Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Estadística

Análisis de los mercados financieros y el modelo de Markowitz

Autor:

Esther Torres Núñez

Tutores:

Victor Gatón Bustillo

Ricardo Josa Fombellida

INDICE

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio del mercado de acciones a partir de los datos correspondientes a las cotizaciones de siete empresas del IBEX 35. El trabajo consta de dos partes principales. En primer lugar realizaremos un análisis de series temporales en el que buscaremos un modelo que pueda reflejar el comportamiento de las acciones y nos permita obtener la información necesaria para realizar buenas inversiones. En segundo lugar haremos un estudio del modelo de Markowitz, que está diseñado para encontrar una cartera de inversión óptima, y comentaremos cómo lo utilizan los profesionales y alguna de las críticas que recibe de ellos.

Palabras clave: series temporales, programación multiobjetivo, frontera eficiente, mercado financiero, rentabilidad, riesgo

1. INTRODUCCIÓN

La Bolsa de Valores se define como un mercado de capitales organizado, institucionalizado, oficialmente regulado, con unos intermediarios y formas de contratación específicas. Otra definición que amplía la anterior, es la que describe La Bolsa de Valores como una institución donde se encuentran los demandantes y oferentes de valores negociando a través de sus Casas Corredoras de Bolsa.

Por tanto, las Bolsas de Valores propician la negociación de acciones, obligaciones, bonos, certificados de inversión y demás Títulos-valores inscritos, proporcionando a los tenedores de títulos e inversionistas, el marco legal, operativo y tecnológico para efectuar el intercambio entre la oferta y la demanda.

Existen muchas más definiciones de lo que es la Bolsa de Valores, pero todas convergen en un solo punto: "transacciones financieras".

La Bolsa se origina como Institución a finales del siglo XV, en las ferias medievales de la Europa occidental. En ellas se inició la práctica de las transacciones de valores mobiliarios y títulos. El término "Bolsa" apareció en la ciudad de Brujas (Bélgica) al final del siglo XVI y hace referencia a un recinto de propiedad de Van der Bursen, donde los comerciantes solían reunirse para llevar a cabo sus negocios.

En el año 1602 se fundó la Bolsa de Valores de Ámsterdam, propiedad de la Compañía Holandesa de las Indias Orientales, por lo que ésta se considera la más antigua. Rápidamente se convirtió en el mercado financiero más importante del mundo, ya que en ella se negociaban los productos llegados de las colonias, llegando a tener tal relevancia que su boletín semanal se utilizaba como referente mundial a la hora de ejecutar las órdenes de compra-venta.

Posteriormente el modelo de bolsa fue adaptándose a los tiempos y ya por el siglo XVIII, tras la revolución francesa, la clase burguesa se orientó hacia un sistema capitalista, abandonando definitivamente el sistema económico de la época feudal.

Los integrantes o participantes en las operaciones bursátiles se pueden clasificar en dos grupos: los demandantes de capital (empresas, organismos públicos o privados y otras entidades), y los oferentes de capital (ahorradores, inversionistas). Ambos grupos se relacionan a través de los intermediarios.

Son muchos los productos que se negocian en las Bolsas de Valores, pero nos vamos a centrar en uno: el mercado de acciones.

Una acción es una parte alícuota del capital de una sociedad anónima. Representa la propiedad que una persona tiene de una parte de esa sociedad. Es decir, si la empresa liquidara hoy, vendiendo sus bienes y pagando sus deudas, el dinero restante se repartiría entre el número de acciones.

Las acciones son un instrumento de financiación para las empresas. Cuando una empresa se crea o necesita dinero para un nuevo proyecto, realiza una emisión de acciones que se ofertan en los mercados bursátiles, obteniendo dinero a cambio de un porcentaje de la propiedad de la empresa.

Como tal, el precio de las acciones refleja el valor de una empresa, subiendo cuando la empresa funciona bien y bajando cuando sus negocios fracasan. En cierto sentido, las cotizaciones en las bolsas son un reflejo de la actividad económica y empresarial.

Aunque las Bolsas se concibieron para poner en contacto la inversión y la financiación, también son reflejo de muchas operaciones meramente especulativas. Las cotizaciones en bolsa recogen en ocasiones expectativas y rumores económicos que no siempre se cumplen.

Debido a la gran repercusión a todos los niveles que tiene la información reflejada en los mercados bursátiles, es importante tener un marco de cómo se comportará el mercado en el futuro y poder tomar buenas decisiones de inversión. Por ello, tiene muchísima importancia el desarrollo de métodos de pronóstico o análisis que permitan a las corporaciones o a los inversionistas tener la mejor información posible en base a los datos históricos disponibles.

El objetivo de este trabajo es hacer una revisión de los instrumentos estadísticos que tenemos a nuestra disposición para realizar un análisis de la información histórica y cómo aprovechar dicha información para realizar las inversiones adecuadas en base a dicha información.

El trabajo se estructura como sigue. Después de la introducción, en la Sección 2 se estudia el ajuste de las cotizaciones de empresas del IBEX 35 a modelos de series temporales mostrando que se puede conseguir un modelo bastante práctico y sencillo utilizando los datos de los retornos de las cotizaciones. En la Sección 3 se obtiene la frontera eficiente de rentabilidad-riesgo de las mismas empresas del IBEX 35 con el objeto de calcular una cartera de inversiones adecuada. Se compararán dos carteras de inversión, una estática a largo plazo y otra dinámica a más corto plazo. Se concluirá que ambas estrategias tienen ventajas e inconvenientes y que los resultados obtenidos son los esperables tras el análisis de las series realizado previamente. El trabajo finaliza con unas conclusiones, y un Anexo que recoge los programas utilizados de R y AMPL y unas gráficas y resultados adicionales.

2. ANÁLISIS DE LAS SERIES TEMPORALES

2.1 Parámetros del estudio

Una serie temporal es una secuencia ordenada de observaciones, cada una de las cuales está asociada a un momento del tiempo. Éste es el tipo de datos que obtenemos de las cotizaciones de las empresas, donde en cada instante de tiempo se refleja el valor teórico de la compañía.

El valor de una compañía en un instante depende, entre otros factores, de lo que valía en el instante anterior, luego las observaciones van a ser dependientes entre sí y, por lo tanto, la naturaleza de su dependencia es de interés en sí misma.

El objetivo de la primera parte del trabajo es realizar un análisis de series de tiempo del valor de las cotizaciones de siete empresas que cotizan en la bolsa de valores de Madrid. Dichas empresas operan en distintos sectores económicos y han sido elegidas por su relevancia en dichos sectores.

Las empresas objeto de estudio son las siguientes:

Sector financiero: *BBVA y Mapfre*

Sector de telecomunicaciones: *Telefónica*

Sector energético: *Gamesa e Iberdrola*

Sector construcción: *Acerinox*

Sector textil*: Inditex*

En la siguiente figura se reflejan las cotizaciones de las empresas a lo largo del año 2009.

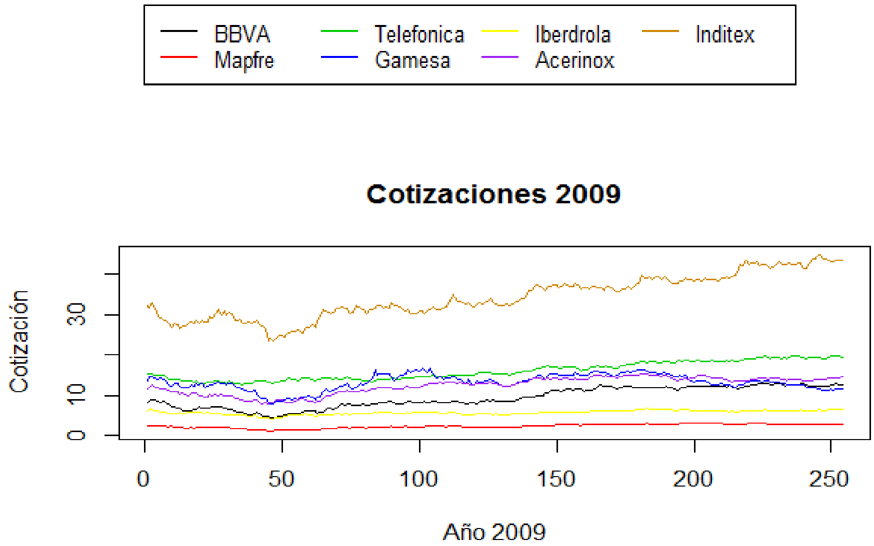


Figura 1: Cotizaciones de todas las empresas (2009)

Con objeto de no recargar el trabajo, aquí sólo vamos a exponer el estudio realizado sobre las cotizaciones del banco BBVA, ya que los resultados son similares a los obtenidos del análisis de las otras seis compañías. En la Figura 2 se representan las cotizaciones del banco BBVA a lo largo del año 2009.

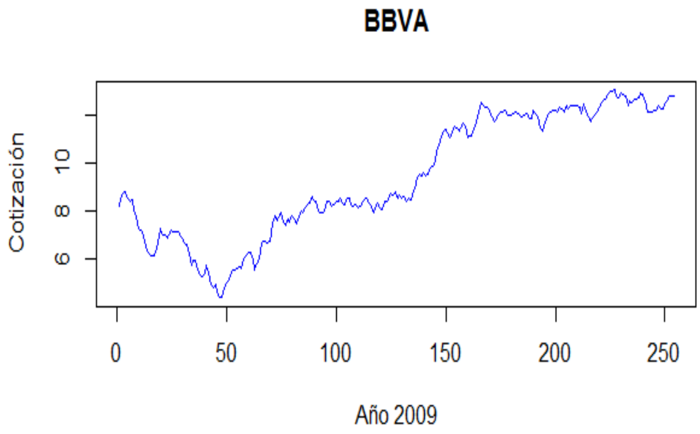


Figura 2: Cotizaciones BBVA (2009)

De aquí en adelante, cuando nos referimos al año 2009, nos referimos al año bursátil, que incluye la información de 254 días, ya que los fines de semana el mercado permanece cerrado. Es práctica habitual en el análisis de series en este campo suponer que los fines de semana no existen, pasando del viernes al lunes directamente, y no tratar a la serie como si en ella hubiera ausencia de datos.

El resto de la sección se organiza del siguiente modo. Primero haremos un arreglo de los datos debido a que existe una información que éstos incorporan de una forma indirecta. Posteriormente, realizaremos un análisis usando la serie de datos histórica. Finalmente, usando las leyes de capitalización económicas, llegamos a que usando el logaritmo del retorno de las cotizaciones, podemos encontrar un modelo que aproxima el mercado de una forma bastante razonable. En ambos casos comenzaremos con un análisis descriptivo de los datos y continuaremos con la construcción del modelo.

2.2 Corrección de la serie: El pago de dividendos.

Cuando las empresas han acertado en sus líneas de negocio y han obtenido beneficios, pueden plantearse seguir una política de pago de dividendos. Esto consiste en repartir parte de los beneficios obtenidos entre los accionistas de la empresa de forma que tengan acceso a la riqueza de la compañía sin que tengan necesidad de vender sus acciones.

Sea una empresa que vale 100 millones de euros y que emitió 5 millones de acciones. Esto quiere decir que cada acción vale 20 euros. Si en un momento dado decide repartir un dividendo de 10 millones de euros, dinero que va a sus accionistas, la empresa pasa a valer 90 millones, y por tanto el valor de las acciones debe caer a 18 euros.

Si trabajáramos con la serie histórica de datos sin tener en cuenta esto, se podría pensar que ese día hubo un descenso brusco en las cotizaciones por una noticia imprevista en los mercados.

En la realidad esto no es así. La política de dividendos se anuncia con un año de antelación, cuando las empresas publican los resultados anuales de sus operaciones. Esos días sí puede haber movimientos bruscos en los mercados debidos a la nueva información disponible, pero la caída de las cotizaciones el día de pago de dividendos refleja una mera situación contable.

A efectos prácticos el dividendo es un dinero que se reserva para repartir entre los accionistas. El origen y consecuencias de dicho pago es una información que el mercado tiene asimilada e incorporada hace tiempo, existiendo muchos estudios en la literatura sobre el efecto en el precio de las acciones de la política de dividendos.

Para evitar que el análisis de la serie temporal pueda verse afectado por picos que no estén directamente relacionados con la naturaleza imprevisible de los mercados financieros, los datos deben corregirse.

Para ello utilizamos la ley de capitalización financiera, que permite comparar cantidades monetarias en distintos instantes de tiempo, ya que, por ejemplo, el valor de 1000 pesetas no es el mismo hace 50 años que hace 10. Dicha ley viene dada por:

$$D_{t_1} = D_{t_0} \cdot e^{r \cdot (t_1 - t_0)} \qquad ; \qquad t_1 > t_0$$

donde $\boldsymbol{r}$ es una constante que se denomina interés libre de riesgo, D_{t_0} es el valor del dividendo en la fecha t_0 y D_{t_1} el valor del diviendo en la fecha t_1. Explicaremos el origen de esta fórmula más adelante.

El valor corregido de la cotización se obtiene restando a cada cotización anterior al día ***t*** del pago del dividendo el valor actualizado del dividendo en la fecha correspondiente.

Para el estudio que vamos a llevar a cabo, hemos tomado ***r = 5 %*** anual, simplificación habitual en la literatura de este campo. Otra opción podría ser tomar el valor de la Letra del Tesoro Americana. Existe un gran debate en torno al valor de esta constante en el que no vamos a entrar en este trabajo.

La corrección sólo se efectúa hasta la fecha de pago del dividendo, ya que ese dinero "desaparece" de los mercados de ahí en adelante. A efectos prácticos es como si hubiéramos eliminado unos outliers que tenemos localizados de la serie de datos, quedándonos sólo con las variaciones debidas a la imprevisibilidad de los mercados financieros.

Por ejemplo, Gamesa pagó un solo dividendo en 2009:

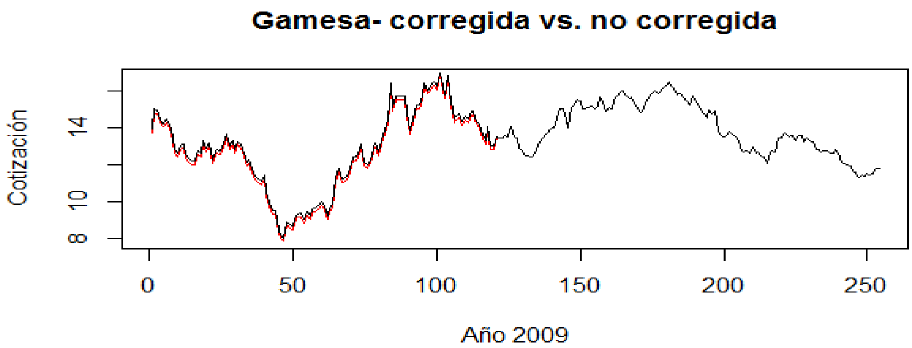
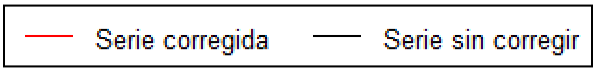


Figura 3: Serie corregida vs. Series sin corregir- Gamesa



mientras que Telefónica pagó 2 dividendos en el año y BBVA pagó 6.

La separación entre ambas curvas puede ser mayor o menor dependiendo del importe del dividendo, pero como vemos en la Figura 4, los movimientos de ambas curvas son similares.

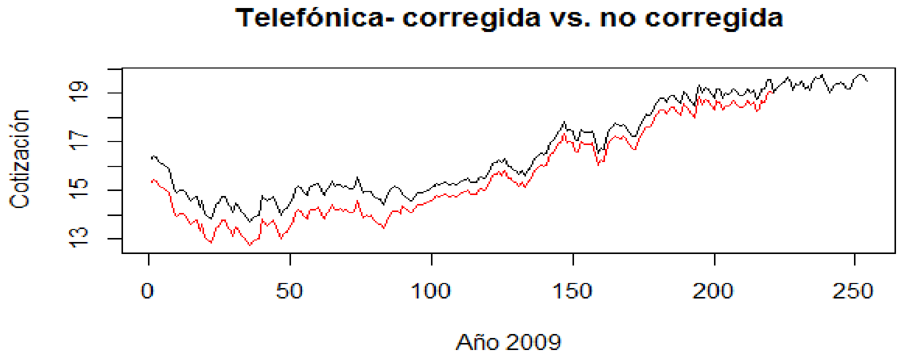


Figura 4: Serie corregida vs. Series sin corregir-Telefónica

La corrección nos ha permitido ver que en el dato del día 11 de noviembre, donde parecía haber una caída significativa del valor de la acción, en la realidad enlaza de una manera suave en la serie corregida.

