

# Introducción a la geometría hiperbólica

José Antonio Capelo Botas

9 de enero de 2015

Tutora: Ana José Reguera López

# Índice

<b>1. Transformaciones de Möbius</b>	<b>5</b>
1.1. El grupo $Mob^+$	6
1.2. Reflexiones. El grupo $Mob$	13
1.3. El grupo $Mob(\mathbb{H})$	21
<b>2. Longitud, distancia y estructura riemanniana en <math>\mathbb{H}</math></b>	<b>28</b>
2.1. Métrica en $\mathbb{H}$	28
2.1.1. El concepto de longitud	28
2.1.2. Distancia en $\mathbb{H}$	31
2.2. $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ , una variedad riemanniana	37
<b>3. Geometría en el espacio <math>(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})</math></b>	<b>40</b>
3.1. Las rectas de $\mathbb{H}$ . Propiedades básicas.	40
3.2. Propiedades de las rectas hiperbólicas	43
3.3. Las isometrías de $\mathbb{H}$	51
3.4. Conclusión: Postulados de Euclides en la geometría hiperbólica	53

## Prefacio

En este trabajo lo que se intenta abordar es un estudio básico sobre la geometría hiperbólica plana. Para ello, se dará un modelo de dicha geometría y se demostrará que, efectivamente, cumple las propiedades necesarias para ser una variedad riemanniana.

El origen de este problema surge a partir de los cinco postulados de Euclides sobre la geometría (ver apartado 3.4). Cuando se intentó probar el quinto postulado a partir de los otros cuatro negando este último razonando por reducción al absurdo, surgieron dos tipos alternativos de geometría: la geometría elíptica y la geometría hiperbólica. En la geometría elíptica, dado un punto exterior a una recta dada, no existen rectas paralelas a dicha recta y que pasen por ese punto; sin embargo, en la geometría hiperbólica existen infinitas (ver teorema 3.8).

El conjunto en el que trabajamos es el semiplano superior complejo, sin tomar la recta real, y lo denotamos

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Comenzamos, en el primer capítulo, estudiando las transformaciones de Möbius, y en particular, el grupo de transformaciones de Möbius que dejan  $\mathbb{H}$  invariante. Esto nos será necesario como paso previo puesto que nos serviremos de las transformaciones de Möbius que conservan  $\mathbb{H}$  para construir la longitud hiperbólica en el siguiente capítulo, a partir de la cual obtendremos la estructura de variedad riemanniana mencionada en el apartado final de dicho capítulo.

En el segundo capítulo definimos una métrica en  $\mathbb{H}$ , estudiamos los conceptos de longitud y distancia en  $\mathbb{H}$  y mostramos una estructura de variedad riemanniana en  $\mathbb{H}$ .

Finalmente, dedicamos el tercer capítulo a estudiar las rectas en  $\mathbb{H}$ , definidas como las curvas de distancia mínima con la estructura de variedad riemanniana anteriormente introducida. Mostramos el comportamiento de dichas rectas hiperbólicas así como qué diferencias y similitudes tienen la geometría hiperbólica y la geometría euclídea.

Este trabajo pretende ser autocontenido, por lo que puede ser leído y comprendido por cualquier estudiante del grado de matemáticas, ya que para su comprensión son necesarios solamente conocimientos básicos de álgebra

lineal, análisis matemático y topología; además de algunas nociones de geometría diferencial y variable compleja. En este trabajo se sintetizan algunos de los conocimientos del grado para obtener una ampliación del concepto que tenemos de geometría.

# 1. Transformaciones de Möbius

Antes de empezar, se dejará claro el concepto de homeomorfismo:

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos. Un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  es una aplicación biyectiva, continua y con inversa continua entre  $X$  e  $Y$ . Se dice que los espacios  $X$  e  $Y$  son homeomorfos si y sólo si existe un homeomorfismo entre ellos.

En esta sección nos dedicaremos al estudio de aquellos conceptos y resultados que son necesarios para el estudio de  $\mathbb{H}$  como variedad riemanniana. El concepto que será clave es el de transformación de Möbius, y es sobre el que girarán gran parte de los argumentos citados en las secciones posteriores.

Con motivo de ello, tendremos que trabajar de forma auxiliar con el espacio topológico  $\overline{\mathbb{C}}$ , definido como la compactificación por un punto de  $\mathbb{C}$  con la topología usual:

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

donde  $\infty$  es el punto con el que compactificamos  $\mathbb{C}$ .  $\overline{\mathbb{C}}$  está en correspondencia biyectiva con

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

y se establece dicha correspondencia con la proyección estereográfica

$$\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

dada por:

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{1-z}; & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 1) \\ \infty; & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

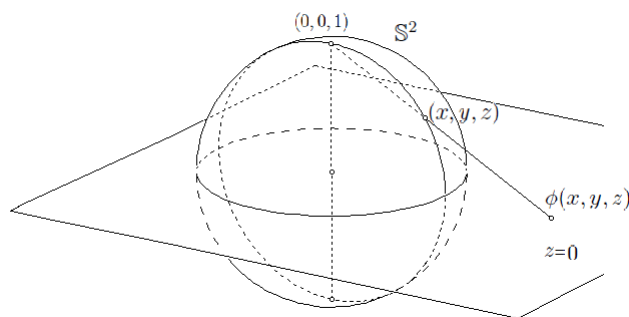


Fig. 1

Consideramos en  $\mathbb{S}^2$  la topología de subespacio inducida por  $\mathbb{R}^3$ . La topología en  $\overline{\mathbb{C}}$  está definida para que dicha la proyección estereográfica sea un homeomorfismo con la topología dada para  $\mathbb{S}^2$ . Una base de abiertos es

$$\beta = \{B(z, r), z \in \mathbb{C}, r > 0\} \cup \{B(\infty, r), r > 0\},$$

donde  $B(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tales que } |z| > r\} \cup \{\infty\}$ .

### 1.1. El grupo $Mob^+$

En este apartado empezaremos a estudiar los homeomorfismos de la forma  $h : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  que conservan los círculos. Denotaremos  $Homeo_c(\overline{\mathbb{C}})$  al conjunto de todos esos homeomorfismos.

Como paso previo, hablaremos sobre qué llamaremos círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Para ello, recordemos que la estructura de  $\overline{\mathbb{C}}$  es heredada de la esfera unidad  $\mathbb{S}^2$  a través de la proyección estereográfica sobre el plano complejo. De esta manera, tenemos la siguiente definición:

**Definición 1.1:** Decimos que el conjunto  $A$  es un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$  si es de una de las siguientes formas:

1.  $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tales que } |z - z_0| = a\}$ , donde  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $a > 0$ .
2.  $A = \{z \in \mathbb{C} : \exists \lambda \in \mathbb{R} : z = z_0 + \lambda z_1\} \cup \{\infty\}$ , donde  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ .

Es decir, el concepto de círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$  engloba a las circunferencias de  $\mathbb{C}$  y a las rectas de  $\mathbb{C}$  junto con el punto  $\infty$ , tratándolo como si fuera un polo de la esfera  $\mathbb{S}^2$ . En término de las coordenadas complejas, se prueba que el conjunto  $A$  es un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$  si puede escribirse de la siguiente forma:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0\}, \text{ donde } \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \text{ y } \beta \in \mathbb{C}.$$

Cabe destacar que  $A$  será de la primera forma si  $\alpha \neq 0$  y de la segunda si  $\alpha = 0$ .

Una vez introducido este concepto, pasaremos a ver qué aplicaciones son las que pertenecen al conjunto  $Homeo_c(\overline{\mathbb{C}})$ . Esto se irá viendo a lo largo del capítulo, ya que es un punto clave en esta parte.

**Proposición 1.2:** Las funciones  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  y  $J : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , dadas por:

1.  $f(z) = az + b$  si  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(\infty) = \infty$ , donde  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $a \neq 0$ .
2.  $J(z) = \frac{1}{z}$  si  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $J(0) = \infty$ ,  $J(\infty) = 0$ .

son elementos del conjunto  $Homeo_c(\overline{\mathbb{C}})$ .

**Demostración:**

1.  $f(z) = az + b$ ,  $f(\infty) = \infty$ , donde  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $a \neq 0$ .

Primero, es obvio que  $f$  es biyectiva, por construcción. Además,  $f|_{\mathbb{C}}$  es un homeomorfismo por ser una función afín. Como su inversa es también afín, nos basta con comprobar que  $f$  es continua en el punto  $\infty$ , o lo que es equivalente, que su inversa es continua, pues son funciones del mismo tipo.

Sea  $U = B(\infty, r) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  un entorno abierto del infinito. Por la topología de  $\overline{\mathbb{C}}$ ,  $U^c$  es compacto; luego  $f(U^c)$  es compacto. Por biyectividad de  $f$ ,  $f(U^c)^c = f(U)$ . Por tanto  $f(U)$  es el complementario de un compacto, luego es abierto para la topología de  $\overline{\mathbb{C}}$ . De esta manera tenemos que  $f^{-1}$  es continua, lo que nos demuestra que  $f$  es un homeomorfismo.

Ahora solo falta comprobar que la imagen de un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$  es un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Para ello usaremos la segunda caracterización de la definición 1.1.

