



FACULTAD DE EDUCACIÓN DE PALENCIA

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

# DESARROLLO DE LA INTUICIÓN PROBABILÍSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

TRABAJO FIN DE GRADO

MAESTRO/MAESTRA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

AUTOR/A: Isabel Zamora Viñas

TUTOR/A: Ana M<sup>a</sup> Sanz Gil

Palencia, 20 de junio de 2014





## RESUMEN

Hay situaciones en la vida diaria en las que no podemos saber qué resultado va a salir, pero sí sabemos los posibles resultados; son situaciones que dependen del azar.

En este trabajo pretendemos defender que en la enseñanza primaria los temas de azar y probabilidad deben tomar mayor relevancia, con el objeto de que nuestros alumnos adquieran las estrategias necesarias para enfrentarse más exitosamente a los problemas cotidianos, así como los indicios matemáticos para desarrollar la comprensión de los datos, el análisis de los mismos y la estadística.

Además, se defiende la aproximación intuitiva a la probabilidad y el desarrollo formativo de las intuiciones en la escuela, como forma de llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje del azar y la probabilidad.

**Palabras clave:** intuición, probabilidad, azar, educación matemática, aleatorio, suceso, estadística.

## ABSTRACT

In some situations in daily life we cannot tell what the result is going to be, although we know the set of possible results; these situations depend on chance.

In this work we intend to defend the view that chance and probability should receive more attention in primary school, in order to give children the necessary strategies to be more successful in tackling everyday problems, as well as to provide them with the appropriate mathematical tools to develop the comprehension of data, their analysis and statistical treatment.

Furthermore, the intuitive approach to probability is defended, together with the trained development of the intuitions at school, as a way to implement the process of teaching-learning of chance and probability.

**Keywords:** intuition, probability, chance, mathematical education, random facts, statistics.



# ÍNDICE DE CONTENIDOS

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>2. OBJETIVOS.....</b>	<b>2</b>
<b>3. JUSTIFICACIÓN DEL TEMA PROPUESTO Y RELACIÓN CON LAS COMPETENCIAS DEL GRADO.....</b>	<b>3</b>
<b>4. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....</b>	<b>7</b>
4.1. LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN INFANTIL.....	7
4.2. LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA .....	8
4.3. ANÁLISIS DEL RAZONAMIENTO EN LOS NIÑOS .....	9
4.3.1. Especificidad de la probabilidad .....	10
4.3.2. Teorías sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico .....	11
4.4. TRES CUESTIONES CLAVE EN EL DESARROLLO PROBABILÍSTICO EN LOS NIÑOS.....	17
<b>5. ¿QUÉ CONTENIDOS SE DEBEN ENSEÑAR EN LA CLASE DE PROBABILIDAD? .....</b>	<b>22</b>
<b>6. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS .....</b>	<b>24</b>
6.1. SCHOOL COUNCIL PROJECT ON STATISTICAL EDUCATION.....	25
6.2. LA PROBABILIDAD EN LA ESCUELA SEGÚN GLAYMANN Y VARGA .....	26
6.3. DIDÁCTICA DEL AZAR Y LA PROBABILIDAD SEGÚN CHAMORRO.....	26
<b>7. UN RECURSO DIDÁCTICO PARA DESARROLLAR LAS PRIMERAS IDEAS DE AZAR Y PROBABILIDAD EN LOS ALUMNOS DE PRIMARIA: “LABAPC” .....</b>	<b>28</b>
7.1. OBJETIVOS DE LABAPC .....	29
7.2. ESTRUCTURA .....	30
<b>8. OTROS MATERIALES Y PROPUESTAS DIDÁCTICAS DE UTILIDAD PARA LA CLASE DE PROBABILIDAD EN PRIMARIA.....</b>	<b>31</b>
8.1. UN ESTUPENDO MATERIAL DIDÁCTICO DIGITAL.....	31
8.2. ALGUNAS PROPUESTAS DIDÁCTICAS CONCRETAS. ....	33
8.3. RECURSOS DE LAS TICS .....	36
<b>9. CONCLUSIONES .....</b>	<b>39</b>
<b>10. BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>40</b>

## ÍNICE DE FIGURAS Y TABLAS

Figura 1: Ruleta de 8 valores equiprobables .....	11
Figura 2: Esquema del desarrollo psicológico para Piaget y Fischbein .....	16
Figura 3: Experimento de la bandeja: Al mover la bandeja, las bolas, que al principio estaban ordenadas, se mezclan progresivamente.....	18
Figura 4: Urnas con bolas de colores.....	18
Figura 5: Experimento con dos bombillas.....	20
Figura 6: Logo LABAPC .....	28
Figura 7: Captura de pantalla del menú principal de LABAPC .....	31
Figura 8: Imagen de bienvenida de la propuesta didáctica para el alumno.....	32
Figura 9: Circuito de la carrera.....	34
Figura 10: Diagrama de árbol del lanzamiento de monedas .....	35
Figura 11: Logo proyecto Agrega 2 .....	36
Figura 12: Captura de pantalla de la página de presentación del proyecto AGREGA... 36	
Figura 13: Captura de pantalla de la página de presentación de <a href="http://usalasticenmaticas.wordpress.com/2009/04/20/azar-y-probabilidad/">http://usalasticenmaticas.wordpress.com/2009/04/20/azar-y-probabilidad/</a> .....	37
Figura 14: Captura de pantalla. Sucesos aleatorios .....	37
Figura 15: Captura de pantalla. Probabilidad en Editorial Teide .....	38
<u>Figura 16: Captura de pantalla de la aplicación</u> <u>“<a href="http://www.genmagic.net/repositorio/displayimage.php?album=5&amp;pos=0">http://www.genmagic.net/repositorio/displayimage.php?album=5&amp;pos=0</a>” .....</u>	<u>38</u>
Tabla 1: Contenidos en relación al tema de azar y probabilidad en Educación Primaria (MEC, 2007).....	23
Tabla 2: Contenidos en relación al tema de azar y probabilidad en Educación Primaria (MEC, 2014).....	23

# 1. INTRODUCCIÓN

Superados los primeros momentos de dudas e incertidumbre desde que se me asigna el trabajo de fin de grado y tras las orientaciones de mi tutora, me pongo a la tarea de búsqueda de documentación y materiales que me sirvan de soporte.

No tardo en darme cuenta de que el azar es inherente a nuestras vidas y aparece en múltiples situaciones cotidianas o de la vida profesional, y empiezo a tomar conciencia de la efectividad de este trabajo.

Parece que han existido intensos debates sobre la idoneidad de la introducción de la probabilidad y la estadística en la escuela, y en relación al momento oportuno para tal introducción. A partir de las investigaciones y discusiones realizadas, numerosos argumentos se han ido consolidando a favor de dicha inclusión, como se contemplará a lo largo del trabajo.

El reconocimiento de su valor educativo ha llevado a incluir paulatinamente el conocimiento probabilístico tanto en los análisis y reflexiones más generales sobre el currículo matemático obligatorio, como en los currículos escolares concretos de cada país, sugiriendo iniciar esta enseñanza a una edad más temprana, incluso en la educación infantil.

Con todo ello, en este trabajo defenderemos la necesidad de reforzar la formación del razonamiento probabilístico en educación primaria.

Para finalizar esta introducción, resumo muy brevemente cómo se ha estructurado el trabajo. En el punto 2 indicamos los objetivos que nos proponemos alcanzar. Seguidamente, en el apartado 3, tratamos de justificar la importancia del tema propuesto desde diferentes puntos de vista, así como su relación con las competencias del título. En el capítulo 4 fundamentaremos el trabajo haciendo un análisis del tratamiento que se le da a la estadística y la probabilidad en educación infantil y educación primaria, así como del razonamiento de los niños en las distintas etapas cognitivas. Dedicaremos el punto 5 a los contenidos que se deben enseñar en la clase de probabilidad y en el 6 mostraremos algunas indicaciones metodológicas que puedan orientar nuestro trabajo en el aula. Los apartados 7 y 8 estarán destinados a mostrar algunas propuestas didácticas que nos puedan resultar útiles en la enseñanza del azar y la probabilidad. Finalizamos con el punto 9 de conclusiones y el 10 de bibliografía.

## 2. OBJETIVOS

Los objetivos principales en el desarrollo de este trabajo son:

1. Investigar sobre un contenido no muy valorado en la práctica escolar tradicional, como es la probabilidad, y conocer los argumentos que apoyan la mayor presencia de estos contenidos en la enseñanza primaria.
2. Conocer los diferentes procesos cognitivos que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas y analizar su importancia en relación con la adquisición de conocimientos probabilísticos, para poder llevar a cabo una práctica docente más eficaz.
3. Explicar la teoría de Fischbein sobre las intuiciones y la necesidad de trabajar desde los primeros niveles la base intuitiva relativa al pensamiento probabilístico.
4. Ofrecer una recopilación de los distintos materiales encontrados para la enseñanza del azar y la probabilidad, a fin de disponer de materiales suficientes cuando nos enfrentamos a la enseñanza de estas materias.
5. Desarrollar su aplicación en el aula mediante la descripción de una propuesta didáctica, utilizando las nuevas tecnologías de la información y comunicación.
6. Analizar el marco legislativo educativo nacional y de la Comunidad de Castilla y León.

