TRABAJO DE FIN DE GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

LOS MATERIALES DIDÁCTICOS MANIPULATIVOS EN EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS NATURALES Y DE LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

ACTIVIDADES PARA REALIZAR EN EL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

AUTORA: Patricia Ares Sanz

TUTOR: Eugenio Pardo Romero

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Facultad de Educación. PALENCIA

Curso 2013 - 2014

Convocatoria Julio 2014

RESUMEN

Este trabajo de grado parte de la concepción teórica sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, *(en concreto de los números y de las operaciones matemáticas de adición y de sustracción en el primer ciclo de Educación Primaria),* como prerrequisito cognitivo a tener en cuenta, para proceder posteriormente al uso de material didáctico manipulativo empleado mediante diversas actividades tipo.

PALABRAS CLAVES

Enseñanza - Aprendizaje - Matemáticas - Educación Primaria - Número - Adición - Sutracción - Material didáctico manipulativo - Actividades.

ABSTRACT

This dissertation commences with the theoretical conception of the mathematics education-learning process, *(precisely number and the mathematical operations of addition and subtraction as found in the first cycle of Primary Education)*, as a cognitive pre-requisite for required consideration, proceeding thereafter to consider the utilization of teaching materials in a variety of education activity-types.

KEYWORDS

Education - Learning - Mathematics - Primary Education - Number - Addition - Subtraction – Teaching materials – Education activity-types.

ÍNDICE

Págs.

1. INTRODUCCIÓN **3**

2. OBJETIVOS **5**

2.1. Objetivo General

2.2. Objetivos Específicos

3. JUSTIFICACIÓN DEL TEMA ELEGIDO **6**

4. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA SOBRE EL APRENDIZAJE **6**

4.1. Estructuralismo

4.2. Funcionalismo

4.3. Conductivismo

4.4. Cognitivismo

4.5. Constructivismo

5. EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS **11**

6. EL USO DE MATERIAL DIDÁCTICO **17**

6.1. Clasificación

6.1.1. Material no estructurado

6.1.2. Material estructurado

7. SISTEMA DE NUMERACIÓN Y CÁLCULO **19**

8. EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS, DE LA SUMA Y DE LA RESTA. ACTIVIDADES CON MATERIAL MANIPULATIVO DIDÁCTICO PARA EL 1er CICLO DE ED. PRIMARIA **23**

9. CONCLUSIÓN PERSONAL **53**

10. BIBLIOGRAFÍA **54**

11. ANEXOS **60**

1.- INTRODUCCIÓN

Un gran número de personas encuentra las matemáticas difíciles, abstractas y aburridas; e incluso, se sienten inseguras respecto a su capacidad para resolver problemas sencillos o simples cálculos. Todos hemos escuchado alguna vez expresiones del tipo: *“Las matemáticas no son lo mío”, “Yo soy más de letras”, etc.*

Sin embargo, las matemáticas forman parte importante en nuestra vida cotidiana. A cada instante, hacemos uso de ellas de diversas formas. Estas breves ilustraciones nos hacen referencia de su empleo diario, tanto para situaciones lúdicas como funcionales:

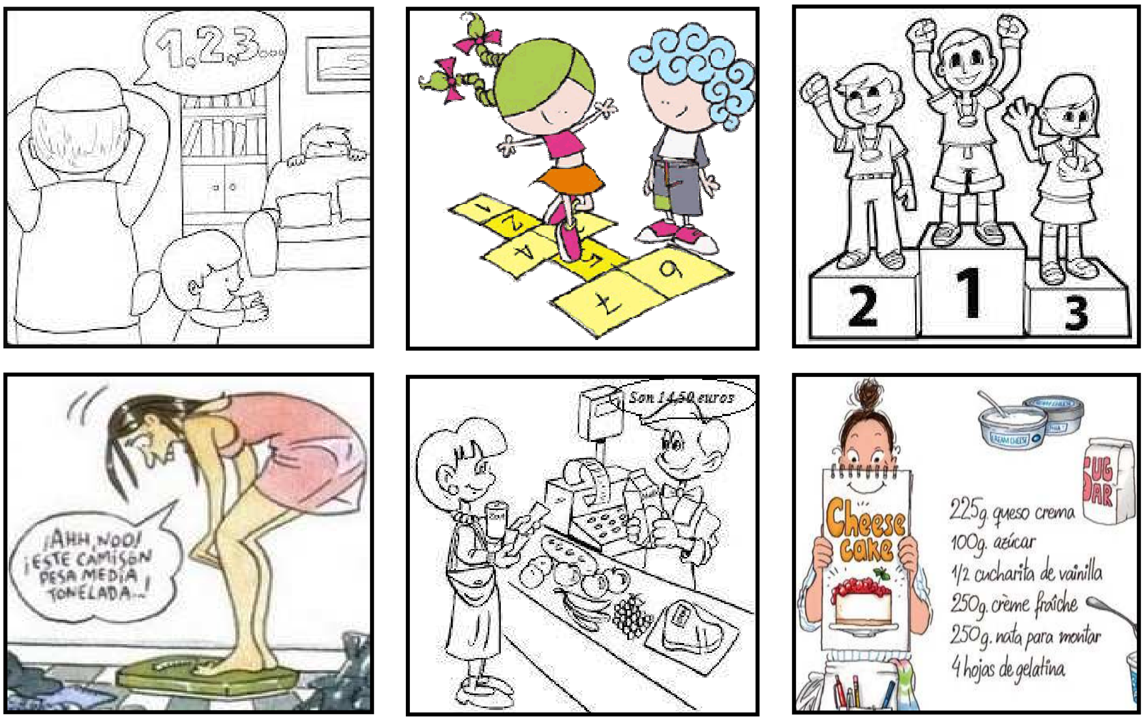


Figura 1.1. Ilustraciones del empleo de los números en la vida cotidiana.

Podemos comprobar que hacemos uso de ellas sin darnos cuenta: *marcando un número de teléfono, comprobando la hora, manejando un calendario, usando el cajero automático, interpretando nuestra nómina, analizando gráficos y estadísticas, haciendo frente a los gastos mensuales, llamando al ascensor, midiendo nuestra temperatura corporal, anotando nuestro DNI, comprobando la velocidad a la que circulamos, calculando distancias entre dos lugares…* Además, se aplica útilmente en los negocios, la industria, la música, la historia, los deportes, la medicina, entre otros.

Las matemáticas constituyen un lenguaje universal, a diferencia de otros campos del pensamiento humano. Debido a ello, por ejemplo los matemáticos son capaces de comunicarse entre sí, aunque no comprendan el idioma de la persona con la que hablan.

"La enseñanza que ofrecemos a un alumno tendría que prepararlo para ser un ciudadano en el sentido más amplio de la palabra. Su educación ha de capacitarlo, no solamente, para aplicar las matemáticas en asuntos prácticos; sino también, para entender los grandes problemas del mundo, cuya solución depende de las matemáticas y de la ciencia". (The Mathematical Association of America, 1919, p. 43).

Asimismo, el matemático **Zoltan Dienes** *(1916-2014)* afirmó que:

"La meta principal de las matemáticas debe ser el desarrollo de ciertas pautas de pensamiento, de ciertas estrategias, que la gente puede desarrollar al enfrentarse a situaciones nuevas, en las que nunca se había encontrado antes". (Zoltan Dienes, 1978). Libro: Puig Espinosa, L y Calderón J. (1996). *Investigación y didáctica de las matemáticas.* Ministerio de Educación y Ciencia: CIE.

La actual **Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa**, conocida con las siglas **LOMCE** muestra en su Preámbulo que:

"Los profundos cambios a los que se enfrenta la sociedad actual demandan una continua y reflexiva adecuación del sistema educativo a las emergentes demandas de aprendizaje. Se necesita propiciar las condiciones que permitan el oportuno cambio metodológico, de forma que el alumnado sea un elemento activo en el proceso de aprendizaje. La globalización y el impacto de las nuevas tecnologías hacen que sea distinta su manera de aprender".

Asimismo, el Artículo 76 hace referencia a los recursos argumentando que:

"Los centros estarán dotados de los recursos educativos, humanos y materiales necesarios para ofrecer una enseñanza de calidad y garantizar la igualdad de oportunidades en el acceso a la educación.

Además, las Administraciones Educativas podrán asignar mayores dotaciones de recursos a determinados centros públicos o privados concertados, en razón de los proyectos que así lo requieran o en atención a la necesidad de la población que escolarizan.

Finalizada esta introducción, voy a comentar brevemente las partes que a continuación voy a desarrollar. En primer lugar, enunciaré el objetivo general y los objetivos más específicos que de él se desprenden.

Después, explicaré brevemente el porqué de la elección de este tema de trabajo. Más tarde, me centraré en la fundamentación teórica del aprendizaje explicando las distintas teorías de aprendizaje. A continuación, explicaré el proceso general de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, hecho muy relevante que debemos tener en cuenta. Luego, pasaré ya a hablar sobre el uso de material didáctico y, posteriormente, al punto 7 dónde explicaré un poco el origen del sistema de numeración y del cálculo.

Como parte relevante de mi trabajo, me centraré en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números, de la adición y de la sustracción, en cuyo bloque detallaré los materiales didácticos manipulativos que se pueden emplear en actividades diversas para el primer ciclo de educación primaria, centrándome sobre todo, en las regletas, el ábaco y los bloques multibase. Finalizaré mi trabajo con una conclusión personal, con la bibliografía utilizada como documentación y con algunos anexos.

2.- OBJETIVOS

2. 1. Objetivo General

- Promover el uso de materiales didácticos manipulativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números y de las operaciones matemáticas de adición y de sustracción en el primer ciclo de la Educación Primaria, para mejorar la adquisición de los contenidos educativos propuestos mediante la observación, la manipulación y la experimentación.

2. 2. Objetivos Específicos

- Recalcar la relevancia de las matemáticas en la vida diaria.
- Fundamentar teóricamente el aprendizaje.
- Explicar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Establecer la clasificación del material didáctico.
- Describir el origen y la evolución del sistema de numeración y cálculo.
- Explicar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números y de las operaciones, mediante tareas de clasificar, seriar, contar, sumar, restar…
- Establecer estrategias aditivas y sustractivas.
- Presentar diferentes materiales didácticos manipulativos para ser empleados en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Plantear actividades diversas con material manipulativo didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

3.- JUSTIFICACIÓN DEL TEMA ELEGIDO

La elección de este tema para el desarrollo y exposición de mi trabajo de Fin de Grado de Primaria (TFG) ha sido debida al interés y a la relevancia que esta temática tiene en mi formación y en mi trabajo como maestra de Educación Especial.

Continuamente me son derivados al aula de Pedagogía Terapéutica del colegio en el que trabajo, niños con dificultades de aprendizaje en esta área instrumental de matemáticas o incluso diagnosticados con *"discalculia"*, trastorno en el aprendizaje de las matemáticas.

Cuando intervengo con ellos me doy cuenta de las carencias que tienen en contenidos básicos de aprendizaje como: *cálculo mental, estrategias para operar, técnicas para entender los problemas y pasos para poder resolverlos…* que hacen que no posean una base sólida de conocimientos sobre la que asentarse el aprendizaje adquirido y sumarse los nuevos contenidos matemáticos. Al ocurrir esto comienzan a perderse en las clases ordinarias no siendo capaces de seguir al resto de compañeros y empiezan a suspender esta área.

Todas esas razones me han llevado a elegir esta temática para poder aprender diversos aspectos relacionados con ella; cómo algunas de las teorías de aprendizaje, cuál es el proceso de aprendizaje de las matemáticas, el empleo de materiales didácticos como recurso educativo, el conocimiento de muchos de ellos, el aprendizaje de nuevas actividades en la enseñanza de los números y del cálculo…

Creo y hago hincapié en que los docentes debemos estar muy bien formados en ello para poder responder adecuadamente a las necesidades educativas que nuestros alumnos muestren en las aulas.

4.- FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA SOBRE EL APRENDIZAJE

Las teorías del aprendizaje pretenden describir los procesos mediante los cuales, los seres humanos aprenden. Numerosos psicólogos y pedagogos han aportado sendas teorías sobre el comportamiento humano y las explicaciones sobre cómo acceden al conocimiento.

Las más empleadas son: *estructuralismo, funcionalismo, conductismo, cognitivismo y constructivismo.*

4.1. Estructuralismo

Está integrada por un grupo de psicólogos y sociólogos que se dedican a estudiar el comportamiento humano. El autor más relevante fue el alemán **Wilhem Wundt** *(1832-1920),* considerado el padre de la psicología y el primer psicólogo. Él estableció la psicología como una ciencia experimental que utilizaba métodos derivados de la fisiología.

Su gran preocupación estaba en analizar las estructuras anatómicas encargadas de los procesos conscientes en el ser humano. Para él lo más importante en el aprendizaje era la conciencia y la introspección o ver hacia adentro. De esta manera, una persona durante el aprendizaje pone en práctica según él tres elementos claves que son: las sensaciones, las imágenes y los sentimientos

Uno de sus alumnos **Edward Bradford Titchener** *(1867-1927),* definió el trabajo de su maestro como *estructuralismo*. Para él, la estructura de la mente humana consistía en más de treinta mil sensaciones, sentimientos e imágenes separadas. El estructuralismo murió con Titchener, ya que dejó de lado temas tan importantes en los seres humanos cuando aprenden como son la motivación y las diferencias individuales.

4.2. Funcionalismo

Aunque la mayoría de los primeros psicólogos norteamericanos aprendieron el método científico de la psicología de Wundt, no estuvieron de acuerdo con el enfoque estructural sobre la conciencia. Para ellos, la conciencia tenía una finalidad, la de ser un instrumento de adaptación del organismo al ambiente y sólo desde esta postura funcional y evolutiva, debía ser estudiada por la psicología.

El psicólogo norteamericano **William James** *(1842-1910),* argumentó que la conciencia era un conjunto de sensaciones, deseos, emociones, conocimientos, razonamientos, decisiones, etc. Además debía tener en cuenta las causas, las condiciones y las consecuencias inmediatas”.

James otorga gran importancia a los hábitos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, pues son los determinantes básicos del comportamiento. Para ello, él proponía hacer habituales cuantas acciones fuera posible.

4.3. Conductismo

Esta corriente psicológica se basa en la interacción construida entre el ser humano y el ambiente físico, biológico y social, tratando así aspectos cognitivos, emotivos, sensoriales y motrices. Nace en 1913, año en que **J. B. Watson** *(1878-1958)* publicaba el artículo "*La psicología según la concibe un conductista*". Ahí se establecían por primera vez las características del conductismo: rechazo tanto a la noción de conciencia como al método introspectivo, y explicación de la conducta únicamente en términos de estímulos que son proporcionados por el ambiente y de respuestas de naturaleza fisicoquímica.

Según él cuando un niño nace, su repertorio de conductas es limitado; ni siquiera posee instintos. A partir de su reducido bagaje, esel niño irá adquiriendo normas de conducta debido al aprendizaje o al condicionamiento, y también gracias a su desarrollo motor.

En este elaborado proceso, que culminará en la maduración de la edad adulta, el ambiente social desempeña un destacado papel, y el período infantil tiene crucial importancia.

4.4. Cognitivismo

Es una teoría psicológica cuyo objetivo consiste en estudiar cómo la mente interpreta, procesa y almacena la información en la memoria. Se interesa por la forma en que la mente humana piensa y aprende. Esta corriente adquirió gran importancia a finales del siglo XX, ya que se produjo un frenazo en las teorías conductistas debido a la aparición de la corriente lingüística de N. Chomsky y, en psicología, el cognitivismo.

El cognitivismo engloba varias disciplinas, pero todas ellas orientadas al estudio de los procesos internos que conducen al aprendizaje. El principal representante fue **Jean Piaget** *(1896-1980)*. Seguramente influenciado por su formación de biólogo, concibió el conocimiento humano como una adaptación biológica de un organismo a un medio. Hizo hincapié en la interacción constante de los factores cognitivos internos de la persona con los factores ambientales en la construcción del conocimiento.

De esta manera, cuando un individuo se enfrenta a una situación, en particular a un problema matemático, intenta asimilar dicha situación a esquemas cognitivos existentes.

Es decir, intenta resolver tal problema mediante los conocimientos que ya posee y que se sitúan en esquemas conceptuales existentes. Como resultado de la asimilación, el esquema cognitivo existente se reconstruye o se expande para acomodar la situación.

Además, estableció que el pensamiento de todos los niños evoluciona a través de una secuencia ordenada de estadios o períodos por los que va pasando. Cada una de esas etapas está caracterizada por la adquisición de determinados rasgos y capacidades. A su vez, cada etapa incluye a las anteriores y se alcanza en torno a unas determinadas edades más o menos similares para todos.

Esas etapas que para él determinan el desarrollo evolutivo son las siguientes:

a) Período sensoriomotor (0-2 años).

b) Período preoperacional (2-7 años).

c) Período de las operaciones concretas (7-11 años).

d) Período de operaciones formales (11-15 años).

En el Anexo I he incluido una tabla detallada sobre cada período, especificando el tipo de conocimiento matemático que el niño va adquiriendo a cada edad.

Uno de los teóricos actuales con más influencia en la educación e incluido en esta corriente psicológica ha sido **Howard Gardner** *(1943)*. Éste en el año 1983 revolucionó la psicología con su *"Teoría de las Inteligencias Múltiples"*, elaborada a partir de una serie de reflexiones y preguntas que se fue haciendo a lo largo de varios años en el inicio de su vida académica.

En ella estableció la diferencia de 8 tipos diferentes de inteligencia que son las siguientes: *Inteligencia Lógico-Matemática, Inteligencia Lingüística, Inteligencia Espacial, Inteligencia Corporal-Kinestésica, Inteligencia Musical, Inteligencia Intrapersonal, Inteligencia Interpersonal e Inteligencia Naturalista* (ver Anexo II).