Sea  $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0\}$ , donde  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  y  $\beta \in \mathbb{C}$ , un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Comprobemos que  $f(A)$  es un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$ :

Por definición de  $f$ , aplicamos el cambio de variable:

$$f(z) = w \Leftrightarrow w = az + b \Leftrightarrow z = \frac{w-b}{a}.$$

Con este cambio, tenemos:

$$f(A) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \alpha \frac{w-b}{a} \overline{\left(\frac{w-b}{a}\right)} + \beta \frac{w-b}{a} + \bar{\beta} \overline{\left(\frac{w-b}{a}\right)} + \gamma = 0 \right\}, \text{ donde } \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \text{ y } \beta \in \mathbb{C}$$

Operando y agrupando términos obtenemos lo siguiente:

$$f(A) = \left\{ w \in \mathbb{C} \text{ tal que } \frac{\alpha}{|a|^2} (w\bar{w}) + \left(\frac{\beta}{a} - \frac{\alpha\bar{b}}{|a|^2}\right)(w) + \left(\frac{\bar{\beta}}{a} - \frac{\alpha b}{|a|^2}\right)(\bar{w}) + \gamma + \frac{\alpha|b|^2}{|a|^2} - 2Re\left(\frac{b\bar{\beta}}{a}\right) = 0 \right\}, \text{ donde } \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \text{ y } \beta \in \mathbb{C}.$$

Ahora solo falta comprobar que, efectivamente; esa expresión corresponde a la ecuación de una circunferencia en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Para ello comprobamos que:

1.  $\frac{\alpha}{|a|^2} \in \mathbb{R}$ , lo cual es obvio, puesto que es un cociente de dos números reales.
2.  $(\frac{\beta}{a} - \frac{\alpha\bar{b}}{|a|^2})$  es el conjugado de  $(\frac{\bar{\beta}}{a} - \frac{\alpha b}{|a|^2})$ , puesto que  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3.  $\gamma + \frac{\alpha|b|^2}{|a|^2} - 2\text{Re}(\frac{b\bar{\beta}}{a}) \in \mathbb{R}$ , lo que está claro, pues es la suma de dos números reales; uno por definición, el otro por ser cociente de dos reales.

Y por lo tanto,  $f(A)$  es un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**2.**  $J(z) = \frac{1}{z}$ ,  $J(0) = \infty$ ,  $J(\infty) = 0$ .

Está claro que la función  $J$  es biyectiva y que  $J \circ J \equiv Id$ . También sabemos ya que  $J|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Comprobamos que  $J$  es continua en 0 y en  $\infty$ , puesto que:

$$J^{-1}(B(0, r)) = B(\infty, \frac{1}{r}) \text{ y } J^{-1}(B(\infty, r)) = B(0, \frac{1}{r}) \quad \forall r > 0.$$

Puesto que  $J = J^{-1}$ ,  $J$  es un homeomorfismo.

Comprobaremos ahora que las imágenes por  $J$  de círculos en  $\overline{\mathbb{C}}$  son círculos en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Para ello, procederemos como en el caso anterior:

Sea  $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0\}$ , donde  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  y  $\beta \in \mathbb{C}$  un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Comprobemos que  $J(A)$  es un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$ :

Por definición de  $J$ , aplicamos el cambio de variable:

$$J(z) = w \Leftrightarrow z = \frac{1}{w}.$$

Con este cambio, tenemos:

$$J(A) = \{w \in \mathbb{C} \text{ tal que } \frac{\alpha}{w\bar{w}} + \frac{\beta}{w} + \frac{\bar{\beta}}{\bar{w}} + \gamma = 0\}, \text{ donde } \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \text{ y } \beta \in \mathbb{C}$$

Multiplicando por  $w\bar{w}$  obtenemos lo siguiente:

$$f(A) = \{w \in \mathbb{C} \text{ tal que } \gamma w\bar{w} + \beta\bar{w} + \bar{\beta}w + \alpha = 0\}, \text{ donde } \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \text{ y } \beta \in \mathbb{C}$$



Ahora solo falta comprobar que, efectivamente; esa expresión corresponde a la ecuación de un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$ , lo cual es obvio:

1.  $\gamma \in \mathbb{R}$ , por definición.
2.  $\beta$  es el conjugado de  $\bar{\beta}$ .
3.  $\alpha \in \mathbb{R}$ , también por definición.

Y por lo tanto,  $J(A)$  es un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Con esto se termina la demostración.

Una vez introducidos estos pasos previos, pasaremos a estudiar las transformaciones de Möbius, así como algunas de sus propiedades y características.

**Definición 1.3:** Una transformación de Möbius es una función  $m : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  dada por:

Si  $c \neq 0$ :

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},$$

$$m\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, m(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Si  $c = 0$ :

$$m(z) = \frac{az + b}{d}, \forall z \in \mathbb{C},$$

$$m(\infty) = \infty.$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ . Por abuso de notación a la función anterior la denotaremos  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Denotaremos por  $Mob^+$  al conjunto de las transformaciones de Möbius.

Las transformaciones de Möbius son continuas y biyectivas y además sus inversas son también transformaciones de Möbius. Por ese motivo, las transformaciones de Möbius son homeomorfismos. Esto se expone con detalle a continuación.

**Teorema 1.4:**  $(Mob^+, \circ)$  es un grupo generado por el conjunto de aplicaciones

$$L \cup \{J\},$$

donde  $L$  es el conjunto de las funciones  $f(z) : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  dadas por  $f(z) = az+b$  si  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(\infty) = \infty$ , donde  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $a \neq 0$ .

**Demostración:**

Comprobemos primero que  $(Mob^+, \circ)$  es un grupo:

Sean  $\gamma, \delta \in (Mob^+, \circ)$  dadas por:

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \delta(z) = \frac{ez+f}{gz+h}.$$

1.  $\forall \gamma, \delta \in (Mob^+, \circ), \gamma \circ \delta \in (Mob^+, \circ)$ .

Operando con la composición de funciones, obtenemos:

$$\gamma \circ \delta(z) = \frac{a \frac{ez+f}{gz+h} + b}{c \frac{ez+f}{gz+h} + d} = \frac{(ae+bg)z+af+bh}{(ce+dg)z+cf+dh}. \quad (1)$$

Si comprobamos, efectivamente tenemos que  $(ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) = (ad-bc)(eh-fg) \neq 0$ , por tanto  $\gamma \circ \delta \in (Mob^+, \circ)$ .

2.  $\forall \gamma, \delta, \eta \in (Mob^+, \circ), \gamma \circ (\delta \circ \eta) = (\gamma \circ \delta) \circ \eta$ .

Esto es una propiedad heredada de la composición de funciones.

3.  $\exists \varepsilon \in (Mob^+, \circ)$  tal que  $\varepsilon \circ \gamma = \gamma \circ \varepsilon, \forall \gamma \in (Mob^+, \circ)$ .

La función identidad, que es el elemento neutro de la composición, es un elemento de  $(Mob^+, \circ)$ , luego  $(Mob^+, \circ)$  tiene elemento neutro.

4.  $\forall \gamma \in (Mob^+, \circ), \exists! \delta \in (Mob^+, \circ)$  tal que  $\gamma \circ \delta = \delta \circ \gamma = Id$ .

Fijemos  $\gamma \in (Mob^+, \circ)$ . Igualando los coeficientes de la igualdad (1) con los de la función identidad, obtenemos este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ae + bg = 1 \\ ce + dg = 0 \\ af + bh = 0 \\ cf + dh = 1 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones, de incógnitas  $e, f, g$  y  $h$  tiene solución única, puesto que la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tiene determinante  $ad - bc \neq 0$ . En efecto,

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

es la matriz inversa de  $M$ , luego  $eh - fg \neq 0$ . Por tanto,  $\delta \in (Mob^+, \circ)$ .

Veamos ahora que las funciones del conjunto  $L$  y  $J$  engendran  $Mob^+$ :

Tenemos dos casos:

1. Si  $c = 0$ , entonces  $ad \neq 0$  y  $\frac{a}{d} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ , luego  $m \in L$ .
2. Si  $c \neq 0$ , entonces  $m(z) = f(J(g(z)))$ , donde  $g(z) = c^2z + cd$  y  $f(z) = -(ad - bc)z + \frac{a}{c}$ .

Esto es fácilmente verificable también para el punto  $\infty$ . Con esto se termina la demostración de este teorema.

**Corolario 1.5:**  $Mob^+ \subset Homeo_c(\overline{\mathbb{C}})$ .

Otra característica a remarcar de las transformaciones de Möbius viene dada a partir del siguiente resultado:

**Teorema 1.6:** Sea  $m \in Mob^+$ , dada por  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  una transformación de Möbius con tres puntos fijos distintos. Entonces,  $m$  es la identidad.

**Demostración:**

Estudiemos dos casos posibles:

Si  $c \neq 0$ :

En este caso, como el punto  $\infty$  no es fijo, los puntos fijos de  $m$  vienen dados por las soluciones de la ecuación

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow cz^2 + z(d-a) - b = 0.$$

Esta ecuación tiene a lo sumo dos soluciones, luego  $m$  tendría como mucho dos puntos fijos en este caso, lo que contradice nuestra hipótesis.