### 3. JUSTIFICACIÓN DEL TEMA PROPUESTO Y RELACIÓN CON LAS COMPETENCIAS DEL GRADO

Chamorro (2003) afirma que la introducción del pensamiento aleatorio, complementario del pensamiento determinista que impera en los currículos de matemáticas de Educación Primaria, parece justificada desde:

- Un **punto de vista social**, ya que hay numerosas situaciones del entorno del niño que revisten un carácter aleatorio (juegos infantiles y escolares, juegos de apuestas de su entorno familiar, predicciones meteorológicas...) que podrían ser aprovechadas para una formación social más completa de los escolares.
- Un **punto de vista formativo**, ya que el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del alumno que aprende no puede basarse solamente en las disciplinas que desarrollan una visión determinista del pensamiento lógico, sino también en esta rama de las matemáticas que trata de modelizar el funcionamiento de lo incierto, de lo plausible, de lo probable.

La escuela primaria ofrece múltiples posibilidades de desarrollo del pensamiento probabilista y, sin embargo, la introducción de esta rama de las matemáticas se propone tímidamente en los currículos diseñados para la Educación Primaria

Ya anteriormente, Godino, Batanero y Cañizares (1987) señalan que la principal razón para incluir el estudio matemático de los fenómenos aleatorios en la enseñanza primaria es que el azar está presente en nuestro entorno. Analizan esta presencia en dos aspectos: lenguaje y realidad.

#### **A. Azar y lenguaje:**

En el lenguaje ordinario, tanto en las conversaciones como en la prensa o literatura, encontramos con frecuencia referencias al azar. ¿Cuál es el significado atribuido a esta palabra?

El diccionario del uso del español de M<sup>a</sup> Moliner (1983) define la cualidad de ser aleatorio como aquello que es incierto. Lo que depende de la suerte o el azar, siendo

el azar la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni una intervención intencionada humana ni divina.

Muchos otros términos y expresiones coloquiales son usados frecuentemente en el lenguaje ordinario, con un significado similar, aunque pueden presentar matices según el contexto:

- Casual
- Accidental
- Eventual
- Fortuito
- Imprevisible
- Inesperado
- Ocasional
- Por suerte
- Por chiripa
- De rebote
- Sin querer
- Sin intención....

Esta variedad de expresiones para referirse a un mismo concepto da idea de la variedad de matices del mismo, así como de la clara apreciación del carácter imprevisible de ciertos fenómenos por parte del individuo, incluso desde edades tempranas.

### **B. El azar en la realidad:**

La presencia de fenómenos imprevisibles en sus resultados o manifestaciones en la realidad que nos rodea es bien patente. El carácter aleatorio de un fenómeno será apreciado por el niño a través de la observación de múltiples aspectos de su entorno, así como por medio de la realización de actividades y juegos, que son fáciles de generar en el aula (lanzamiento de dados, fichas, extracción de bolas en urnas, etc.).

A título de ejemplo, se enumeran algunos de los fenómenos aleatorios que pueden ser evocados por el profesor en situaciones didácticas, y para los cuales las técnicas estadísticas y el cálculo de probabilidades son, sin duda, pertinentes. En su intento de clasificar la fenomenología del azar, Godino et al. (1987) utilizan los cuatro grandes grupos que se describen en Tanur, Modteller, Kruskal, y otros (1978) para clasificar los campos de aplicación de la estadística: el hombre y su mundo biológico, físico, social y político.

- El mundo biológico. Las características heredadas en el nacimiento no se pueden prever de antemano, dependen del azar: el sexo, color de pelo, peso al nacer, etc.  
En el campo de la medicina, la posibilidad de contagio o no de una epidemia, la edad en que se sufre una enfermedad infantil, el efecto posible de una vacuna, etc. son ejemplos de situaciones en que el azar está presente.
- El mundo físico. ¿Qué mejor fuente de ejemplos sobre fenómenos aleatorios que los meteorológicos? La duración, intensidad, extensión de las lluvias, tormentas o granizos; las temperaturas máximas y mínimas, la intensidad y dirección del viento son variables aleatorias. También lo son las posibles consecuencias de estos fenómenos.
- El mundo social. El hombre no vive aislado: vivimos en sociedad; la familia, la escuela, el trabajo, el ocio están llenos de situaciones en las que predomina la incertidumbre. El número de hijos de una familia, la edad de los padres al contraer matrimonio, tipo de trabajo, creencias o aficiones de los miembros varían de una familia a otra.  
En la escuela, ¿podemos prever las preguntas del próximo examen? ¿Cuántos clientes habrá en la caja del supermercado? ¿Llegará con retraso el autobús?...  
En el ocio, practicamos juegos de azar: parchís, lotería, encuentros deportivos...
- El mundo político. Los gobiernos necesitan tomar múltiples decisiones que dependen de fenómenos inciertos y sobre los cuales necesita información. Por este motivo la administración precisa de la elaboración de censos y encuestas diversas. Desde los resultados electorales hasta los censos de población, hay muchas estadísticas cuyos resultados afectan las decisiones de los gobiernos y todas estas estadísticas se refieren a distintas variables aleatorias relativas a un cierto colectivo. Entre esas variables tenemos: el índice de precios al consumo, las tasas de población activa, emigración-inmigración, estadísticas demográficas...

Estos ejemplos son tan sólo una muestra de los muchos posibles en cada una de las categorías. Todos pueden relacionarse con distintas áreas: ciencias naturales, sociedad, física, etc. Por ello, pueden ser propuestos a los niños, ya que forman parte de

su vida cotidiana y les mostrarán la aplicabilidad de esta rama de las matemáticas a situaciones a las que deberán enfrentarse con frecuencia en su vida adulta, permitiéndoles un conocimiento más profundo de la complejidad del mundo que nos rodea.

Después de enfatizar la presencia del azar en la vida cotidiana, nos preguntamos cómo funciona la intuición probabilística en el ser humano, si se trata de algo innato o más bien de algo que necesita ser desarrollado. Un ejemplo concreto que nos permite reflexionar sobre algunas ideas erróneas sobre el azar es el conocido como “la falacia del jugador”:

*Imaginemos el sencillo juego de lanzar una moneda sucesivas veces en el aula e ir apuntando los resultados. Cuando han salido 5 caras seguidas y se pregunta a los niños qué va a salir en el próximo lanzamiento, la mayor parte de ellos dirá que va a salir cruz, ya que han salido ya unas cuantas caras seguidas, y ya "toca que salga cruz". Este es un ejemplo de una incorrecta intuición probabilística en una situación sencilla. Es fundamental que los niños lleguen a ver con naturalidad que en cada lanzamiento puede salir cara o cruz con la misma probabilidad, independientemente de lo que haya sucedido antes. De hecho, en términos matemáticos, a los sucesivos lanzamientos de una moneda se les llama pruebas aleatorias independientes, precisamente porque lo que suceda en cada una de estas pruebas ni depende de las demás pruebas ni influye en el resto de pruebas. Fenómenos similares son el lanzamiento de un dado, el juego de la ruleta, etc.*

Con ejemplos como el anterior queremos señalar cómo la intuición probabilística necesita ser desarrollada en el aula, ya que la probabilidad en sí es una materia difícil y las primeras intuiciones son la mayoría de las veces erróneas. El adecuado trabajo de la intuición probabilística, mediante el uso de contextos de aprendizaje lúdicos y atractivos, conseguirá que las intuiciones sean cada vez más acertadas y los niños vayan configurando en su mente la manera de tratar los fenómenos del azar.

Así pues, y considerando que el ritmo de cambio en la sociedad actual es cada vez más acelerado, se plantea la necesidad de una formación que proporcione al ciudadano recursos para toda la vida, que le permitan enfrentarse y comprender la

complejidad de la sociedad en la que está inmerso. El desarrollo de la intuición probabilística proporciona una información válida para enfrentarse con algunos problemas cotidianos y permite un acercamiento diferente a dichos problemas, una forma distinta de analizarlos, facilitando a los estudiantes la exploración de sucesos y situaciones que son relevantes en su vida diaria.

Con todo lo anterior se ha tratado de justificar la relevancia del tema elegido. Además, el desarrollo del trabajo se relaciona directamente con las siguientes **competencias generales del Título de Grado en Educación Primaria:**

1. Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos.
2. Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza-aprendizaje, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
3. Diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad y que atiendan a la igualdad de género, a la equidad al respeto a los derechos humanos que conformen los valores de la formación ciudadana.
4. Reflexionar sobre las prácticas de aula para innovar y mejorar la labor docente. Adquirir hábitos y destrezas para el aprendizaje autónomo y cooperativo y promoverlo entre los estudiantes.

Respecto de las competencias específicas de la **Materia “Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas”**, destacan las siguientes:

1. Identificar y comprender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitiendo juicios bien fundamentados y utilizando las matemáticas al servicio de una ciudadanía constructiva, comprometida y reflexiva.
2. Transformar adecuadamente el saber matemático de referencia en saber a enseñar mediante los oportunos procesos de transposición didáctica, verificando en todo momento el progreso de los alumnos y del propio

proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el diseño y ejecución de situaciones de evaluación tanto formativas como sumativas.

## **4. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA**

### **4.1. LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN INFANTIL**

---

Alsina (2012) señala que todas las orientaciones en materia de educación matemática coinciden en que es necesario empezar a trabajar conocimientos de estadística y probabilidad desde la etapa de educación Infantil.

Estas orientaciones provienen de referentes de reconocido prestigio en el ámbito de la educación matemática: los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), que aportan respuestas concretas, articuladas, rigurosas y no retóricas sobre lo que debería valorarse en la enseñanza de las matemáticas desde Educación Infantil hasta Bachillerato; y los Estándares Comunes para las Matemáticas de la Common Core State Standards Initiative (CCSSI, 2010), que describen distintos tipos de conocimientos que los profesores de matemáticas de todos los niveles deberían intentar fomentar en sus alumnos.