4.5. Escuela Constructivista

El constructivismo tiene como fin que el alumno construya su propio aprendizaje como resultado de la interacción de 3 factores: *cognitivos, sociales y afectivos del comportamiento.* En consecuencia, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción que el ser humano realiza con los esquemas que ya posee *(conocimientos previos)*, es decir, lo que ya construyó con su interacción con el medio.

Lev Vygotsky *(1896-1934)* dijo que el conocimiento era un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, siendo éste último algo cultural y social, y no solo físico. Además, propuso que el aprendizaje dependía de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) que era la distancia entre el nivel de desarrollo actual *(determinado por la resolución de problemas de forma autónoma)* y el nivel de desarrollo *(determinado por la resolución de problemas con ayuda de un adulto).*

Este constructivismo social que Vygotsky propone, establece que el ambiente de aprendizaje óptimo es aquel donde existe una interacción dinámica entre los instructores, los alumnos y las actividades que proveen oportunidades para los alumnos de crear su propio aprendizaje, gracias a la interacción con los otros.

Esta teoría, por lo tanto, enfatiza la importancia de la cultura y el contexto para el entendimiento de lo que está sucediendo en la sociedad y para construir conocimiento basado en este entendimiento.

En la escuela los niños iniciarán la construcción del conocimiento matemático a través de acciones concretas y efectivas sobre objetos reales y, probarán la validez o invalidez de sus procedimientos manipulando dichos objetos. Estas acciones le ayudarán a comprender la naturaleza de las cuestiones formuladas. Será también en este nivel donde comenzarán a anticipar resultados matemáticos relativos a situaciones que están ausentes.

Otro autor importante fue **Jerome Bruner** *(1915)* quien propuso la teoría del aprendizaje por medio del *descubrimiento* guiado. De esta manera, se pretende dar a los alumnos la oportunidad de involucrarse de forma activa y construir su propio aprendizaje a través de la acción directa.

Según él, el aprendizaje de conceptos matemáticos se debía introducir a partir de actividades simples, las cuales los alumnos pueden manipular para descubrir principios y soluciones matemáticas.

Expone que el aprendizaje no debe limitarse a una memorización mecánica de información o de procedimientos, sino que se debe conducir a los alumnos al desarrollo de su capacidad para resolver problemas y pensar sobre la situación a la que se deben enfrentar, yendo más allá de lo simplemente dado.

5.- EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En una clase de matemáticas *(contexto)* el proceso de enseñanza-aprendizaje que en ella ocurre se pueden identificar tres elementos claves junto con las relaciones que se establecen entre ellos: *el alumno, el contenido matemático* y *el maestro*. Esto es lo que se conoce como "**Triángulo Didáctico**" y consiste en que toda la acción educativa se basa en la interacción entre los contenidos de aprendizaje, el alumno *(sus prejuicios, sus valores, sus experiencias, sus antecedentes…)* y la figura fundamental del docente. Por tanto, los alumnos aprenden matemáticas por medio de las experiencias que los maestros les proporcionan, dentro de un contexto que suele ser la escuela.

Podemos ver la relación existente con el siguiente gráfico:

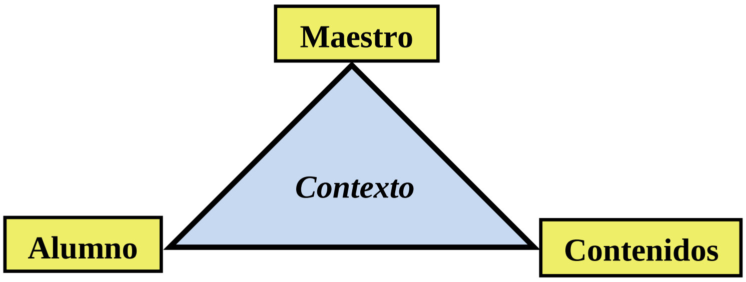


Figura 5.1. Triángulo Didáctico: elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El fin fundamental y a conseguir en la enseñanza de las matemáticas no es sólo que los niños aprendan a utilizar y a relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos, las unidades de medida, unas nociones de geometría y estadística y el razonamiento matemático; sino que, su principal finalidad es que puedan resolver problemas y aplicar los conceptos y las habilidades matemáticas adquiridas para desenvolverse adecuadamente en la vida cotidiana y en el mundo laboral.

Esto es lo que se define como **Competencia Matemática**, la cual deberán haber conseguido los alumnos al finalizar la etapa de educación básica obligatoria, tal y como se cita en el *DECRETO 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León*.

Asimismo, establece que la utilización de técnicas y herramientas matemáticas como escalas, tablas, representaciones gráficas, porcentajes, etc.; propicia, finalmente, el desarrollo de esta competencia matemática.

Además, en muchos centros escolares se emplean métodos para el aprendizaje de las matemáticas basados, en la memorización, repetición y ejercicio mecánico.

Esto se ha comprobado que no favorece globalmente la comprensión conceptual y la generalización del aprendizaje. Una posible causa de ello es el desconocimiento por parte de algunos maestros acerca del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Para ello es fundamental tener como base algunos aspectos teóricos que pueden proporcionar indicaciones metodológicas de gran valor para la práctica, que a continuación voy a nombrar en el apartado referente al marco teórico y antecedentes. De esta manera, los maestros deben conocer y comprender con profundidad las matemáticas que están enseñando y ser capaces de apoyarse en ese conocimiento en sus tareas docentes para conseguir el éxito y ser más eficaces.

Pero como ocurre en otras materias, en la enseñanza de las matemáticas no sólo es importante lo que se enseña. Cuando el maestro se enfrenta a esta tarea, debe tener claras las respuestas a estos interrogantes: *¿Qué enseñar? ¿A quién enseñar? ¿Cuándo enseñar? ¿Dónde enseñar?, ¿Con qué enseñar? y ¿Cómo enseñar?*

- **¿Qué enseñar?**

Se corresponde con aquellas metas didácticas particulares que se pretenden conseguir. Partiendo del hecho de que el conocimiento matemático es jerárquico y acumulativo, cualquier concepto nuevo se basa en otros ya adquiridos previamente.

Los elementos básicos del currículum del área de matemáticas en Educación Primaria se regulan mediante el actual *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria,* según el cual existen cinco grandes bloques:

1. *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.*
2. *Números.*
3. *Medida.*
4. *Geometría.*
5. *Estadística y probabilidad.*

Yo sólo voy a hacer referencia al segundo bloque, pues es el que está relacionado directamente con el título de mi trabajo de fin de grado (TFG). En cuanto a los números naturales se trabajan los inferiores a mil, los números ordinales hasta el décimo, su lectura y escritura, el valor de la posición de sus cifras, el cálculo mental, su recuento, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana.

Y, en lo referente a las operaciones, se emplean números naturales de hasta tres cifras para la adición y la sustracción, series ascendentes y descendentes de números naturales, descomposiciones de números, cálculo aproximado, estimación y redondeo del resultado y; resolución de problemas que impliquen la realización de cálculos, explicando el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.

- **¿A quién enseñar?**

Esta cuestión nos demuestra la heterogeneidad existente en las clases, pues cuando se enseñan las matemáticas de manera verbal, hay niños con nivel alto que se aburren, mientras que otros no comprenden la explicación.

Por lo tanto, habrá que buscar una metodología más acorde a cada realidad educativa, ya que el aprendizaje es un proceso individual que cada niño realiza a partir de situaciones de grupo. El objetivo que debemos pretender no es que todos avancen al unísono, sino que cada uno avance lo máximo posible. Esto lo podremos conseguir si tenemos en cuenta las necesidades educativas de cada uno de ellos, atendiendo a la diversidad que reina en las aulas, puesto que habrá dificultades de aprendizaje, déficits de atención, adaptaciones curriculares, discalculias…

- **¿Cuando enseñar?**

Ningún estudiante que vaya a aprender algo nuevo, inicia su aprendizaje desde cero o como una tabla rasa; sino que toda adquisición es construida sobre una estructura previa de conocimientos, empleando un estilo particular de aprendizaje, poniendo en marcha unas estrategias e inspirándose en motivaciones e intereses personales.

Existen dos momentos claves. Uno es el tiempo programado específicamente para tal fin, que según el Anexo I de la *ORDEN EDU/1045/2007, de 12 de junio, por la que se regula la implantación y el desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León*, establece que para el 1er curso de Educación Primaria será de 4 horas semanales y de 5 horas para el 2º curso del 1er ciclo.

Y, por otro lado, están las situaciones que surgen espontáneamente dentro del proceso de aprendizaje: como comprobar el número de niños que han acudido a clase, los que faltan, la edad que tienen, escribir la fecha en la pizarra, etc. Todas ellas son tan importantes o más que las que se transmiten en el *"tiempo específico para las matemáticas"*.

- **¿Dónde enseñar?**

En realidad no existe un espacio restringido de aprendizaje, como el aula ordinaria; sino que, cualquier situación puede ser propicia para aprender matemáticas.

Además, al igual que en el cuándo enseñar, aquí también se pueden adquirir conocimientos matemáticos en el patio del colegio, en excursiones, en salidas, en actividades llevadas a cabo en el colegio, etc.

- **¿Con qué enseñar?**

Esta es la pregunta clave de mi trabajo, ya que pretendo dar una visión práctica sobre el aprendizaje de los números naturales y de sus operaciones mediante material didáctico manipulativo. Para ello, la enseñanza ha de ser activa y no predominar únicamente la transmisión oral y/o escrita.

La selección de recursos para el desarrollo de la labor pedagógica debe de ser previa y acordemente escogida y apropiada para ese fin. No todo el material por el hecho de serlo, se considera educativo, didáctico o pedagógico. Me centraré más en el apartado 8 referente al material didáctico manipulativo.

- **¿Cómo enseñar?**

Se deberán emplear estrategias metodológicas adecuadas para desarrollar en el alumnado la adquisición, la interpretación y el proceso de la información que les queremos aportar; y finalmente, para que generalicen esos conocimientos. Existen diversos métodos de enseñanza. Entre los principales nos encontramos con:

- "<u>La enseñanza directa</u>"→ en la cual el docente desempeña un rol activo, explicando los contenidos a aprender o trabajar, los cuales están relacionados con los conocimientos previos del alumnado.

A continuación, los alumnos ponen en práctica ese nuevo contenido y el maestro les proporciona un feedback o retroalimentación sobre la manera en la que lo están desempeñando y les ayuda si así lo precisan. Suele ser el método más utilizado.

- "<u>Modelad</u>o"→ el maestro expresa verbalmente los diferentes pasos que emplea para ejecutar una tarea y el modo en el que se ha de hacer correctamente. De esta forma, sirve como modelo de actuación para el alumno, a quien facilita la comprensión del proceso y a quién puede aportar oralmente nuevas ideas acerca de esa ejecución.

- "Diálogos y discusiones"→ tanto el maestro como los alumnos participan en conversaciones sobre el contenido del aprendizaje, debatiendo aspectos tanto positivos como negativos.
- "Métodos interrogativos"→ consiste en enseñar al alumno una guía de interrogantes o preguntas que puedan ayudarle a tomar las decisiones oportunas cuando se enfrenta a una tarea de aprendizaje, empleando aquellos elementos que resultan más relevantes para su resolución. Está indicado para emplearse después del modelado.
- "Grupo de aprendizaje cooperativo"→ se basa en la realización conjunta de las tareas de aprendizaje por varios alumnos mediante pequeños grupos de trabajo, tomando como base la cooperación entre ambos. Así, se favorece el desarrollo de los procesos cognitivos mediante el debate, se toman decisiones conjuntas, etc.

Asimismo, existen varias estrategias metodológicas para la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, el autor **Bruner** estableció que para el aprendizaje de un mismo concepto es conveniente que se sigan "3 fases" que estimulan el razonamiento lógico-matemático. La 1ª es la -*fase manipulativa*- en la cual por medio de elementos materiales el niño toma contacto con el aprendizaje. A continuación, se pasaría a la 2ª -*fase visual o gráfica*- donde mediante elementos visuales *(dibujos)* los niños van interiorizando el contenido trabajado. Y, por último, en la 3ª -*fase abstracta o simbólica*-, ya no necesitan apoyo físico ni gráfico, pues son capaces de operar sobre signos abstractos y arbitrarios como son los números.

A medida que el conocimiento se va adquiriendo, las ayudas manipulativas y visuales se van reduciendo, empleando únicamente la fase última, en la cuál el niño va aprendiendo de manera razonada.

Pero, también es cierto, que no se deberá tener mucha prisa en el paso a la representación numérica; pues, lo más importante, es que el niño comprenda lo que está adquiriendo. Y, una vez que lo tiene conseguido, se podrá plantear los automatismos y las operaciones mentales. Aunque, lo último que se persigue es que lo aplique a su vida.

Otra estrategia metodológica son las "autoinstrucciones" que la autora **Meichenbaum** estableció en el año 1985. Esta técnica se desarrolló inicialmente para el tratamiento de los niños impulsivos e hiperactivos. Sin embargo, se ha demostrado que es muy eficaz para enseñar estrategias de autorregulación del aprendizaje.

Consiste en realizarse a sí mismos autoverbalizaciones sobre cómo resolver una tarea de forma autónoma, favoreciendo así la interiorización de los procesos mentales.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. En primer lugar, el adulto realiza una tarea delante del niño y a la vez se va hablando a sí mismo en voz alta sobre lo que está realizando.
2. Ahora es el niño quien realiza la misma tarea, mientras que el docente le está verbalizando los pasos de la tarea.
3. El siguiente paso es que el propio niño realiza la tarea y va diciendo en voz alta los pasos que va dando.
4. Finalmente, cuando ya está suficientemente entrenado, el niño en lugar de decir lo que va haciendo en voz alta, se habla a sí mismo en voz baja y, posteriormente, de manera interna, cuando ya es capaz de generar pensamientos que le sirven de guía.

Las verbalizaciones o autoinstrucciones hacen referencia a distintas fases en el comportamiento del alumno, llevadas a cabo mediante la respuesta a diversas preguntas:

- *Autointerrogación:* ¿Qué debo hacer?, ¿Y si lo hago de otro modo?, ¿Qué he entendido?, ¿Qué me preguntan?, ¿Qué datos tengo?...
- *Análisis de tareas:* ¿En qué debo centrar ahora mi atención?, ¿Cuál es el siguiente paso?, ¿Cómo tengo que hacerlo?...
- *Autocomprobación:* voy a repasar este paso porque no estoy muy seguro de haberlo hecho bien, ¿tiene lógica lo que me ha salido con lo preguntado? …
- *Y autorrefuerzo:* ¡Me está saliendo muy bien!, ¡Lo he logrado!... Y si no fuese así, deberán afrontar el error y comprobar en qué se han equivocado, revisándolo de nuevo: ¿En qué he fallado?, ¿Por qué no me ha salido?...

En el Anexo III incluyo una serie de viñetas en las cuales se puede comprobar el proceso que un niño debe seguir, aplicando las autoinstrucciones anteriormente explicadas.

6.- EL USO DE MATERIAL DIDÁCTICO

La historia del material didáctico es casi tan antigua como la propia enseñanza. **Jan Amós Comenius** (1592-1670), elaboró en el siglo XVI un manual generado con la intencionalidad de facilitar la transmisión de conocimientos, combinando el texto escrito con representaciones pictóricas.

En épocas históricas anteriores como en la Grecia Antigua, durante el Imperio Romano o a lo largo de la Edad Media, la enseñanza se apoyaba en las demostraciones y explicaciones orales ofrecidas por el maestro. La entrada, presencia y generalización de los textos impresos y otros materiales didácticos en la enseñanza fue un proceso lento y gradual.

El conocimiento matemático no puede obtenerse ni por mera transmisión verbal ni por la manipulación libre de la realidad, sino por la abstracción de significados a partir de una y otra. Este proceso constructivo se ve facilitado si utilizamos materiales concretos, que además de servir como soporte para el aprendizaje de los conceptos y habilidades, ejercen un papel motivador para el niño.

En el **Dictionary of Education** dirigido por Good se definen los materiales didácticos como:

> *"Recursos que presentan un cuerpo completo de información y que son autónomos más que suplementarios en el proceso de enseñanza-aprendizaje"*. (Dictionary of Education, 1973, p. 452).

Los recursos didácticos según el autor **Mattos** *(1947)* son:

> *"Los medios materiales de que se dispone para conducir el aprendizaje de los alumnos"*. (Mattos, 1963, p.3). (Moreno Herrero, I. (2004). *La utilización de medios y recursos didácticos en el aula.* Madrid: Facultad de Educación).

6.1. Clasificación

Existen dos posturas complementarias en relación a la utilización de los materiales. Por una parte, la que sostiene que el material debe de ser muy estructurado y; por otra, la que defiende la utilización de un material no estructurado y multivalente.

Ambos tipos de materiales son recursos didácticos útiles y el empleo de uno u otro dependerá de la situación educativa, del proceso evolutivo del niño, del momento de la adquisición del concepto y del propio maestro.

6.1.1. Material no estructurado: como vengo argumentando a lo largo del trabajo, el niño en su evolución va manipulado distintos objetos, muy útiles en su desarrollo cognitivo. Cuando el niño pasa al juego simbólico, los objetos que utiliza son representativos: *los coches, los animales, las muñecas…* aunque también otros no representativos como: *los bloques de construcciones*.

Por eso, el primer material utilizado para la enseñanza procede de sus propios juegos, utilizando juguetes representativos para contar, seriar, clasificar, como por ejemplo los coches. Partimos de ese material por ser de interés y significativo para el niño.

No obstante, el material de uso común también nos será válido, pues una misma actividad debe realizarse con materiales diversos para favorecer el proceso de generalización de conceptos. Además, la manipulación de diferentes objetos conlleva, a su vez, al conocimiento físico y social de los mismos.