Si  $c = 0$ :

En este caso el infinito es fijo y  $m$  es una función afín, y la única con tres puntos fijos es  $m(z) = z$ , es decir, la identidad. Con esto se termina esta demostración.

**Corolario 1.7:** Sean  $T_1 = \{z_1, z_2, z_3\}$  y  $T_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$  dos tripletes de puntos distintos entre sí en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Entonces, existe una única transformación de Möbius tal que  $m(z_i) = w_i$ , para todo  $i = 1, 2, 3$ .

### **Demostración:**

Como  $Mob^+$  tiene estructura de grupo con la composición, nos es suficiente comprobar el resultado para un conjunto imagen en concreto y después componer; así que nos basta con comprobar el resultado tomando el conjunto imagen  $T = \{1, 0, \infty\}$ .

Buscamos  $m \in Mob^+$  dada por:

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

que cumpla:

1.  $m(z_1) = 1$ , es decir,  $az_1 + b = cz_1 + d$
2.  $m(z_2) = 0$ , es decir,  $az_2 + b = 0$
3.  $m(z_3) = \infty$ , es decir,  $cz_3 + d = 0$ .

Los casos en que alguno de los  $z_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  toma el valor  $\infty$  son bastante sencillos de analizar, así que haremos únicamente el caso más general, que es en el que los  $z_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  son complejos.

Haciendo operaciones, se obtiene el sistema equivalente:

1.  $d = -cz_3$
2.  $b = -az_2$
3.  $a = c \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$

Verificando estas tres ecuaciones y teniendo en cuenta que  $ad - bc$  toma un valor fijo no nulo, al que llamaremos  $w$ , encontramos las siguientes soluciones, sustituyendo y despejando en la ecuación  $ad - bc = w$ :

$$c = \pm \sqrt{\frac{w(z_1 - z_2)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)}}.$$

Como se puede ver, sustituyendo el valor de  $c$  en las demás ecuaciones, la solución será única salvo cambio de signo de  $a, b, c$  y  $d$  a la vez; con lo que tendremos la unicidad de  $m$ .

**Corolario 1.8:** Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos circunferencias en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Existe una transformación de Möbius  $m$  para la que  $m(A_1) = A_2$ .

**Demostración:** Consecuencia directa del teorema anterior, pues una circunferencia en  $\overline{\mathbb{C}}$  viene unívocamente determinada por tres puntos.

Ahora pasaremos a ampliar el conjunto  $Mob^+$  añadiendo otro generador al grupo. Con esto completaremos lo que se ha visto en esta parte.

## 1.2. Reflexiones. El grupo $Mob$

Sea  $C : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , dada por  $C(z) = \bar{z}$  si  $z \in \mathbb{C}$  y  $C(\infty) = \infty$ , es decir,  $C$  es la conjugación compleja. Es fácil comprobar que  $C \in Homeo_c(\overline{\mathbb{C}})$ , que  $C = C^{-1}$  y que  $C$  no es un elemento de  $Mob^+$ .

**Definición 1.9:** Se define como grupo general de Möbius al grupo engendrado por el grupo  $(Mob^+, \circ)$  y la conjugación  $C$ . Llamaremos  $Mob$  a este grupo.

Primero, caracterizaremos los elementos de  $Mob$ , para tener una idea clara de qué clase de funciones están en este conjunto.

**Proposición 1.10:** Todos los elementos de  $Mob$  se pueden escribir de una de las siguientes dos maneras:

$$1. m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$2. n(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ .

**Demostración:**

Si  $m(z)$  es de la primera forma, está claro que  $m(z) \in Mob^+ \subseteq Mob$ .

Si  $n(z)$  es de segunda forma, tenemos que  $n = m \circ C$ ,  $m(z) \in Mob^+$ , donde  $m(z)$  es de la primera forma.

Recíprocamente, por el teorema 1.4 sabemos que los elementos de la primera forma caracterizan  $Mob^+$ , y que  $Mob^+$  y  $C$  generan  $Mob$ . Así que, dado  $\gamma \in Mob^+$  definido por  $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $a, b, c$  y  $d$  complejos y  $ad - bc \neq 0$ , nos basta probar que  $\gamma \circ C$  y  $C \circ \gamma$  son de la segunda forma. Tenemos, para  $\gamma \circ C$ :

$$\gamma \circ C(z) = \gamma(\bar{z}) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus -\left(\frac{\bar{d}}{c}\right).$$

$$\gamma \circ C\left(-\left(\frac{\bar{d}}{c}\right)\right) = \infty.$$

$$\gamma \circ C(\infty) = \gamma(\infty) = \frac{a}{c}.$$

si  $c \neq 0$  y si  $c = 0$

$$\gamma \circ C(z) = \frac{a\bar{z} + b}{d}, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\gamma \circ C(\infty) = \infty.$$

Para las funciones del tipo  $C \circ \gamma$  tenemos que:

$$C \circ \gamma(z) = C\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

$$C \circ \gamma\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

$$C \circ \gamma(\infty) = \gamma(\infty) = \left(\frac{\bar{a}}{c}\right).$$

si  $c \neq 0$  y si  $c = 0$

$$C \circ \gamma(z) = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{d}}, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$C \circ \gamma(\infty) = \infty.$$

Puesto que  $ad - bc \neq 0$ , también se tiene que  $\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \overline{ad - bc} \neq 0$ ; por tanto, tanto  $\gamma \circ C$  como  $C \circ \gamma$  son de la segunda forma. Con esto se termina la prueba de este resultado.

**Notas:**

1. La expresión en 1 en la proposición 1.10, con mayor propiedad hace referencia a la definición 1.3 de transformación de Möbius. Análogamente, para la expresión en 2

$$n(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\left(\frac{\bar{d}}{c}\right)\right\}.$$

$$n\left(-\left(\frac{\bar{d}}{c}\right)\right) = \infty.$$

$$n(\infty) = \gamma(\infty) = \frac{a}{c}$$

si  $c \neq 0$  y si  $c = 0$

$$n(z) = \frac{a\bar{z} + b}{d} \forall z \in \mathbb{C}$$

$$n(\infty) = \infty.$$

2. A partir de ahora, notaremos  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$ .

A continuación profundizaremos más sobre lo que acabamos de comentar sobre  $Mob$  con el siguiente resultado:

**Teorema 1.11:**  $Mob = Homeo_c(\overline{\mathbb{C}})$ .

**Demostración:**

La inclusión  $Mob \subseteq Homeo_c(\overline{\mathbb{C}})$  se debe a que  $Mob^+$  y  $C$ , generan  $Mob$  por definición y a que  $Mob^+ \subset Homeo_c(\overline{\mathbb{C}})$  (ver corolario 1.5) y  $C \in Homeo_c(\overline{\mathbb{C}})$ . Probaremos que  $Mob \supseteq Homeo_c(\overline{\mathbb{C}})$ :

Sea  $f \in \text{Homeo}_c(\overline{\mathbb{C}})$ . Sea  $p \in \text{Mob}^+$  la transformación de Möbius que envía el triplete  $\{f(0), f(1), f(\infty)\}$  en el triplete  $\{0, 1, \infty\}$ . Por construcción,  $p \circ f$  tiene fijos los puntos  $1, 0$  e  $\infty$ . Como  $f$  y  $p$  son elementos de  $\text{Homeo}_c(\overline{\mathbb{C}})$ , y puesto que  $\overline{\mathbb{R}}$  es un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$  que contiene tres puntos  $0, 1$  e  $\infty$ ;  $p \circ f(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$ . Por lo tanto, o bien  $p \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$  o bien  $p \circ f(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$ , por ser  $p \circ f$  un homeomorfismo, y por ser conexo la imagen de un conexo por una aplicación continua.

Definimos  $m = p$  si  $p \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$  y  $m = C \circ p$  en el caso contrario. Por definición, tenemos que  $m \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ . Recapitulando todo lo dicho, tenemos una función  $m \in \text{Mob}$  que verifica lo siguiente:

1.  $m \circ f(0) = 0$
2.  $m \circ f(1) = 1$
3.  $m \circ f(\infty) = \infty$
4.  $m \circ f(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$
5.  $m \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$

Bastará con que probemos que  $m \circ f \equiv \text{Id}$ . Para ello buscaremos un conjunto denso en  $\overline{\mathbb{C}}$  de puntos fijos de  $m \circ f$ . Es decir, vamos a ver que el subconjunto de  $\overline{\mathbb{C}}$

$$Z := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : m \circ f(z) = z\}.$$

es denso en  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Primeramente,  $Z \neq \emptyset$  puesto que  $\{0, 1, \infty\} \subseteq Z$ .

Observamos, por la propiedad 4 y puesto que  $m \circ f \in \text{Homeo}_c(\overline{\mathbb{C}})$ , se tiene que  $m \circ f$  envía rectas de  $\mathbb{C}$  en rectas de  $\mathbb{C}$  y circunferencias de  $\mathbb{C}$  en circunferencias de  $\mathbb{C}$ . Definimos, para cada  $s \in \mathbb{R}$ , a  $V_s$  como la recta vertical compleja que pasa por el punto  $s$  y a  $H_s$  como la recta horizontal compleja que pasa por el punto  $is$ . Puesto que  $m \circ f(H_s)$  es una recta para todo  $s$ , que  $H_0 = \mathbb{R}$ , que  $m \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  (propiedad 4, combinada con  $\infty \in Z$ ) tenemos que la imagen de una recta horizontal es una recta horizontal.