A pesar de estos referentes internacionales, continúa Alsina (2012), existe todavía en España poca tradición de trabajar de forma sistemática el bloque de contenidos de estadística y probabilidad en Educación Infantil. Este déficit podría ser debido a que, como señala Blanco (2011), la investigación en educación matemática es muy reciente en nuestro país, por lo que cabe la posibilidad de que no se hayan podido aportar aún datos sólidos que hayan permitido incorporar la didáctica de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares o en la formación inicial de maestros de Educación Infantil.

En los últimos años, sin embargo, se está produciendo un cambio a todos los niveles que permite ofrecer una visión más optimista: hay un Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI) dentro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM); en algunas Comunidades Autónomas las actuales

orientaciones curriculares relativas a la Educación Infantil señalan ya algunos conocimientos sobre este bloque de contenidos; y algunos programas de Didáctica de las Matemáticas del Grado de Educación Infantil, como por ejemplo en la Universidad de Girona, empiezan a incorporar temas relativos a los conocimientos disciplinares y didácticos sobre la estadística y la probabilidad en las primeras edades.

## **4.2. LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA**

---

En el currículo de matemáticas de la Educación Primaria (*DECRETO 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León.*) se contemplan contenidos vinculados a la probabilidad y se sugiere que sean introducidos desde el primer ciclo. Sin embargo sigue siendo un contenido que aparece al final del programa de cada ciclo.

Lo mismo ocurre con la *Orden ECD/686/2014, de 23 de abril, por la que se establece el currículo de la Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y deporte y se regula su implantación, así como la evaluación y determinados aspectos organizativos de la etapa*, donde la estadística y la probabilidad aparecen en el último bloque de cada uno de los cursos.

Año tras año, reforma tras reforma, siempre ocurre lo mismo: los temas de Estadística son los primeros en caerse de la programación, especialmente cuando el tiempo aprieta. **¿Es realmente la falta de tiempo la que impide que se dé la Estadística?** Como dice José Luis Álvarez (IES nº 5 de Avilés, Asturias) en una de sus conferencias: **¿Es la Estadística el patito feo de la Programación?**

La probabilidad y la estadística son componentes muy importantes en nuestra cultura y en muchas de nuestras ciencias específicas. Deberían constituir una parte importante del bagaje cultural básico del ciudadano de nuestra sociedad. Este es un punto en el que todos los sistemas educativos parecen concordar. Y efectivamente son muchos los países que incluyen en sus programas de enseñanza primaria estas materias, pero en pocos esta enseñanza se lleva a cabo con la eficacia deseada. En España este fenómeno, a mi parecer, se debe por una parte a la dificultad misma de las materias en

cuestión y a una cierta carencia de preparación adecuada de los profesores para esta tarea. Muchos profesores de primaria tenemos la imagen de la probabilidad que estudiamos hace ya muchos años en las Escuelas de Formación del Profesorado, y que en resumen se basaba en la asignación probabilística de Laplace y en la Combinatoria para contar los casos favorables y posibles de los sucesos.

El hecho es que muchos profesores no nos sentimos cómodos con esta materia, se deja para el final del programa, se trata muy brevemente, o en forma excesivamente formalizada, y cuando es posible se omite (es ya conocido por todos cómo en muchas memorias de final de curso aparece la frase **“Se han dado todas las unidades didácticas de la programación menos la de Estadística y Probabilidad”**). En el fondo se hace lo mismo de siempre, salvo por la actualidad de los datos que se manejan cuando se llega a dar. Ahora no se puede decir, como años atrás, que nos faltan recursos para poder enseñar la probabilidad y estadística de otra forma, en general hay un buen número de materiales y propuestas al alcance de todo el mundo.

Cuando nos quedan estos temas sin dar, la disculpa es casi siempre la falta de tiempo. Pero, **¿es realmente la falta de tiempo la que impide que se dé la Estadística y la probabilidad?** Si es por eso, ¿por qué no se quedan sin explicar las ecuaciones o los polinomios o al menos un año una cosa y otro otra diferente?

En definitiva parece claro que **la presencia de la estadística y probabilidad en el currículo oficial no basta para garantizar que se desarrolle adecuadamente en el aula**. Además, según todas las indicaciones y como afirma Pérez Cuenca (1995), en la Educación Primaria se trata fundamentalmente de desarrollar una “intuición probabilística” lo más ajustada posible y por ello se hace necesaria la formación didáctica de los profesores.

### **4.3. ANÁLISIS DEL RAZONAMIENTO EN LOS NIÑOS**

---

Para iniciar la enseñanza de la probabilidad en el niño de primaria, nos tenemos que hacer las siguientes preguntas: **¿Comprende el niño el azar?**, ¿a qué edad el niño comienza a diferenciar el azar del determinismo? Es importante estudiar el razonamiento de los niños respecto al tema que nos ocupa para poder valorar hasta qué punto son asequibles para ellos los nuevos conocimientos que tratamos de enseñar.

Batanero (2013) describe los resultados de los trabajos de Piaget e Inhelder y Fischbein en relación con el razonamiento probabilístico de los niños. También hace un análisis previo sobre la especificidad de la probabilidad, con el fin de orientar adecuadamente a los profesores para enseñar la probabilidad a niños de Educación Primaria.

Resumimos a continuación los puntos fundamentales de este trabajo:

#### **4.3.1. Especificidad de la probabilidad**

Al comenzar la enseñanza de la probabilidad es especialmente importante analizar los razonamientos de los niños, puesto que en dichas materias tratamos con ideas bastante abstractas y no tan ligadas a la experiencia directa del niño como pudieran ser los conceptos geométricos o numéricos. Desde muy pequeño el niño debe aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades. Estos conceptos básicos se pueden concretizar con objetos físicos; por ejemplo, la suma o la resta se pueden ejemplificar juntando o separando colecciones de dulces, piedrecillas o cualquier otro objeto. Además estas operaciones (también el producto o división) tienen la propiedad de ser reversibles (volver a los datos primitivos al deshacer la operación). Así, si un niño añade dos caramelos a un montón de cinco, obtiene siete caramelos; quitando los dos últimos vuelve a los cinco que tenía inicialmente. Además obtiene el mismo resultado cada vez que repita estas operaciones. Igualmente si, por ejemplo, divide un cuadrado en dos partes iguales doblando por una diagonal y cortando las dos partes, al volver a unir las recupera el cuadrado primitivo.

Por el contrario, no existe una experiencia concreta similar de lo aleatorio, ya que no podemos manipular estos fenómenos para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. Por ejemplo, si hacemos girar la aguja en la ruleta mostrada en la Figura 1, desde la posición inicial (número 6), impulsándola hacia la derecha, no sabemos con seguridad qué número resultará. Supongamos que la ruleta se para en el 1. Si giramos a continuación la aguja en sentido contrario al anterior (hacia la izquierda) no es seguro que vuelva al número 6. Por otro lado, aunque los 8 números en la ruleta tienen la misma probabilidad, no podemos asegurar (e incluso sería difícil) que en ocho giros sucesivos obtengamos una vez cada uno de los números.

Esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios sin duda influye en el desarrollo más tardío de las nociones de probabilidad, aunque esto no quiere decir que los niños no tengan ideas intuitivas al respecto.



Figura 1: Ruleta de 8 valores equiprobables

#### **4.3.2. Teorías sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico**

He aquí las investigaciones sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico en los niños llevadas a cabo por Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975) y algunas posteriores:

##### **I. Etapas del desarrollo cognitivo según Piaget**

Desde que nacemos hasta que llegamos a la vida adulta, nuestra forma de pensar, así como el razonamiento matemático, van evolucionando. Piaget se centró en dar criterios para determinar en qué nivel de desarrollo intelectual se encuentra el niño a diversas edades respecto a la comprensión formal de los conceptos matemáticos.

La teoría desarrollada por Piaget (1975) indica que cuando un individuo afronta un problema matemático, lo intenta resolver mediante los conocimientos que ya posee, usando esquemas conceptuales existentes. Como resultado de la asimilación, el esquema cognitivo existente se reconstruye o expande para acomodar la situación.

Piaget postula que la experiencia, la actividad y el conocimiento previo son las bases que determinan el aprendizaje. El conocimiento es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno. El niño trata de adaptarse al mundo que le rodea. Cuando una idea nueva se le presenta, se crea un conflicto cognitivo o desequilibrio en su estado mental, si esta idea choca con las ya existentes.

Por ejemplo, cuando se comienza el estudio de los números decimales, puede crearse un conflicto cognitivo respecto a la idea asumida previamente de que todo número tiene un número siguiente (y que era válida para los números naturales). Así cuando un niño percibe que entre un número decimal y otro pueden concebirse infinitos números diferentes, se encuentra perdido. Para reaccionar a este desequilibrio se requiere un proceso de “adaptación” que consiste en los pasos de asimilación y acomodación. La asimilación es la incorporación (aceptación) por parte del sujeto de los datos nuevos (en este caso, aceptar que hay números que no tienen un único siguiente). La acomodación es el cambio o reestructuración de los conocimientos ya existentes incluyendo los nuevos conocimientos o la nueva información (sería comprender globalmente la estructura del sistema numérico).