6.1.2. Material estructurado: en una fase más abstracta se introducirá de modo progresivo un material más estructurado y que esté diseñado especialmente para la enseñanza de las matemáticas, como son los bloques multibase, el ábaco, las regletas de Cuisenaire, etc. Estos materiales no son figurativos y presuponen una mayor capacidad de abstracción, pero a su vez son previos al uso exclusivo de los signos numéricos.

Aunque cada tipo de material estructurado ha sido diseñado para favorecer la adquisición de determinados conceptos, la mayor parte de ellos podríamos decir que son multiuso, en la medida en que pueden utilizarse para varios conceptos y objetivos. Un material determinado no es tampoco privativo de una edad muy específica. El mismo material puede utilizarse de forma más o menos compleja en diferentes edades.

Los dos tipos de materiales, no estructurado y estructurado, puede decirse que son complementarios. No debemos olvidarnos de que el material sigue siendo un recurso auxiliar y que lo más importante es el maestro y; por tanto, la utilización creativa que éste haga de los materiales.

Además, según **Bruner** debe respetarse una cierta secuencia en el uso de los materiales y es la que a continuación detallo:

- Se comienza por material manipulativo cotidiano *(coches, muñecas, etc.)*; después si es posible utilizar un material manipulativo algo más abstracto *(taquitos de madera, bloques...)*, que suele ser más estructurado y menos familiar.
- A continuación, resulta interesante proporcionar láminas y dibujos, para que el niño se acostumbre a traducir sobre el papel y a reconocer en éste lo que antes efectuó con los objetos.

- El uso del lenguaje natural durante todo este proceso ayudará a que se produzca el paso al nivel simbólico de representación. Se añadiría, por último, el sistema notacional y el lenguaje propio de las matemáticas.

Esta secuencia gradual ya fue explicada como estrategia metodológica para la enseñanza de las matemáticas en el apartado 3 referente a cómo enseñar.

Por tanto, las matemáticas deben presentarse como algo de lo que se disfruta al mismo tiempo que se hace uso de ellas.

7.- SISTEMA DE NUMERACIÓN Y CÁLCULO

Los símbolos más conocidos son: *0, 1, 2, 3…* pero existían otros sistemas de numeración que emplean letras o dibujos. Algunos ejemplos pueden ser los siguientes.

Los *egipcios* hace 5.000 años ya tenían su propio sistema de numeración. Consistía en escribir los números en base de 10 utilizando los jeroglíficos. Tenían un símbolo diferente para la unidad, la decena, la centena, el millar, la decena de millar, la centena de millar y el millón. Se usaban tantos de cada uno como fuese necesario y se podían escribir indistintamente de izquierda a derecha, al revés o de arriba abajo. Es el siguiente:

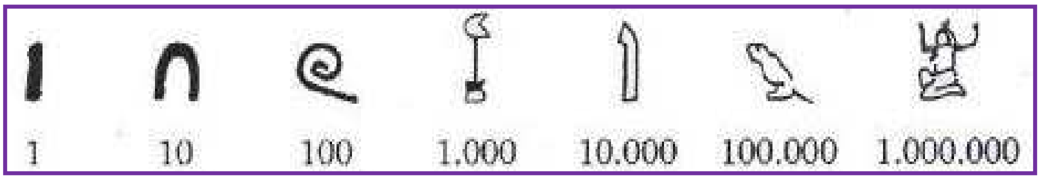


Figura 7.1. Sistema de numeración egipcio.

Para los *griegos* la numerología era algo místico. Hacia el año 600 a.C. se desarrolló el primer sistema de numeración griego. Consistía en un sistema de base decimal, en el que se usaban los símbolos tantas veces como fuese necesario. Se trata de un *sistema acrofónico*, ya que para representar el 5, 10, 100, 1.000 y 10.000 se utilizan el inicio de la palabra: *cinco (pente), diez (deka), cien (hekaton), mil (khilioi) y diez mil (murioi).* Su representación era la siguiente:

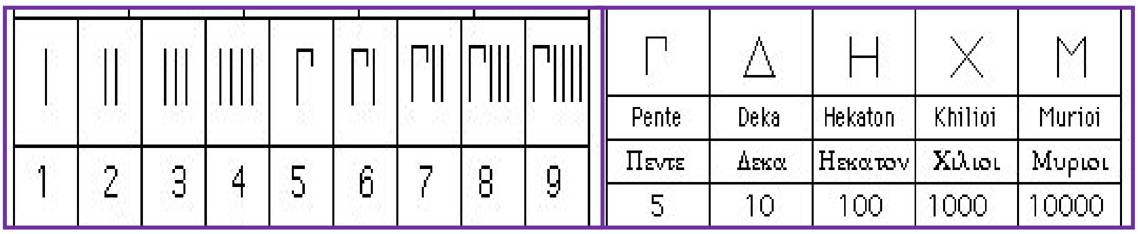
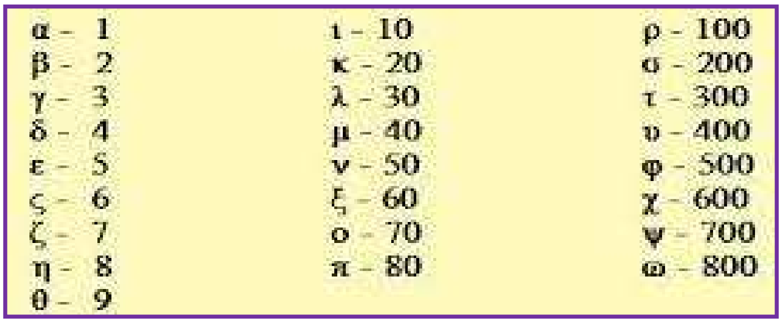


Figura 7.2. Sistema de numeración griego antiguo.

Más tarde, se remplazó por el jónico en el que se empleaban 24 letras del alfabeto griego junto con otros símbolos:



α - 1	ι - 10	ρ - 100
β - 2	κ - 20	σ - 200
γ - 3	λ - 30	τ - 300
δ - 4	μ - 40	υ - 400
ε - 5	ν - 50	φ - 500
ς - 6	ξ - 60	χ - 600
ζ - 7	ο - 70	ψ - 700
η - 8	π - 80	ω - 800
θ - 9		

Figura 7.3. Sistema de numeración griego jónico.

El sistema de numeración *romano* se desarrolló en la antigua Roma y se utilizó en todo su imperio. Como símbolos se usaban siete letras mayúsculas a las que se asignó un valor numérico. Tienen una serie de reglas de uso. Por ejemplo: se colocan a la izquierda las letras de mayor valor y a la derecha las de menor valor. Sólo las letras M, C, X, I se pueden repetir seguidas hasta tres veces. Las letras D, L, V se pueden colocar una sola vez. Sólo las letras I, X, C colocadas una vez a la izquierda de una mayor le resta su valor. El sistema de numeración romano es el siguiente:

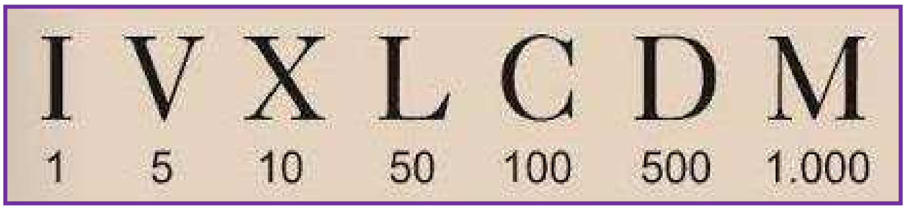


Figura 7.4. Sistema de numeración romano.

Los anteriores sistemas de numeración eran aditivos, es decir, van añadiendo los números a medida que el número aumenta de valor. Sin embargo, los *chinos* empleaban clásicamente un *método híbrido*, esto consiste en combinar el principio aditivo con el multiplicativo. Se escribe de arriba abajo y también de izquierda a derecha.

Su sistema de numeración era el siguiente:

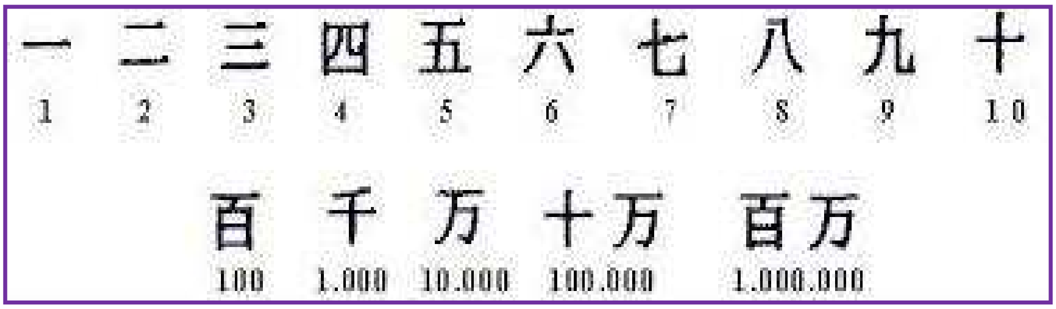


Figura 7.5. Sistema de numeración chino.

Otro tipo de sistema numérico era el *posicional* empleado en *Babilonia*. Los números se representaban con sólo dos símbolos: una cuña vertical **v** que representaba a la unidad y una cuña horizontal **<** para el número 10. Al ser representadas en tablas de arcilla, las cuñas resaltan y se representaban prismas:

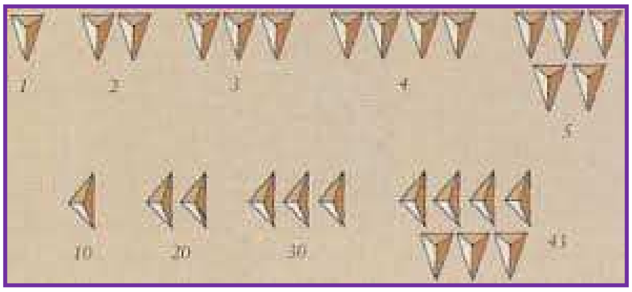


Figura 7.6. Sistema de numeración babilónico.

Finalmente, voy a hacer alusión al sistema numérico *maya*, el cual fue empleado para medir el tiempo y no para hacer cálculos matemáticos. Por tanto, los números mayas tienen que ver con los días, los meses y los años. Las cantidades son agrupadas de 20 en 20. La unidad se representa con un punto ● y el 5 con una raya horizontal ___ El número 10 se representa con dos rayas horizontales y así sucesivamente:

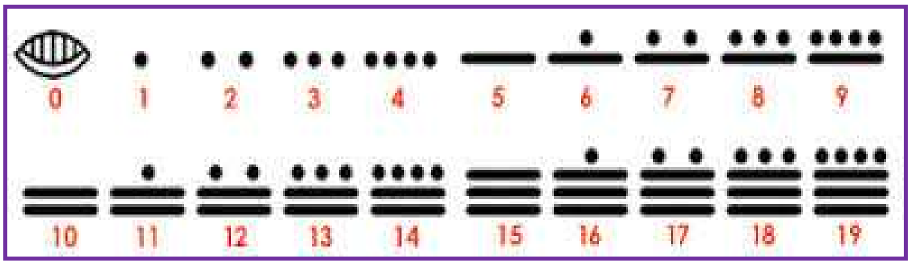


Figura 7.7. Sistema de numeración maya.

El origen de nuestro sistema de numeración lo encontramos en la India, quienes usaron por primera vez el cero. Sin embargo, fueron los árabes quienes lo introdujeron en Occidente denominándose sistema de numeración decimal o arábigo. Y a partir del siglo XIII el uso de las cifras actuales estuvo ampliamente difundido en Europa.

Es un sistema posicional de base 10 y los símbolos que lo definen son*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9*. Es un sistema posicional.

Presenta algunas irregularidades lingüísticas: once, doce, trece, catorce y quince *(en vez de dieciuno, diecidos, diecitrés, diecicuatro y diecicinco)*, quinientos en lugar de *cincocientos*…

La primera definición que se conserva del concepto de número se atribuye al filósofo griego **Tales de Mileto** *(625-547 a. C.)* en el Siglo VI a.C.

Helmholtz *(1821-1894)* considera a los números como:

"Una serie de signos arbitrarios elegidos, a los cuales les aplicamos un modo determinado de sucesión regular o de sucesión natural". (Helmholtz, 1887). (Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa).

Frege *(1848-1925)* dijo que los números son:

"Objetos perfectamente concretos que existen en un cierto mundo ideal, y su análisis". (Frege, 1888) (Godino, J., Font (2009) ¿Alguien sabe qué es el número? Revista Iberoamericana de Educación matemática. Pág 19.)

Por otro lado, la palabra cálculo proviene del latín *"calculus"*, que significa piedras. Este aspecto se formó desde que el hombre vio la necesidad de contar objetos y lo llevó a la creación de los sistemas de numeración que inicialmente se componían con la utilización de los dedos, otras partes del cuerpo, piedras, ramas, huesos...

Esas piedras iniciales ensartadas en tiras constituían el ábaco romano:

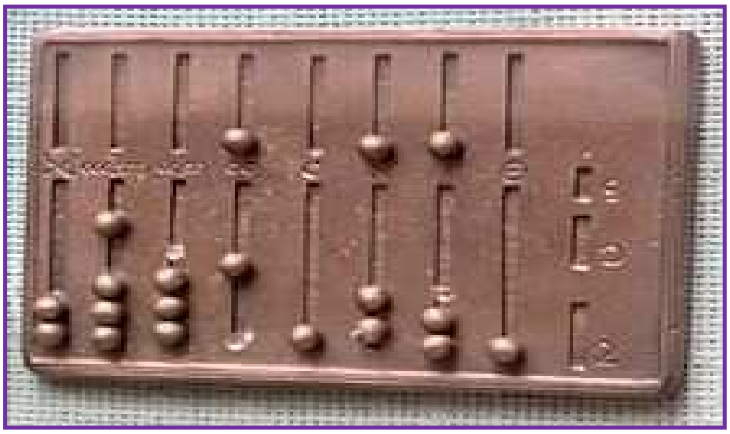


Figura 7.8. Ábaco romano.

El concepto de cálculo se define como *"el conjunto de técnicas y análisis que hay que realizar sobre unos datos (números, expresiones simbólicas, medidas, etc.) para obtener unos resultados que corresponden a preguntas preestablecidas"*. Usualmente, estas técnicas contienen unos procesos vinculados a las operaciones que se denominan *"algoritmos"*.

La obtención de estos resultados implica, por tanto, dos elementos previos importantes:

- El conocimiento de los elementos básicos: números, expresiones, etc.
- Y el dominio de su red de relaciones internas, es decir, las operaciones.

8.- EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS, DE LA SUMA Y DE LA RESTA. ACTIVIDADES CON MATERIAL MANIPULATIVO DIDÁCTICO PARA EL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Una de las primeras experiencias que el niño tiene con los números surge con la sucesión de términos o de palabras numéricas, que designan los números: *uno, dos, tres, cuatro…*

Se ha comprobado que alrededor de los 4 años dominan el tramo estable *"uno, dos, tres, cuatro, cinco"*; y un segundo tramo no estable *"cinco, ocho, nueve, once"*. A los 6 años, el niño debe dominar la sucesión de números hasta 100 correctamente.

El niño consigue aumentar este trato de conocimiento mediante su uso al *contar objetos*. A veces, resulta difícil distinguirlo de la simple secuencia numérica, y de hecho ambos se denominan con igual término: *"contar"*.

Existen dos formas diferentes al contar. Una es el *conteo intransitivo*, según el cual los niños van diciendo los números en el orden correcto. Y el otro tipo es el *conteo transitivo* que ya consiste en nombrar a cada objeto de un conjunto con un número distinto y sólo uno siguiendo un orden no rígido, pero que denote el resultado total.

La acción de contar se interioriza progresivamente al avanzar la edad. A los 3 años el niño toca normalmente los objetos mientras los va contando. También, los padres cuentan espontáneamente desde uno en adelante según suben los escalones, al bajar en un ascensor se van contando los pisos, observan a otros niños jugar al escondite...

Mayoritariamente, este recuento va unido al desarrollo de una secuencia rítmica que atrae extraordinariamente su atención. Por ejemplo, dar saltos al compás de las palmadas mientras se recita la secuencia numérica, es un juego con el que suelen disfrutar mucho.

Alrededor de los 5 años los niños ya no necesitan tocar esos objetos, sino simplemente señalarlos para contarlos. De esta manera, los niños van realizando recuentos con frecuencia, aunque de un modo asistemático y no siempre correcto. Para ello, pueden emplear alguna estrategia como: *trazar mentalmente el camino a seguir para contar los objetos, marcar o separar los objetos ya contados, etc.*

Además, deberemos lograr 5 principios en el aprendizaje correcto de la técnica de contar, y que suponen la comprensión de la misma y son:

1. Principio de abstracción → deberán saber que cualquier colección de objetos es un conjunto que se puede contar. Por eso en el aula se emplean: *mesas, sillas, libros, niños, pinturas, ventanas, etc.*
2. Principio del orden estable → las palabras que se emplean para contar tienen que tener un orden previo establecido. Por tanto, no se deberán juntar dos términos como *"unodos"*, o silabear excesivamente un término *"sie-te"*.

   Principio de biunivocidad o de correspondencia uno a uno → es decir, que cada objeto debe recibir un solo término o palabra numérica que ha de ser distinta y sólo una.
4. Principio de irrelevancia en el orden → esto quiere decir que el orden en el que se cuentan los objetos es indistinto. Sin embargo, es conveniente comprobar que al contar varias veces la misma colección, se obtiene el mismo resultado.
5. Principio de cardinalidad → el último término obtenido al contar todos los objetos será el que indique el cardinal de esa colección. Hay ----- objetos.