Sea  $A$  la circunferencia de centro  $\frac{1}{2}$  y radio  $\frac{1}{2}$ . Como  $V_0$  y  $V_1$  son tangentes a  $A$  en los puntos  $0$  y  $1$ , respectivamente;  $m \circ f(V_0)$  y  $m \circ f(V_1)$  son tangentes



a  $m \circ f(A)$  en  $m \circ f(0) = 0$  y  $m \circ f(1) = 1$ , respectivamente (se recuerda que  $m \circ f$  es biyectiva y que  $0, 1 \in Z$ ). Como  $V_0$  y  $V_1$  son paralelas,  $m \circ f(V_0)$  y  $m \circ f(V_1)$  también, por el mismo razonamiento de antes y porque  $\infty \in Z$ . De esto obtenemos que  $m \circ f(V_0)$  y  $m \circ f(V_1)$  son dos rectas paralelas y que  $m \circ f(A)$  es una circunferencia que contiene a los puntos 0 y 1 y tal que  $m \circ f(V_0)$  y  $m \circ f(V_1)$  son rectas tangentes a esos dos puntos respectivamente. Esto implica que  $m \circ f(V_0) = V_0$ ,  $m \circ f(V_1) = V_1$  y  $m \circ f(A) = A$ .

Razonando de forma similar se obtiene que  $m \circ f(H_{\frac{1}{2}}) = H_{\frac{1}{2}}$  y  $m \circ f(H_{-\frac{1}{2}}) = H_{-\frac{1}{2}}$ . De aquí obtenemos que los puntos  $H_{\frac{1}{2}} \cap V_1 = \{\frac{i}{2} + 1\}$ ,  $H_{-\frac{1}{2}} \cap V_0 = \{-\frac{i}{2}\}$ ,  $H_{-\frac{1}{2}} \cap V_1 = \{1 - \frac{i}{2}\}$  y  $H_{\frac{1}{2}} \cap V_0 = \{\frac{i}{2}\}$  están en  $Z$ .

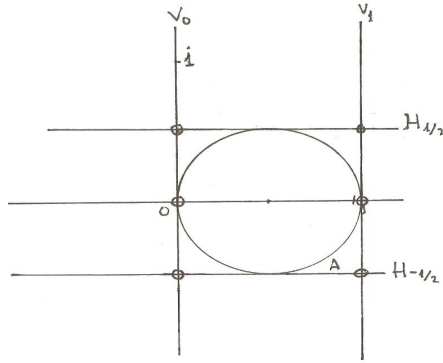


Fig. 2

Sea  $r$  la recta que pasa por  $-\frac{i}{2}$  y  $\frac{i}{2} + 1$ . Puesto que  $-\frac{i}{2}$ ,  $\frac{i}{2} + 1$  y el punto  $\infty$  son fijos, tenemos que  $m \circ f(r) = r$  y por ser  $r \cup \mathbb{R} = \{\frac{1}{2}\}$ , tenemos que  $\frac{1}{2}$  también es fijo. Con el mismo procedimiento usado antes, pero aplicado a los puntos 0 y  $\frac{1}{2}$  en vez de a 0 y 1, obtenemos que  $m \circ f(V_{\frac{1}{2}}) = V_{\frac{1}{2}}$ , y por tanto los puntos  $H_{\frac{1}{2}} \cap V_{\frac{1}{2}} = \{\frac{i+1}{2}\}$  y  $H_{-\frac{1}{2}} \cap V_{\frac{1}{2}} = \{\frac{-i+1}{2}\}$  también están en  $Z$ .

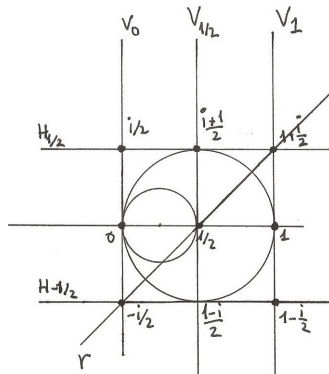


Fig. 3

Antes de seguir, definiremos la sucesión de conjuntos

$$Z_n = \left\{ \frac{a + bi}{2^n} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}; n \in \mathbb{N}.$$

Trasladando el razonamiento anterior a los puntos obtenidos vertical y horizontalmente por todo el plano complejo, obtenemos que

$$Z_1 = \left\{ \frac{a + bi}{2} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

está contenido en  $Z$ . De la misma forma, aplicando el razonamiento a puntos cada vez más próximos, tenemos que

$$Z_n = \left\{ \frac{a + bi}{2^n} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

está contenido en  $Z$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como  $\cup_{n=1}^{\infty} Z_n$  es denso en  $\overline{\mathbb{C}}$ ,  $Z$  es denso en  $\overline{\mathbb{C}}$  por contener a un conjunto denso. Ahora, como nuestro conjunto de puntos fijos es denso en  $\overline{\mathbb{C}}$ , concluimos por continuidad que  $m \circ f$  es la identidad, y que, por tanto,  $f = m^{-1}$ ; luego  $f \in Mob$ . Con esto se concluye la demostración.

En este apartado nos queda por hablar sobre una característica del grupo  $Mob$  que será clave, como veremos más adelante, a la hora de determinar el conjunto de las rectas hiperbólicas en  $\mathbb{H}$ . Nos referimos a que las aplicaciones de  $Mob$  conservan, salvo orientación, los ángulos entre curvas. Pasemos a dar una definición como paso previo a esta demostración, y acto seguido seguiremos con el teorema:

**Definición 1.12:** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos curvas lisas, es decir, dos curvas cuya tangente está bien definida en cada uno de sus puntos. Sea  $z_0 \in \alpha \cap \beta$ . Se define el ángulo entre  $\alpha$  y  $\beta$  en  $z_0$  como el ángulo que forman sus respectivas rectas tangentes en  $z_0$ . Tomaremos siempre el ángulo que está en el intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , y lo denotaremos como  $ang_{z_0}(\alpha, \beta)$  o bien  $ang(\alpha, \beta)$  si no hay lugar a confusión.

**Nota:** Convenios y reglas para ángulos entre círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ :

1. Sean  $r$  y  $s$  dos círculos en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Si  $r$  y  $s$  son tangentes,  $ang(r, s) = 0$ , también si el punto de corte es  $\infty$ .

2. Sean  $r$  y  $s$  dos círculos en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Si  $r$  y  $s$  son secantes y se cortan en dos puntos distintos  $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$ , consideraremos  $ang_z(r, s) = ang_w(r, s)$ , también si uno de los puntos de corte es  $\infty$ . Se recuerda que, si dos circunferencias son secantes, los ángulos son idénticos en cada uno de sus puntos de corte por simetría con la recta que une los dos centros. Trasladamos esta propiedad a los círculos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

La idea de estos dos puntos es extender las propiedades de las circunferencias en el plano a la esfera de Riemann añadiendo el punto  $\infty$ . Esto concuerda con el comportamiento de las circunferencias en  $\mathbb{S}^2$ , que se trasladan a  $\overline{\mathbb{C}}$  vía homeomorfismo por la proyección estereográfica.

**Teorema 1.13:** Los elementos de  $Mob$  conservan los ángulos entre las curvas en valor absoluto, es decir, dadas dos curvas lisas,  $\alpha$  y  $\beta$  que se cortan en un punto  $z_0$  complejo, y dado  $m \in Mob$ , se tiene

$$|ang(\alpha, \beta)| = |ang(m(\alpha), m(\beta))|$$

**Demostración:**

Por ser  $m$  biyectiva (ver teorema 1.11), el número de cortes entre dos círculos en  $\overline{\mathbb{C}}$  se conservan por transformaciones de Möbius. Ahora, por definición de ángulo entre dos curvas, tan sólo nos es necesario comprobar que los ángulos entre dos rectas se conservan. Sean entonces dos rectas del plano complejo  $r_1$  y  $r_2$  que se corten en un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Sean  $z_k \in r_k - \{z_0\}$ ,  $k = 1, 2$ . Sean  $\varphi_k \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $k = 1, 2$  sus respectivos ángulos con la horizontal y sean  $s_k = \frac{Im(z_k - z_0)}{Re(z_k - z_0)}$ ,  $k = 1, 2$  sus pendientes. Por tanto,

$$ang(r_1, r_2) = |\varphi_2 - \varphi_1| = |\arctan(s_2) - \arctan(s_1)|.$$

Como el grupo  $Mob$  está generado por las aplicaciones

1.  $f(z) = az + b$ , donde  $a$  y  $b$  son complejos y  $a \neq 0$ .
2.  $J(z) = \frac{1}{z}$
3.  $C(z) = \bar{z}$

basta comprobar que dichos generadores de  $Mob$  conservan los ángulos. Una vez hecho esto, tendremos el resultado para todos los elementos de  $Mob$  por composición de funciones.

1.  $f(z) = az + b$ , donde  $a$  y  $b$  son complejos y  $a \neq 0$ .