El aprendizaje se concibe como un proceso que progresa lentamente con puntos conflictivos que el alumno debe superar mediante el proceso descrito. La posibilidad de aprender depende del conocimiento previamente adquirido y del desarrollo intelectual del alumno, que sigue una serie de etapas. Las etapas son particiones en fases, de modo que los sujetos que están en una misma fase tienen un modo de razonamiento similar y la progresión de una etapa a otra siempre sigue un cierto patrón (Piaget, 1975).

Estas etapas determinan el desarrollo evolutivo y se concretizan para el caso de la probabilidad en Piaget e Inhelder (1951). Son las siguientes (la edad es aproximada; puede variar de un niño a otro, pero las etapas siempre se suceden en el mismo orden):

- **Período sensorio motor** (0-2 años). Se caracteriza por el movimiento y las sensaciones. El bebé comienza a manipular objetos; percibe y experimenta propiedades (color, tamaño, forma, textura, sabor, olor,...). Hacia los 5 meses discrimina conjuntos de 2-3 ítems; a los 10 meses discrimina conjuntos de 3-4 ítems.
- **Período pre operacional** (2-7 años). Caracterizado por la necesidad de manipular objetos reales para el aprendizaje de un cierto concepto, pues el niño se apoya en sus experiencias empíricas para comprender los conceptos. El niño de educación infantil y comienzo de la educación primaria llega a comprender la organización del espacio, situando y desplazando los objetos (comprendiendo conceptos como dentro/fuera, encima/debajo, delante/detrás, arriba/abajo).

También descubre y compara propiedades físicas de los objetos que manipula: longitud, distancia, cantidad. Es capaz de ordenar sucesos en el tiempo (saber lo que ocurrió antes y lo que vendrá después). Trabaja con una sola cantidad y resuelve problemas de cambio sencillo (operaciones aditivas).

- ***Período de las operaciones concretas*** (7-11). Se comienza a comprender la conservación de la masa, peso, número y volumen. Aparecen conceptos secundarios, que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta. Este es el periodo en que el niño va progresando a lo largo de la educación primaria. Aparece la comprensión de operaciones reversibles (aritméticas) con la adquisición de principios de conservación de cantidad, peso y volumen. Agrupa los objetos en función de propiedades aditivas o multiplicativas; ordena elementos en función de una cualidad que varía (por peso, por color). Adquiere la comprensión del sistema de numeración y de las operaciones con los números. Comprende conceptos espaciales y operaciones temporales. Los objetos materiales son un referente importante y todavía tiene dificultad para concebir una operación en forma abstracta.
  
- ***Período de operaciones formales*** (11-15). El período de las operaciones formales constituye el último paso del desarrollo intelectual, y de adquisición de las habilidades cognitivas y sociales (Inhelder y Piaget, 1955; Piaget, 1975). Se pueden manipular relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis y se establecen conclusiones. Se comprende el significado de abstracciones verbalmente, sin referirse a objetos particulares. Características del pensamiento formal son: (a) se contempla lo real como parte de lo posible; (b) se acentúa lo hipotético-deductivo frente a lo empírico-inductivo; (c) se depura el pensamiento proposicional; (d) se acentúa la diferencia entre inteligencia práctica y especulativa; (e) se incrementa la cantidad y calidad de las estrategias de procesamiento de la información; (f) se potencia y acentúa el análisis crítico frente a las percepciones globales; (g) se depura y da carácter sistemático al método de análisis; (h) se desarrolla y amplía el razonamiento combinatorio.

En lo que se refiere a la probabilidad, según Inhelder y Piaget (1955), la adquisición de las operaciones formales viene caracterizada por el razonamiento combinatorio, la lógica de proposiciones, la proporcionalidad, la comprensión de la

relatividad de dos movimientos o velocidades, la comprensión del equilibrio mecánico (a toda acción le corresponde una reacción de la misma intensidad pero en sentido contrario), la probabilidad y la correlación, que para Piaget es el último paso en la comprensión de la probabilidad.

## **II. La intuición, según Fischbein**

Otro autor muy influyente en el campo de la probabilidad es Fischbein (1975), quien trató de demostrar que los niños tienen ideas correctas parcialmente formadas sobre los conceptos probabilísticos y analizó el efecto de la instrucción para la mejora de estas intuiciones. También concede una gran importancia a la intuición como componente de la inteligencia. Para el autor el conocimiento intuitivo “no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos rigurosos y, a pesar de ello, se tiende a aceptar como cierto y evidente”.

Las intuiciones son, según Fischbein (1987), procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, y tienen las siguientes características: inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad y auto-evidencia. La inmediatez significa que las intuiciones no son reflexivas, sino que surgen con frecuencia en forma espontánea. El carácter global se opone al analítico o descomposición en partes. Las intuiciones van más allá de un caso particular, en cierto modo tienen un carácter teórico y por eso sirven para extrapolar o hacer predicciones. Parecen autoevidentes para el sujeto, quien no necesita demostración. Las intuiciones se relacionan entre sí, formando estructuras de razonamiento. Fischbein (1987) diferencia entre intuiciones primarias y secundarias:

- Las *intuiciones primarias* se adquieren directamente con la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Ejemplo de ellas son las intuiciones espaciales elementales, como el cálculo de distancias y localización de objetos, o el admitir que al lanzar un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.
- Por el contrario, las *intuiciones secundarias* se forman como consecuencia de la educación, principalmente en la escuela. Por ejemplo, una intuición secundaria (errónea) es la llamada “falacia del jugador”, descrita en el apartado 3, por la

cual, después de lanzar una moneda una serie de veces y haber obtenido caras, el sujeto tiende a predecir que la próxima vez es más probable que salga cruz.

Una intuición secundaria no se reduce a una simple fórmula aceptada o utilizada automáticamente, sino que se transforma en convicción, en creencia, en un sentimiento de evidencia. Pero una intuición no se forma a partir de la información obtenida de una lectura o de una explicación teórica, sino de una información que el alumno utiliza en sus propias acciones y predicciones a lo largo de gran parte de su desarrollo intelectual.

Después del desarrollo hecho, resumiremos en dos párrafos las conclusiones de Fischbein y Piaget en lo que se refiere al aprendizaje de la probabilidad:

**Conclusión de Piaget:** sostiene que por debajo de la etapa de operaciones formales los niños no pueden comprender la probabilidad, por lo tanto no pueden emitir juicios probabilísticos.

**Conclusión de Fischbein:** la intuición probabilística no se desarrolla espontáneamente, excepto dentro de unos límites muy estrechos. La comprensión, interpretación, evaluación y predicción de fenómenos probabilísticos no pueden ser confiadas a intuiciones primarias que han sido despreciadas, olvidadas y abandonadas en un estado rudimentario de desarrollo bajo la presión de esquemas operacionales que no pueden articularse con ellas. Por ello es necesario **entrenar desde los primeros niveles la base intuitiva relativa al pensamiento probabilístico.**

Como vemos, las teorías de Piaget y Fischbein no tienen un punto de encuentro. En la próxima sección se analizarán tres apartados fundamentales en el desarrollo del razonamiento probabilístico en los niños, contemplando las distintas consideraciones de estos autores.