2.3 Análisis de la serie histórica de cotizaciones.

La serie histórica de cotizaciones se refiere al precio de cierre de las acciones del BBVA a lo largo del año 2009, una vez han sido corregidas restando los pagos de dividendos.

En esta Sección vamos a suponer que no tenemos conocimientos de economía y hemos recibido los datos corregidos directamente para trabajar con ellos.

2.3.1 Análisis descriptivo

Resultado de los estadísticos principales:

Mínimo	1er cuartil	Mediana	Media	3er cuartil	Máximo
4.398	7.518	8.619	9.456	12.110	13.060

Todo análisis de series temporales ha de iniciarse con una representación gráfica de la misma, utilizando los ejes cartesianos, de forma que en el eje de abscisas representaremos el tiempo y en el de ordenadas, la serie observada con lo que obtendremos una serie de puntos (tiempo, serie observada) que, al unirlos, nos dan un impacto gráfico de la serie del que se pueden sacar unas primeras conclusiones de la evolución de la misma.

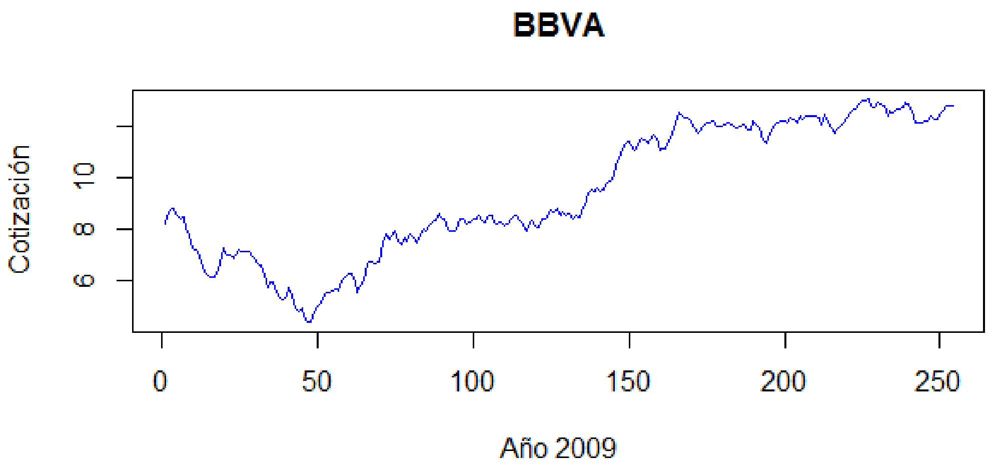


Figura 5: Cotizaciones BBVA (2009)

En la Figura 5 podemos observar que los datos a principios de año presentan una tendencia decreciente que se prolonga hasta llegar a su límite inferior en marzo. A partir de este momento comienza a presentar un comportamiento creciente, el cual se mantiene hasta final del año.

En segundo lugar analizaremos el histograma de los datos.

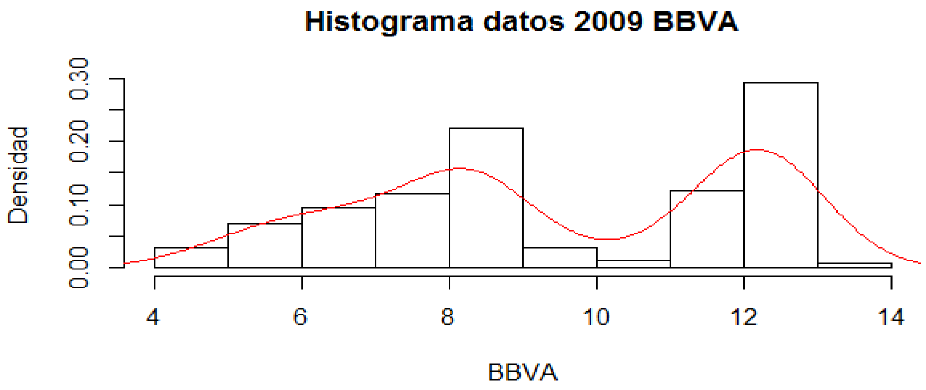


Figura 6: Histograma de las cotizaciones y curva de densidad

En la Figura 6 tenemos el histograma de los datos junto con la curva correspondiente a la densidad. A priori podemos observar que la distribución de los datos presenta dos modas.

Una vez hecho esto comenzamos con la construcción del modelo.

2.3.2 Construcción del modelo

El procedimiento general a seguir en la construcción de un modelo autorregresivo está constituido por tres pasos:

- Identificación
- Estimación de los parámetros
- Verificaciones diagnósticas sobre la adecuación del modelo

En esta serie de datos contamos con 253 observaciones pero solo hemos utilizado 234 observaciones con el objetivo de analizar el modelo a la hora de utilizarlo para predecir a futuro. Para ello usaremos el modelo ajustado para realizar 20 predicciones diarias y compararemos el valor pronosticado para el día siguiente con el que efectivamente tuvo el mercado.

- *Identificación*

Como se ha indicado en el punto anterior, el primer paso en la construcción del modelo es su identificación. Para ello, nos serviremos de la FAC (función de autocorrelación) y de la FACP (función de autocorrelación parcial).

En primer lugar vamos a contrastar si la serie es estacionaria o no usando la prueba de la raíz unitaria o test de Dickey- Fuller aumentado (ADF).

H_0 : la serie no es estacionaria/ tiene una raíz unitaria

Obtenemos un p-valor de 0.03564 y fijado un nivel de significación de $\alpha = 0.05$ concluimos que tenemos evidencias para rechazar la hipótesis de que haya una raíz unitaria y por lo tanto suponemos la serie estacionaria.

En segundo lugar vamos representar gráficamente la FAC y la FACP (Figura 7) para seguir con el proceso de identificación del modelo.

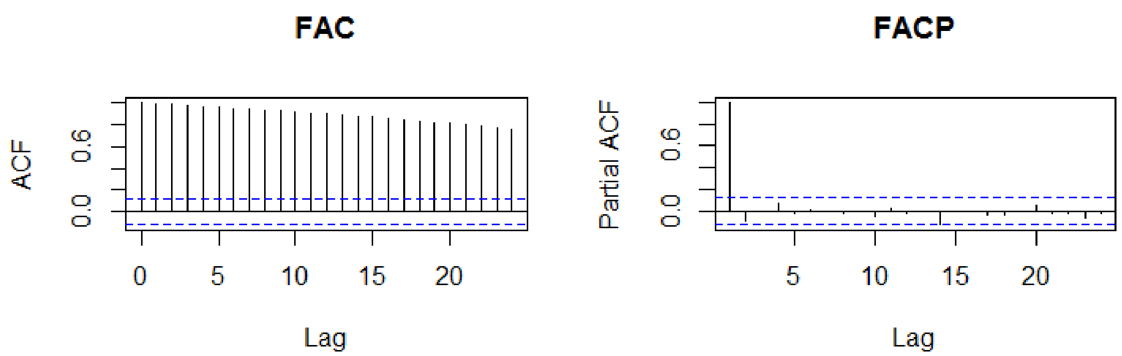


Figura 7: FAC (función de autocorrelación) y GACP (función de autocorrelación parcial)

Sirviéndonos por una serie de criterios de identificación del modelo ARIMA observamos que la FAC decae lentamente y la FACP se corta después del retardo 1, luego podríamos sospechar que la serie podría ser adecuadamente ajustada por un modelo autorregresivo.

Observamos el comportamiento de los coeficientes de autocorrelación al aumentar los retardos en la Figura 8.

Podemos comprobar que los diferentes coeficientes de autocorrelación, suponiendo la serie estacionaria, presenta un decaimiento exponencial rápido a medida que aumentan los retardos. De lo que concluimos que la serie puede ser adecuadamente descrita mediante un modelo ARIMA (p,0,0).

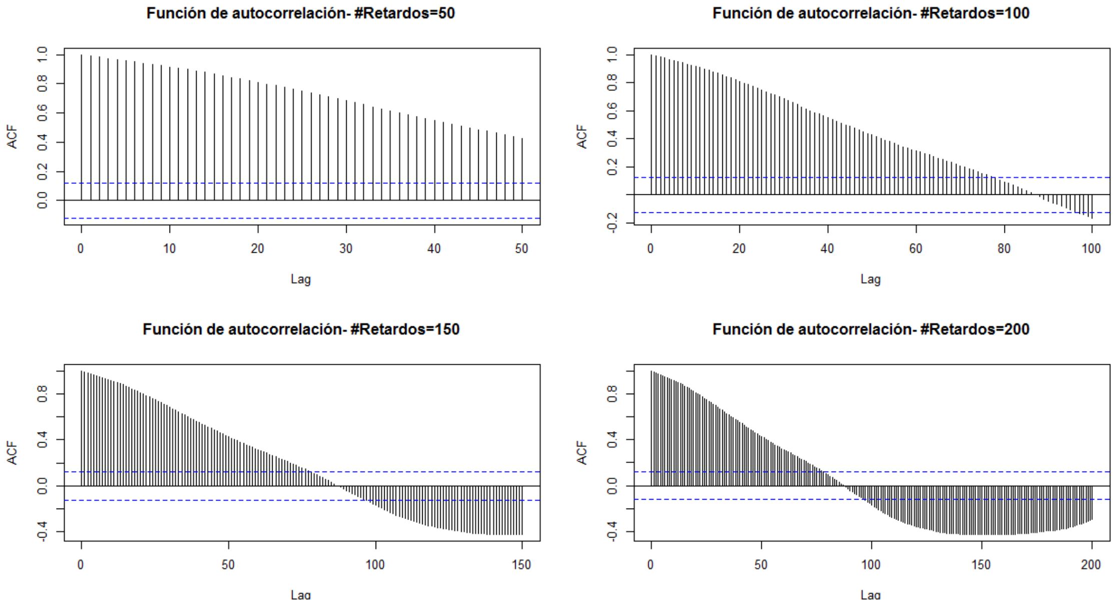


Figura 8: FAC para 50, 100, 150 y 200 retardos

Para llegar al modelo autorregresivo más adecuado para la serie vamos a servirnos del Criterio de Información de Akaike (AIC). Se trata de un criterio que busca un equilibrio entre el buen ajuste y la complejidad, por lo tanto, el modelo que tenga el valor mínimo de dicho estadístico será considerado "mejor". Se define de la siguiente forma:

$$AIC = 2^* np - 2^* \ln (L),$$

siendo np el número de parámetros del modelo y L la logverisimilitud.

Comparando los modelos ARIMA (1, 0, 0), ARIMA (2, 0, 0) y ARIMA (3, 0, 0) obtenemos lo siguiente:

Modelo	**AIC**
ARIMA (1, 0, 0)	-37.38387
ARIMA (2, 0, 0)	-48.79899
ARIMA (3, 0, 0)	-46.86498

Nota: Los procesos más frecuentes de modelos AR son adecuadamente representados por modelos ARIMA (1, 0,0). Los modelos ARIMA (2, 0 ,0) son menos frecuentes, siendo los procesos ARIMA (p, 0, 0) de orden superior escasos o incluso raros.

A la vista del los resultados, el modelo que mejor ajusta nuestra serie es el modelo AR(2).

- *Estimación de los parámetros*

El modelo autorregresivo de orden 2 denota un proceso cuya observación actual es en parte explicada por las dos observaciones inmediatamente precedentes.

El proceso y_t viene dado por

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es ruido blanco, es decir, una secuencia de variables aleatorias incorreladas igualmente distribuidas con media 0 y varianza constante σ^2.

Al implementar el modelo con el programa R hemos obtenido la siguiente estimación de los parámetros autorregresivos:

	ϕ_1 = 1.2328	ϕ_2 = -0.2376	intercept=9.8360
Error estándar	0.0638	0.0639	1.8953
$\hat{\sigma}^2$ = 0.04496	log (L) = 28.4	AIC= -48.8	

Una vez obtenidos los valores de los parámetros, debemos comprobar dos cosas: la estacionariedad y la significación de los parámetros.

a) Los parámetros autorregresivos ϕ_1 y ϕ_2 de un proceso ARIMA (2, 0, 0) están restringidos por las siguientes condiciones de estacionariedad (región de estacionariedad)

$$-1 < \phi_2 < 1$$
$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$
$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

Como podemos comprobar dichas restricciones se cumplen:

$$-1 < -0.2376 < 1$$
$$1.2328 + (-0.2376) = 0.9952 < 1$$
$$-0.2376 – 1.2318 = -1.4694 < 1$$

y por lo tanto, el modelo estimado se define como un proceso estacionario.

b) Los parámetros autorregresivos ϕ_1 y ϕ_2 han de ser significativos, y su valor distinto de cero. Para comprobar dicha condición, hemos calculado los intervalos de confianza de los parámetros con una confianza del 95 %.

Parámetro	IC inferior	IC superior
ϕ_1	1.1077520	1.3578268
ϕ_2	-0.3628579	-0.1123309

Al observar que ninguno de ellos está contenido el 0 concluimos que todos los parámetros son significativos.

Por último, realizamos las verificaciones diagnósticas del modelo.

- *Verificaciones diagnósticas sobre la adecuación del modelo*

Una vez identificado el modelo y estimados los parámetros autorregresivos debemos pasar a la validación del modelo, la cual la realizamos a través de los residuales. En la Figura 9 observamos cómo están distribuidos.

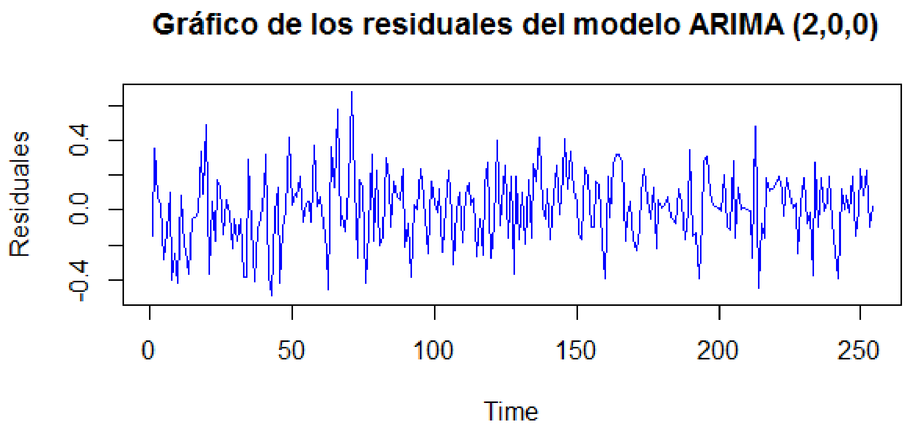


Figura 9: Residuales del modelo AR (2)

Para comprobar que un modelo se ajusta razonablemente a los datos deben cumplirse dos condiciones.

a) Los residuos del modelo ajustado deben ser independientes en los retardos primero y segundo. Para ello se requiere estimar la FAC de los residuales.

Si el modelo es adecuado debe cumplirse que FAC (1) = FAC (2) = 0, es decir, ha de tener valores estadísticos no significativos. Para ello, dichos valores deben estar contenidos dentro del intervalo de confianza

FAC (1) = -0.001975857 FAC (2) = -0.008425516

Los valores anteriores corresponden al valor de la FAC en los dos primeros retardos. Observamos en la Figura 10 que dichos valores están contenidos dentro del intervalo de confianza por lo que cabe afirmar que los residuos están libres de autocorrelación el los retardos 1 y 2.