Llamamos  $t_k$  a las pendientes de las rectas  $f(r_k)$ , para  $k = 1, 2$ . Para  $k = 1, 2$  tenemos que:

$$t_k = \frac{\operatorname{Im}(f(z_k - f(z_0)))}{\operatorname{Re}(f(z_k - f(z_0)))} = \frac{\operatorname{Im}(a(z_k - z_0))}{\operatorname{Re}(a(z_k - z_0))}. \quad (1)$$

Como  $a \neq 0$ ,  $a = \alpha e^{i\beta}$ , con  $\alpha > 0$  y  $\beta \in [0, 2\pi)$ . Sustituyendo en (1) de forma correspondiente y haciendo operaciones obtenemos que:

$$t_k = \frac{\operatorname{Im}(\alpha e^{i\beta}(z_k - z_0))}{\operatorname{Re}(\alpha e^{i\beta}(z_k - z_0))} = \tan(\beta + \varphi_k), \quad k = 1, 2.$$

De aquí obtenemos que

$$\operatorname{ang}(f(r_1), f(r_2)) = |\beta + \varphi_1 - \beta - \varphi_2| = |\varphi_1 - \varphi_2| = \operatorname{ang}(r_1, r_2).$$

2.  $J(z) = \frac{1}{z}$ .

Para este caso hay que razonar de forma diferente, pues  $J(r_k)$ ,  $k = 1, 2$  no tienen por qué ser rectas.

Podemos suponer que, para  $k = 1, 2$ ,  $r_k$  viene dada como el conjunto de soluciones de la ecuación:

$$\beta_k z + \overline{\beta_k} z + \alpha_k = 0, \quad \text{con } \beta_k \in \mathbb{C} \text{ y } \alpha_k \in \{0, 1\}.$$

La pendiente de  $r_k$ , a la que llamaremos  $s_k$ , viene dada por:

$$s_k = \frac{\operatorname{Re}(\beta_k)}{\operatorname{Im}(\beta_k)}, \quad k = 1, 2.$$

Utilizando el procedimiento de la proposición 1.2, obtenemos que  $J(r_k)$  viene dada por el conjunto de soluciones de la ecuación

$$\alpha_k z \bar{z} + \overline{\beta_k} z + \beta_k \bar{z} = 0, \quad k = 1, 2$$

Separamos esto en varios casos.

1. Si  $\alpha_k = 1$  para  $k = 1, 2$ .

En este caso,  $J(r_k)$  es la circunferencia de centro  $-\beta_k$  y radio  $|\beta_k|$ , por tanto, la pendiente de la tangente a  $J(r_k)$  en el cero, a la que llamaremos  $t_k$ , viene dada por:

$$t_k = -\frac{\operatorname{Re}(\beta_k)}{\operatorname{Im}(\beta_k)}, \quad k = 1, 2.$$

2. Si  $\alpha_k = 0$  para  $k = 1, 2$ .

En este caso,  $J(r_k)$  será una recta cuya pendiente, a la que llamaremos  $t_k$ , viene dada por:

$$t_k = \frac{\operatorname{Re}(\bar{\beta}_k)}{\operatorname{Im}(\beta_k)} = -\frac{\operatorname{Re}(\beta_k)}{\operatorname{Im}(\beta_k)}, \quad k = 1, 2.$$

3.  $\alpha_1 = 1$  y  $\alpha_2 = 0$ .

Esta es una combinación de los dos casos anteriores. Serán una recta y una circunferencia que se cortan en  $z = 0$  y en  $z = \frac{1}{z_0}$ . Para  $J(r_1)$  se seguirá el caso 1, y se obtendrá que la pendiente de la recta tangente de  $J(r_1)$  en el punto  $z = 0$  tendrá pendiente  $t_1 = -\frac{\operatorname{Re}(\beta_1)}{\operatorname{Im}(\beta_1)}$ . Para  $J(r_2)$ , que es una recta, seguiremos el proceso usado en el punto 2 y tendremos que su pendiente es  $t_2 = -\frac{\operatorname{Re}(\beta_2)}{\operatorname{Im}(\beta_2)}$ .

En los tres casos, obtenemos que:

$$\operatorname{ang}(J(r_1), J(r_2)) = |(-\varphi_2) - (-\varphi_1)| = |\varphi_1 - \varphi_2| = |\varphi_2 - \varphi_1| = \operatorname{ang}(r_1, r_2).$$

Luego hemos terminado para la función  $J(z)$ .

**3.**  $C(z) = \bar{z}$ .

Bastante obvio, pues la conjugación es una reflexión en  $\mathbb{C}$  respecto de  $\mathbb{R}$ , y como toda reflexión, conserva los ángulos salvo orientación.

Hemos terminado ya el estudio del grupo  $Mob$ . Ahora nos iremos enfocando más en  $\mathbb{H}$ , buscando qué elementos de  $Mob$  conservan  $\mathbb{H}$ .

### 1.3. El grupo $Mob(\mathbb{H})$

En esta sección determinaremos qué elementos de  $Mob$  preservan  $\mathbb{H}$ , es decir, buscaremos qué elementos  $m \in Mob$  cumplen que  $m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ .

**Definición 1.14:** Sea  $X$  un subconjunto de  $\bar{\mathbb{C}}$ . Definimos el conjunto:

$$Mob(X) = \{m \in Mob : m(X) = X\}.$$

Idem con  $Mob^+$ :

$$Mob^+(X) = \{m \in Mob^+ : m(X) = X\}.$$

Nota: Estos conjuntos son subgrupos de  $Mob$  y  $Mob^+$  respectivamente.

Como paso previo, buscaremos cuáles son los elementos de  $Mob(\overline{\mathbb{R}})$ , puesto que de esta forma eliminaremos candidatos, ya que  $Mob(\mathbb{H})$  es un subconjunto de  $Mob(\overline{\mathbb{R}})$ . Esto se debe a que la imagen de un conexo por una aplicación continua es conexo combinado con que las transformaciones de Möbius son biyectivas.

**Proposición 1.15:** Cada elemento de  $Mob(\overline{\mathbb{R}})$  se puede expresar mediante una de las formas siguientes:

1.  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ .
2.  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ .
3.  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ .
4.  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ , con  $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ .

**Demostración:**

Por la proposición 1.10, sabemos que los elementos de  $Mob$  normalizados pueden ser de una de las dos siguientes formas:

1.  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
2.  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Además se pueden normalizar, es decir, conseguir una expresión en la que  $ad - bc = 1$  (para normalizar  $m$  o  $n$  en la proposición 1.10, donde sabemos que  $ad - bc \neq 0$ , basta dividir cada coeficiente de  $m$  o  $n$  por  $\sqrt{ad - bc}$ ). Trabajaremos únicamente con las funciones del primer tipo, pues con las del segundo tipo se razona análogamente. Para el estudio que realizaremos ahora, como  $n = m \circ C$ , nos bastará con estudiar el primer caso y componer con  $C$  los resultados obtenidos para obtener el estudio del segundo caso. Supondremos de partida que  $m \in Mob(\overline{\mathbb{R}})$ . Así, tenemos que:

1.  $m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$
2.  $m(\infty) = \frac{a}{c}$
3.  $m^{-1}(0) = -\frac{b}{a}$
4.  $m(0) = \frac{b}{d}$

donde  $m^{-1}(\infty), m(\infty), m^{-1}(0), m(0) \in \overline{\mathbb{R}}$ . Ahora tenemos que separar distintos casos:

1. Si  $a = 0$ :

Despejando en las expresiones 1 y 4 anteriores y sustituyendo obtenemos

$$m(z) = \frac{b}{cz+d} = \frac{-c(m(0)m^{-1}(\infty))}{cz-m^{-1}(\infty)c}.$$

Como  $m$  está normalizada,

$$1 = ad - bc = -bc = c^2(m(0)m^{-1}(\infty)).$$

De aquí deducimos que  $c$  o bien es real o bien imaginario puro. Por extensión, también deducimos esto de  $b$  y  $d$ .

2. Si  $c = 0$ :

Aquí tenemos que distinguir dos subcasos:

a) Si  $m(0) = 0$ :

Entonces,  $m(z) = \frac{\frac{a}{\sqrt{a}}z}{\frac{1}{\sqrt{a}}}$  (recordamos que  $m$  está normalizada). Para que se conserve  $\overline{\mathbb{R}}$ ,  $\frac{a}{\sqrt{a}}y \frac{1}{\sqrt{a}}$  tienen que ser reales o imaginarios puros.

b) Si  $m(0) \neq 0$ :

Despejando en las expresiones 3 y 4 anteriores y sustituyendo obtenemos

$$m(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{az-am^{-1}(0)}{-\frac{am^{-1}(0)}{m(0)}}.$$

Como  $m$  está normalizada,

$$1 = ad - bc = ad = a^2\left(-\frac{m^{-1}(0)}{m(0)}\right).$$

De aquí deducimos que  $a$  o bien es real o bien imaginario puro. Por extensión, también deducimos esto de  $b$  y  $d$ .

3. Si  $a, c \neq 0$ :

Despejando en las expresiones 1, 2 y 3 anteriores y sustituyendo obtenemos

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{m(\infty)cz-m^{-1}(0)m(\infty)c}{cz-m^{-1}(\infty)c}.$$

Como  $m$  está normalizada,

$$1 = ad - bc = c^2[m(\infty)(m^{-1}(0) - m^{-1}(\infty))].$$

De aquí deducimos que  $c$  o bien es real o bien imaginario puro. Por extensión, también deducimos esto de  $a, b$  y  $d$ .