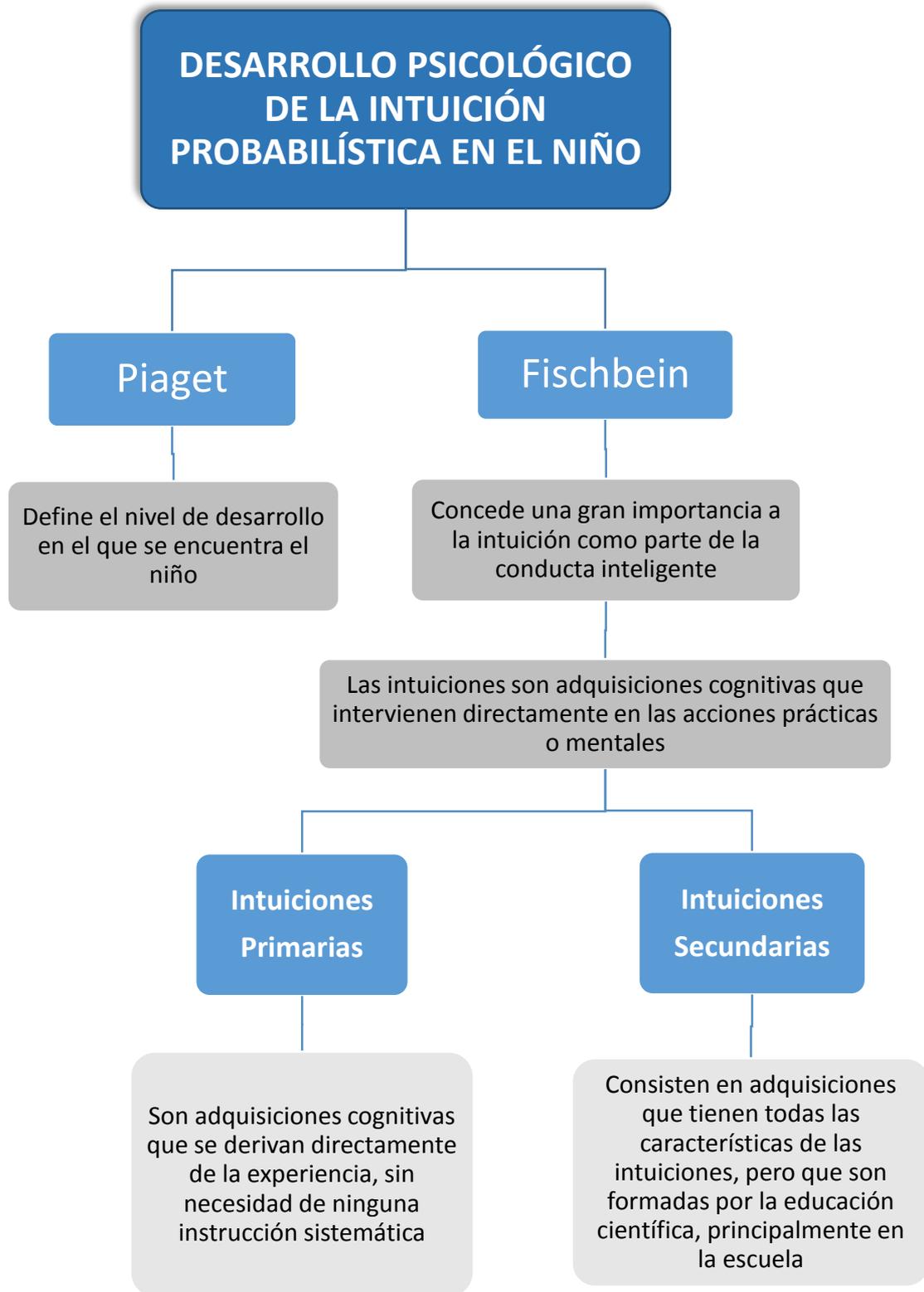


Figura 2: Esquema del desarrollo psicológico para Piaget y Fischbein

#### **4.4. TRES CUESTIONES CLAVE EN EL DESARROLLO PROBABILÍSTICO EN LOS NIÑOS**

---

Cuando los profesores nos enfrentamos a la tarea de enseñar al niño, estamos interesados en conocer cuáles son las tareas que podemos proponer a distintas edades y qué dificultades puede encontrar el niño en su ejecución. A continuación, siguiendo a Batanero (2013), realizamos un estudio de tres puntos fundamentales.

- **Aceptación del Azar**

El primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarnos de que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas, es decir, de apreciar algunas características básicas de la aleatoriedad. Los niños están rodeados de azar desde que nacen, en sus juegos (echar a suertes, juegos de dados, cartas,...) y vida cotidiana (meteorología, deportes,...). ¿Desarrollan entonces los niños pequeños una comprensión intuitiva del azar?

Esta teoría fue rechazada por Piaget e Inhelder (1951), debido a que tenían una concepción muy compleja del significado del azar, que para ellos es complementario a la relación causa-efecto. Según estos autores el azar ha de verse como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente produce un resultado inesperado. El azar habría que considerarlo asimismo como complementario a la composición lógica de operaciones reversibles y requiere un razonamiento combinatorio, para poder concebir las distintas posibilidades que pueden darse en un fenómeno aleatorio. Pero como el niño pequeño no comprende la idea de causa, ni tiene razonamiento combinatorio, según los autores no tiene un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios.

Piaget organiza el siguiente experimento para probar su teoría. Utiliza una bandeja con dos compartimentos en uno de sus extremos (Figura 3). En uno de estos compartimentos se colocan ocho bolas blancas y en el otro ocho rojas, de modo que al bascular la bandeja se produce la mezcla progresiva de las dos clases de bolas. Antes de mover la bandeja, Piaget pide a los niños que hagan una predicción sobre la colocación final de las bolas, cuando la bandeja vuelve a su posición original.

En el *periodo pre operacional* los niños piensan que, después de mover varias veces la bandeja, las bolas vuelven nuevamente a su lugar original, o bien que el conjunto completo de 8 blancas acabarán en el lugar ocupado originalmente por las rojas, y viceversa. Piaget interpreta esta reacción típica de los niños menores de 7 años como indicadora de que el niño no comprende la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria por no tener aún un pensamiento reversible. Además el niño de esta edad no comprende bien la relación entre causa y efecto, ni tiene razonamiento combinatorio completo, por lo que Piaget piensa no hay una intuición del azar innata en el niño, como no existía tampoco en el hombre primitivo, que atribuía los sucesos aleatorios a causas ocultas o a la “voluntad de los dioses”.

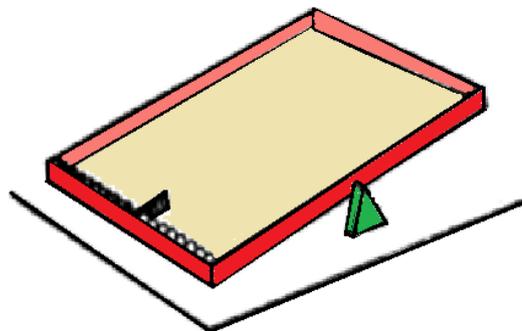


Figura 3: Experimento de la bandeja: Al mover la bandeja, las bolas, que al principio estaban ordenadas, se mezclan progresivamente.

Esta opinión de Piaget es rechazada por Fischbein, para quien la *intuición primaria* del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista, aparece antes de los 7 años. Fischbein se basa en la conducta de los niños al practicar juegos de azar, ya que en juegos sencillos, los niños son capaces de elegir la opción de mayor probabilidad. Por ejemplo, si preguntamos al niño en cuál de las dos cajas A y B (Figura 4) es más fácil sacar bola roja con los ojos cerrados, el niño es capaz de acertar si el número de casos desfavorables es igual y el número de casos es pequeño.

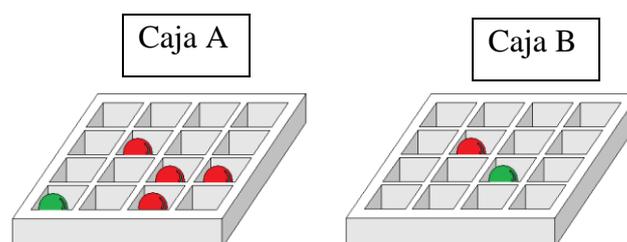


Figura 4: Urnas con bolas de colores

En el *periodo de las operaciones concretas* (entre 7 y 11 años) con la adquisición de esquemas operacionales espacio-temporales y lógico-matemáticos, el niño alcanza la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, aunque esta comprensión no es completa, puesto que el pensamiento está todavía muy ligado al nivel concreto. No obstante, el niño comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. Puede entender, por ejemplo, que la cantidad de nubes, junto con el viento va a producir o no la lluvia. Pero, si no comprende bien la interferencia de las causas, sin reconocer su independencia, o comprende la independencia y no la interferencia, no llega a construir la idea de azar. Puede entonces pensar que la lluvia la producen las hadas o los mayores o buscar otra explicación causal.

En los fenómenos aleatorios los resultados aislados son imprevisibles pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Así, aunque no sabemos si el próximo bebé que nazca será niño o niña, podemos predecir que en una gran ciudad la mitad más o menos de los recién nacidos serán de cada sexo. Es en este momento, cuando comprende la regularidad global de los fenómenos aleatorios, cuando el niño comienza a asignar probabilidades a los sucesos, como razón entre las posibilidades de un caso particular y del conjunto de posibilidades. Si se aceptan estas teorías, la idea de azar, para Piaget, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente adquirida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las *operaciones formales*.

Fischbein, por su parte, como hemos visto, indica que hay una intuición parcial del azar en el niño, que se va desarrollando poco a poco. Pero es necesaria la enseñanza, pues de otro modo, es posible que una persona llegue a las operaciones formales con una pobre percepción del azar. Entonces buscará dependencias causales que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias, por ejemplo “la mala suerte”. Estará influenciado por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas.

- **La estimación de la frecuencia relativa**

Supuesto que un niño sea capaz de diferenciar los fenómenos aleatorios y deterministas, el segundo paso es que pueda estimar en una serie de experimentos cuáles son los sucesos que aparecen con mayor o menor frecuencia. Muchos psicólogos han llevado a cabo experimentos de aprendizaje probabilístico, en los cuales se trata de estudiar las predicciones de los sujetos ante situaciones en que un suceso se repite con una determinada frecuencia relativa.

Por ejemplo (Figura 5), se presentan al alumno dos luces de color diferente (roja y blanca) que se encienden intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia, por ejemplo, el 70 y el 30% del tiempo respectivamente. Los resultados de este experimento indican que *en el periodo preoperacional* el niño adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo. Ello nos indica que los niños son capaces de apreciar las diferentes frecuencias relativas con que aparecen los resultados de los fenómenos aleatorios.



Figura 5: Experimento con dos bombillas

La estimación de la frecuencia relativa mejora en el *periodo de operaciones concretas*. Como resultado de experiencias acumuladas, la intuición de la frecuencia relativa se desarrolla de un modo natural como consecuencia de las experiencias del niño con situaciones que implican sucesos aleatorios, en las que sea necesaria una estimación de las frecuencias relativas de los fenómenos. Es fácil pensar en tales experiencias en la vida diaria, por ejemplo, cuando estimamos el tiempo que transcurre entre un autobús y otro, o hacemos una previsión sobre si va a llover o no, según el día se presente más o menos nublado, etc. En el *periodo de las operaciones formales* el adolescente ha hecho progresos en comparación a los niños más pequeños en lo que se refiere a la intuición de la frecuencia relativa, particularmente en casos donde las predicciones tienen algún resultado práctico.

- **Estimación de posibilidades y noción de probabilidad**

Piaget e Inhelder pensaron que el niño en el *periodo pre-operatorio* es incapaz de estimar correctamente la probabilidad de un suceso, por ejemplo, de sacar una bola roja en las urnas representadas en la Figura 4. Sugieren que el niño de esta edad no posee los recursos necesarios, que serían la habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible, el concepto de proporción y los procedimientos combinatorios.

