



Universidad de Valladolid



ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES

Máster en Ingeniería Industrial

MASTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES
UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

TRABAJO FIN DE MÁSTER

ESTABILIDAD LATERAL:
MOMENTO CRÍTICO DE VUELCO

Autor: D. David García López
Tutor: D. Mariano Cacho Pérez

Valladolid, septiembre, 2018



Universidad de Valladolid



ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES

Máster en Ingeniería Industrial

MASTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES
UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

TRABAJO FIN DE MÁSTER

ESTABILIDAD LATERAL:
MOMENTO CRÍTICO DE VUELCO

Autor: D. David García López
Tutor: D. Mariano Cacho Pérez

Valladolid, septiembre, 2018

RESUMEN

En la actualidad, disponemos de programas de cálculo basados en elementos finitos, los cuales son una herramienta muy potente a la hora de realizar cálculos estructurales. El presente trabajo de fin de máster consiste en simular el comportamiento de vigas y estructuras sencillas frente al pandeo lateral para diferentes tipos de cargas y apoyos mediante el software comercial ANSYS Workbench v19.

Dicho trabajo se divide claramente en dos partes. La primera se centra en la base teórica del trabajo en la que se describen los distintos tipos de inestabilidades contemplados en el documento CTE DB SE-A (documento básico de seguridad estructural del acero del código técnico de edificación), y el método de los elementos finitos. La segunda parte se centra en el modelado y la simulación de varias aplicaciones prácticas mediante el módulo Workbench del software ANSYS. Los resultados obtenidos anteriormente se compararán con los proporcionados por el CTE.

PALABRAS CLAVE

ANSYS, PANDEO, MEF, CTE, SIMULACIÓN.

ABSTRACT

Currently, we have calculation programs based on finite elements, which are a very powerful tool for structural calculations. The present TFM consists of simulating the behavior of beams and simple structures against lateral buckling with different types of loads and supports through the commercial software ANSYS Workbench v19.

This document is divided into two parts. The first part focuses on the theoretical basis of the work in which the different types of instabilities referred to in the document CTE DB SE-A, and the finites elements method are described. The second part focuses on the modeling and simulation of several practical applications through the Workbench module of the ANSYS software. The results obtained will be compared with those provided by the CTE.

KEYWORDS

ANSYS, BUCKLING, FEM, CTE, SIMULATION.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1-INTRODUCCIÓN	1
1.2-OBJETIVOS	2
1.3-ESTRUCTURA DEL TRABAJO	2
1.4-CONTENIDO ADICIONAL	3
Capítulo 2. ESTADOS LÍMITE ÚLTIMOS	5
2.1-PANDEO A COMPRESIÓN.....	5
2.1.1-LONGITUD DE PANDEO	7
2.1.2-LIMITACIÓN DE LA TEORÍA DE EULER.....	8
2.2-PANDEO LATERAL	14
2.3-PANDEO FLEXO-TORSIÓN	20
2.4-PANDEO EN PILARES DE EDIFICIOS.....	20
Capítulo 3. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	23
3.1-INTRODUCCIÓN	23
3.2-HISTORIA.....	24
3.3-APLICACIONES.....	25
3.4-FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DEL MÉTODO	26
3.5-PANDEO POR COMPRESIÓN	28
3.6-VENTAJAS E INCONVENIENTES	29
Capítulo 4. SISTEMAS CAD/CAE	31
4.1-SISTEMAS CAD	31
4.2-SISTEMAS CAE.....	32
4.3-ANSYS.....	33
4.3.1-STATIC STRUCTURAL.....	36
4.3.2-EIGENVALUE BUCKLING.....	58
Capítulo 5. APLICACIONES PRÁCTICAS	61
5.1-MOMENTO CONSTANTE ($\Psi=1$).....	62
5.2-MOMENTO LINEAL ($\Psi=0$)	66
5.3-MOMENTO LINEAL ($\Psi=-1$)	70
5.4-CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA (CASO I)	73

5.5-CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA (CASO II)	78
5.6-CARGA PUNTUAL (CASO I)	82
5.7-CARGA PUNTUAL (CASO II)	87
5.8-CARGA PUNTUAL EN VOLADIZO	91
5.9-CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN VOLADIZO	96
5.10-PÓRTICO DE LEE.....	100
Capítulo 6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS.....	105
6.1-CONCLUSIONES.....	105
6.2-LÍNEAS FUTURAS.....	106
BIBLIOGRAFÍA.....	107
ANEXOS.....	109
ANEXO A-NOTACIÓN.....	109
ANEXO B-TABLAS PANDEO.....	111
ANEXO C-ACEROS Y PERFILES ESTRUCTURALES.....	113
C.1-ACEROS ESTRUCTURALES	113
C.2-PERFILES ESTRUCTURALES	114
ANEXO D-TABLAS MOMENTO CRÍTICO.....	117

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Barra de Euler	6
Figura 2.2: Valores del coeficiente de longitud de pandeo	8
Figura 2.3: Modos de pandeo	9
Figura 2.4: Curva de pandeo	10
Figura 2.5: Curvas europeas de pandeo	10
Figura 2.6: Valores de a y b	11
Figura 2.7: Pandeo lateral	14
Figura 2.8: Viga sometida a flexión	15
Figura 2.9: Vistas pandeo lateral.....	16
Figura 2.10: Giro en Y y alabeo	17
Figura 2.11: Coeficientes de distribución.....	21
Figura 2.12: Coeficiente de longitud para pórticos.....	21
Figura 3.1: Ejemplo de discretización	23
Figura 3.2: Método que utilizaron Arquímedes y Liu Hui para hallar π	24
Figura 3.3: Elemento triangular	26
Figura 3.4: Función N_i	27
Figura 4.1: Interfaz Usuario ANSYS WORKBENCH.....	35
Figura 4.2: Static Structural	36
Figura 4.3: Interfaz edición de materiales.....	37
Figura 4.4: Interfaz de usuario de DesignModeler.....	38
Figura 4.5: Interfaz de usuario de Mechanical.....	40
Figura 4.6: Relevancia -100 (izquierda) y relevancia 100 (derecha)	41
Figura 4.7: Adaptive, curvature, proximity y uniform.....	42
Figura 4.8: Transición rápida a la izquierda y transición lenta a la derecha	42
Figura 4.9: Ángulo fino (izquierda) y ángulo grueso (derecha).....	43
Figura 4.10: Ángulo 90° (izquierda) y ángulo 20 (derecha)	43
Figura 4.11: Num Cells Across Gap=5.....	43

Figura 4.12: Parámetros para Size Function	44
Figura 4.13: Barra de herramientas contextual	45
Figura 4.14: Árbol	47
Figura 4.15: Barra de herramientas contextual	47
Figura 4.16: Interfaz con Setup finalizado.....	51
Figura 4.17: Barra de herramientas contextual	52
Figura 4.18: Tensiones principales	53
Figura 4.19: Círculo de Mohr	53
Figura 4.20: Gráfica Esfuerzo/Deformación unitaria	54
Figura 4.21: Carpeta SOLUTION resuelta	55
Figura 4.22: Interfaz Gráfica RESULTS.....	55
Figura 4.23: Barra herramientas contextual	56
Figura 4.24: Vista Exterior, IsoSurfaces y Capped IsoSurfaces.....	56
Figura 4.25: Smooth, Bands e IsoLines.....	57
Figura 4.26: No Wireframe, Show Undeformed Model y Show Elements	57
Figura 4.27: Graphics.....	58
Figura 4.28: Relación Static Structural/Eigenvalue Buckling.....	59
Figura 4.29: Autovalores de pandeo	59
Figura 5.1: Momento positivo aplicado en el extremo A y momento negativo aplicado en el extremo B ($\psi=1$).....	62
Figura 5.2: Modo de pandeo para $\psi=1$	64
Figura 5.3: Comparación entre momentos resistentes para $\psi=1$	66
Figura 5.4: Momento aplicado en el extremo A ($\psi=0$)	66
Figura 5.5: Modo de pandeo para $\psi=0$	68
Figura 5.6: Comparación entre momentos resistentes para $\psi=0$	69
Figura 5.7: Momentos iguales aplicados en los extremos ($\psi=-1$).....	70
Figura 5.8: Modo de pandeo para $\psi=-1$	71
Figura 5.9: Comparación entre momentos resistentes para $\psi=-1$	72
Figura 5.10: Carga uniformemente distribuida con apoyos en horquilla	73

Figura 5.11: Modo de pandeo para una carga uniformemente distribuida con apoyos en horquilla	75
Figura 5.12: Carga uniformemente distribuida resistente aplicada en el ala superior, ala inferior y centroide con apoyos en horquilla	76
Figura 5.13: Comparación carga uniformemente distribuida resistente con apoyos en horquilla	77
Figura 5.14: Carga uniformemente distribuida con apoyos empotrados	78
Figura 5.15: Modo de pandeo para una carga uniformemente distribuida con apoyos empotrados.....	80
Figura 5.16: Comparación carga uniformemente distribuida resistente con apoyos empotrados	81
Figura 5.17: Carga puntual centrada con apoyos en horquilla	82
Figura 5.18: Modo de pandeo para una carga puntual centrada con apoyos en horquilla.....	84
Figura 5.19: Carga puntal resistente aplicada en el ala superior, inferior y centroide con apoyos en horquilla	85
Figura 5.20: Comparación carga puntual resistente con apoyos en horquilla	86
Figura 5.21: Carga puntual centrada con apoyos empotrados	87
Figura 5.22: Modo de pandeo para una carga puntual centrada con apoyos empotrados	89
Figura 5.23: Comparación carga puntual resistente con apoyos empotrados	90
Figura 5.24: Carga puntual en voladizo	91
Figura 5.25: Modo de pandeo para una carga puntual en voladizo	93
Figura 5.26: Carga puntual resistente aplicada en el ala superior, inferior y centroide en voladizo	94
Figura 5.27: Comparación carga puntual resistente para una viga en voladizo	95
Figura 5.28: Carga uniformemente distribuida en voladizo	96
Figura 5.29: Modo de pandeo para una carga uniformemente distribuida en voladizo	98
Figura 5.30: Comparación carga uniformemente distribuida resistente para una viga en voladizo	99
Figura 5.31: Pórtico de Lee.....	100
Figura 5.32: Pandeo Lateral (Modo 1).....	104
Figura 5.34: Pandeo en el plano de la estructura (modo 3).....	104
Figura C.1: Perfiles conformados en frío	115

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1: Coeficiente C	13
Tabla 2.2: Coeficiente de imperfección elástica	15
Tabla 2.3: Valor de C1 y C2 para Ka=1	19
Tabla 2.4: Rigidez eficaz	22
Tabla 5.1: Momento crítico y momento resistente según CTE para $\psi=1$	63
Tabla 5.2: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para $\psi=1$	65
Tabla 5.3: Momento crítico y momento resistente según el CTE para $\psi=0$	67
Tabla 5.4: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para $\psi=0$	68
Tabla 5.5: Momento crítico y momento resistente según CTE para $\psi=-1$	71
Tabla 5.6: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para $\psi=-1$	72
Tabla 5.7: Momento crítico y momento resistente según CTE para una carga uniformemente distribuida con apoyos en horquilla	74
Tabla 5.8: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para una carga uniformemente distribuida con apoyos en horquilla	75
Tabla 5.9: Momento crítico y momento resistente según CTE para una carga uniformemente distribuida con apoyos empotrados	79
Tabla 5.10: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para una carga uniformemente distribuida con apoyos empotrados	80
Tabla 5.11: Momento crítico y momento resistente según CTE para una carga puntual centrada con apoyos en horquilla	83
Tabla 5.12: Momento crítico y momento resistente para una carga puntual centrada con apoyos en horquilla	84
Tabla 5.13: Momento crítico y momento resistente según CTE para una carga puntual centrada con apoyos empotrados.....	88
Tabla 5.14: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para una carga puntual centrada con apoyos empotrados	89
Tabla 5.15: Momento crítico y momento resistente para una carga puntual en voladizo.....	92
Tabla 5.16: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para una carga puntual en voladizo	93
Tabla 5.17: Momento crítico y momento resistente según CTE para una carga uniformemente distribuida en voladizo	97

Tabla 5.18: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para una carga uniformemente distribuida en voladizo	98
Tabla 5.19: Comparación de carga distribuida crítica por compresión	102
Tabla 5.20: Comparación de carga distribuida crítica lateral	102
Tabla B.1: Curvas de pandeo.....	111
Tabla B.2: Valores del coeficiente de pandeo	112
Tabla C.1: Características mecánicas de aceros	113
Tabla C.2: Propiedades IPE	116
Tabla D.1: Momento crítico para vigas con apoyos en horquilla con $\Psi=1$	117
Tabla D.2: Momento crítico para vigas con apoyos en horquilla con $\Psi=0$	118
Tabla D.3: Momento crítico para vigas con apoyos en horquilla con $\Psi=-1$	119
Tabla D.4: Momento crítico para vigas con apoyos en horquilla con carga distribuida	120
Tabla D.5: Momento crítico para vigas con apoyos empotrados con carga distribuida.....	121
Tabla D.6: Momento crítico para vigas con apoyos en horquilla con carga puntual centrada	122
Tabla D.7: Momento crítico para vigas con apoyos empotrados con carga puntual centrada	123
Tabla D.8: Momento crítico para vigas en voladizo con carga puntual en el extremo.....	124
Tabla D.9: Momento crítico para vigas en voladizo con carga distribuida	125



Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

1.1-INTRODUCCIÓN

*“Un edificio tiene dos vidas. La que imagina su creador y la vida que tiene. Y no siempre son iguales”*¹. Desde tiempos inmemoriales, el ser humano ha querido erigirse como ser superior en nuestro planeta respecto a las demás especies. Se podría decir que tiene la necesidad de mirar desde lo alto y observar a todos los seres vivos con arrogancia. Esto se podría aplicar también con sus congéneres. Si esto lo extrapolamos al mundo ingenieril y estructural, es innegable la necesidad de diseñar y construir edificios y estructuras cada vez más altas. En un principio podría parecer que la expansión vertical se debe a problemas urbanísticos de diversa índole, pero en realidad hay un anhelo del hombre por la altura, por alcanzar el cielo con sus obras. Tenemos a nuestra entera disposición la tecnología y los conocimientos para crear rascacielos, así que, ¿por qué no hacerlos?

Tecnología y conocimiento, tan cerca y tan lejos a la vez. ¿Tenían los egipcios tecnología para construir las pirámides de Giza? Seguramente no, pero consiguieron construirlas gracias a sus conocimientos. Ahora tenemos ambos, por lo que podríamos implementar esto para crear gigantescas estructuras, pero no podemos arriesgarnos a construirlas y que se vengan abajo. Ahí es donde nos valemos del avance de la tecnología. No hablamos de la tecnología para construirlos, que también, sino de la tecnología que nos permite simular dichas estructuras. Hasta hace no mucho, e incluso en la actualidad, estas simulaciones se realizan con maquetas, lo cual es tedioso en esfuerzo y en tiempo por lo que a veces no compensa. No compensa económicamente hablando, claro. Poderoso caballero es don dinero.

Así que para solucionar esto, tenemos a nuestra disposición multitud de métodos de cálculo y simulación (conocimientos). Pero resolver estos problemas manualmente implicaría más tiempo que realizar maquetas y simulaciones. Es aquí donde aparece nuestra amiga la computadora (tecnología) para hacernos la vida mucho más fácil. Además, el avance de las mismas es vertiginoso por lo que cada vez nos facilitarán más el trabajo. Uno de esos métodos de cálculo estructural es el MEF o método de los elementos finitos. Sobre este tema versa este trabajo, conocer y estudiar diferentes modelos de barras y comparar el resultado teórico sobre el papel con los datos que nos ofrecerán las herramientas computacionales.

¹ Frase del afamado arquitecto Rem Koolhaas.



1.2-OBJETIVOS

Los objetivos de este trabajo son varios:

- Comparar resultados teóricos con simulaciones en elementos estructurales en lo relativo a las inestabilidades por pandeo lateral.
- Comprender los diferentes parámetros asociados al pandeo lateral.
- Durante la carrera y el máster he utilizado varios programas similares de diseño y modelado y me gustaría especializarme en un futuro. Lo que busco con este trabajo es la introducción en el uso de nuevos softwares de simulación y modelado ya que ANSYS es muy importante a nivel industrial.
- Por último, se espera que este escrito sirva como recurso de carácter pedagógico.

1.3-ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Este trabajo está dividido en varios capítulos, en los cuales la información se aporta progresivamente para una mayor comprensión del mismo. En el texto se introducen gran cantidad de imágenes necesarias para el entendimiento del mismo, haciendo muy visual el trabajo.

El capítulo 2 se centra en los tipos de inestabilidades que se analizarán en este trabajo, es decir, los tipos de pandeos y diferentes métodos para calcular en qué momento aparecerán. Todo ello en base al código técnico de edificación (CTE).

El capítulo 3 se explica todo lo relacionado con los elementos finitos. Se explicará su significado físico, como se desarrolló y su desarrollo matemático para aplicaciones estructurales.

El capítulo 4 sirve de nexo de unión entre los sistemas de modelado y de análisis, es decir entre los sistemas CAD y CAE. Se ahonda en el software ANSYS Workbench. En concreto en se describen minuciosamente todas las posibilidades de 2 módulos de simulación: *Static Structural* y *Eigenvalue Buckling*.

En el capítulo 5 se realizan un total de 10 aplicaciones prácticas. En ellas se compararán los resultados obtenidos con el software con los resultados



teóricos que nos ofrece el CTE. Al final del trabajo se desarrollan las conclusiones, líneas futuras y los anexos.

1.4-CONTENIDO ADICIONAL

Además del presente escrito, se adjuntan:

- Archivos Excel con todos los cálculos
- Los archivos generados por ANSYS en las simulaciones





Capítulo 2. ESTADOS LÍMITE ÚLTIMOS

Los estados límite últimos o ELU son situaciones que pueden llegar a ocurrir cuando una estructura no cumple con algún requisito. Constituyen un riesgo para las personas, ya sea porque producen una puesta fuera de servicio del edificio o cualquier tipo de colapso. Hay varias causas:

- ❖ Desequilibrio
- ❖ **Inestabilidad**
- ❖ Rótulas plásticas
- ❖ Abolladura
- ❖ Agotamiento
- ❖ Rotura frágil
- ❖ Fatiga...

En este trabajo se estudiarán las inestabilidades o también llamadas pandeos. El pandeo es un fenómeno de inestabilidad en elementos esbeltos que puede ser provocado por compresión, flexión o flexocompresión en el que, para cierto valor crítico de carga, flexa súbitamente y aparecen grandes desplazamientos transversales para incrementos muy pequeños de la carga. Como los elementos estructurales tienen una esbeltez considerable, su diseño suele estar condicionado por estas inestabilidades. En los siguientes apartados se mostrarán los métodos más destacables para calcular las cargas críticas de pandeo según el CTE.

2.1-PANDEO A COMPRESIÓN

En la mayoría de los casos, las vigas y elementos estructurales trabajan tanto a flexión como a compresión, pero primeramente explicaremos el caso de vigas a compresión. Se pueden dividir los tipos de vigas en vigas cortas y vigas esbeltas. En las vigas cortas, la esbeltez es tan pequeña que no se llega a alcanzar el pandeo ya que primero aparece la plastificación. Por tanto, en ese caso hay que tener en cuenta la resistencia plástica:

$$N_{pl,Rd} = A \frac{f_y}{1,05} \quad 2.1)$$

El valor A corresponderá al área de la sección para las secciones de tipo 1, 2 y 3. Sin embargo para secciones de tipo 4 será el área efectiva.

Las vigas esbeltas, a su vez pueden dividirse en: muy esbeltas y de esbeltez media. En vigas muy esbeltas el pandeo elástico es dominante, mientras que en vigas de esbeltez media esto no se puede asegurar (pandeo anelástico).

La carga crítica elástica de Euler² se define como el valor de la carga axial que hace que una barra sometida a compresión pase a trabajar a flexión y axil. Cuando esto ocurre se le llama pandeo por compresión. Euler tuvo en cuenta las siguientes hipótesis:

- Deformaciones pequeñas
- Se cumplen la ley de Hooke (la relación entre esfuerzo y deformación unitaria siempre es constante y de valor el módulo de Young) y la hipótesis de Navier-Bernouilli (dos secciones transversales inicialmente planas y paralelas siguen siendo planas, aunque no paralelas a lo largo del proceso de deformación, incluso en la región plástica)

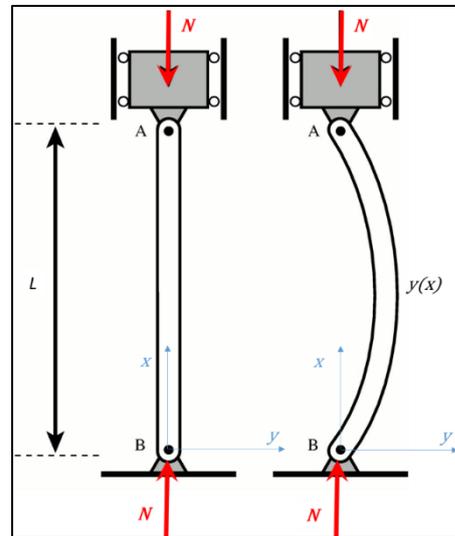


Fig. 2.1: Barra de Euler

- El eje de la viga es recto y la carga N de compresión está centrada
- Extremos fijos articulados
- Propiedades constantes a lo largo de la barra (A, E, I)
- Sin tensiones residuales

Partiendo de las ecuaciones de comportamiento y de las ecuaciones de compatibilidad para barras que no sufren torsión, tenemos:

$$\frac{M_z}{EI} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad \rightarrow \quad \frac{N \cdot y(x)}{EI} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad 2.2)$$

Además, definimos:

$$k^2 = \frac{N}{EI} \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + k^2 \cdot y = 0 \quad \rightarrow \quad y = A \cdot \text{sen}(k \cdot x) + B \cdot \text{cos}(k \cdot x) \quad 2.3)$$

² Leonhard Paul Euler (15 de abril de 1707 - 18 de septiembre de 1783, fue un matemático, físico y filósofo suizo. Se trata una de las mentes más privilegiadas de todos los tiempos. Dentro de su legado podemos encontrar las fórmulas, los polinomios, las constantes o las líneas de Euler. También las integrales eulerianas, el número 'e', la teoría de grafos y el teorema de los poliedros, la característica Euler del espacio entre muchos otros.



La cual es una ecuación diferencial de segundo grado que, teniendo en cuenta las condiciones de contorno (extremos fijos), para que la solución no sea la trivial tenemos que:

$$kL = n \cdot \pi \quad \rightarrow \quad y = A \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{L} x \right) \quad 2.4)$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación 2.3 en la ecuación 2.4 y asignando “n=1” ya que nos interesa la primera carga crítica, nos queda:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad 2.5)$$

Que es la carga crítica de pandeo para una barra que trabaja a compresión. Las cargas críticas asociadas a valores de n distintos de 1, carecen de sentido físico. El momento de inercia necesario será el del eje débil, es decir el de menor valor.

Como se observa en la ecuación 2.4, la expresión de la deformada queda indeterminada ya que no podemos hallar la constante A. Esto ocurre porque hemos usado como valor de la curvatura $1/\rho = \ddot{y}$ en vez del valor real:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad 2.6)$$

Pero como lo que nos importa es calcular la carga crítica nos valdrá la aproximación anteriormente tomada.

2.1.1-LONGITUD DE PANDEO

En este apartado se explicará qué ocurre cuando la barra de Euler tiene apoyos distintos a los anteriores. Aparece el concepto de longitud de pandeo, que es la distancia entre puntos de inflexión de la mayor deformación del pandeo.

$$L_k = \beta L$$

Para calcular el valor del coeficiente de longitud de pandeo β bastaría con hacer el desarrollo matemático anterior, pero teniendo en cuenta las nuevas condiciones de contorno. En la siguiente imagen se observan los casos típicos que suelen estudiarse:

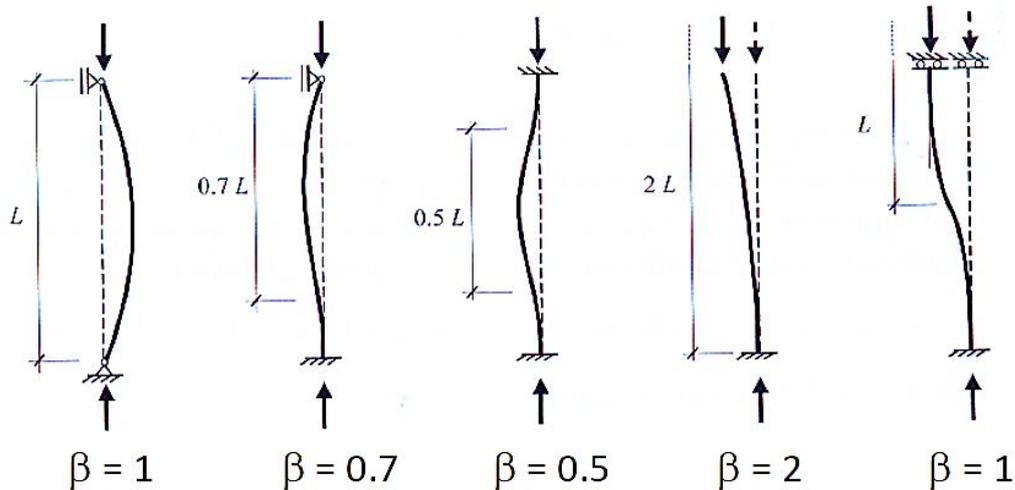


Fig. 2.2: Valores del coeficiente de longitud de pandeo

Para englobar todos los casos en una misma fórmula, nos quedará:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2} \quad 2.7)$$

2.1.2-LIMITACIÓN DE LA TEORÍA DE EULER

En la realidad no podemos considerar la ecuación 2.7 como exacta ya que siempre existen factores que alteran el resultado. Estos factores pueden ser: módulo de Young no constante, excentricidad de la carga, imperfecciones geométricas y tensiones residuales. Para poder realizar un estudio exhaustivo se utiliza un método basado en ensayos. Antes de explicar el procedimiento se explicarán nuevos conceptos que serán de utilidad. En primer lugar, tenemos la tensión crítica de Euler, que no es más que la tensión de compresión cuando actúa la carga crítica.

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} \quad 2.8)$$

También tenemos el radio de giro de la sección en el eje débil y la esbeltez:

$$i = \frac{I}{A} \quad 2.9)$$

$$\lambda = \frac{L_k}{i} \quad 2.10)$$

Por lo que sustituyendo las ecuaciones 2.8, 2.9 y 2.10 en la ecuación 2.7 tendremos la función de la curva de pandeo:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{2.11}$$

Se puede apreciar que, a mayor esbeltez de la columna, la carga de pandeo será menor, por lo que interesará siempre una esbeltez mínima. El problema es que cuando se llega a una esbeltez demasiado pequeña aparecería fallo elástico. Este límite se calcula igualando el límite elástico f_y a la tensión crítica de Euler. Así que tendremos una expresión tal que así:

$$\lambda_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_y}} \tag{2.12}$$

La esbeltez crítica para aceros S275 tiene un valor de 86,8. Además, la teoría de Euler sólo será válida para tensiones menores que la del límite proporcional. Este valor suele estar en torno a 97 para aceros S275. En la zona de pandeo anelástico se tiene que utilizar el módulo de elasticidad tangente³ en vez del módulo de elasticidad típico.

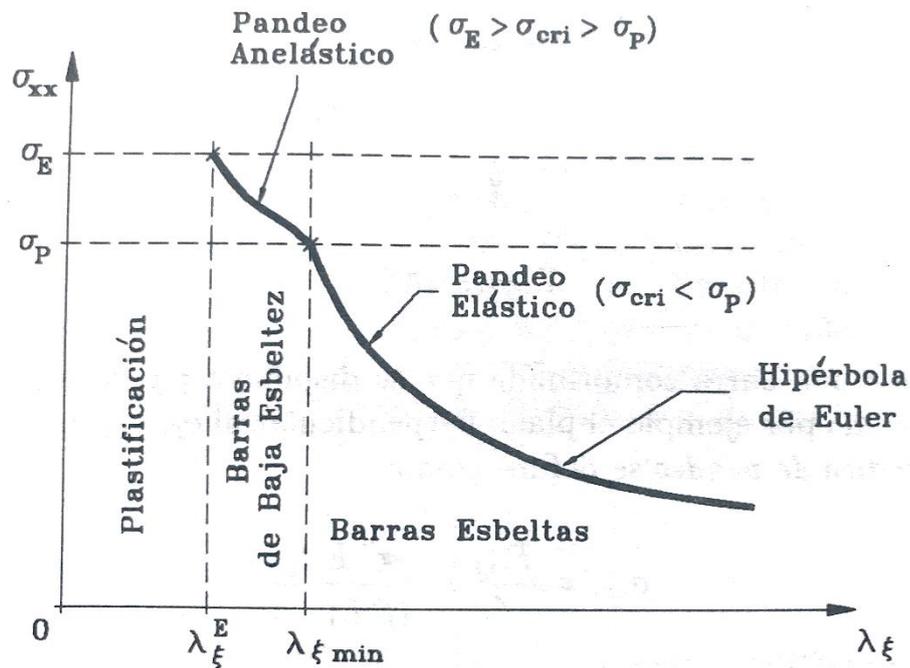


Fig. 2.3: Modos de pandeo. [Fuente: A. Foces]

³ Valor de la pendiente del diagrama tensión-deformación en el punto correspondiente de estudio

A continuación, modificaremos la curva de pandeo dividiendo la tensión crítica entre el límite elástico f_y , a esto lo llamaremos coeficiente de reducción de pandeo χ . También dividiremos la esbeltez entre la esbeltez crítica, lo llamaremos esbeltez reducida $\bar{\lambda}$. Nos quedaría lo siguiente:

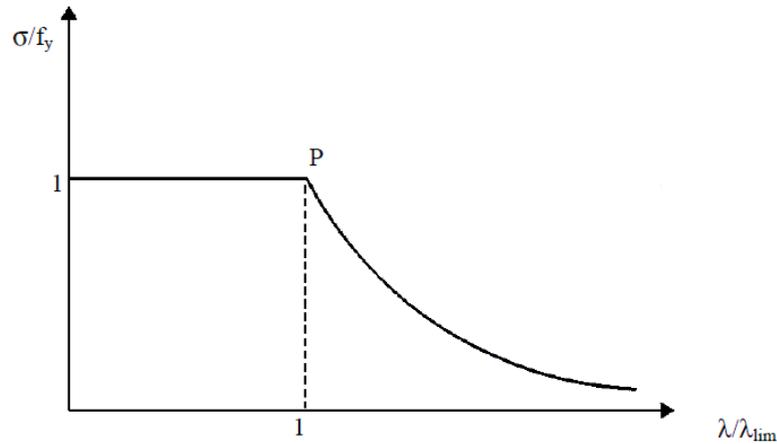


Fig. 2.4: Curva de pandeo

Este tipo de curvas son las que se utilizan en el procedimiento habitual, pero derivadas de ensayos. En la realidad, en la zona de esbeltez media suelen aparecer dispersiones alejándose de la curva teórica de pandeo, por lo que se utilizan 5 curvas distintas dependiendo del tipo de sección, dirección de pandeo, espesores, tipo de acero y proceso de fabricación.

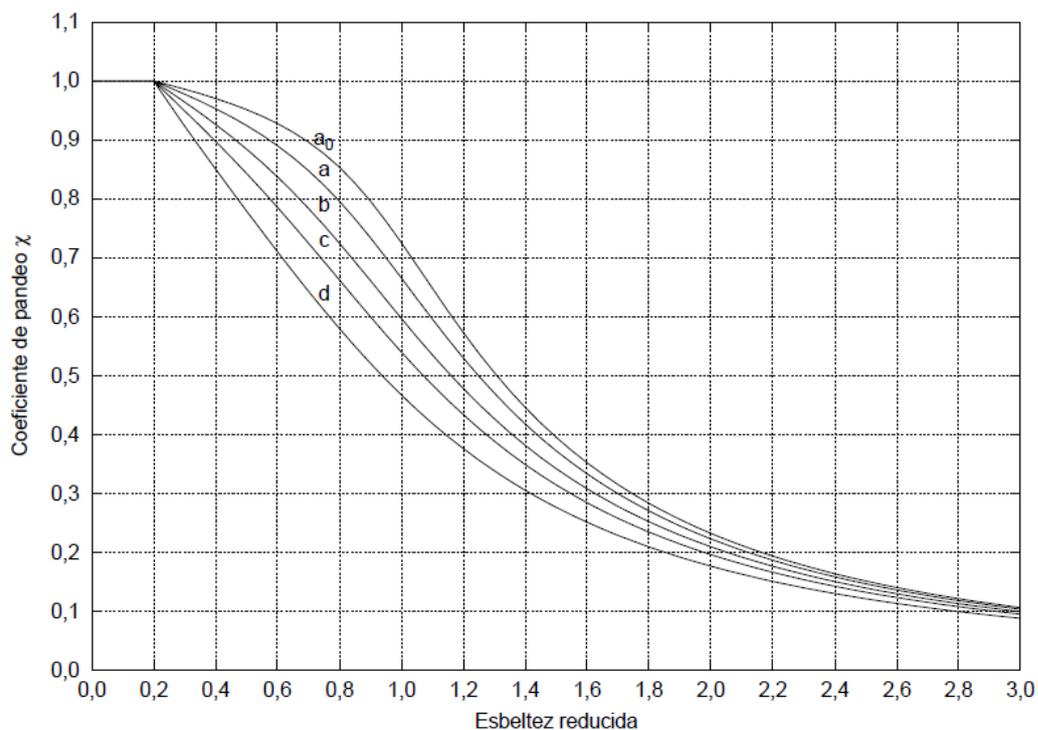


Fig. 2.5: Curvas europeas de pandeo. [Fuente: CTE DB SE-A]

El procedimiento de comprobación de pandeo sería el siguiente:

1. Calcular la esbeltez reducida $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} \quad 2.13)$$

2. Seleccionar la curva de pandeo (tabla B.1 ANEXO B)
3. Obtención del coeficiente de pandeo χ en la figura 2.5
4. Cálculo de la resistencia a pandeo $N_{b,Rd}$:

$$N_{b,Rd} = \chi A \frac{f_y}{1,05} \quad 2.14)$$

5. Comprobar que $N_{ef,Ed}$ es menor que la carga crítica de pandeo.

Este método se puede resolver mediante expresiones analíticas o tablas (ANEXO B). Cabe destacar que el método utilizado serviría para axiles y secciones constantes.

2.1.2.1-Esfuerzos axiles variables

Si el problema tiene sección constante pero el esfuerzo axil es variable (varía de forma lineal o parabólica a lo largo del eje longitudinal), utilizaremos el método anterior teniendo en cuenta el mayor momento axil actuante y la siguiente longitud de pandeo:

$$L_k = L \sqrt{\frac{1 + a \frac{N_{min}}{N_{max}}}{b}} \quad 2.15)$$

Siendo los valores de a y b los que se muestran a continuación:

a) variación lineal, máximo en el centro:	doblemente articulada:	a = 2,18	b = 3,18
	doblemente empotrada:	a = 0,93	b = 7,72
b) variación parabólica, máximo en el centro:	doblemente articulada:	a = 1,09	b = 2,09
	doblemente empotrada:	a = 0,35	b = 5,40
c) ménsula con máximo en el empotramiento:	variación lineal:	a = 2,18	b = 3,18
	variación parabólica:	a = 1,09	b = 2,09
e) variación lineal, máximo en un extremo:	doblemente articulada:	a = 0,88	b = 1,88
	doblemente empotrada:	a = 0,93	b = 7,72
	articulada en el mínimo y empotrada en el máximo:	a = 1,65	b = 5,42
	articulada en el máximo y empotrada en el mínimo:	a = 0,51	b = 3,09

Fig. 2.6: Valores de a y b. [Fuente: CTE DB SE-A]



2.1.2.2-Sección variable

Para un problema de esfuerzo axial constante, biarticulado y con sección variable tendremos también la posibilidad de utilizar el método de los coeficientes parciales. Para ello utilizaremos un momento de inercia media ponderado y una nueva esbeltez:

$$I_k = cI_{m\acute{a}x} \quad 2.16)$$

$$\lambda = L \sqrt{\frac{A_{med}}{I_k}} \quad 2.17)$$

Con la nueva esbeltez hallaremos la esbeltez reducida dividiéndola por la esbeltez crítica. Después se seguiría el método anterior teniendo en cuenta que para hallar la carga crítica de pandeo (ecuación 2.14), el área a utilizar será el área media. Para calcular “c” entraremos en la tabla 2.1 con:

$$v = \sqrt{\frac{I_{m\acute{i}n}}{I_{m\acute{a}x}}} \quad 2.18)$$

Variación de la sección	$\frac{v}{a}$	Coeficiente c siendo $v = \sqrt{I_{\min} / I_{\max}}$									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	0,0	0,121	0,220	0,316	0,412	0,509	0,606	0,703	0,801	0,900	1,000
	0,1	0,140	0,247	0,348	0,447	0,542	0,636	0,729	0,820	0,911	1,000
	0,2	0,166	0,284	0,391	0,490	0,585	0,675	0,761	0,844	0,923	1,000
	0,3	0,203	0,333	0,446	0,547	0,639	0,722	0,800	0,871	0,938	1,000
	0,4	0,257	0,403	0,521	0,620	0,705	0,779	0,844	0,902	0,953	1,000
	0,5	0,340	0,502	0,620	0,771	0,784	0,843	0,892	0,933	0,969	1,000
	0,6	0,477	0,641	0,745	0,815	0,867	0,906	0,936	0,961	0,982	1,000
	0,7	0,697	0,814	0,875	0,913	0,938	0,957	0,971	0,983	0,992	1,000
	0,8	0,922	0,951	0,966	0,976	0,983	0,988	0,992	0,995	0,998	1,000
	$\geq 0,9$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	0,0	0,259	0,389	0,493	0,583	0,665	0,740	0,810	0,877	0,940	1,000
	0,1	0,308	0,448	0,555	0,643	0,719	0,786	0,846	0,902	0,953	1,000
	0,2	0,371	0,520	0,625	0,707	0,775	0,832	0,881	0,925	0,965	1,000
	0,3	0,453	0,605	0,703	0,775	0,830	0,867	0,914	0,947	0,975	1,000
	0,4	0,558	0,702	0,784	0,841	0,883	0,915	0,942	0,965	0,984	1,000
	0,5	0,686	0,801	0,861	0,900	0,927	0,948	0,965	0,979	0,990	1,000
	0,6	0,819	0,890	0,925	0,946	0,962	0,973	0,982	0,989	0,995	1,000
	0,7	0,925	0,954	0,968	0,978	0,984	0,989	0,992	0,996	0,998	1,000
	0,8	0,982	0,988	0,992	0,994	0,996	0,997	0,998	0,999	0,999	1,000
	$\geq 0,9$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	-	0,273	0,402	0,506	0,595	0,676	0,749	0,817	0,882	0,942	1,000
	-	0,536	0,652	0,728	0,786	0,834	0,875	0,911	0,943	0,973	1,000
	0,9	0,221	0,626	0,846	0,924	0,958	0,976	0,986	0,993	0,997	1,000
	0,8	0,060	0,220	0,421	0,605	0,743	0,837	0,902	0,946	0,977	1,000
	0,7	0,027	0,105	0,221	0,395	0,502	0,635	0,753	0,852	0,933	1,000
	0,6	0,016	0,061	0,134	0,231	0,345	0,472	0,606	0,741	0,873	1,000
	0,5	0,010	0,040	0,090	0,160	0,250	0,360	0,490	0,640	0,810	1,000

Tabla 2.1: Coeficiente c . [Fuente: CTE DB SE-A]

2.2-PANDEO LATERAL

El pandeo lateral o vuelco, es un tipo de inestabilidad que aparece en vigas sometidas a flexión y que no están inmovilizadas en su plano. Lo que ocurre es que la parte comprimida de la viga pandea saliéndose del plano de flexión. Se da con mayor asiduidad en vigas con baja rigidez a torsión (perfiles abiertos de pared delgada) que trabajan a flexión en su plano fuerte.