Con esto concluye la demostración.

**Corolario 1.16:** Los elementos de  $Mob(\mathbb{H})$  son los elementos de  $Mob$  normalizados (i.e  $ad - bc = 1$ ) que vienen dados por:

1.  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .
2.  $n(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ , con  $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$ .

**Demostración:**

Utilizando la proposición anterior, comprobaremos para cada una de las cuatro posibilidades para los elementos de  $Mob(\overline{\mathbb{R}})$  si  $m(i) \in \mathbb{H}$ . Esto nos basta para determinar lo que buscamos, ya que cada elemento de  $Mob(\overline{\mathbb{R}})$  o bien conserva o bien intercambia los semiplanos superior e inferior (recuérdese que la imagen de un conexo es siempre conexo).

1.  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ .  
 $m(i) = \frac{ac+bd+i}{c^2+d^2}$ , que es un elemento de  $\mathbb{H}$ .
2.  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ .  
 $m(i) = \frac{ac+bd-i}{c^2+d^2}$ , que no es un elemento de  $\mathbb{H}$ .
3.  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ .  
 $m(i) = \frac{-ac-bd-i}{-c^2-d^2}$ , que no es un elemento de  $\mathbb{H}$  (obsérvese que  $c^2 + d^2 < 0$  por ser  $c, d \in i\mathbb{R}$ ).
4.  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ , con  $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ .  
 $m(i) = \frac{+ac+bd+i}{-c^2-d^2}$ , que es un elemento de  $\mathbb{H}$ , puesto que  $c^2 + d^2 < 0$ .

Ahora demostraremos un resultado sobre el conjunto  $Mob(\mathbb{H})$  que nos será útil en algunos puntos clave de los siguientes capítulos:



**Proposición 1.17:**

Sean  $x, y \in \mathbb{H}$  distintos entre sí. Existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda, \mu > 0$  distintos y existe una transformación de Möbius  $\gamma \in \text{Mob}^+(\mathbb{H})$  tales que  $\gamma(x) = \mu i$  y  $\gamma(y) = \lambda i$ . Es más, podemos tomar  $\lambda = 1$ .

**Demostración:**

Buscamos una transformación de Möbius  $\gamma \in \text{Mob}^+$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tales que  $\gamma(x) = \mu i$  y  $\gamma(y) = \lambda i$ . Ha de ser de la forma:

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son reales y donde  $ad - bc = 1$ . Entonces:

1.  $\mu i = \frac{ax+b}{cx+d}$
2.  $\lambda i = \frac{ay+b}{cy+d}$

De aquí obtenemos cuatro ecuaciones, identificando partes reales y complejas en las dos anteriores:

1.  $aIm(x) - c(\mu Re(x)) - d\mu = 0$
2.  $aRe(x) + b + \mu cIm(x) = 0$
3.  $aIm(y) - c(\lambda Re(y)) - d\lambda = 0$
4.  $aRe(y) + b + \lambda cIm(y) = 0$

Con incógnitas  $a, b, c$  y  $d$ ,  $\mu$  y  $\lambda$  reales estrictamente positivos con  $\lambda \neq \mu$  y con  $ad - bc = 1$ . Despejando en las dos primeras ecuaciones, y sustituyendo lo obtenido en éstas en las dos últimas, obtenemos:

1.  $d = \frac{aIm(x)}{\mu} - cRe(x)$
2.  $b = -\mu cIm(x) - aRe(x)$
3.  $c(\lambda Re(y) - \lambda Re(x)) = a(Im(y) - \frac{\lambda}{\mu}Im(x))$
4.  $c(\mu Im(x) - \lambda Im(y)) = a(Re(y) - Re(x))$

Si queremos que este sistema de ecuaciones tenga soluciones no nulas, tenemos que escoger  $\lambda$  y  $\mu$  de forma adecuada para que las ecuaciones 3. y 4. sean proporcionales; es decir, que:

$$(Im(y) - \frac{\lambda}{\mu}Im(x))(\mu Im(x) - \lambda Im(y)) - \lambda(Re(y) - Re(x))^2 = 0$$

Simplificando adecuadamente y completando cuadrados, obtenemos:

$$\frac{(\lambda-\mu)^2}{\lambda\mu} = \frac{[Im(y)-Im(x)]^2+[Re(y)-Re(x)]^2}{Im(x)Im(y)}$$

Para simplificar la notación, notamos

$$t_{x,y} = \frac{[Im(y)-Im(x)]^2+[Re(y)-Re(x)]^2}{Im(x)Im(y)} = \frac{|y-x|^2}{Im(x)Im(y)}$$

Cabe destacar que  $t_{x,y} > 0$  si  $x \neq y$ . Fijando  $\lambda$ , obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado sobre  $\mu$ :

$$\mu^2 - \lambda\mu(t_{x,y} + 2) + \lambda^2 = 0$$

Si despejamos, tomando únicamente la raíz positiva, pues la negativa no nos será necesaria; tenemos que:

$$\mu = \frac{\lambda}{2}(t_{x,y} + 2 + \sqrt{t_{x,y}^2 + 4t_{x,y}}) = \frac{\lambda}{2}(t_{x,y} + 2 + t_{x,y}\sqrt{1 + \frac{4}{t_{x,y}}}).$$

Si el discriminante es positivo, habremos encontrado una solución  $\mu$  positiva, pues  $t_{x,y} > 0$  la ecuación tendrá solución real positiva. Para que eso ocurra, necesitamos que:

$$1 + \frac{4}{t_{x,y}} \geq 0 \Leftrightarrow t_{x,y} \geq -4$$

Lo que ya tenemos, pues sabemos que  $t_{x,y} > 0$ .

Ahora que ya hemos hecho la elección de los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  adecuada, pasaremos a considerar que las ecuaciones 3. y 4. del sistema son equivalentes, y descartaremos la solución idénticamente nula como válida. Así, nuestros parámetros  $\mu$  y  $\lambda$  serán fijos, determinados por la ecuación anterior. Estudiemos ahora los posibles casos resultantes:

### 1. $Re(x) = Re(y)$ .

Si ninguno de los otros dos términos es nulo, 3. y 4. no son equivalentes.

Si se anulan los otros dos términos, obtendremos, igualando dichos términos a 0, que:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{Im(y)}{Im(x)} = \frac{Im(x)}{Im(y)}$$

Con esto concluimos que  $x = y$ , caso que no se va a dar, pues de partida los consideramos distintos.

Si tan solo  $\mu Im(x) - \lambda Im(y) = 0$ , buscaremos una solución no nula. En este caso  $c = 0$  y, salvo producto por una constante, tomamos  $a = 1$ . De aquí se obtienen las soluciones reales

$$b = -Re(x) \text{ y } d = \frac{\mu}{Im(x)}$$

Obtenemos definitivamente un elemento de  $Mob^+(\mathbb{H})$ , puesto que:

$$ad - bc = \frac{\mu}{Im(x)} \neq 0$$

puesto que  $\mu$  y  $Im(x)$  son reales positivos no nulos.

Si tan solo  $\frac{\lambda}{\mu}Im(x) - Im(y) = 0$ , buscaremos una solución no nula. En este caso  $a = 0$  y, salvo producto por una constante, tomamos  $c = 1$ . De aquí se obtienen las soluciones reales

$$b = -\mu Im(x) \text{ y } d = -Re(x)$$

Obtenemos definitivamente un elemento de  $Mob^+(\mathbb{H})$ , puesto que:

$$ad - bc = \mu Im(x) \neq 0$$

puesto que  $\mu$  y  $Im(x)$  son reales positivos no nulos.

## 2. $Re(x) \neq Re(y)$ .

Los otros términos tampoco son nulos, sino los sistemas 3. y 4. no son equivalentes. Fijando  $c = 1$  salvo producto por constante, se obtiene una solución  $a$  no nula, puesto que sería cociente de términos no nulos. Comprobemos si la solución que obtendríamos cae dentro de  $Mob^+(\mathbb{H})$ :

$$ad - bc = \left(\frac{a^2}{\mu} + \mu\right)Im(x)$$

Esto es no nulo porque  $Im(x) > 0$  y  $a^2 \neq -\mu^2$ , ya que  $a \neq 0$ .

Con esto terminamos la demostración de este resultado.

## 2. Longitud, distancia y estructura riemanniana en $\mathbb{H}$

En esta parte del trabajo se definirá una métrica en  $\mathbb{H}$  y acto seguido se comprobará que, efectivamente,  $\mathbb{H}$  es un ejemplo de variedad riemanniana con la métrica definida. También se explicará con detalle el concepto de variedad riemanniana.

### 2.1. Métrica en $\mathbb{H}$

#### 2.1.1. El concepto de longitud

Introduciremos el concepto de longitud mediante integrales en curvas. Además, utilizaremos una función  $\rho$  que definirá una función peso.

**Definición 2.1:** Sean  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función diferenciable a trozos. Llamamos longitud de  $f$  respecto a  $\rho$  a la siguiente expresión:

$$\text{long}_\rho(f) = \int_a^b \rho(f(t)) |f'(t)| dt$$

Nota: También denotamos

$$\text{long}_\rho(f) = \int_f \rho(z) |dz|$$

Ahora se enunciará y demostrará un resultado que será necesario para la demostración del teorema clave en este apartado.