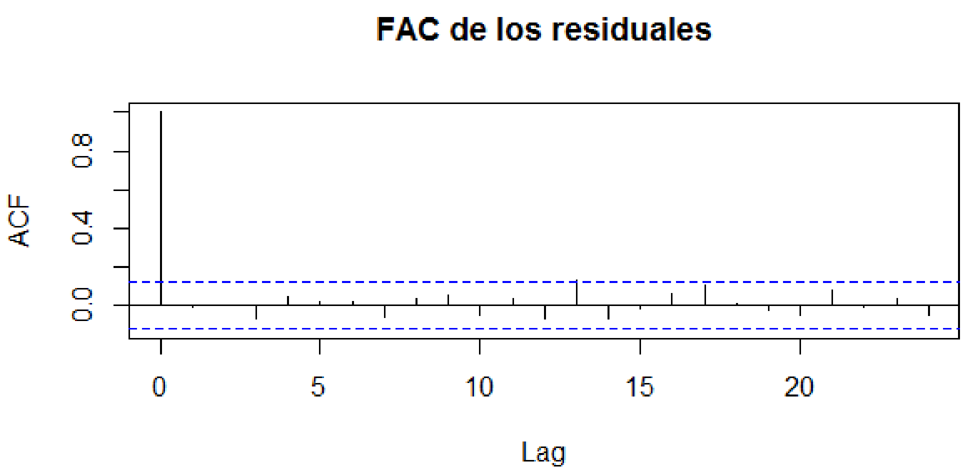


Figura 10: FAC correspondiente a los residuales

b) Los residuales del modelo han de ser distribuidos según un proceso de ruido blanco.

Como ya mencionamos previamente, definimos un ruido blanco como una secuencia de variables aleatorias incorreladas igualmente distribuidas con media 0 y varianza constante σ^2.

Para probar que las FAC del los datos correspondientes a los residuales siguen un proceso de ruido blanco Box y Pierce proponen el estadístico Q (o de bondad de ajuste o pormanteau test), a partir del cual contrasta la hipótesis conjunta de que todos los coeficientes de autocorrelación son cero.

La hipótesis nula de este test es:

$$H_0 : FAC(1) = FAC(2) = \ldots = FAC(24) = 0$$

A partir de este test obtenemos un valor de Q de 0.0009 y un p-valor de 0.9759. Por lo que concluimos que podemos suponer los residuales del modelo como un proceso de ruido blanco.

Otra versión de la prueba de Portmanteau es el estadístico la versión de Ljung–Box de la que arroja el mismo resultado.

La Figura 11 refleja los p-valores para los diferentes retardos de la prueba realizada previamente.

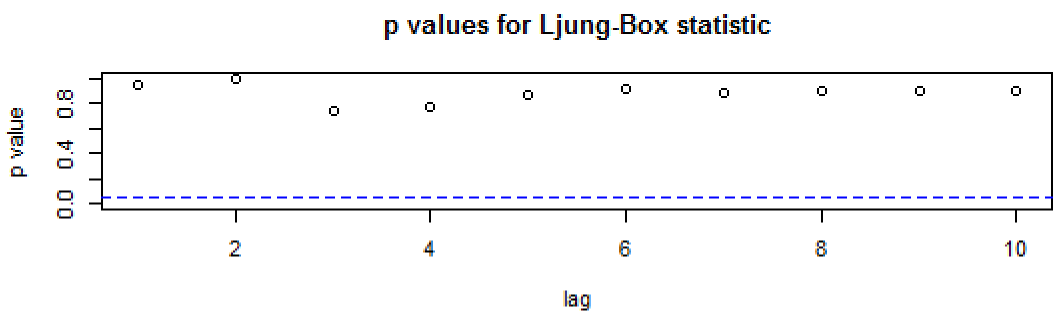


Figura 11: p-valores resultado de la prueba de Ljung-Box

Finalmente, una vez construido el modelo, vemos qué tal ajusta los datos de la muestra en la Figura 12.

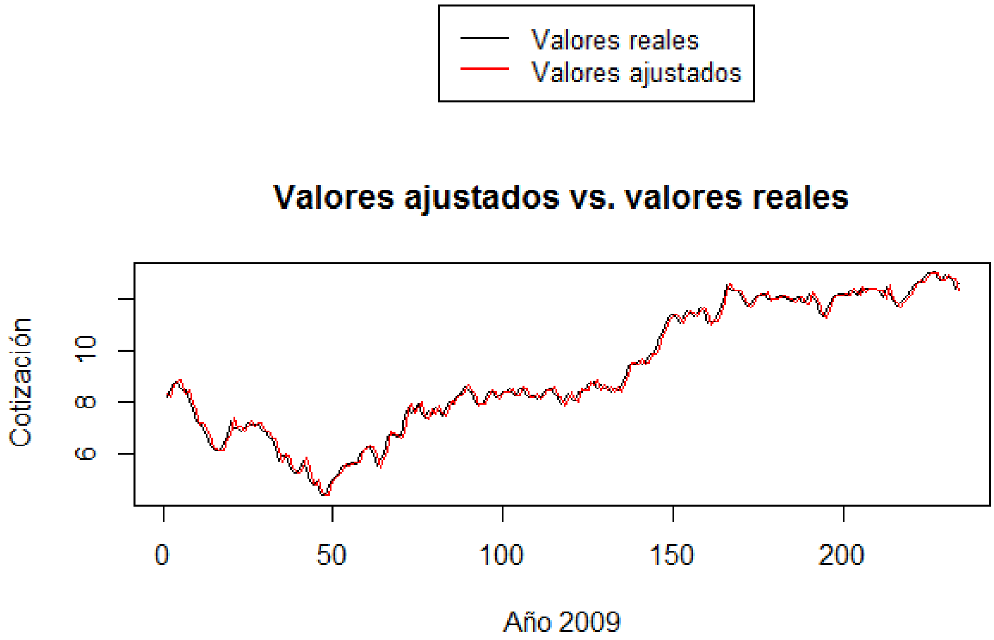


Figura 12: Valores ajustados vs. Valores reales

Aparentemente el modelo funciona bien. Pero no sólo es importante ver qué tal podemos ajustar los valores de una muestra, sino qué tal podemos predecir a futuro, verdadera utilidad en el campo de la economía.

2.3.3 Predicción

Como indicamos al principio de la sección, reservamos veinte días de datos para ver qué tal podíamos predecir a futuro, intentando hacer una predicción diaria.

Para ello, con los datos disponibles cada día vamos a utilizar el modelo para estimar el valor de la cotización del día siguiente. Es decir, calculamos:

$$\tilde{y}_{t+1} = E(\phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \varepsilon_t) = \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1}$$

donde y_t , y_{t-1} son datos de mercado que hoy conocemos. Posteriormente comparamos la predicción con el valor verdadero de la cotización al día siguiente.

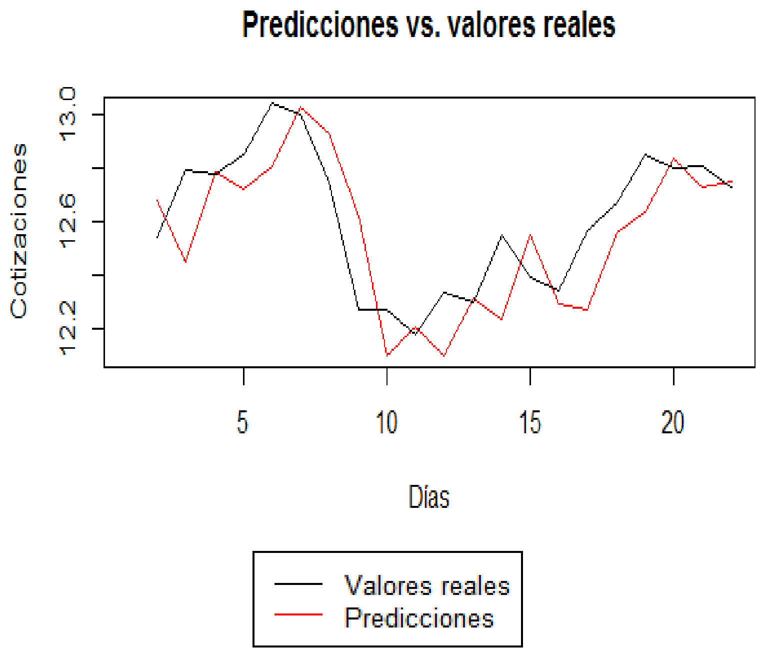


Figura 13: Predicciones Vs. Valores reales

Los errores diarios cometidos ($y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}$) son bastante pequeños, de media el error relativo en estos 20 días es de un 0.5 %. Si incorporamos más días en la predicción (6 meses) y realizamos el test, no se puede rechazar la hipótesis de que los errores sean un ruido blanco de varianza 0.08.

Hasta aquí hemos realizado un análisis de series temporales de la cotización de una compañía asumiendo que no sabíamos nada de economía, y hemos encontrado un modelo autorregresivo que funciona relativamente bien tanto en ajuste como en predicción.

No obstante, una de las finalidades de tener un modelo capaz de ajustar los movimientos del mercado es poder utilizarlo para realizar inversiones adecuadas (gestión de carteras) o poder valorar instrumentos financieros complejos (mercado de derivados).

Si tenemos varías compañías en las que podemos invertir, ¿cómo están relacionadas?, ¿qué cantidad de acciones de cada una hay que tener para obtener la mejor rentabilidad? Habría que normalizar los datos. Y si nos movemos a otro tipo de mercados como el de derivados, donde se negocian obligaciones contractuales complejas sobre valores futuros de las compañías (por ejemplo negociar entre dos personas el derecho/obligación de comprar/vender una acción a un precio determinado en una fecha futura (Opción Europea)) ¿Cómo usar este modelo para valorar dicho contrato y saber cuánto debe pagar el tenedor del derecho a la otra persona por la obligación contraída ?

Al principio de la Sección suponíamos que no teníamos conocimientos de economía. Pero cuando se hace un análisis de series temporales, suele ser conveniente saber más acerca de los modelos del campo del que proceden los datos, ya que esto puede facilitar el análisis. Así que, a diferencia de lo que supusimos al inicio de esta sección, en la siguiente vamos a suponer que tenemos ciertos conocimientos de Economía.

2.4 Análisis de la serie histórica del logaritmo del retorno

Lo primero que vamos a hacer en esta Sección es dar un paso atrás y revisar los modelos usados en Economía.

La Ley de Capitalización que mencionamos anteriormente venía dada por:

$$S_{t_1} = S_{t_0} \cdot e^{r\cdot(t_1 - t_0)}$$

Esta fórmula se obtiene del modelo económico continuo que supone que el valor de un activo libre de riesgo (del que conocemos de forma determinista su valor futuro) crece en cada instante de forma proporcional a su valor. Matemáticamente esto se expresa mediante la ecuación diferencial:

$$S'(t) = r \cdot S(t)$$

siendo Ley de Capitalización Continua la solución de dicha ecuación diferencial.

Nosotros tenemos una serie de datos diarios $\{S_t\}_{t=0}^{n}$ de las cotizaciones. Como en nuestro caso $t_1 - t_0 = cte = 1día$, podemos despejar r de la fórmula de Ley de Capitalización:

$$r_t = ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

y obtener una nueva serie histórica diaria $\{r_t\}_{t=1}^{n}$, esta vez del logaritmo del retorno.

Como vemos, la información de ambas series es equivalente. De la serie de las cotizaciones se obtiene el logaritmo del retorno, y con la cotización inicial y la serie del logaritmo del retorno podemos recuperar las cotizaciones.

Lo que veremos a continuación es que la información de la evolución de la cotización dada a través de la serie histórica del logaritmo del retorno nos va permitir obtener un modelo sencillo que se ajusta al mercado.

2.4.1 Análisis descriptivo:

Comenzamos con el análisis descriptivo de los datos.

Mínimo	1er cuartil	Mediana	Media	3er cuartil	Máximo
-0.0448200	-0.0057150	0.0006828	0.0007616	0.0076800	0.0444100

En la Figura 14 se refleja el comportamiento de la serie donde se representa el tiempo en el eje de abscisas y el logaritmo del retorno en el eje de ordenadas.

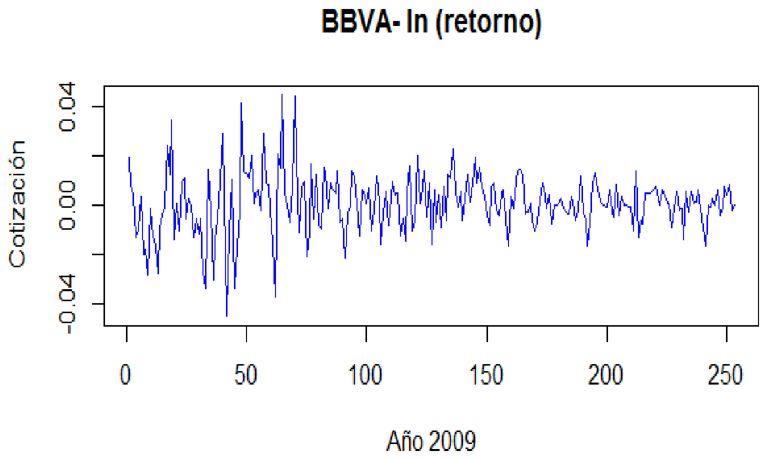


Figura 14: Logaritmo neperiano del retorno de las cotizaciones de BBVA (2009)

Señalar que las oscilaciones no parecen tener la misma amplitud en todo el intervalo, siendo más amplias durante el primer trimestre del año 2009. Explicaremos esto más adelante.

En segundo lugar representamos el histograma de los datos.

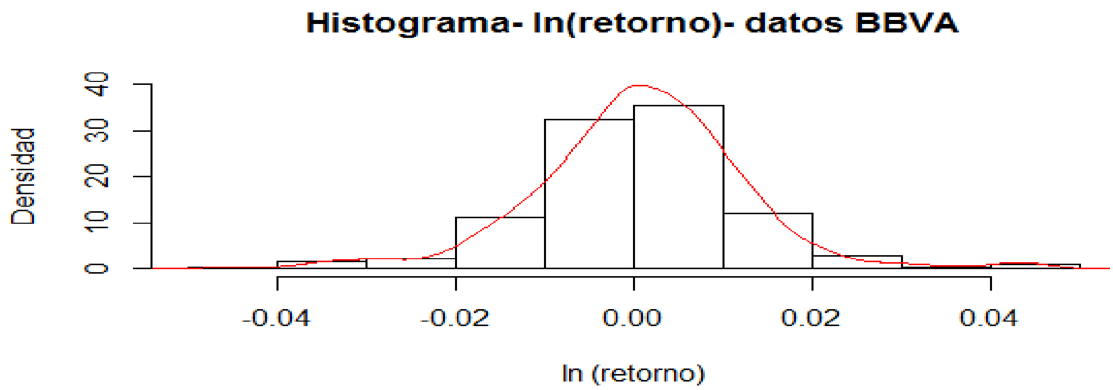


Figura 15: Histograma del logaritmo neperiano del retorno y curva de densidad

A priori, la Figura 15 sugiere que los datos relativos al logaritmo del retorno pueden seguir una distribución normal.

En consecuencia vamos a contrastar dicha normalidad utilizando la prueba de Shapiro-Wilk obteniendo un p-valor de 0.000007223, el cual es altamente significativo. Esto nos lleva a rechazar la hipótesis de normalidad.

No obstante, hay que señalar que la prueba utilizada para el contraste de normalidad se ha realizado bajo el supuesto de homocedasticidad, es decir, que la varianza permanece constante. Si calculamos cómo evoluciona la varianza muestral de 30 datos a lo largo del tiempo obtenemos la Figura 16.

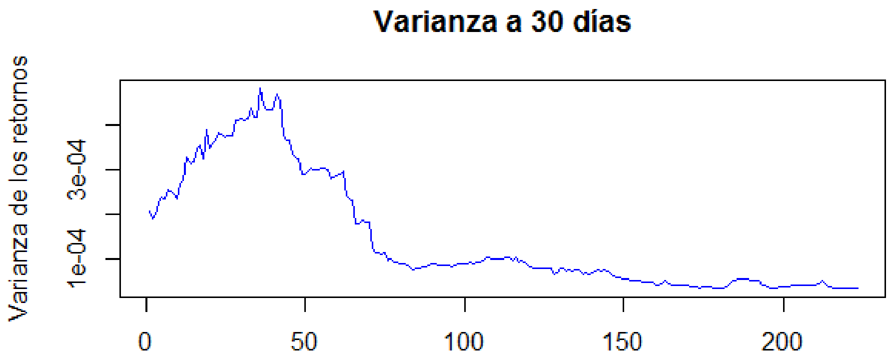


Figura 16: Varianzas de los retornos en los últimos 30 días (2009)

Cada punto que forma la línea corresponde a la varianza del logaritmo de los retornos de los 30 días anteriores. Como se puede apreciar, la volatilidad no es constante ya que en ese caso la función tomaría la forma de una recta.