Asimismo, **Piaget** *(1896-1980)* estableció en los años 60 la existencia de cuatro etapas por las que pasan los niños en la concepción del número y son:

1. *Fase* → los niños aprenden el concepto de número como una síntesis de dos operaciones lógicas: la inclusión de clases *(clasificaciones)* y las relaciones aritméticas *(seriaciones)*, las cuales deben ser desarrolladas antes de cualquier planteamiento sobre el número. Opina que por medio de las seriaciones se consigue enseñar el aspecto ordinal del número, mientras que las clasificaciones darán lugar al aspecto cardinal. *(Esto lo explicaré más adelante).*

2. *Fase* → está basada en la percepción de las diversas disposiciones de un conjunto. La comparación entre dos conjuntos se corresponde a una etapa de cuantificadores, que son palabras que permiten la comparación entre cantidades sin el uso explícito del número como: *muchos/pocos, algunos/varios, más grande/más pequeño, igual que/lo mismo que, más que/menos que, nada/todo…*

3. *Fase* → el siguiente momento en la adquisición del concepto de número para Piaget es la coordinación de aspecto cardinal con el aspecto ordinal.

4. *Fase* → consiste en tratar diversas aplicaciones del número, en torno a la composición y descomposición de números; por tanto, de casos sencillos de suma y resta.

En la acción de contar, ya se consolidan las relaciones entre diferentes tipos de conocimiento. Se logra distinguir dos componentes esenciales en la elaboración del número que son la *clasificación* y la *seriación*, anteriormente nombradas.

Clasificar es una actividad prenumérica básica. La adquisición de este concepto en el niño se consigue al agrupar como elementos equivalentes aquellos que tengan unas determinadas características comunes; así como discriminar, respecto de los primeros, aquellos elementos que no tengan tales características.

Estas tareas de clasificación de los objetos del entorno, sumado a que ese conjunto determinado se puede además contar y se pueda asignar un cardinal al mismo, es un aspecto destacable del desarrollo lógico-matemático en los niños.

Entre los materiales escolares estructurados más habituales destacan los ***Bloques lógicos de Dienes*** de los que existen diferentes versiones comerciales:

Figura 8.1. Bloques lógicos de Dienes de madera.

La versión más común consiste en 48 piezas de plástico o de madera cada una de las cuales presenta cuatro atributos o características:

- La forma: *cuadrado, círculo, rectángulo y triángulo.*
- El tamaño: *uno grande y uno pequeño.*
- El color: *rojo, amarillo o azul.*
- El grosor: puede ser *grueso* o *delgado*.

Entre las tareas que usualmente se realizan se encuentran la de apreciar las características que tiene un objeto: *qué color, que forma, el tamaño que tiene, la categoría a la que pertenecen…* Para ello, se establecen diálogos entre el docente y los alumnos, en los cuales el profesor encauza la conversación, sin enunciar las diferencias o similitudes entre ellos. Luego, se pueden hacer por ejemplo, tareas de clasificación en dos clases: *rojo y no rojo,* o si son iguales en cuanto al color, pero de distintas forma…

Algunas actividades a modo de ejemplo que podemos emplear con los bloques lógicos pueden ser las siguientes:

- *"Juego de las familias":* esta actividad consiste en agrupar los bloques atendiendo a una serie de criterios dados. Primero, les mandaremos que junten en distintas familias de colores, poniendo cada forma geométrica igual una encima de la otra. Sería así:

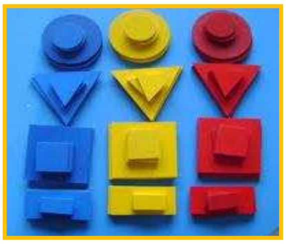


Figura 8.2. Bloques lógicos clasificados por color.

- *"Adivina el bloque oculto":* les mandaremos que adivinen los bloques que deben colocar en cada casilla en función de la forma, del color y del tamaño representado. Para ello, podemos utilizar estas plantillas:

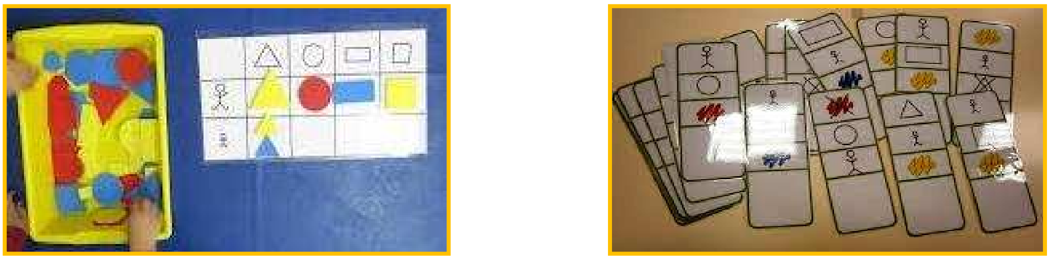


Figura 8.3. Material para clasificaciones de bloques lógicos.

El material que puede utilizarse para realizar tareas de clasificación es muy variado, y de hecho puede servir cualquier colección de objetos *(pinzas, botellas, fichas, juguetes, bolas…),* siendo considerado material no estructurado como por ejemplo:

Figura 8.4. Material no estructurado para clasificar.

Otros materiales manipulativos estructurados, a parte de los bloques lógicos de Dienes para trabajar actividades de clasificación pueden ser estos:

Figura 8.5. Material estructurado para clasificar.

Una segunda estructura conceptual importante antes de la consolidación del concepto de número es la **seriación**, es decir, la habilidad para colocar objetos ordenadamente de acuerdo con un criterio elegido, es un prerrequisito previo necesario.

En una 1ª fase la seriación puede limitarse a desarrollarse en un orden lineal y de acuerdo con un solo criterio. Más adelante, se podrán combinar dos o más criterios, desarrollando patrones complejos. Los materiales que se pueden utilizar para esta tarea pueden ser tanto los materiales no estructurados como los que sí lo son, mencionados en el apartado anterior *"clasificar"*. Empleando los más utilizados, los bloques lógicos, se plantean actividades diversas como las siguientes:

- *"Continúa el camino":* los niños deberán emplear los bloques lógicos adecuados para continuar las diferentes series propuestas. Al principio, se emplean dos consignas: *rojo-azul, amarillo-verde, etc.* Una variante puede ser emplear cualquier forma geométrica con esos colores y otra con una forma concreta:

Figura 8.6. Serie según el color.

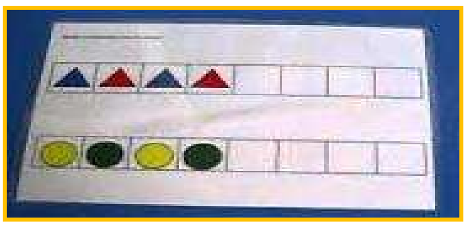


Figura 8.7. Serie según el color y forma.

Cuando dominen las anteriores series, se aumenta la dificultad. Por ejemplo, una serie podría ser: *cuadrado-círculo-triángulo*, otra serie: *rojo-azul-amarillo…*

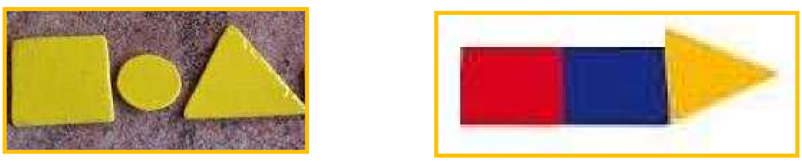


Figura 8.8. Serie según el color y forma.

A diferencia de la habilidad para contar, los niños aprenden a leer y a escribir números de forma más tardía y mediante un proceso de aprendizaje que suele comenzar en el colegio. Esto resulta un proceso difícil, pues tienen que copiar, memorizar, aprender y nombrar diferentes números con sus letras y con sus símbolos.

La habilidad para escribir las cifras no tiene nada que ver con la capacidad para comprender su valor y utilizarlas correctamente. La numeración y el cálculo matemático es una forma de comunicar información a otras personas, por ello es muy importante que la escritura de esos números sea comprensible para los demás.

La capacidad para escribir cifras es una destreza que supone una maduración del sistema motor y una coordinación entre la vista y la mano. Todos los esfuerzos que se realizan para escribir *(incluyendo las cifras)*, requieren dominar determinadas técnicas de preescritura para conseguir el éxito. Entre estas técnicas se encuentra la habilidad para coger los instrumentos de escritura, hacer la pinza, colocar el papel en una posición adecuada y copiar de un modelo. Todo ello, debe ser enseñado por parte del docente.

Para ello, primero podemos utilizar materiales estructurados manipulativos para trabajar la motricidad fina como actividades para *ensartar, coser, encajar, unir…*

Figura 8.9. Material de psicomotricidad fina.

Posteriormente, se emplearían materiales estructurados que configuren diferentes caminos o trayectos de manera *recta*, *curva*, *circular*, *oblicua*, *zig-zag*, *etc.:*

Figura 8.10. Material de psicomotricidad fina.

Más tarde, ya practicarán con trazos libres. Posteriormente, con copias de modelos sencillos que contengan trazos rectos y curvos simples. De esta manera, progresivamente, se van combinando y siendo más complejos.

A continuación, el aprendizaje se centra ya en la grafía propia de los números. Para ello, se practica antes la coordinación entre vista y mano y la memoria a corto plazo con la realización de actividades como: *hacer los números con plastilina, pintar con los dedos siguiendo un camino, recorrer con el dedo plantillas de números, hacer los números en arena, dibujar las cifras en el aire, hacer manualidades que recorran el trazado del número, asociar su grafía con un dibujo concreto que se parezca a su forma…:*

Figura 8.11. Actividades para el aprendizaje de los números.

Como se comprueba, las actividades posibles son ilimitadas y no es necesario hacer todas. La finalidad principal es reforzar al máximo la interiorización de los rasgos y trazos fundamentales de cada cifra, haciendo partícipe a todos los sentidos.

Finalizada esa anterior fase, ya se comienza a enseñar la escritura de las cifras, corrigiendo los malos hábitos que desde el principio surjan para evitar que se afiancen en un futuro. La tarea fundamental en este caso consiste en realizar caligrafía sobre cada signo. Se indicarán con pequeñas flechas el sentido del trazo y con puntos su inicio y su final. Esto, progresivamente, se irá quitando. Existen un montón de libros y de fichas para ello. Es importante saber que hasta los 7-8 años los conceptos de *izquierda-derecha* no están definitivamente establecidos; y por tanto, pueden aparecer inversiones de números normales hasta entonces, ya que la forma de los símbolos es arbitraria.

Otro paso en el aprendizaje de los números es reconocer la cantidad de objetos que hay en una colección de objetos, lo que se corresponde con **contar** el cardinal correspondiente del conjunto, respondiendo a la pregunta: *¿Cuántos hay?*

No está claro cómo los niños comienzan a utilizar los cardinales correctamente, ya que los usan también en situaciones familiares y sociales diversas.

Se ha comprobado que los números cardinales guardan relación con el tiempo, es decir, con la frecuencia en la que los hechos ocurren en el tiempo como por ejemplo: *palmadas rítmicas, saltos, golpes sobre un objeto, etc.*

De todos modos, es cierto que un momento crucial en el niño es cuando descubre el principio de cardinalidad *(explicado anteriormente)*, es decir, que el último término que se dice para contar una colección nos da el cardinal de dicho conjunto. De esta manera, es capaz de responder a la pregunta anterior de *¿Cuántos hay?* Y si no la domina lo comprobamos cuando al acabar de contarlos todos, le hacemos la pregunta y comienza a contar de nuevo.

Los niños deberán de poner en práctica los 5 principios en el aprendizaje correcto de la técnica de contar explicados anteriormente.

Las actividades a este respeto son múltiples e irán aumentando en complejidad conforme la maduración del niño lo vaya requiriendo. De la misma manera, existen un montón de materiales manipulativos didácticos.

Algunas actividades con material no estructurado consisten en asociar un número con su cantidad correspondiente, empleando para ello *legumbres, pinzas, diferentes dibujos representados, clips, palillos:*

Figura 8.12. Material no estructurado para el aprendizaje de los números.

Asimismo, algunos materiales estructurados existentes en el mercado se emplean para seguir el orden progresivo de los números como*: los encajables de madera*, para asociar el número con la cantidad como: *los puzles o las diversas barajas*, para asociar números iguales o asociarlos con su palabra escrita como: *los diferentes dominós…*

Algunos ejemplos son los siguientes:

Figura 8.13. Material estructurado para el aprendizaje de los números.

Aunque también hay un sinfín de juegos y actividades de refuerzo, afianzamiento del aprendizaje y como medio de diversión y motivación. Por ejemplo: *los libros de números, el miniarco, el bingo…*

Figura 8.14. Material complementario.

De todos ellos, yo me voy a centrar más especialmente en las regletas, en el ábaco y en los bloques multibase, planteando una serie de actividades.

Las ***regletas de Cuisenaire*** son un material didáctico que consta de 10 regletas de madera de distinto color, cada una de ellas asociada a una cantidad. Así, *la regleta blanca equivale a 1, la roja 2, verde claro 3, rosa 4, amarillo 5, verde oscuro 6, negro 7, marrón 8, azul 9 y naranja 10.* Se emplea para asociar la longitud con el color, establecer equivalencias, formar series de numeración, trabajar conceptos como mayor que/menor que/igual que, iniciarles en las actividades de cálculo, introducir la descomposición de números…

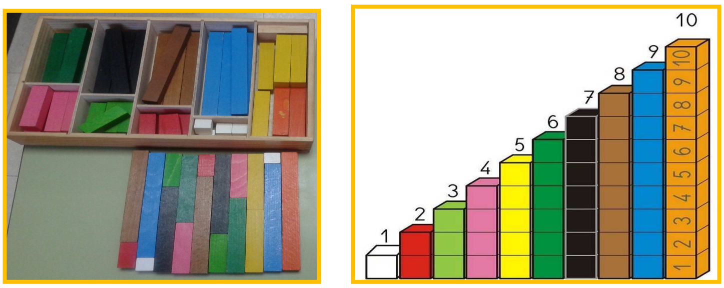


Figura 8.15. Regletas de Cuisenaire.

Después de dejarles que las manipulen libremente haciendo diferentes formas, letras y dibujos pasaremos a trabajar con ellas. Una actividad para familiarizarse con los colores es colocarlas en montones diferentes, cada uno de ellos de un color.

Posteriormente, para trabajar los tamaños les haremos preguntas: *¿Cuál es la más alta de todas? ¿Y la más baja? Enseñadme regletas que sean más bajas que la amarilla. Y más altas que la verde oscura.*

A continuación, les presentaré la actividad de *"la escalera"*. Los niños tendrán que colocar las regletas en primer lugar de menor a mayor, simulando una escalera para subir y luego colocarlas al lado de mayor a menor, como una escalera para bajar. Aprovechamos esta actividad para trabajar el número que se asocia a cada regleta explicándoselo a los niños: *Mirad la regleta blanca la vamos a llamar 1 y a la regleta roja 2.* Luego les preguntamos*: ¿Qué número creéis que será la regleta verde clarita? ¿Y la rosa? ¿Y que me decís de la más alta, la naranja? Así:*

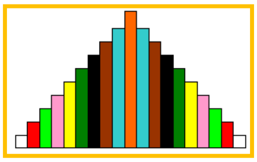


Figura 8.16. Actividad "la escalera".

Otra actividad consiste en identificar la regleta que se esconde en cada rectángulo blanco, colocando la correcta encima de cada uno de ellos y diciendo oralmente su correspondiente número:

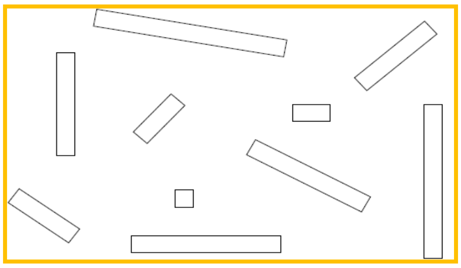


Figura 8.17. Identificar regletas.

A continuación, trabajamos el juego de las *"equivalencias"*. Para ello, deberán descubrir que al juntar dos o más regletas juntas obtienen otra superior de la misma longitud. De esta manera, nos iniciaremos en la composición y descomposición de los números:

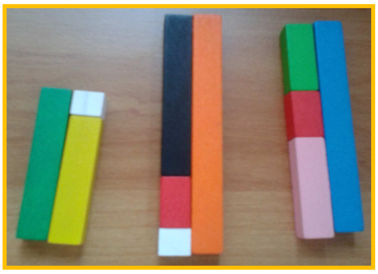


Figura 8.18. Actividad "equivalencias".

También, haremos series con dos o más términos:

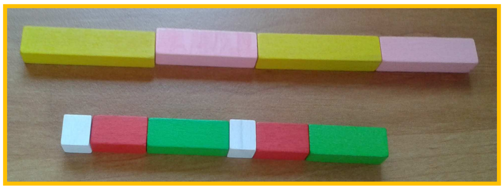


Figura 8.19. Series con regletas.

Otra actividad que planteo es la de *"correspondencias"*. Los alumnos asociarán cada regleta con el cardinal y con el conjunto de figuras que contenga ese número.

Se pueden emplear las barajas anteriormente nombradas en la parte referente a contar. A modo de ejemplo sería así:

Figura 8.20. Correspondencias con regletas.