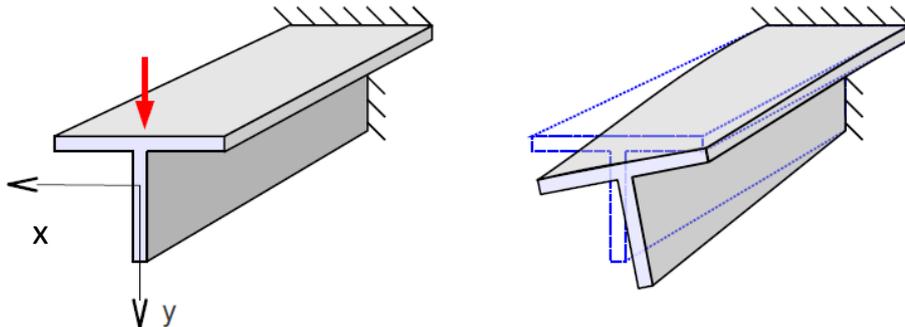


Fig. 2.7: Pandeo lateral

Si consideramos una viga sometida a flexión pura, podemos encontrar un valor crítico del momento flector con el cual pandeará lateralmente. No habrá que realizar comprobación de pandeo lateral si la distancia entre apoyos de la viga es menor que 40 veces el radio de giro mínimo de la sección. El momento flector máximo en la viga debe ser menor que:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{1,05} \quad (2.19)$$

Si la sección es de clase 1 o 2: $W_y = W_{pl,y}$, si es de clase 3: $W_y = W_{el,y}$ y si es de clase 4: $W_y = W_{ef,y}$. El factor de reducción se puede calcular de forma analítica con las fórmulas siguientes:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \quad (2.20)$$

$$\phi_{LT} = 0,5[1 + \alpha_{LT}(\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2] \quad (2.21)$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}} \quad (2.22)$$

Si la esbeltez reducida lateral $\bar{\lambda}_{LT}$ es menor que 0,4 podremos tomar $\chi_{LT} = 1$ y no se producirá el pandeo lateral. Como se puede apreciar son fórmulas

semejantes al método analítico para el pandeo a compresión. El valor del coeficiente de imperfección elástica lateral lo sacamos de la tabla 2.2:

Elemento	Límites	Curva de pandeo	α_{LT}
Perfil laminado con sección en doble T	$h/b \leq 2$	a	0,21
	$h/b > 2$	b	0,34
Elemento armado con sección en doble T	$h/b \leq 2$	c	0,49
	$h/b > 2$	d	0,76
Elementos con otras secciones	-	d	0,76

Tabla 2.2: Coeficiente de imperfección elástica. [Fuente: CTE DB SE-A]

También se podría utilizar las curvas de pandeo (figura 2.5) para hallar el factor de reducción lateral χ_{LT} gracias a la tabla 2.2 y a la ecuación 2.20. Solo nos faltaría conocer M_{cr} para resolver el problema. Para ello suponemos una viga de sección doblemente simétrica con apoyos en horquilla⁴, con momentos aplicados en sus extremos como se observa en la figura 2.8. Por lo tanto, tenemos un momento flector constante a lo largo de toda la viga.

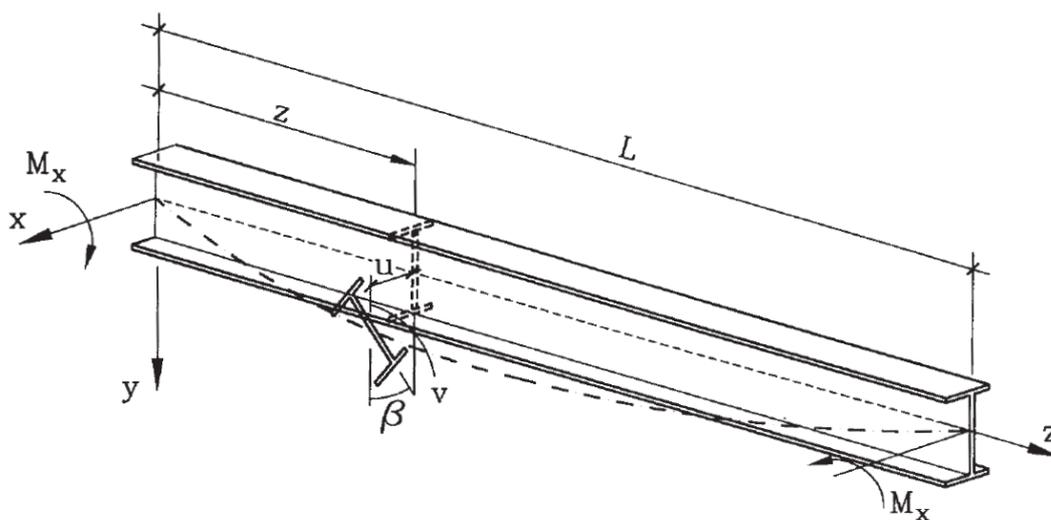


Fig. 2.8: Viga sometida a flexión

Además, tenemos en cuenta varias hipótesis: viga sin imperfecciones, material elástico lineal, pequeños desplazamientos y sección con doble simetría. En el momento del vuelco tendremos un nuevo sistema de ejes de coordenadas (ξ ,

⁴ Tipo de apoyo en el que se impide el movimiento y el giro torsional, y se permiten las rotaciones por flexión y el alabeo.

ζ, η). Por lo tanto, con ayuda de la figura 2.9 calcularemos el momento flector en cada uno de los nuevos ejes.

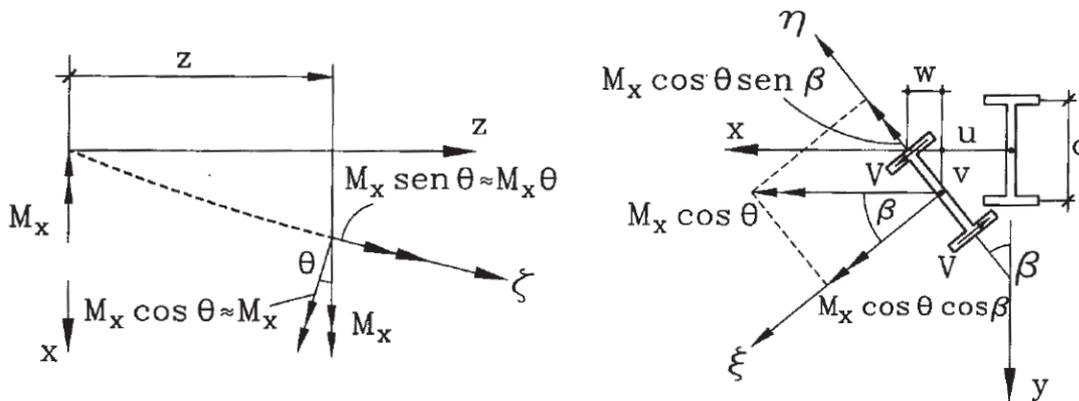


Fig. 2.9: Vistas pandeo lateral

Los nuevos momentos flectores quedan:

$$M_{\xi} = M_x \cos \theta \cos \beta \sim M_x \quad 2.23)$$

$$M_{\zeta} = M_x \sin \theta \sim \theta M_x \sim \frac{du}{dz} M_x \quad 2.24)$$

$$M_{\eta} = M_x \cos \theta \sin \beta \sim \beta M_x \quad 3.25)$$

Las ecuaciones de equilibrio para flexión en x e y:

$$EI_x \frac{d^2 v(z)}{dz^2} + M_x = 0 \quad 2.26)$$

$$EI_y \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \beta(z) M_x = 0 \quad 2.27)$$

Y para la torsión en el eje z:

$$EI_a \frac{d^3 \beta(z)}{dz^3} - GI_T \frac{d\beta(z)}{dz} + M_x \frac{du(z)}{dz} = 0 \quad 2.28)$$

Introduciendo la ecuación 2.27 en la ecuación 2.28 (diferenciando respecto de z previamente) tendremos la ecuación diferencial del pandeo lateral:

$$EI_a \frac{d^4 \beta(z)}{dz^4} - GI_T \frac{d^2 \beta(z)}{dz^2} - \frac{M_x^2}{EI_y} \beta(z) = 0 \quad 2.29)$$

Resolviendo la ecuación diferencial tendremos el momento crítico:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GI_T + \frac{\pi^2 E^2 I_y I_a}{L^2}} \quad (2.30)$$

La resistencia total que presenta el perfil al pandeo lateral debido a la flexo-torsión se divide en dos partes. Una corresponde al primer término del radical y su significado físico es la capacidad que tiene la viga para soportar la torsión pura. El segundo término está relacionado con la capacidad para resistir torsión por resistencia al alabeo de sus secciones transversales.

Para condiciones de apoyo diferentes a las estudiadas, se han utilizado métodos energéticos para conseguir una fórmula más exacta. Si se impide el giro en el eje Y se deberá introducir un factor k_y y si se impide el alabeo un factor k_a .

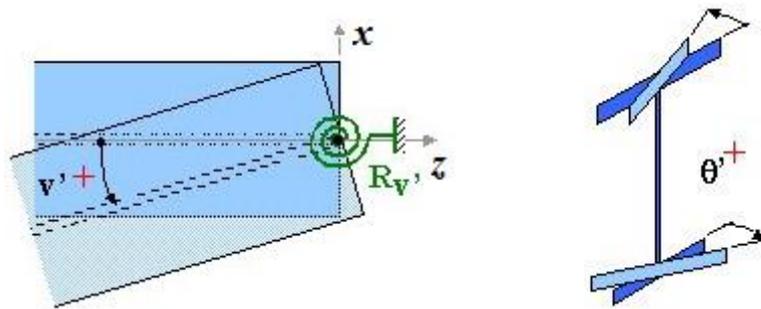


Fig. 2.10: Giro en Y (izquierda) y alabeo (derecha). [Fuente: LTBeam]

Nos quedará:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{k_y L} \sqrt{EI_y GI_T + \frac{\pi^2 E^2 I_y I_a}{(k_a L)^2}} \quad (2.31)$$

El factores k_y varía entre 0.5 para deformación impedida, 1 para deformación libre, 0.7 para deformación impedida en un extremo y libre en el otro y 2 para viga en voladizo. En condiciones normales $k_a = 1$.

Para cargas que no sean flexión pura deberemos introducir un factor C_1 que multiplica a la ecuación 2.31. Cabe destacar también la influencia del punto de aplicación de la carga. Las cargas aplicadas por encima del centroide favorecen el pandeo lateral. Por el contrario, las cargas aplicadas por debajo del centroide contrarrestan el pandeo lateral. Por lo que se introduce un nuevo factor C_2 . Para vigas de relación canto/luz pequeña este efecto se minimiza y para relaciones grandes se maximiza. Por tanto, la ecuación del momento crítico



para pandeo lateral debido a la flexotorsión, para cualquier tipo de carga y apoyo (giro en el eje z impedido en los dos extremos) queda:

$$M_{cr} = \frac{C_1\pi}{k_y L} \sqrt{EI_y G I_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EI_a}{G I_T} \left(\frac{\pi}{k_a L}\right)^2 (1 + C_2^2)} \pm \frac{C_2\pi}{k_a L} \sqrt{\frac{EI_a}{G I_T}} \right] \quad 2.32)$$

Cuando la carga se aplique en el ala superior se utilizará el signo negativo y cuando se aplique en el ala inferior utilizaremos el signo positivo. Si se aplican cargas en el centroide o momentos en los extremos el valor de C_2 será 0. Para encontrar los valores de los dos factores C_1 y C_2 , tenemos a nuestra disposición la tabla 2.3, la cual depende de la distribución del momento flector a lo largo de la barra y de los apoyos.

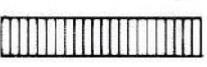
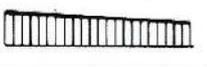
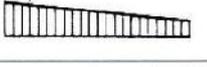
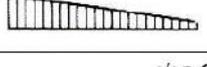
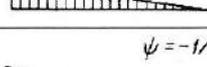
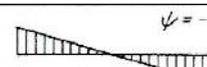
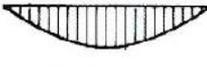
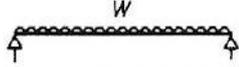
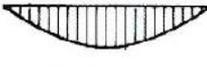
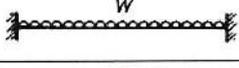
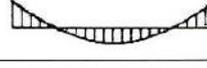
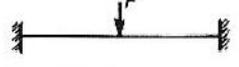
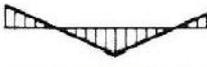
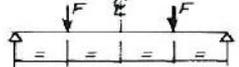
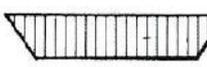
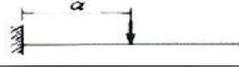
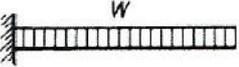
Tipo de carga y condiciones de apoyo	Diagrama de momentos flectores	Valor de k_y	Valores de coeficientes		
			C_1	C_2	C_3
	$\psi = +1$ 	1,0 0,7 0,5	1,000 1,000 1,000	-	1,000 1,113 1,114
	$\psi = +3/4$ 	1,0 0,7 0,5	1,141 1,270 1,305	-	0,998 1,565 2,283
	$\psi = +1/2$ 	1,0 0,7 0,5	1,323 1,473 1,514	-	0,992 1,556 2,271
	$\psi = +1/4$ 	1,0 0,7 0,5	1,563 1,739 1,788	-	0,977 1,531 2,235
	$\psi = 0$ 	1,0 0,7 0,5	1,879 2,092 2,150	-	0,939 1,473 2,150
	$\psi = -1/4$ 	1,0 0,7 0,5	2,281 2,538 2,609	-	0,855 1,340 1,957
	$\psi = -1/2$ 	1,0 0,7 0,5	2,704 3,009 3,093	-	0,676 1,059 1,546
	$\psi = -3/4$ 	1,0 0,7 0,5	2,927 3,009 3,093	-	0,366 0,575 0,837
	$\psi = -1$ 	1,0 0,7 0,5	2,752 3,063 3,149	-	0,000 0,000 0,000
		1,0 0,5	1,132 0,972	0,459 0,304	0,525 0,980
		1,0 0,5	1,285 0,712	1,562 0,652	0,753 1,070
		1,0 0,5	1,365 1,070	0,553 0,432	1,730 3,050
		1,0 0,5	1,565 0,938	1,257 0,715	2,540 4,800
		1,0 0,5	1,046 1,010	0,430 0,410	1,120 1,890
		1,0 $k_x=2$	$1,28/\alpha$	0,64	
		1,0 $k_x=2$	2,05		

Tabla 2.3: Valor de C_1 y C_2 para $k_a = 1$. [Fuente: Argüelles]

2.3-PANDEO FLEXO-TORSIÓN

Pueden aparecer inestabilidades cuando actúan axiles y flexión a la vez. Incluso en ocasiones, si el centro de esfuerzos cortantes no coincide con el centro de gravedad de la sección puede aparecer un pandeo por flexo-torsión. La flexión es la que provoca la torsión.

En primer lugar, habría que calcular la tensión combinada máxima:

$$\sigma_{com,Ed} = \frac{M_{Ed}}{W_{com}} - 0,8 \frac{N_{t,Ed}}{A} \quad (2.33)$$

M_{Ed} es el momento flector máximo en la viga, $N_{t,Ed}$ el axil y W_{com} el momento resistente de la sección. A continuación, calculamos el momento flector efectivo:

$$M_{ef,Ed} = W_{com} \sigma_{com,Ed} \quad (2.34)$$

Para que la viga no pandee se tiene que cumplir que:

$$M_{ef,Ed} < M_{b,Rd} \quad (2.35)$$

El proceso de cálculo de $M_{b,Rd}$ es el mismo visto en el apartado 2.2.

2.4-PANDEO EN PILARES DE EDIFICIOS

El CTE contempla el cálculo del coeficiente de longitud de pandeo β para pilares de edificios unidos rígidamente a las demás vigas de la estructura. El cálculo de este factor depende de si se considera un pórtico intraslacional o traslacional. El primero de ellos es aquel en el que el incremento de las solicitaciones debido a las deformaciones de la estructura (efectos de segundo orden) resultan despreciables. Es posible aplicar las ecuaciones de equilibrio a la geometría de la estructura no deformada. Por el contrario, un pórtico traslacional es aquel en el que los desplazamientos tienen una influencia sustancial en los esfuerzos.

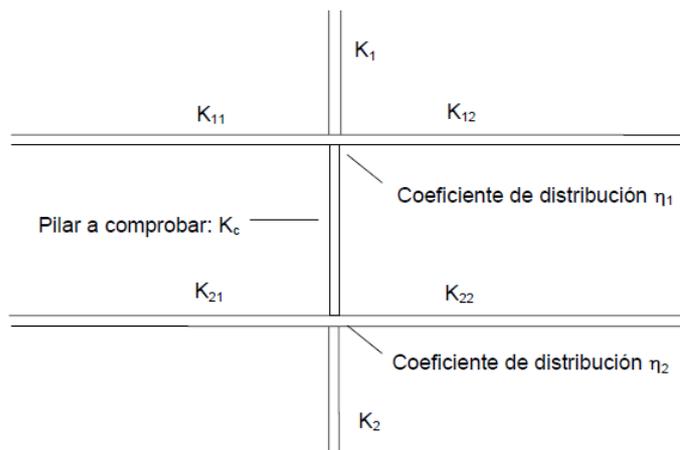


Fig. 2.10: Coeficientes de distribución. [Fuente: CTE DB SE-A]

Para el cálculo del coeficiente de longitud de pandeo en pórticos intraslacionales tenemos la ecuación 2.36:

$$\beta = \frac{1 + 0,145 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0,265 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}{2 - 0,364 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0,247 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \leq 1 \quad 2.36)$$

Y para el cálculo del coeficiente de longitud de pandeo en pórticos traslacionales tenemos la ecuación 2.37:

$$\beta = \sqrt{\frac{1 + 0,2 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0,12 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}{1 - 0,8 \cdot (\eta_1 + \eta_2) + 0,6 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}} \geq 1 \quad 2.37)$$

También podremos calcularlo mediante la figura 2.12:

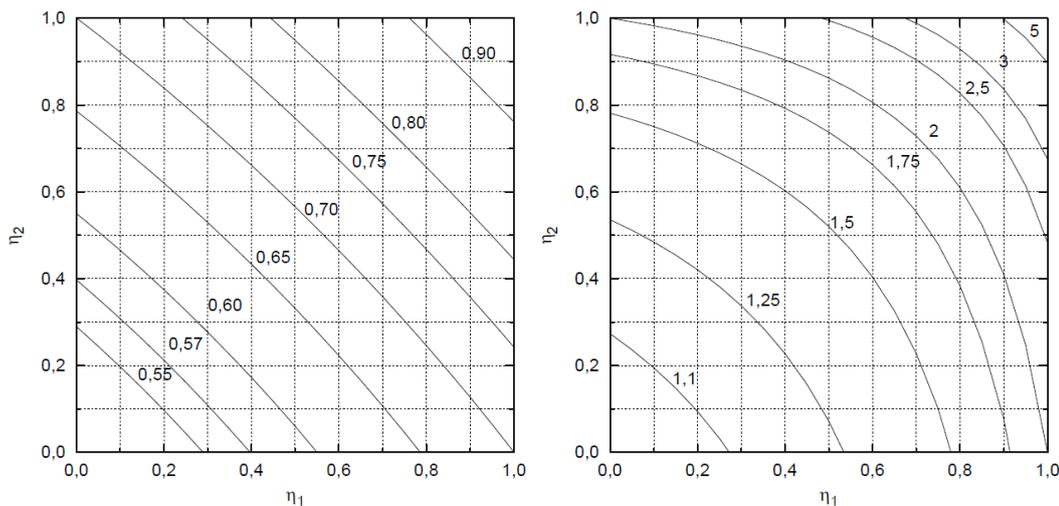


Fig. 2.12: Coeficiente de longitud de pandeo para pórticos intraslacionales (izquierda) y para pórticos traslacionales (derecha). [Fuente: CTE DB SE-A]

Además, para calcular los coeficientes de distribución de los nudos inferiores (η_2) y superiores (η_1):

$$\eta_1 = \frac{K_C + K_1}{K_C + K_1 + K_{11} + K_{12}} \quad 2.38)$$

$$\eta_2 = \frac{K_C + K_2}{K_C + K_2 + K_{21} + K_{22}} \quad 2.39)$$

En caso de empotramiento:

$$\eta_i = 0$$

En caso de articulación:

$$\eta_i = 1$$

Siendo K_C el coeficiente de rigidez EI/L del tramo del pilar analizado, K_i el coeficiente de rigidez del siguiente tramo del pilar en el nudo i y K_{ij} el coeficiente de rigidez eficaz de la viga en el nudo i y posición j . Para calcular este último tendremos a nuestra disposición la tabla 2.4:

Condiciones de coacción al giro en la viga en el extremo contrario al considerado.	Coeficiente de rigidez eficaz K de la viga	
	sin compresión relevante	con compresión ⁽¹⁾
empotrado	1,0 EI/L	1,0 EI/L (1-0,4 N/N_{crit})
articulado	0,75 EI/L	0,75 EI/L (1 - 1,0 N/N_{crit})
giro igual y de igual signo	1,5 EI/L	1,5 EI/L (1-0,2 N/N_{crit})
giro igual y de signo opuesto	0,5 EI/L	0,5 EI/L (1-1,0 N/N_{crit})
giro θ_a en el nudo considerado y giro θ_b en el otro	$(1 + 0,5 \theta_b / \theta_a) EI/L$	-

⁽¹⁾ N_{crit} se refiere al valor crítico a compresión de la viga considerada. El caso general (-) no está contemplado

Tabla 2.4: Rigidez eficaz. [Fuente: CTE DB SE-A]

Capítulo 3. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

3.1-INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos o MEF, es un método numérico para resolver problemas de ingeniería y matemática física. Fue desarrollado al no poder obtener soluciones analíticas matemáticas en determinados problemas complejos. Sin embargo, no deja de ser un método aproximado de cálculo. Consiste en simplificar la geometría del objeto continuo mediante la subdivisión del mismo en elementos discretos. Estos elementos se les llama elementos finitos y están conectados a través de nodos. La solución del problema es la combinación de las soluciones de cada uno de los nodos. De esta manera las ecuaciones diferenciales que describen el sistema, tienen un número finito de variables. Dichas ecuaciones deben satisfacer las condiciones de equilibrio y compatibilidad.

En la figura 3.1 se observa la discretización de un sistema continuo. El elemento finito es cada uno de los triángulos que forman la malla, y los vértices son los nudos.

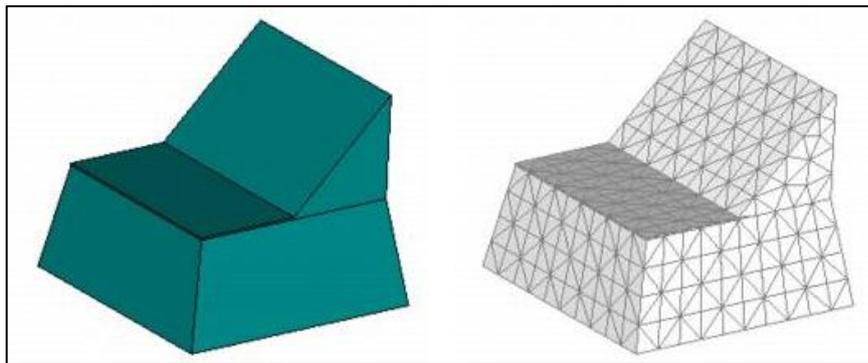


Fig. 3.1: Ejemplo de discretización. [Fuente: FEMAP]

Es muy importante la generación de una malla de calidad, ya que, de no ser así, el cálculo podría no converger. Cuanto menor sean las particiones o elementos finitos, más exacta será la solución y viceversa. El mallado suele ser triangular o rectangular para elementos en dos dimensiones y tetraédrico o hexaédrico para elementos en tres dimensiones.

Esta técnica se usa en el diseño y mejora de productos. Los campos que más utilizan MEF son: cálculo estructural, transmisión de calor, mecánica de fluidos, campos electromagnéticos... La resolución por elementos finitos suele ser muy sistemática, por lo que este método se ayuda de computadoras y softwares especialmente diseñados para ello.

3.2-HISTORIA

Se suele pensar que este método ha sido desarrollado recientemente, pero los egipcios, como en casi todo, fueron pioneros en este campo. Utilizaban la discretización de volúmenes para la construcción de las pirámides. Más tarde el método comienza a evolucionar hacia el siglo III a.C. Era la época de las primeras guerras púnicas, la construcción de la muralla China, el auge de la Academia de Atenas, Epicuro, Euclides, Arquímedes... Este último es el protagonista de este hito. Hacia mediados de siglo comenzó a calcular perímetros, áreas y volúmenes mediante discretización. Logró obtener un valor razonable de π gracias a la aproximación del perímetro de un círculo mediante un polígono regular de 192 lados. Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.) calculó que el valor de π debía encontrarse entre 3,1408 y 3,1429. Varios siglos después, el matemático chino Liu Hui (225 d.C.-295 d.C.), con un método similar, mediante un polígono regular de 3072 lados, obtuvo un valor de π de 3,14159.

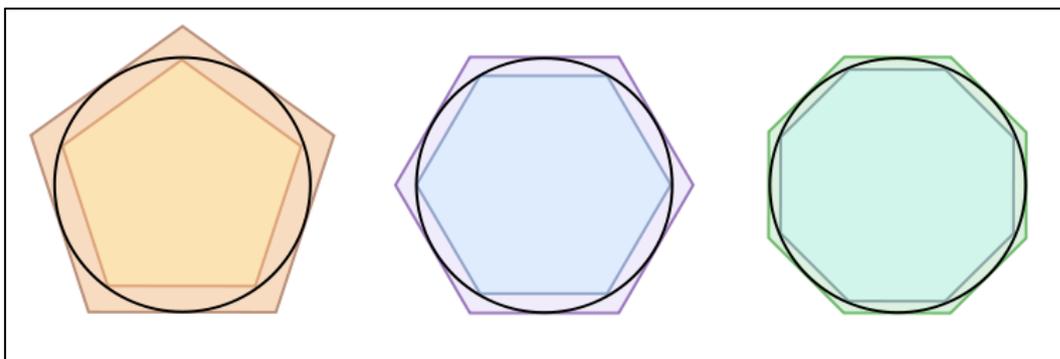


Fig. 3.2: Método que utilizaron Arquímedes y Liu Hui para hallar π

Pero el método tal y como lo conocemos hoy no se empezó a fraguar hasta muchos siglos después. En Francia, a mediados del siglo XIX, surge la base teórica del MEF para el análisis estructural. Hacia 1920 se empiezan a desarrollar las teorías necesarias para el análisis matricial de estructuras y en los siguientes años se empiezan a resolver problemas de análisis estructural complejo. En 1943 en la obra “*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*”, su autor R. Courant propone realizar interpolaciones por partes sobre regiones triangulares que componen el conjunto del sistema para obtener soluciones numéricas aproximadas de problemas elásticos. El siguiente paso fue desarrollar métodos matriciales y el MEF se empieza a utilizar en otros campos distintos al estructural, como lo son dinámica de fluidos, transferencia de calor... El problema era resolver los problemas manualmente, lo cual era tedioso. Por ejemplo, para el cálculo de la estructura de un edificio de varios pisos, se tardaban varias semanas en resolverlo.



Un gran avance fue la aparición de las primeras computadoras digitales a principios de los 60, las cuales facilitarían la resolución del método. Nombres propios en este avance son Olgierd C. Zienkiewicz y John Argyris. Fue un punto clave para la incipiente industria aeronáutica. En los años 80 aparecen los ordenadores personales y con ellos software comercial. Actualmente, el uso de MEF está totalmente implantado en la industria y se sigue avanzando con el objetivo de mejorar el método. El desarrollo de MEF va de la mano del desarrollo de supercomputadoras más potentes, realizando un modelo matemático-científico de cálculo más exacto, fácil y económico.

3.3-APLICACIONES

Como se ha dicho en varias ocasiones, el MEF consiste en la discretización del continuo. Este se hace mediante mallado que puede ser en 1, 2 y 3 dimensiones. Las ecuaciones que rigen cada elemento regirán a su vez al continuo. En cualquier sistema tendremos el dominio, las condiciones de frontera y las incógnitas a resolver. En cada uno de los nodos de la malla tendremos las incógnitas, las cuales se les suele llamar grados de libertad. Una vez encontrado el valor de las incógnitas mediante las condiciones de frontera el problema estaría resuelto. Como se dijo al principio, el MEF puede ser utilizado en infinidad de disciplinas. A continuación, se muestran varias disciplinas y ejemplos:

- **Ingeniería Naval:** simulación del comportamiento de buques en grandes oleajes.
- **Biología:** simulación de la resistencia y deformación en una prótesis humana sometida a esfuerzos.
- **Industria automovilística y aeroespacial:** desde cálculos de resistencia estructural hasta aerodinámicos.
- **Hidráulica:** estudio del comportamiento de un fluido en una tubería o en un rotor.
- **Ingeniería geológica:** simulación y comportamiento de túneles en presencia de terremotos.
- **Ingeniería mecánica:** simulación y análisis de una pieza sometida a vibraciones.
- **Ingeniería civil:** comprobar esfuerzos y deformaciones en elementos estructurales.

3.4-FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DEL MÉTODO

En este apartado se desarrollarán los métodos matemáticos del MEF para un caso genérico de un elemento estructural. Se tendrán en cuenta las siguientes hipótesis:

- 1) El continuo es discretizado mediante líneas que crean nodos
- 2) Los elementos están interconectados entre sí mediante los nodos
- 3) Las deformaciones y las propiedades elásticas del material definirán los esfuerzos
- 4) Los esfuerzos concentrados en los nodos están en equilibrio con las cargas de las condiciones de frontera

Tomamos un elemento triangular en dos dimensiones al que llamaremos (p) y sus nodos 1, 2 y 3. Los desplazamientos en el eje x se designan con “u” y los desplazamientos en el eje “y” se les asigna “v”. Además, las fuerzas actuantes en cada nodo serán nombradas con “U”, y “V”, horizontales y verticales. Si ponemos en forma matricial los desplazamientos y fuerzas nos queda:

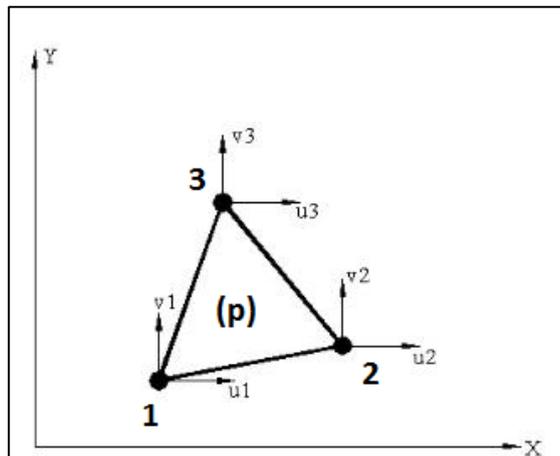


Fig. 3.3: Elemento triangular

$$\{F\}^P = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad y \quad \{\delta\}^P = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad 3.1$$

Suponiendo un comportamiento elástico, tendremos:

$$\{F\}^P = [K]^P \{\delta\}^P + \{F\}_q^P + \{F\}_{\epsilon_0}^P \quad 3.2$$

Siendo $\{F\}_q^P$ las fuerzas nodales necesarias para contrarrestar las cargas actuantes en el elemento y $\{F\}_{\epsilon_0}^P$ las fuerzas nodales para contrarrestar las deformaciones iniciales.

Para elementos en 3 dimensiones, el número de componentes por nodo será de 6 (grados de libertad) y para m nodos tendremos:

$$\{F\}^P = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix} \quad y \quad \{\delta\}^P = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad 3.3)$$

Por lo que la matriz de rigidez quedará tal que así:

$$[K]^P = \begin{bmatrix} K_{ij} & \dots & K_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{mi} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix} \quad 3.4)$$

Cada K_{ij} es una submatriz cuadrada con el mismo número de elementos que fuerzas nodales. Además, cada componente de la matriz se forma como sumatorio de los elementos que contribuyen al nodo. De igual manera ocurre con $\{F\}_q^P$ y $\{F\}_{\varepsilon_0}^P$.

El siguiente paso es elegir la función de desplazamiento, la cual relaciona las coordenadas nodales con los desplazamientos nodales. Es un momento crucial, ya que una mala elección podría arruinar el análisis. Las funciones de desplazamiento deben tener el mismo número de variables que grados de libertad tenga el elemento. la función de desplazamiento N_i debe valer 1 en el nudo i y 0 en los restantes (figura 3.4):

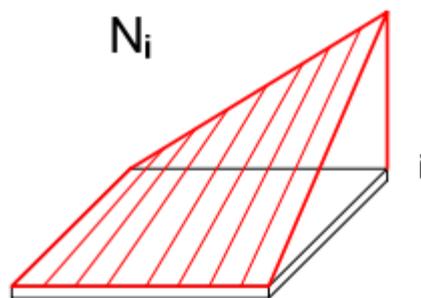


Fig. 3.4: Función N_i

Una vez obtenida la función de desplazamiento podremos obtener todos los esfuerzos y deformaciones internos del elemento. Ahora expresamos las deformaciones en función de los desplazamientos:

$$\{\varepsilon\} = ([L][N])\{\delta\} \quad 3.5)$$

Donde L es una matriz de operadores diferenciales. A continuación, a través de una matriz de elasticidad D , relacionamos esfuerzo y deformación:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad 3.6)$$

Y sustituyendo la ecuación 3.5 en la ecuación 3.6:

$$\{\sigma\} = [D]([L][N])\{\delta\} \quad 3.7)$$

Aplicando el Principio de los Desplazamientos Virtuales finalmente tenemos:

$$\int_V ([L][N])^T [D]([L][N]) dV \{\delta\} = \int_V [N]^T \{X\} dV + \int_S [N]^T \{X\} dS \\ + \int_V ([L][N])^T [D] \{\varepsilon^0\} dV \quad 3.8)$$

Esta fórmula la podríamos poner de la siguiente forma, el cual es un sistema lineal que se resuelve fácilmente:

$$\sum_{j=1}^n [K_{ij}] \cdot \{\delta_j\} = \{f_i\} \quad 3.9)$$

Siendo:

$$[K_{ij}] = \int_V ([L][N_i])^T [D]([L][N_j]) dV \quad 3.10)$$

$$\{f_i\} = \int_V [N_i]^T \{X\} dV + \int_S [N_i]^T \{X\} dS + \int_V ([L][N_i])^T [D] \{\varepsilon^0\} dV \quad 3.11)$$

3.5-PANDEO POR COMPRESIÓN

Mediante MEF también podemos hallar la carga crítica de pandeo en vigas. Para ello usaremos el método matricial de cálculo de autovalores. Debemos tener en cuenta una viga lineal y elástica, aunque en la realidad nunca va a ser el caso. Partimos de la ecuación matricial de equilibrio:

$$[K_E] \cdot \partial\{\delta_{ref}\} = \partial\{f_{ref}\} \quad 3.12)$$

Esta ecuación relaciona los incrementos en los desplazamientos $d(\delta_{ref})$ con los incrementos en las cargas aplicadas $d(f_{ref})$ mediante la matriz de rigidez elástica K_E . A continuación, añadimos la matriz de rigidez geométrica K_G a la matriz elástica. Al ser un problema de estabilidad lineal, se admite que tales matrices son formuladas en la geometría deformada en hipótesis de pequeños desplazamientos, y que es proporcional a un determinado nivel de carga λ . Por lo tanto, tenemos:



$$([K_E] + \lambda[K_G]) \cdot \partial\{\delta_{ref}\} = \partial\{f_{ref}\} \quad 3.13)$$

Cuando se alcanza la carga crítica, la matriz del sistema se vuelve singular, pudiendo haber incrementos de desplazamientos sin incremento de las cargas:

$$([K_E] + \lambda[K_G]) \cdot \partial\{\delta_{ref}\} = \{0\} \quad 3.14)$$

Por tanto, para tener una solución distinta de la trivial tenemos:

$$|[K_E] + \lambda[K_G]| = \{0\} \quad 3.15)$$

La ecuación 3.15 quedará en forma de polinomio característico de grado n (grados de libertad del modelo). La carga crítica de pandeo será el autovalor positivo de menor valor.