Tras los picos bruscos que se aprecian durante el primer trimestre, la volatilidad comienza a descender progresivamente, estabilizándose en la segunda mitad del año.

Si hacemos un poco de investigación histórica, este periodo corresponde con el final de la crisis bursátil iniciada en Octubre de 2008 (originada en las sub-prime), al que siguió un periodo de alta inestabilidad en los mercados, ya que nadie era capaz de preveer todas consecuencias de la misma, "tocando fondo el mercado" el 9 de marzo, jornada que cerró con una caída del 1.72%. Posteriormente las cosas empezaron a calmarse y cierta tranquilidad volvió a los mercados.

Las crisis aparecen de forma sistémica en los mercados, pero quitando los momentos puntuales en los que estalla una crisis, los mercados tienen movimientos bruscos y se retorna a la normalidad, el resto del tiempo los mercados sí parecen tener una volatilidad más o menos constante en el tiempo. Por lo tanto, procedemos a realizar de nuevo la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk, pero en este caso tomaremos periodos de tiempo más reducidos. Los resultados son:

Días	**p-valor**
0-50	0.9668
50-100	0.1571
100-223	0.9009

donde no se rechaza la hipótesis de normalidad en ninguno de los casos, siendo los p-valores más altos cuando la volatilidad o bien es alta o bien es baja, pero fallando el test en los momentos de transición.

En conclusión, la volatilidad es la causa de la discrepancia entre lo que observamos gráficamente en el histograma y los resultados que obtenemos del test.

Además, si calculamos la autocorrelación del logaritmo del retorno:

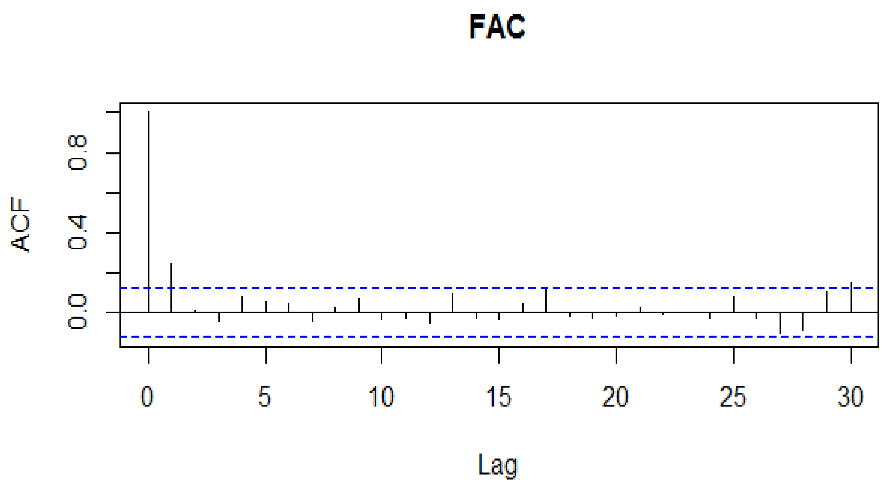


Figura 17: FAC (función de autocorrelación los logaritmos de los retornos)

y realizamos el test de autocorrelación, cuya hipótesis nula es:

$$H_0 : FAC(1) = FAC(2) = \ldots = FAC(24) = 0$$

obtenemos que los resultados son un estadístico Q= 15.6035 con un p-valor de 0.00007811. Por lo cual tenemos evidencias para rechazar la hipótesis de nulidad de los coeficientes de autocorrelación concluyendo que los logaritmos de los retornos están correlacionados.

2.4.2 El modelo y su simplificación:

A la vista de los resultados anteriores, un primer candidato a modelo de la serie del logaritmo de los retornos sería:

$$r_t \sim N(\mu_t, \sigma_t)$$

donde las funciones μ_t, σ_t son capaces de reflejar los fenómenos observados.

No obstante, entre los profesionales del campo de la gestión de carteras y de la valoración de derivados, y debido a que hemos visto que existen periodos en los que la volatilidad puede mantenerse más o menos constante, está ampliamente extendido el uso del modelo simplificado:

$$r_t \sim N(\mu, \sigma)$$

estimándose los valores de μ, σ del histórico de datos anteriores al día en el que estamos, dependiendo su valor de la compañía con la que trabajemos.

Si por ejemplo intentamos predecir los valores futuros en el mismo intervalo de tiempo que en la Sección anterior, estimando la media y la varianza muestral de los 234 datos anteriores, obtenemos el siguiente resultado:

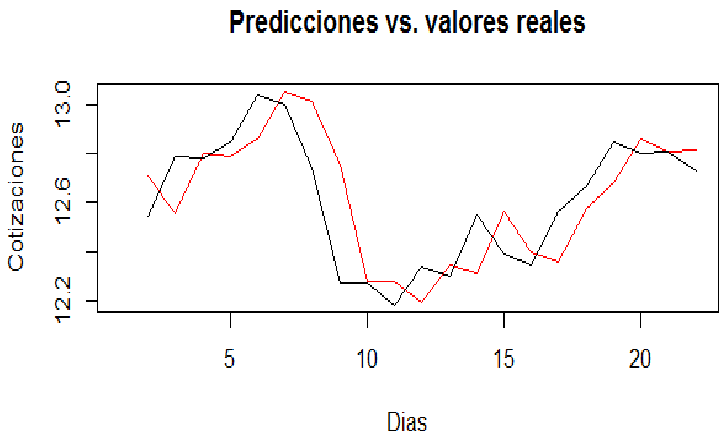


Figura 18: Predicción vs. Valores reales

donde el valor estimado para la cotización del día siguiente viene dado por:

$$\tilde{y}_{t+1} = \left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right) \cdot y_t$$

Los errores de predicción obtenidos son del mismo orden de magnitud que los obtenidos con el modelo autorregresivo de la sección anterior, pero este modelo simplificado conlleva importantes ventajas:

1. En el ámbito de la gestión de carteras, trabajamos con datos normalizados, ya que al usar los retornos trabajamos con las rentabilidades de cada compañía, y no con el valor de sus acciones y podemos estudiar cómo están relacionadas dichas rentabilidades. Asumir que los parámetros del modelo son constantes en el tiempo simplifica mucho las cosas. Entraremos más en profundidad en este tema en la Sección 3.

2. El modelo simplificado está relacionado con un modelo continuo expresado por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \alpha \cdot S_t dt + \beta \cdot S_t dW_t$$

Cuando trabajamos con productos financieros más complejos, como por ejemplo la Opción Europea, esta ecuación permite resolver el problema de la valoración obteniendo una fórmula explícita, trabajo por el que Fisher Black y Myron Scholes obtuvieron el Premio Nobel de Economía.

Hoy día, es un campo de investigación muy activo el encontrar funciones α_t, β_t adecuadas para el modelo:

$$dS_t = \alpha_t \cdot S_t dt + \beta_t \cdot S_t dW_t$$

que reflejen las propiedades observadas en los mercados como la autocorrelación o la aparición de saltos puntuales en la cotización o la varianza. Así mismo se está trabajando mucho en métodos de valoración de productos complejos cuando el mercado se rige por la ecuación anterior.

3. EL MODELO DE MARKOWITZ

Una cartera de inversiones se define como un conjunto de valores que cotizan en el mercado bursátil y en los que un inversor decide invertir un capital. Este inversor trata de elegir de manera óptima su cartera de valores o inversiones.

El objetivo de la optimización de carteras es determinar la composición de una cartera integrada por activos financieros que pueden ser combinación de algunos instrumentos de renta fija y renta variable, cuyo riesgo sea el menor posible y que obtenga un rendimiento más alto que una inversión a plazo fijo. En consecuencia, el problema de optimización de carteras es un problema bicriterio, es decir, con dos objetivos contrapuestos que son maximizar la ganancia esperada y minimizar el riesgo.

Las carteras de inversión se integran con los diferentes instrumentos que el inversor haya seleccionado. Para hacer su elección, debe tener en cuenta aspectos básicos como el nivel de riesgo que está dispuesto a correr y los objetivos que busca alcanzar con su inversión. Por supuesto, antes de elegir su cartera, deberá conocer muy bien los instrumentos disponibles en el mercado de valores para elegir las opciones más convenientes, de acuerdo a sus expectativas.

Así, la selección de carteras de inversión era una costosa labor que implicaba la recopilación y procesamiento de información muy diversa acerca de las empresas emisoras de activos, fundamentalmente acciones. Dicha información englobaba balances y estados financieros, situaciones propias de la empresa y de ésta misma dentro de la Economía, políticas de dividendos, calidad de la gestión de la empresa, etc.

Con el propósito de resolver el problema de seleccionar o construir carteras de inversión, Harry Markowitz publicó en 1952 su artículo *Portfolio Selection*. En dicho artículo estudiaba el proceso de selección de una cartera de inversión interpretando el rendimiento de los activos (tasa proporcional de variación del precio de un activo) como un proceso estocástico, y basándose en los resultados de las empresas, más concretamente apoyándose en la media, la varianza y la covarianza de las tasas de rendimiento de los activos. Desde su aparición, el modelo de Markowitz ha conseguido un gran éxito a nivel teórico y práctico, dando lugar a múltiples desarrollos, que han derivado en la teoría moderna de la selección de carteras.

3.1. El problema de la selección de carteras

Dadas n empresas del IBEX 35 y un periodo de T días de cotización, denotamos por $R_j(t)$ al rendimiento diario obtenido al invertir 1 € en la empresa j en el momento t, t=1…T y j=1…n. Los momentos muestrales de la dicha variable aleatoria se estiman a partir de los datos históricos. Se define el rendimiento esperado de la inversión en la empresa j como

$$r_j = ER_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_j\,(t)$$

y el riesgo de la inversión en la empresa j como

$$\sigma^2_j = \mathrm{Var}\ R_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_j\,(t) - r_j)^2$$

Una de las ideas planteadas por Markowitz trata de la diversificación de la inversión ya que de esta forma se reduce la variación de los precios, consiguiendo así disminuir la oscilación del rendimiento y del riesgo total de la misma. Por lo tanto, utilizaremos las carteras de inversiones. Una cartera de inversiones es el vector $x=(x_1, \ldots, x_n)$, donde cada x_j es la proporción de riqueza invertida en la empresa j, j=1,…,n. Cabe destacar que suponemos:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0,\ j=1,\ldots,n.$$

Se define el rendimiento esperado de la cartera x como

$$R\,(x) = ER(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, r_j$$

y el riesgo de la cartera x como

$$\sigma^2\,(x) = \mathrm{Var}\ R(x) = E\,(R - r\,(x))^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\,(R_j(t) - r_j)\Big)^2.$$

El problema básico de selección de carteras consiste en encontrar la cartera que minimice el riesgo, entre las que tienen al menos una rentabilidad prefijada k. Se formula como un problema de programación cuadrática:

$$\min f(x) = \sigma^2 (x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j \, (R_j(t) - r_j)\Big)^2$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \, x_j \geq k,$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,\dots,n.$$

La cartera óptima la proporciona la solución del problema.

3.2. La frontera eficiente de rentabilidad-riesgo

Como hemos comentado anteriormente el Modelo de Markowitz es un problema de optimización de carteras con dos criterios, maximizar la ganancia esperada y minimizar el riesgo. Se formula matemáticamente como el problema biobjetivo:

$$\min \sigma^2(x) \qquad \text{y} \qquad \max r(x)$$
$$\text{s. a: } \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$
$$x_j \geq 0 \;\; j = 1,\dots,n.$$

La solución del problema se define en términos de eficiencia. Una solución o **cartera eficiente** es una cartera $x^* = (x_1^*,\dots, x_n^*)$ tal que no existe otra solución x factible con

$$r(x) \geq r(x^*), \;\; \sigma^2(x) \leq \sigma^2(x^*)$$

y al menos una desigualdad estricta. La **frontera eficiente** es el conjunto de las soluciones eficientes, es decir, aquella formada por los puntos $(r(x^*), \sigma^2(x^*))$, con x^* cartera eficiente.

Es importante indicar que los puntos de la frontera eficiente son carteras que tienen un riesgo (varianza) mínimo dentro de todas las posibles selecciones de carteras que tienen un retorno esperado (esperanza) fijo y tienen el retorno máximo esperado dentro de todas posibles selecciones de carteras que tienen una varianza dada. Podemos concluir subrayando que las carteras en la frontera eficiente son soluciones razonables y que las carteras fuera de la frontera eficiente se pueden mejorar estrictamente.

La resolución del problema biobjetivo, que es la obtención de la frontera eficiente de media-varianza, se puede hacer mediante el método de las ponderaciones de programación multiobjetivo. Consiste en resolver, para cada valor de μ , el siguiente problema con restricciones lineales y función objetivo cuadrática:

$$\min f(x) = \mu\, \sigma^2(x) - r(x) = \mu \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j (R_j(t) - r_j)\right)^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j r_j$$

$$\text{s. a: } \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,\ldots,n$$

μ es un parámetro, $0 \leq \mu \leq \infty$. Un valor grande pone más énfasis a minimizar el riesgo y un valor pequeño a maximizar el rendimiento. La resolución del problema para un valor concreto del parámetro proporciona una cartera eficiente. Las infinitas carteras eficientes (una para cada valor del parámetro) forman la cartera eficiente de media-varianza o de rentabilidad-riesgo.

Una vez hemos expuesta la teoría referente a la selección de carteras y al modelo de Markowitz, vamos a proceder a la aplicación a nuestros datos. Consideramos de nuevo las 7 empresas del IBEX 35 mencionadas en la Sección 2.1 de este trabajo, así como sus cotizaciones a lo largo del periodo 1 Septiembre 2008 - 30 Abril 2009. Nuestro objetivo es obtener la frontera eficiente de rentabilidad-riesgo, a partir de la cual podremos seleccionar carteras óptimas. La Figura 19 muestra la frontera eficiente que hemos obtenido tras implementar los cálculos utilizando el software AMPL. En ella se presenta el riesgo en el eje de abscisas y la rentabilidad en el eje de ordenadas.

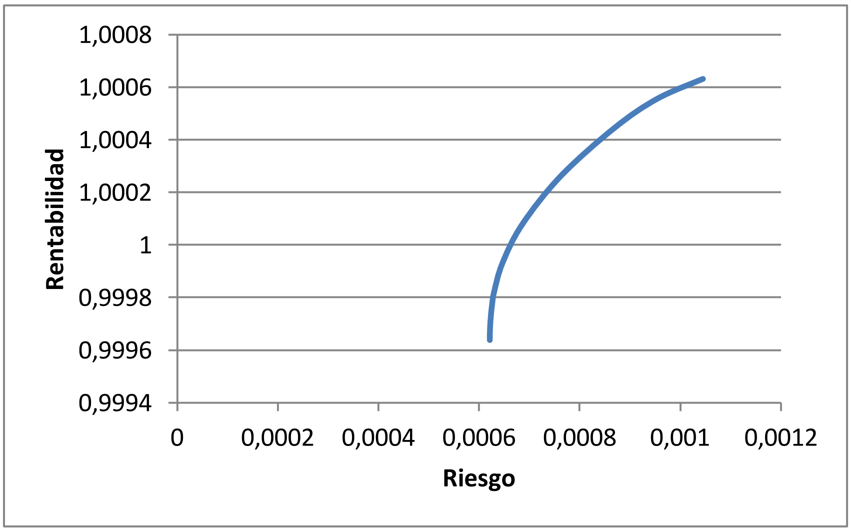


Figura 19: Frontera eficiente de rentabilidad-riesgo (periodo septiembre 2008 – abril 2009)

La siguiente tabla muestra la rentabilidad y el riesgo de varias carteras eficientes para varios valores de µ. Concuerda con lo comentado antes: un valor grande da más importancia a minimizar el riesgo y un valor pequeño en maximizar el rendimiento.