**Lema 2.2:** Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Si  $\int_f \mu(z) |dz| = 0$  para toda función diferenciable a trozos  $f : [a, b] \rightarrow U$ , entonces la función  $\mu \equiv 0$ .

**Demostración:** Se procederá por reducción al absurdo:

Supongamos que

$$\int_f \mu(z) |dz| = 0$$

para toda  $f$  diferenciable a trozos, y que  $\exists z_0 \in U$  tal que  $\mu(z_0) \neq 0$ . Como  $\mu$  es continua, existe un abierto  $U_0$  de  $U$  tal que  $z_0 \in U_0$  y que  $\mu(z)$  es de signo constante en el abierto  $U_0$ , así que, sin perder generalidad, podemos suponer que

$$\mu(z) > 0, \forall z \in U_0 \quad (1)$$

Tomemos  $[a, b] \subset U_0$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  cualquier función diferenciable no constante. Entonces  $|f'(t)| > 0$  para  $t$  en algún abierto del intervalo  $[a, b]$ , y tenemos que:

$$\int_a^b \mu(f(t))|f'(t)|dt > 0, \forall t \in [a, b]$$

puesto que  $\mu(f(t)) > 0$  por (1), lo que contradice el supuesto de partida.

**Teorema 2.3:** Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  y sea  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\rho(z) = \frac{\alpha}{\text{Im}(z)}$$

Entonces, para toda función diferenciable a trozos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y para toda función  $\gamma \in \text{Mob}(\mathbb{H})$  se tiene que:

$$\text{long}_\rho(f) = \text{long}_\rho(\gamma \circ f).$$

**Demostración:**

Tenemos que  $\rho : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua. Sea  $\gamma \in \text{Mob}(\mathbb{H})$  y sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  una función diferenciable. Aplicando la definición 2.1 tenemos que:

$$\text{long}_\rho(f) = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt \quad (1)$$

$$\text{long}_\rho(\gamma \circ f) = \int_a^b \rho((\gamma \circ f)(t))|(\gamma \circ f)'(t)|dt \quad (2)$$

Es obvio que  $\text{long}_\rho(f)$  es finita, puesto que  $[a, b]$  es compacto,  $f$  es diferenciable y  $\rho$  es continua.

Lo que haremos será comprobar que

$$\text{long}_\rho(f) = \text{long}_\rho(\gamma \circ f), \quad (3)$$

pero antes haremos algunas cuentas con (1) y (2):

Si desarrollamos en (2), obtenemos, utilizando la regla de la cadena:

$$\text{long}_\rho(\gamma \circ f) = \int_a^b \rho((\gamma(f(t))))|Jac_\gamma(f(t))f'(t)|dt \quad (4)$$

Así pues, queremos probar que:

$$\int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt = \int_a^b \rho((\gamma(f(t))))|Jac_\gamma(f(t))||f'(t)|dt$$

Pasando todo al mismo lado de la ecuación y utilizando la linealidad de la integral, tenemos que:

$$\int_a^b [\rho((f(t))|f'(t)| - \rho((\gamma(f(t))))|Jac_\gamma(f(t))f'(t)|)]dt = 0. \quad (5)$$

Ahora haremos las comprobaciones con la función  $\rho$  del enunciado del teorema:

Primero, consideramos los generadores del tipo  $n(z) = z + b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . En este caso, tenemos que

$$Jac_n(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, (5) es equivalente a:

$$\int_a^b \rho((f(t))|f'(t)| - \rho(f(t) + b)|f'(t)|)dt = \rho(z) - \rho(z + b)$$

Se comprueba que, efectivamente, es igual a 0 porque  $\rho(z) = \frac{\alpha}{Im(z)}$ .

Por tanto queda probado (5) cuando  $\gamma$  es una transformación del tipo  $n(z)$ .

Consideramos la transformación de Möbius

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1 \quad (6)$$

(ver corol. 1.16). Consideramos  $c \neq 0$ , ya que el caso en el que  $c = 0$  es el anterior. Después de hacer el cambio  $n(z) = z + \frac{d}{c}$  y aplicar (5), podemos suponer que  $d = 0$  en (7). Así pues, podemos suponer que

$$m(z) = \frac{az-1}{z} = a + \frac{-x+iy}{x^2+y^2}, \text{ donde } z = x + iy.$$

Derivando y separando partes reales y complejas de las respectivas derivadas parciales, tenemos que:

$$Jac_m(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$$

Haciendo operaciones, tenemos que

$$|Jac_\gamma(f(t))f'(t)| = \frac{|f'(t)|}{|f(t)|^2} =$$

puesto que  $\rho(z) = \frac{\alpha}{Im(z)}$  y  $Im\left(\frac{az-1}{z}\right) = \frac{Im(z)}{|z|^2}$ . Se comprueba que la integral en (5) es cero.

Por último, veremos qué ocurre para  $-C(z) = -\bar{z}$ . Identificando las partes real e imaginaria de  $z$  como las coordenadas  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{R}^2$ , tenemos que  $-C(x, y) = (-x, y)$ , para todo par de puntos reales  $x$  e  $y$ . Tenemos que

$$Jac_{-c}(z) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$|Jac_{\gamma}(f(t))f'(t)| = |f'(t)|.$$

De esta forma, queda claro que la integral en (5) es cero para  $\rho(z) = \frac{\alpha}{Im(z)}$ .

Con esto se termina la demostración, puesto que al componer las funciones del tipo

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1.$$

con la función  $-C(z)$  y normalizar, obtenemos las expresiones del tipo

$$n(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \text{ con } a, b, c, d \in i\mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1.$$

**Nota:** Se recuerda que  $-C(z) = -\bar{z} = -\frac{i\bar{z}}{i}$  es una función del segundo tipo mencionado anteriormente.

**Definición 2.4:** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  una función diferenciable. Llamamos longitud hiperbólica de  $f$  a:

$$long_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{|dz|}{Im(z)} = \int_a^b \frac{|f'(t)|}{Im(f(t))} dt$$

Nota: Se observa, como ya se ha hecho en la demostración del teorema anterior, que  $long_{\mathbb{H}}(f)$  es finita, puesto que  $[a, b]$  es compacto y  $Im(z) \neq 0$ , puesto que el conjunto imagen de  $f$  está contenido en  $\mathbb{H}$ .

### 2.1.2. Distancia en $\mathbb{H}$

En esta sección definiremos una distancia en  $\mathbb{H}$  a partir de la longitud hiperbólica.

**Definición 2.5:** Una distancia en un conjunto  $X$  es una aplicación de la forma  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las siguientes propiedades:

1.  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
2.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3.  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z); \forall x, y, z \in X$  (desigualdad triangular)

A partir de la longitud hiperbólica nos acercaremos al concepto de distancia. Para eso, utilizaremos un concepto generalizado de línea recta, es decir, aquel arco entre dos puntos que minimiza su longitud; y, partiendo de esa idea, definiremos nuestra métrica hiperbólica:

**Definición 2.6:** Se define como distancia hiperbólica entre dos puntos a la aplicación  $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf\{long_{\mathbb{H}}(f), f \in \Gamma(x, y)\}$$

donde  $\Gamma(x, y)$  es el conjunto de todas las aplicaciones diferenciables a trozos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  tales que  $f(a) = x$  y  $f(b) = y$ .

Comprobaremos más adelante que lo que acabamos de definir es una distancia.

**Proposición 2.7:** Sea  $\gamma \in Mob(\mathbb{H})$  y sean  $x$  e  $y$  dos puntos de  $\mathbb{H}$ ; entonces  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$ , es decir, la distancia asociada a la longitud hiperbólica es invariante por transformaciones de Möbius que dejan a  $\mathbb{H}$  invariante.

**Demostración:** Por el teorema 2.3, tenemos que

$$long_{\mathbb{H}}(f) = long_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f), \forall \gamma \in Mob(\mathbb{H}).$$

Sea  $\gamma \in Mob(\mathbb{H})$  fijado. Observemos que, por definición de  $\Gamma(x, y)$ , tenemos lo siguiente:

$$\{\gamma \circ f, f \in \Gamma(x, y)\} \subseteq \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)] \quad (1)$$

de donde obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)) &= \inf\{long_{\mathbb{H}}(g), g \in \Gamma(\gamma(x), \gamma(y))\} \\ &\leq \inf\{long_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f), f \in \Gamma(x, y)\} \\ &\leq \inf\{long_{\mathbb{H}}(f), f \in \Gamma(x, y)\} = d_{\mathbb{H}}(x, y) \end{aligned}$$



aplicando (1) en el primer paso y la invarianza por transformaciones de Möbius de  $long_{\mathbb{H}}(f)$  (teorema 2.3) en el segundo.

De la misma manera,  $\gamma^{-1} \in Mob(\mathbb{H})$ , así que, de forma análoga obtenemos la otra desigualdad, es decir,

$$\{\gamma^{-1} \circ g, g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \subseteq \Gamma(x, y)$$

de donde obtenemos que:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(x, y) &= \inf\{long_{\mathbb{H}}(f), f \in \Gamma(x, y)\} \\ &\leq \inf\{long_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1} \circ g), f \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &\leq \inf\{long_{\mathbb{H}}(g), g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)) \end{aligned}$$

Y con esto concluye la demostración de la proposición 2.7.