3.6-VENTAJAS E INCONVENIENTES

Partiendo de la base de que el MEF es un método aproximado, tiene importantes ventajas. Gracias a la discretización tenemos la opción de estudiar elementos de gran complejidad. Debido a que el modelo matemático está desligado de las condiciones de frontera, tenemos la posibilidad de introducir las condiciones de frontera exactas y no mediante tanteo. Además, si las condiciones de frontera cambian, las ecuaciones algebraicas del modelo seguirán siendo válidas. Otra ventaja del método es la aplicación de materiales complejos. El MEF trabaja muy bien este tipo de materiales. Entiéndase por complejos, materiales no isótropos, no lineales, dependientes de la temperatura o del tiempo...

Una ventaja clave de la implantación en las computadoras de software que trabajan con MEF es sin duda el ahorro de tiempo y la posibilidad de simulación y optimización. Además, se nos muestran los datos tanto de salida como de entrada de una manera muy visual facilitando el análisis del problema. Por último, resaltar la flexibilidad que ofrece el método ya que un mismo software puede aplicar el método en multitud de campos ingenieriles.

Pero no todo son ventajas con este método. En muchas ocasiones no podemos saber con certeza cuanto error tiene nuestro modelo, esto suele ocurrir en problemas no lineales o dependientes del tiempo. El mallado es un punto clave en la resolución del problema, en ocasiones es complicado encontrar un mallado que haga converger el problema. Por eso es conveniente tener experiencia en este tipo de tarea para dar con una solución satisfactoria.



Una gran limitación de este método está relacionada cuando ocurren roturas en los elementos del sistema. La solución numérica de este tipo de problemas en ocasiones deja mucho que desear.

Otro inconveniente, aunque cada vez más subsanado, es el gasto computacional. Para problemas complejos es necesaria mucha potencia de cálculo que en ocasiones no es viable.



Capítulo 4. SISTEMAS CAD/CAE

En la actualidad, sería impensable concebir la ingeniería sin los sistemas CAD/CAE, debido al nivel de competitividad en el mercado. Las principales ventajas de utilizar estos sistemas son: reducción de costes, minimización de tiempos, comprobar viabilidad y rentabilidad, optimización del producto... La asistencia y ayuda del ordenador en el entorno de ingeniería recibe el nombre de Diseño e Ingeniería Asistidos por Ordenador (CAD/CAE).

La utilización de estos sistemas implica el uso de tecnología computacional en las tareas de diseño y simulación. Los sistemas CAE son inherentes a los sistemas CAD, debido a que se requiere una pieza modelada para llevar a cabo el proceso de simulación. Para los sistemas CAE es fundamental tener constituida la geometría de la pieza para establecer el mallado y realizar el análisis pertinente. También será necesario implementar las condiciones ambientales.

Tanto el sistema CAD como el sistema CAE se utilizarán en este trabajo, implementados ambos en el software Ansys.

4.1-SISTEMAS CAD

CAD es el acrónimo inglés Computer Aided Design (Diseño asistido por Computadora). El Diseño Asistido por Computadora es el uso de sistemas computacionales y sus respectivas aplicaciones informáticas que asisten a ingenieros, arquitectos y diseñadores, en la creación, modificación y optimización de un diseño.

Representa una gran ventaja respecto a los sistemas antiguos, ya que antes de aparecer los sistemas CAD, el proceso de diseño consistía en el binomio lápiz-papel, el cual era un proceso tedioso. Hoy en día se utiliza en todo tipo de industrias tales como la aeroespacial, automotriz, electrónica, textil... El CAD permite que las empresas analicen el modelo antes de llevar a cabo el prototipo físico.

Con este tipo de software se puede trabajar en dos dimensiones, a través de líneas y puntos; y tridimensionalmente, como diseño de piezas mecánicas, arquitectura, etc... Una vez diseñado el producto, se pueden obtener toda la documentación necesaria (planos, tolerancias, peso, centro de gravedad, inercias...).

Las principales ventajas de un software CAD son un mejor visionado del producto diseñado, ya que se puede mostrar la imagen renderizada con un aspecto visual muy realista. Además, se puede acercar, alejar y rotar la vista



para mayor apreciación de detalles además de recrear ensamblajes. También se puede visualizar posibles choques entre piezas, distancias mínimas... En definitiva, mediante CAD se consigue una alta productividad, flexibilidad, estandarización y minimización económica.

Ejemplos de software CAD son:

- AutoCad
- SolidWorks
- Catia
- Rhinoceros
- Inventor
- CypeCad
- NX...

4.2-SISTEMAS CAE

CAE significa Computer Aided Engineering (Ingeniería Asistida por Computadora). Es el conjunto de softwares que sirven para realizar análisis en la ingeniería a través de simulaciones de modelos CAD. Los tipos de análisis son:

- Calcular esfuerzos y desplazamientos en componentes y estructuras
- Análisis de transferencia térmica
- Análisis de sistemas multicuerpo, cinemática y fluidomecánicos
- Simulación de procesos de manufactura
- Optimización del proceso de documentación y del desarrollo del producto
- Verificación del producto

Estos análisis permiten valorar propiedades y características, viabilidad, rentabilidad y finalmente poder optimizar el desarrollo del producto que se desea. En los sistemas CAE, primero se realiza la simulación, después la validación y por último la optimización del producto. Éstos sirven para simular y resolver problemas complejos en áreas tan diversas como aeronáutica, estructural, mecánica... Los factores que normalmente afectan al sistema a estudio suelen ser: temperaturas, presiones y fuerzas e interacciones entre componentes. Estos factores deberán ser introducidos en el sistema CAE junto con las geometrías a estudio para su procesamiento y mallado. A continuación, se lleva a cabo la simulación y el análisis del sistema, para finalmente post-procesar los resultados y mostrarlos para poder tomar decisiones.



Un sistema CAE consta generalmente de un pre-procesado en el cual se introducen los datos de entrada, como la geometría, las condiciones de contorno y otras propiedades. El programa genera a continuación la malla con la finalidad de garantizar la mejor aproximación posible. En el procesamiento o cálculo se generan y resuelven las ecuaciones e incógnitas que describen el problema. Por último, en el post-procesado se calculan incógnitas derivadas de las anteriores y nos permite una representación gráfica de los resultados.

Las ventajas que ofrece el CAE son:

- Ahorro económico
- Ahorro de tiempo
- Optimización
- Versatilidad

Ejemplos de software CAE son:

- SolidWorks
- Catia
- Ansys
- Abaqus
- Nastran-Patran...

4.3-ANSYS

La empresa ANSYS (su nombre viene de Analysis System) fue fundada en 1970 por John Swanson. John se sirvió de su experiencia trabajando en los laboratorios nucleares de Westinghouse, en los que desarrolló códigos computacionales para la obtención de esfuerzos en los rotores, para fundar su propia empresa. En un principio sólo se dedicaban a realizar elementos finitos, pero a comienzos del siglo XXI comienzan también a trabajar con CFD, destacando el programa Fluent. También se dedican a la electrónica, semiconductores, software embebido y optimización de diseño. ANSYS integra sus programas en un mismo entorno con el software ANSYS Workbench. Esto es una gran ventaja y de ello nos aprovecharemos en este trabajo. Poder interactuar entre análisis distintos en un mismo entorno supone un ahorro considerable de tiempo.

Tiene su sede central en Canonsburg (Pensilvania,USA) y en la actualidad emplea a casi 3.000 personas. Está presente en más de 40 países y en multitud de industrias como la aeroespacial, automoción, electrónica, energía, química, salud, deporte y muchas otras más.



Como curiosidad, decir que el programa ANSYS se utilizó para simular el derrumbe de las torres gemelas de New York en aquel fatídico 11 de septiembre.

A continuación se describirá el producto WORKBENCH perteneciente a ANSYS. La versión utilizada es la versión 19 student, versión gratuita y liberada en el año 2018. Debido a que es una versión estudiante, tendremos una limitación en el número de nodos del mallado. Esta limitación es de 32.000 nodos, pero para el estudio que llevaremos a cabo, nos será más que suficiente. Se describirán la interfaz de usuario y los comandos que aparezcan para, en el capítulo de aplicaciones prácticas, utilizarlos a la hora de crear las simulaciones. Para realizar este trabajo se necesitará conocer los análisis estáticos y los análisis de pandeo.

La interfaz de usuario de ANSYS WORKBENCH está dividida en dos partes fundamentales, la caja de herramientas y el esquema de proyectos. En la caja de herramientas se encuentran las diferentes herramientas que se pueden utilizar en la simulación. Dichas herramientas están agrupadas en cuatro grupos:

- ❖ **Analysis Systems:** Estas herramientas sirven para crear proyectos desde cero. Sirven como plantillas para realizar diferentes proyectos. Se puede crear un sistema o varios cerrados o incluso vinculados entre sí. Ejemplos de plantillas son: Análisis estructural, análisis modal, análisis eléctrico...
- ❖ **Component Systems:** Estas otras herramientas sirven como componentes de las plantillas anteriores. Estos elementos pueden estar conectados con otros sistemas aguas abajo que se nutren de ellos. Estos componentes pueden ser: Geometría, malla, datos ingenieriles... Se les suele llamar células o celdas.
- ❖ **Custom Systems:** Este grupo de herramientas está constituido por plantillas que suelen ser las más utilizadas. Suelen enlazar varios *Analysis Systems*. Las plantillas están predefinidas, pero también pueden ser creadas por el usuario. Como ejemplos serían: Análisis Esfuerzo-Térmico, análisis vibratorio...
- ❖ **Design Exploration:** Estas últimas herramientas sirven para realizar varios estudios de exploración. Suelen estar relacionadas con la creación de parámetros.

En el esquema de proyectos se muestra el proyecto en el que se está trabajando. Además, el programa dispone de una barra de herramientas y una barra de menú típica en la parte superior.

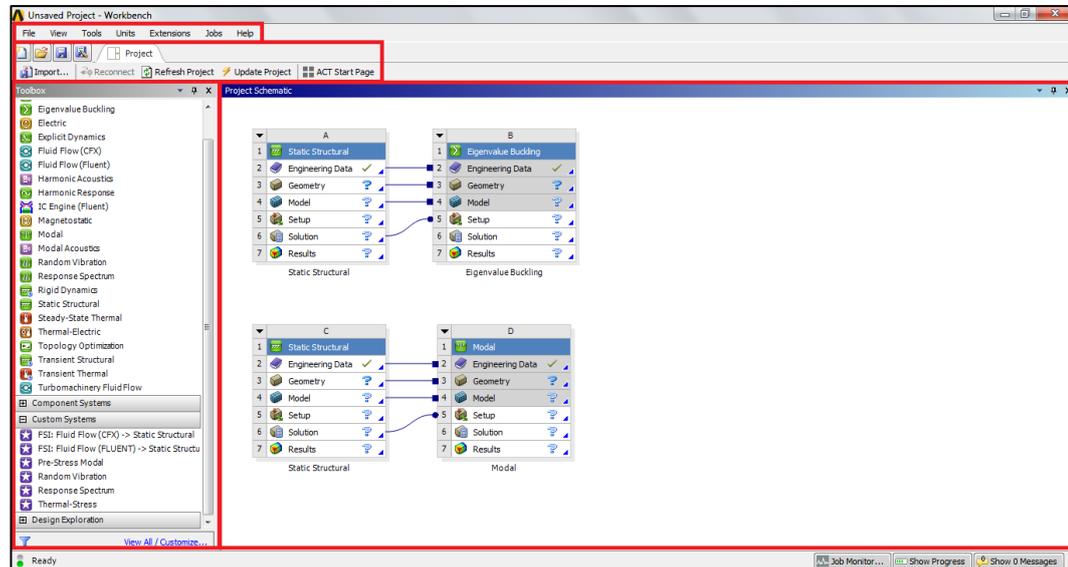


Fig. 4.1: Interfaz Usuario ANSYS WORKBENCH

Para crear un proyecto nuevo basta con arrastrar la herramienta que necesitamos desde la caja de herramientas hasta el esquema de proyectos. También valdría con hacer doble click en la herramienta. Aparece, entonces, un bloque de celdas en el área de trabajo. Cada bloque tiene una letra en la parte superior que define el orden de bloques y en la parte inferior el nombre del bloque, pudiéndose este último renombrar. Estos bloques contienen las celdas o células que son necesarios para llevar a cabo el análisis. A la izquierda de cada célula aparece un número que rige el orden que hay que seguir para completar el análisis. Es posible relacionar células con varios bloques a la vez sin más que arrastrar la célula que queramos de uno bloque a otro, quedando unidos mediante una línea. También es posible renombrar cada una de ellas. Las células pueden estar en varios estados:

- ❖ ✓ La célula está bien definida
- ❖ ? La célula no está definida todavía
- ❖ ↻ La célula debe actualizarse
- ❖ ✖ Algo ha salido mal
- ❖ ⚡ Es necesario generar (simular el análisis)
- ❖ ⚡✖ Ha habido un problema en la generación

Para definir las células habrá que hacer doble click o click con el botón derecho y elegir la acción que necesitamos. Una vez guardado el proyecto, este tendrá una extensión *wbpj*.

4.3.1-STATIC STRUCTURAL

Para llevar a cabo este trabajo es imprescindible la plantilla de análisis estático estructural. Mediante este análisis mecánico se pueden calcular todo tipo de deformaciones, así como esfuerzos y factores de seguridad. En ella se deberá definir el modelo, las restricciones del mismo, las acciones externas, el mallado y los datos de materiales. Pero vayamos por partes. En la figura 4.2 se muestra

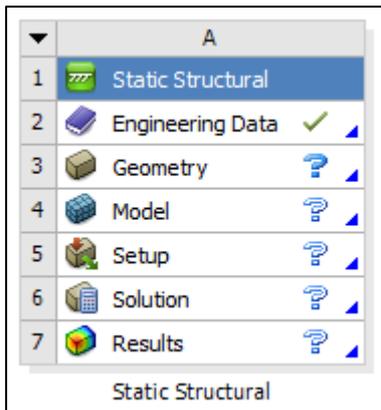


Fig. 4.2: *Static Structural*

el bloque de células para el análisis estructural. Se compone de diferentes células ordenadas según deben ser definidas. A la derecha de las mismas aparecen los iconos explicados anteriormente y se observa que faltan de definir todas las células excepto la de materiales, la cual viene predefinida como Acero estructural. En la parte superior aparece la letra A, lo cual significa que es el primer análisis de nuestro proyecto. En la parte inferior se encuentra el tipo de análisis elegido, pudiéndose modificar el nombre como se dijo anteriormente. En la parte superior izquierda hay un triángulo, el cual nos da la

posibilidad de elegir entre varias opciones que repercutirán sobre el análisis. Estas pueden ser: actualizar el análisis, eliminarlo, limpiar datos generados, renombrarlo, cambiarlo por otro, ver sus propiedades, duplicarlos y añadir notas.

Teniendo claro todo lo anterior, se comenzará a explicar cada célula del bloque.

4.3.1.1-ENGINEERING DATA

Esta célula sirve para aplicar los datos ingenieriles con los que trabajaremos en nuestros sistemas mecánicos. Suele estar definida por defecto, siendo el material predefinido el Acero Estructural. Clickando con el botón derecho del ratón aparece un menú contextual, en el cual podremos editar los datos y realizar otras opciones que comparten todas las celdas (transferir de bases de datos, actualizar, renombrar, duplicar, ver sus propiedades, ayuda y añadir notas). Haciendo doble click creamos una nueva pestaña y entramos en la interfaz de edición de los datos de materiales.

En la parte superior central se encuentran los materiales seleccionables y debajo las propiedades de dicho material (densidad, límite elástico, límite de rotura, coeficiente de expansión térmica...). Para poder seleccionar otro material deberemos activar la casilla *Engineering Data Sources* y elegir el que

necesitemos. Los materiales disponibles están divididos en grupos como: materiales no lineales, materiales lineales, fluidos, materiales hiperelásticos y un largo etcétera. Para elegir nuestro material, basta con seleccionar el icono o hacer click derecho y seleccionar *add*. También podremos crear una lista de materiales favoritos e incluso crear un material partiendo de cero.

En las ventanas de la derecha se muestra información dependiendo de la propiedad que hayamos seleccionado. En la parte izquierda encontramos la caja de herramientas con los parámetros característicos asociados al material, los cuales pueden ser añadidos en cualquier momento. Cabe resaltar que, si tenemos activado *Filter Engineering Data*, sólo nos deja seleccionar las propiedades acordes a nuestro análisis. Una vez elegido nuestro material, para volver al proyecto basta con cerrar la pestaña actual.

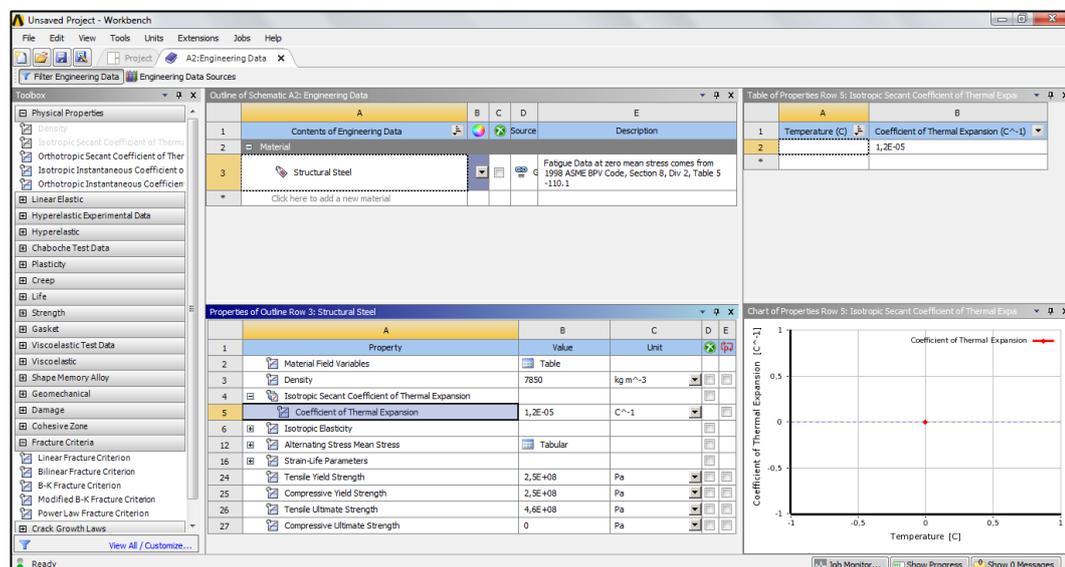


Fig. 4.3: Interfaz edición de materiales

4.3.1.2-GEOMETRY

En la célula geometría se agrega una geometría con la cual trabajaremos. Con el menú contextual podremos importar geometría o crearla. Para modelar la geometría elegimos en el menú contextual *New DesignModeler Geometry*, y se nos abrirá una nueva ventana en la cual se podrá crear la geometría. Posee una interfaz de edición típica de software de diseño (figura 4.4).

Una vez dentro se observan varias zonas diferenciadas. La zona de la derecha es la ventana de gráficos, lugar donde se mostrarán nuestros diseños. Como se observa en la figura 4.4, se representa el diseño, acompañado de la escala y el sistema de ejes. En la parte izquierda tenemos la caja de herramientas, la

cual tiene dos subpestañas. Modeling muestra todo lo que hayamos creado: planos, sketches, operaciones 3D, líneas, cuerpos... Mientras que *Sketching* nos proporciona las siguientes herramientas de diseño:

- ❖ **Herramientas de dibujo:** líneas, polilíneas, tangentes, rectángulos, círculos, arcos, elipses, splines, puntos...
- ❖ **Herramientas de modificación:** redondeos, chaflanes, corte de líneas, dibujo offset...
- ❖ **Herramientas de acotación:** vertical, horizontal, radio, distancia, ángulo...
- ❖ **Herramientas de restricciones:** fijar, perpendicularizar, tangente, paralelismo, concetricidad, simetría...
- ❖ **Herramientas de configuración de rejilla**

Justo debajo de la caja de herramientas se encuentra la ventana de detalles. En ella se pueden visualizar los parámetros que configuran un determinado elemento que tengamos seleccionado. En la figura 4.4, como tenemos seleccionada la operación de extrusión, en la ventana de detalles nos aparecen características propias de dicha extrusión. Estas son profundidad de extrusión, perfil a extruir, dirección de extrusión... Se utilizaría de manera similar para cualquier tipo de operación de modelado o de diseño.

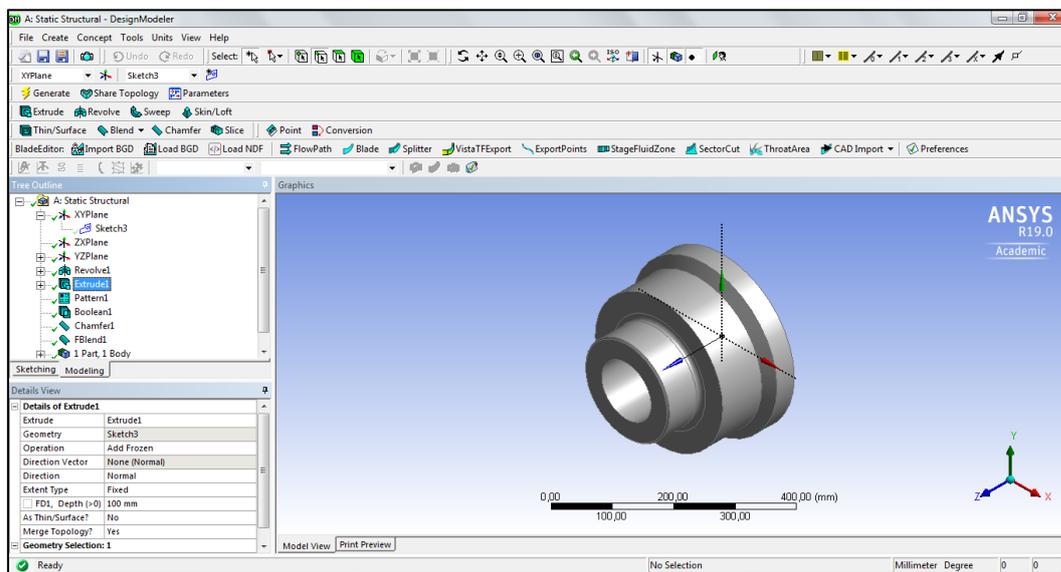


Fig. 4.4: Interfaz de usuario de DesignModeler

En la parte superior tenemos la barra de menú, la cual se subdivide en varios menús desplegables:



- ❖ **File:** es el típico menú de guardar, exportar, imprimir...
- ❖ **Create:** este menú es muy importante. Su principal función es darnos herramientas para crear u operar con sólidos. Operaciones como extrusión, revolución, redondeos, chaflanes, barridos, operaciones booleanas, operaciones con patrones... También se pueden crear sólidos 3D sencillos como esferas, toroides, cilindros prismas... A parte también dispone de herramientas que no son 3D, tales como creación de planos y puntos.
- ❖ **Concept:** mediante este menú disponemos de herramientas de creación de líneas y superficies a través de otros elementos previamente creados. Otra función muy útil es la creación de perfiles estándares (cuadrados, circulares, doble T, omega, Z...)
- ❖ **Tools:** como su propio nombre indica nos brinda diferentes herramientas para nuestro proyecto.
- ❖ **Units:** menú desplegable para la elección de las unidades de medida en las que se va a trabajar.
- ❖ **View:** opciones relacionadas con la vista en la ventana gráfica.
- ❖ **Help:** menú de ayuda.

Debajo de la barra de menú tenemos a nuestra disposición muchas de las herramientas descritas anteriormente y otras como: herramientas de selección, creación de sketch, generate...

Una vez creado nuestro modelo podremos salir del módulo DesignModeler para continuar definiendo nuestro proyecto. Si se ha hecho correctamente, aparecerá el icono ✓ en la célula de *Geometry*. El modelo creado se podrá guardar en un archivo a parte del proyecto por si quisiéramos utilizarlo para otros menesteres. Se podrá guardar como diferentes tipos de archivo: igs, model, stp... A continuación, es el turno del mallado de la geometría.

4.3.1.3-MODEL

Una vez creada la geometría pasamos a realizar la simulación. En esta célula se crea un modelo del proyecto, el cual está orientado a la generación y refinamiento de la malla. Los nodos y elementos que representan la geometría del modelo forman el mallado. Hacemos doble click o click derecho y editar para entrar en un nuevo módulo llamado *Mechanical* el cual será utilizado para

todas las células restantes de nuestro análisis estático estructural. La interfaz es la mostrada en la figura 4.5:

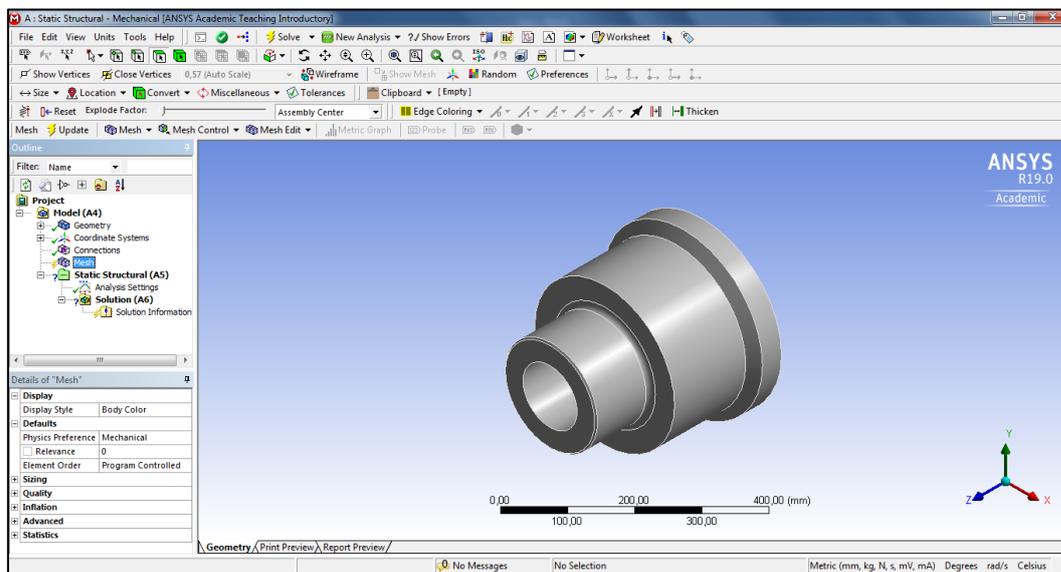


Fig. 4.5: Interfaz de usuario de Mechanical

Lo primero que vemos es que se carga la geometría anteriormente diseñada en la ventana de gráficos. Ésta tiene 3 tipos de vista distintos accesibles mediante 3 subpestañas, el primero la vista normal (*Geometry*), el segundo una vista de impresión (*Print Preview*) y el tercero muestra un informe del proyecto (*Report Preview*).

El interfaz se divide nuevamente en partes diferenciadas. En primer lugar, disponemos de una barra de menú muy parecida a la que hemos visto anteriormente. Y debajo de esta tendremos accesos directos a diferentes herramientas. La última barra de herramientas es contextual, ya que cambia según tengamos seleccionado uno u otro elemento.

En la parte izquierda tenemos el árbol esquemático (arriba) y la ventana detalles (abajo). En el árbol esquemático tenemos los modelos en los que estemos trabajando. Dentro del mismo tenemos la geometría, los ejes de coordenadas, los contactos y todo lo relacionado con los datos de entrada, los mallados y por último los tipos de análisis. En la ventana de detalles podemos ver los parámetros asociados de lo que estemos editando.

Ahora pasaremos a describir las opciones de mallado. Seleccionamos el icono  **Mesh** en el árbol y nos fijamos que en la ventana de detalles aparecen multitud de parámetros relacionados con el mallado. Para generar el mallado tan sólo debemos dar click derecho y *Generate Mesh*. Este icono también lo encontramos en la barra de herramientas contextual. A continuación, se explicarán los parámetros más importantes que están organizados en familias.

A) Display

Esta familia de parámetros se utiliza para elegir el estilo de presentación del mallado. Lo normal será seleccionar *Body Color*.

B) Defaults

Mediante esta familia podemos seleccionar qué tipo de simulación haremos (*Physics Preference*). El programa ofrece distintas opciones, desde simulación mecánica hasta hidrodinámica. En caso de seleccionar Simulación Mecánica (opción recomendable para cálculo de tensiones y deformaciones) disponemos del comando *Relevance* que sirve para refinar la malla si elegimos un valor positivo y si elegimos un valor negativo los elementos serán de mayor tamaño. Se muestra una imagen comparando 2 tipos de relevancia:

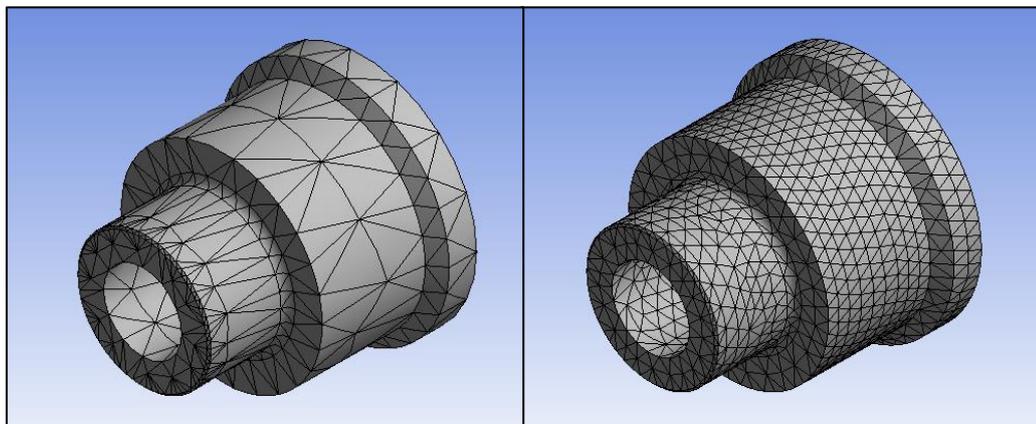


Fig. 4.6: Relevancia -100 (izquierda) y relevancia 100 (derecha)

Por último, podemos elegir si queremos un cálculo lineal o cuadrático de la malla.

C) Sizing

Estos parámetros nos permiten modificar las características relacionadas con el tamaño de los elementos y nodos. El primer parámetro es *Size Function*, con el que controlamos la distribución de la malla. Tenemos la posibilidad de elegir entre varios tipos:

- ❖ *Adaptive*: es la opción por defecto. La malla se adapta al sólido de una forma más o menos regular.
- ❖ *Curvature*: con esta opción la malla se refina en las zonas curvadas del sólido.
- ❖ *Proximity*: mediante esta opción el mallado se intensifica en aquellas zonas próximas a un cambio en la geometría o zonas comprometidas.
- ❖ *Uniform*: crea una malla uniforme a lo largo de todo el sólido.

- ❖ *Proximity and curvature*: con esta última opción podemos crear una malla con las características de ambos tipos. Es la opción con mayor gasto computacional.

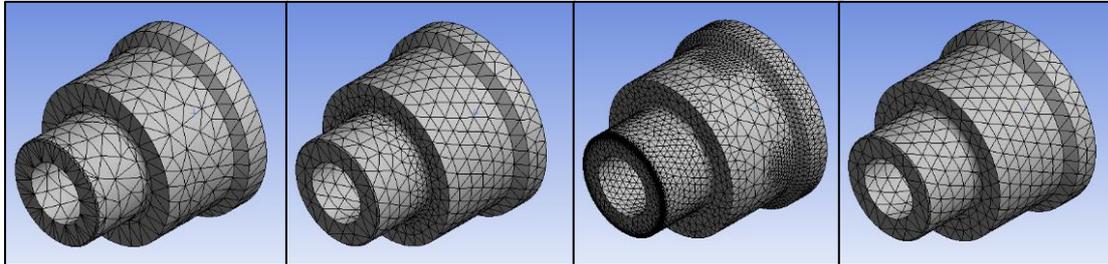


Fig. 4.7: *Adaptive, curvature, proximity y uniform (de izquierda a derecha)*

Dependiendo de la elección que hagamos en *Size Function*, aparecerán unos parámetros u otros. A continuación, se explicarán los parámetros más utilizados relacionados con la opción *Adaptive*.

Con *Relevance Center* podremos modificar el tamaño de los nodos para una relevancia igual a cero. En otras palabras, sirve para refinar la malla en mayor o menor medida.

Element Size sirve, como su propio nombre indica para elegir el tamaño máximo de los elementos. Si escribimos un valor cero, el programa asignará un valor por defecto que será el que crea más acorde al sólido.

Mediante el parámetro *Transition*, podemos modificar la velocidad con la que cambia el tamaño de los elementos desde una zona de refinado local a zonas de elementos amplios.

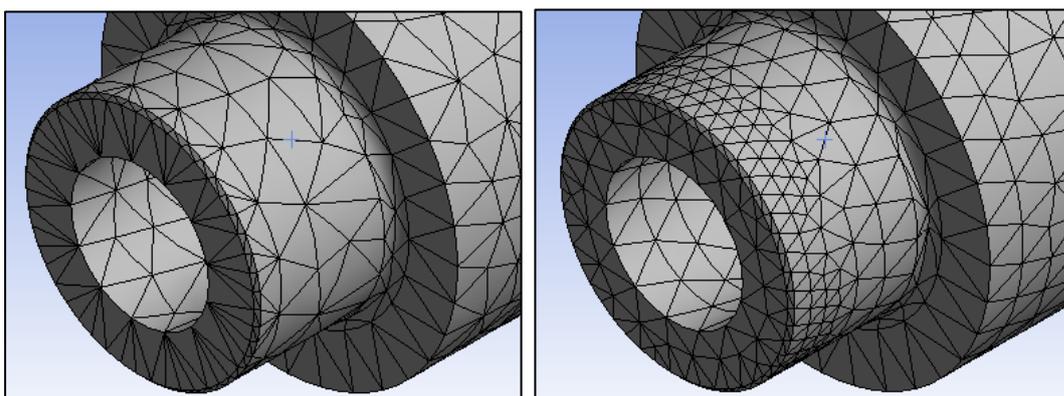


Fig. 4.8: *Transición rápida a la izquierda y transición lenta a la derecha*

El parámetro *Span Angle Center* sirve para elegir el ángulo máximo en los elementos cercanos a curvaturas. Las opciones son: grueso (91° a 60°), medio (75° a 24°) y fino (36° a 12°).

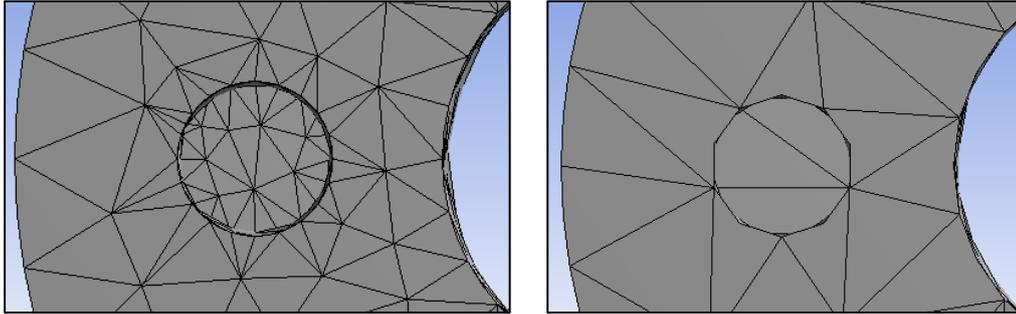


Fig. 4.9: Ángulo fino (izquierda) y ángulo grueso (derecha)

Ahora se explicarán los parámetros más importantes referidos a la opción *Curvature*. El parámetro *Max Face Size* controla el tamaño máximo del elemento. Es similar al parámetro *Element Size* de *Adaptive*.

Otro parámetro importante es *Curvature Normal Angle*, el cual sirve para suavizar las curvas del sólido. Hay que definir el ángulo máximo de las aristas adyacentes a la curva. A menor ángulo mejor es la definición de las curvas.

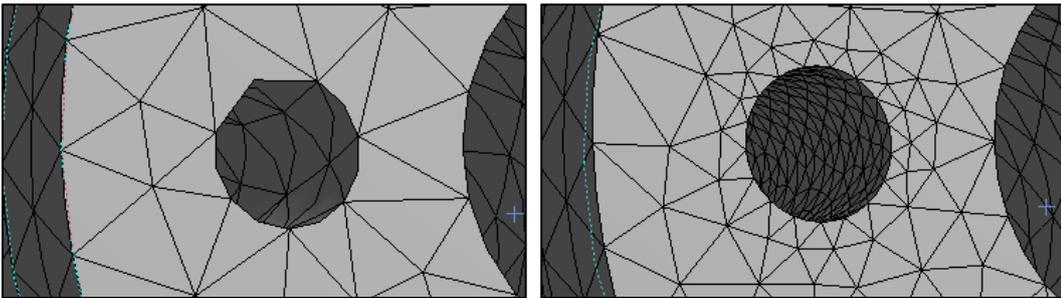


Fig. 4.10: Ángulo 90° (izquierda) y ángulo 20 (derecha)

Los parámetros más interesantes en la opción *Proximity* son *Max Face Size* (explicado anteriormente) y *Num Cells Across Gap*. Mediante este último parámetro podemos elegir el número mínimo de capas de celdas entre caras adyacentes. En la figura 4.11 se pueden observar las cinco capas de celdas entre las caras del sólido:

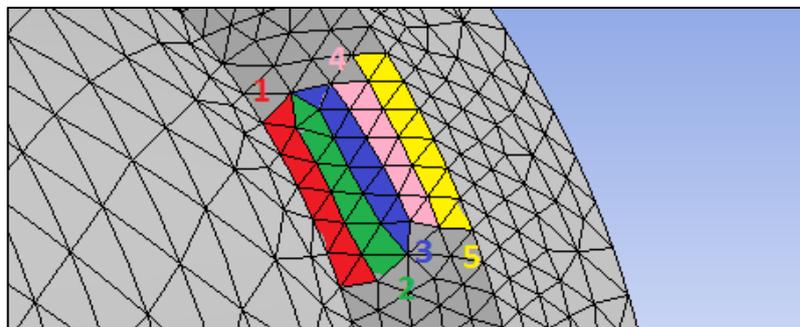


Fig. 4.11: Num Cells Across Gap=5

Para la opción *Uniform* sólo cabe resaltar el parámetro *Max Face Size*, que ya ha sido explicado con anterioridad.