µ	Rentabilidad	Riesgo
0	1,00063138	0,00104563
2	1,00026078	0,000762048
100000	0.9999287131	0,00062086

Cada valor de µ tiene asociado una cartera eficiente, con una rentabilidad y un riesgo. Por ejemplo, para µ = 20 obtenemos la cartera eficiente constituida por:

- Telefónica: 69.3 %
- Acerinox: 1.1 %
- Inditex: 29.6 %

Es una cartera en la que el 98.9% de la inversión está concentrada en sólo dos empresas.

3.3. La estrategia dinámica

La teoría de Markowitz, a pesar de su éxito teórico, ha sido objeto de numerosas críticas referentes a sus limitaciones en cuanto a implementación práctica de la misma. El modelo está establecido bajo la hipótesis de homocedasticidad, es decir, considera que la varianza se mantiene constante a lo largo del tiempo. No obstante, como ya explicamos previamente en la sección de series temporales, los datos correspondientes a las cotizaciones de cierta empresa a lo largo del tiempo se caracterizan por la heterocedasticidad, la dinámica del mercado cambia con el tiempo.

De esta forma una estrategia estática para el modelo a largo plazo como la planteada en la sección anterior presentará un problema ya que si se produce un cambio en la dinámica del mercado nuestra cartera cambiará y pasará a tratarse de una cartera no óptima.

Por esta razón, es práctica habitual de los profesionales que trabajan en la gestión de carteras seguir una estrategia dinámica del modelo de Markowitz con el propósito de obtener mejores rendimientos, es decir, una mayor ganancia. Para llevar a cabo dicha estrategia hemos tomado los datos correspondientes a las cotizaciones en el mercado de las 7 empresas consideradas, desde el 1 de enero hasta el 31 de agosto de 2009.

El procedimiento a seguir consiste en la recalibración del cálculo de las fronteras eficientes.

En primer lugar, suponiendo que estamos a 30 de Abril, usamos los datos desde el 1 de Enero al 30 de Abril para obtener la primera frontera eficiente y construir la cartera. A 31 de mayo, calculamos una nueva frontera eficiente con los datos de Febrero a Mayo, y rebalanceamos la cartera original a la que obtenemos de la nueva frontera, y así sucesivamente:

Frontera eficiente	Periodo de datos	Periodo de inversión
F1	1 enero-30 abril	mayo
F2	1 febrero-31 mayo	junio
F3	1 marzo-30 junio	julio
F4	1 abril-31 julio	agosto
F5	1 mayo-31 agosto	septiembre

La siguiente gráfica muestra la evolución de las fronteras calculadas con datos de distintos periodos de tiempo. Cabe destacar que no se observan tendencias ni simetrías.

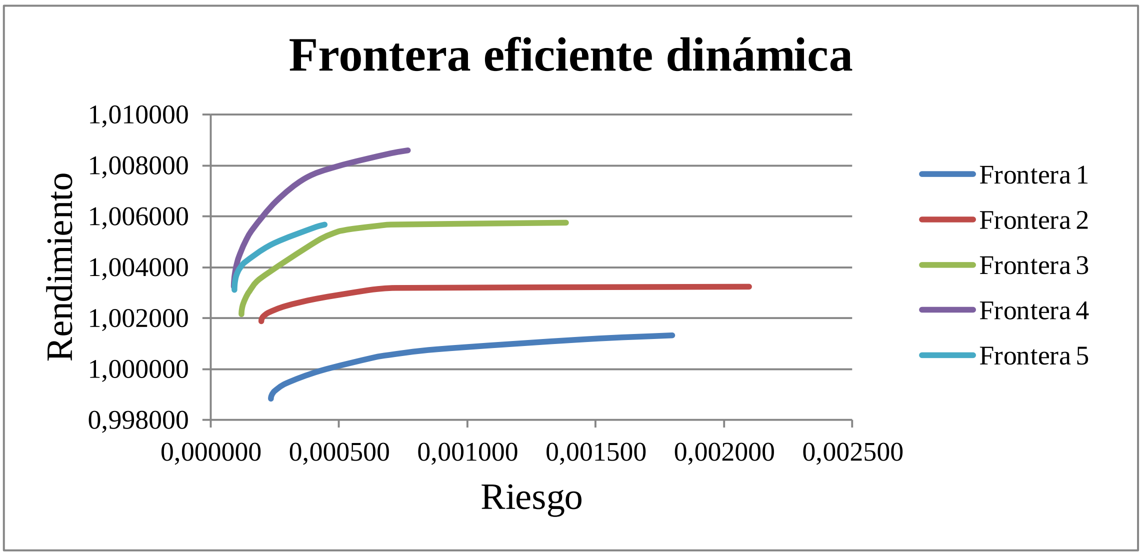


Figura 20: Frontera eficiente dinámica (5 periodos considerados)

En este caso concreto podemos observar como el rendimiento, a idéntico riesgo de las carteras, va aumentando conforme rebalanceamos. Esto se debe a que los datos de las cotizaciones han coincidido con un periodo alcista en los mercados.

3.4. Un análisis comparativo

Una técnica habitual de los gestores de carteras es preguntar a los inversores qué cantidad de riesgo quieren asumir. Supongamos que un inversor tiene una tolerancia al riesgo de al menos 0.0004. Es decir, el gestor va a tomar una cartera con:

$$\text{Riesgo} = \max\{0.0004, \text{mín}\{\text{riesgos posibles}\}\}.$$

Con los datos considerados, tomaremos Riesgo = 0.0004 en las 5 fronteras eficientes, pero en la frontera estática calculada en la subsección anterior Riesgo = 0.0006.

La siguiente tabla muestra los porcentajes de inversión que debemos tener de cada compañía obtenidos de la frontera eficiente al Riesgo marcado.

Frontera eficiente	Cartera eficiente para riesgo = 0.0004	
F1	BBVA 20.2 Gamesa 7.0 Inditex 24.0	Telefónica 22.4 Acerinox 26.4
F2	BBVA 20.5 Gamesa 0.04	Telefónica 24.3 Acerinox 54.9
F3	BBVA 34.0 Telefónica 8.2	Mapfre 18.0 Acerinox 39.7
F4	BBVA 61.6 Acerinox 27.9	Mapfre 10.5
F5	BBVA 94.7	Mapfre 5.3

La frontera eficiente estática proporciona la siguiente cartera para todo el periodo considerado:

Frontera eficiente estática	Cartera eficiente para riesgo = 0.0006	
FE	Telefónica 68 Acerinox 3.8 Inditex 23.2	Mapfre 5

Utilizando las carteras anteriores, vamos a realizar una comparación de las dos estrategias anteriores: estática a más largo plazo y dinámica.

Suponemos que partimos de un capital de 10000 euros que invertimos según los estrategias indicadas.

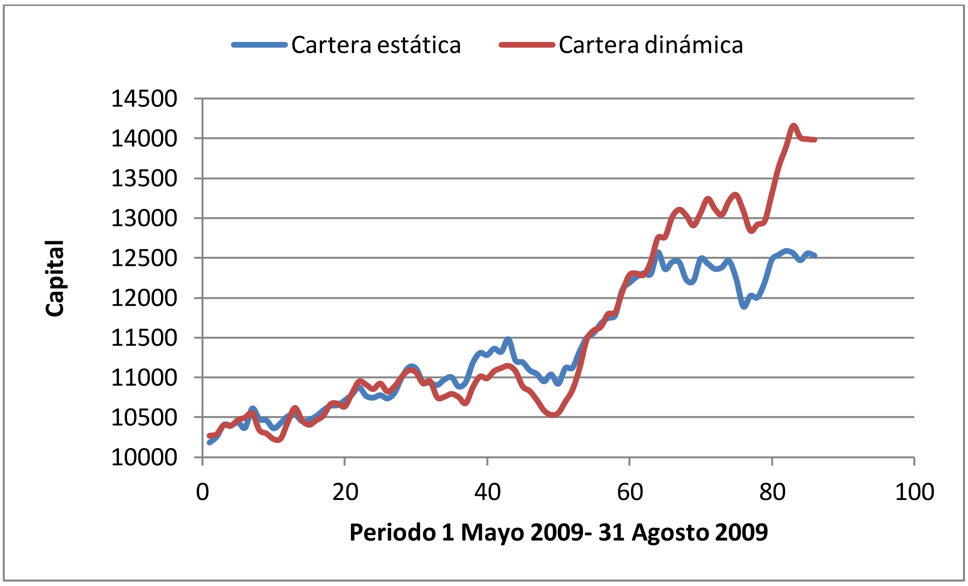


Figura 21: Evolución del rendimiento: estrategia estática vs. estrategia dinámica(F1-F4)

Como podemos observar en la Figura 21, la estrategia dinámica y la estática se mueven de forma similar durante un largo periodo de tiempo, pero cuando el mercado cambia a una tendencia alcista, la estrategia dinámica lo capta y consigue sacar un mayor rendimiento a la inversión, obteniéndose con la estrategia dinámica al final periodo correspondiente a la Frontera 4 un rendimiento total del 40%, a un 25 % que se ha obtenido con la estrategia estática.

El rebalanceo de las carteras proporciona tanto ventajas como inconvenientes en nuestro objetivo de maximizar la ganancia obtenida. Como ya hemos mostrado, siguiendo una estrategia dinámica obtenemos un rendimiento mayor en comparación al rendimiento obtenido a partir de la estrategia estática. Y además el Riesgo teórico de la Frontera 4 es de 0.0004 frente a un riesgo teórico de 0.0006 de la Frontera estática.

Indicar que recalibrar carteras lleva asociados unos costes de transacción de compra y venta, y que recalibrar muy frecuentemente no es una estrategia óptima. Por lo tanto es necesario valorar el impacto de dichos costes ya que la rentabilidad esperada puede verse afectada.

A su vez, la cartera dinámica es más sensible a los cambios bruscos del mercado, como los cambios repentinos de tendencia o el estallido de las crisis. El trabajo de Markowitz ha recibido muchas críticas por parte de los gestores últimamente argumentando que el modelo fallaba en épocas de crisis.

El propio Markowitz, junto con Hebner y Brunson, analiza este asunto en su trabajo *Does Portfolio Theory Work During Financial Crises?*. En él se describen los tipos de riesgos que existen en el mercado, y contra cuáles de ellos si funciona el modelo, recordando que esas eran las hipótesis marcadas en su trabajo original.

El rendimiento de carteras concentradas durante 2008, año en el cual cayó el valor en los bonos corporativos, mucho menos que las acciones, y los bonos del estados subieron. En el caso de haber concentrado la cartera en invertir en bonos del estado la cartera hubiera funcionado bastante bien. Por el contrario si se hubiese concentrado la cartera en AIG, Citigroup u otras industrias financieras o del automóvil, el resultado hubiese sido trágico.

Cuando estamos en un periodo de tendencia alcista, la propia naturaleza de la estrategia dinámica con pocos datos hace que la cartera acabe concentrándose en muy pocos productos, o incluso en uno solo porque coincida que tiene un gran crecimiento con poca volatilidad frente al resto del mercado, como ocurre con el BBVA en la Frontera 5.

La cartera construida así queda más expuesta a otros tipos de riesgos (sólo BBVA sufre un cambio de tendencia a lateral a inicios de Septiembre), mientras que la estática a largo plazo suele estar más diversificada y menos expuesta, evidentemente a cambio de un crecimiento más lento a lo largo del tiempo.

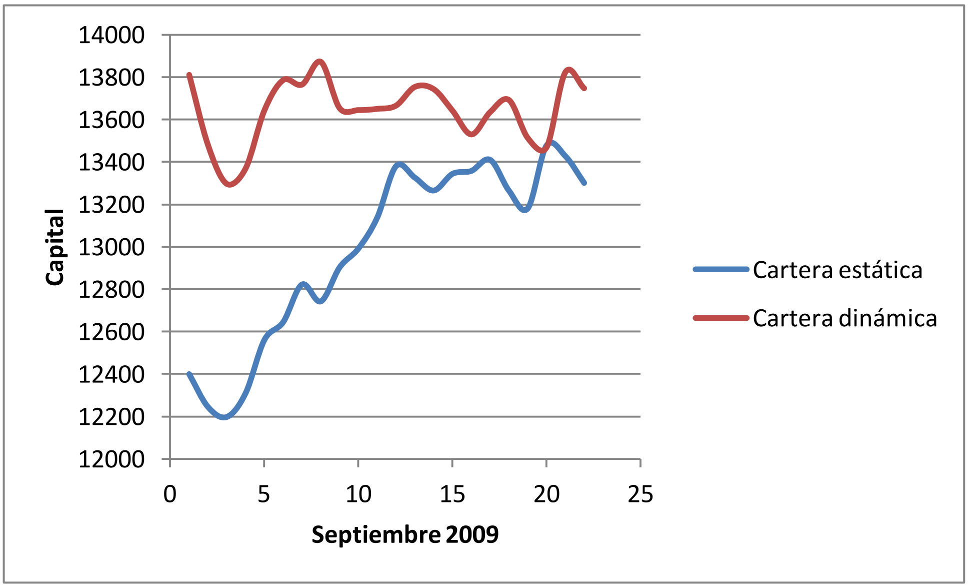


Figura 22: Evolución del rendimiento frontera 5- Septiembre 2009

y como se puede ver el resultado en Septiembre de la estrategia estática fue mucho mejor que la de la dinámica.

La estrategia estática construida con más datos y a largo plazo tendrá como consecuencia la inclusión de varias tendencias. De esta forma, la rentabilidad no crecerá tanto en los periodos con tendencia clara como una cartera dinámica construida en un periodo más corto. Por el contrario, si se produjera un *shock* en el mercado el porcentaje de caída sería inferior frente al de la cartera dinámica.

Indicar que si alteramos el experimento tomando datos un año para la estrategia dinámica y de varios años para la estática se pueden encontrar los mismos fenómenos. Hay burbujas que pueden tardar varios años en formarse, como la de las inmobiliarias y o las crisis de las Puntocom (Sector Telecomunicaciones).

No hay que perder de vista que siempre el binomio Rentabilidad / Riesgo y qué estamos entendiendo por Riesgo.

4. CONCLUSIONES

Hemos realizado un análisis de series temporales con datos reales del Mercado de Valores español y hemos visto que existe un modelo autoregresivo que funciona bastante bien, pero que resulta poco práctico para aplicarlo al campo de la gestión de carteras y de la valoración de derivados.

Posteriormente, hemos visto que el uso del modelo simplificado con los logaritmos del retorno, y utilizado ampliamente por los economistas, está parcialmente justificado tras el análisis de la serie de datos, aunque existen fenómenos de los mercados que no quedan reflejados.

Usando el modelo de Markowitz, que supone la dinámica del mercado constante, hemos calculado carteras de inversión con idénticos criterios a los utilizados por los profesionales y hemos visto que distintos procedimientos tienen ventajas e inconvenientes que están relacionados con la naturaleza cambiante del mercado observada en el análisis de series.

Una posible extensión del trabajo es el análisis de series de tiempo con modelos más complejos que reflejen los fenómenos de autocorrelación (GARCH) y saltos (procesos de difusión con saltos).

Otro posible camino de trabajo en el campo de la gestión de carteras es cambiar la noción de riesgo, ya que la volatilidad puede no considerarse como el estadístico más eficiente para medirlo. Se han propuesto otras estimaciones como el ratio de Sharpe.

5. BIBLIOGRAFÍA

MADSEN H. (2008): Time Series Analysis. Chapman & Hall.