El ***ábaco*** es uno de los recursos más antiguos en la didáctica de las matemáticas. A través de su utilización, el niño llega a comprender los sistemas de numeración y el cálculo de las operaciones con números naturales. Consta de un soporte de madera y una serie de varillas metálicas paralelas que pueden estar colocadas vertical u horizontalmente. En ellas van ensartadas una serie de bolas de colores. En todos los modelos cada varilla representa un orden de unidades: *unidades a la derecha del todo y normalmente en azul, las decenas en rojo, las centenas en verde, las unidades de mil en amarillo, las decenas de millar en blanco…* Algunos modelos son:

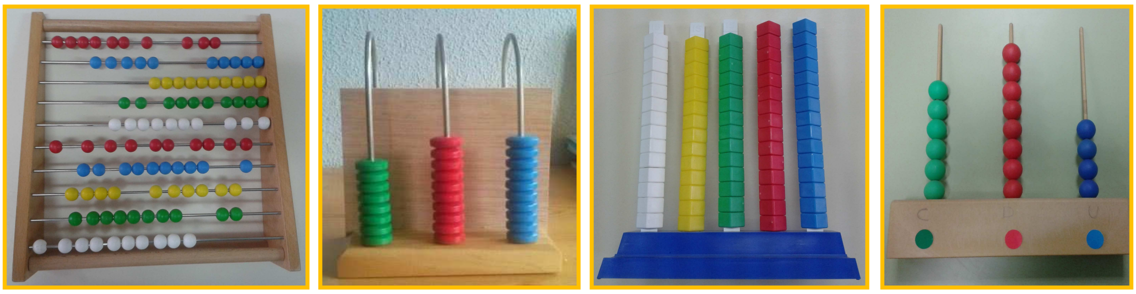


Figura 8.21. Diferentes ábacos.

Una primera actividad empleada para familiarizar a los niños con el ábaco es el - *"Banco de cambio de bolas"*. Cada niño tendrá un número determinado de bolas de colores. Un rincón de la clase será el *"banco"* y uno de los niños hará de banquero.

Mediante una tabla de cambios posibles que determinen entre todos previamente *(por ejemplo: una bola azul se puede cambiar por dos amarillas, dos verdes por una roja, etc.)*, los niños irán intercambiando con el banquero sus bolas de colores.

A partir del anterior juego, los niños pueden llegar a comprender la secuencia de unidades. Otra actividad sería *"Bolas traviesas"*. Cada niño comienza con 8 bolas azules que representarán en el ábaco. Luego les diremos *"Con esas 8 bolas azules haced montones de 3, cuando lo tengáis os voy a cambiar una bola mía roja por 3 azules vuestras, ahora representar las bolas rojas y azules que tenéis en el ábaco"*. Los niños representarán dos bolas rojas y dos azules. Así:

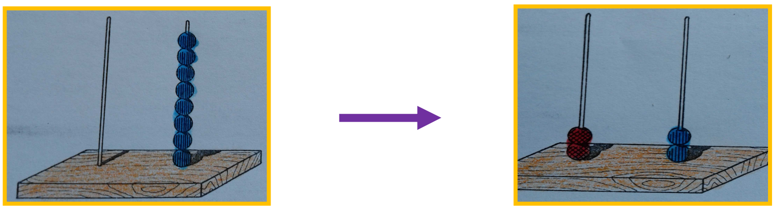


Figura 8.22. Representación en el ábaco de la actividad.

Otra actividad sería la de representar en el ábaco, las bolas que les representemos mediante gomets de colores en papel:

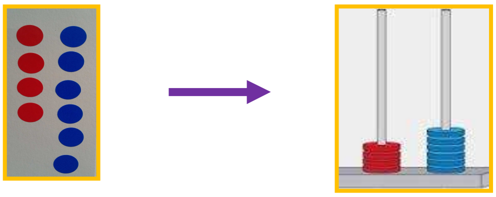


Figura 8.23. Representación en el ábaco de la actividad.

El siguiente paso se trabajaría con la actividad *"Vamos a hacer números"*. Ahora la consigna será que siempre 10 bolas azules se van a cambiar por una roja. Por lo tanto, les daremos 12 bolas azules. Cuando comprueben que es imposible incluir las 12 en la barra vertical del color azul, deberán aplicar el cambio aprendido. Luego, escribirán el número de bolas que tienen, debajo de cada color de bola. Sería así:

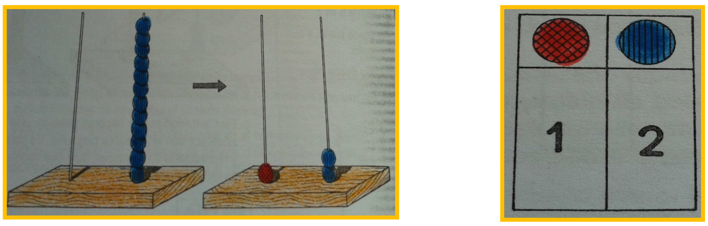


Figura 8.24. Representación en el ábaco de la actividad.

Para comparar dos números entre sí jugaremos a la actividad *"Es hora de comparar"*. Les pondremos dos ábacos delante representando el número 17 *(1 bola roja y 7 azules)* y el número 21 *(dos bolas rojas y 1 azul).* Les preguntaremos que cuál es mayor. Muchos de ellos nos dirán que es el 17 ya que tiene más bolas. Si esto ocurre les mandaremos que nos cambien cada bola roja por 10 azules y cuando lo tengan cuenten el total de bolas que tienen. Aquí se darán cuenta de que el mayor es 21.

Un material no estructurado manipulativo por ejemplo que se emplea para comparar dos números y emplear los signos matemáticos *(< menor que)* y *(> mayor que)* es el siguiente:

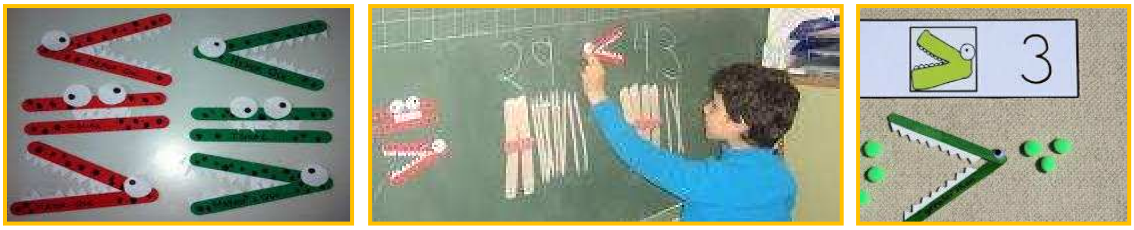


Figura 8.25. Material no estructurado para comparar números.

Para emplearlo se explica a los niños que estos cocodrilos hambrientos se van a comer al número mayor entre dos números. De esta manera, se colocará el cocodrilo con la boca abierta mirando hacia el lado en el que se encuentre el número mayor.

Y el otro material básico empleado en el aprendizaje de los números son los ***bloques multibase de Dienes***. Es un recurso matemático que consta de una serie de piezas de madera o de plástico que representan a las unidades con cubos (1x1x1 cm), a las decenas con barras alargadas *(compuestas por 10 cubos, 10x1x1),* a las centenas con placas cuadradas *(contienen 100 cubos, es decir, 10 barras alargadas, 10x10x1),* y los bloques que son cubos más grandes representando a las unidades de millar *(contienen 1.000 cubos, 100 barras y 10 placas, 10x10x10):*

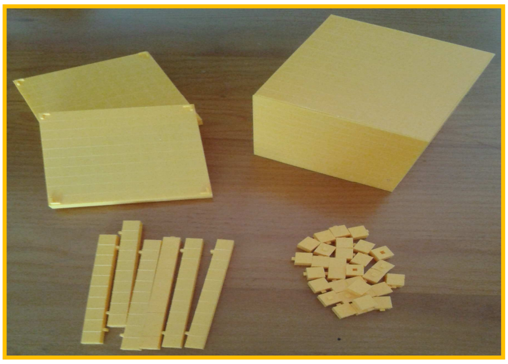


Figura 8.26. Bloques multibase de Dienes.

En primer lugar, les dejaremos que manipulen libremente los bloques lógicos, realizando formas creativas. A continuación, jugaremos a la actividad *"banco de bloques"*. Es parecida a la trabajada con el ábaco. Por parejas uno de ellos tiene que cambiar sus cubos que tiene con su compañero que solo tiene barras alargadas. De esta manera, van comprobando que por cada 10 cubos consiguen una barra. Cuando tengan soltura con ello, sólo tendrán barras y placas. Comprobarán la misma equivalencia, es decir, con 10 barras consiguen una placa.

Otra actividad consiste en emplear a la vez el ábaco para generalizar los conceptos de numeración aprendidos y aplicarlos a otros contextos. Para ello, les daremos por ejemplo 3 cubos y les explicamos que cada uno de ellos es una bola azul. A continuación, 2 barras alargadas y les diremos que cada barra equivale a una bola roja. Finalmente, les daremos una bola verde y les contaremos que equivale al 100, a la placa. De esta manera, deberán coger el número de bolas necesarias y representarlas en el ábaco. Comprendido este proceso, se hará a la inversa. Les pondremos ábacos con bolas y tendrán que establecer su equivalencia con los bloques multibase:

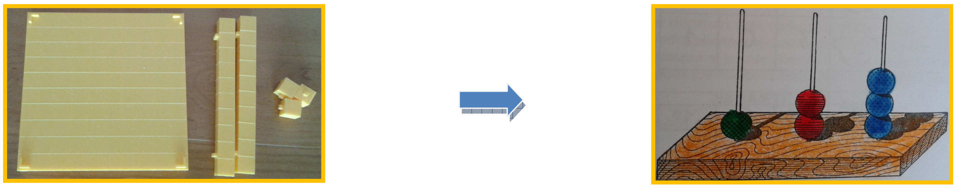


Figura 8.27. Actividad con los bloques y el ábaco.

La siguiente actividad planificada es la de representar con los bloques una serie de números, los cuales pueden estar en descomposición o no:

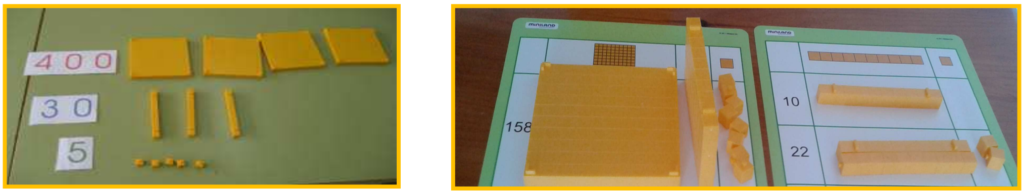


Figura 8.28. Números representados con los bloques.

La misma actividad se puede realizar a la inversa, es decir, tienen representaciones diversas con los bloques lógicos y tienen que poner al lado con números manipulativos el que pertenece al conjunto:

Figura 8.29. Números representados con números en goma eva.

Además, podemos trabajar los conceptos de mayor que (>) y menor que (<) por medio de estas fichas, en la cuales primero pondrán con los anteriores números su total representado y cuando lo tengan colocarán el signo > o < según cuál corresponda:

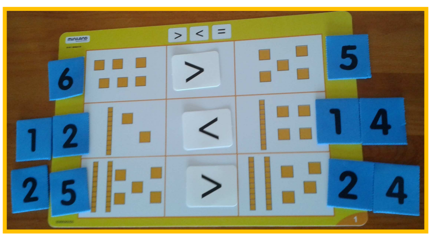


Figura 8.30. Conceptos > y < con bloques lógicos.

Aunque ya les hemos iniciado a los niños a utilizar los números de dos cifras, no hemos llevado a cabo un proceso de enseñanza-aprendizaje como tal. Para explicarlo, lo voy a desarrollar en *4 bloques* fundamentales y ordenados, es decir, que no se puede trabajar uno cualquiera sin haber trabajado antes el anterior. Estos bloques son los siguientes:

1. La comprensión del número de dos cifras *(qué es lo que vamos a aprender).*
2. La representación del número de dos cifras *(cómo se dibuja).*
3. Ordenar los números de dos cifras *(cómo podemos ordenar esos dibujos).*
4. E identificar por su nombre convencional los números de dos cifras *(decir el nombre del número).*

1. En primer lugar, en cuanto a la comprensión del número de dos cifras lo que se hace ante todo es trabajar con las regletas de Cuisenaire la cantidad de elementos blancos, es decir, de 1 elemento, que contiene cada una de ellas. Serían actividades como ésta:

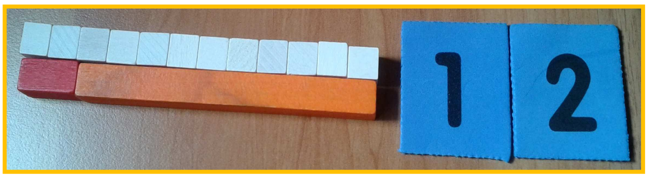


Figura 8.31. Equivalencia de regletas blancas.

A continuación, se les explica que cada cuadrado blanco equivale a un objeto por ejemplo una pintura. A cada elemento lo voy a llamar unidad. Más tarde, comienzan a hacer conjuntos o grupos de 10 elementos con diferentes objetos como: *pinturas*, *pinzas*, *coches*... Cuando lo tengan les explicaremos que 10 unidades azules forman 1 decena, es decir, diez, que siempre se viste de rojo. Además de los ábacos y los bloques multibase un material no estructurado muy empleado hoy en día en las clases son los tapones de plástico.

Cada uno de ellos se corresponde con 1 unidad y cuando reúnen 10 lo meten en una bolsa y escriben el número 10. Así irán formando diferentes decenas, correspondiéndose cada una de ellas con una bolsa:

Figura 8.32. Unidades y decenas representadas con tapones.

Esas bolsas llamadas decenas se colocan en una cesta grande y al lado otra más pequeña para las unidades que quedan sueltas y no llegan a formar decenas.

También, se les puede contar la historia siguiente. Había una vez un niño que tenía la habitación muy desordenada. Un mago apareció en ella y le ordenó recogerlo antes de que sus padres se enterasen. El niño le preguntó que no sabía cómo hacerlo. El mago le contestó lo siguiente: *"junta 10 elementos, a cada uno de los cuales llamarás unidades. Cuando lo tengas, con mi varita mágica lo convertiré en un cajón rojo al que llamaremos decena. Así, haremos con el resto de los objetos que tienes"*. Con este material manipulativo no estructurado, los niños irán colocando en filas verticales las unidades azules, y cuando tengan 10 el mago lo convertirá en una decena:

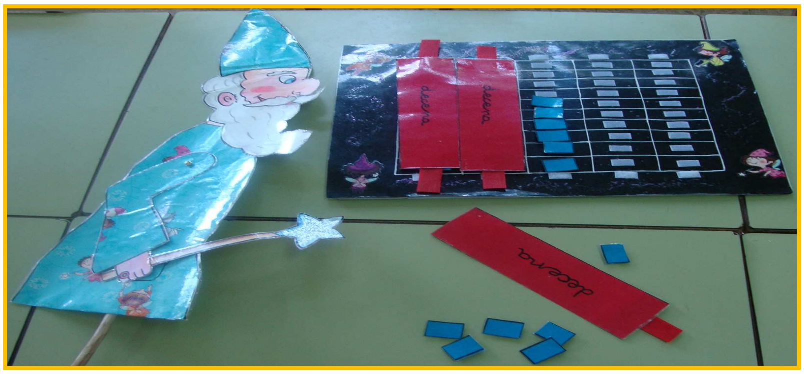


Figura 8.33. Unidades y decenas representadas con material no estructurado.

A continuación, les mandaremos que representen con regletas: *diez y diez y cinco.* Cuando lo tengan ellos verbalizarán el número que contiene por ejemplo: *25* → *diez y diez y cinco.* En ningún momento en esta actividad podemos decir veinticinco, por respetar el proceso de aprendizaje del número de dos cifras. Lo importante aquí es que diferencien entre el cardinal de elementos o unidades que contiene *(20)*, del cardinal de elementos manipulativos de decenas que tiene *(2).* Para que lo distingan bien se les dice: *dame cuatro dieces y tres.* De esta manera, el alumno oye *cuatro,* también *diez* y además *tres,* distinguiéndolo mejor.

2. En segundo lugar, se les va a enseñar cómo se representa matemáticamente el número de dos cifras, por medio de lo que ya conocen. Por ejemplo: se les pide a los niños que representen con regletas: *diez y diez y diez y cinco*. Luego, nosotros escribiremos en la pizarra el número 35 y les diremos *que "diez y diez y diez y cinco se dibuja así 35".* Para practicar podemos utilizar los anteriores tapones. De esta manera, los niños deben escribir el número de decenas que hay y el de unidades, con la consigna aprendida de los colores: *azul unidades y rojo decenas*.

O, por el contrario, deberán representar con material manipulativo las unidades y las decenas que se muestren:

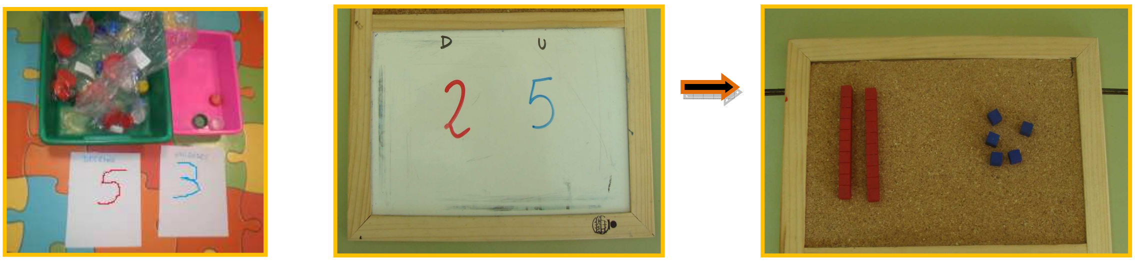


Figura 8.34. Actividad con unidades y decenas.

En estos ejercicios nos fijaremos si al aumentar o disminuir sólo las decenas o las unidades no cambia el otro dígito. Por ejemplo*: si tienen representados 25 y le sumo una decena más, la cifra que sólo cambia es el 2 por el 3, el 5 se queda tal y como está.*

3. En tercer lugar, los niños van a aprender a ordenar los números de dos cifras. Para ello, se utiliza una tabla de 100 casillas colocadas en columna y filas de 10. En ellas se van a colocar los números ordenados de menor a mayor y de izquierda a derecha. Así, se comprueba mejor que el número que está debajo del otro o a su derecha es mayor que él o si está encima y a la izquierda es menor.