En las siguientes imágenes se muestran todos los parámetros de *cada Size Function*:

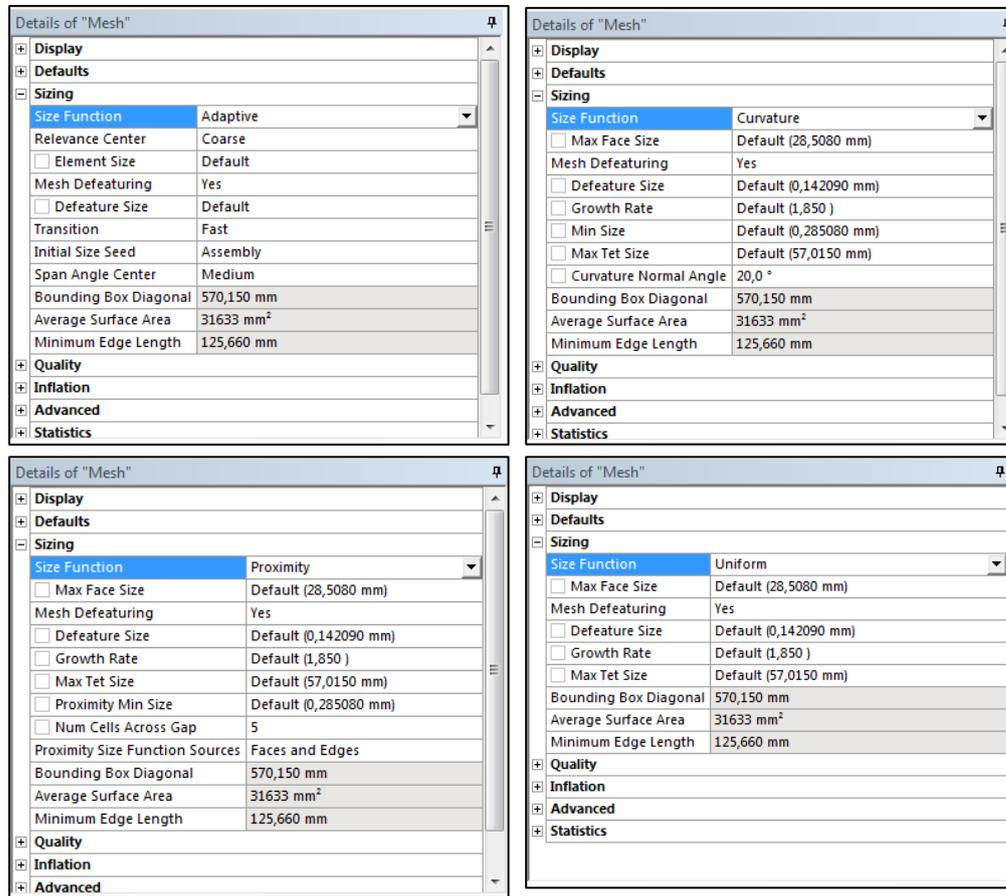


Fig. 4.12: Parámetros para Size Function

Los parámetros que no han sido explicados se recomienda dejarlos por defecto ya que es complicado dominarlos. Además, aquellos parámetros que están sombreados no pueden ser modificados. Por último, la casilla a la izquierda de algunos parámetros sirve para parametrizarlos, es decir, elegir diferentes valores de ese parámetro y poder realizar el análisis en cada uno de ellos.

D) Quality

Estos parámetros tienen relación con la calidad del mallado. El parámetro *Smoothing* mejora la calidad de los elementos minimizando los elementos irregulares creando elementos lo más regulares posible. Los demás parámetros mejor dejarles por defecto.

E) Inflation

Esta familia de parámetros está relacionada con como varía la altura de los elementos en diferentes capas adyacentes cerca de la superficie. Se recomiendan valores por defecto.

F) Advanced

En la familia *Advanced* tenemos varios parámetros que se recomienda dejarlos con sus valores predefinidos. Aun así, se explicarán algunos. El parámetro *Straight Sided Elements* es de utilidad para sólidos sin curvaturas, ya que lo que hace es linealizar todo lo que no sea curvo.

Triangle Surface Mesher determina qué estrategia de mallado será utilizada. Si elegimos *Advancing Front*, proporciona una variación del tamaño de los elementos más suave y dará mejores resultados para sólidos asimétricos.

G) Statistics

En esta familia de parámetros encontramos solamente 2, los cuales no se pueden modificar porque solamente sirven como información. Nos muestran el número de nodos y de elementos

H) Barra de herramientas contextual

En este apartado se explicarán los distintos comandos que aparecen en la barra de herramientas contextual.



Fig. 4.13: Barra de herramientas contextual

El icono *Update* sirve para actualizar el mallado en caso de que hubiésemos modificado algún parámetro o geometría. En *Mesh* disponemos de un menú desplegable que nos proporciona el comando de generación de malla y previsualización de la misma. *Mesh Control* se utiliza para realizar un mallado local, es decir, cuando queremos aplicar diferentes mallados a cada una de las piezas de un ensamble. Estos comandos, una vez utilizados, aparecerán en el árbol debajo de *Mesh*. A continuación, se explicarán cada uno de ellos:

- ❖ *Method*: permite mallar piezas distintas con métodos distintos.
- ❖ *Sizing*: con este comando podremos modificar el tamaño de los elementos en las zonas que nosotros elijamos.



- ❖ Contact Sizing: podremos controlar los elementos en superficies de contacto entre varios cuerpos.
- ❖ Refinement: los controles de refinamiento especifican el número máximo de refinamientos de mallado que se aplican a la malla inicial. Los controles de refinamiento son válidos para caras, aristas y vértices.
- ❖ Face Meshing: los controles de mallado nos permiten generar una malla libre o mapeada en las caras seleccionadas.
- ❖ Match Control: podremos suavizar mallados distintos que convergen en una misma zona.
- ❖ Pinch: mediante *Pinch* podremos eliminar pequeñas bordes y regiones que podrían ser zonas conflictivas.
- ❖ Inflation: con este comando podremos modificar la malla en las zonas superficiales del sólido.

Los comandos de *Mesh Edit* son para modificar la malla, pero se desaconseja su utilización. Una vez explicadas las opciones más importantes a la hora de realizar el mallado, podremos conseguir un mallado que se acerque mucho a la realidad, que ayudará a converger los problemas de análisis lineales e incluso los no lineales. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, si generemos un mallado demasiado refinado implicará un mayor gasto computacional. Por lo tanto, lo mejor es encontrar un punto de equilibrio entre el refinamiento del mallado y la exactitud de los resultados obtenidos.

4.3.1.4-SETUP

En esta célula se generan las condiciones de contorno, ya sean uniones y contactos, cargas aplicadas o condiciones de borde. Para comenzar damos botón derecho del ratón y edit o doble click. Entramos nuevamente al módulo *Mechanical*, por lo que la interfaz es la misma excepto por la ventana gráfica que aparece en la parte inferior de la misma. Como ahora tenemos seleccionado análisis en el árbol tendremos un menú contextual distinto al del mallado. Las condiciones de contorno que se apliquen en el modelo se situarán en el árbol esquemático, dentro de la carpeta *Analysis*. Teniendo seleccionada esta carpeta, en la ventana de detalles nos informará sobre el

tipo de análisis, el solucionador actual y tipo de físicas. Además, podremos modificar la temperatura a la cual se realiza el análisis. Para configurar las características del análisis deberemos seleccionar el icono *Analysis Settings* (ver figura 4.14). Una vez hecho esto, observamos que en la ventana de detalles aparecen diferentes características o parámetros relacionados con el análisis.

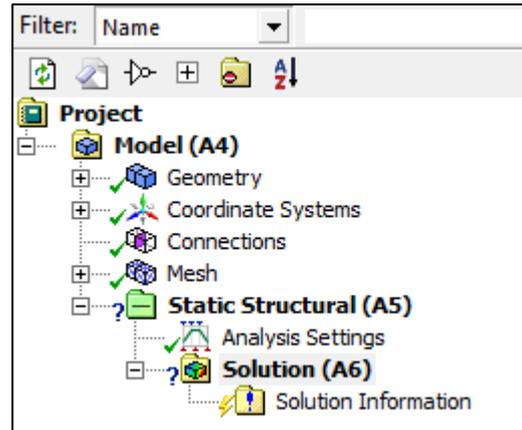


Fig. 4.14: Árbol

La primera familia de parámetros *Step Controls*, nos da la posibilidad de introducir las cargas en varios pasos y en determinados momentos. Por defecto, ANSYS aplica las cargas en un paso con un segundo de duración. Muy útil para análisis no estáticos. La segunda familia (*Solver Controls*) es la que controla la manera en la que se resuelve el problema. Podemos elegir si el programa soluciona el problema directamente o mediante iteraciones. Con el parámetro *Large Deflection* podemos decirle al programa si permitimos grandes deformaciones o no.

Mediante *Rotordynamics Controls* podremos añadir al análisis el efecto de la fuerza de Coriolis. En *Nonlinear Controls* podremos modificar los métodos de cálculo y su convergencia para problemas no lineales. En la familia de parámetros *Output Controls*, podemos activar o desactivar los análisis que queramos realizar. Con *Analysis Data Management* encontramos todo aquello relacionado con la administración de los datos generados en el análisis. También nos informa si la solución es lineal o no lineal.

Después de tener claras las configuraciones del análisis, se explicará la manera de introducir condiciones de contorno y cargas. Para realizar esto, tendremos dos alternativas, o bien click derecho del ratón en la carpeta de análisis y después click en Insertar o bien nos vamos a la barra de herramientas contextual. Una vez elijamos cualquier comando, este aparece en el árbol esquemático debajo de la carpeta de análisis. Además, podremos modificar sus parámetros característicos en la ventana de detalles.



Fig. 4.15: Barra de herramientas contextual



A) INERTIAL

Las primeras condiciones que podemos asignar a nuestro modelo son las cargas de inercia, que serán aplicadas a todo el modelo. Estos comandos están estrictamente relacionados con las aceleraciones y como afectan al sólido rígido, por lo tanto, es obligado tener aplicado un material a nuestro sólido. Sin esto, la segunda ley de Newton estaría indefinida (ecuación 4.1).

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad 4.1)$$

Tenemos una primera opción llamada simplemente *Acceleration*. Mediante este comando podremos agregar una aceleración a nuestro sólido pudiendo elegir la magnitud de la misma y su dirección. Una vez que hayamos aplicado una aceleración a nuestro sólido ya no podremos añadir sucesivas aceleraciones, pero si modificarla en todo momento. El segundo comando, *Estándar Earth Gravity*, es muy parecido al anterior solo que la aceleración que aplicaremos será la correspondiente a la de la gravedad. Como es evidente no podremos modificar este valor, pero si la dirección. Ambos comandos son totalmente compatibles.

Los dos últimos comandos siguen estando relacionados con la aceleración, pero con la aceleración normal y tangencial (ecuaciones 4.2 y 4.3). En ambos se obliga al sólido a girar alrededor de un eje. El primero de ellos *Rotational Velocity* está relacionado con la aceleración normal, la cual siempre está presente en un sólido que esté girando. Pero como considera que la velocidad de rotación es constante no tendremos aceleración tangencial. Esto último si ocurre con el otro comando, llamado *Rotational Acceleration*, en el que tendremos los dos tipos de aceleraciones.

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad 4.2)$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad 4.3)$$

B) LOADS

En *Loads* encontramos las cargas individuales, las cuales pueden ser aplicadas sobre vértices, líneas, superficies y sólidos. Dentro de estas cargas tenemos disponibles dos comandos para añadir cargas de presión. En primer lugar, *Pressure*, con la que podremos distribuir una fuerza sobre la superficie del modelo que necesitemos. La otra carga de presión está relacionada con las cargas de presión hidrostáticas (ecuación 4.4). Representa la carga de un fluido sobre una superficie.



$$P = P_0 + \rho \cdot a \cdot h \quad 4.4)$$

La siguiente carga que podemos definir es *Force* o fuerza. Esta fuerza puede ser aplicada sobre un vértice, una línea o una superficie, aunque al seleccionar una superficie, la carga se aplicara sobre un solo punto de la misma. Podremos asignar el valor de la fuerza y el sentido de la misma. Seguimos con otro comando muy similar llamado *Remote Force* que aplica una fuerza que no tiene por qué estar en el punto que se selecciona.

Tenemos la posibilidad de añadir las fuerzas que aplicaría un cojinete en nuestro sólido. Para ello utilizaríamos el comando *Bearing Load*. Otro comando interesante es *Bolt Pretension* que nos proporcionaría un pretensado en los tornillos.

A continuación, tenemos uno de los comandos más utilizados junto con los de presión. Este es el comando de momento o *Moment*. Servirá con elegir la zona en la que deseamos sea aplicado ese momento y el sentido del mismo. Para elegir el sentido se utiliza un vector de dirección y la regla de la mano derecha.

La siguiente carga que podemos asignar son las líneas de presión con el comando *Line Pressure*. Bastará con seleccionar la línea de trabajo, la magnitud de la fuerza distribuida y el vector de dirección.

También es posible añadir el efecto de la dilatación al calentar el sólido mediante el comando *Thermal Condition*. La temperatura elegida se aplicará en el tiempo que hallamos seleccionado en la ventana de datos tabulados o *Tabular Data*. Con este último comando finalizamos los comandos de cargas.

C) SUPPORTS

En este submenú dispondremos de multitud de elementos de soporte o condiciones de borde, los cuales son imprescindibles para cualquier tipo de análisis ya que restringen los movimientos del cuerpo. Existen varios tipos de soporte.

El primero de ellos es el soporte fijo o *Fixed Support*. Cuando se utiliza este tipo de soporte y se le asigna a una geometría, se obliga a los nodos de esa geometría a permanecer con desplazamiento nulo. Otro comando llamado *Displacement* funciona de una manera similar, exceptuando que podemos elegir un valor de desplazamiento en cualquier dirección para cualquier zona de la geometría. Otro soporte parecido es *Remote Displacement*, con el que podremos hacer lo mismo que con el comando anterior pero el desplazamiento se hace a partir de un punto que puede estar fuera de la superficie elegida.



El siguiente soporte es *Frictionless Support* con el que se permiten movimientos en las direcciones pertenecientes al plano de la cara seleccionada, pero restringe los movimientos en direcciones normales a la misma. Para entenderlo mejor, sería como un ratón de ordenador deslizando por una mesa.

El último soporte que se explicará será *Elastic Support*. Este es de cierta utilidad cuando queremos que una geometría no esté totalmente fija, si no que pueda realizar pequeños desplazamientos si se supera cierta rigidez. El soporte se comporta como un resorte elástico permitiendo cierto desplazamiento. Para los análisis que se llevarán a cabo en este trabajo no será necesario explicar los demás soportes ya que no serán de utilidad, pero la manera en la que se aplican es similar a las mostradas en este apartado.

D) CONDITIONS

Los comandos que aquí aparecen no se utilizarán debido a su complejidad, pero se explicarán por encima alguno de ellos. Mediante *Constraints Equation* podremos relacionar el movimiento de diferentes partes de un modelo mediante el uso de una ecuación.

Con el comando *Nonlinear Adaptive Mesh* lo que hacemos es modificar la malla para mejorar la precisión sin incurrir en un gran gasto computacional. Actúa en base a ciertos criterios que determinan si la malla requiere o no modificación y, de ser así, qué partes necesitan modificarse. Este comando puede ser útil para problemas no lineales que tienen problemas de convergencia o de precisión. Los problemas con grandes deformaciones son los más adecuados para su uso. Para utilizar este comando deberemos activar *Large Deflection* en *Analysis Settings*.

El siguiente comando se utiliza en casos en los que se agrega o elimina material de un sistema, produciendo que ciertos elementos del modelo pueden llegar a aparecer o desaparecer. Para esos casos, podemos usar *Element Birth and Death* y así activar o desactivar los elementos seleccionados.

E) DIRECT FE

Este menú contiene opciones que nos permiten aplicar condiciones de contorno directamente en los nodos de la malla de elementos finitos de nuestro modelo. En los nodos se puede rotar, aplicar fuerzas, presiones y desplazamientos.

Una vez aplicadas todas las condiciones de contorno en la geometría, el modelo quedaría como en la figura 4.16. En la ventana gráfica se encuentra la

geometría con todas las condiciones de contorno bien diferenciadas al igual que en el árbol esquemático.

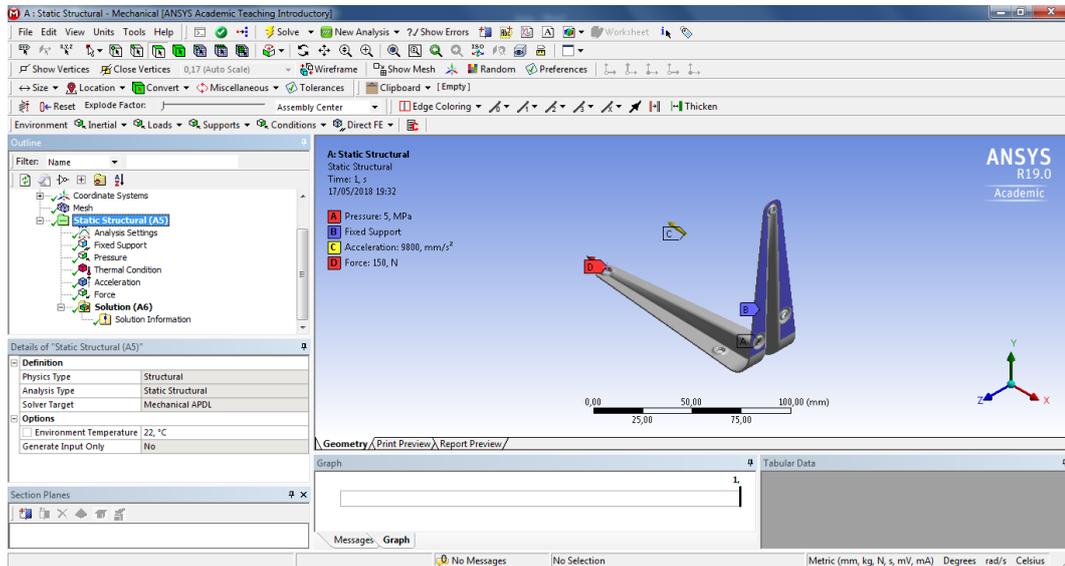


Fig. 4.16: Interfaz con Setup finalizado

4.3.1.5-SOLUTION

El siguiente paso es resolver el problema. En la célula *Solution* se resuelven las ecuaciones generadas en el modelo. Aquí es donde trabaja el motor de cálculo de ANSYS. Entramos al módulo *Mechanical* como anteriores veces y seleccionamos la carpeta *Solution* en el árbol. Aparecen varios parámetros de configuración en la ventana de detalles. *Max refinement loops* permite cambiar el número de bucles. El valor predeterminado es 1 y el rango es de 1 a 10. El parámetro *Refinement Depth* permite refinar aún más la malla a la hora de hacer la simulación para ayudar a asegurar transiciones suaves y evitar la distorsión excesiva del elemento. El rango de valores va de 0 a 3, siendo 2 el valor recomendado para análisis estructurales.

Pero vayamos a lo realmente importante, que es elegir los datos que queremos graficar. Para ello, como siempre podemos hacer click derecho del ratón en la carpeta *Solution* e insertar o irnos a la barra de herramientas contextual. Los tipos de gráficas que elijamos aparecerán en la carpeta *Solution* en el árbol esquemático.

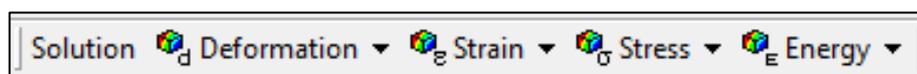


Fig. 4.17: Barra de herramientas contextual

A) DEFORMATION

En primer lugar, tenemos las opciones de graficar deformaciones. Para análisis estructural solo tenemos disponibles las opciones de deformación total y direccional. Al fin y al cabo, los dos comandos realizan el mismo trabajo, ya que en cualquiera de ellos podemos elegir deformación direccional en cualquiera de los tres ejes o deformación total.

B) STRAIN Y STRESS

Con los comandos tipo *Strain* y *Stress* podremos graficar deformaciones unitarias y estados de tensiones. Ambas están relacionadas por lo que se explicarán a la par. La opción *Von Mises* permite representar como un único valor de esfuerzo positivo cualquier estado de esfuerzo tridimensional. La tensión de Von Mises se calcula con la siguiente fórmula:

$$\sigma_e = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \quad 4.5)$$

Para la deformación unitaria Von Mises sería similar con la fórmula:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{1 + \nu} \left[\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}{2} \right]^{1/2} \quad 4.6)$$

Mediante *Maximum Principal/Middle Principal/Minimum Principal* podemos graficar los resultados de las tensiones principales. Estas son tensiones normales originadas al girar el sólido de manera que las que las tensiones cortantes son nulas. Las tensiones principales se ordenan de tal manera que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ al igual que las deformaciones principales $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$. Por lo que tendremos:

$\sigma_1 =$ Tensión Principal Máxima

$\sigma_2 =$ Tensión Principal Media

$\sigma_3 =$ Tensión Principal Mínima

$\varepsilon_1 =$ Deformación Unitaria Principal Máxima

$\varepsilon_2 =$ Deformación Unitaria Principal Media

$\varepsilon_3 =$ Deformación Unitaria Principal Mínima

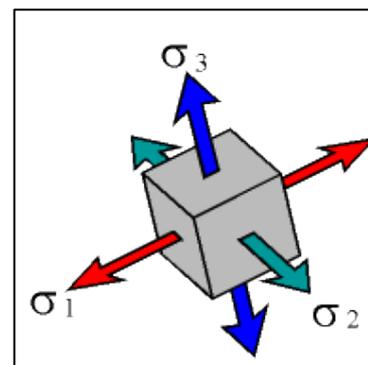
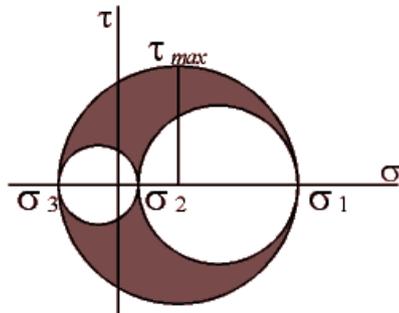


Fig. 4.18: Tensiones principales

Para mostrar los esfuerzos cortantes en nuestro modelo nos serviremos del comando *Maximum Shear*. La teoría nos dice que se calcula trazando los círculos de Mohr con las tensiones principales. Es decir:



$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad 4.7)$$

De igual manera en las deformaciones unitarias:

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad 4.8)$$

Fig. 4.19: Círculo de Mohr

Con el comando *Intensity* graficamos los valores de intensidad, siendo este valor el doble del esfuerzo cortante. La intensidad de deformación unitaria coincide con la deformación unitaria de cizalla.

El comando *Normal* nos proporciona los valores de tensión y deformación unitaria normal en el plano que queramos: XY, XZ y YZ. Por el contrario, el comando *Shear* nos ofrece el esfuerzo cortante o deformación unitaria de cizalla en los 3 planos principales.

Mediante *Vector Principal* obtenemos una visualización tridimensional del tamaño relativo de las tensiones y deformaciones unitarias principales y sus direcciones. Los que tengan un valor positivo señalan hacia fuera del sólido y los negativos hacia adentro.

Una herramienta muy interesante es *Error*, la cual nos muestra las zonas de nuestro sólido en las que hay un mayor error de cálculo. Gracias a esto podremos identificar zonas conflictivas y tomar la decisión de refinar la malla en las mismas consiguiendo mejores resultados. Esta herramienta solo está disponible en esfuerzos de tensiones al igual que las dos siguientes: *Membrane Stress* y *Bending Stress*. La primera calcula las tensiones a lo largo del espesor del sólido en la dirección longitudinal, en la dirección transversal y en plano de cizalladura. Y la segunda representa la variación lineal del tensor de tensiones en el plano a lo largo de la dirección del espesor del sólido. Para poder utilizar estos comandos, nuestro sólido debe ser considerado de pared delgada.

Los siguientes 3 comandos solo están disponibles en la opción *Strain*. Utilizando *Thermal* podemos comprobar la deformación unitaria debida a cambios de temperatura. Como es lógico, podremos utilizarlo si antes aplicamos cargas térmicas. La fórmula para calcular estas deformaciones es la siguiente:

$$\varepsilon_{T^a} = \alpha(T - T_0) \quad 4.9)$$

Podemos graficar las deformaciones permanentes utilizando *Equivalent Plastic*. Esto ocurre al sobrepasar el límite elástico proporcional (figura 4.20).

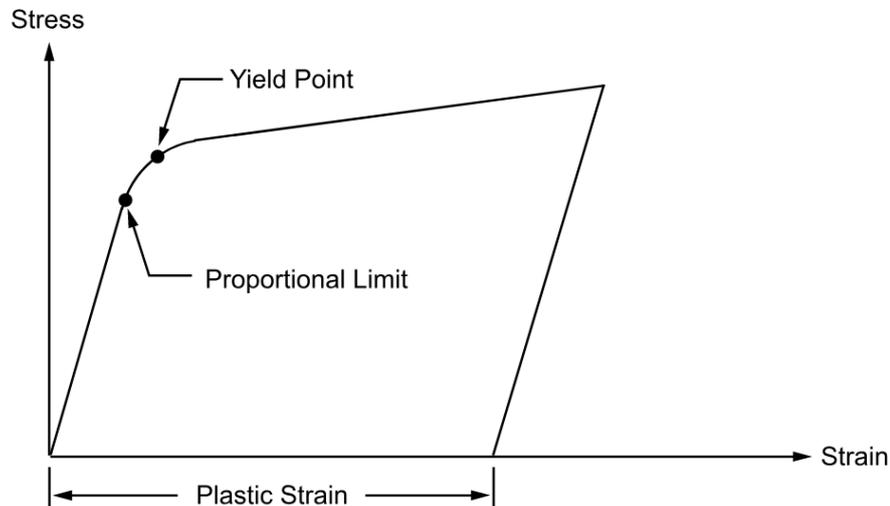


Fig. 4.20: Gráfica Esfuerzo/Deformación unitaria

El último comando perteneciente a *Strain* es *Equivalent Total*, el cual nos proporciona el valor total de la deformación unitaria teniendo en cuenta las deformaciones elásticas, plásticas y térmicas.

C) ENERGY

Mediante *Strain Energy*, si lo utilizamos, el programa calcula la energía almacenada en el sólido debido a la deformación. Sólo faltaría resolver el modelo y obtener las gráficas y resultados. Para ello pulsaremos el botón *Solve* en la paleta de herramientas (también lo encontraremos haciendo click derecho del ratón en la carpeta *Solution* del árbol) o pulsando la tecla F5. A continuación, el programa empieza a realizar cálculos para resolver el problema y si todo ha ido bien, la carpeta *Solution* lucirá tal que así:

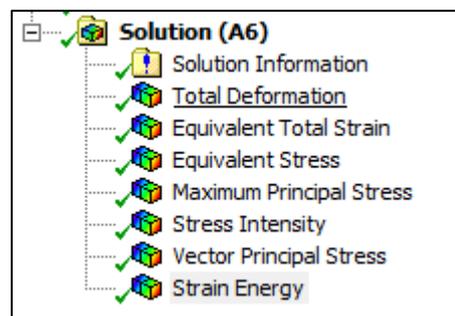


Fig. 4.21: Carpeta SOLUTION resuelta

4.3.1.6-RESULTS

Por último, en esta célula es donde se muestran los resultados de los análisis. Entramos como otras veces al módulo *Mechanical* y seleccionamos el tipo de gráfico que queramos presentar en la ventana de visualización.

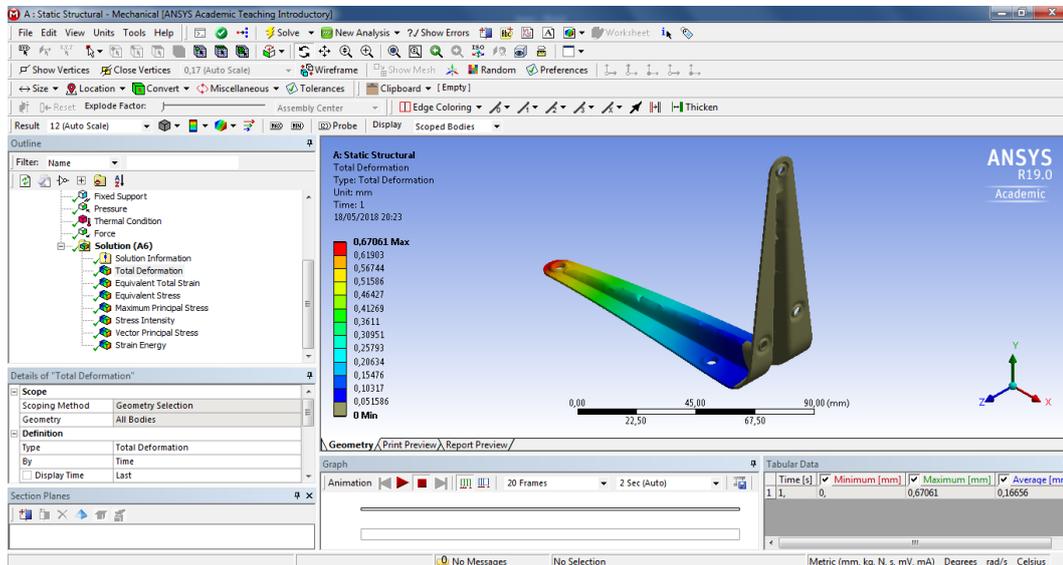


Fig. 4.22: Interfaz Gráfica RESULTS

En la imagen se aprecia la geometría teñida con códigos de colores con su correspondiente escala. Se podrán realizar modificaciones en la misma sin más que hacer click derecho del ratón sobre cualquier parte de la escala. Aparece un menú que nos dará la posibilidad de darle nombre a la escala, cambiar el esquema de color, elegir número de dígitos, notación científica, cambiar a escala logarítmica, etc...

Además, en la ventana *Graph* tenemos un reproductor de videos para ver la evolución de la simulación en movimiento. Y en *Tabular Data* tenemos los valores máximos y mínimos y en qué momento se alcanzan. Como en otras ocasiones, aparece la correspondiente barra de herramientas contextual.



Fig. 4.23: Barra herramientas contextual

Con las etiquetas Max y Min se visualizarán los valores máximos y mínimos. A través del comando *Probe* podremos conocer el valor en cualquier punto.

A) ESCALE

Lo primero que se observa es la escala de las representaciones gráficas. ANSYS suele autoescalar de manera que la visualización sea más atractiva que la escala real. Podremos modificar la misma en cualquier momento.

B) GEOMETRY

Nos ofrece varios comandos para la visualización de las gráficas. En primer lugar, podremos ver los resultados de la simulación con los códigos de colores típicos a través del comando *Exterior*. También podemos hacer que se visualicen isosuperficies, es decir superficies que comparten valor. Por último, con *Capped IsoSurfaces* podremos ver el modelo mediante diferentes barridos de isosuperficies.

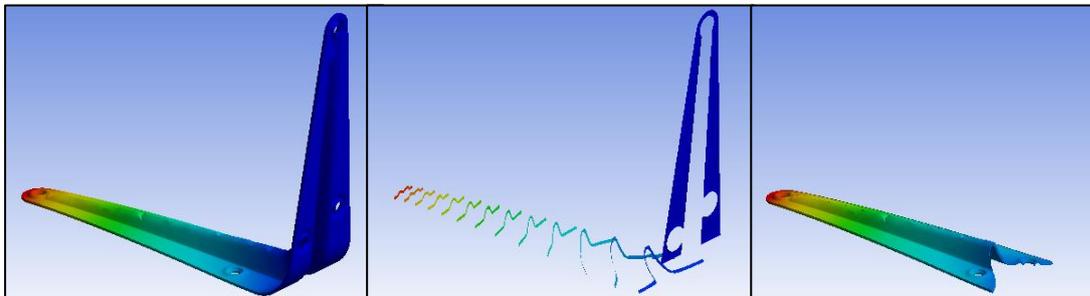


Fig. 4.24: Vista Exterior, IsoSurfaces y Capped IsoSurfaces

C) CONTOURS

En *Contours* podremos modificar la manera en cómo se grafican los colores, desde degradado o *Smooth* hasta isocurvas pasando por bandas de color.

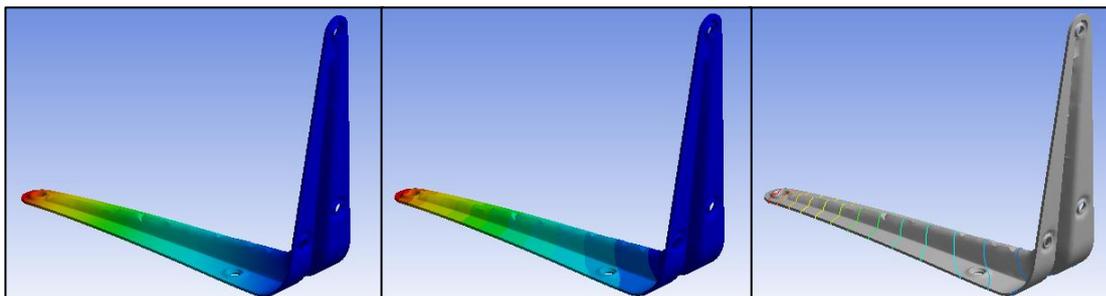


Fig. 4.25: Smooth, Bands e IsoLines

D) EDGES

Con estos comandos se administran tipos de vista de nuestro modelo. Podremos mostrar solamente el sólido una vez realizado el análisis, ver a la vez el sólido deformado e indeformado o mostrarlo mallado después de la simulación.

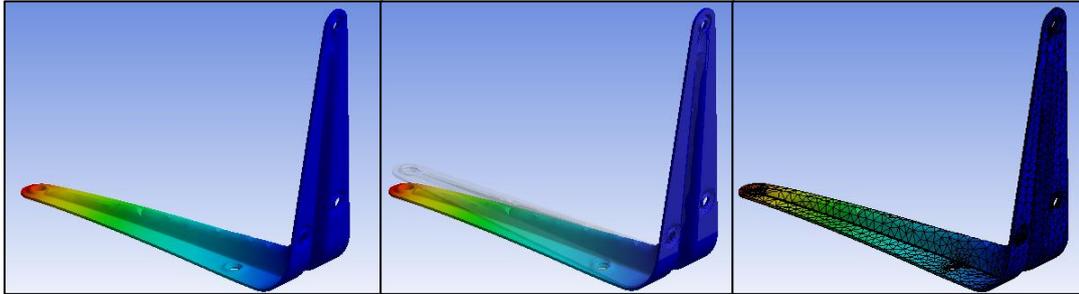


Fig. 4.26: No Wireframe, Show Undeformed Model y Show Elements

E) GRAPHICS

Con esta opción podremos graficar por vectores. Al activar esta opción, en vez de mostrarnos colores sobre el sólido, nos mostrará flechas que indican el valor, la dirección y el sentido de la característica que se esté graficando. También disponemos de varias herramientas de visualización de dichos vectores.

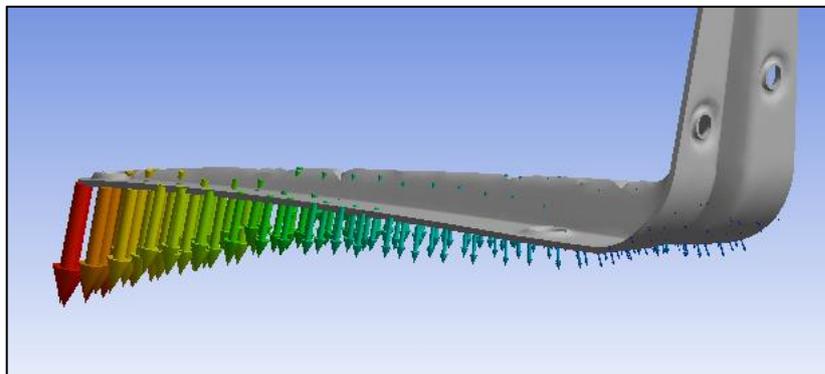
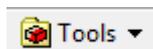


Fig. 4.27: Graphics

F) STRESS TOOL

Con estos comandos podemos calcular el factor de seguridad, el margen de seguridad y el inverso del factor de seguridad. Estas herramientas se encuentran en el icono *Tools*



Estos valores se calculan como:

$$F_S = \frac{\sigma_{\text{límite}}}{\sigma_I} \quad 4.10)$$

$$M_S = F_S - 1 \quad 4.11)$$

$$\sigma_I^* = \frac{1}{F_S} \quad 4.12)$$

Con esto se da por terminada la explicación del análisis estático estructural.

4.3.2-EIGENVALUE BUCKLING

Para poder estudiar el posible pandeo de nuestro modelo utilizaremos la plantilla de análisis de pandeo llamada *Eigenvalue Buckling*. A través de ella podremos encontrar las cargas y momentos críticos y el factor multiplicador de carga. Para poder utilizarlo es necesario haber resuelto el problema estructural con anterioridad, para utilizar los resultados del análisis como datos de entrada.

Empezaremos arrastrando la plantilla hasta hacerla coincidir con la celda *Solution* del análisis estructural. Sin soltarlo, el programa nos informa que ambas plantillas quedarán relacionadas. Se utilizarán los datos de material, geometría y mallado del análisis estático estructural en la plantilla de pandeo, por lo que esos pasos ya no habrá que darlos. Además, se utilizará la información de la solución del análisis estructural como condiciones de contorno en el análisis de pandeo. El esquema queda tal que así:

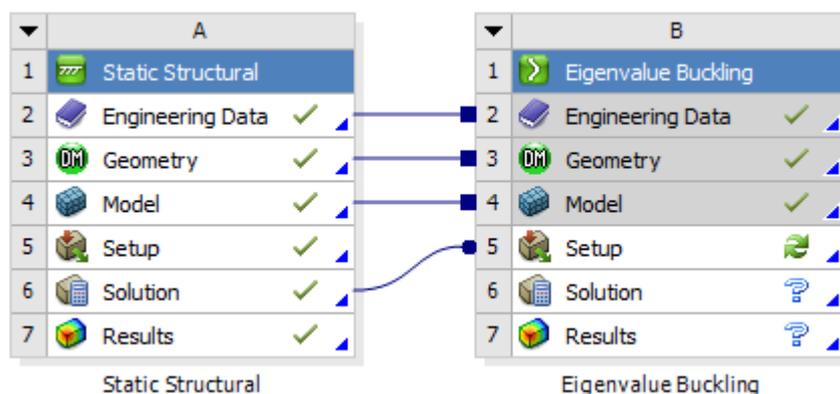


Fig. 4.28: Relación Static Structural/Eigenvalue Buckling

Como se observa en la figura anterior, empezaremos por la celda *Setup* ya que tiene el icono de actualizar. Entramos al módulo *Mechanical* como anteriores

ocasiones y vemos que en el árbol esquemático aparece una nueva carpeta llamada *Eigenvalue Buckling*, en ella se incluirán las configuraciones y los análisis llevados a cabo. En *Analysis Settings* podremos elegir el número de valores propios que queramos que el programa encuentre. Una vez hecho esto hacemos click en *Solve*. Cuando acabe de calcular ANSYS, nos mostrará el valor de los autovalores en la ventana *Tabular Data* y en modo de gráfica en la ventana *Graph* (figura 4.29).