ARNAU GRASS J. (2001). Diseños de series temporales: técnicas de análisis

VANDERBEI, R.J. (2008). *Linear Programming*. Foundations and Extensions. Springer

MARKOWITZ, H (1952*). Portfolio Selectio*". Journal of Finance 7, pp. 77-91

WINSTON, W.L. (2005). *Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos*. Thompson

MENDIZABAL ZUBELDIA A., MIERA ZABALDA L.M. Y ZUBIA ZUBIAURRE M. (2002). *El Modelo de Markowitz en la Gestión de Carteras*. Cuadernos de Gestión. Vol. 2, Nº1

MARKOWITZ, H. M , HEBNER, M. T., BRUNSON M. E. *Does portfolio theory work during financial crises?*

http://inversores.bbva.com/TLBB/tlbb/bbvair/esp/share/dividends/index.jsp

http://www.invertia.com/mercados/bolsa/empresas/mapfre/dividendos-rv011mapfre

http://www.telefonica.com/es/shareholders_investors/html/dividendos/cuadro.shtml

http://www.gamesacorp.com/es/accionistas-inversores/accion-y-capital-social/

https://www.iberdrola.es/webibd/corporativa/iberdrola?IDPAG=ESWEBACCCAPITALDIVIDENDOS

http://www.acerinox.es/Inversores/La_accion_y_el_mercado_de_valores/Retribuciones_y_dividendos/index.html

http://www.inditex.es/es/accionistas_e_inversores/relacion_con_inversores/dividendos

http://www.bolsamadrid.es/esp/aspx/Portada/Portada.aspx

http://www.ajlasa.com/articulos/repfinf.pdf

6. ANEXO

- Código utilizado en R para el ajuste de las series

```
####Importar datos de las series corregidas

#instalar gdata del cran

install.packages('gdata')

library(gdata)

precios <-read.xls('precios_corregidos.xlsx', sheet=1)

 names(precios)<-c("fecha", "bbva", "mapfre", "telefonica", "gamesa",
"iberdrola",

                                  "acerinox", "inditex")

precios<-precios[-1,]

matriz_precios<-as.matrix(precios)

datos<-apply(matriz_precios, 2, as.numeric)

bbva<-datos[,2]

mapfre<-datos[,3]

telefonica<-datos[,4]

gamesa<-datos[,5]

iberdrola<-datos[,6]

acerinox<-datos[,7]

inditex<-datos[,8]

#setor financiero

plot(bbva, type="l", main="BBVA", xlab="Año 2009", ylab="Cotización",
col="blue")

plot(mapfre, type="l", main="Mapfre", xlab="Año 2009", ylab="Cotización")

#sector telecomunicaciones

plot(telefonica, type="l", main="Telefonica", xlab="Año 2009",
ylab="Cotización")

#sector energético
```

```
plot(gamesa, type="l", main="Gamesa", xlab="Año 2009", ylab="Cotización")

plot(iberdrola, type="l", main="Iberdrola", xlab="Año 2009",
ylab="Cotización")

#sector construcción

plot( acerinox, type="l", main="Acerinox", xlab="Año 2009", ylab="Cotización")

#textil

plot(inditex, type="l", main="Inditex", xlab="Año 2009", ylab="Cotización")

##############################################3

#setor financiero

auxiliar<-c(rep(1,253 ), 45)

plot(auxiliar, col="white", main="Cotizaciones 2009", xlab="Año 2009",

     ylab="Cotización")

points(bbva, type="l", col="1")

points(mapfre, type="l", col="2")

#sector telecomunicaciones

points(telefonica, type="l", col="3")

#sector energético

points(gamesa, type="l", col="4")

points(iberdrola, type="l", col="yellow")

#sector construcción

points( acerinox, type="l", col="purple")

#textil

points(inditex, type="l", col="orange3")



max(bbva, mapfre, telefonica, gamesa, iberdrola, acerinox, inditex)

min(bbva, mapfre, telefonica, gamesa, iberdrola, acerinox, inditex)

auxiliar<-c(rep(1,253 ), 45)
```

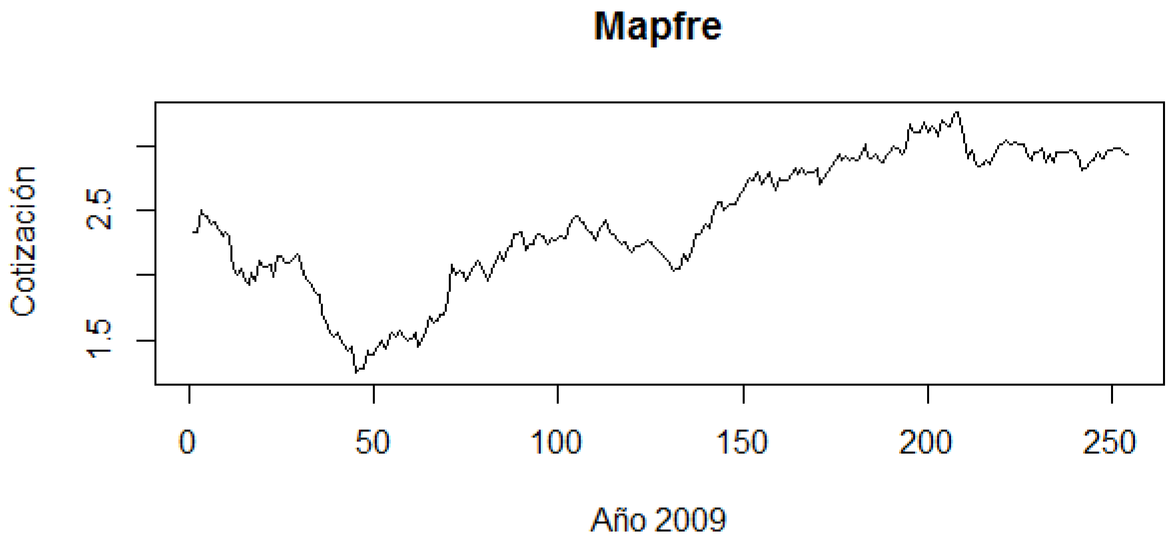
```
plot(auxiliar, col="white")

legend(1,30, c( "BBVA", "Mapfre", "Telefonica", "Gamesa", "Iberdrola",

                              "Acerinox", "Inditex"), col =c(1:4,"yellow",
"purple","orange3") , lty = 1,

        ncol = 4, cex = 0.8)

legend(50,20, "sin(c x)", pch = 21, pt.bg = "white", lty = 1, col = "blue")

###analisis de bbva con  los precios corregidos

##clase serie

s_bbva<-ts(bbva)

#####

#analisis descriptivo

summary(bbva)

##representacion gráfica

hist(bbva, probability =T, main='Histograma datos 2009 BBVA', xlab="BBVA",

     ylab="Densidad")

lines(density(bbva), col="red");

qqnorm(bbva);

qqline(bbva, col = 2)

boxplot(bbva, horizontal=T);

shapiro.test(bbva)

###analisis de la serie temporal

##funcion de autocorrelacion

par(mfrow=c(1,2))

  acf(bbva, main="FAC", lag.max=30)

   #funcion de autocorrelacion parcial

  pacf(bbva, main="FACP",lag.max=30)

 par(mfrow=c(2,2))

acf(bbva, main="Función de autocorrelación- #Retardos=50", lag.max=50)
```

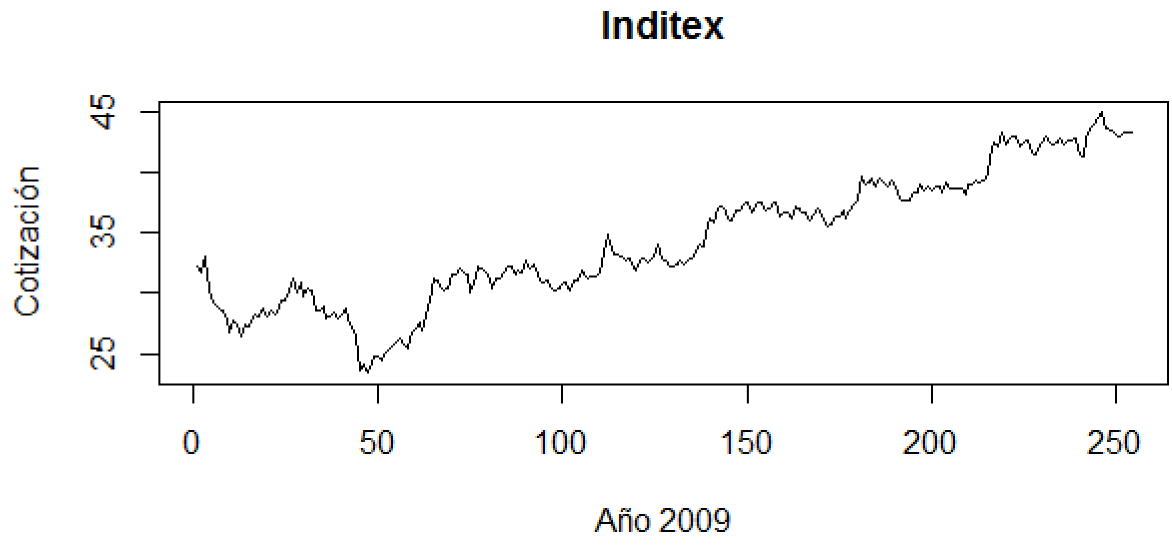
```
acf(bbva, main="Función de autocorrelación- #Retardos=100", lag.max=100)

acf(bbva, main="Función de autocorrelación- #Retardos=150", lag.max=150)

acf(bbva, main="Función de autocorrelación- #Retardos=200", lag.max=200)

 ####periodograma

#test de estacionaridad para bbva

adf.test(bbva)

#Rechazamos las hipótesis de no estacionariedad

##AJUSTE DEL MODELO

bbva2<-bbva[1:234]

#seleccionamos el mejor

AIC(arima(bbva2,order=c(1,0,0)),arima(bbva2,order=c(2,0,0)),

    arima(bbva2,order=c(3,0,0)))

#el modelo con mejor AIC es el modelo arima(2,0,0)

#ajustamos el modelo

m1<-arima(bbva2, order = c(2, 0, 0))

m1

confint(m1)

#lo validamos con los residuales

residuales1<-residuals(m1)

#condicion 1

acf(residuales1)$acf

acf(residuales1, main="FAC de los residuales")

# Representación de los residuos y de sus funciones de autocorrelación:

  plot(residuales1,main=" Gráfico de los residuales del modelo ARIMA (2,0,0)",
col="blue",

       ylab="Residuales")

##condicion 2

Box.test(residuales1, type = c("Box-Pierce"))
```

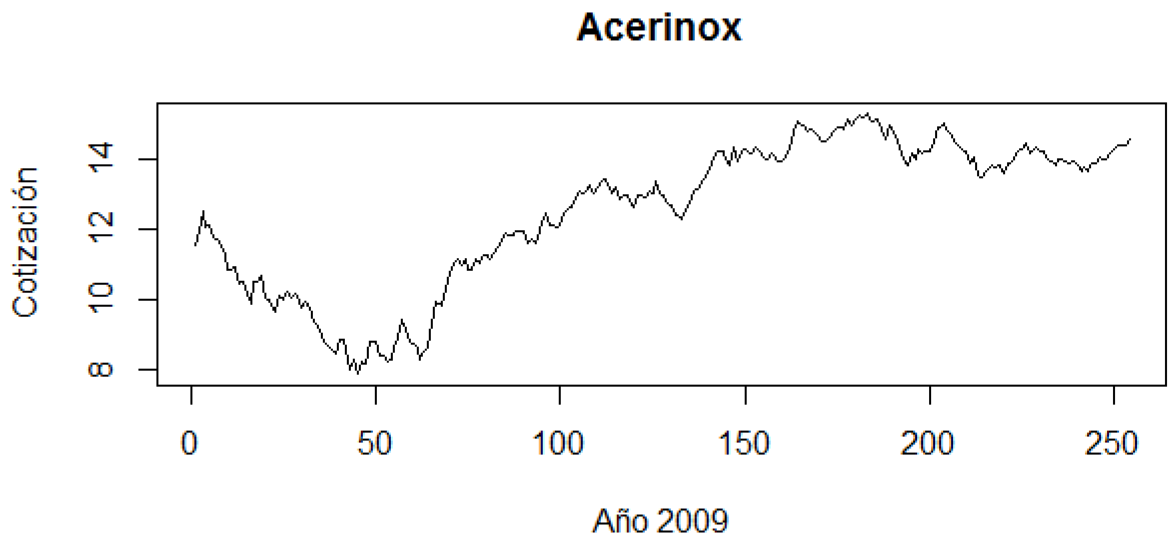
```
#normalidad

shapiro.test(residuales1)

hist(residuales1, probability =T, main='Histograma residuales modelo AR(2)',
xlab="Residuales",

     ylab="Densidad")

lines(density(residuales1), col="red");

hist(residuales1)

qqnorm(residuales1)

qqline(residuales1, col="red")

####predicciones

pre<-predict(m1,n.ahead=20)$pred

plot(datos[,2], type="l", main="BBVA", xlab="año 2009", ylab="precio")

points(pre, type="l", col="red")

f<-forecast(arima(bbva,order=c(2,0,0)))

plot(f)

datos[,2][235:254]

pre

##DATOS DEL LOGARITMO DEL RETORNO

logretor <-read.xls('log_retor_corregido.xlsx', sheet=1)

names(logretor)<-c("fecha", "bbva", "mapfre", "telefonica", "gamesa",
"iberdrola",

                   "acerinox", "inditex")

logretor<-logretor[-c(1:2),]

matriz_logretor<-as.matrix(logretor)

datos_logretor<-apply(matriz_logretor, 2, as.numeric)

#sector financiero

bbva_logretor<-datos_logretor[,2]

mapfre_logretor<-datos_logretor[,3]

#sector telecomunicaciones
```

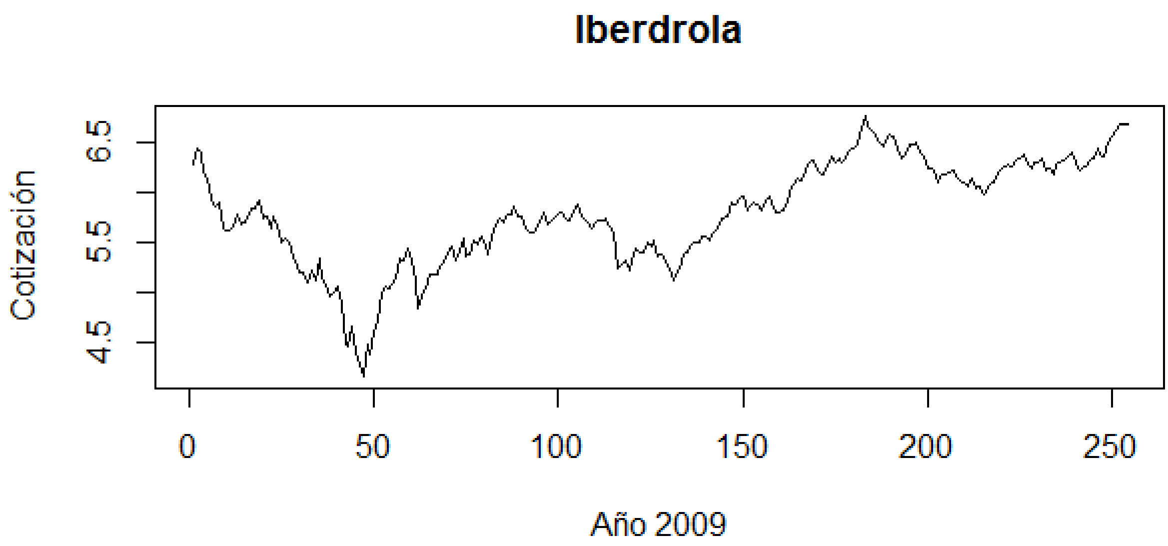
```
telefonica_logretor<-datos_logretor[,4]
#sector energetico
gamesa_logretor<-datos_logretor[,5]
iberdrola_logretor<-datos_logretor[,6]
#sector construccion
acerinox_logretor<-datos_logretor[,7]
#sector textil
inditex_logretor<-datos_logretor[,8]
#################VOLATILIDAD
length(bbva_logretor)


#a 30 dias
#253-30=223
a30d<-c()
for (i in 1:223){
  aux<-bbva_logretor[i:(29+i)]
  a30d[i]<-var(aux)}
plot(a30d, type="l", main="Varianza a 30 días", xlab=" ",
     ylab="Varianza de los retornos", col="blue")
#a 60 dias
#253-60=193
a60d<-c()
for (i in 1:193){
  aux<-bbva_logretor[i:(59+i)]
  a60d[i]<-var(aux)
}
plot(a60d, type="l", main="Volatilidad a 60 días",
     ylab="Varianza de los retornos", xlab="Tiempo")
```

