

El resultado de la subasta inglesa con múltiples unidades es equivalente al resultado de la subasta discriminatoria. En cambio su estrategia equivale a la subasta con sobre cerrado al segundo precio.

Según el Teorema del Ingreso Equivalente al vendedor (siempre y cuando su figura tenga una buena reputación) le es indiferente realizar un tipo u otro de subasta, pues los ingresos que obtendrá al finalizar la misma serán los mismos.

Las subastas de las letras del tesoro son subastas de múltiples unidades (bienes homogéneos) con sobre cerrado (de precio uniforme o discriminatorio), conocidas también como subasta holandesa (aunque esta denominación suele referirse a subastas de un solo bien).

Si el tipo de subasta de las letras del Tesoro Público es de precio uniforme en vez de discriminatorio, los compradores serán más agresivos a la hora de pujar (ya que saben que aunque sus pujas sean muy elevadas pagarán el precio medio ponderado, que será sensiblemente inferior) por lo que el Estado saldrá beneficiado. Por tanto, este tipo de subasta es el sistema utilizado por el Tesoro Público.

ANEXO 1

Resultado de la última subasta de las letras del tesoro (importe en millones de euros):

Plazo	3 MESES	6 MESES	9 MESES	12 MESES
Fecha subasta	19/05/2015	16/06/2015	19/05/2015	16/06/2015
Fecha vencimiento	21/08/2015	11/12/2015	19/02/2016	17/06/2016
Fecha de liquidación	22/05/2015	19/06/2015	22/05/2015	19/06/2015
Nominal solicitado	2.465,71	2.892,62	6.747,26	4.546,71
Nominal adjudicado	505,70	683,62	2.952,00	3.331,61
Nominal adjudicado (2ª vuelta)	0,00	99,77	0,00	652,93
Precio mínimo aceptado	100,007	99,935	100,000	99,723
Tipo de interés marginal	-0,025	0,135	0,000	0,275
Precio medio	100,007	99,939	100,004	99,750
Tipo de interés medio	-0,027	0,126	-0,005	0,248
Adjudicado al marginal	275,00	80,00	320,00	300,00
1er precio no admitido	100,06	99,933	100,00	99,716
Volumen peticiones a ese precio	100,00	150,00	910,00	100,00
Peticiones no competitivas	No aceptadas (0,012)	8,48	No aceptadas (0,264)	111,46
Efectivo solicitado	2.465,72	2.889,99	6.746,91	4.533,45
Efectivo adjudicado	505,73	683,19	2.952,08	3.323,03
Efectivo adjudicado (2ª vuelta)	0,00	99,71	0,00	651,30
Porcentaje de prorrateo	-	-	-	-
Ratio de cobertura	4,88	4,23	2,29	1,36
Anterior tipo marginal	-0,025	0,000	0,012	0,019

Fuente: Tesoro Público "Letras del Tesoro"

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Durá Juez, Pedro (2003): *“Teoría de subastas y reputación del vendedor”*. Comisión Nacional del Mercado de Valores, Madrid, España.
- Lawrence, M. Ausubel (2003): *“Auction Theory for the New Economy”*. Elsevier Science, University of Maryland, College Park, EEUU.
- Millán, Leonora (2006): *“Teoría de Subastas”*. Notas de clase, Universidad del Valle, Valle del Cauca, Colombia.
- Pérez, Joaquín, Jimeno, J.L. y Cerdá, Emilio (2004): *“Teoría de Juegos”*. Pearson Educación S.A., Madrid, España.
- Preston McAfee, R y McMillan, John (1987): *“Auctions and Bidding”*. Journal of Economic Literature, EEUU.
- Vijay, Krishna (2002): *“Auction Theory”*. Academic Press, Pennsylvania State University, University Park, EEUU.

Enlaces web:

- ActiBva (2012): *Deuda pública: ¿Cómo funcionan las subastas?* Disponible en: <http://www.actibva.com/magazine/productos-financieros/deuda-publica-como-funcionan-las-subastas>, [consulta: 2/5/2015].
- Angelfire (2015): *Teoría de juegos*. Disponible en: <http://www.angelfire.com/ak5/bustosfarias/clase38.pdf>, [consulta: 19/6/2015]
- CNMV (2003): *Teoría de Subastas y reputación del vendedor*. Disponible en: http://www.cnmv.es/DocPortal/Publicaciones/MONOGRAFIAS/TEORIA_SUBASTAS.PDF, [consulta: 21/6/2015]
- El blog salmón (2011): *¿Qué es la teoría de juegos?* Disponible en: <http://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia/que-es-la-teoria-de-juegos>, [consulta: 19/6/2015]
- Investor Guide (2015): *Subasta*. Disponible en: <http://www.investorguide.com/definicion/subasta.html>, [consulta: 21/4/2015].

- La Información (2010): *Cómo se subastan las Letras del Tesoro*. Disponible en: <http://finanzas-ersonales.practicopedia.lainformacion.com/inversion/como-se-subastan-las-letras-del-tesoro-11163>, [consulta: 2/5/2015].
- Subasta Total (2015): *Qué es una subasta*. Disponible en: https://www.subastatotal.com/que_subasta.asp, [consulta: 22/4/2015].
- Tesoro Público (2015): *Preguntas frecuentes*. Disponible en: <http://www.tesoro.es/deuda-publica/preguntas-frecuentes>, [consulta: 5/5/2015].
- Tesoro Público (2015): *Yo elijo Letras del Tesoro*. Disponible en: http://elijo.tesoro.es/productos_letras.html, [consulta: 22/4/2015].
- Tesoro Público (2015): *Resultado últimas subastas, Letras del Tesoro*. Disponible en: <http://www.tesoro.es/deuda-publica/subastas/resultado-ultimas-subastas/letras-del-tesoro>, [consulta: 20/6/2015]
- Universidad de Valencia (2015): *Modelos de subasta y su aplicación a los concursos*. Disponible en: http://www.uv.es/asepuma/XIII/comunica/comunica_58.pdf, [consulta: 15/6/2015].