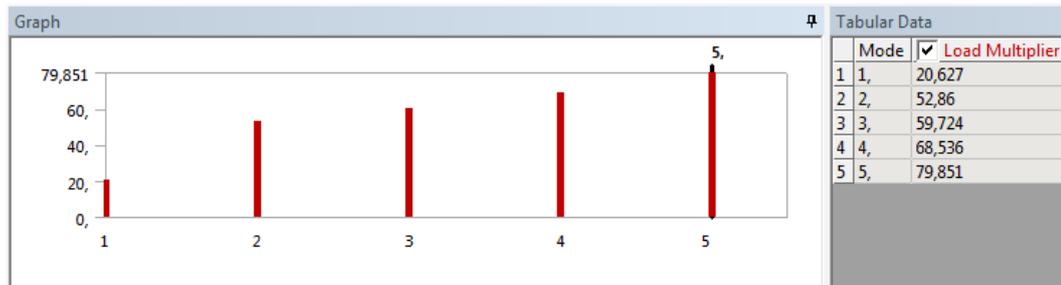


Fig. 4.29: Autovalores de pandeo

Si queremos ver la simulación con alguna carga crítica no tendremos más que seleccionar las que queramos en *Graph* o en *Tabular Data*, después click derecho del ratón y *Create Mode Shape Results*. Haciendo *Solve* otra vez tendremos a nuestra disposición la simulación de deformación en cada uno de los modos que habíamos elegido anteriormente.



Capítulo 5. APLICACIONES PRÁCTICAS

En este capítulo se realizan diversos análisis en vigas, todos ellos relacionados con el pandeo lateral o vuelco. Se utilizarán condiciones de apoyo en horquilla y distintos tipos de cargas para después comparar los resultados teóricos que nos proporciona el CTE con los resultados que ofrece ANSYS. La sección protagonista de este capítulo será una sección IPE300 S275JR, siendo una sección tipo 1. El perfil está colocado de tal manera que el eje de inercia débil coincide con el eje Y. Necesitaremos las siguientes características (*Tabla C.2. [Fuente: Arcelor Mittal]*):

$$f_y = 275 \text{ Mpa}; t < 16\text{mm} \text{ (Tabla C. 1)}$$

$$E = 210.000 \text{ MPa}$$

$$G = 81.000 \text{ MPa}$$

$$I_x = 8356 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 604 \text{ cm}^4$$

$$I_T = 20,1 \text{ cm}^4$$

$$I_a = 126.000 \text{ cm}^6$$

$$W_x = W_{pl,x} = 628 \text{ cm}^3$$

El CTE nos dice que no se deberá comprobar el pandeo lateral en vigas cuya longitud sea inferior a 40 veces el radio de giro mínimo. Por lo que:

$$L_{\min} = 40 \cdot i_{\min} = 40 \cdot 33,5\text{mm} = 1340\text{mm}$$

Por tanto, se realizarán los análisis para vigas de 2m, 4m, 6m, 8m, 10m, 12m y 16m. Además, tendremos en cuenta que, para secciones sometidas a flexión, el momento plástico será:

$$M_{pl,Rd} = W_{pl,x} \cdot \frac{f_y}{1,05} = 164,47619 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad 5.1)$$

Cabe resaltar que no se ha tenido en cuenta el peso propio de la viga, ya que ésta podría estar en distintas posiciones y nos parecía irrelevante introducir este tipo de cargas. En cuanto al mallado, se utilizará el mismo para todas y cada una de las vigas, ya que al ser similares no hará falta refinar la malla. Se utilizará una malla de tipo adaptativo, con el centro de relevancia fino y una relevancia de 30. El tamaño máximo de los elementos finitos estará en modo

automático. Como los perfiles IPE tienen las aristas de la unión alma-alas redondeadas, necesitaremos reducir el ángulo del elemento al mínimo posible para adaptarse mejor a estas curvaturas. Además, se utilizará una transición lenta por lo que tendremos una media de unos 30.000 nodos en cada mallado.

El estudio del pandeo lateral tiene en cuenta apoyos en horquilla, por lo que estos serán los más utilizados en las simulaciones. A medida que íbamos realizando diferentes pruebas con el software nos fuimos dando cuenta que ANSYS no tiene muy depurado la introducción de soportes típicos de sistemas estructurales. Quizás el programa esté pensado más para sistemas mecánicos. Para conseguir una aproximación a los apoyos en horquilla se hizo lo siguiente:

Para permitir los giros en el eje X y en Y, introducimos un soporte displacement seleccionando el eje de simetría paralelo al alma. Además, le prohibiremos desplazamientos en X. Para fijar el centro de rotación en Y, introducimos otro soporte displacement seleccionando el eje de simetría paralelo a las alas prohibiendo desplazamientos en Y. Por último, para evitar movimientos de sólido rígido, restringimos el movimiento del centro de gravedad de la sección.

5.1-MOMENTO CONSTANTE ($\Psi=1$)

En este primer análisis la carga que se aplicará será un momento en el extremo A y otro de signo contrario en el extremo B (figura 6.1). La distribución de momentos a lo largo de la barra será constante por lo que $\psi=1$. Los apoyos serán tipo horquilla, por lo que en los apoyos se permite alabeo, giro en el eje X y giro en el eje Y.

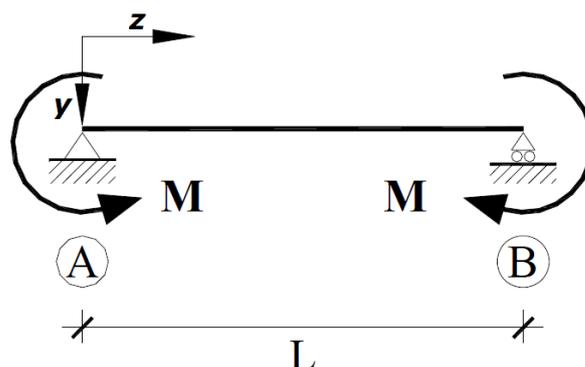


Fig. 5.1: Momento positivo aplicado en el extremo A y momento negativo aplicado en el extremo B ($\psi=1$)

En primer lugar, se llevarán a cabo a cabo los cálculos matemáticos gracias a las fórmulas proporcionadas por el CTE para una viga de 6 metros. Calculamos el momento crítico de pandeo mediante la fórmula 2.32. Necesitamos el factor C_1 , este valor los sacamos de la tabla 2.3 teniendo en cuenta que tenemos



apoyos en horquilla y $\psi=1$. Por tanto, $C_1=1$. Para el factor $k_y=1$ (horquilla) y para el factor k_a tomamos valor 1. Por lo tanto, nos queda un momento crítico:

$$M_{cr} = \frac{C_1\pi}{k_y L} \sqrt{EI_y G I_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EI_a}{G I_T} \left(\frac{\pi}{k_a L}\right)^2} \right] = 90,47 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Una vez hecho esto podremos calcular la esbeltez reducida mediante la fórmula 2.22, teniendo en cuenta que como la sección es de tipo 1 el módulo resistente a utilizar será el plástico.

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{628.000 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ MPa}}{90.465.983,61 \text{ N} \cdot \text{mm}}} = 1,38$$

El siguiente paso es calcular el coeficiente de reducción de pandeo lateral, pero antes necesitaremos el valor de ϕ (ecuación 2.21) con un coeficiente de imperfección elástica 0,21 (tabla 2.2 con $h/b=2$):

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,21 \cdot (1,38 - 0,2) + 1,38^2] = 1,58$$

Por tanto, mediante la ecuación 2.20:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{1,58 + \sqrt{1,58^2 - 1,38^2}} = 0,43$$

Así que, el momento flector resistente al pandeo es (ecuación 2.19):

$$M_{b,Rd} = 0,43 \cdot 628.000 \text{ mm}^3 \frac{275 \text{ MPa}}{1,05} = 70,23 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

En la siguiente tabla se muestran los valores calculados para los diferentes tamaños de vigas.

CTE					
L	M_{cr}	λ	ϕ	χ	$M_{b,Rd}$
2 m	505,25 kN·m	0,58	0,71	0,90	147,32 kN·m
4 m	159,71 kN·m	1,04	1,13	0,64	104,89 kN·m
6 m	90,47 kN·m	1,38	1,58	0,43	70,23 kN·m
8 m	63,11 kN·m	1,65	2,02	0,31	51,69 kN·m
10 m	48,63 kN·m	1,88	2,45	0,25	40,89 kN·m
12 m	39,66 kN·m	2,09	2,88	0,21	33,89 kN·m
16 m	29,09 kN·m	2,44	3,70	0,15	25,33 kN·m

Tabla 5.1: Momento crítico y momento resistente según CTE para $\psi=1$

Como se observa en la tabla, el momento crítico decrece a medida que aumenta la esbeltez de la viga, tal y como se dijo en el apartado 2.1.2. Además, en la viga de dos metros (menos esbelta), al tener una esbeltez reducida menor que la unidad, la diferencia entre el momento crítico y el momento resistente es considerable. Lo que ocurre en este caso es que algunas fibras comienzan a plastificar favoreciendo el pandeo lateral. En el caso de la viga de 4 metros, estaremos en la zona anelástica ya que la esbeltez reducida es menor que el límite de esbeltez proporcional:

$$\bar{\lambda}_p = \frac{\lambda_p}{\lambda_{cr}} = \frac{97}{86,8} \approx 1,12$$

A continuación, haremos la simulación mediante ANSYS. Se recreará el análisis en una viga de 6 metros. Aplicamos un momento de valor 1000 N·mm en el extremo A y otro momento en el extremo B de -1000 N·mm. Resolvemos el análisis y el programa nos calcula un factor multiplicador de carga de 91.238.000, por lo que tendremos:

$$M_{b,Rd} = 91,238 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

En la siguiente imagen se aprecia la viga en el momento del pandeo teniendo en cuenta que está sobreescalado 150 veces:

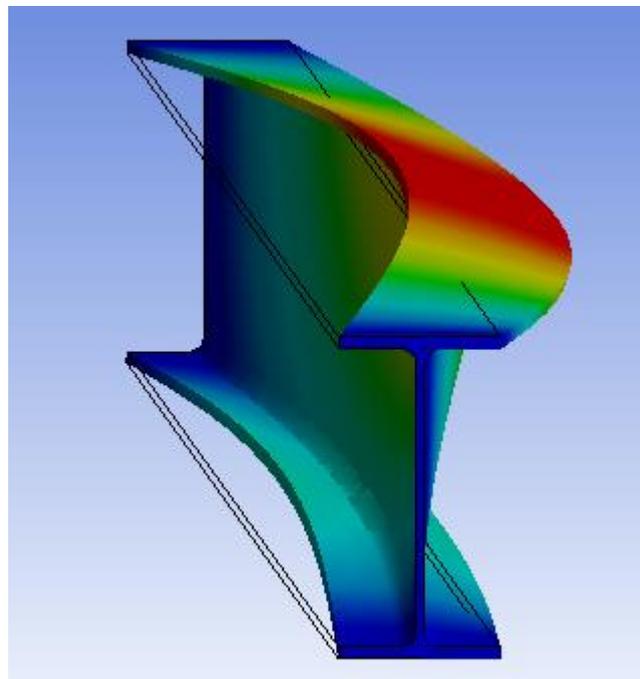


Fig. 5.2: Modo de pandeo para $\psi=1$

En un primer momento parecía que habíamos hecho algo mal, ya que este valor es casi un 30% más que el valor teórico, pero lo que ocurre es que ANSYS

calcula la carga crítica sin tener en cuenta los factores que se nombraron en el apartado 2.1.2:

- Módulo de Young no constante
- Excentricidad de la carga
- Imperfecciones geométricas
- Tensiones residuales

Por tanto, sería más correcto:

$$M_{cr} = 91,238 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Así que tendremos que calcular el valor de cálculo de la resistencia frente a pandeo lateral, $M_{b,Rd}$ para ANSYS como ya hicimos con los cálculos teóricos mediante $\bar{\lambda}_{LT}$, ϕ_{LT} y χ_{LT} :

ANSYS					
L	M_{cr}	λ	ϕ	χ	$M_{b,Rd}$
2 m	495,13 kN·m	0,59	0,72	0,89	146,96 kN·m
4 m	159,7 kN·m	1,04	1,13	0,64	104,88 kN·m
6 m	91,24 kN·m	1,38	1,57	0,43	70,712 kN·m
8 m	65,11 kN·m	1,63	1,98	0,32	53,13 kN·m
10 m	50,79 kN·m	1,84	2,37	0,26	42,54 kN·m
12 m	42,11 kN·m	2,03	2,74	0,22	35,83 kN·m
16 m	32,04 kN·m	2,32	3,42	0,17	27,75 kN·m

Tabla 5.2: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para $\psi=1$

Como vemos en la tabla 5.2, los resultados son bastante similares a los mostrados en la tabla 5.1. En términos absolutos la mayor diferencia entre momentos críticos corresponde a las vigas menos esbeltas, mientras que en términos relativos hay mayor diferencia en vigas más esbeltas.

En la figura 6.3 se muestra una gráfica comparando los resultados teóricos del momento resistente con los que ofrece ANSYS:

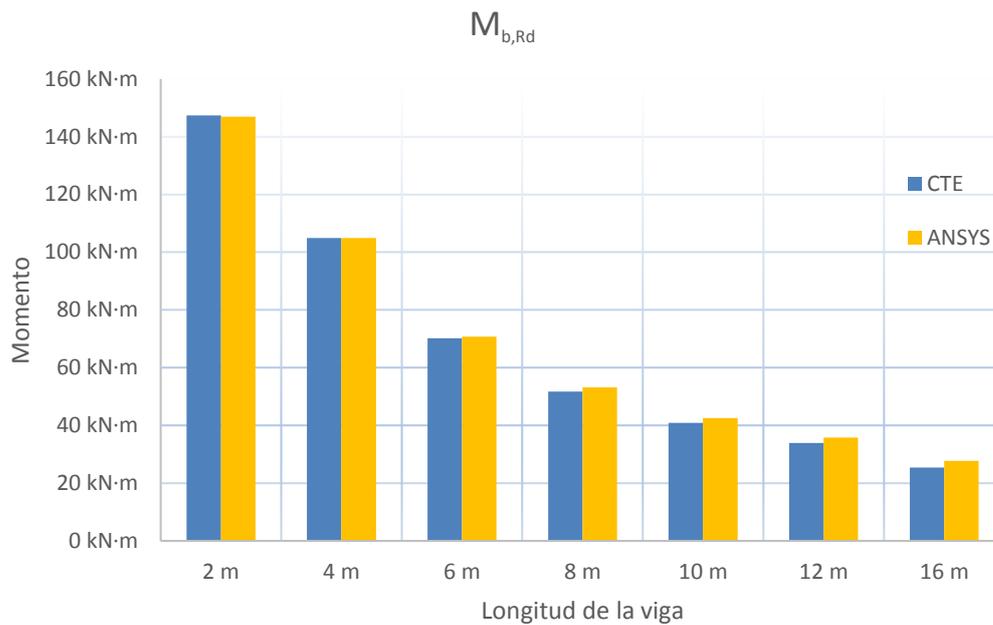


Fig. 5.3: Comparación entre momentos resistentes para $\psi=1$

5.2-MOMENTO LINEAL ($\Psi=0$)

Este segundo análisis será muy similar al anterior, solo que se aplicará un solo momento en el extremo A. La distribución de momentos a lo largo de la barra será lineal con $\psi=0$. Los apoyos siguen siendo tipo horquilla, por lo que estará permitido en los apoyos: alabeo, giro en el eje X y giro en el eje Y.

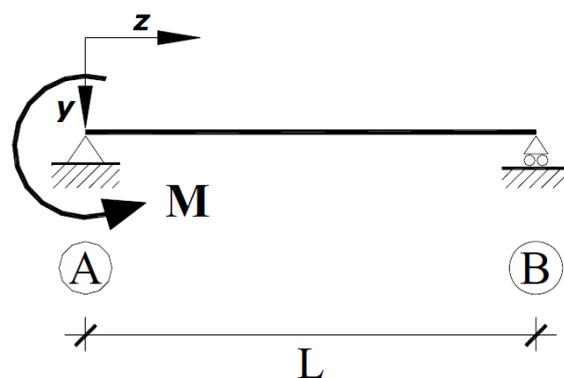


Fig. 5.4: Momento aplicado en el extremo A ($\psi=0$)

Calculamos el momento crítico de pandeo para una viga de 6 metros. En esta ocasión el factor C_1 , tiene diferente valor a la unidad, valdrá 1,879. Debemos

tener en cuenta apoyos en horquilla y $\psi=0$ para la correcta elección del factor. El factor $k_y=1$ (por ser en horquilla) y el factor $k_a=1$. Por lo tanto, tenemos:

$$M_{cr} = \frac{C_1\pi}{k_y L} \sqrt{EI_y G I_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EI_a}{G I_T} \left(\frac{\pi}{k_a L}\right)^2} \right] = 169,98 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Como la anterior vez, hallamos la esbeltez reducida:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{628.000 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ MPa}}{169985583 \text{ N} \cdot \text{mm}}} = 1,01$$

El valor de ϕ :

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,21 \cdot (1,01 - 0,2) + 1,01^2] = 1,09$$

El coeficiente de reducción de pandeo lateral:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{1,09 + \sqrt{1,09^2 - 1,01^2}} = 0,66$$

Y el momento flector resistente al pandeo es:

$$M_{b,Rd} = 0,66 \cdot 628.000 \text{ mm}^3 \frac{275 \text{ Mpa}}{1,05} = 108,56 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

En la siguiente tabla se muestran los valores calculados para las diferentes vigas estudiadas.

CTE					
L	M_{cr}	λ	ϕ	χ	$M_{b,Rd}$
2 m	949,37 kN·m	0,43	0,61	0,95	155,54 kN·m
4 m	300,1 kN·m	0,76	0,85	0,82	134,62 kN·m
6 m	169,98 kN·m	1,01	1,09	0,66	108,56 kN·m
8 m	118,58 kN·m	1,21	1,33	0,53	86,468 kN·m
10 m	91,38 kN·m	1,37	1,57	0,43	70,801 kN·m
12 m	74,52 kN·m	1,52	1,80	0,36	59,735 kN·m
16 m	54,65 kN·m	1,78	2,25	0,28	45,464 kN·m

Tabla 5.3: Momento crítico y momento resistente según el CTE para $\psi=0$

En las vigas de 2 y 4 metros la sección está en la zona plástica ya que la esbeltez reducida es menor que la unidad. Esto disminuye la resistencia de la viga. La viga de 6 metros se encuentra en la zona anelástica. Si comparamos los resultados de esta tabla con la del apartado anterior, vemos que

necesitamos un momento mayor para producir el vuelco, ya que el momento flector en el centro de la viga (zona más factible de pandeo) es menor en este caso que el anterior.

A continuación, haremos la simulación mediante ANSYS a sabiendas que lo que obtendremos será el momento crítico. Aplicamos un momento de valor 1000 N·mm en el extremo A. Resolvemos el análisis y el programa nos calcula un factor multiplicador de carga de 167.890.000, por lo que tendremos:

$$M_{cr} = 167,89 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

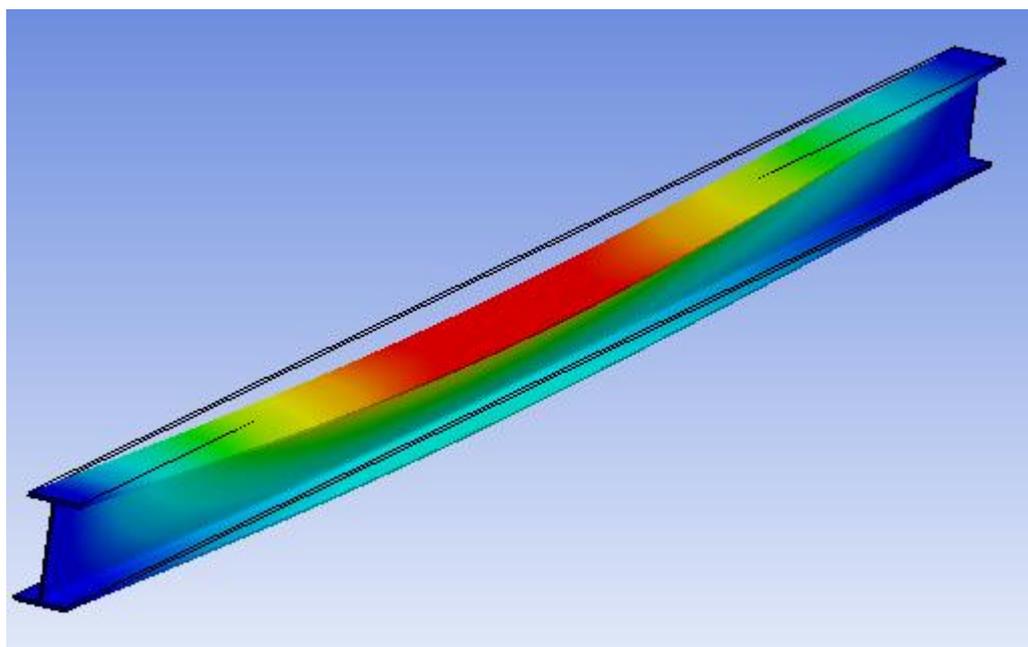


Fig. 5.5: Modo de pandeo para $\psi=0$

A continuación calculamos $M_{b,Rd}$ para ANSYS y para distintos tamaños de vigas:

ANSYS					
L	M_{cr}	λ	ϕ	χ	$M_{b,Rd}$
2 m	872,5 kN·m	0,44	0,62	0,94	154,7 kN·m
4 m	292,23 kN·m	0,77	0,86	0,81	133,73 kN·m
6 m	167,89 kN·m	1,01	1,10	0,66	107,84 kN·m
8 m	118,04 kN·m	1,21	1,34	0,52	86,183 kN·m
10 m	91,81 kN·m	1,37	1,56	0,43	71,071 kN·m
12 m	75,77 kN·m	1,51	1,78	0,37	60,587 kN·m
16 m	59,37 kN·m	1,71	2,11	0,30	48,964 kN·m

Tabla 5.4: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para $\psi=0$

Seguimos teniendo unos valores muy similares para el estudio teórico y la simulación. A continuación, se muestra la comparación entre ambos resultados:

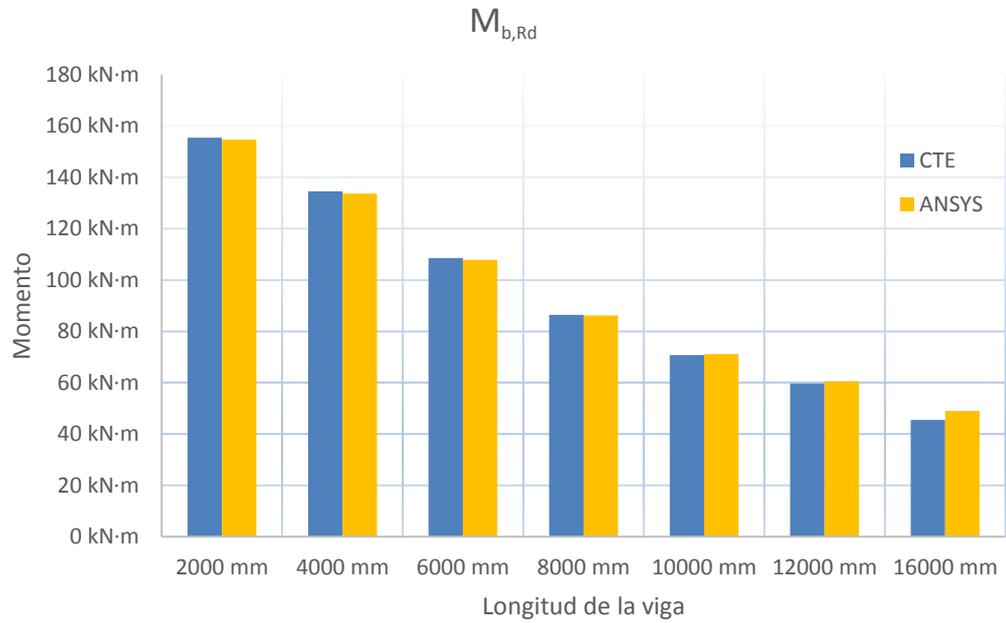


Fig. 5.6: Comparación entre momentos resistentes para $\psi=0$

5.3-MOMENTO LINEAL ($\Psi=-1$)

Este será el último análisis para aplicación de momentos ya que todos son muy similares. En este caso se aplicará un momento en el extremo A y otro en el extremo B, ambos en el mismo sentido. La distribución de momentos a lo largo de la barra será lineal con $\psi=-1$. Los apoyos siguen siendo tipo horquilla, por lo que estará permitido en los apoyos: alabeo, giro en el eje X y giro en el eje Y.

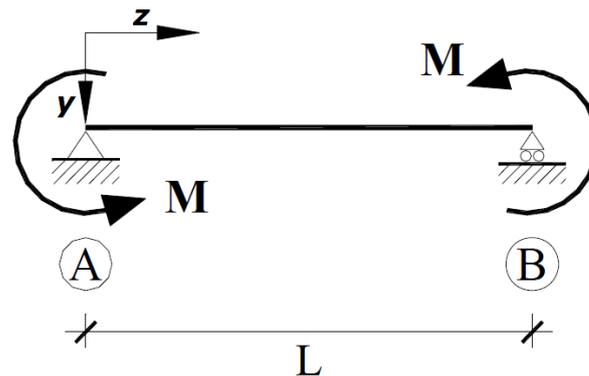


Fig. 5.7: Momentos iguales aplicados en los extremos ($\psi=-1$)

Como siempre empezamos a calcular el momento crítico de pandeo para una viga de 6 metros. Teniendo en cuenta apoyos en horquilla y $\psi=-1$, el factor C_1 valdrá 2,752. El factor $k_y=1$ (horquilla) y el factor $k_a=1$. Por lo tanto, tenemos:

$$M_{cr} = \frac{C_1\pi}{k_y L} \sqrt{EI_y G I_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EI_a}{G I_T} \left(\frac{\pi}{k_a L} \right)^2} \right] = 248,96 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Calculamos la esbeltez reducida:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{628.000 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ MPa}}{248.962.387 \text{ N} \cdot \text{mm}}} = 0,83$$

El valor de ϕ :

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,21 \cdot (0,83 - 0,2) + 0,83^2] = 0,91$$

El coeficiente de reducción de pandeo lateral:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{0,91 + \sqrt{0,91^2 - 0,83^2}} = 0,78$$

Y el momento flector resistente al pandeo es:

$$M_{b,Rd} = 0,78 \cdot 628.000mm^3 \frac{275Mpa}{1,05} = 127,697 kN \cdot m$$

A continuación, se muestra la tabla con todos los cálculos para todas las vigas:

CTE					
L	M _{cr}	λ	φ	χ	M _{b,Rd}
2 m	1390,45 kN·m	0,35	0,58	0,96	158,704 KN·m
4 m	439,53 kN·m	0,63	0,74	0,88	144,662 KN·m
6 m	248,96 kN·m	0,83	0,91	0,78	127,697 KN·m
8 m	173,67 kN·m	1,00	1,08	0,67	109,799 KN·m
10 m	133,83 kN·m	1,14	1,24	0,57	94,0259 KN·m
12 m	109,15 kN·m	1,26	1,40	0,49	81,351 KN·m
16 m	80,05 kN·m	1,47	1,71	0,38	63,4704 KN·m

Tabla 5.5: Momento crítico y momento resistente según CTE para ψ=-1

La viga de 2m tiene una esbeltez reducida menor que 0,4, por lo que plastifica antes de pandear. Como el momento flector en el centro de la viga es menor que en los apartados anteriores se necesitará un momento mayor para producir el pandeo.

Ahora realizamos el análisis con ANSYS aplicando un momento de valor 1000 N·mm en el extremo A y otro de igual valor en B. Resolvemos el análisis y el factor multiplicador de carga de 246.450.000, por lo que tendremos:

$$M_{cr} = 246,45 kN \cdot m$$

En la figura 6.8 se observa que el modo de pandeo cambia respecto a los 2 análisis anteriores.

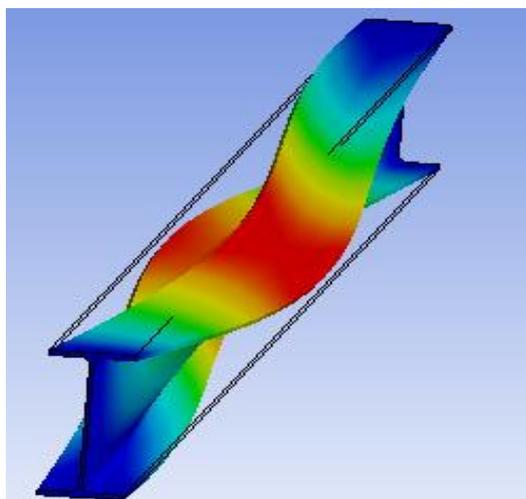


Fig. 5.8: Modo de pandeo para ψ=-1

Calculamos $M_{b,Rd}$ para ANSYS y para distintos tamaños de vigas:

ANSYS					
L	M_{cr}	λ	ϕ	χ	$M_{b,Rd}$
2 m	985,35 kN·m	0,42	0,61	0,95	155,89 KN·m
4 m	418,01 kN·m	0,64	0,75	0,87	143,59 KN·m
6 m	246,45 kN·m	0,84	0,92	0,77	127,28 KN·m
8 m	174,27 kN·m	1,00	1,08	0,67	109,99 KN·m
10 m	134,97 kN·m	1,13	1,24	0,57	94,553 KN·m
12 m	111,28 kN·m	1,25	1,39	0,5	82,537 KN·m
16 m	84,24 kN·m	1,43	1,65	0,4	66,237 KN·m

Tabla 5.6: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para $\psi=-1$

Tenemos unos resultados satisfactorios excepto en la viga de 2 metros ya que la diferencia entre los valores calculados y la simulación está en torno al 40%. Como se verá en los siguientes análisis, este tamaño de viga es muy conflictiva en el cálculo del momento crítico. Sin embargo, gracias al coeficiente de reducción por pandeo χ , el momento resistente en ambos estudios es muy similar. La comparación entre ambos análisis:

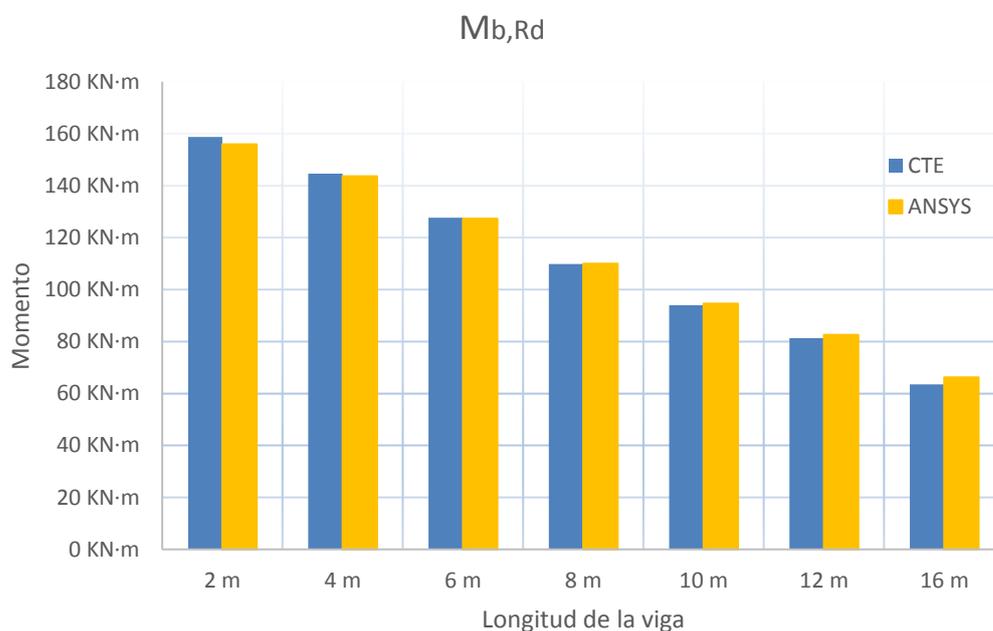


Fig. 5.9: Comparación entre momentos resistentes para $\psi=-1$

5.4-CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA (CASO I)

En esta ocasión se estudiará el pandeo lateral o vuelco en presencia de una carga uniformemente distribuida q , por lo que hallaremos la carga distribuida crítica. El estudio se llevará a cabo con apoyos en horquilla, por lo que se posibilita el alabeo ($k_a=1$) y los giros en X y en Y ($k_y=1$). Además, existe la posibilidad de aplicar la carga en ambas alas y en el centroide de la sección, por lo que habrá que verificar estos casos.

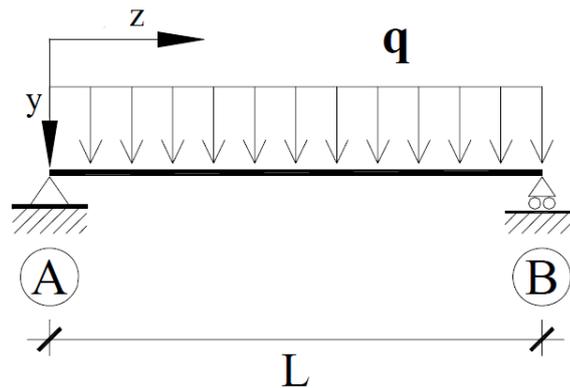


Fig. 5.10: Carga uniformemente distribuida con apoyos en horquilla

La longitud de la viga a estudio será de 6 metros. Entramos en la tabla 2.3 con un momento parabólico, nulo en los extremos y con $k_y=1$. Tendremos un valor de 1,132 para el factor C_1 . También necesitaremos el factor C_2 , ya que el punto de aplicación varía. C_2 toma un valor de 0,459. Seguidamente se mostrará el procedimiento para la aplicación de cargas en el centroide de la sección. Tendremos un momento crítico de valor:

$$M_{cr} = \frac{C_1 \pi}{k_y L} \sqrt{EI_y GI_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EI_a}{GI_T} \left(\frac{\pi}{k_a L}\right)^2 (1 + C_2^2)} \pm \frac{C_2 \pi}{k_a L} \sqrt{\frac{EI_a}{GI_T}} \right] = 102,41 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Una vez hecho esto podremos calcular la esbeltez reducida:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{628.000 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ MPa}}{102.407.493 \text{ N} \cdot \text{mm}}} = 1,3$$

El siguiente paso es calcular el coeficiente de reducción de pandeo lateral mediante ϕ :

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,21 \cdot (1,3 - 0,2) + 1,3^2] = 1,46$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{1,46 + \sqrt{1,46^2 - 1,3^2}} = 0,47$$

Así que, el momento flector resistente en el cual aparece el pandeo lateral es:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{1,05} = 0,47 \cdot 628.000 \text{mm}^3 \frac{275 \text{Mpa}}{1,05} = 77.487.389 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Pero como nos interesa calcular la carga distribuida crítica, tendremos que calcular el momento flector máximo para apoyos articulados. Este momento máximo aparece en el centro de la viga:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{1}{8} qL^2$$

Igualando los dos momentos podremos despejar la carga distribuida crítica:

$$q_{b,Rd} = 17,22 \text{ N/mm}$$

En la siguiente tabla se muestran los valores calculados para los diferentes tamaños de vigas con la carga aplicada en el centroide. Para carga aplicada en las alas el proceso sería similar, pero utilizando C_2 .

CTE						
L	M_{cr} (centroide)	λ (centroide)	ϕ (centroide)	χ (centroide)	$M_{b,Rd}$ (centroide)	$q_{b,Rd}$ (centroide)
2 m	571,95 kN·m	0,55	0,69	0,86	149,37 kN·m	298,7 kN/m
4 m	180,8 kN·m	0,98	1,06	0,56	112,07 kN·m	56,03 kN/m
6 m	102,41 kN·m	1,30	1,46	0,38	77,49 kN·m	17,22 kN/m
8 m	71,44 kN·m	1,55	1,85	0,29	57,6 kN·m	7,2 kN/m
10 m	55,05 kN·m	1,77	2,23	0,24	45,76 kN·m	3,66 kN/m
12 m	44,89 kN·m	1,96	2,61	0,20	38,01 kN·m	2,11 kN/m
16 m	32,92 kN·m	2,29	3,34	0,16	28,48 kN·m	0,889 kN/m

Tabla 5.7: Momento crítico y momento resistente según CTE para una carga uniformemente distribuida con apoyos en horquilla

Como en anteriores apartados, las vigas de 2 y 4 metros están en zona de plastificación por lo que existe una gran diferencia entre momento crítico y momento resistente. Además, vemos que la carga distribuida uniformemente resistente disminuye cuadráticamente respecto a la longitud de la viga.

A continuación, haremos la simulación mediante ANSYS. Ahora es el momento de aplicar la carga distribuida, para ello aplicamos una carga de 1 kN/m en el

centroide de la sección. Resolvemos el análisis y el programa nos calcula un factor multiplicador de carga de 23,2, por lo que tendremos:

$$q_{cr} = 23,2 \frac{kN}{m} \rightarrow M_{cr} = \frac{1}{8} q_{cr} L^2 = 103,41 kN \cdot m$$

Una vez tenemos el momento crítico, calcularemos $M_{b,Rd}$ como ya hicimos con los cálculos teóricos mediante $\bar{\lambda}_{LT}$, ϕ_{LT} y χ_{LT} . Este mismo análisis se ha realizado para vigas de diferentes tamaños como anteriormente y aplicando la carga en el ala superior e inferior. En la siguiente tabla se muestran los valores calculados.