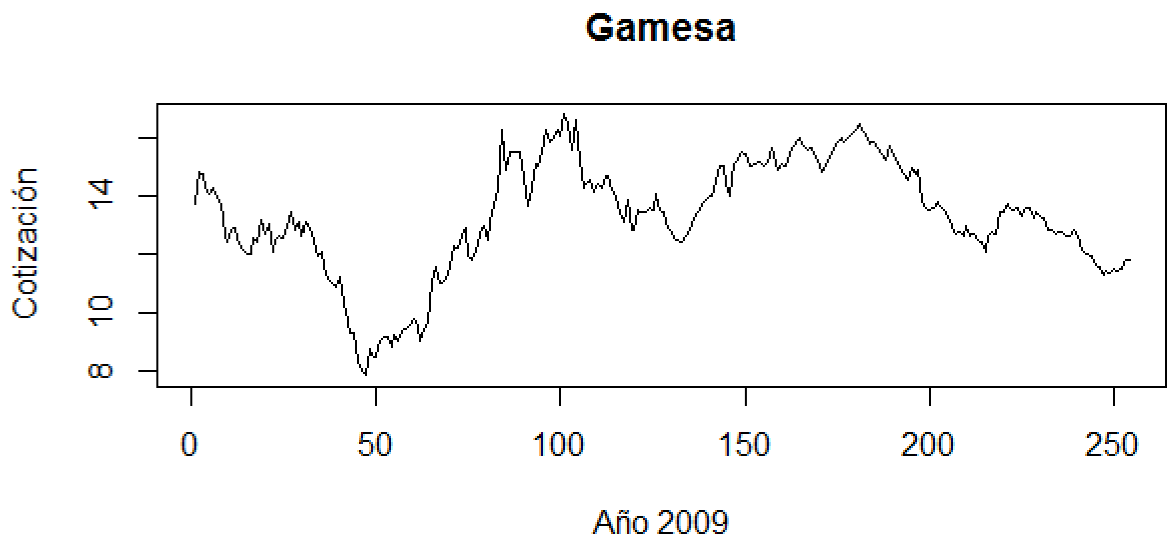
- <u>Gráficos correspondientes a las cotizaciones todas las empresas</u>

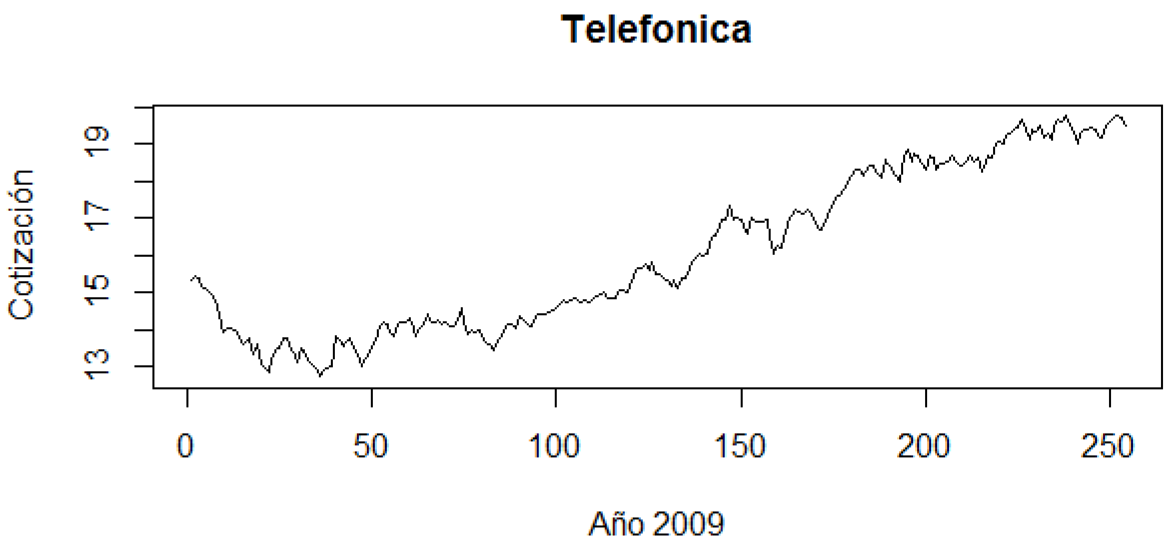




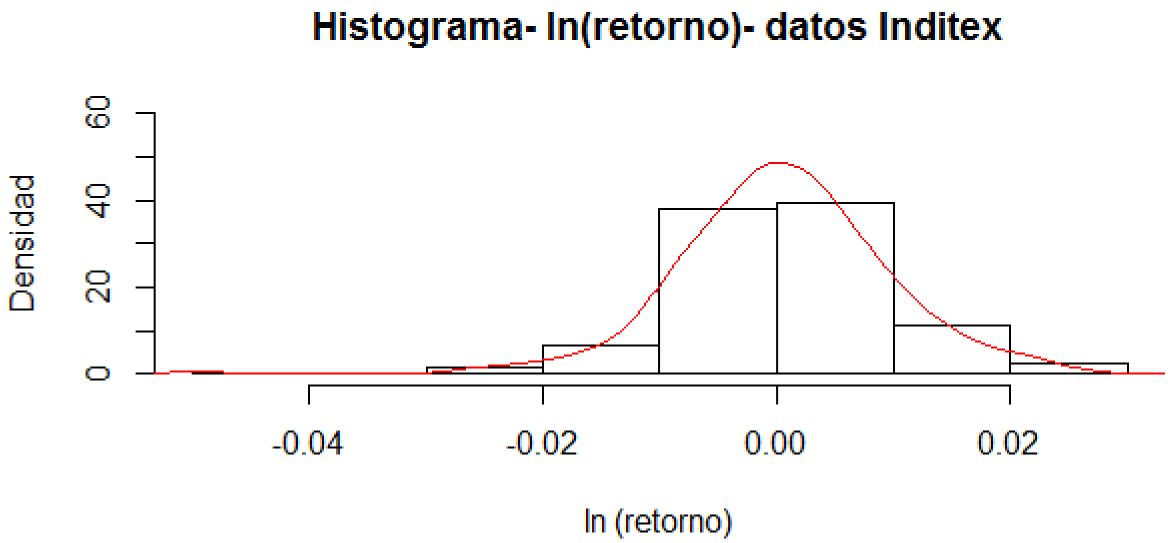


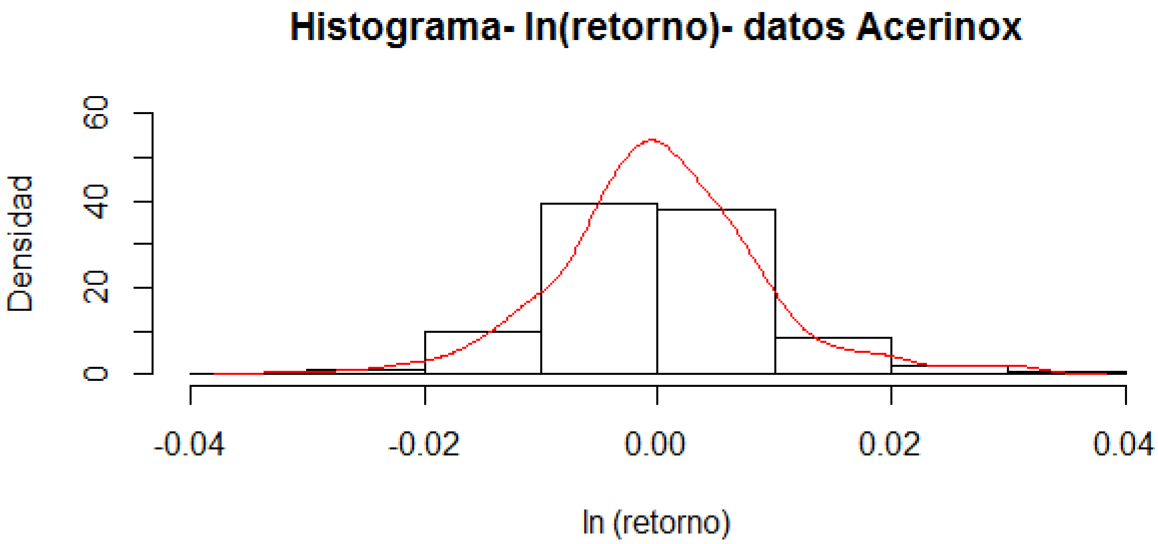

Iberdrola
Cotización
4.5
5.5
6.5
0
50
100
150
200
250
Año 2009

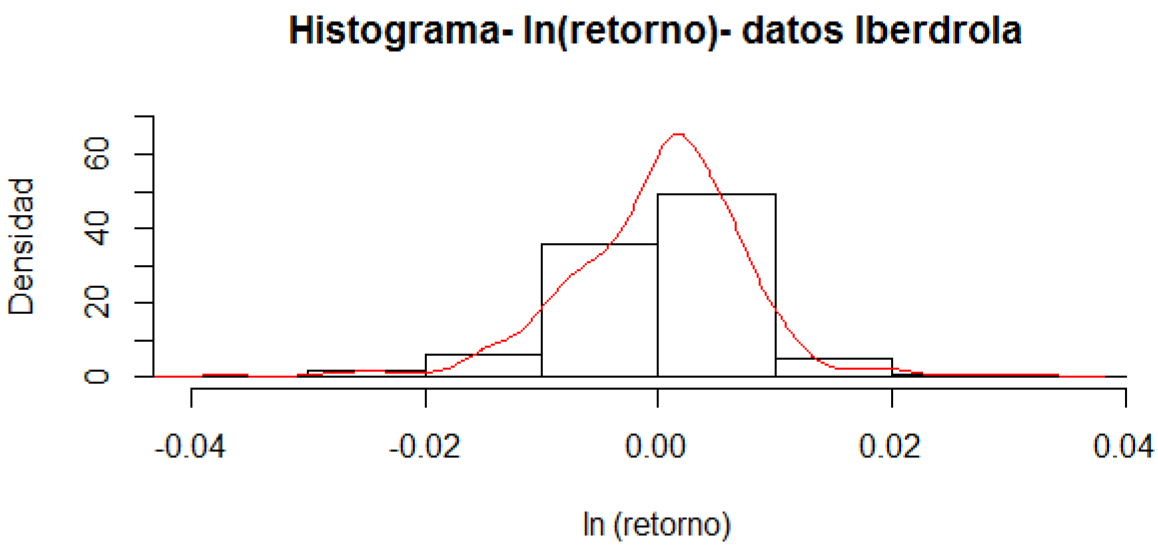

Gamesa
Cotización
8
10
14
0
50
100
150
200
250
Año 2009

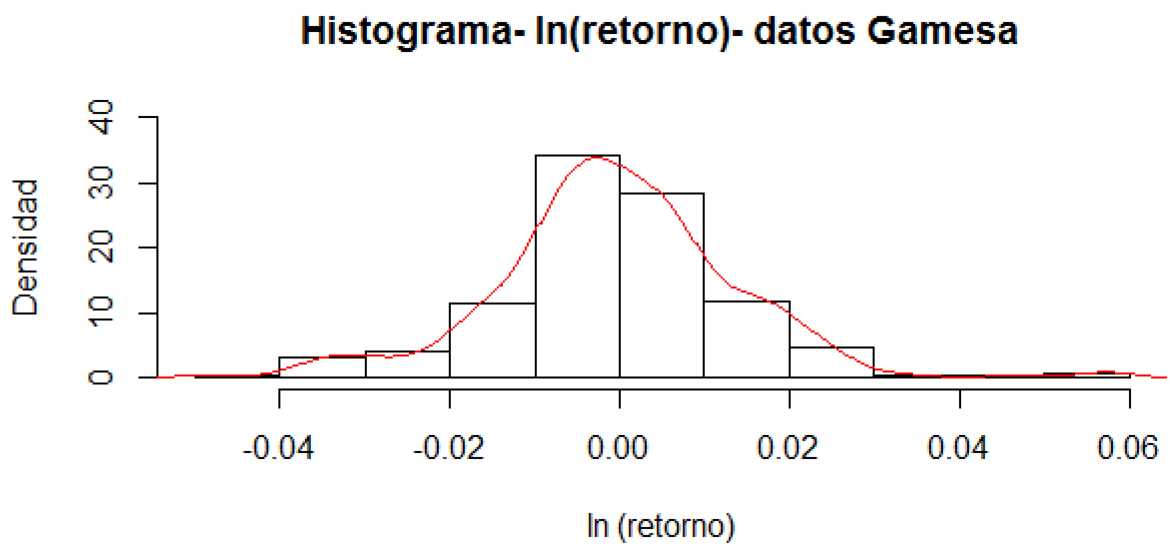

Telefonica
Cotización
13
15
17
19
0
50
100
150
200
250
Año 2009

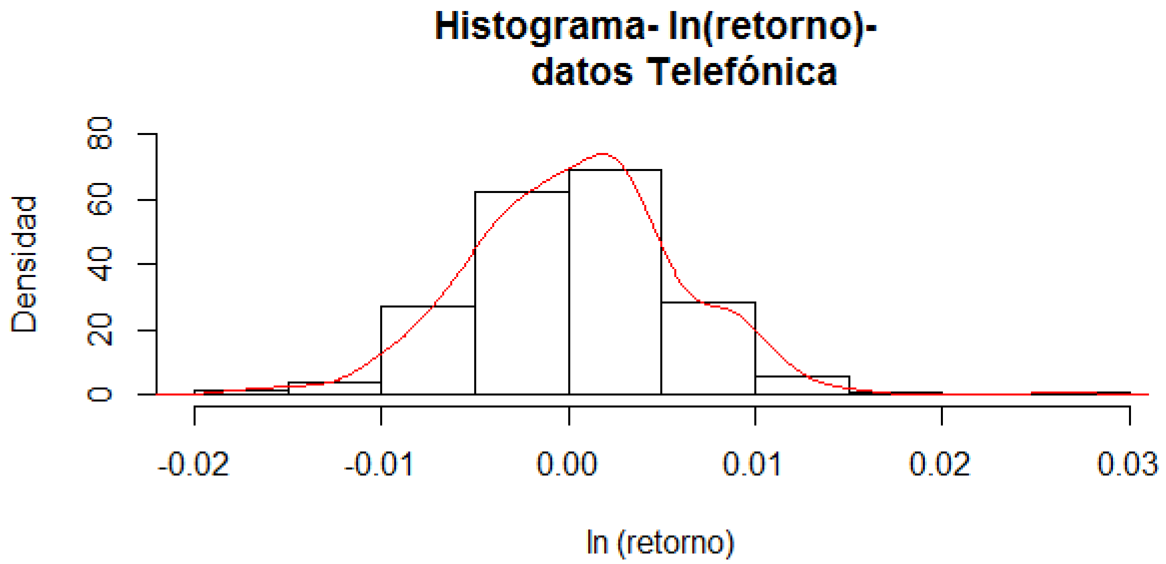
- Histograma del logaritmo del retorno correspondiente a todas las empresas