La 1ª fila superior la completaremos nosotros con los números del 1 al 10. Posteriormente, ellos continuarán la 2ª representando el 10 y 1, el 10 y 2, etc. Así, hasta que completen hasta el número 100.

A partir de esa tabla construida se plantearán diferentes actividades para retener mejor el orden utilizado; así como, para descubrir propiedades que ayuden al cálculo mental. Por ejemplo: *tapar o quitar un número para que adivinen cuál es, quitar varias filas y señalar una casilla en blanco para que diga el número, a partir por ejemplo del 34 sumar 10, es decir, nombrar los números de su derecha…*

Figura 8.35. Actividad con números de madera.

4. Después de que el alumno ya ha comprendido, ha representado y ha ordenado los números de dos cifras, en cuarto lugar ya se pasa a enunciarlos como tal. Para ello, dado un número por ejemplo el 30 los niños nos dirán que representa *"diez y diez y diez"*. Luego les preguntaremos que cuántos dieces han pronunciado a lo que nos deberán responder que *"3 dieces"*. Es entonces cuando les enseñamos que a tres dieces se le dice TREINTA. Y así con el resto. El más difícil es el VEINTE, pues en los demás se puede observar una dicción lógica: *cuatro dices CUARENTA, cinco dieces CINCUENTA…* Lo mismo ocurre *con once, doce, trece, catorce y quince*. Los nombres los podemos trabajar con estas barajas de SM en las que aparece el número y su palabra, además de las bolsas *(decenas)* cada una de las cuales contiene 10 unidades:

Figura 8.36. Baraja de números de dos cifras

Respecto al aprendizaje de los números ordinales, es decir, aquellos que se emplean para comprobar la posición relativa de un objeto concreto dentro de un conjunto, se sabe que no se aprenden como una sucesión. Los primeros términos se aprenden de manera aislada *(1º, 2º, 3º y 4º)*, mientras que el resto se adquiere mediante el aprendizaje en el colegio. A los 6 años, son capaces de dominar hasta el 20º.

Algún material didáctico no estructurado pueden ser las fichas siguientes creadas para trabajar el orden sucesorio, colocando manipulativamente los números ordinales en su lugar correspondiente:

Figura 8.37. Material no estructurado para los números ordinales.

El trabajo con los números no sólo sirve para contar y mostrar el orden, sino que se pueden realizar diferentes acciones como: *agregar, juntar, quitar, separar, repartir, etc*. Pero no me voy a centrar en la resolución de problemas matemáticos.

También, entre objetos se pueden establecer relaciones como: *comparar, igualar, etc.* Todas esas acciones se corresponde con las operaciones numéricas: *suma, resta, multiplicación y división.* Yo, únicamente, me voy a centrar en la suma y en la resta.

Además, las operaciones aritméticas de adición y de sustracción se construyen inicialmente como un medio para evitar que los niños recurran a los recuentos posteriores en situaciones parcialmente cuantificadas.

El proceso de aprendizaje de las acciones de **sumar** y de **restar** se trabaja en simultaneidad con el proceso de adquisición del concepto de número. Aprender a operar significa saber transformar unos elementos en otros.

En esta tarea el niño puede memorizar **hechos numéricos** para enfrentarse a las tareas de adición y de sustracción como los siguientes:

1. *Ceros:* cuando se suma cero todo queda igual.
2. *Uno:* cuando se suma uno tenemos su número posterior y cuando se resta uno sería el número anterior a él.
3. *Conmutatividad:* da igual sumar 2 + 3 que 3 + 2 porque el resultado es el mismo.
4. *Buscando el diez:* se recurre a emplear la descomposición del número 10 *(7+3, 5+5, 9+1, 4+6…)* para operar más fácil. Además, si no se presenta tal cual en las sumas se recurre a sumar o restar algún número para llegar a esa descomposición: *7 + 4 = (7 + 3) + 1*
5. *Sumas dobles:* aprender las sumas de los números iguales (5+5, 3+3…) para facilitar las operaciones. Aquí también se puede recurrir a la anterior estrategia, por ejemplo al sumar 7 + 9, es posible resolver la situación hallando el doble de su número 7 + 9 *(calcular 8+8).*

Posteriormente, las relaciones implícitas entre los elementos del problema, nos llevan a la representación gráfica y simbólica como formas de abstracción de ese problema.

A la hora de representar las cantidades, ya hemos dicho que se pueden utilizar los dedos u otros materiales *(lo cual se corresponde con representaciones manipulativas)*, pero también se pueden emplear representaciones gráficas *(dibujos)* del número de elementos del problema: *5 manzanas*, *4 sacos*, *6 pinturas*, *etc.* Conseguida la 1ª fase manipulativa y la 2ª visual, ya se pasaría a la 3ª fase denominada abstracta.

En ella se emplea la abstracción mediante los números y los signos matemáticos *(fases propuestas por Bruner y explicadas en el apartado referente a ¿cómo enseñar?).*

Algunos posibles materiales no estructurados para trabajar manipulativamente las operaciones de sumar y de restar pueden ser los siguientes:

Figura 8.38. Material no estructurado para sumar y restar.

Y material estructurado manipulativo como el que a continuación muestro:

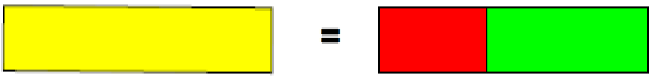
Figura 8.39. Material estructurado para sumar y restar.

De todos ellos, yo me voy a centrar más especialmente en las regletas, en el ábaco y en los bloques multibase, planteando una serie de actividades.

Con las ***regletas*** se comienza a enseñar el signo *"igual a"* poniendo dos regletas iguales y entre medias el signo =:

Figura 8.40. Actividad con regletas.

A continuación, les ponemos una regleta con su número correspondiente y dos regletas que equivalgan a la primera diciéndoles que lo que hacemos con ellas es *"juntar"*.



5 = 2 y 3

5 = 2 + 3

Figura 8.41. Actividad con regletas.

También, pondremos esas regletas una debajo de la otra:

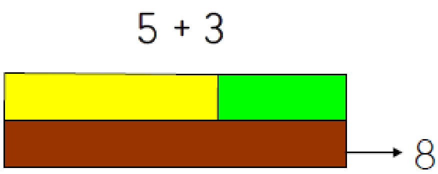


Figura 8.42. Actividad con regletas

Luego les mandaremos que hagan ellos estas dos actividades con las regletas, completando por ejemplo actividades como ésta:

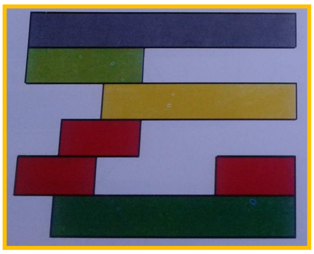


Figura 8.43. Actividad con regletas.

Además, les planteamos actividades de adición. Por ejemplo: tienes una regleta rosa y Nora te da una roja (2). Busca la regleta equivalente a esa adición, es decir, tendrían que localizar la verde oscura.

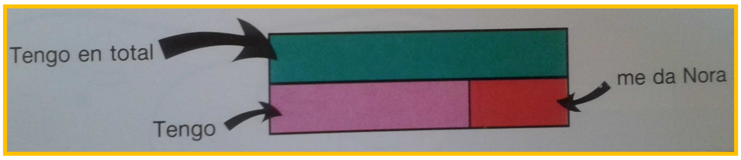


Figura 8.44. Actividad con regletas.

Otro ejemplo: *Tengo 8 cromos y se me pierden 3. ¿Cuántos cromos me quedan?:*

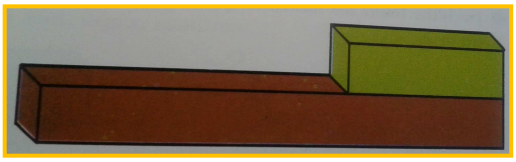


Figura 8.45. Actividad con regletas.

Podemos emplear las restas y sumas en vertical con regletas y con números haciendo actividades como las siguientes:

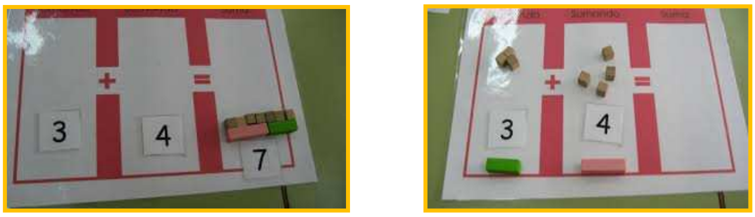


Figura 8.46. Actividad con regletas.

También, podemos realizar con regletas la *descomposición del 10:*

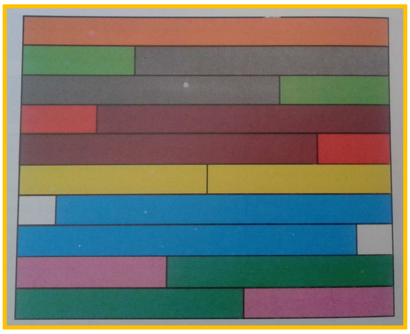


Figura 8.47. Descomposición del número 10 con regletas.

Además, aprenderán con las regletas que a un número menor no se le puede quitar uno mayor a él. Por ejemplo les plantearemos esta situación: *si tienes una regleta roja (2) le puedes quitar una regleta rosa (4)?:*

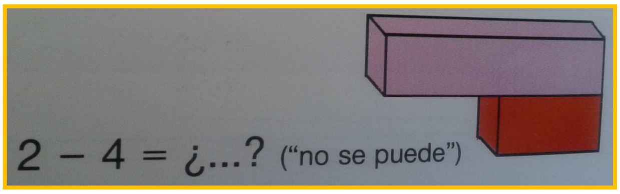


Figura 8.48. Actividad con regletas.

Una actividad más es la de comprobar que 10 – 6 es = que restar 10 – 4. También, que si sumas 4 + 6 te da el mismo resultado que 6 + 4. Esto lo comprobarán con las siguientes regletas:

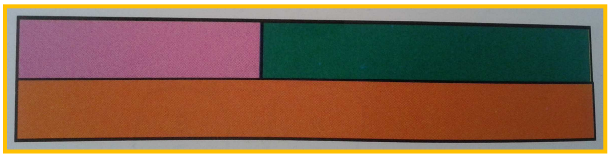


Figura 8.49. Actividad con regletas.

Asimismo, podemos trabajar las relaciones *"más que"*, *"menos que"*, *"igual a"*. Comprobarán que un número es menor que otro si es más bajo y al revés. De la misma manera, verán que una regleta es igual a otras:

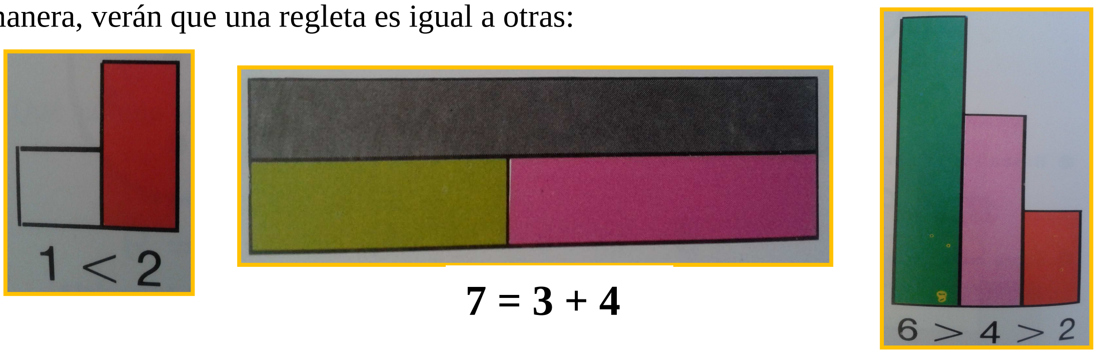


Figura 8.50. Actividades con regletas.

Con el ***ábaco*** horizontal se puede colocar el primer sumando en una fila (1) el segundo sumando en la otra fila (2) y el resultado en la inferior a ellas, es decir, las bolas del primer sumando y las del segundo sumando juntas.

Figura 8.51. Sumas con el ábaco.

Otra actividad sería darles estos números: 43 + 35 y lo deben representar en el ábaco. Primero, colocarán el primer número y a él le irán incluyendo las unidades y las decenas del siguiente. Podemos emplear pinzas para separar un sumando y otro y que vean mejor los distintos sumandos. Cuando lo tengan escribirán el número que han obtenido:

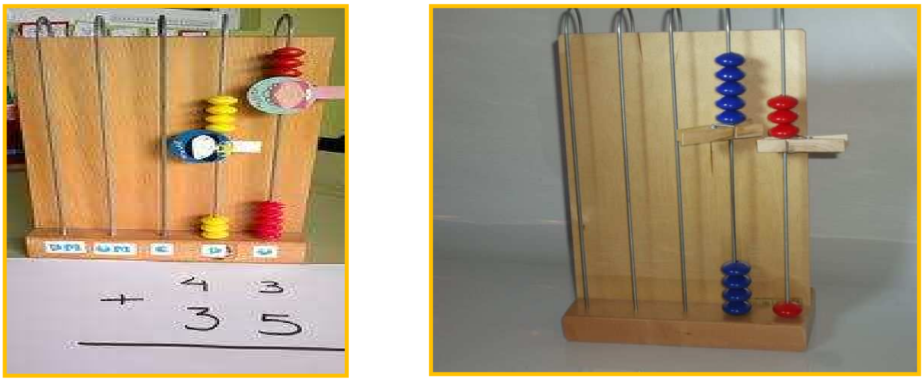


Figura 8.52. Sumas con el ábaco.

Para restar con el ábaco los principios metodológicos son iguales que en la suma, pero ahora el proceso será a la inversa. En la resta 43 – 11, representarían el número 43 y a ese le quitarían una bola azul *(unidad)* y una bola roja *(decena):*

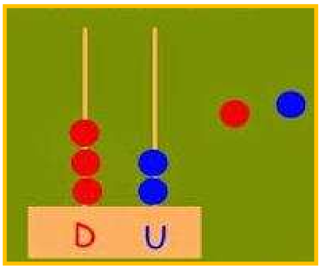


Figura 8.53. Restas con el ábaco.

Y finalmente, con los ***bloques multibase*** podemos hacer las siguientes actividades, entre otras.

Por ejemplo dadas las siguientes fichas los niños deberán colocar el número de los dos sumandos con los bloques multibase, poniendo cada cantidad en su lugar correspondiente. Luego lo sumarán y el total lo representarán mediante los números manipulativos:

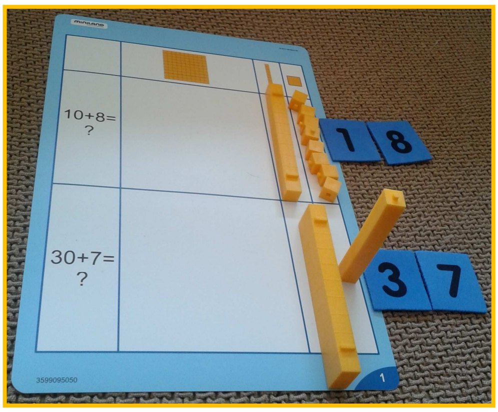


Figura 8.54. Sumas con los bloques multibase.

Esta misma actividad se puede emplear con las restas:

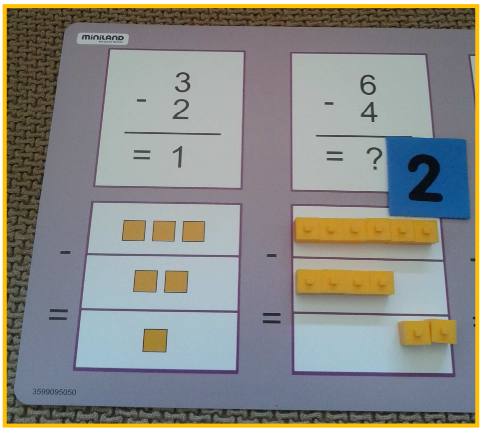


Figura 8.55. Restas con los bloques multibase.

También podemos sumar con los bloques ya representados, de manera que primero tengan que adivinar cuál es el número que representa y luego sumar o restar el siguiente:

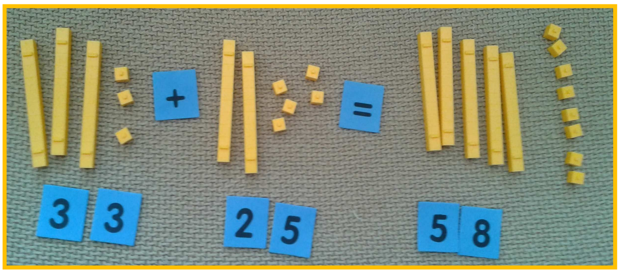


Figura 8.56. Sumas con los bloques multibase.

Y restar:

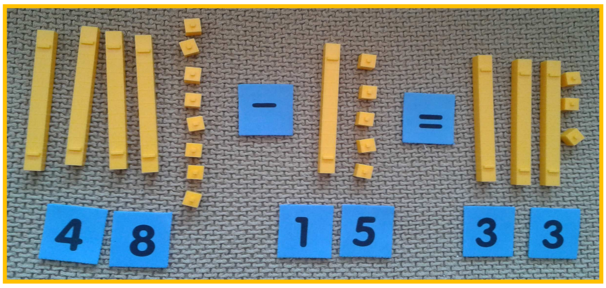


Figura 8.57. Restas con los bloques multibase.