ANSYS						
L	M_{cr} (centroide)	λ (centroide)	ϕ (centroide)	χ (centroide)	$M_{b,Rd}$ (centroide)	$q_{b,Rd}$ (centroide)
2 m	526,4 kN·m	0,57	0,49	0,73	148,03 kN·m	296,1 kN/m
4 m	185,91 kN·m	0,96	0,84	1,16	113,61 kN·m	56,81 kN/m
6 m	103,41 kN·m	1,29	1,14	1,46	78,07 kN·m	17,35 kN/m
8 m	74,76 kN·m	1,52	1,39	1,70	59,9 kN·m	7,487 kN/m
10 m	57,69 kN·m	1,73	1,60	1,90	47,72 kN·m	3,818 kN/m
12 m	47,88 kN·m	1,90	1,78	2,05	40,32 kN·m	2,24 kN/m
16 m	36,16 kN·m	2,19	2,08	2,31	31,09 kN·m	0,97 kN/m

Tabla 5.8: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para una carga uniformemente distribuida con apoyos en horquilla

Dichos valores son bastante satisfactorios ya que son muy similares a los calculados mediante el CTE. En la siguiente imagen se aprecia el modo de pandeo:

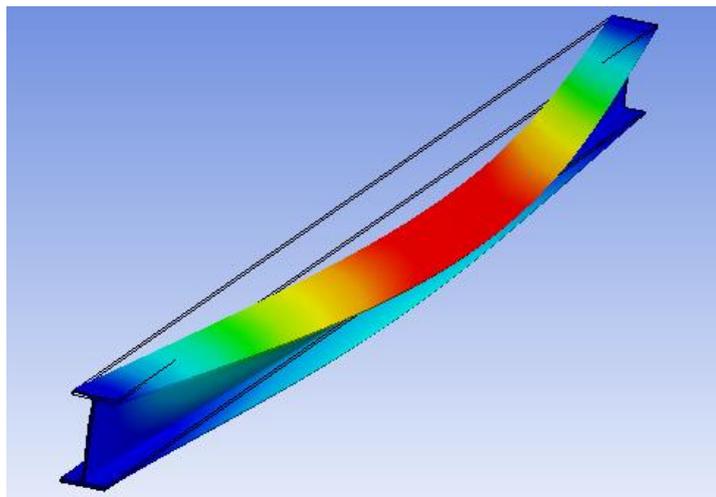


Fig. 5.11: Modo de pandeo para una carga uniformemente distribuida con apoyos en horquilla

Como se observa en la figura 5.12, en la que se muestran los resultados ofrecidos por ANSYS para diferentes aplicaciones de cargas, la aplicación en el ala superior favorece el pandeo lateral y en el ala inferior contrarresta el mismo tal y como se dijo en el apartado 2.2. Resaltar que la escala es logarítmica para el eje de las cargas distribuidas.

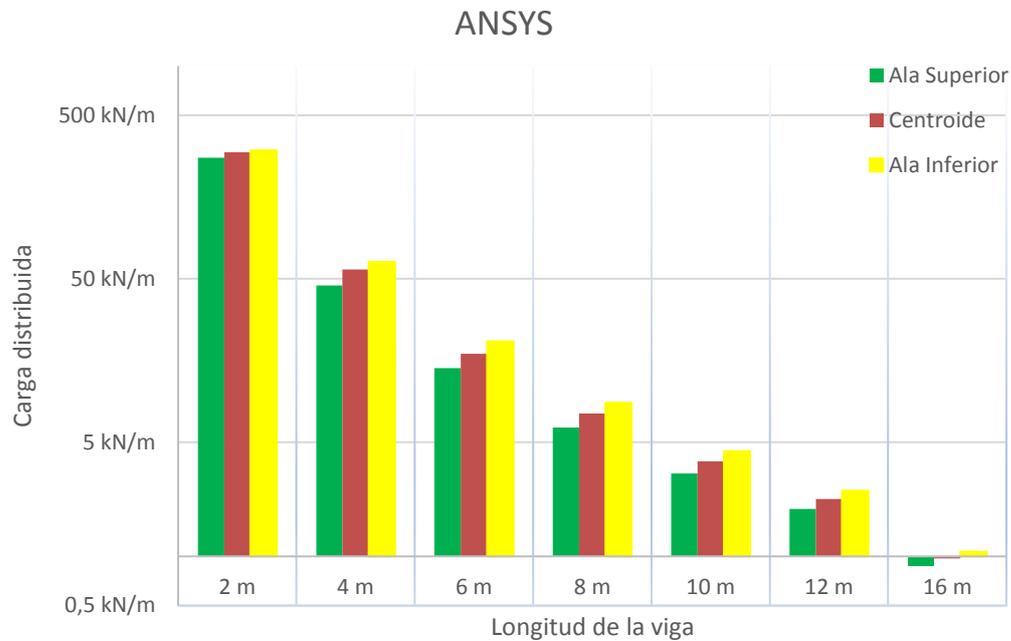


Fig. 5.12: Carga uniformemente distribuida resistente aplicada en el ala superior, ala inferior y centroide con apoyos en horquilla

Por último, mostrar la diferencia entre el cálculo del CTE y de ANSYS en la figura 5.13. La comparación se hace con cargas aplicadas en el centroide.

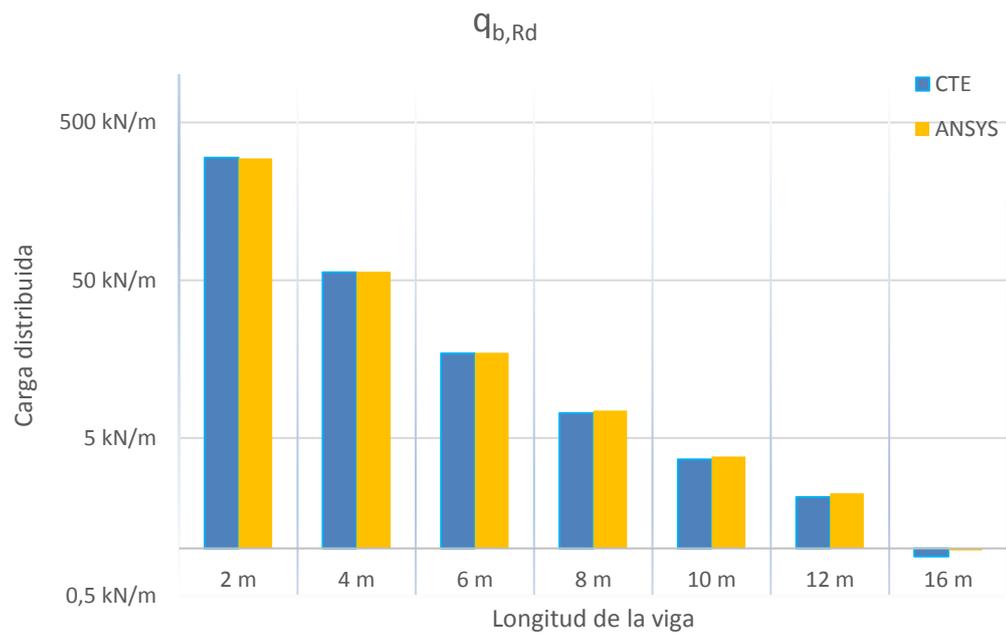


Fig. 5.13: Comparación carga uniformemente distribuida resistente con apoyos en horquilla

5.5-CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA (CASO II)

En esta ocasión se estudiará el mismo caso que en el apartado anterior, pero con apoyos empotrados. Solo se permitirá el alabeo ($k_a=1$ y $k_y=0,5$). Para conseguir estos apoyos en ANSYS, lo que hemos hecho es fijar el alma. No representaría exactamente este tipo de apoyo, pero es una buena aproximación al mismo. Además, existe la posibilidad de aplicar la carga en ambas alas y en el centroide de la sección, por lo que habrá que verificar estos casos, aunque solo se mostrarán los análisis en el centroide para no ser repetitivos.

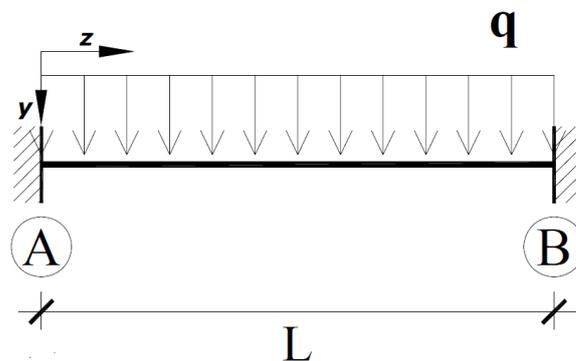


Fig. 5.14: Carga uniformemente distribuida con apoyos empotrados

Entramos como siempre en la tabla 2.3, teniendo en cuenta que tenemos un momento parabólico, no nulo en los extremos y con $k_y=0,5$. Tendremos: $C_1=0,712$ y $C_2=0,652$. Seguidamente se mostrará el procedimiento para la aplicación de cargas en el centroide de la sección para una viga de 6 metros. Tendremos un momento crítico:

$$M_{cr} = \frac{C_1\pi}{k_y L} \sqrt{EI_y G I_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EI_a}{G I_T} \left(\frac{\pi}{k_a L}\right)^2 (1 + C_2^2)} \pm \frac{C_2\pi}{k_a L} \sqrt{\frac{EI_a}{G I_T}} \right] = 128,82 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

La esbeltez reducida:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{628.000 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ MPa}}{128.823.560,7 \text{ N} \cdot \text{mm}}} = 1,16$$

Y el coeficiente de reducción de pandeo lateral:

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,21 \cdot (1,16 - 0,2) + 1,16^2] = 1,27$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{1,27 + \sqrt{1,27^2 - 1,16^2}} = 0,56$$



Así que, el momento flector resistente en el cual aparece el pandeo lateral es:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{1,05} = 0,47 \cdot 628.000 \text{mm}^3 \frac{275 \text{Mpa}}{1,05} = 91.639.716,71 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Pero como nos interesa calcular la carga distribuida crítica, tendremos que calcular el momento flector máximo para apoyos empotrados. Este momento máximo aparece en el centro de la viga:

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{24} qL^2$$

Por lo que la carga distribuida crítica:

$$q_{b,Rd} = 85,88 \text{ N/mm}$$

Comparando este valor con el del apartado anterior vemos que es lógico, debido a la restricción que provoca el empotramiento. A continuación, se muestran en la tabla los valores de la carga crítica para distintas vigas:

CTE						
L	M _{cr} (centroide)	λ (centroide)	φ (centroide)	χ (centroide)	M _{b,Rd} (centroide)	q _{b,Rd} (centroide)
2 m	719,48 kN·m	0,49	0,65	0,93	152,53 kN·m	915,2 kN/m
4 m	227,43 kN·m	0,87	0,95	0,75	123,76 kN·m	185,6 kN/m
6 m	128,82 kN·m	1,16	1,27	0,56	91,64 kN·m	61,1 kN/m
8 m	89,87 kN·m	1,39	1,59	0,42	69,85 kN·m	26,2 kN/m
10 m	69,25 kN·m	1,58	1,89	0,34	56,07 kN·m	13,5 kN/m
12 m	56,48 kN·m	1,75	2,19	0,28	46,82 kN·m	7,8 kN/m
16 m	41,42 kN·m	2,04	2,78	0,21	35,28 kN·m	3,31 kN/m

Tabla 5.9: Momento crítico y momento resistente según CTE para una carga uniformemente distribuida con apoyos empotrados

De la tabla anterior resaltar que las vigas de 2 y 4 metros están en zona de plastificación y que necesitamos una mayor carga para producir el pandeo que en el anterior apartado. Es un resultado obvio ya que en esta ocasión los extremos están empotrados.

Ahora es el momento de la simulación mediante ANSYS. Aplicamos la carga distribuida de 1 N/mm en el centroide de la sección. Resolvemos el análisis y el programa nos calcula un factor multiplicador de carga de 60,97, por lo que tendremos:

$$q_{cr} = 60,97 \text{ N/mm}$$

Por lo que:

$$M_{cr} = \frac{1}{24} q_{cr} L^2 = 91,45 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Una vez tenemos el momento crítico, calcularemos $M_{b,Rd}$ mediante $\bar{\lambda}_{LT}$, ϕ_{LT} y χ_{LT} . Esto mismo lo hacemos para vigas de diferentes tamaños. En la siguiente tabla se muestran los valores calculados para la carga en el centroide.

ANSYS						
L	M_{cr} (centroide)	λ (centroide)	ϕ (centroide)	χ (centroide)	$M_{b,Rd}$ (centroide)	$q_{b,Rd}$ (centroide)
2 m	203,33 kN·m	0,92	1,00	0,72	118,35 kN·m	710,1 kN/m
4 m	132,67 kN·m	1,14	1,25	0,57	93,48 kN·m	140,2 kN/m
6 m	91,45 kN·m	1,37	1,57	0,43	70,85 kN·m	47,23 kN/m
8 m	85,33 kN·m	1,42	1,64	0,41	66,95 kN·m	25,1 kN/m
10 m	74,08 kN·m	1,53	1,80	0,36	59,43 kN·m	14,26 kN/m
12 m	61,2 kN·m	1,68	2,07	0,31	50,3 kN·m	8,38 kN/m
16 m	46,93 kN·m	1,92	2,52	0,24	39,58 kN·m	3,71 kN/m

Tabla 5.10: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para una carga uniformemente distribuida con apoyos empotrados

Los resultados ofrecidos por ANSYS son satisfactorios para las vigas más esbeltas mientras que para las vigas menos esbeltas la diferencia es considerable entre ambos estudios. El modo de pandeo se muestra a continuación:

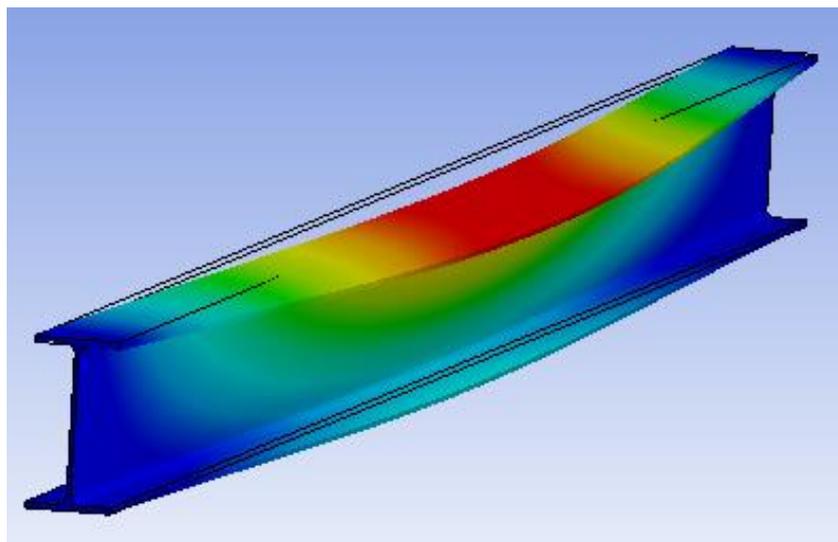


Fig. 5.15: Modo de pandeo para una carga uniformemente distribuida con apoyos empotrados

Finalmente tenemos la comparación entre ambos estudios.

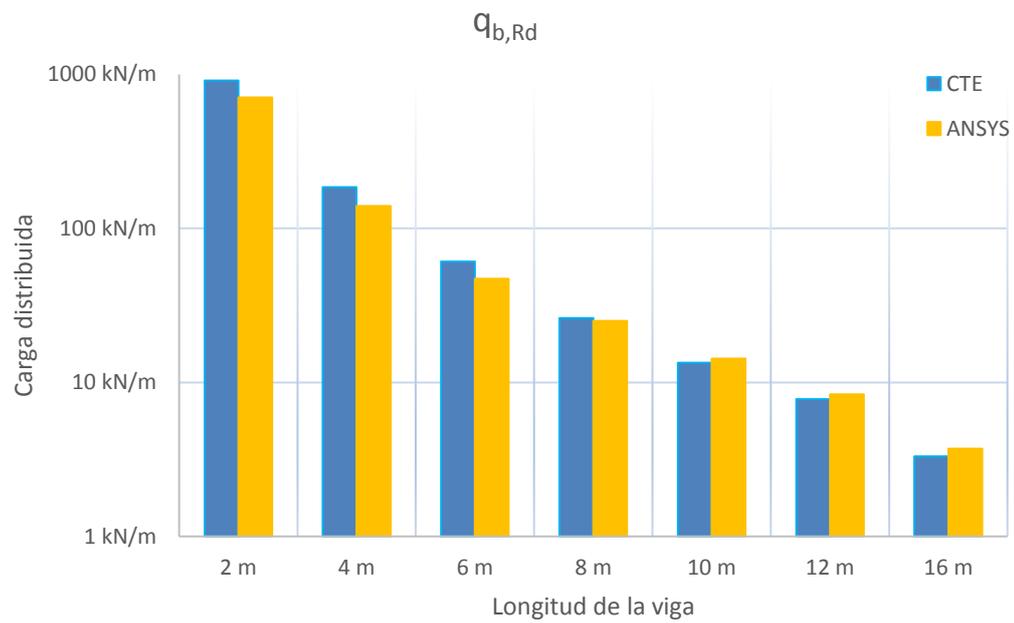


Fig. 5.16: Comparación carga uniformemente distribuida resistente con apoyos empotrados

5.6-CARGA PUNTUAL (CASO I)

En los siguientes dos apartados se estudiará el pandeo lateral en presencia de una carga puntual. Este ejemplo se podría asemejar a la estructura de un polipasto. Como el mayor momento se produce con la carga en el centro de la viga, se estudiará esa posición. Los apoyos, en este primer apartado serán en horquilla. El objetivo de este análisis es conocer el valor de la carga puntual con la que la viga pandeará lateralmente. Como siempre se realizarán análisis en vigas desde 2 metros hasta 16 metros.

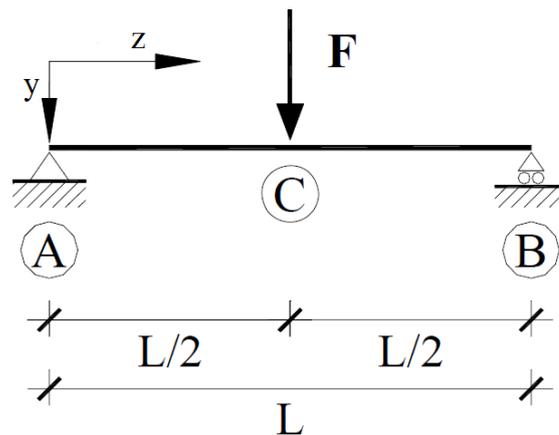


Fig. 5.17: Carga puntual centrada con apoyos en horquilla

En primer lugar, se calculará la carga crítica con las fórmulas proporcionadas por el CTE para una viga de 6 metros. Calculamos el momento crítico de pandeo, asignando un valor de 1,365 al factor C_1 y $C_2=0,553$. Estos valores los sacamos de la tabla 2.3 teniendo en cuenta que tenemos apoyos articulados y carga puntual en el centro de la viga. Los factores k_y y k_a les asignamos valor 1. Por lo tanto, el momento crítico será:

$$M_{cr} = \frac{C_1 \pi}{k_y L} \sqrt{EI_y G I_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EI_a}{G I_T} \left(\frac{\pi}{k_a L} \right)^2 (1 + C_2^2)} \pm \frac{C_2 \pi}{k_a L} \sqrt{\frac{EI_a}{G I_T}} \right] = 123,48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

A continuación, calculamos la esbeltez reducida:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{628.000 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ MPa}}{123.486.068 \text{ N} \cdot \text{mm}}} = 1,18$$

El parámetro ϕ nos queda:

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,21 \cdot (1,18 - 0,2) + 1,18^2] = 1,3$$

El siguiente paso es calcular el coeficiente de reducción de pandeo lateral:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{1,3 + \sqrt{1,3^2 - 1,18^2}} = 0,54$$

Así que, el momento flector crítico en el cual aparece el pandeo lateral es:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{1,05} = 0,54 \cdot 628.000 \text{ mm}^3 \frac{275 \text{ Mpa}}{1,05} = 88.994.183 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Nos interesa la carga crítica así que teniendo en cuenta que el momento flector máximo para apoyos articulados con carga puntual centrada es:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{1}{4} FL$$

Igualando los dos momentos podremos despejar la carga puntual crítica:

$$F_{b,Rd} = 59,33 \text{ kN}$$

En la siguiente tabla se muestran los valores calculados para diferentes tamaños de vigas aplicando la carga en el centroide.

CTE						
L	M _{cr} (centroide)	λ (centroide)	φ (centroide)	χ (centroide)	M _{b,Rd} (centroide)	F _{b,Rd} (centroide)
2 m	689,67 kN·m	0,50	0,66	0,92	151,99 kN·m	304 kN
4 m	218,01 kN·m	0,89	0,97	0,74	121,79 kN·m	121,8 kN
6 m	123,48 kN·m	1,18	1,30	0,54	88,99 kN·m	59,33 kN
8 m	86,14 kN·m	1,42	1,63	0,41	67,47 kN·m	33,74 kN
10 m	66,38 kN·m	1,61	1,95	0,33	54,04 kN·m	21,62 kN
12 m	54,14 kN·m	1,79	2,26	0,27	45,07 kN·m	15,03 kN
16 m	39,7 kN·m	2,09	2,87	0,21	33,92 kN·m	8,481 kN

Tabla 5.11: Momento crítico y momento resistente según CTE para una carga puntual centrada con apoyos en horquilla

Como en ocasiones anteriores las vigas menos esbeltas están en la zona plástica. La carga crítica resistente disminuye linealmente con el aumento de la longitud de la viga.

A continuación, haremos la simulación mediante ANSYS. Introducimos una carga puntual en la línea media de la viga, de valor 1000 N en el centroide de la sección. Resolvemos y el programa nos calcula un factor multiplicador de carga de 82,76, por lo que tendremos:

$$F_{cr} = 82,76 \text{ kN}$$

En la siguiente imagen se observa modo de pandeo debido a la fuerza aplicada:

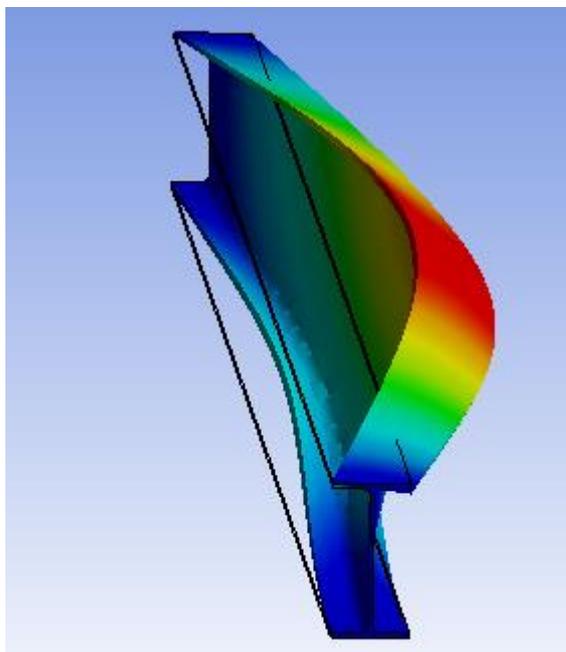


Fig. 5.18: Modo de pandeo para una carga puntual centrada con apoyos en horquilla

A partir de la carga crítica calcularemos el momento crítico y el momento resistente a pandeo como en anteriores ocasiones. Haciendo esto mismo para diferentes tamaños de viga tenemos:

ANSYS						
L	M_{cr} (centroide)	λ (centroide)	ϕ (centroide)	χ (centroide)	$M_{b,Rd}$ (centroide)	$F_{b,Rd}$ (centroide)
2 m	584 kN·m	0,54	0,68	0,91	149,69 kN·m	299,38 kN
4 m	214,2 kN·m	0,90	0,98	0,74	120,94 kN·m	120,94 kN
6 m	124,14 kN·m	1,18	1,30	0,54	89,32 kN·m	59,549 kN
8 m	88 kN·m	1,40	1,61	0,42	68,66 kN·m	34,331 kN
10 m	68,5 kN·m	1,59	1,91	0,34	55,54 kN·m	22,217 kN
12 m	57,69 kN·m	1,73	2,16	0,29	47,72 kN·m	15,909 kN
16 m	44,16 kN·m	1,98	2,64	0,23	37,43 kN·m	9,3579 kN

Tabla 5.12: Momento crítico y momento resistente para una carga puntual centrada con apoyos en horquilla

Los resultados son bastante buenos comparados con los calculados con el CTE, sobretodo en el momento resistente.

En la figura 5.19 se muestra una gráfica con la carga puntual aplicada en el ala superior, centroide y ala inferior para distintos tamaños de vigas.

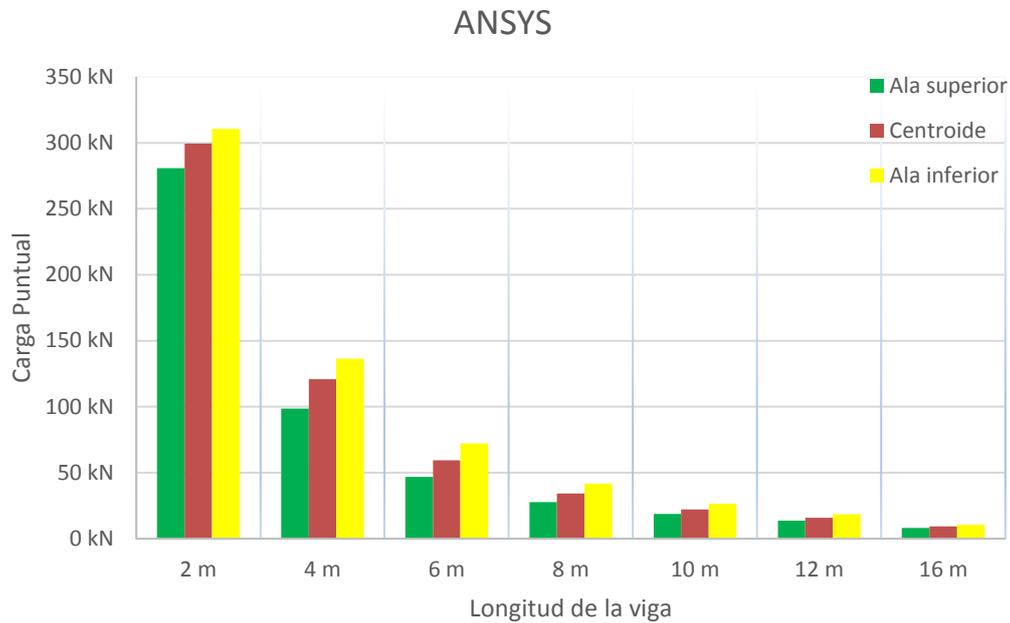


Fig. 5.19: Carga puntual resistente aplicada en el ala superior, inferior y centroide con apoyos en horquilla

Como vemos sigue ocurriendo que la aplicación de la carga en el ala superior favorece el pandeo lateral y en el ala inferior contrarresta el mismo como no podía ser de otra manera. Por último, se muestra la comparación entre el cálculo del CTE y el de ANSYS en la figura 5.20:

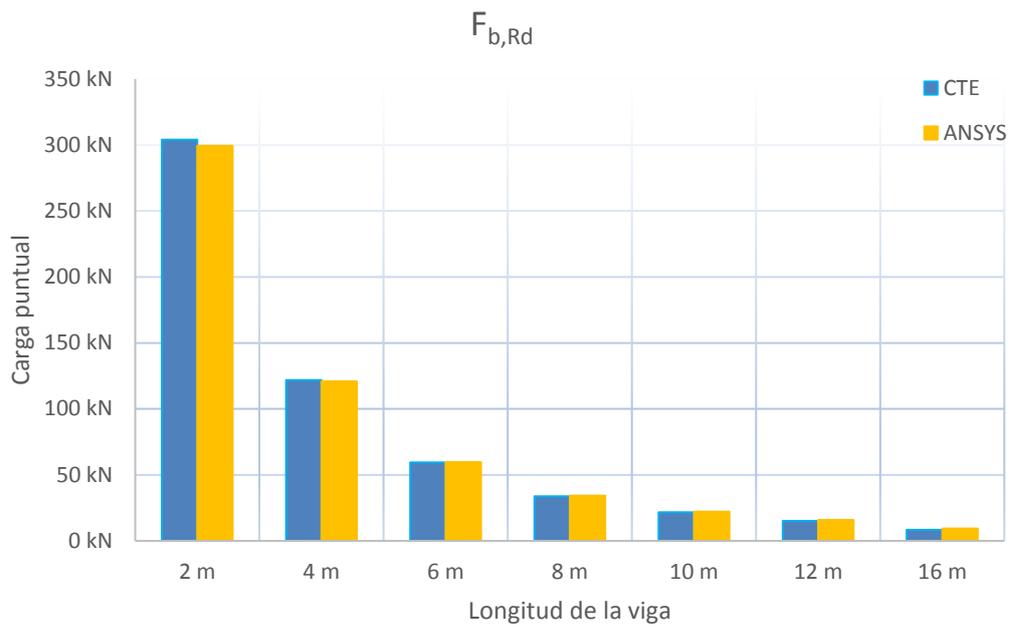


Fig. 5.20: Comparación carga puntual resistente con apoyos en horquilla

5.7-CARGA PUNTUAL (CASO II)

En este segundo análisis de carga puntual centrada, el apoyo será empotrado en vez de horquilla, por lo que ahora $K_y=0,5$. El alabeo sigue permitiéndose ($K_a=0,5$).

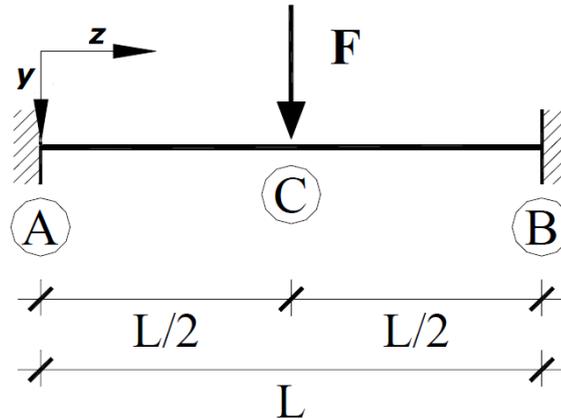


Fig. 5.21: Carga puntual centrada con apoyos empotrados

Para este problema tendremos unos factores de:

$$C_1 = 0,938$$

$$C_2 = 0,715$$

Por lo tanto, el momento crítico será:

$$M_{cr} = \frac{C_1 \pi}{k_y L} \sqrt{EI_y GI_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EI_a}{GI_T} \left(\frac{\pi}{k_a L}\right)^2 (1 + C_2^2)} \pm \frac{C_2 \pi}{k_a L} \sqrt{\frac{EI_a}{GI_T}} \right] = 169,71 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

A continuación, calculamos la esbeltez reducida:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{628.000 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ MPa}}{169.714.185,2 \text{ N} \cdot \text{mm}}} = 1,01$$

El parámetro ϕ :

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,21 \cdot (1,01 - 0,2) + 1,01^2] = 1,09$$

Y el coeficiente de reducción de pandeo lateral:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{1,09 + \sqrt{1,09^2 - 1,01^2}} = 0,66$$

Así que, el momento flector crítico es:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{1,05} = 0,66 \cdot 628.000 \text{mm}^3 \frac{275 \text{Mpa}}{1,05} = 108.468.264 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Nos interesa la carga crítica así que teniendo en cuenta que el momento flector máximo para apoyos empotrados con carga puntual centrada es:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{1}{8} FL$$

Igualando los dos momentos:

$$F_{b,Rd} = 144,62 \text{ kN}$$

En la siguiente tabla se muestran los valores calculados para diferentes tamaños de vigas aplicando la carga en el centroide.

CTE						
L	M _{cr} (centroide)	λ (centroide)	φ (centroide)	χ (centroide)	M _{b,Rd} (centroide)	F _{b,Rd} (centroide)
2 m	947,85 kN·m	0,43	0,61	0,95	155,52 kN·m	622,1 kN
4 m	299,62 kN·m	0,76	0,85	0,82	134,57 kN·m	269,14 kN
6 m	169,71 kN·m	1,01	1,09	0,66	108,47 kN·m	144,62 kN
8 m	118,39 kN·m	1,21	1,34	0,53	86,37 kN·m	86,369 kN
10 m	91,23 kN·m	1,38	1,57	0,43	70,71 kN·m	56,568 kN
12 m	74,4 kN·m	1,52	1,80	0,36	59,65 kN·m	39,769 kN
16 m	54,57 kN·m	1,78	2,25	0,28	45,4 kN·m	22,699 kN

Tabla 5.13: Momento crítico y momento resistente según CTE para una carga puntual centrada con apoyos empotrados

Lo más destacable de la tabla 5.13 es que nos muestra unos valores de momento crítico y momento resistente mayores que en el apartado anterior debido al empotramiento de los extremos.