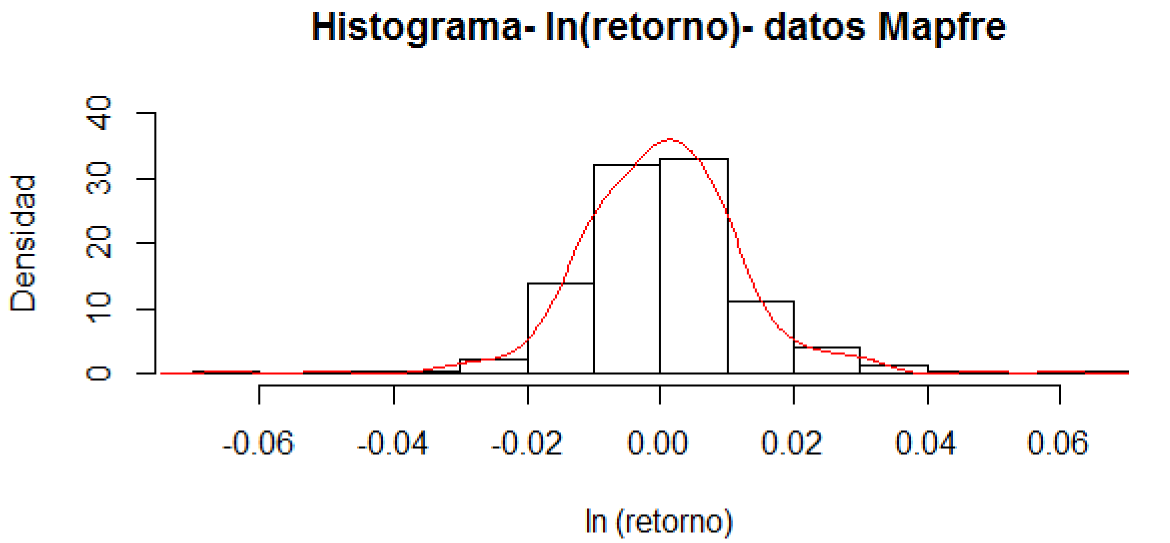







Histograma- ln(retorno)- datos Gamesa
Densidad
0
10
20
30
40
-0.04
-0.02
0.00
0.02
0.04
0.06
ln (retorno)


Histograma- ln(retorno)-
datos Telefónica
Densidad
0
20
40
60
80
-0.02
-0.01
0.00
0.01
0.02
0.03
ln (retorno)


Histograma- ln(retorno)- datos Mapfre
Densidad
0
10
20
30
40
-0.06
-0.04
-0.02
0.00
0.02
0.04
0.06
ln (retorno)

- Código de AMPL utilizado para el cálculo de la frontera eficiente estática

```
######FRONTERA 1: 5 ENERO - 30 ABRIL

# include D:\users\TFG\frontera-eficiente-uno.mod;

reset;

set A;          # asset categories

set T := {1..82};     # years

param mu;

#param K:=21;

#set valores:=0..K;

set valores:={0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1, 1.2, 1.5, 2,  3, 3.4, 4,
5, 5.5, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,

15, 17, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 75, 100, 150, 200, 500, 1000,
2000, 5000, 10000, 100000, 1000000};

param R {T,A};

param mean {j in A}

    := ( sum{i in T} R[i,j] )/card(T);

param Rtilde {i in T, j in A}

    := R[i,j] - mean[j];

param Cov {j in A, k in A}

    := sum {i in T} (Rtilde[i,j]*Rtilde[i,k]) / card(T);

param Corr {j in A, k in A}

    := Cov[j,k]/sqrt(Cov[j,j]*Cov[k,k]);

param return;

var x{A} >=0;

minimize lin_comb:

    mu *

    sum{i in T} (sum{j in A} Rtilde[i,j]*x[j])^2 / card{T}

    -

    sum{j in A} mean[j]*x[j]
```

```
    ;
subject to tot_mass:
    sum{j in A} x[j] = 1;
data;
set A :=
    BBVA Mapfre Telefonica Gamesa Iberdrola Acerinox Inditex;
param R:
        BBVA    Mapfre  Telefonica     Gamesa  Iberdrola      Acerinox       Inditex:=

1       1.04503665     0.9999877      1.00847324     1.08020329     1.02708424
        1.03649998     0.98540164

2       1.01979521     1.07281975     0.99675132     0.99459734     0.99378338
        1.04947215     1.04031786

3       1.00912925     0.98800822     0.98505204     0.97013569     0.96876125
        0.96244085     0.95184219

4       0.97055601     0.99190458     0.99603205     0.98040943     0.99031916
        1.00414715     0.94240627

5       0.97899413     0.97553892     0.99469253     1.01712236     0.9674387
        0.97436512     0.98142392

6       1.00797222     1.00416507     0.99000652     0.97754821     0.9848485
        0.99066179     0.98623214

7       0.95507648     0.97502957     0.98385674     0.98205608     1.00682225
        0.98543444     0.99650365

8       0.95915155     0.98292263     0.96446426     0.92765203     0.95418003
        0.97913465     0.97584054

9       0.93676657     1.00866832     0.98723708     0.97557667     0.9964327
        0.9644862      0.9576671

10      0.99723752     0.99138143     1.00644337     1.03633315     1.00177338
        0.99907513     1.04118977

11      0.9723674      0.89147485     1.00212494     1.00545114     1.00711421
        1.00368066     0.98740115

12      0.96305914     0.97564147     0.99287288     0.95427563     1.02121389
        0.9577722      0.9650176

13      0.93951736     1.02493797     0.98852298     0.98456754     0.98440122
        1.00574558     1.03207958

14      0.97958208     0.95616461     0.98476585     0.99009923     1.00174849
        0.9666441      0.99450443

15      0.99037515     0.97961629     1.00808176     0.99749765     1.01579642
        0.97436507     1.02867961

16      0.99837281     1.05196725     1.00655679     1.04759956     1.00863453
        1.06069774     1.00714228
```

17	1.05672175	0.97033719	0.96807155	0.98883626	0.99998932	1.00285683	0.99395619
18	1.02913511	1.07637263	1.01946623	1.05804261	1.01541781	1.01331078	1.02427892
19	1.08196646	0.98106174	0.9602988	0.96799456	0.96791276	0.94086332	0.97732576
20	0.96968655	0.99516362	0.99156669	1.02203737	1.00522177	0.99700237	1.02211259
21	1.00141273	1.00967788	0.99149496	0.92682948	0.97743217	0.97498017	0.98672667
22	0.9772946	0.9567909	1.02567429	1.03406732	1.02129154	0.98767971	1.00317535
23	1.02176528	1.07522883	1.01895982	1.01285468	0.9878217	1.05090982	1.03948838
24	1.02556354	0.99998655	1.00296512	0.99602987	0.96831554	0.98516408	0.99659921
25	0.98752532	0.97665994	1.02152262	1.03026678	1.0054403	1.0240823	1.02858636
26	1.00700583	0.99998622	0.99925904	1.03942887	0.99275919	0.9823547	1.03176331
27	0.99999228	1.01431685	0.97670467	0.9546226	0.97632129	1.01096914	0.96374598
28	0.97073983	1.01411477	0.99477143	1.01869786	0.97947644	0.9881535	1.02861525
29	0.9870774	0.99534269	0.98126536	0.9632818	0.98856536	0.97702644	0.9631051
30	0.97382449	0.93466764	1.03127273	1.03652356	0.99998797	1.0122605	1.02350944
31	0.98804914	0.97502679	0.98666639	0.98620764	0.97880377	0.9878782	0.99342704
32	0.94106735	0.98462638	0.98273637	0.96581818	1.02753327	0.95502124	0.94315959
33	0.92613834	0.97398724	0.99235393	0.96058702	0.9770102	0.99036236	0.99894047
34	1.0346611	0.98930775	0.99306403	1.00836959	1.0450649	0.97405828	1.0147211
35	0.99496431	0.92443886	0.98449728	0.96346212	0.96435637	0.97225791	0.9668123
36	0.93263294	0.96496008	1.01257025	0.96466194	0.98443041	0.98972433	1.00213619
37	0.96748954	0.94554029	1.00542281	0.98570225	0.97825785	0.98846467	1.01104962
38	0.98692587	0.98078887	1.00462092	0.98821391	1.00604538	0.9859972	0.98517292
39	1.02268119	1.01302684	1.06304956	1.03209711	1.01604508	1.04613098	1.01037708

40	1.06840408	0.94846957	0.99347491	0.92179633	0.96442848	1.00338698	1.0170051
41	0.95326275	0.97961394	0.98833454	0.93829837	0.91805228	0.93011992	0.95538016
42	0.90195266	0.97918969	1.00661711	0.95478939	0.99329238	0.96606701	0.99597827
43	0.97583448	1.02121161	1.00876951	1.00214797	1.04491158	1.03636693	0.96592734
44	1.024741	0.86137272	0.97821791	0.89369292	0.94409343	0.95037468	0.89191962
45	0.92551131	1.02411385	0.9888593	0.96395051	0.9726613	1.0471105	1.02252242
46	0.96083949	0.99997724	0.97373143	0.97755947	0.96955185	0.99391342	0.97130086
47	0.99546029	1.117824	1.01847364	1.1134736	1.07725064	1.0721852	1.04022793
48	1.10003789	0.9788946	1.00376732	0.97823863	0.97757189	1.00455925	1.0164505
49	1.03306191	0.99279931	1.01731693	0.99297201	1.05042786	0.99999447	1.00403865
50	1.03000287	1.0506027	1.01480001	1.06247497	1.0261794	0.95000924	0.98749018
51	1.02524362	1.02751453	1.02918241	1.01441972	1.06379881	1.00118998	1.02489835
52	1.04735987	0.95978481	1.00566004	1.00437083	1.00998498	0.97849523	1.00955219
53	1.00179905	1.06279972	0.9971655	0.96514748	0.9960281	1.0085385	1.0157761
54	1.01082526	1.01968361	0.98584178	1.04061566	1.00992569	1.04235465	1.00970337
55	1.01428242	0.98709976	0.99137753	0.98156277	1.00982813	1.03250577	1.00999489
56	0.99470601	1.02608087	1.0224184	1.03755421	1.03896663	1.06072116	0.98170399
57	1.06904998	0.96818604	1.00352512	1.00425458	0.99623652	0.9660687	0.98951254
58	1.02152385	0.98684482	1.00280747	1.0158984	1.02446632	0.96707179	1.04979804
59	1.01944884	1.00663628	1.0049095	1.02086748	0.97609489	0.9909161	1.00858326
60	0.99681001	1.02642773	0.98248994	0.97750663	0.96232858	0.98396164	1.01962231
61	0.96488687	0.93556628	0.98289021	0.94770752	0.94520037	0.96042292	0.97892117
62	0.9189588	1.03440567	1.01737962	1.04413456	1.02689871	1.03028971	1.04303819

```
63      1.04857784    1.03991742    1.00568506    1.02218929    1.01409868
        1.01646104    1.04837803

64      1.03603026    1.07678896    1.01981947    1.1395708     1.02781783
        1.07636629    1.06107773

65      1.10766317    0.97621535    0.98540078    1.05171032    1.00192191
        1.06987318    0.99167653

66      1.01195556    1.00608089    1.00210092    0.95341341    0.99998785
        0.98994865    0.98225368

67      0.99999174    1.02420075    1.00139314    0.99818687    1.01543099
        0.99593686    0.99178337

68      0.98373557    1.00590132    0.99155766    1.01087384    1.00759226
        1.04789872    1.00826849

69      1.01801881    1.064612      1.00423654    1.04034788    1.01508198
        1.04279151    1.03446859

70      1.10624051    1.14897867    0.99363786    1.05429763    1.0148579
        1.02704522    1.00411853

71      1.04534708    0.9663759     0.99856645    0.99509163    0.97251614
        1.00907862    1.01484925

72      0.97574715    1.01490225    1.01420469    1.03532401    1.0188206
        0.98829793    0.9878446

73      1.018302      0.99020015    1.02031444    1.02062875    1.02216985
        1.01274592    0.99652382

74      1.02182648    0.9703227     0.97662836    0.92458009    0.96924637
        0.97572026    0.95347941

75      0.95348929    1.02547501    0.97747595    0.99158756    1.00371973
        1.00184036    1.01724815

76      0.97494775    1.02981191    1.00646299    1.01950183    1.02415308
        1.02115349    1.05186177

77      1.03920246    1.01929711    0.99712598    1.05323371    0.99454357
        0.99098957    0.99503014

78      0.98698277    0.97632104    1.00142029    1.02132109    1.01276314
        1.01999467    0.98752477

79      1.02899369    0.97574675    0.98566445    0.96519863    0.98737497
        1.00267085    0.98326401

80      0.98205845    0.97514391    0.99344743    1.04726642    0.98173856
        0.98666574    0.97527517

81      0.97781727    1.03566918    0.99632936    1.04207306    1.03344918
        1.01801314    1.02533548

82      1.03601271    1.03444071    0.98530608    1.04184265    1.02157391
        1.01503986    0.99967111

;

#param return := 1.0027;

#letra a 12 meses en 2009: 1.277, a 6 meses 0.974 y a 3 meses
0.913
```

```
param return := 1.0000307;

display Corr;

printf: "--------------------------------------------------------------------------\n\n";

printf: "                                              Asset       Mean
Variance StandardDeviation\n";

printf {j in A}: "%45s %10.5f %10.6f %10.6f\n",

    j, mean[j], sum{i in T} Rtilde[i,j]^2 / card(T), sqrt(sum{i
in T} Rtilde[i,j]^2 / card(T));


printf: "\n--------------------------------------------------------------------------\n";

option solver minos;

option solver_msg 0;

for{k in valores}{

                let mu:=k;

                solve;

#expand;

printf "\n\n mu=%.4f\n",

     mu;

printf: "\n Optimal Portfolio:                        Asset
Fraction \n";

#printf {j in A: x[j] > 0.001}: "%45s %10.4f \n", j, x[j];

printf {j in A: x[j]}: "%45s %10.3f \n", j, x[j];

printf: "\n Mean = %10.10f, Variance = %10.11f, Sharpe Ratio =
%10.11f\n",

    sum{j in A} mean[j]*x[j],

    sum{i in T} (sum{j in A} Rtilde[i,j]*x[j])^2 / card(T),

    (sum{i in A} x[i] * mean[i]- return)/(sum{i in T} (sum{j in
A} Rtilde[i,j]*x[j])^2 / card(T))^(0.5)

# (sum{i in A} x[i] * mean[i]- return )/(sum{i in A, j in A}
x[i]*x[j]*Cov[i,j])^(0.5);};
```

- Datos correspondientes a la evolución de las carteras eficientes (Estrategia estática y dinámica)

Estatica	Dinámica
10184,5904	10266,6594
10257,6403	10286,5781
10407,0619	10400,0075
10399,752	10391,369
10437,5941	10463,7107
10370,8086	10496,5205
10612,2143	10548,5917
10478,4145	10337,4223
10462,5489	10294,3524
10362,7644	10225,3494
10429,5468	10230,7999
10514,5279	10439,1002
10538,3463	10616,271
10451,4954	10459,4509
10469,7032	10404,3371
10516,431	10459,8791
10590,2229	10520,0634
10644,5766	10662,9568
10653,7038	10670,8782
10713,5881	10633,6888
10784,4747	10795,4135
10877,0401	10948,6555
10769,3197	10908,4186
10747,2761	10852,8806
10778,7346	10923,3975
10738,1473	10821,9129
10808,8682	10886,1897
10997,8464	11006,233
11128,2099	11087,3599
11113,7332	11064,9027
10943,8988	10923,3662
10935,5161	10951,1538
10904,8473	10747,1425
10972,9315	10755,3349
11003,3401	10792,4757
10886,4329	10751,6441
10940,8634	10675,2331
11184,0617	10875,2865
11307,5399	11009,7541
11281,006	10988,1817
11361,8784	11078,7948
11321,4005	11117,1923

11479,4089	11144,6074
11212,9999	11077,1256
11190,5297	10887,1737
11089,9552	10827,5667
11044,029	10714,7637
10951,0634	10583,7198
11039,2345	10529,261
10920,7859	10552,2945
11117,9853	10694,01
11121,5963	10843,8224
11326,8413	11115,3053
11498,5925	11475,195
11558,1815	11590,8462
11677,1614	11635,5278
11744,6109	11795,8139
11777,7231	11815,8043
12098,7545	12075,2784
12185,996	12285,5739
12259,5737	12305,2772
12306,7526	12287,3667
12296,0962	12453,0113
12568,9989	12753,1898
12357,6853	12763,5817
12445,3275	13012,5592
12444,4898	13108,0398
12223,7412	13031,6944
12210,2255	12908,2646
12486,0353	13065,4984
12427,1094	13244,2243
12360,5079	13116,914
12380,5479	13042,9181
12460,8858	13216,3374
12238,1657	13291,9218
11889,6057	13093,9703
12023,3657	12843,0277
12003,5145	12921,4937
12190,5578	12960,8676
12473,74	13300,1372
12538,7414	13649,6941
12584,7613	13892,6753
12557,6422	14161,8039
12468,4139	14014,9919
12554,749	13993,2328
12527,8115	13985,6261