Asimismo, otra actividad será la de adivinar en una suma cuál es el sumando que falta para llegar a la solución. Para ello, deberán comprobar cuánto tienen que colocar para llegar hasta el 67:

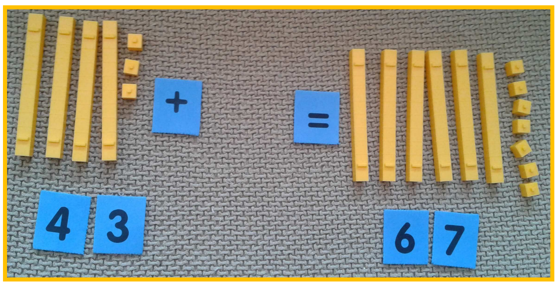


Figura 8.58. Sumas con los bloques multibase.

Y en las restas sería quitando al primer número una serie de bloques para que nos dé el resultado final:

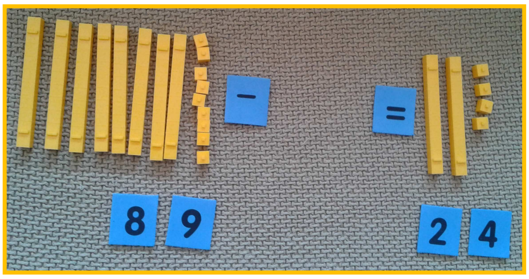


Figura 8.59. Restas con los bloques multibase.

Para la descomposición de números se pueden emplear estos materiales no estructurados:

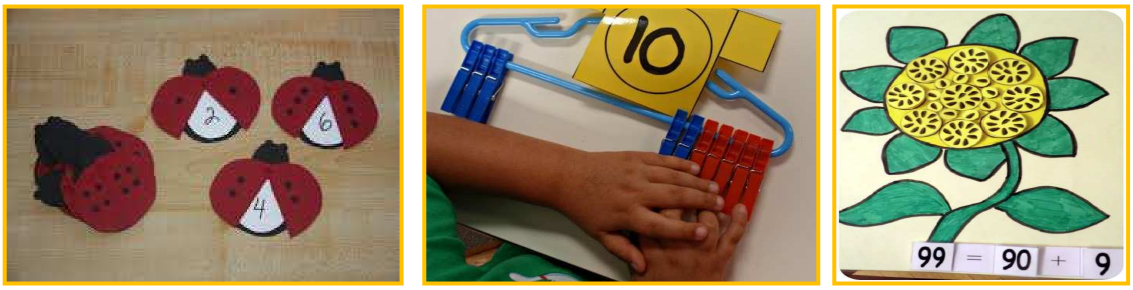


Figura 8.60. Material no estructurado para la descomposición de números.

En ellos se representan mediante puntos *(en las mariquitas)*, pinzas, o pipas de girasol los sumandos que originan el resultado total o suma. Una vez que los tenemos representados, también los podemos utilizar para restar. Por ejemplo en la actividad con la percha 10 – 3 = 7 *(las pinzas de la derecha).*

Además, podemos emplear el siguiente material en el que ya no tienen la representación visual de las cantidades, sino que ahora ellos mismos deberán escribir o la suma y/o la resta que origina ese total. Para ello lo escribirán en depresores linguales de madera que colocarán en los botes acordes, en tiras de cartulina o en pinzas:

Figura 8.61. Material no estructurado para la descomposición de números.

Llegados a este punto se pasaría al cálculo escrito *(algoritmos de cálculo)*, es decir, la secuencia de pasos para conseguir un objetivo. Debemos pretender llegar a una mecanización de los procedimientos de cálculo, porque esto supondrá que posean una velocidad a la hora de resolver los problemas matemáticos. Pero esto deberá ser mediante una mecanización comprensiva y no meramente mecánica.

Los primeros pasos en el cálculo se corresponden con la comprensión de las operaciones que deben realizar. Una vez diferenciado entre lo que es sumar *(juntar, ganar…)* y restar *(perder, romper, regalar…)*, ya deberán saber colocar el número mayor arriba y el número mayor abajo, de tal manera que coincidan las unidades con las unidades y las decenas con las decenas.

Una ayuda para que lo visualicen mejor, ya que al principio les suele costar, es que repasen las unidades de azul y las decenas de rojo. Además, podemos emplear este marial manipulativo estructurado como previo al trabajo escrito:

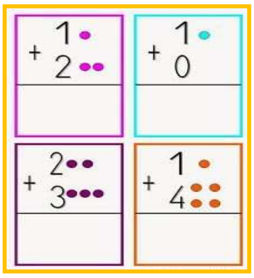



Figura 8.62. Material estructurado previo al cálculo escrito.

Cuando el número es de dos cifras insistiremos mucho en que la primera suma o resta a realizar debe empezar por la derecha, es decir, siempre por las unidades. Hay muchos niños que lo adquieren mal desde el principio y empiezan por las decenas, resultando más difícil el aprendizaje posterior con las llevadas. Podemos emplear el siguiente material:

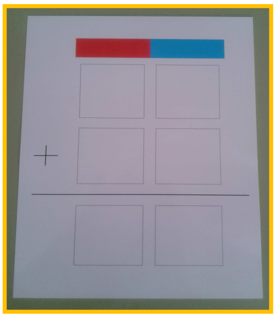



Figura 8.63. Material estructurado previo al cálculo escrito.

Cuando el niño domina el valor posicional de las cifras surge una nueva estrategia en la resolución de aquellas sumas cuyo total llega o excede a la decena. Esta estrategia es la llamada *"compensación"*.

La utilización de la decena es más sencilla cuando uno de los sumandos es 9. Por ejemplo, ante la suma *9 + 3*, la estrategia consiste en trasladar mentalmente la cantidad del sumando 3 que se necesita para que el sumando 9 se convierta en 10. En este caso, sería cogerle 1 a ese 3 para completar con el sumando 9 la decena. Lo restado de uno se le añadiría al otro: ***9 + 3 → (9 + 1) + 2 → 10 + 2 = 12***

Además, otra estrategia que se utiliza es la del *doble más o menos uno* según corresponda. Así por ejemplo, en la suma: ***5 + 7 → (5 + 5) + 2 ó (7 + 7) - 2***

El descubrimiento de esta estrategia se puede favorecer a través de materiales didácticos como el ábaco vertical o el plano. Por ejemplo, en la suma: *9 + 6*, el niño representaría en primer lugar el sumando mayor (9) colocando 9 unidades azules.

A continuación, al ir a colocar el segundo sumando (6) se da cuenta de que no puede poner otros 6 más. A partir de entonces, coloca las unidades del segundo sumando que le faltan para llegar al 10 (es decir, 1) y cuando las tenga, las cambia por una decena, la cual coloca en el ábaco. A continuación, coloca las unidades restantes del segundo sumando (5). Cuando esté hecho, representará el número formado con el material manipulativo numérico de goma eva:

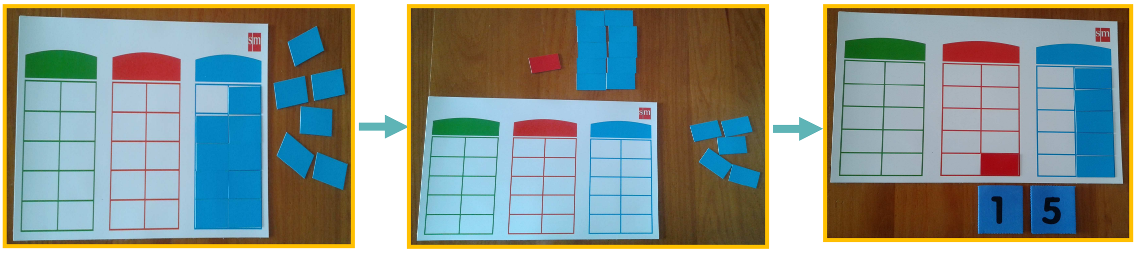


Figura 8.64. Sumas con llevada con el ábaco plano.

Con las regletas de Cuisenaire se trabajará de manera similar. Ante una suma por ejemplo: *8 + 3* ó *9 + 4* el alumno cogerá las regletas que representen esos colores y las colocará en vertical. A continuación, colocará la regleta naranja (10) y otra regleta que falte para igualar a la suma de su lado. Pueden colocar a mayores el número formado:

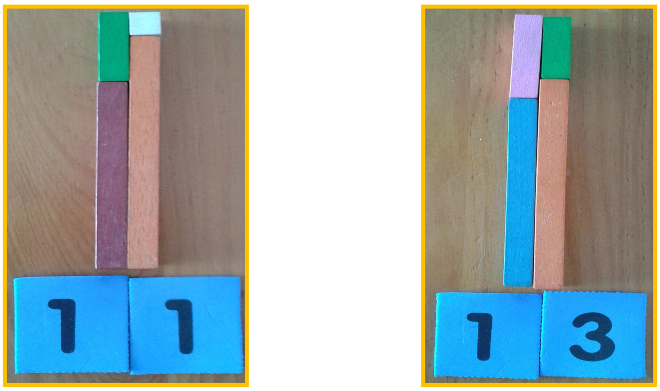


Figura 8.65. Sumas con llevada con las regletas de Cuisenaire.

Finalmente, con los bloques multibase también podemos hacer las anteriores sumas, de manera que cuando tengan 10 cubos (en el 7 se añaden 3 del segundo sumando) lo cambiarán por una barra vertical. De esta manera, la suma *7 + 6* sería así:

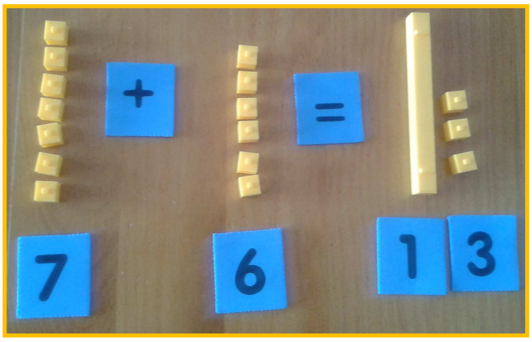


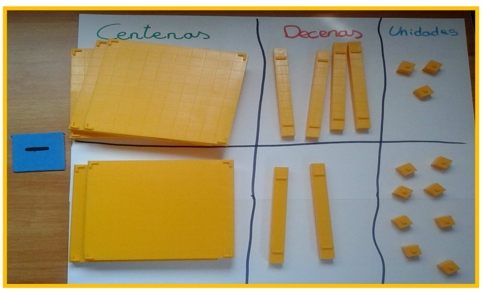
Figura 8.66. Sumas con llevada con los bloques multibase.

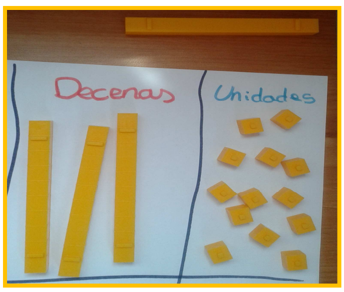
Por otro lado, la relación entre los hechos numéricos para la resta resulta más difícil a los niños que la suma, por la mayor dificultad de la operación en sí y las estrategias que deben ser empleadas.

Para restar llevando podemos emplear los bloques multibase en la siguiente actividad. Para ello, si a un alumno le planteamos la resta: *343 – 228* el niño deberá representar en primer lugar el minuendo y debajo el sustraendo con los bloques multibase. Una vez que lo tenga, deberá quitar del primer número (343) la cantidad de cubos, barras y placas del segundo número (228). Sin embargo, se dará cuenta de que si sólo tiene 3 cubos en las unidades, no puede quitarle 8.

A continuación, se debería dar cuenta del siguiente paso que debe realizar o sino le ayudaremos ya que es la primera vez que lo realiza. Por lo tanto, deberá coger una barra lateral de las decenas y cambiarlo por 10 cubos y juntarlo con los otros 3 para tener en total 13 cubos.

Cuando ya los tenga apartará los ocho que tiene abajo en el sustraendo quedándole 5 cubos. Posteriormente, quitará dos barras laterales (quedando 1) y dos barras verticales (quedando 1 también). Esta cantidad de bloques multibase es la diferencia de la resta, es decir, 115. La representación del sustraendo sólo le servirá para ver la cantidad de bloques que debe quitar. Esto se entiende mejor con las fotografías:





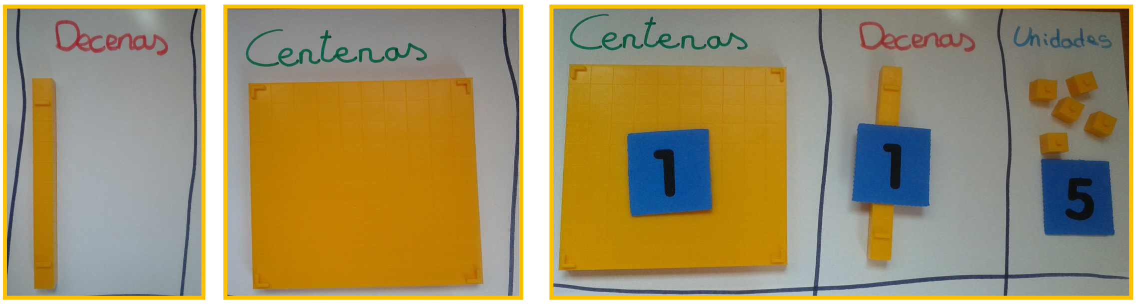


Figura 8.67. Restas con llevada con los bloques multibase.

Con el ábaco plano sería una actividad muy parecida, ya que deberán cambiar una decena por 10 unidades azules y sumárselas a las que ya había (en este caso es 0). Cuando lo tengan, quitarán en él las unidades que hay en el sustraendo (5).

Por ejemplo, en la resta: *20 – 5* en primer lugar representan 2 decenas y ninguna unidad. Al ir a quitar 5 unidades (sustraendo) se darán cuenta de que no tienen. Por lo tanto, quitarán una decena y lo cambiarán por 10 unidades y, una vez que lo tengan, quitarán de él 5. La diferencia quedaría representada en el ábaco, 15 (1 decena y 5 unidades):

Figura 8.68. Restas con llevada con el ábaco plano.

En las restas con llevadas con las regletas, por ejemplo ante la operación 15 – 8, los niños deberán formar en primer lugar el número 15 con las regletas *(la regleta naranja 10 más la regleta amarilla 5).* Como le tienen que quitar 8 cogerían esa regleta *(color marrón)* y la pondrán debajo de las anteriores. Una vez que lo tengan deberán buscar otra que represente la parte que le falta al 8 para completar a la anterior de 15, es decir, la negra *(7)*. Por lo tanto, ya podrán escribir la diferencia de la resta en el papel.

Figura 8.69. Restas con llevada con las regletas.

9.- CONCLUSIÓN PERSONAL

La realización de este trabajo me ha permitido conocer más en profundidad, tanto la parte teórica, como concretamente el aspecto práctico, del proceso de enseñanza-aprendizaje del sistema numérico y de las operaciones básicas de sumar y de restar, fundamental dentro de mi labor como docente.

Además, me he dado cuenta de la poca formación práctica que recibí en su día en la diplomatura de magisterio de educación especial sobre esta área de matemáticas, uno de los aspectos por los que me ha llevado a la elección en parte de este tema.

Gracias a la investigación bibliográfica y material del trabajo, he aprendido todo el transcurso correcto que se debe seguir para la enseñanza y aprendizaje de este conocimiento matemático en el que yo me he centrado *(numeración, adición y sustracción).*

Muchas veces, ese proceso es parcialmente ignorado por parte de los maestros o se desconoce que el método que se sigue sea el correcto, lo que hace que no se emplee adecuadamente su proceso óptimo de aprendizaje o que se cargue a los niños con la culpa de no entender o aprender acordemente.

Ante tal situación habrá que tratar de poner todos los medios posibles para solucionarlo, haciéndonos además una evaluación temporal acerca de nuestra propia intervención educativa, para comprobar si los materiales empleados son acordes, se ha seguido un tiempo oportuno para la adquisición del aprendizaje, se ha profundizado en los aspectos que resultan más dificultosos de comprender, se han empleado las ayudas ordinarias o específicas necesarias, se ha tenido en cuenta las necesidades educativas o las dificultades de los alumnos, etc.

Asimismo, este trabajo me ha facilitado el descubrimiento de muchos materiales, por un lado no estructurados que puedo confeccionar fácilmente y por otro lado estructurados, que me pueden servir de gran ayuda para ser utilizados ahora con mis alumnos.

Sin embargo, el objetivo primordial que debemos tratar a la hora de enseñar cualquier aprendizaje, es que los niños lo extrapolen a situaciones normales de su vida diaria, es decir, que lo apliquen habitualmente en el día a día.

Finalizo este trabajo realizado, citando una serie de frases textuales que el célebre matemático José Antonio Fernández Bravo nombró en un seminario formativo para maestros al que he acudido recientemente.

"El mejor material para aprender Matemáticas es la mente del niño".

"Tengo que ser consciente de que cuando miro al otro, también el otro me mira a mí. No puedo considerar sólo la intención de mi mirada. Hay que enseñar desde el cerebro del que aprende".

"El que aprende tiene que generar pensamientos, la matemática están en las ideas que genera. Por ello, es esencial enseñar desde el cerebro del que aprende y no desde el que enseña".

"Es la suma la que genera el número y no el número, la que genera la suma".