Ya en ANSYS, introducimos una carga puntual en la línea media de la viga, de valor 1000 N en el centroide de la sección. Resolvemos y el programa nos calcula un factor multiplicador de carga de 178,9, por lo que tendremos:

$$F_{cr} = 178,9 \text{ kN}$$

En la figura 5.22 se observa el modo de pandeo:

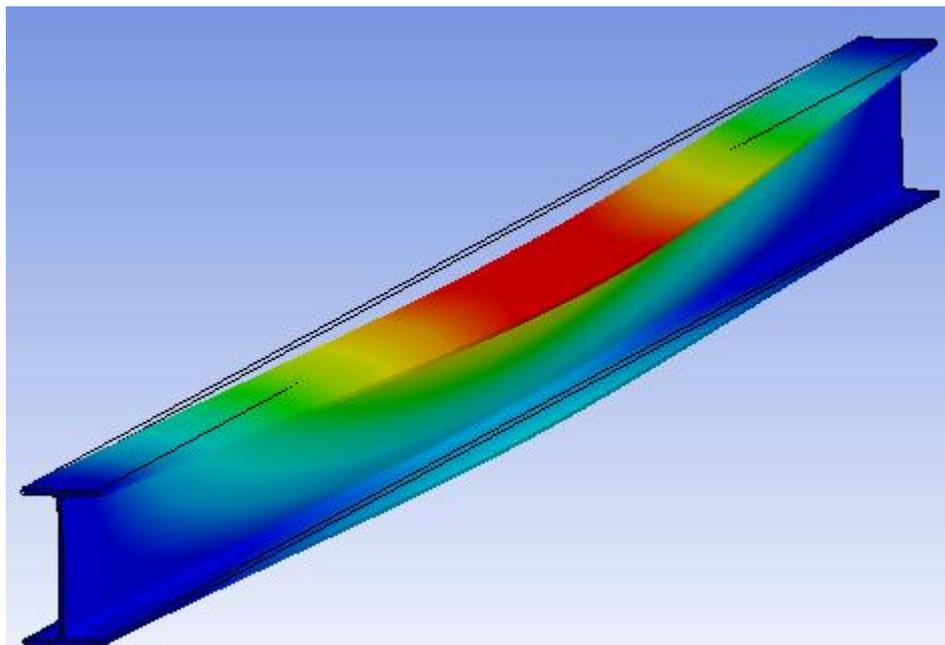


Fig. 5.22: Modo de pandeo para una carga puntual centrada con apoyos empotrados

A partir de la carga crítica calcularemos el momento crítico y el momento resistente a pandeo como en anteriores ocasiones y para diferentes longitudes de viga:

ANSYS						
L	M_{cr} (centroide)	λ (centroide)	ϕ (centroide)	χ (centroide)	$M_{b,Rd}$ (centroide)	$F_{b,Rd}$ (centroide)
2 m	370 kN·m	0,68	0,78	0,86	140,71 kN·m	562,8 kN
4 m	207,3 kN·m	0,91	0,99	0,73	119,32 kN·m	238,7 kN
6 m	134,19 kN·m	1,13	1,24	0,57	94,19 kN·m	125,6 kN
8 m	115 kN·m	1,23	1,36	0,51	84,56 kN·m	84,56 kN
10 m	92,67 kN·m	1,37	1,55	0,44	71,61 kN·m	57,29 kN
12 m	79,65 kN·m	1,47	1,72	0,38	63,2 kN·m	42,14 kN
16 m	61,4 kN·m	1,68	2,06	0,31	50,45 kN·m	25,23 kN

Tabla 5.14: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para una carga puntual centrada con apoyos empotrados

Los valores son muy similares a los de la tabla 5.13 exceptuando el momento crítico para vigas de 2, 4 y 6 metros. Por último, se muestra la comparación entre el cálculo del CTE y la simulación de ANSYS en la figura 5.23:

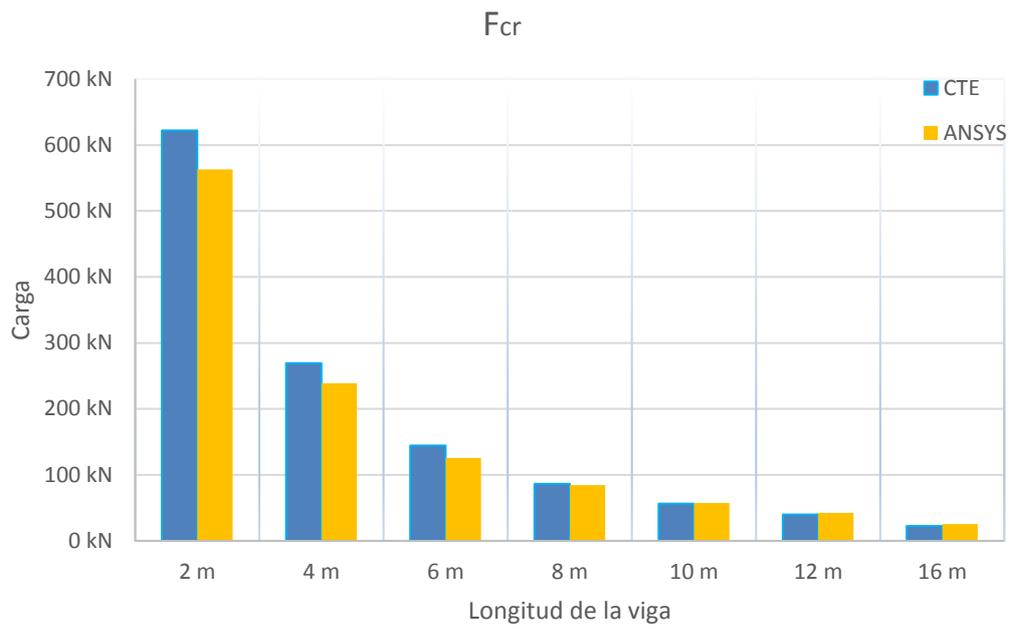


Fig. 5.23: Comparación carga puntual resistente con apoyos empotrados

5.8-CARGA PUNTUAL EN VOLADIZO

En los 2 siguientes apartados se trabajará con vigas en voladizo. Se permitirá el alabeo y giro en el extremo en A, mientras que el extremo B será libre. Por lo que tendremos unos factores:

$$k_y = 1$$

$$k_a = 2$$

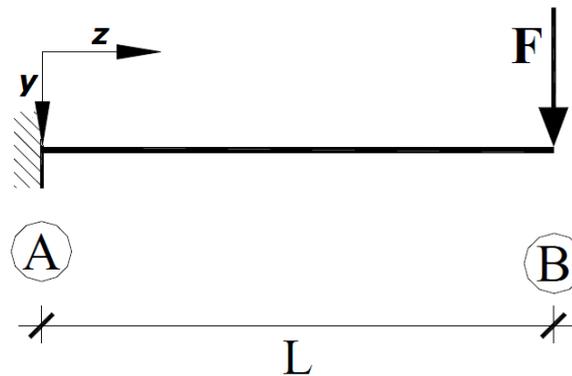


Fig. 5.24: Carga puntual en voladizo

La tabla 2.3, para este caso, nos facilita el valor de C_1 dependiente de la posición de la carga sobre la viga. Se nos dice que $C_1=1,28/\alpha$, siendo alfa la posición en tanto por uno sobre la longitud total de la viga. Por tanto, en el extremo $\alpha =1$ así que nos quedará:

$$C_1 = 1,28$$

$$C_2 = 0,64$$

Con estos factores calculamos el momento crítico para una fuerza aplicada en el centroide:

$$M_{cr} = \frac{C_1\pi}{k_y L} \sqrt{EI_y GI_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EI_a}{GI_T} \left(\frac{\pi}{k_a L}\right)^2 (1 + C_2^2)} \pm \frac{C_2\pi}{k_a L} \sqrt{\frac{EI_a}{GI_T}} \right] = 101,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Después calculamos la esbeltez reducida:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{628.000 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ MPa}}{101.533.762,5 \text{ N} \cdot \text{mm}}} = 1,3$$

El parámetro ϕ :

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,21 \cdot (1,3 - 0,2) + 1,3^2] = 1,47$$

Y el coeficiente de reducción de pandeo lateral:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{1,47 + \sqrt{1,47^2 - 1,3^2}} = 0,47$$

Así que, el momento flector crítico es:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{1,05} = 0,47 \cdot 628.000 \text{ mm}^3 \frac{275 \text{ Mpa}}{1,05} = 76974110,02 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Nos interesa la carga crítica así que teniendo en cuenta que el momento flector máximo para viga en voladizo con carga puntual en el extremo es:

$$M_{m\acute{a}x} = FL$$

Igualando los dos momentos:

$$F_{b,Rd} = 12,83 \text{ kN}$$

En la tabla se muestran los valores para diferentes tamaños de vigas aplicando la carga en el centroide:

CTE						
L	M_{cr} (centroide)	λ (centroide)	ϕ (centroide)	χ (centroide)	$M_{b,Rd}$ (centroide)	$F_{b,Rd}$ (centroide)
2 m	408,87 kN·m	0,65	0,76	0,87	143,1 kN·m	71,6 kN
4 m	161,56 kN·m	1,03	1,12	0,64	105,57 kN·m	26,4 kN
6 m	101,53 kN·m	1,30	1,47	0,47	76,97 kN·m	12,8 kN
8 m	74,46 kN·m	1,52	1,80	0,36	59,69 kN·m	7,46 kN
10 m	58,93 kN·m	1,71	2,12	0,30	48,64 kN·m	4,86 kN
12 m	48,82 kN·m	1,88	2,45	0,25	41,04 kN·m	3,42 kN
16 m	36,39 kN·m	2,18	3,08	0,19	31,28 kN·m	1,96 kN

Tabla 5.15: Momento crítico y momento resistente para una carga puntual en voladizo

En esta ocasión tenemos la viga de 2 metros en la zona plástica y la viga de 4 metros en la zona anelástica. Ahora es el turno de la simulación mediante ANSYS. Introducimos una carga puntual de 1000 N en el extremo libre de la viga en el centroide de la sección. Resolvemos y el programa nos da un factor multiplicador de carga de 17,37, por lo que tendremos:

$$F_{cr} = 17,37 \text{ kN}$$

En la figura 6.25 se observa el modo de pandeo, el cual es bastante distinta a las vistas anteriormente:

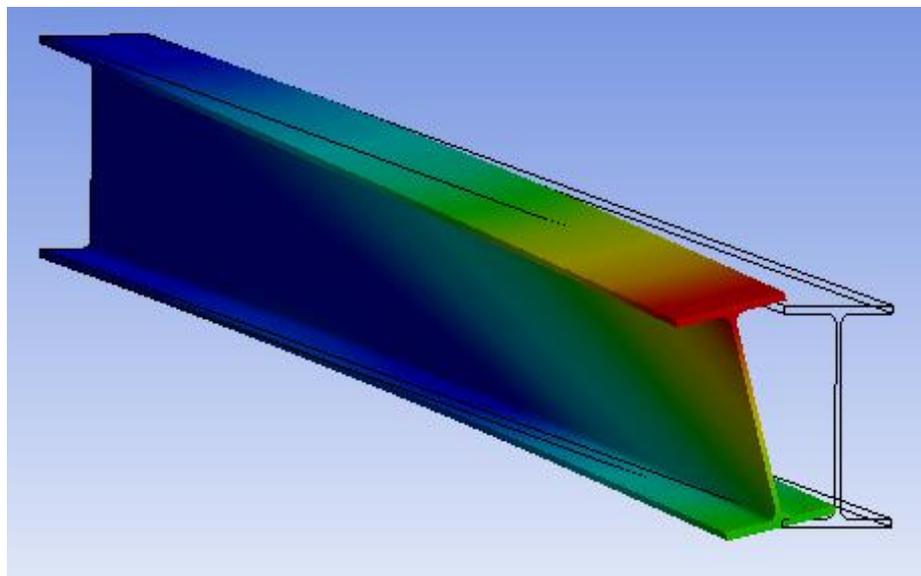


Fig. 5.25: Modo de pandeo para una carga puntual en voladizo

A partir de la carga crítica calcularemos el momento crítico y el momento resistente a pandeo como en anteriores ocasiones y para diferentes longitudes de viga:

ANSYS						
L	M_{cr} (centroide)	λ (centroide)	ϕ (centroide)	χ (centroide)	$M_{b,Rd}$ (centroide)	$F_{b,Rd}$ (centroide)
2 m	312 kN·m	0,74	0,83	0,83	135,87 kN·m	67,94 kN
4 m	164,76 kN·m	1,02	1,11	0,65	106,73 kN·m	26,68 kN
6 m	104,22 kN·m	1,29	1,44	0,48	78,54 kN·m	13,09 kN
8 m	83,2 kN·m	1,44	1,67	0,40	65,55 kN·m	8,194 kN
10 m	66,8 kN·m	1,61	1,94	0,33	54,34 kN·m	5,434 kN
12 m	56,4 kN·m	1,75	2,19	0,28	46,77 kN·m	3,897 kN
16 m	42,72 kN·m	2,01	2,71	0,22	36,3 kN·m	2,269 kN

Tabla 5.16: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para una carga puntual en voladizo

Mediante ANSYS se han obtenido unos muy buenos resultados en todos los ámbitos excepto el momento crítico en la viga de 2 metros. También se puede observar la dependencia de la carga crítica respecto del punto de aplicación de la misma:

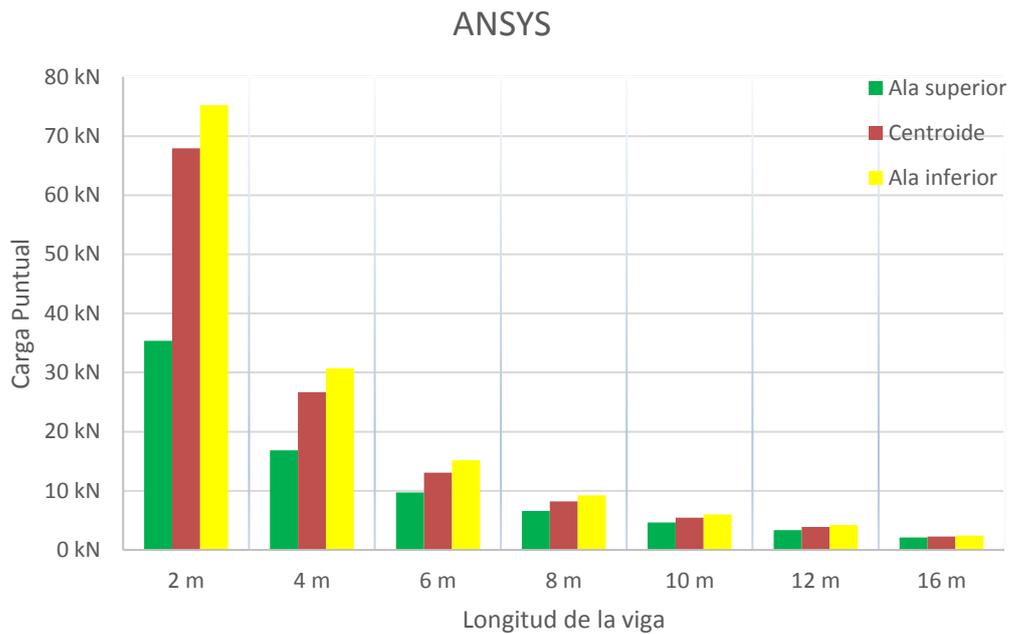


Fig. 5.26: Carga puntual resistente aplicada en el ala superior, inferior y centroide en voladizo

Es curiosa la gran diferencia de carga entre aplicarla en el ala superior e inferior en la viga de 2 metros. Aunque es lógico ya que en la ecuación 2.32 vemos que el factor C_2 multiplica a un conjunto de factores que dependen inversamente de la longitud de la viga. Por lo tanto, a menores longitudes de viga, mayor diferencia de momento crítico para aplicación de la carga en el ala superior e inferior. Por último, comparamos ambos estudios en la figura 5.27:

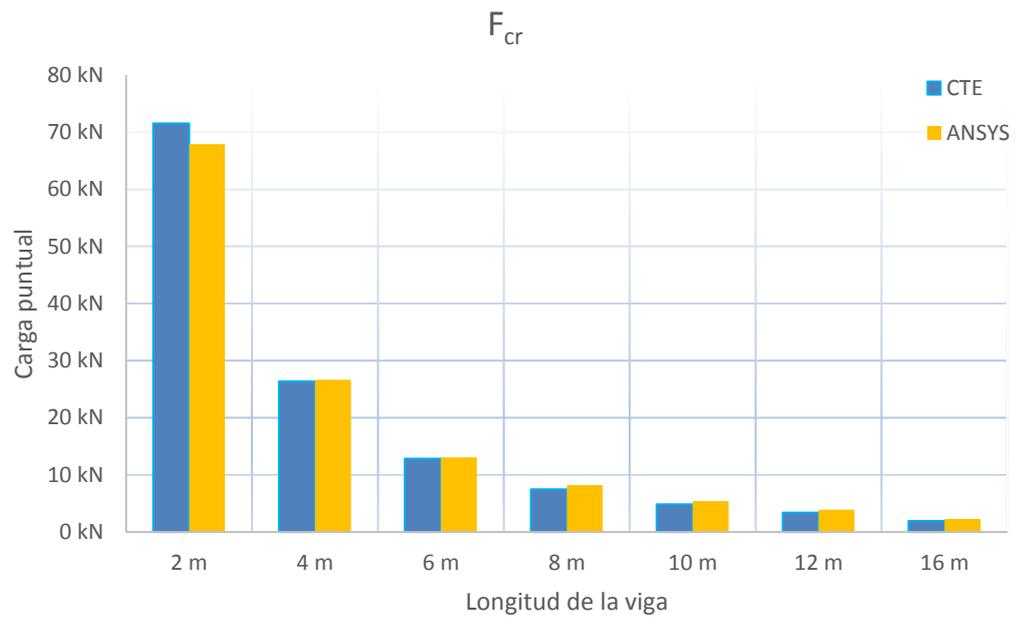


Fig. 5.27: Comparación carga puntual resistente para una viga en voladizo

5.9-CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN VOLADIZO

Este será el último análisis de pandeo lateral para los ejemplos descritos en la tabla 2.3. Se trata de una viga en voladizo con una carga uniformemente distribuida (figura 5.28). La tabla antes mencionada no contempla el factor C_2 por lo que solamente aplicaremos carga en el centroide y no en las alas.

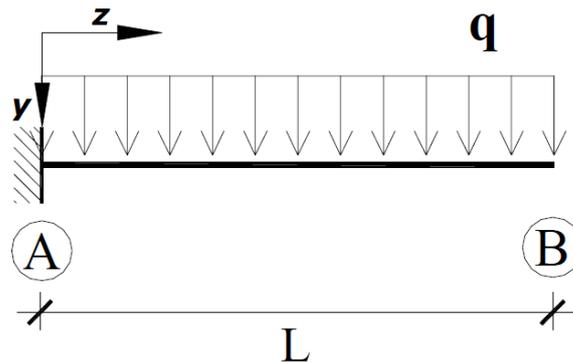


Fig. 5.28: Carga uniformemente distribuida en voladizo

Como en el apartado anterior tendremos $k_y=1$ y $k_a=2$, además tendremos $C_1=2,05$. Tendremos un momento crítico de valor:

$$M_{cr} = \frac{C_1\pi}{k_y L} \sqrt{EI_y G I_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EI_a}{G I_T} \left(\frac{\pi}{k_a L}\right)^2 (1 + C_2^2)} \pm \frac{C_2\pi}{k_a L} \sqrt{\frac{EI_a}{G I_T}} \right] = 162,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Después calculamos la esbeltez reducida:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{628.000 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ MPa}}{162.612.666,4 \text{ N} \cdot \text{mm}}} = 1,03$$

El parámetro ϕ :

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,21 \cdot (1,3 - 0,2) + 1,03^2] = 1,12$$

Y el coeficiente de reducción de pandeo lateral:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{1,12 + \sqrt{1,12^2 - 1,03^2}} = 0,64$$

Así que, el momento flector crítico es:



$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{1,05} = 0,64 \cdot 628.000 \text{mm}^3 \frac{275 \text{Mpa}}{1,05} = 105.958.758 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Nos interesa la carga distribuida crítica así que teniendo en cuenta que el momento flector máximo para viga en voladizo con carga distribuida es:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{qL^2}{2}$$

Igualando los dos momentos:

$$q_{b,Rd} = 5,89 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Y para todas las vigas estudiadas:

CTE						
L	M _{cr}	λ	φ	χ	M _{b,Rd}	q _{b,Rd}
2 m	654,83 kN·m	0,51	0,66	0,92	151,32 kN·m	75,7 N/mm
4 m	258,75 kN·m	0,82	0,90	0,79	129,25 kN·m	16,2 N/mm
6 m	162,61 kN·m	1,03	1,12	0,64	105,96 kN·m	5,89 N/mm
8 m	119,25 kN·m	1,20	1,33	0,53	86,82 kN·m	2,71 N/mm
10 m	94,38 kN·m	1,35	1,54	0,44	72,67 kN·m	1,45 N/mm
12 m	78,19 kN·m	1,49	1,74	0,38	62,23 kN·m	0,86 N/mm
16 m	58,29 kN·m	1,72	2,14	0,29	48,17 kN·m	0,38 N/mm

Tabla 5.17: Momento crítico y momento resistente según CTE para una carga uniformemente distribuida en voladizo

Como en todos los apartados anteriores las vigas menos esbeltas están en las zonas de plastificación y anelástica. Es el turno de la simulación mediante ANSYS. Introducimos una carga distribuida de 1 kN/m. Resolvemos y el programa nos da un factor multiplicador de carga de 9,7, por lo que:

$$q_{cr} = 9,7 \text{ kN}$$

Por lo que:

$$M_{cr} = \frac{1}{2} q_{cr} L^2 = 91,45 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Una vez tenemos el momento crítico, calcularemos M_{b,Rd} mediante $\bar{\lambda}_{LT}$, ϕ_{LT} y χ_{LT} . Esto mismo lo hacemos para vigas de diferentes tamaños. En la siguiente tabla se muestran los valores calculados:

ANSYS						
L	M_{cr}	λ	ϕ	χ	$M_{b,Rd}$	$q_{b,Rd}$
2 m	439,6 kN·m	0,63	0,74	0,88	144,66 kN·m	72,33 N/mm
4 m	275,76 kN·m	0,79	0,88	0,80	131,68 kN·m	16,46 N/mm
6 m	174,6 kN·m	0,99	1,08	0,67	110,1 kN·m	6,117 N/mm
8 m	137,6 kN·m	1,12	1,22	0,58	95,75 kN·m	2,992 N/mm
10 m	111,5 kN·m	1,24	1,38	0,50	82,66 kN·m	1,653 N/mm
12 m	94,32 kN·m	1,35	1,54	0,44	72,63 kN·m	1,009 N/mm
16 m	70,4 kN·m	1,57	1,87	0,35	56,88 kN·m	0,444 N/mm

Tabla 5.18: Momento crítico y momento resistente mediante ANSYS para una carga uniformemente distribuida en voladizo

Los resultados anteriores no son excepcionales, pero si aceptables, ya que los valores obtenidos tienen el mismo orden de magnitud que en el estudio mediante el CTE. En la figura 5.29 se observa el modo de pandeo, casi idéntico a la del apartado anterior:

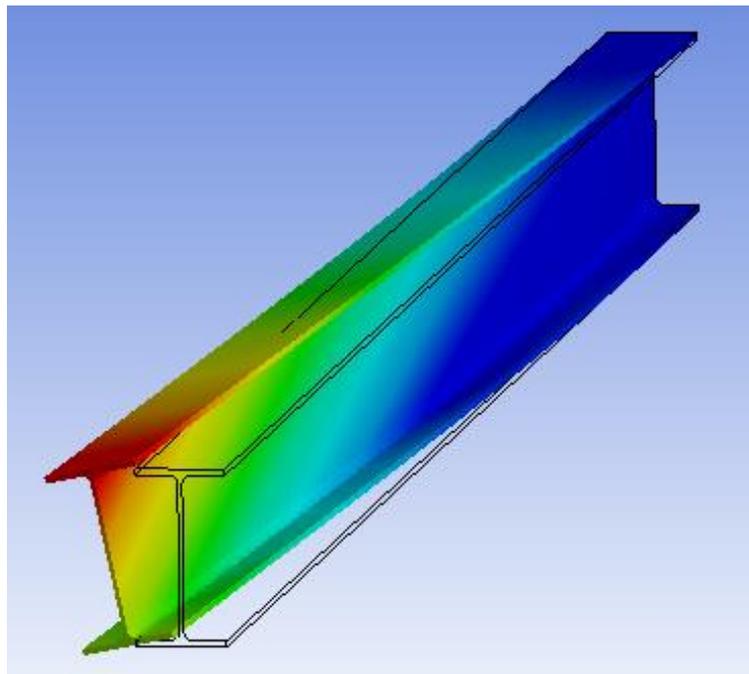


Fig. 5.29: Modo de pandeo para una carga uniformemente distribuida en voladizo

Finalmente se muestra la comparación entre los resultados teóricos y experimentales:

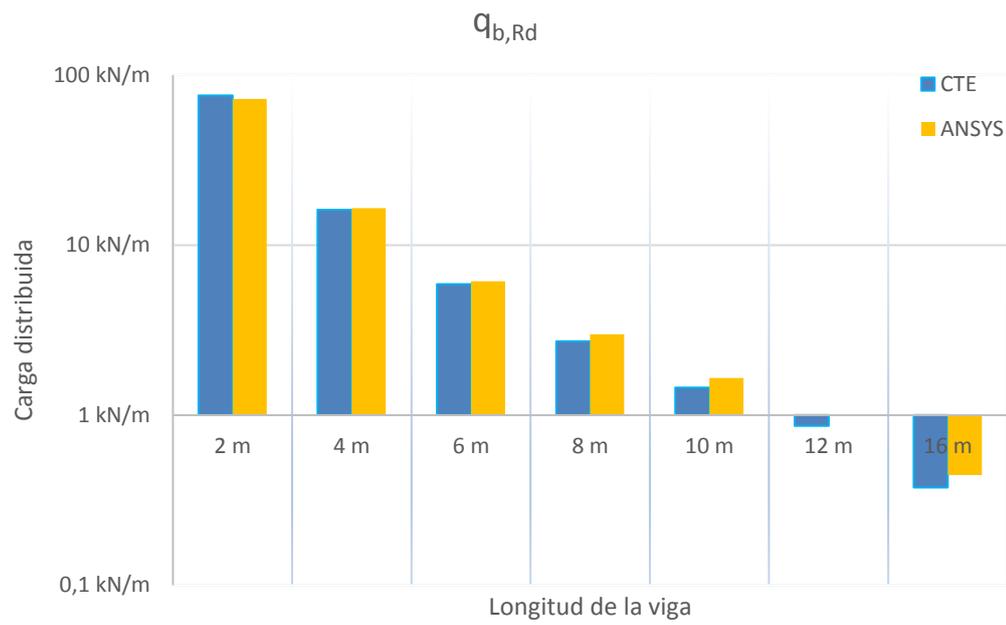


Fig. 5.30: Comparación carga uniformemente distribuida resistente para una viga en voladizo

5.10-PÓRTICO DE LEE

En esta última aplicación práctica se llevará a cabo el estudio de pandeo lateral y pandeo por compresión en una estructura sencilla. Se utilizarán los conocimientos aprendidos durante el trabajo para aplicarlos al problema. La estructura a estudio es el llamado Pórtico de Lee (figura 5.31) que consta de un pilar y un dintel, ambos de longitud L . Las vigas serán perfiles IPE300 S275JR y estarán empotradas en sus extremos. Mediante el CTE podremos calcular el coeficiente de longitud de pandeo β para el pilar de la estructura, el cual trabaja a compresión, para después calcular la carga distribuida crítica mediante Euler y compararla con los resultados de ANSYS. El procedimiento de cálculo para el pandeo lateral será aplicado en el dintel.

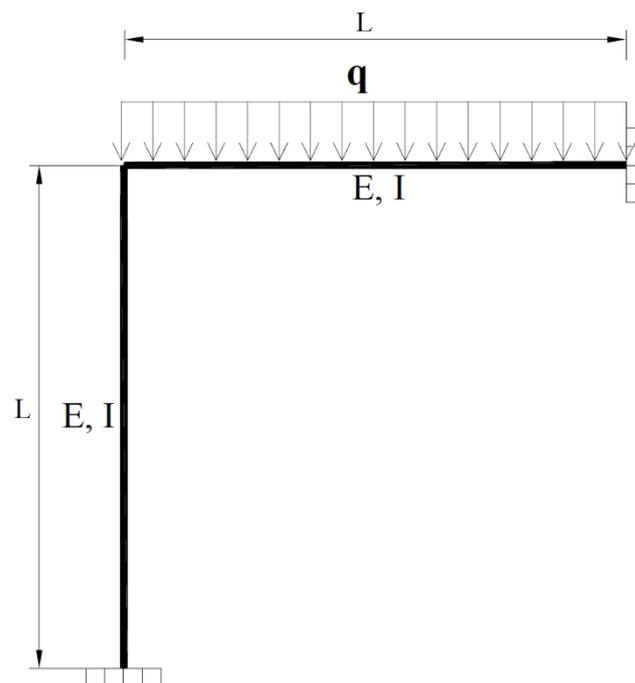


Fig. 5.31: Pórtico de Lee

Se aplicará una carga distribuida q a lo largo del dintel y se compararán los resultados estudiados hasta ahora y los resultados que nos ofrezca ANSYS. Se realizarán análisis para $L=2, 4, 6, 8, 10, 12$ y 16 metros. En primer lugar, separamos las barras y equilibramos despreciando las deformaciones debidas al esfuerzo axial. La carga distribuida en el dintel podrá producir un pandeo lateral en él y también podrá inducir un pandeo en la columna con una carga de compresión $N=qL/2,29$ [Calculado mediante el software FTool]. Debemos de tener en cuenta que tipo de unión hay entre ambas barras, esta es una unión rígida sin posibilidad de salirse del plano de flexión. Por tanto, con estas consideraciones, pasamos a estudiar los fenómenos de inestabilidad.



En primer lugar, estudiaremos el pandeo por compresión. Utilizaremos la carga crítica de Euler mediante la ecuación 2.7, pero no sabemos que longitud de pandeo utilizar. Es evidente que el valor de β debe encontrarse entre 0,5 y 0,7 ya que en este caso el extremo inferior está empotrado y el extremo superior se asemeja a un apoyo semirrígido. Para conseguir un valor medianamente lógico, nos serviremos del CTE para calcular dicho factor. El proceso para calcularlo ha sido seguir las directrices del apartado 2.4 de este trabajo.

En primer lugar, lo consideramos como pórtico intraslacional por lo que utilizaremos la ecuación 2.36. Necesitamos calcular el coeficiente de rigidez del pilar K_c , para $L=6m$:

$$K_c = \frac{E \cdot I}{L} = 211,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y para calcular K_{12} utilizamos la tabla 2.4 teniendo en cuenta giros iguales y de igual signo en el nudo, sin compresión relevante:

$$K_{12} = 1,5 \cdot \frac{E \cdot I}{L} = 317,1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Como la columna está empotrada tenemos:

$$\eta_2 = 0$$

$$\eta_1 = \frac{K_c + K_1}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{211,4 + 0}{211,4 + 0 + 0 + 317,1} = 0,4$$

Por tanto, tendremos:

$$\beta = \frac{1 + 0,145 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0,265 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}{2 - 0,364 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0,247 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} = 0,57$$

Y tendremos la carga crítica de Euler:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,57 \cdot L)^2}$$

Pero como nos interesa la carga crítica uniformemente distribuida con $N=qL/2,29$:

$$q_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,57 \cdot L)^2} \frac{2,29}{L}$$

Así que comparando los resultados de ANSYS y Euler tenemos:

L	Pandeo por compresión		
	ANSYS	Euler	Diferencia [%]
	q [kN/m]	q [kN/m]	
2 m	5300 kN/m	11008,7 kN/m	107,7
4 m	1394 kN/m	1376,09 kN/m	-1,3
6 m	416,8 kN/m	407,73 kN/m	-2,2
8 m	177 kN/m	172,01 kN/m	-2,8
10 m	90 kN/m	88,07 kN/m	-2,1
12 m	52 kN/m	50,97 kN/m	-2,0
16 m	22,41 kN/m	21,5 kN/m	-4,1

Tabla 5.19: Comparación de carga distribuida crítica por compresión

En la tabla anterior se observan unos resultados muy similares entre los datos obtenidos mediante ANSYS y Euler (a través del CTE). El único análisis problemático ocurre con una longitud de 2m como lleva sucediendo durante todo el trabajo. En las demás longitudes tendremos una carga crítica menor con Euler, lo cual es lógico ya que el coeficiente de longitud crítica β probablemente sea menor que de lo que hemos calculado.

A continuación, se estudiará el pandeo lateral en el dintel. Como en el caso de pandeo por compresión, necesitamos conocer qué tipo de apoyo hay en la unión de ambas vigas. Ya hemos calculado que estaría entre unión biempotrada y empotrada articulada por lo que el caso más parecido que tenemos es el trabajado en el apartado 6.5. No es exactamente el mismo caso, pero como aproximación nos valdrá. Por tanto simulando con ANSYS y con los valores calculados en el apartado 5.5 (esta vez utilizaremos M_{cr} y no $M_{b,Rd}$) tendremos:

L	Pandeo Lateral		
	ANSYS	CTE	Diferencia [%]
	q [kN/m]	q [kN/m]	
2 m	4208 kN/m	4316,9 kN/m	2,6
4 m	314,6 kN/m	341,1 kN/m	8,4
6 m	82 kN/m	85,9 kN/m	4,7
8 m	37 kN/m	33,7 kN/m	-8,9
10 m	17,379 kN/m	16,6 kN/m	-4,4
12 m	10,35 kN/m	9,4 kN/m	-9,1
16 m	4,6 kN/m	3,9 kN/m	-15,6

Tabla 5.20: Comparación de carga distribuida crítica lateral

Los datos obtenidos son menos exactos que en el caso de pandeo por compresión ya que los apoyos no son exactamente iguales que los utilizados en el apartado que utilizamos como base teórica (apartado 5.5).

Como conclusión, ambas tablas nos ofrecen unos datos que, parecen más que razonables sobre todo para longitudes mayores de 2m. Ya sabemos que con vigas de 2m aparece el pandeo anelástico y la plastificación. También debemos resaltar que los rigidizadores introducidos en la unión de ambas vigas pueden tener algo que ver en los resultados, ya que rigidiza aún más la estructura. También se aprecia que, en primer lugar, ocurre el pandeo lateral en el dintel, por lo que el pandeo a compresión no haría falta comprobarlo. El modo de pandeo 1 corresponde al pandeo lateral y el modo 4 al pandeo por compresión, mientras que los modos 2 y 3 corresponden a abolladuras en las alas de los perfiles. A continuación, se muestran unas imágenes de la estructura en los diferentes modos de pandeo.

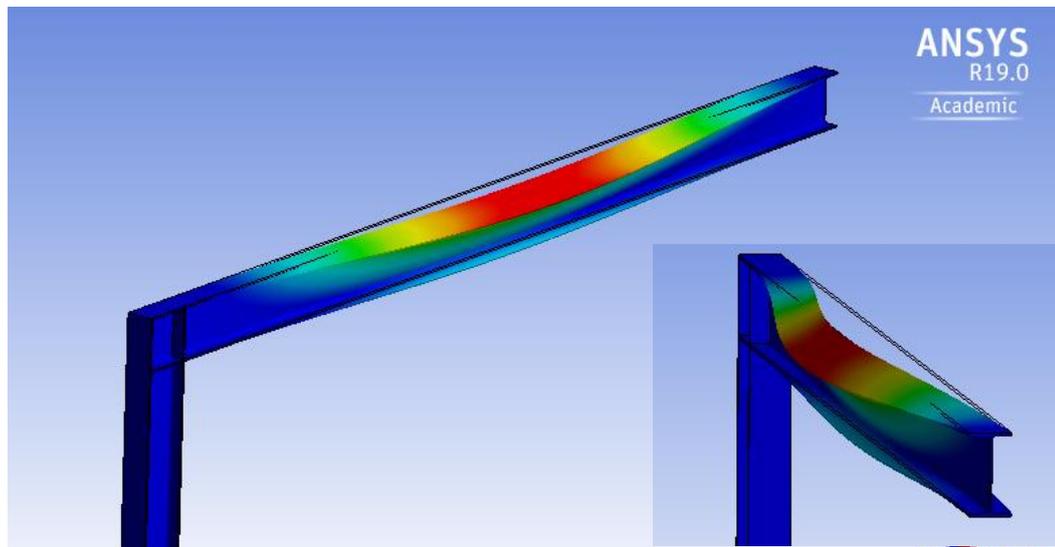


Fig. 5.32: Pandeo Lateral (Modo 1)

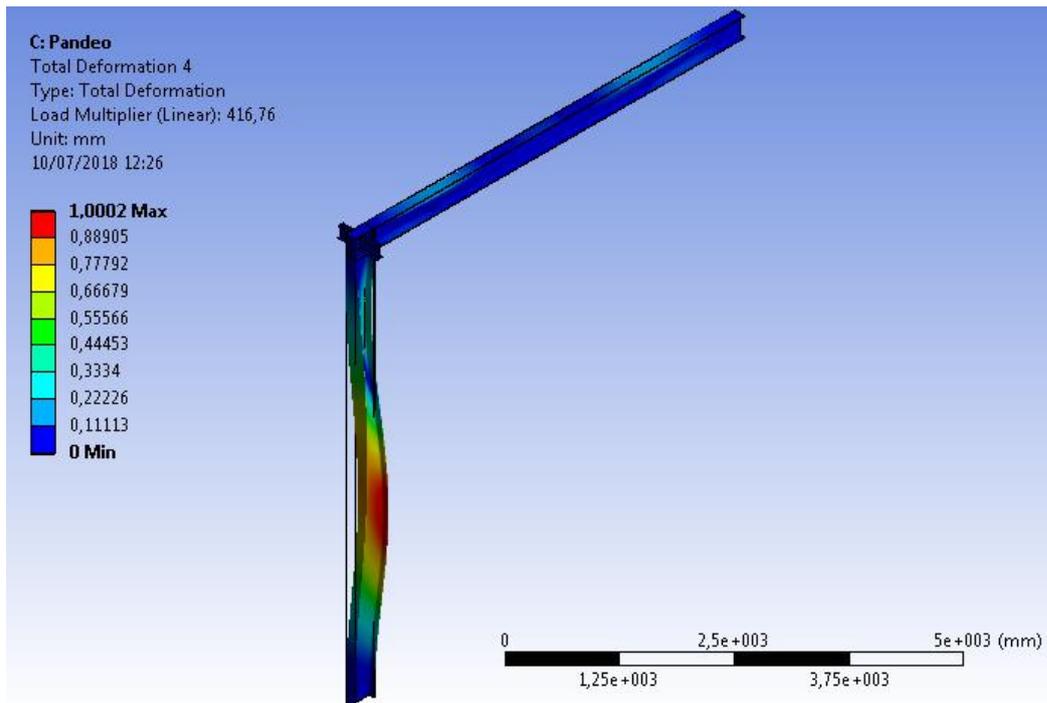


Fig. 5.33: Pandeo en el plano de la estructura (Modo 4)



Capítulo 6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

6.1-CONCLUSIONES

El proceso de trabajo ha sido, inicialmente, lectura y comprensión del documento DB SE-A del CTE, ya que es la base del trabajo. Más en concreto, el pandeo lateral sería el protagonista del trabajo sin olvidarnos de la base de este tipo de inestabilidades, la carga crítica de Euler. El primer problema que tuvimos fue la ecuación del momento crítico. Habiendo comprobado su desarrollo en diferentes fuentes, todas ellas lo que hacían era asignar al factor K_a el valor de K_y . En el trabajo se explicó que están fuertemente relacionados ya que el primero está relacionado con el alabeo y el segundo está relacionado con los giros en Y. Pero, ¿qué ocurre cuando el giro en Y no está permitido pero el alabeo sí? K_a y K_y ya no valdrían lo mismo, por lo que en este trabajo no se ha simplificado K_a .

Algo que no se ha tenido en cuenta ha sido que la misma carga aplicada en las vigas, en ocasiones podría limitar el vuelco. Esto ocurre cuando una viga principal soporta otras vigas secundarias que se apoyan en ella.

En lo que a software se refiere, el programa ANSYS ha sido utilizado satisfactoriamente permitiendo conocer el funcionamiento de Workbench. La característica que menos nos ha convencido ha sido la modelización de los apoyos. Esta tarea ha sido tediosa por momentos e incluso imposible de modelar algún tipo de apoyo.

Como conclusiones para las aplicaciones prácticas, nos queda un sabor agri dulce, ya que esperábamos que ANSYS calculase el valor del momento resistente de vuelco lateral $M_{b,Rd}$ en vez del momento crítico, ya que el primero es el que se utiliza en la práctica. Pero aun así los resultados han sido satisfactorios en casi todos los casos. Si bien es verdad, los mejores resultados han sido obtenidos en las aplicaciones prácticas en las que los apoyos son en horquilla y se aplican momentos en extremos. Por el contrario, los análisis que han dado peores resultados son los realizados para vigas poco esbeltas (2 metros), ya que aquí la diferencia entre ANSYS y la teoría eran bastante considerables. Esto seguramente se deba a que estamos en la zona de pandeo anelástico, por lo que pequeñas fibras plastificadas y la variación del módulo elástico podría ser determinante.



6.2-LÍNEAS FUTURAS

Una vez adentrados en el mundo del pandeo, sería interesante comprobar todos los tipos de pandeo expuestos en el CTE. Además de pandeos se podrían comprobar desplazamientos y plastificación. También se podría estudiar un perfil que no fuera doblemente simétrico, de este modo necesitaríamos un nuevo factor C_3 el cual se ha visto en la tabla 2.3.

Sería muy interesante y pedagógico poder desarrollar una app para teléfonos móviles inteligentes relacionado con el tema de este trabajo. Como experiencia propia, en determinadas ocasiones hubiera necesitado una manera rápida de comprobar el resultado de algún ejercicio en asignaturas de elasticidad y resistencia de materiales durante mi vida universitaria. Simplemente una aproximación del resultado me hubiera hecho ahorrar mucho tiempo en comprobaciones, por lo que hoy en día con los smartphones y apps esto facilitaría mucho al estudiante.

Otro posible trabajo futuro relacionado con el tema aquí tratado sería realizar los análisis de estabilidad lateral en vigas reales a escala aplicando las cargas manualmente y haciendo así un análisis experimental.



BIBLIOGRAFÍA

Capítulo 2

- CTE Seguridad Estructural Acero
- Argüelles, R. *ESTRUCTURAS DE ACERO 4: INESTABILIDAD: Fundamentos, Cálculos y Programa*, Editorial Bellisco, (2016).
- De Buen, O. *Estructuras de acero: Comportamiento y diseño*. Editorial Limusa (1980).
- Garrido, J. y Foces, A. *Resistencia de Materiales*. Universidad de Valladolid (1994).
- Riddell, R. *Diseño Estructural*. Ediciones UC (2010).
- Orgaz D. *Estudio de fenómenos de inestabilidad 3D en estructuras de barras de sección tipo doble-T*. Grado en Ingeniería Mecánica, UVa (2015)
- Apuntes de Estructuras Metálicas. Grado en Ingeniería de caminos, UDC (2013).
- Apuntes de Estructuras Metálicas. Grado en Ingeniería Civil, UPCT (2017).
- Apuntes de Resistencia de Materiales. Grado en Ingeniería Mecánica, UVa (2012).
- Apuntes de Elasticidad y Resistencia de Materiales II. Grado en Ingeniería Mecánica, UVa (2013).