Fischbein piensa que, a pesar de ello, el niño puede estimar probabilidades sencillas o al menos compararlas, por ejemplo, en el problema propuesto en la Figura 4, si le preguntamos en cuál de las urnas es más fácil sacar bola roja. Este tipo de situaciones aparecen con frecuencia en los textos de primaria o recursos en Internet para este nivel.

En el *periodo de las operaciones concretas* los niños pueden resolver problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso (por ejemplo, bola roja) en dos experimentos diferentes, sólo en situaciones donde bien el número de casos favorables (bolas rojas) o el número de casos no favorables (bolas verdes) son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias). Posteriormente pasan a resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción.

Los adolescentes progresan rápidamente en el cálculo de probabilidades, incluso cuando las fracciones a comparar tienen diferente denominador. Esto se observa con niños a partir de 12-13 años, en incluso a partir de 10 años con la ayuda de la instrucción.

De interés para este apartado son los estudios de Green (1983), Cañizares (1997) y Fernandes (2001), quienes realizaron una evaluación del razonamiento probabilístico de niños ingleses (11-16 años), españoles (10-14 años) y portugueses (8-11 años), respectivamente, con cuestionarios escritos.

## 5. ¿QUÉ CONTENIDOS SE DEBEN ENSEÑAR EN LA CLASE DE PROBABILIDAD?

Como he indicado anteriormente, los currículos para Educación Primaria están establecidos por la aún vigente *ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria (MEC, 2007)*, y el *DECRETO 40/2007, de 3 de mayo* (Junta de Castilla y León) que manifiesta expresamente:

*“Los contenidos del bloque 4, **Tratamiento de la información, azar y probabilidad**, adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Igualmente el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y para ayudar a valorar las ventajas que los conocimientos estadísticos proporcionan en la toma de decisiones, normalmente sobre cuestiones que estudian otras áreas. Tienen importancia en los contenidos que favorecen la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y permiten descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria. A su vez, los contenidos de este bloque deben iniciar en el uso crítico de la información recibida por diferentes medios.”*

En la Tabla 1 se exponen los contenidos que hacen referencia explícita a aspectos de azar y probabilidad en Educación Primaria, y que se han obtenido a partir del análisis de la *ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria (MEC, 2007)*.

Como puede apreciarse, las directrices curriculares incluyen los temas de probabilidad a partir de los primeros niveles de la enseñanza primaria. La estructura de los contenidos es gradual y, en términos generales, se hace alusión a la utilización de nociones de azar y probabilidad, a la realización de experimentos aleatorios y al cálculo de la probabilidad de un suceso. Además se sugiere la incorporación del uso de herramientas tecnológicas como apoyo para fomentar la comprensión de los contenidos propuestos.

Ciclo	Contenidos
<b>Primer ciclo</b>	Carácter aleatorio de algunas experiencias: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.</li> </ul>
<b>Segundo ciclo</b>	Carácter aleatorio de algunas experiencias: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto.</li> </ul> Introducción al lenguaje del azar: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Constatación del carácter aleatorio de algunas experiencias.</li> </ul>
<b>Tercer ciclo</b>	Carácter aleatorio de algunas experiencias: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación y expresión del grado de probabilidad de un suceso.</li> <li>- Utilización del lenguaje adecuado para describir experiencias relacionadas con el azar.</li> <li>- Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales.</li> </ul>

Tabla 1: Contenidos en relación al tema de azar y probabilidad en Educación Primaria (MEC, 2007)

En el curso 2014/2015 comenzará a implantarse el currículo establecido en la *Orden ECD/686/2014, de 23 de abril* (MEC), recientemente aprobada y que no establece unas orientaciones concretas para el tratamiento de la probabilidad. Los contenidos que hacen referencia explícita al azar y la probabilidad se presentan en la Tabla 2.

Curso	Contenidos
<b>Quinto</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Carácter aleatorio de algunas experiencias</li> </ul>
<b>Sexto</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Carácter aleatorio de algunas experiencias.</li> <li>- Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.</li> </ul>

Tabla 2: Contenidos en relación al tema de azar y probabilidad en Educación Primaria (MEC, 2014)

Como podemos observar, en el nuevo currículo no se incluye el estudio de lo aleatorio hasta 5º curso, y en 6º curso se alude a la iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.

Si bien el nuevo enfoque del currículo, que contempla la aproximación intuitiva a la probabilidad, nos parece muy conveniente, el no incluir este contenido antes del 6º curso parece contrario al deseo de lograr un desarrollo adecuado y temprano de dicha intuición probabilística.

## 6. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

Godino et al. (1987) concluyen que los conceptos de probabilidad presentan un alto nivel de abstracción y complejidad, de modo que no es posible un enfoque de la enseñanza elemental orientada hacia la adquisición formal de dichos conceptos. Sin embargo, es preciso tener en cuenta que hay diferentes niveles de comprensión adecuados a distintas edades y capacidades.

En el trabajo de estos investigadores se destacan las consideraciones de dos autores:

- Freudenthal (1983) sostiene que la finalidad primordial de la enseñanza de una noción matemática en los niveles de la enseñanza obligatoria no es la adquisición de conceptos por parte del alumno (aprendizaje de una teoría matemática), sino la constitución de objetos mentales (intuiciones) basados en una fenomenología variada, etapa que debe ser previa a la adquisición de conceptos.
- Santaló (1977) afirma que no se trata de conocer a fondo las teorías respectivas, cosa reservada a especialistas, sino de educar la intuición para que no parezcan cosas caprichosas ni milagrosas. Tal vez muchos de los inconvenientes del comportamiento global de grandes sectores de la población provenga de que la gran mayoría de los ciudadanos no han sido nunca educados en probabilidad y estadística.

En este mismo trabajo apuntan una serie de criterios de índole metodológica para la introducción de la probabilidad en la escuela que, pese a haber sido propuestos hace ya unos cuantos años, son absolutamente adecuados en el contexto de este trabajo.

## **6.1. SCHOOL COUNCIL PROJECT ON STATISTICAL EDUCATION**

---

En 1975, en la Universidad de Sheffield de Inglaterra, se crea el School Council Project on Statistical Education que desarrolla un currículo para la introducción de la Estadística y Probabilidad en los niveles de enseñanza obligatoria. Los principios metodológicos que orientan los materiales de enseñanza desarrollados por este grupo de trabajo son los siguientes:

- Los conceptos y técnicas serán desarrollados en un contexto práctico, vinculando las probabilidades al mundo del niño.
- Las técnicas no tienen que ser completamente desarrolladas en la primera ocasión en que se tratan. Muchas de las ideas introducidas en los primeros años se volverán a tratar en años posteriores.
- La justificación teórica completa de todos los temas no es necesaria ni deseable. Algunos elementos sólo se tratan en el contexto de un problema; otros conceptos serán cubiertos únicamente por medio de experimentos y no se justifican teóricamente.
- Se pondrá de manifiesto el carácter interdisciplinar de la Estadística y de la Probabilidad, relacionándolas con el mundo biológico, político, social y físico.
- El método de trabajo individual del alumno sólo es recomendable para aprender algunas técnicas estadísticas específicas, pero no para los objetivos referentes a la interpretación de datos y obtención de inferencias. En este caso, el trabajo en grupos y la técnica de experimentación, ensayo y error, son recomendables.

## **6.2. LA PROBABILIDAD EN LA ESCUELA SEGÚN GLAYMANN Y VARGA**

---

En 1975 estos dos autores recomiendan un proceso de enseñanza en tres etapas: experimentación, razonamiento elemental y medida de la probabilidad.

- I. Experimentación: Esta primera etapa para familiarizar al niño con el mundo probabilístico consiste en una amplia experimentación, manipulando material variado (dados, peonzas, monedas, bolas, etc.). Cada experiencia se repite muchas veces en las mismas condiciones y luego se propone a los niños que traten de adivinar el resultado con objeto de que capten las propiedades inherentes a los fenómenos aleatorios.
  
- II. Razonamiento elemental: Consiste en proponer juegos que permitan comparar cualitativamente las probabilidades de ciertos sucesos.
  
- III. Uso de fracciones, surgidas de las frecuencias, como medida de la probabilidad. El aprendizaje y la utilización de este instrumento se podrá ir haciendo simultáneamente con el estudio de las situaciones y vendrá motivado por ellas.

Finalmente, para dar una versión más moderna de cómo llevar al aula los contenidos de azar y probabilidad, incluimos un último epígrafe sobre la visión de Chamorro (2003), que se sustenta claramente en los criterios expuestos.

## **6.3. DIDÁCTICA DEL AZAR Y LA PROBABILIDAD SEGÚN CHAMORRO.**

---

Con el ánimo de que los maestros de Educación primaria dispongan de un desarrollo didáctico de la probabilidad para mejorar la educación matemática de los alumnos, Chamorro (2003) propone una serie de principios que sustenten la propuesta didáctica de la probabilidad:

- 1) Aprovechar el entorno familiar del niño (juegos, loterías, entorno familiar, etc.) para proponer situaciones que le acerquen al mundo de la combinatoria y del azar, y a la determinación de ciertas probabilidades asociadas.