10.- BIBLIOGRAFÍA

Libros:

- Alsina, C. et al. (1996). *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Editorial Grao.
- Álvarez Martínez, Melba (2012). *Teorías Psicológicas.* México: Red Tercer Milenio.
- Baroody, A. (1988). *El pensamiento matemático de los niños.* Madrid: Visor.
- Bermejo, V. (coord.) (2004). *Cómo aprender matemáticas para aprender mejor.* Madrid: Editorial CCS.
- Brousseau, G. (1988). *Fundamentos de Didáctica de la Matemática.* Zaragoza: Universidad de Zaragoza.
- Carretero, M. (1998). *Introducción a la psicología cognitiva.* Argentina: Aique.
- Cascallana, M. T. (2002). *Iniciación a la matemática: materiales y recursos didácticos.* Humanes (Madrid): Editorial Santillana Aula XXI.
- Castro Martínez, E., Rico Romero, L. y Castro Martínez, E. (1988). *2. Números y operaciones, fundamentos para una aritmética escolar. Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Granada: Editorial Síntesis.
- Chamorro, Mª del C. (1992). *El aprendizaje significativo en Matemáticas.* Madrid: Alhambra-Longman.

- Chamorro, Mª del C. (2005). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Pearson Prentice Hall.
- Chevallard, I; Bosh, M. y Gascón, J. *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE-HORSORI.
- Delgado Linares, I. (2011). *El juego y su metodología.* Madrid: Ediciones Paraninfo.
- Fernández Bravo, J. A. (1989). *Los números en color de G. Cuisenaire. Relaciones dinámicas para el descubrimiento de la matemática en el aula.* Madrid: Seco Olea Ediciones.
- Fernández Bravo, J. A. (1995). *Didáctica de la matemática en la Educación.* Torrejón de Ardoz (Madrid): Ediciones Pedagógicas, colección aula-taller de psicopedagogía.
- Fernández Bravo, J. A. (2003). *La numeración y las cuatro operaciones matemáticas: didáctica para la investigación y el descubrimiento a través de la manipulación* (2ª ed.). Alcalá (Madrid): Editorial CCS, serie Educadores 1.
- Fernández Bravo, J. A. (2004). *El número de dos cifras: investigación didáctica e innovación educativa*. Alcalá (Madrid): Editorial CCS, serie Educadores 5.
- Fernández Bravo, J. A. (2010). *Números en color: acción y reacción en la enseñanza-aprendizaje de la matemática* (3ª ed.). Alcalá (Madrid): Editorial CCS, serie Educadores 9.
- Fernández Bravo, J. A. (2000). *Didáctica de la matemática* (2ª ed.). Madrid: Ediciones Pedagógicas.
- Fernández Sucasas, J. y Rodríguez Vela, M. I. (1991). *32 Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental. Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Editorial Síntesis.
- Ferrero, L. (1984). *Operaciones con números naturales* (2ª ed.). Madrid: Editorial Alameda, papeles de acción educativa.
- Ferrero, L. (1991). *El juego y la matemática.* Madrid: La Muralla.
- García Solano, R. (1995). *Las regletas de colores. Los cuerpos lógicos.* Madrid: Editorial Escuela Española, S.A.
- García Solano, R. (1995). *Aplicación práctica del ábaco (ábaco Don Richi).* Madrid: Editorial Escuela Española, S.A.

- Giménez, J. y Girondo, L. (1993). *Cálculo en la escuela: reflexiones y propuestas para la Enseñanza Primaria* (1ª ed.). Barcelona: Editorial Graó, colección "El Lápiz".
- Ginsburg (1977). *Piaget y la teoría del desarrollo intelectual*. Madrid: Prentice Hall.
- Gómez Alfonso, B. (1988). *3. Numeración y cálculo*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Gómez, J. (2002). *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Paidós.
- Gutiérrez, A.; Gómez Alfonso, B, Díaz Gódino, J. y Rico Romero, L. (1991). *1. Área de conocimiento: didáctica de las matemáticas*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Hughes, M. (1987). *Los niños y los números*. Barcelona: Editorial Planeta.
- Kamii, C. y De Vries, R. (1983). *La teoría de Piaget y la educación*. Madrid: Editorial Visor.
- Linaza, J. S. (1991). *Jugar y aprender*. Madrid: Editorial Alhambra-Longman.
- Maza Gómez, C. (1989). *Sumar y restar: el proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta*. Madrid: Editorial Visor aprendizaje.
- Maza Gómez, C. (1991). *24. Enseñanza de la suma y de la resta. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Maza Gómez, C. y Arce Jiménez, C. (1991). *31 Ordenar y clasificar. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Ministerio de Educación y Ciencia (1996*). I. Estructura y Materiales: Materiales curriculares para la Educación Primaria 6-12 años, matemáticas*. Valencia: Editorial Edelvives.
- Ministerio de Educación y Ciencia (1996*). II. Primer ciclo: Materiales curriculares para la Educación Primaria 6-12 años, matemáticas*. Valencia: Editorial Edelvives.
- Pérez Montero, C. (2002). *Las tareas de educar en 0-6 años. Didáctica aplicable*. Madrid: Editorial CEPE.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1975). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.
- Puig Espinosa, L. y Cerdán Pérez, F. (1992). *8. Problemas aritméticos*. Madrid: Editorial Síntesis.

- Puig Espinosa, L y Calderón J. (1996). *Investigación y didáctica de las matemáticas.* Ministerio de Educación y Ciencia: CIE.
- Resnick, L. y Ford. W (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Editorial Paidós.
- Ruesga Ramos, Mª P. (2004). *Las matemáticas a través del juego. Aplicaciones prácticas para el aula.* Burgos: Artecolor impresores.
- Schiller, P. y Peterson, L (1999). *Actividades para jugar con las matemáticas 2*. Barcelona: Ediciones CEAC.
- Segovia, I.; Castro Martínez, E. y Rico Romero, L. (1988). *9. Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Editorial Síntesis.
- Vergnaud, G. (1990). *El niño, las Matemáticas y la realidad.* México: Trillas.

Leyes:

- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE).
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.
- DECRETO 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León.
- ORDEN EDU/1045/2007, de 12 de junio, por la que se regula la implantación y el desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León

Páginas Web consultadas:

- *Ábacos didácticos.* https://www.google.es/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&ved=0CEYQFjAH&url=http%3A%2F%2Fwww.ricardovazquez.es%2FMATEMATICASarchivos%2FABACOS%2Fabacos%25202%2520suma%2520resta.ppt&ei=3Ed7U8yzG6bI0wWn8YDoBg&usg=AFQjCNE1z8HeZd-SSBG-MmfFswQOczKbLQ (consulta 11 de mayo de 2014).
- Álvarez Martínez, M. (2012). *Teorías psicológicas.* http://www.aliatuniversidades.com.mx/bibliotecasdigitales/pdf/Educacion/Teorias_psicologicas.pdf (consulta 6 de mayo de 2014).
- *Buscador de tesis, documentos, publicaciones y recursos educativos.* http://www.monografias.com/ (consulta 7 de abril de 2014).

- *Buscador Wikipedia.* http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada (consulta 27 de abril de 2014).
- Cabrera Martín, Mª del C. (2009) *Los distintos sistemas de numeración.* http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_24/MARIA%20DEL%20CARMEN_%20CABRERA%20MARTIN_1.pdf (consulta 29 de abril de 2014).
- *Capítulo V. Qué y cuando enseñar.* *http://www.unesco.org/education/educprog/ste/pdf_files/curriculo/cap5.pdf (consulta 3 de abril de 2014).*
- Chamorro, Mª del Camrne (1995). *Los procesos de aprendizaje en Matemáticas y sus consecuencias metodológicas.* http://www.educa2.madrid.org/web/educamadrid/principal/files/34b0304e-7fce-4b92-875e-b0c7711e9926/RECURSOS/CURSOS/INFANTIL_PRIMARIA/MATEMATICA/1.2.pdf?t=1352561680514 *(consulta 15 de abril de 2014).*
- *Constructivismo.* http://constructivismo.webnode.es/autores-importantes/lev-vigotsky/ (consulta 22 de abril de 2014).
- *El aporte de Piaget en las matemáticas.* http://piagetymatematicas.blogspot.com.es/ (consulta 6 de mayo de 2014).
- Fernández Bravo, J. A. (2014). *Página Web del matemático José Antonio Fernández Bravo.* http://fernandezbravo.ning.com/ (consulta 24 de mayo de 2014).
- Fernández Escalona, M. C. (2010). Análisis epistemológico de la secuencia numérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa.* http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000100004 (consulta 11 de junio de 2014).
- Godino, J. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf (consulta 9 de mayo de 2014).

- Godino, J. (2002). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros.* http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf (consulta 9 de mayo de 2014).
- Godino, J. (2004). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros.* http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf (consulta 9 de mayo de 2014).
- *Inteligencias Múltiples.* http://www.inteligenciasmultiples.net/ (consulta 2 de abril de 2014).
- Leal Leal, A. (2010). *La enseñanza de las estrategias de aprendizaje.* http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_27/ALFONSO_LEAL_2.pdf (consulta 25 de marzo de 2014).
- López Esteban, C. *Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica I.* http://ocw.usal.es/eduCommons/ciencias-sociales-1/desarrollo-del-pensamiento-matematico-y-su-didactica-i/contenidos/2Tema_1.pdf *(consulta 15 de abril de 2014).*
- Godino, J., Vicent Font, M., Wilelmi, M. y Arreche, M. (2009) ¿Alguien sabe qué es el número? *Revista Iberoamericana de Educación matemática. Número 19. Página 42.* http://www.ugr.es/~jgodino/eos/queesnumero_Union_019_008.pdf *(consulta 11 de junio de 2014).*
- *Teoría del constructivismo social.* http://constructivismos.blogspot.com.es/ *(consulta 7 de abril de 2014).*
- *Frase Zoltan Dienes.* http://books.google.es/books?id=B4jKolrM3W8C&pg=PA22&lpg=PA22&dq=zoltan+dienes+la+meta+principal+de+las+matem%C3%A1ticas&source=bl&ots=1DPYO8lc4H&sig=cUU0LqwSC-rDgRh6bbJ3YrGfrMY&hl=es&sa=X&ei=78WZU8SPMdCz0QXIuoBw&ved=0CCIQ6AEwAA#v=onepage&q=zoltan%20dienes%20la%20meta%20principal%20de%20las%20matem%C3%A1ticas&f=false *(consulta 11 de junio de 2014).*

ANEXO I. ADQUISICIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO SEGÚN LOS ESTADIOS DE PIAGET:

PERIODOS	TIPO DE CONOCIMIENTOS		
PERIODO SENSORIOMOTOR (0-2 años)	**Fase preconceptual**		♦ Comienza adquirir conocimientos lógicos matemáticos. ♦ Manipulación de objetos. ♦ Percibe y experimenta propiedades (color, tamaño, forma, textura, sabor, olor...). ♦ A los 5 meses discrimina conjuntos 2-3 ítems / 10 meses discrimina conjuntos 3-4 ítems.
PERIODO PREOPERACIONAL (2-6 años)	**Fase conceptual**	**EDAD**	**TIPO DE CONOCIMIENTO ADQUIRIDO**
		2,5	♦Organiza el espacio situando y desplazando los objetos (dentro/fuera, encima/debajo, delante/detrás, arriba/abajo), conceptos básicos y vocabulario básico. ♦Descubre propiedades físicas de los objetos que manipula: longitud, distancia, cantidad, mezcladas con las cualidades perceptivas.
		3	♦Compara objetos en función de cualidades físicas. ♦Discrimina en virtud de la percepción de semejanzas-diferencias esto le facilite que agrupe en función de un criterio. ♦Utiliza diferentes formas de etiquetado para diferenciar colecciones numéricas de pocos elementos. ♦Detecta correspondencias numéricas entre elementos visibles y estímulos auditivos.
		3,5	♦Contrasta magnitudes por comparación y estimar a partir de una cantidad la otra longitud/cantidad, volumen/ cantidad, peso/cantidad. ♦Ordena en el tiempo y paulatinamente abstrae la cualidad de la percepción del objeto (es capaz de coleccionar). ♦Compara algunos términos de los componentes de las colecciones y establece correspondencias. ♦Engloba aspectos de tipo espacial, cuantificación, semejanza/diferencia. Etapa muy manipulativa.
		4	♦Ordena objetos por sus cualidades físicas. Ordenación serial cualitativas de diferencias que cambian alternativamente. ♦Compara y explora las magnitudes de los objetos de las colecciones y realiza nuevas formas de agrupamiento y va hace equivalencias. ♦Se inicia en el conteo y esto le va permitir iniciarse en procedimientos de tipo número que suponen cierto grado de abstracción. ♦Trabaja aspectos básicos de pertenencia, espacio y tiempo. ♦Adquiere la idea de número en la teoría de conjunto y las operaciones de juntar, quitar, repetir y repartir.

		4,5	♦Representa las secuencias de la etapa anterior Adquiere el orden, la equivalencia, los conceptos. ♦Compara magnitudes discretas desiguales que le conduce a clasificar en orden creciente o decreciente (progresión serial cuantitativa). ♦Es capaz de ponderar de apreciar el peso por claves internas, kinestésicas.
		5	♦Objetiva el tiempo (ayer, mañana, hoy). ♦Trabaja con una sola cantidad y resuelve problemas de cambio sencillo, los de adición en los que la incógnita se sitúa en el resultado. ♦No resuelve problemas de comparación, ni combinación. Puede contar de 4 a 6 y a loa 5,5 años cuenta y verbaliza lo anterior.
		6	♦Pueden medir realizando equivalencia entre continente y contenido. Comienza las nociones de área y longitud. ♦Relaciona el cambio que se produce entre el conjunto inicial y la acción que lo provoca y la dirección (incremento/decremento) y relacionarlas con las operaciones aritméticas de adición y sustracción. ♦Puede contar hasta 12 y su lógica le permite resolver problemas de cierta complejidad. ♦Logra usar los números naturales para comparar los tamaños.
PERIODO DE OPERACIONES CONCRETAS **(7-12 años)**	**Operaciones concretas simples y elementales**	7-10	♦Aparición de operaciones reversibles con la adquisición de principios de conservación por este orden: cantidad, peso y volumen. ♦Representa realidades físicas, compara y cuantifica mediante la geometría el sistema métrico decimal y representa datos gráficamente ♦Agrupa los objetos en función de propiedades aditivas o multiplicativas. ♦Ordena elementos en función de la cualidad que varia. Soluciona problemas primero por comparación y al final del periodo por abstracción ♦Adquiere la noción de sistema de numeración y de operación con números llegando adquirir la madurez hacia los 10 años.
	Operaciones concretas complejas espacio temporales	10-12	♦Operaciones físicas: nociones de conservación (sustancia, peso, volumen). ♦Operaciones espaciales: espacio que ocupan los objetos y su desplazamiento (topológicas, proyectivas euclidianas, métricas. ♦Operaciones temporales y cinéticas: orden de sucesión de los objetos en el espacio.
PERIODO DE OPERACIONES FORMALES	**Génesis de operaciones fomales**	12-14	♦Comienza con un periodo de preparación y estructuración de las operaciones formales, de transición entre el pensamiento concreto y el formal. ♦Clasificar clasificaciones, seriar seriaciones... hasta la combinatoria. ♦Se accede al grupo de las cuatro transformaciones o INRC, (identidad, negación, reciprocidad, correlatividad.).

A partir de los 12 años	**Estructuras operatorias formales**	14…	♦Dominio de la estructura de las operaciones formales que le permite movilidad de pensamiento y organización mental. ♦Aquí se encuentran dos combinaciones la combinatoria (INRC), identidad, negación, reciprocidad, correlatividad y la estructura de retículo, que son las 16 operaciones binarias de la lógica proposicional. ♦ Realiza operaciones de variaciones, permutaciones y combinaciones, los esquemas de proporcionalidad, de doble referencia, de equilibrio mecánico, de probabilidad, de correlación, de compensaciones multiplicativas y de conservación que va más allá de la materia aplicándolas en todos los ámbitos, con lo que consigue una nueva forma de relacionarse con el mundo externo.

ANEXO II. LAS 8 INTELIGENCIAS MÚLTIPLES DE GARDNER.

1. Inteligencia Lógico-Matemática: capacidad de entender las relaciones abstractas. La que utilizamos para resolver problemas de lógica y matemáticas. Es la inteligencia que tienen los científicos. Se corresponde con el modo de pensamiento del hemisferio lógico y con lo que nuestra cultura ha considerado siempre como la única inteligencia.

2. Inteligencia Lingüística: capacidad de entender y utilizar el propio idioma. La que tienen los escritores, los poetas, los buenos redactores. Utiliza ambos hemisferios.

3. Inteligencia Espacial: capacidad de percibir la colocación de los cuerpos en el espacio y de orientarse. Consiste en formar un modelo mental del mundo en tres dimensiones, es la inteligencia que tienen los marineros, los ingenieros, los cirujanos, los escultores, los arquitectos o los decoradores.

4. Inteligencia Corporal-Kinestésica: capacidad de percibir y reproducir el movimiento. Aptitudes deportivas, de baile. Capacidad de utilizar el propio cuerpo para realizar actividades o resolver problemas. Es la inteligencia de los deportistas, los artesanos, los cirujanos y los bailarines.

5. Inteligencia Musical: capacidad de percibir y reproducir la música. Es la de los cantantes, compositores, músicos, bailarines.

6. Inteligencia Intrapersonal: capacidad de entenderse a sí mismo y controlarse. Autoestima, autoconfianza y control emocional. No está asociada a ninguna actividad concreta.

7. Inteligencia Interpersonal: capacidad de ponerse en el lugar del otro y saber tratarlo. Nos sirve para mejorar la relación con los otros (habilidades sociales y empatía). Nos permite entender a los demás, y la solemos encontrar en los buenos vendedores, políticos, profesores o terapeutas. La inteligencia intrapersonal y la interpersonal conforman la Inteligencia Emocional y juntas determinan nuestra capacidad de dirigir nuestra propia vida de manera satisfactoria.

8. Inteligencia Naturalista: capacidad de observar y estudiar la naturaleza, con el motivo de saber organizar, clasificar y ordenar. Es la que demuestran los biólogos, los naturalistas, los ecologistas.

ANEXO III. Las autoinstrucciones de Meichenbaum, 1985.