Capítulo 3

- Apuntes de Elasticidad y Resistencia de Materiales I. Grado en Ingeniería Mecánica, UVa (2013).
- Sicre Amaya, C. *El Método del elemento finito y sus aplicaciones*. Universidad de Sonora (1980).
- Cubo Pérez J. *Aplicación del análisis FEM en Ingeniería Naval*. Proyecto Fin de Carrera. Universidad de Cádiz (2010)
- Safeer, S. *Determinación del coeficiente de esbeltez de columnas mediante MEF*. Proyecto fin de carrera. Universidad de Girona (2014)
- Moisés L. *Análisis del diseño en elemento finito del amortiguador para el tren principal de una aeronave de radio control para la competencia SAE Aero Design*. Proyecto Fin de Carrera. Universidad de las Américas (2007)



Capítulo 4

- <http://www.cim-team.com.br/blog-de-ingenieria-electrica-moderna/cad-vs-cae-vs-cam-diferencias> <Consulta 05/2018>
- <http://www.gall-art.com/cad-cam-cae/> <Consulta 05/2018>
- <http://www.3ds.com/> <Consulta 05/2018>
- <https://caesai.com/resources/structural-fire-response-and-probable-collapse-sequence-world-trade-center-towers> <Consulta 05/2018>
- <http://www.ansys.com/> <Consulta 05/2018>
- <https://naviers.xyz/> <Consulta 05/2018>
- ANSYS Workbench User's Guide. Release 12 (2009)
- <http://www.ansys.com/> <Consulta 05/2018>
- <https://www.sharcnet.ca/> <Consulta 05/2018>



ANEXO A-NOTACIÓN

1 Letras mayúsculas latinas

A	área
E	módulo de Elasticidad longitudinal
G	módulo de Elasticidad transversal
I	momento de inercia
L	longitud
M	momento flector
N	esfuerzo axial
S	acero
W	módulo resistente

2 Letras minúsculas latinas

f	resistencia
i	radio de giro de una sección
q	carga uniforme
t	espesor

3 Letras minúsculas griegas

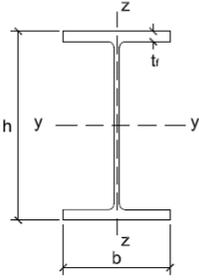
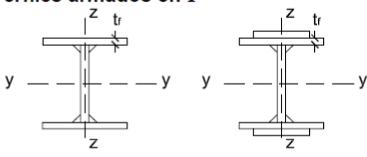
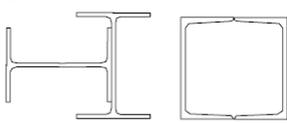
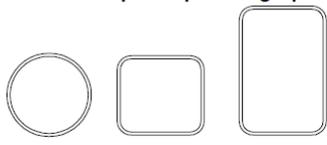
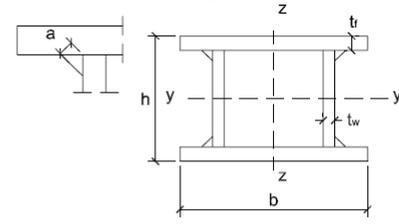
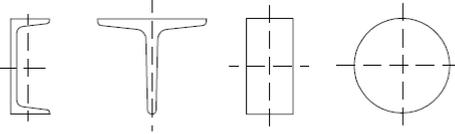
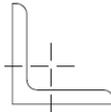
α	Coefficiente de dilatación térmica
α	factor de imperfección
δ	desplazamiento
ϵ	deformación
λ	esbeltez
ν	coeficiente de Poisson
ρ	densidad
σ	tensión normal
τ	tensión tangencial
χ	coeficiente de reducción por pandeo



4 Subíndices

a	alabeo
b	viga
cr	valor crítico
d	valor de cálculo
E	efecto de las acciones
ef	eficaz
eq	equivalente
k	valor característico
LT	lateral
pl	plástico
R	resistencia
t	torsional
y	relativo al límite elástico

ANEXO B-TABLAS PANDEO

Tipo de sección	Tipo de acero		S235 a S355		S450	
	Eje de pandeo ⁽¹⁾		y	z	y	z
Perfiles laminados en I 	$h/b > 1,2$	$t \leq 40 \text{ mm}$	a	b	a_0	a_0
		$40 \text{ mm} < t \leq 100 \text{ mm}$	b	c	a	a
	$h/b \leq 1,2$	$t \leq 100 \text{ mm}$	b	c	a	a
		$t > 100 \text{ mm}$	d	d	c	c
Perfiles armados en I 		$t \leq 40 \text{ mm}$	b	c	b	c
		$t > 40 \text{ mm}$	c	d	c	d
Agrupación de perfiles laminados soldados 			c	c	c	c
Tubos de chapa simples o agrupados 		laminados en caliente	a	a	a_0	a_0
		conformados en frío	c	c	c	c
Perfiles armados en cajón ⁽²⁾ 		soldadura gruesa: $a/t > 0,5$ $b/t < 30$ $h/t_w < 30$	c	c	c	c
		en otro caso	b	b	b	b
Perfiles simples U, T, chapa, redondo macizo 			c	c	c	c
Perfiles L 			b	b	b	b

⁽¹⁾ Para el significado del eje de pandeo, y los términos h, b, t, t_w véase anejo B

⁽²⁾ La variable a se refiere al ancho de garganta de la soldadura

Tabla B.1: Curvas de pandeo. [Fuente: CTE DB SE-A]



Esbeltez reducida	Curva de pandeo				
	a ₀	a	b	c	d
Coefficiente (α) de imperfección	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76
≤ 0,20	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,30	0,99	0,98	0,96	0,95	0,92
0,40	0,97	0,95	0,93	0,90	0,85
0,50	0,95	0,92	0,88	0,84	0,78
0,60	0,93	0,89	0,84	0,79	0,71
0,70	0,90	0,85	0,78	0,72	0,64
0,80	0,85	0,80	0,72	0,66	0,58
0,90	0,80	0,73	0,66	0,60	0,52
1,00	0,73	0,67	0,60	0,54	0,47
1,10	0,65	0,60	0,54	0,48	0,42
1,20	0,57	0,53	0,48	0,43	0,38
1,30	0,51	0,47	0,43	0,39	0,34
1,40	0,45	0,42	0,38	0,35	0,31
1,50	0,40	0,37	0,34	0,31	0,28
1,60	0,35	0,32	0,31	0,28	0,25
1,80	0,28	0,27	0,25	0,23	0,21
2,00 ⁽¹⁾	0,23	0,22	0,21	0,20	0,18
2,20 ⁽¹⁾	0,19	0,19	0,18	0,17	0,15
2,40 ⁽¹⁾	0,16	0,16	0,15	0,14	0,13
2,70 ⁽²⁾	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11
3,00 ⁽²⁾	0,11	0,10	0,10	0,10	0,09

⁽¹⁾ esbeltez intolerable en los elementos principales
⁽²⁾ esbeltez intolerable incluso en elementos de arriostramiento

Tabla B.2: Valores del coeficiente de pandeo. [Fuente: CTE DB SE-A]

A continuación, se muestran las expresiones analíticas para el cálculo del coeficiente de pandeo:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1 \quad B.1)$$

Con:

$$\phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2] \quad B.1)$$

El valor del coeficiente de imperfección α lo encontramos en la tabla B.2.

ANEXO C-ACEROS Y PERFILES ESTRUCTURALES

C.1-ACEROS ESTRUCTURALES

El acero está constituido por aleaciones de hierro y carbono, en las que el carbono no sobrepasa el 2%. También forman parte del acero: fósforo, azufre, nitrógeno y otros en menor medida. Ponemos ese límite de 2% (sería fundición) porque a medida que crece el contenido de carbono, aumenta su dureza y su resistencia, pero también será más frágil y menos dúctil. Lo cual no convendría en elementos estructurales. Además, si reducimos el contenido de carbono, el acero será más soldable. El acero es un material dúctil, maleable, forjable y soldable.

Los tipos de aceros que se suelen utilizar para construcciones metálicas de uso general son los establecidos en la norma UNE EN 10025. Son productos laminados en caliente de acero no aleado. En la siguiente tabla podemos ver las características mecánicas mínimas de los aceros:

DESIGNACIÓN	Espesor nominal t (mm)				Temperatura del ensayo Charpy °C
	Tensión de límite elástico f_y (N/mm ²)			Tensión de rotura f_u (N/mm ²)	
	t ≤ 16	16 < t ≤ 40	40 < t ≤ 63	3 ≤ t ≤ 100	
S235JR					20
S235J0	235	225	215	360	0
S235J2					-20
S275JR					20
S275J0	275	265	255	410	0
S275J2					-20
S355JR					20
S355J0	355	345	335	470	0
S355J2					-20
S355K2					-20 ⁽¹⁾
S450J0	450	430	410	550	0

⁽¹⁾ Se le exige una energía mínima de 40J.

Tabla. C.1: Características mecánicas de aceros. [Fuente: CTE DB SE-A]

Si hablamos de resistencia, hay 4 tipos de aceros, S235, S275, S355 y S450. El número que acompaña a la S (Steel) es el valor mínimo garantizado del límite elástico en MPa. Como se ve en la tabla C.1, éste dependerá del espesor mínimo de la sección. Los aceros S235 tienen escasa utilización por lo que apenas se fabrica. Por el contrario, el acero S275 es el más utilizado a nivel estructural. Si se necesitaran resistir unas tensiones excepcionalmente altas se utilizarían los aceros S355 y S450.



Los caracteres que acompañan al valor del límite elástico corresponden al grado de resiliencia del acero. Esto se realiza mediante un ensayo Charpy⁵. La letra J quiere decir que el ensayo se ha hecho con una energía de 27 Julios, mientras que la letra K quiere decir que el ensayo se ha hecho con una energía de 40 Julios. Por último, el valor alfanumérico que queda corresponde a la temperatura que en la cual se ha hecho dicho ensayo. La letra R significa que la temperatura era de 20 °C, mientras que los valores 0, 1, 2, 3... corresponden a la temperatura negativa que resulta de multiplicar el número anterior por 10. Los aceros JR se utilizan en la construcción ordinaria, los JO poseen unas características de alta soldabilidad y los J2 tienen una alta resiliencia y soldabilidad.

Las características más importantes de los aceros se muestran a continuación:

<i>Módulo de Elasticidad: E</i>	210000	N/mm ²
<i>Módulo de Rigidez: G</i>	81000	N/mm ²
<i>Coefficiente de Poisson: v</i>	0,28	
<i>Coefficiente de dilatación térmica: α</i>	1,2e-5	(°C) ⁻¹
<i>Densidad: ρ</i>	7850	Kg/m ³

C.2-PERFILES ESTRUCTURALES

C.2.1-LAMINADOS EN CALIENTE

Los perfiles más utilizados suelen ser los productos laminados en caliente siendo sus características más destacables:

- Cantos vivos
- Grandes espesores
- Longitudes hasta 16m
- Uso en estructura metálica pesada

Entre los más habituales tenemos los perfiles IPN, IPE, HE, U y L.

⁵ El ensayo Charpy es un ensayo en el cual se calcula la energía que puede soportar un material al recibir un choque. Consiste en golpear una probeta fija, con una hendidura, mediante un péndulo.

C.2.2-CONFORMADOS EN FRÍO

Son perfiles utilizados en estructuras ligeras como correas y cerramientos. Tienen cantos redondeados y espesores pequeños. Pueden ser perfiles cerrados o abiertos. Se fabrican a partir de chapa laminada en caliente de acero 275JR mediante conformado en frío y soldadura. Pueden someterse a galvanizados, pinturas... Los más típicos son los redondos, cuadrados, rectangulares, omega, Z, C, U, L...

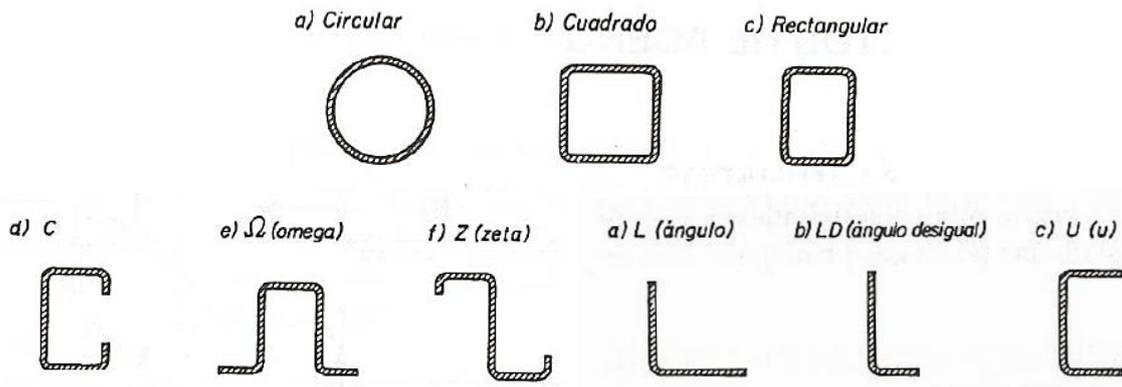


Fig. C.1: Perfiles conformados en frío

Perfiles en I con alas paralelas

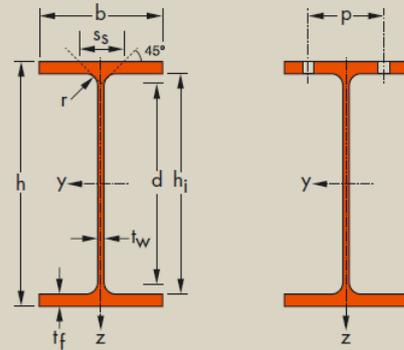
Dimensiones: EN 10365:2017
Tolerancias: EN 10034: 1993
Estado de la superficie: conforme a EN 10163-3: 2004, clase C, subclase 1

Parallel flange I sections

Dimensions: EN 10365:2017
Tolerances: EN 10034: 1993
Surface condition: according to EN 10163-3: 2004, class C, subclass 1

Travi ad I ad ali parallele

Dimensioni: EN 10365:2017
Tolleranze: EN 10034: 1993
Condizioni di superficie: secondo EN 10163-3: 2004, classe C, sottoclasse 1



Denominación Designation Designazione	Dimensiones Dimensions Dimensioni						Dimensiones de construcción Dimensions for detailing Dimensioni di dettaglio						Superficie Surface Superficie	
	G kg/m	h mm	b mm	t _w mm	t _f mm	r mm	A mm ² x10 ²	h _i mm	d mm	Ø	p _{min} mm	p _{max} mm	A _L m ² /m	A _G m ² /t
IPE 200	22,4	200	100	5,6	8,5	12	28,5	183,0	159,0	M 10	54	58	0,768	34,36
IPE 300	42,2	300	150	7,1	10,7	15	53,8	278,6	248,6	M 16	72	86	1,160	27,46

Denominación Designation Designazione	Propiedades del perfil / Section properties / Proprietà geometriche del profilo													Classification EN 1993-1-1: 2005						EN 10025-2: 2004	EN 10025-4: 2004	EN 10225:2009
	eje fuerte y-y strong axis y-y asse forte y-y						eje débil z-z weak axis z-z asse debole z-z							Pure bending y-y			Pure compression					
	G kg/m	I _y mm ⁴ x10 ⁴	W _{el,y} mm ³ x10 ³	W _{ply} ♦ mm ³ x10 ³	i _y mm	A _{yz} mm ² x10 ²	I _z mm ⁴ x10 ⁴	W _{el,z} mm ³ x10 ³	W _{pl,z} ♦ mm ³ x10 ³	i _z mm	s _s mm	I _t mm ⁴ x10 ⁴	I _w mm ⁶ x10 ⁹	S235	S355	S460	S235	S355	S460			
IPE 200	22,4	1943	194	221	8,26	14,0	142	28,5	44,6	2,24	36,7	6,98	13,0	1	1	1	1	2	3	✓	✓	✓
IPE 300	42,2	8356	557	628	12,5	25,7	604	80,5	125	3,35	46,1	20,1	126	1	1	1	2	4	4	✓	✓	✓

Tabla. C.2: Propiedades IPE

ANEXO D-TABLAS MOMENTO CRÍTICO

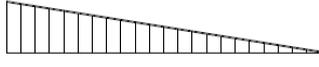
En el siguiente apartado se muestran los valores del momento crítico para todas las vigas IPE existentes y distintas longitudes en cada uno de los casos estudiados en el trabajo. Se tienen en cuenta los factores seleccionados en rojo.

Diagrama de momentos flectores	Valor de k	C ₁	C ₂	C ₃
$\psi = +1$ 	1,0	1,000	-	1,000
	0,7	1,000	-	1,113
	0,5	1,000	-	1,114

	l _y [mm ⁴] x10 ⁴	l _r [mm ⁴] x10 ⁴	l _a [mm ⁶] x10 ⁹	L [m]	2	4	6	8	10	12	16
				M _{cr} [kN·m]							
				IPE 80	8,49	0,7	0,12	5,26	2,53	1,67	1,25
IPE 100	15,9	1,2	0,35	9,75	4,58	3,01	2,25	1,80	1,50	1,12	
IPE 120	27,7	1,74	0,89	16,39	7,40	4,83	3,59	2,86	2,38	1,78	
IPE 140	44,9	2,45	1,98	26,46	11,42	7,37	5,46	4,34	3,61	2,70	
IPE 160	68,3	3,6	3,96	41,93	17,42	11,12	8,21	6,51	5,41	4,04	
IPE 180	101	4,79	7,43	63,60	25,17	15,83	11,61	9,19	7,61	5,68	
IPE 200	142	6,98	13	95,48	36,74	22,88	16,71	13,20	10,93	8,14	
IPE 220	205	9,07	22,7	142,47	52,27	31,96	23,16	18,22	15,05	11,18	
IPE 240	284	12,9	37,4	209,51	75,01	45,39	32,75	25,70	21,19	15,72	
IPE 270	420	15,9	70,6	328,08	109,47	64,01	45,42	35,33	28,98	21,39	
IPE 300	604	20,1	126	505,25	159,72	90,47	63,11	48,63	39,66	29,09	
IPE 330	788	28,2	199	717,13	222,78	124,74	86,45	66,36	54,00	39,50	
IPE 360	1043	37,3	314	1021,06	309,48	170,29	116,79	89,10	72,21	52,59	
IPE 400	1318	51,1	490	1420,07	423,13	229,81	156,33	118,66	95,86	69,57	
IPE 450	1676	66,9	791	2007,47	583,19	310,21	208,12	156,58	125,77	90,68	
IPE 500	2142	89,3	1249	2825,90	806,00	421,76	279,70	208,82	166,86	119,57	
IPE 550	2668	123	1884	3856,51	1089,86	565,37	372,56	276,92	220,62	157,53	
IPE 600	3387	165	2846	5312,79	1484,55	761,66	497,69	367,74	291,76	207,29	

Tabla D.1: Momento crítico para vigas con apoyos en horquilla con $\psi=1$



Diagrama de momentos flectores	Valor de k	C_1	C_2	C_3
$\psi = 0$ 	1,0	1,879		0,939
	0,7	2,092		1,473
	0,5	2,150	-	2,150

	I_y [mm ⁴] x10 ⁴	I_T [mm ⁴] x10 ⁴	I_a [mm ⁶] x10 ⁹	L [m]	2	4	6	8	10	12	16
				M _{cr} [kN·m]							
IPE 80	8,49	0,7	0,12	9,89	4,76	3,15	2,35	1,88	1,57	1,17	
IPE 100	15,9	1,2	0,35	18,32	8,60	5,66	4,23	3,38	2,81	2,10	
IPE 120	27,7	1,74	0,89	30,79	13,90	9,07	6,75	5,38	4,47	3,35	
IPE 140	44,9	2,45	1,98	49,73	21,45	13,84	10,26	8,16	6,78	5,07	
IPE 160	68,3	3,6	3,96	78,79	32,73	20,89	15,42	12,24	10,16	7,59	
IPE 180	101	4,79	7,43	119,51	47,30	29,74	21,81	17,27	14,30	10,67	
IPE 200	142	6,98	13	179,40	69,03	42,99	31,41	24,81	20,53	15,29	
IPE 220	205	9,07	22,7	267,70	98,21	60,05	43,52	34,24	28,27	21,01	
IPE 240	284	12,9	37,4	393,67	140,94	85,29	61,53	48,30	39,82	29,54	
IPE 270	420	15,9	70,6	616,47	205,69	120,27	85,34	66,39	54,46	40,18	
IPE 300	604	20,1	126	949,37	300,10	169,99	118,58	91,38	74,52	54,65	
IPE 330	788	28,2	199	1347,49	418,60	234,39	162,44	124,70	101,46	74,22	
IPE 360	1043	37,3	314	1918,58	581,51	319,97	219,45	167,41	135,68	98,82	
IPE 400	1318	51,1	490	2668,31	795,06	431,82	293,75	222,97	180,13	130,72	
IPE 450	1676	66,9	791	3772,03	1095,81	582,88	391,07	294,22	236,32	170,38	
IPE 500	2142	89,3	1249	5309,87	1514,47	792,48	525,56	392,37	313,53	224,68	
IPE 550	2668	123	1884	7246,39	2047,84	1062,33	700,03	520,34	414,54	296,00	
IPE 600	3387	165	2846	9982,74	2789,48	1431,16	935,15	690,98	548,21	389,49	

Tabla D.2: Momento crítico para vigas con apoyos en horquilla con $\psi=0$



Diagrama de momentos flectores	Valor de k	C_1	C_2	C_3
$\psi = -1$ 	1,0	2,752		0,000
	0,7	3,063		0,000
	0,5	3,149	-	0,000

	I_y [mm ⁴] x10 ⁴	I_T [mm ⁴] x10 ⁴	I_a [mm ⁶] x10 ⁹	L [m]						
				2	4	6	8	10	12	16
				M _{cr} [kN·m]						
IPE 80	8,49	0,7	0,12	14,48	6,97	4,61	3,45	2,75	2,29	1,72
IPE 100	15,9	1,2	0,35	26,83	12,60	8,29	6,19	4,94	4,12	3,08
IPE 120	27,7	1,74	0,89	45,09	20,36	13,28	9,88	7,88	6,55	4,91
IPE 140	44,9	2,45	1,98	72,83	31,42	20,27	15,02	11,95	9,93	7,42
IPE 160	68,3	3,6	3,96	115,39	47,93	30,60	22,58	17,93	14,88	11,11
IPE 180	101	4,79	7,43	175,03	69,27	43,56	31,95	25,29	20,95	15,62
IPE 200	142	6,98	13	262,76	101,11	62,96	46,00	36,34	30,07	22,39
IPE 220	205	9,07	22,7	392,08	143,84	87,95	63,75	50,15	41,41	30,77
IPE 240	284	12,9	37,4	576,57	206,43	124,92	90,12	70,74	58,32	43,27
IPE 270	420	15,9	70,6	902,89	301,25	176,15	124,99	97,24	79,76	58,85
IPE 300	604	20,1	126	1390,46	439,54	248,96	173,68	133,84	109,15	80,05
IPE 330	788	28,2	199	1973,55	613,08	343,29	237,91	182,63	148,60	108,70
IPE 360	1043	37,3	314	2809,97	851,68	468,63	321,41	245,19	198,72	144,73
IPE 400	1318	51,1	490	3908,03	1164,45	632,45	430,23	326,56	263,82	191,46
IPE 450	1676	66,9	791	5524,55	1604,93	853,70	572,76	430,92	346,12	249,54
IPE 500	2142	89,3	1249	7776,88	2218,11	1160,68	769,74	574,67	459,20	329,06
IPE 550	2668	123	1884	10613,12	2999,29	1555,90	1025,28	762,09	607,14	433,52
IPE 600	3387	165	2846	14620,81	4085,49	2096,09	1369,63	1012,01	802,92	570,45

Tabla D.3: Momento crítico para vigas con apoyos en horquilla con $\psi=-1$

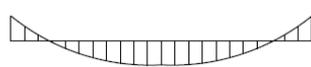


Tipo de carga y condiciones de apoyo	Diagrama de momentos flectores	k	C ₁	C ₂	C ₃
		1,0 0,5	1,132 0,972	0,459 0,304	0,525 0,980

	I _y [mm ⁴] x10 ⁴	I _T [mm ⁴] x10 ⁴	I _a [mm ⁶] x10 ⁹	L [m]	2	4	6	8	10	12	16
				M _{cr} [kN·m]							
				IPE 80	8,49	0,7	0,12	5,96	2,87	1,90	1,42
IPE 100	15,9	1,2	0,35	11,03	5,18	3,41	2,55	2,03	1,69	1,27	
IPE 120	27,7	1,74	0,89	18,55	8,37	5,46	4,07	3,24	2,70	2,02	
IPE 140	44,9	2,45	1,98	29,96	12,92	8,34	6,18	4,91	4,08	3,05	
IPE 160	68,3	3,6	3,96	47,46	19,72	12,59	9,29	7,37	6,12	4,57	
IPE 180	101	4,79	7,43	72,00	28,49	17,92	13,14	10,40	8,62	6,43	
IPE 200	142	6,98	13	108,08	41,59	25,90	18,92	14,95	12,37	9,21	
IPE 220	205	9,07	22,7	161,28	59,17	36,18	26,22	20,63	17,03	12,66	
IPE 240	284	12,9	37,4	237,16	84,91	51,39	37,07	29,10	23,99	17,80	
IPE 270	420	15,9	70,6	371,39	123,91	72,46	51,41	40,00	32,81	24,21	
IPE 300	604	20,1	126	571,95	180,80	102,41	71,44	55,05	44,90	32,93	
IPE 330	788	28,2	199	811,79	252,18	141,21	97,86	75,12	61,12	44,71	
IPE 360	1043	37,3	314	1155,84	350,33	192,77	132,21	100,86	81,74	59,53	
IPE 400	1318	51,1	490	1607,52	478,98	260,15	176,97	134,33	108,52	78,75	
IPE 450	1676	66,9	791	2272,45	660,17	351,16	235,60	177,25	142,37	102,64	
IPE 500	2142	89,3	1249	3198,92	912,39	477,43	316,62	236,38	188,89	135,36	
IPE 550	2668	123	1884	4365,57	1233,72	640,00	421,73	313,47	249,74	178,32	
IPE 600	3387	165	2846	6014,08	1680,51	862,20	563,38	416,28	330,27	234,65	

Tabla D.4: Momento crítico para vigas con apoyos en horquilla con carga distribuida



Tipo de carga y condiciones de apoyo	Diagrama de momentos flectores	k	C ₁	C ₂	C ₃
		1,0 0,5	1,285 0,712	1,562 0,652	0,753 1,070

	I _y [mm ⁴] x10 ⁴	I _T [mm ⁴] x10 ⁴	L [m]	I _a [mm ⁶] x10 ⁹	2	4	6	8	10	12	16
					M _{cr} [kN·m]						
					IPE 80	8,49	0,7	0,12	7,49	3,60	2,39
IPE 100	15,9	1,2	0,35	13,88	6,52	4,29	3,20	2,56	2,13	1,60	
IPE 120	27,7	1,74	0,89	23,33	10,53	6,87	5,11	4,08	3,39	2,54	
IPE 140	44,9	2,45	1,98	37,69	16,26	10,49	7,77	6,18	5,14	3,84	
IPE 160	68,3	3,6	3,96	59,71	24,80	15,83	11,69	9,28	7,70	5,75	
IPE 180	101	4,79	7,43	90,57	35,84	22,54	16,53	13,09	10,84	8,08	
IPE 200	142	6,98	13	135,96	52,32	32,58	23,80	18,80	15,56	11,59	
IPE 220	205	9,07	22,7	202,88	74,43	45,51	32,98	25,95	21,43	15,92	
IPE 240	284	12,9	37,4	298,34	106,81	64,64	46,63	36,60	30,18	22,39	
IPE 270	420	15,9	70,6	467,19	155,88	91,15	64,67	50,32	41,27	30,45	
IPE 300	604	20,1	126	719,48	227,43	128,82	89,87	69,25	56,48	41,42	
IPE 330	788	28,2	199	1021,20	317,23	177,63	123,11	94,50	76,89	56,24	
IPE 360	1043	37,3	314	1453,99	440,70	242,49	166,31	126,87	102,82	74,89	
IPE 400	1318	51,1	490	2022,18	602,54	327,25	222,62	168,98	136,51	99,07	
IPE 450	1676	66,9	791	2858,63	830,46	441,74	296,37	222,98	179,10	129,12	
IPE 500	2142	89,3	1249	4024,08	1147,74	600,58	398,30	297,36	237,61	170,27	
IPE 550	2668	123	1884	5491,67	1551,96	805,09	530,52	394,34	314,16	224,32	
IPE 600	3387	165	2846	7565,42	2114,00	1084,60	708,70	523,66	415,46	295,18	

Tabla D.5: Momento crítico para vigas con apoyos empotrados con carga distribuida



Tipo de carga y condiciones de apoyo	Diagrama de momentos flectores	k	C ₁	C ₂	C ₃
		1,0 0,5	1,365 1,070	0,553 0,432	1,730 3,050

	I _y [mm ⁴] x10 ⁴	I _T [mm ⁴] x10 ⁴	I _a [mm ⁶] x10 ⁹	L [m]	2	4	6	8	10	12	16
				M _{cr} [kN·m]							
IPE 80	8,49	0,7	0,12	7,18	3,46	2,29	1,71	1,37	1,14	0,85	
IPE 100	15,9	1,2	0,35	13,31	6,25	4,11	3,07	2,45	2,04	1,53	
IPE 120	27,7	1,74	0,89	22,37	10,10	6,59	4,90	3,91	3,25	2,43	
IPE 140	44,9	2,45	1,98	36,12	15,58	10,05	7,45	5,93	4,92	3,68	
IPE 160	68,3	3,6	3,96	57,23	23,78	15,18	11,20	8,89	7,38	5,51	
IPE 180	101	4,79	7,43	86,82	34,36	21,60	15,85	12,54	10,39	7,75	
IPE 200	142	6,98	13	130,33	50,15	31,23	22,81	18,02	14,91	11,11	
IPE 220	205	9,07	22,7	194,47	71,34	43,62	31,62	24,88	20,54	15,26	
IPE 240	284	12,9	37,4	285,98	102,39	61,96	44,70	35,09	28,93	21,46	
IPE 270	420	15,9	70,6	447,83	149,42	87,37	61,99	48,23	39,56	29,19	
IPE 300	604	20,1	126	689,67	218,01	123,49	86,14	66,38	54,14	39,70	
IPE 330	788	28,2	199	978,89	304,09	170,27	118,00	90,59	73,70	53,91	
IPE 360	1043	37,3	314	1393,75	422,44	232,44	159,42	121,62	98,56	71,79	
IPE 400	1318	51,1	490	1938,39	577,57	313,70	213,39	161,98	130,85	94,96	
IPE 450	1676	66,9	791	2740,19	796,05	423,44	284,09	213,74	171,68	123,77	
IPE 500	2142	89,3	1249	3857,36	1100,19	575,70	381,80	285,04	227,77	163,22	
IPE 550	2668	123	1884	5264,14	1487,66	771,73	508,54	378,00	301,14	215,03	
IPE 600	3387	165	2846	7251,96	2026,42	1039,66	679,34	501,96	398,25	282,95	

Tabla D.6: Momento crítico para vigas con apoyos en horquilla con carga puntual centrada



Tipo de carga y condiciones de apoyo	Diagrama de momentos flectores	k	C ₁	C ₂	C ₃
		1,0	1,565	1,257	2,540
		0,5	0,932	0,715	4,800

	I _y [mm ⁴] x10 ⁴	I _T [mm ⁴] x10 ⁴	L [m]	I _a [mm ⁶] x10 ⁹	2	4	6	8	10	12	16
					M _{cr} [kN·m]						
					IPE 80	8,49	0,7	0,12	9,87	4,75	3,14
IPE 100	15,9	1,2	0,35	18,29	8,59	5,65	4,22	3,37	2,81	2,10	
IPE 120	27,7	1,74	0,89	30,74	13,88	9,05	6,74	5,37	4,47	3,34	
IPE 140	44,9	2,45	1,98	49,65	21,42	13,82	10,24	8,14	6,77	5,06	
IPE 160	68,3	3,6	3,96	78,66	32,68	20,86	15,39	12,22	10,14	7,57	
IPE 180	101	4,79	7,43	119,32	47,22	29,69	21,78	17,24	14,28	10,65	
IPE 200	142	6,98	13	179,12	68,92	42,92	31,36	24,77	20,50	15,26	
IPE 220	205	9,07	22,7	267,27	98,05	59,95	43,45	34,19	28,23	20,97	
IPE 240	284	12,9	37,4	393,04	140,72	85,16	61,43	48,22	39,76	29,50	
IPE 270	420	15,9	70,6	615,48	205,36	120,08	85,20	66,29	54,37	40,12	
IPE 300	604	20,1	126	947,85	299,63	169,71	118,39	91,23	74,41	54,57	
IPE 330	788	28,2	199	1345,34	417,93	234,02	162,18	124,50	101,30	74,10	
IPE 360	1043	37,3	314	1915,52	580,58	319,46	219,10	167,14	135,46	98,66	
IPE 400	1318	51,1	490	2664,05	793,79	431,13	293,28	222,61	179,84	130,51	
IPE 450	1676	66,9	791	3766,01	1094,06	581,95	390,44	293,75	235,95	170,11	
IPE 500	2142	89,3	1249	5301,39	1512,05	791,22	524,72	391,74	313,03	224,32	
IPE 550	2668	123	1884	7234,82	2044,57	1060,64	698,92	519,50	413,88	295,52	
IPE 600	3387	165	2846	9966,80	2785,02	1428,87	933,66	689,87	547,34	388,87	

Tabla D.7: Momento crítico para vigas con apoyos empotrados con carga puntual centrada

Tipo de carga y condiciones de apoyo	Diagrama de momentos flectores	Valor de k_y	Valores de coeficientes		
			C_1	C_2	C_3
		1,0 $k_x=2$	$1,28/\alpha$	0,64	

	I_y [mm ⁴] x10 ⁴	I_T [mm ⁴] x10 ⁴	I_a [mm ⁶] x10 ⁹	L [m]	2	4	6	8	10	12	16
				M _{cr} [kN·m]							
				IPE 80	8,49	0,7	0,12	6,48	3,21	2,13	1,60
IPE 100	15,9	1,2	0,35	11,72	5,76	3,83	2,87	2,29	1,91	1,43	
IPE 120	27,7	1,74	0,89	18,94	9,20	6,10	4,56	3,65	3,04	2,28	
IPE 140	44,9	2,45	1,98	29,23	13,97	9,23	6,90	5,51	4,59	3,44	
IPE 160	68,3	3,6	3,96	44,59	21,01	13,84	10,34	8,25	6,87	5,15	
IPE 180	101	4,79	7,43	64,44	29,72	19,49	14,53	11,59	9,65	7,22	
IPE 200	142	6,98	13	94,05	42,79	27,97	20,83	16,61	13,82	10,34	
IPE 220	205	9,07	22,7	133,80	59,30	38,52	28,62	22,80	18,95	14,18	
IPE 240	284	12,9	37,4	192,02	83,83	54,25	40,25	32,04	26,62	19,91	
IPE 270	420	15,9	70,6	280,23	116,27	74,19	54,75	43,46	36,07	26,93	
IPE 300	604	20,1	126	408,87	161,56	101,53	74,46	58,93	48,82	36,40	
IPE 330	788	28,2	199	570,31	221,31	138,23	101,11	79,93	66,16	49,29	
IPE 360	1043	37,3	314	792,26	298,98	184,85	134,64	106,19	87,80	65,33	
IPE 400	1318	51,1	490	1083,21	400,21	245,41	178,10	140,22	115,81	86,08	
IPE 450	1676	66,9	791	1492,96	532,80	321,97	232,13	182,14	150,14	111,37	
IPE 500	2142	89,3	1249	2063,36	716,04	427,17	306,11	239,42	197,00	145,84	
IPE 550	2668	123	1884	2790,04	953,75	564,78	403,27	314,81	258,74	191,33	
IPE 600	3387	165	2846	3800,46	1274,08	746,90	530,65	413,13	339,01	250,27	

Tabla D.8: Momento crítico para vigas en voladizo con carga puntual en el extremo



Tipo de carga y condiciones de apoyo	Diagrama de momentos flectores	Valor de k_y	Valores de coeficientes		
			C_1	C_2	C_3
		1,0 $k_{\alpha}=2$	2,05		

	I_y [mm ⁴] x10 ⁴	I_T [mm ⁴] x10 ⁴	I_a [mm ⁶] x10 ⁹	L [m]	2	4	6	8	10	12	16
				M _{cr} [kN·m]							
IPE 80	8,49	0,7	0,12	10,38	5,14	3,42	2,56	2,05	1,71	1,28	
IPE 100	15,9	1,2	0,35	18,77	9,23	6,13	4,59	3,67	3,06	2,29	
IPE 120	27,7	1,74	0,89	30,33	14,73	9,76	7,31	5,84	4,86	3,65	
IPE 140	44,9	2,45	1,98	46,81	22,38	14,79	11,06	8,83	7,35	5,51	
IPE 160	68,3	3,6	3,96	71,41	33,64	22,17	16,55	13,22	11,00	8,24	
IPE 180	101	4,79	7,43	103,20	47,60	31,21	23,27	18,57	15,45	11,57	
IPE 200	142	6,98	13	150,63	68,53	44,80	33,36	26,60	22,13	16,57	
IPE 220	205	9,07	22,7	214,29	94,97	61,69	45,84	36,51	30,35	22,71	
IPE 240	284	12,9	37,4	307,54	134,27	86,89	64,46	51,31	42,64	31,89	
IPE 270	420	15,9	70,6	448,81	186,21	118,83	87,68	69,61	57,76	43,14	
IPE 300	604	20,1	126	654,83	258,75	162,61	119,26	94,39	78,19	58,29	
IPE 330	788	28,2	199	913,39	354,45	221,38	161,94	128,01	105,97	78,94	
IPE 360	1043	37,3	314	1268,86	478,84	296,05	215,63	170,08	140,62	104,63	
IPE 400	1318	51,1	490	1734,83	640,97	393,04	285,24	224,57	185,48	137,86	
IPE 450	1676	66,9	791	2391,06	853,31	515,66	371,77	291,70	240,46	178,36	
IPE 500	2142	89,3	1249	3304,60	1146,78	684,13	490,25	383,44	315,50	233,58	
IPE 550	2668	123	1884	4468,42	1527,48	904,53	645,87	504,20	414,40	306,43	
IPE 600	3387	165	2846	6086,67	2040,51	1196,21	849,87	661,66	542,95	400,82	

Tabla D.9: Momento crítico para vigas en voladizo con carga distribuida