- 2) Aprovechar el entorno escolar del niño y las posibilidades de interdisciplinariedad que éste ofrece para plantear situaciones donde el niño pueda organizar datos, combinarlos y calcular probabilidades asociadas.
- 3) Enmarcar las situaciones propuestas en un campo de experimentación (con monedas, peonzas, bolas, dados, cartas, etc.) donde se hagan patentes, para los niños, las distintas posibilidades de combinación, las distintas posibilidades de aparición de un determinado resultado, las distintas formas de registro y de organización de los resultados.
- 4) Desarrollar el vocabulario específico de los saberes que se pretende introducir, desde las expresiones coloquiales asociadas al mundo probabilístico, combinatorio o estadístico, hasta las expresiones propias del saber sabio que se está pretendiendo introducir.
- 5) Desarrollar toda la serie de posibilidades de representación asociadas, para facilitar así: la organización de datos, la lectura de datos, la determinación de frecuencias o probabilidades, la consecución de todas las posibilidades combinatorias, la obtención de medidas ligadas a la probabilidad, estadística o combinatoria.
- 6) Utilizar la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau) como marco teórico para la proposición de situaciones donde se conceda una gran importancia a las fases de formulación y de validación de los resultados obtenidos en la resolución de las mismas.
- 7) Organizar la secuencia de situaciones propuestas al alumno de forma que el trabajo en grupo se transforme en una constante y, de este modo, facilitar la aproximación del alumno a las tareas problemáticas complejas que suponen la mayoría de las situaciones relacionadas con el universo aleatorio.

## 7. UN RECURSO DIDÁCTICO PARA DESARROLLAR LAS PRIMERAS IDEAS DE AZAR Y PROBABILIDAD EN LOS ALUMNOS DE PRIMARIA: “LABAPC”

Se trata de un recurso multimedia elaborado por Juan García Moreno: “**LABORATORIO BÁSICO DE AZAR, PROBABILIDAD Y COMBINATORIA**”. **LABAPC**.



Figura 6: Logo LABAPC

<http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html>

Este material obtuvo el **primer premio de desarrollo de Materiales Educativos organizado por el Ministerio de Educación** a través del Instituto de Tecnologías Educativas en el año 2010.

El autor de este laboratorio toma como referentes los trabajos de Fischbein (1975) y Piaget (1975) basados en juegos de azar, dado que favorecen la adquisición de nociones de probabilidad de la manera más natural: la intuitiva. Los juegos de azar para la enseñanza de la probabilidad facilitan **pasar de las intuiciones primarias sobre el azar** (las que se forman antes e independientemente de una enseñanza sistemática) **a las intuiciones secundarias** (que se forman después de un proceso sistemático de enseñanza).

Así mismo, García (2009-2010) también señala en la guía didáctica de **LABAPC** que en **Educación Primaria** se trata fundamentalmente de desarrollar una “**intuición probabilística**” lo más ajustada posible. **Los métodos de asignación probabilística serán, fundamentalmente, la estadística de la ocurrencia de los sucesos a estudio y el contraste antes y después de la experimentación.** Todos los niños tienen, en mayor o menor medida, una opinión *a priori* desde edades muy

tempranas, y en todas las culturas, de lo posible aunque indeterminado (intuición del azar). El objetivo global en esta etapa se centra en ajustar estos dos modos de asignación probabilística.

LABAPC es un recurso multimedia, en forma de página web, formado por más de 50 aplicaciones o instrumentos interactivos, íntimamente interrelacionadas entre sí (por sus contenidos, sus procedimientos, su interfaz,...). Estas aplicaciones pretenden, mediante la simulación y experimentación, abordar el tema de la probabilidad. Se simulan una gran variedad de experimentos aleatorios, se configuran situaciones a modo de problemas, se hacen comparaciones de situaciones probabilísticas...

## **7.1. OBJETIVOS DE LABAPC**

---

1. El desarrollo del **razonamiento inductivo**, el aprender a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar...
2. El desarrollo del **razonamiento argumentativo o deductivo**, animando a los alumnos a ensayar argumentaciones cada vez más fundamentadas y convincentes, motivándolos en la capacidad para detectar inconsistencias en los razonamientos propios y ajenos, a que se enfoquen en explicar, verificar, comunicar, sistematizar y descubrir.
3. Favorecer una actitud positiva ante la experimentación y la simulación y el desarrollo de la confianza en la propia capacidad para experimentar, descubrir y comunicar.
4. Favorecer una actitud positiva ante la **resolución de problemas** y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, o para **plantear problemas nuevos**.
5. Favorecer el disfrute de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
6. **Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos**, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

7. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: **utilizar técnicas de recogida de la información** y procedimientos de medida.
8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad y otras fuentes de información. Analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
9. **Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos** (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
10. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones, **identificando errores conceptuales, falacias, mitos, falsas creencias...**
11. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

## **7.2. ESTRUCTURA**

---

Las aplicaciones que conforman LABAPC se han estructurado en cuatro bloques además de una guía didáctica:

1. **Azar y probabilidad:** diversas situaciones-juego, experimentos y problemas que se recrean mediante variadas aplicaciones en las que se puede experimentar e investigar.
2. **Análisis de problemas:** aplicaciones que permiten la simulación, previo análisis teórico, de situaciones problemáticas relevantes (loterías, quinielas...).

3. **Combinatoria:** aplicaciones que simulan retos que nos llevan a utilizar las técnicas de recuento.
4. **Equipamiento experimental:** simulación de diversos aparatos utilizados frecuentemente en los experimentos aleatorios (urnas, barajas, lanzamientos...).



Figura 7: Captura de pantalla del menú principal de LABAPC

## 8. OTROS MATERIALES Y PROPUESTAS DIDÁCTICAS DE UTILIDAD PARA LA CLASE DE PROBABILIDAD EN PRIMARIA

En este epígrafe se recogen algunas propuestas didácticas para la enseñanza del azar y la probabilidad en el aula de Primaria.

### 8.1. UN ESTUPENDO MATERIAL DIDÁCTICO DIGITAL

La siguiente propuesta forma parte del material didáctico digital desarrollado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado, el Ministerio de Industria, Energía y Turismo y la entidad pública empresarial Red.es. Se ha desarrollado en el marco del programa Escuela 2.0 para el **Tercer ciclo de primaria**.

A lo largo de este recurso se trabajará la temática del azar y la probabilidad y su aplicación en la vida real y cotidiana. Por otro lado, se promoverá la comprensión de la vinculación y diferenciación entre estos dos términos. Todo esto se realizará de una manera muy divertida, practicando con los ejercicios de las diferentes páginas web facilitadas a lo largo del recurso.

Mediante la presentación de un caso inicial, se introduce el tema sobre el Azar y la Probabilidad, enumerando una serie de conceptos así como indicaciones para calcular la probabilidad de los sucesos y representar datos a través de gráficos. Los dos personajes del caso, Cristina y Luis, acompañarán al alumnado a lo largo de toda la unidad didáctica en diversas situaciones.



Figura 8: Imagen de bienvenida de la propuesta didáctica para el alumno

A partir del caso inicial, en cada actividad se mostrarán, mediante animaciones, nuevos casos que versarán sobre cada una de las temáticas abordadas en las tareas que deberán realizar. En cada una de estas actividades se introducirán conceptos, sucesos que dependen del azar, indicaciones para calcular la probabilidad, etc. Se pretende, asimismo, que el alumnado reflexione sobre el uso de estas indicaciones en sus vidas diarias.

[http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/elazarylaprobabilidad/html/MAT45RDE\\_imprimir\\_docente.pdf](http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/elazarylaprobabilidad/html/MAT45RDE_imprimir_docente.pdf)

## **8.2. ALGUNAS PROPUESTAS DIDÁCTICAS CONCRETAS**

---

En este apartado se recogen dos secuencias didácticas muy concretas. La primera propuesta por Chamorro (2003), y la segunda de entre los muchos materiales recopilados a lo largo de los años y que resulta una actividad muy interesante para trabajar en el aula de primaria.

### **1º. Propuesta de una secuencia didáctica para desarrollar las primeras ideas de lo aleatorio y la probabilidad en los alumnos de Primaria.**

Parte de la siguiente premisa: Los niños de los primeros niveles de Primaria poseen con anterioridad una idea inicial sobre la existencia de experimentos sobre los que se puede elaborar una hipótesis de resultados asociados y otros en los que tal previsión no es posible. La influencia del entorno social (juegos, medios de comunicación, sobre todo la televisión, apuestas sobre resultados deportivos, etc.) va instalando en la mente del niño la idea de que hay experimentos para los cuales no es posible decir, con toda seguridad, lo que se va a verificar.

Por ello propone, para comenzar, someter a los alumnos a una batería de experimentos y preguntas para que ellos determinen si están seguros o no del resultado de los mismos:

- Si acercamos una llama a un papel, ¿qué pasa? ¿Estamos seguros de lo que va a pasar?
- Si lanzamos una moneda al aire, ¿qué resultados podemos obtener? ¿Estamos seguros de lo que va a salir?
- Y si lanzamos un dado, ¿podemos decir con toda seguridad que saldrá un 6?
- Vamos al parque temático, ¿te dejan entrar si no tienes entrada?
- Si nos hemos perdido en la excursión que ha organizado la escuela y llegamos a un cruce en que hay tres caminos, ¿podremos decidir con toda seguridad qué camino tomar?



El niño que no haya tenido ningún tipo de entrenamiento previo, que se guíe por su intuición primaria, dirá que los tres coches tienen las mismas posibilidades de llegar los primeros a la meta. Esto es erróneo y tras la práctica sucesiva de este tipo de juegos, los alumnos se darán cuenta que el coche azul, el de cara y cruz, tiene el doble de probabilidad de ser el primero que los otros dos.

La dificultad de esta cuestión está en darse cuenta de que el espacio muestral (el conjunto de todos los resultados posibles) tiene en realidad 4 elementos: CC, CX, XC, XX, todos ellos equiprobables: aunque al lanzar las monedas éstas sean indistinguibles, uno se da cuenta de que en la primera puede salir cara o cruz con igual probabilidad, y esto mismo sucede con la segunda moneda, de forma que quedan  $2 \times 2 = 4$  resultados posibles, cada uno de ellos con probabilidad de  $1/4$

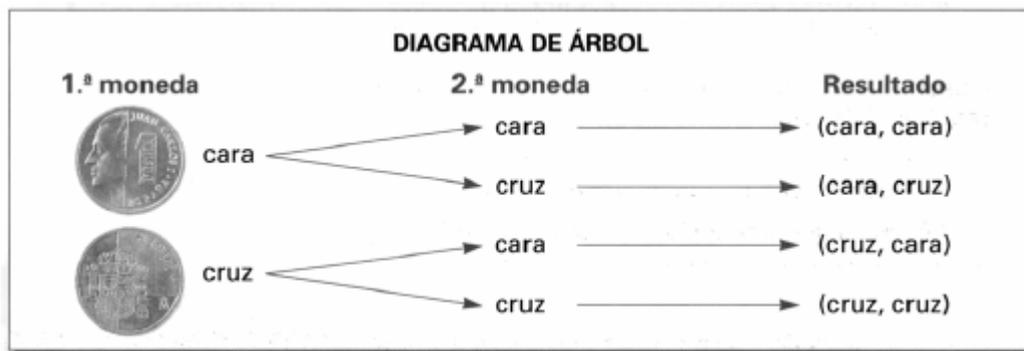


Figura 10: Diagrama de árbol del lanzamiento de monedas

Como en el caso de “La falacia de jugador”, este tipo de juegos nos reafirman en la idea aportada por Fischbein (1975), que concede al entrenamiento una parte fundamental en el desarrollo de las intuiciones probabilísticas ayudando a configurar un pensamiento que sepa tratar los fenómenos del azar.

### 8.3. RECURSOS DE LAS TICS

El proyecto Agrega 2 es una plataforma tecnológica implantada en las administraciones educativas españolas, a través de nodos autonómicos interconectados entre sí (federación de repositorios de objetos digitales educativos Agrega). Esta red de servidores aloja miles de recursos educativos, adecuadamente etiquetados y empaquetados.



Figura 11: Logo proyecto Agrega 2

[http://agrega.hezkuntza.net/visualizar/es/es-eu\\_2011020113\\_1230583/false](http://agrega.hezkuntza.net/visualizar/es/es-eu_2011020113_1230583/false)

Los objetos educativos y secuencias didácticas alojados en Agrega se pueden descargar y ser utilizados directamente por profesores y alumnos como recursos didácticos y también ser re combinados para confeccionar con ellos nuevos materiales educativos.



Figura 12: Captura de pantalla de la página de presentación del proyecto AGREGA

Incluimos a continuación la captura de varias pantallas con algunas aplicaciones para trabajar el azar y la probabilidad.

<http://usalasticenmaticas.wordpress.com/2009/04/20/azar-y-probabilidad/>

Secuencias didácticas del proyecto Agrega en las que se trabaja con experimentos aleatorios, sucesos al azar, cálculo de probabilidades, problemas...



Figura 13: Captura de pantalla de la página de presentación de <http://usalasticenmaticas.wordpress.com/2009/04/20/azar-y-probabilidad/>

<http://www.librosvivos.net/smtc/PagPorFormulario.asp?idIdioma=ES&TemaClave=1051&est=4>



Figura 14: Captura de pantalla. Sucesos aleatorios

<http://www.editorialteide.es/elearning/Primaria.asp?IdJuego=923&IdTipoJuego=8>

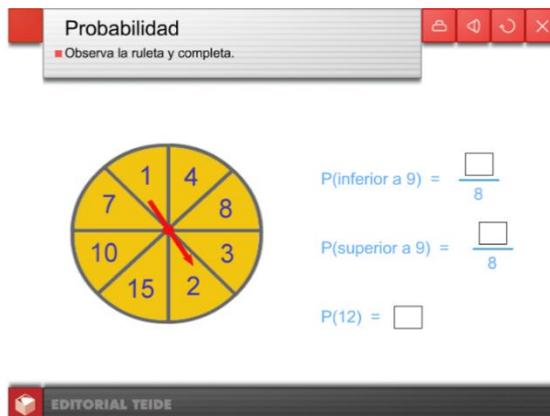


Figura 15: Captura de pantalla. Probabilidad en Editorial Teide

<http://www.genmagic.net/repositorio/displayimage.php?album=5&pos=0>

Aplicación que genera ejercicios de iniciación a la representación gráfica.



Figura 16: Captura de pantalla de la aplicación

“<http://www.genmagic.net/repositorio/displayimage.php?album=5&pos=0>”

Otras páginas que pueden ser útiles en el aula son:

<http://www.pepe.jupenoma.es/oviedo2010.html>

<http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/azar.htm>

[http://recursostic.educacion.es/apls/informacion\\_didactica/1350](http://recursostic.educacion.es/apls/informacion_didactica/1350)

<http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html>

<http://www.uco.es/~ma1marea/profesor/primaria/estadist/cognitiv/indice.htm>

<http://luisamariaarias.wordpress.com/2012/12/12/azar-y-probabilidad-juegos/>

<http://coleydeporte.blogspot.com.es/2013/03/probabilidad-y-azar-tercer-ciclo.html>

[http://roble.pntic.mec.es/arum0010/temas/porcentaje\\_probabilidad.html](http://roble.pntic.mec.es/arum0010/temas/porcentaje_probabilidad.html)

## 9. CONCLUSIONES

A lo largo del trabajo hemos podido comprobar que existen razones de peso que justifican el tratamiento del azar y la probabilidad en edades tempranas, incluso desde la educación infantil, como son:

- Su interés para la resolución de problemas relacionados con el mundo real y con otras materias del currículo.
- Su influencia en la toma de decisiones de las personas cuando disponen sólo de datos afectados de incertidumbre.
- Que su dominio facilita el análisis crítico de la información recibida a través, por ejemplo, de medios de comunicación.
- Que su comprensión proporciona una filosofía del azar de gran repercusión para la comprensión del mundo actual.

Además hemos estudiado las características específicas de lo aleatorio y algunas teorías sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico, llegando a la conclusión de que la intuición y el desarrollo programado de la intuición, son clave en el aprendizaje del azar y la probabilidad por parte de los niños.

Cada profesor deberá reflexionar sobre los procedimientos y estrategias más adecuados para desarrollar el pensamiento probabilístico en el aula, considerando las necesidades, intereses y capacidades de los alumnos, a fin de proporcionarles las herramientas más adecuadas en cada caso, para alcanzar este desarrollo. Hemos ofrecido algunas herramientas que nos parecen especialmente útiles y atractivas.

Para finalizar, y como hace Batanero (2006), nos remitiremos a las palabras de Laplace (1986/1825):

*“La teoría de la probabilidad no es en el fondo nada más que sentido común reducido a cálculo; nos permite apreciar con exactitud aquello que las mentes rigurosas pueden sentir con una especie de instinto que a veces no pueden explicar; nos enseña a evitar las ilusiones que con frecuencia nos engañan,... no hay ciencia más digna de nuestra contemplación, ni más útil para ser incluida en nuestro sistema de enseñanza pública”.*

## 10. BIBLIOGRAFÍA

- Alsina, A. (2012): *Estadística y Probabilidad en Educación Infantil*. Revista de Didácticas Específicas, nº 7, PP.4-22.
- Batanero C. (2013): *La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación*. En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, & F. Viseu, (Eds.) (2013). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade Do Minho.
- Blanco, L. (2011): *La investigación en educación matemática*. Education S. XXI, 29 (1), 109-128.
- Cañizares, M. J. (1997): *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.
- CCSSI, (2010): *Estándares Comunes para las Matemáticas de la Common Core State Standards Initiative*.
- Chamorro, M. C. (2003): *Didáctica de las matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Prentice Hall.
- Fernandes, J. A. (2001): *Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade*. *Quadrante*, 10(2), 3-32.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E. (1975): *The intuitive sources of probabilistic reasoning in children*. Dordrech: Reidel.
- Freudenthal, H. (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel. Dordrecht.
- García Moreno, J. (2010): “*LABORATOIO BÁSICO DE AZAR, PROBABILIDAD Y COMBINATORIA*”. LABAPC. Recurso multimedia.
- Glaymann, M. y Varga, T. (1976): *Las probabilidades en la escuela*. Teide. Barcelona.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987): *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Green, D. R. (1983): *A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years*. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

- Junta de Castilla y León (2007): *DECRETO 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León.*
- M.E.C. (2007). *Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria.*
- M.E.C. (2014). *Orden ECD/686/2014, de 23 de abril, por la que se establece el currículo de la Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.*
- M<sup>a</sup> Moliner (1983): *El diccionario del uso del español.*
- NCTM, (2003): *Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics.*
- Pérez Cuenca (2009): *Probabilidad en Primaria.* Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana.
- Piaget, J. (1975): *Psicología de la inteligencia.* Buenos Aires: Psique.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951): *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.
- R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.
- Santaló, L.A. (1977): *La educación matemática hoy.* Teide. Barcelona.
- Tanur, J. M.; Modteller, F.; Kruskal, W. A. y otros (1978): *Statistics: a guide to the unknown.* Holden-Day. California.