**Teorema 2.8:**  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  es un espacio métrico.

**Demostración:** Para probar que  $d_{\mathbb{H}}$  es una distancia procederemos como es costumbre en estos casos, es decir, verificaremos que la función  $d_{\mathbb{H}}$  verifica los cuatro axiomas que debe verificar toda métrica. Sin embargo, dejaremos el segundo axioma para el final, por ser éste el más complicado de demostrar.

1.  $d_{\mathbb{H}}(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{H}$ :

Este primer punto es bastante obvio, debido a que  $Im(z) > 0, \forall z \in \mathbb{H}$  y  $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , y por tanto

$$long_{\mathbb{H}}(f) = \int_a^b \frac{|f'(t)|}{Im(f(t))} dt \geq 0$$

puesto que  $f(t)$  está en  $\mathbb{H}$ .

Por tanto,  $d_{\mathbb{H}}(x, y) \geq 0$ , puesto que el inferior de un conjunto de cantidades positivas o nulas es positivo o nulo.

3.  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(y, x)$ :

Sea  $\phi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$  el difeomorfismo dado por:

$$\phi(x) = a + b - x, x \in [a, b]$$

Demostraremos, como paso previo, la igualdad entre los conjuntos  $\Gamma(y, x)$  y  $\{f \circ \phi, f \in \Gamma(x, y)\}$ :

Por un lado, es fácil ver, por definición de  $\Gamma(y, x)$ , que

$$\Gamma(y, x) \supseteq \{f \circ \phi, f \in \Gamma(x, y)\}$$

Por otro lado, si aplicamos este razonamiento a  $\phi^{-1}$ , que también es un difeomorfismo, obtenemos:

$$\{f \circ \phi, f \in \Gamma(x, y)\} \supseteq \{g \circ \phi^{-1} \circ \phi, g \in \Gamma(y, x)\} = \Gamma(y, x)$$

Con lo que concluimos que  $\Gamma(y, x) = \{f \circ \phi, f \in \Gamma(x, y)\}$ , y a partir de esto, del hecho de que  $\phi$  es un difeomorfismo y por cambio de variable en la integral, tenemos que:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(y, x) &= \inf\{long_{\mathbb{H}}(g), g \in \Gamma(y, x)\} \\ &= \inf\{long_{\mathbb{H}}(f \circ \phi), f \in \Gamma(x, y)\} \\ &= \inf\{long_{\mathbb{H}}(f), f \in \Gamma(x, y)\} = d_{\mathbb{H}}(x, y) \end{aligned}$$

con lo que concluimos esta parte.

**4.**  $d_{\mathbb{H}}(x, z) \leq d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z); \forall x, y, z \in X$ :

Se razonará por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que existen tres puntos distintos  $x, y$  y  $z$  de  $\mathbb{H}$  de manera que

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) > d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

Sea  $\varepsilon = d_{\mathbb{H}}(x, z) - (d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z))$ . Por definición de  $d_{\mathbb{H}}$ , existe un camino  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  en  $\Gamma(x, y)$  tal que

$$long_{\mathbb{H}}(f) - d_{\mathbb{H}}(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Del mismo modo, existe un camino  $g : [b, c] \rightarrow \mathbb{H}$  en  $\Gamma(y, z)$  tal que

$$long_{\mathbb{H}}(g) - d_{\mathbb{H}}(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea  $h : [a, c] \rightarrow \mathbb{H}$  la función definida por  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  y por  $g$  en el intervalo  $[b, c]$ . Puesto que  $h$  es diferenciable a trozos,  $h \in \Gamma(x, z)$ . Haciendo cálculos, tenemos que:

$$long_{\mathbb{H}}(h) = long_{\mathbb{H}}(f) + long_{\mathbb{H}}(g) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) + \varepsilon.$$

Puesto que, por definición tenemos que  $d_{\mathbb{H}}(x, z) \leq long_{\mathbb{H}}(h)$ , obtenemos que

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) + \varepsilon = d_{\mathbb{H}}(x, z)$$

La última igualdad es consecuencia de la definición de  $\varepsilon$ , por tanto tenemos la contradicción deseada.

**2.**  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ :

Nuestro primer paso será comprobar si el inferior

$$\inf\{long_{\mathbb{H}}(f), f \in \Gamma(x, y)\}$$

es alcanzado.

Sean  $x, y \in \mathbb{H}$  distintos entre sí. Por la proposición 1.17, existen  $\lambda, \mu > 0$  distintos y existe una transformación de Möbius  $\gamma \in Mob^+(\mathbb{H})$  tales que  $\gamma(x) = \mu i$  y  $\gamma(y) = \lambda i$ . Sin pérdida de generalidad, tomamos  $\mu < \lambda$ .

Por la proposición anterior, como la distancia hiperbólica es invariante por transformaciones en  $Mob(\mathbb{H})$ , nos basta con ver que el inferior es alcanzado para los elementos de  $\mathbb{H}$  de la forma  $ci$ ,  $c > 0$ .

Primero, definimos la función  $f_0 : [\mu, \lambda] \rightarrow \mathbb{H}$  dada por  $f_0(t) = ti$ ,  $\forall t \in [\mu, \lambda]$ . Está claro que la imagen de la función  $f_0$  es el segmento que une los puntos  $\mu i$  y  $\lambda i$ . Probaremos que la función  $f_0$  es la función que alcanza el inferior, es decir, que

$$\forall f \in \Gamma(\mu i, \lambda i), long_{\mathbb{H}}(f) \geq long_{\mathbb{H}}(f_0).$$

Antes que nada, cabe destacar que:

$$long_{\mathbb{H}}(f_0) = \int_{\mu}^{\lambda} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Sea  $f \in \Gamma(\mu i, \lambda i)$ . Denotemos  $f(t) = x(t) + iy(t)$  y consideremos  $g \in \Gamma(\mu i, \lambda i)$  dada por  $g(t) = iy(t)$ . Se tiene que  $g \in \Gamma(\mu i, \lambda i)$ , puesto que  $\mu i$  y  $\lambda i$  son imaginarios puros.

Además, tenemos que:

$$\begin{aligned} long_{\mathbb{H}}(g) &= \int_a^b \frac{|g'(t)|}{Im(g(t))} = \int_a^b \frac{\sqrt{(y'(t))^2}}{Im(g(t))} \\ &\leq \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{Im(f(t))} = long_{\mathbb{H}}(f). \end{aligned}$$

Ahora que sabemos esto, podemos reducir nuestro razonamiento a comprobar que para toda función  $g \in \Gamma(\mu i, \lambda i)$  de la forma  $g(t) = iy(t)$ ,

$$long_{\mathbb{H}}(f_0) \leq long_{\mathbb{H}}(g).$$

Esto ya es mucho más sencillo, pues el conjunto imagen de la función  $g$  es un segmento en el eje imaginario que une dos puntos,  $\alpha i$  y  $\beta i$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha \leq \mu < \lambda \leq \beta$ .

Definimos  $f_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{H}$  dada por  $f_1 = it$  y observamos que, efectivamente:

$$long_{\mathbb{H}}(f_0) = \ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \leq \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = long_{\mathbb{H}}(f_1).$$

Probemos ahora que  $long_{\mathbb{H}}(f_1) \leq long_{\mathbb{H}}(g)$ . Aquí tenemos dos casos:

Si  $g'(t)$  es estrictamente positiva o estrictamente negativa en  $[a, b]$ , entonces  $g$  es una reparametrización de  $f_1$  y  $long_{\mathbb{H}}(f_1) = long_{\mathbb{H}}(g)$ , con lo que habríamos terminado.

En caso contrario, como  $g$  es diferenciable a trozos y  $[a, b]$  es un intervalo compacto, existe una partición  $a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$  (i.e  $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [a_k, a_{k+1}]$ ) tal que para  $1 \leq k \leq n-1$  se tiene o bien  $g'(t) > 0 \ \forall t \in (a_k, a_{k+1})$  o bien  $g'(t) < 0 \ \forall t \in (a_k, a_{k+1})$  o bien  $g'(t) = 0 \ \forall t \in (a_k, a_{k+1})$ . En los dos primeros casos se tiene

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|g'(t)|}{g(t)} dt = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dt}{t}$$

donde  $\alpha_k = g(a_k)$ , y en el tercer caso

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|g'(t)|}{g(t)} dt = 0$$

De esta manera tenemos que

$$long_{\mathbb{H}}(g) = \int_a^b \frac{|g'(t)|}{g(t)} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|g'(t)|}{g(t)} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dt}{t} \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t} = long_{\mathbb{H}}(f_1).$$

Para la última desigualdad, obsérvese que  $\bigcup_{k=1}^{n-1} [\alpha_k, \alpha_{k+1}] = [\alpha, \beta]$ , pero la unión no ha de ser necesariamente disjunta.

Y a partir de aquí ya podemos concluir la demostración:

Si  $x = y$ , es obvio por definición de  $d_{\mathbb{H}}(x, y)$  que  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = 0$ , puesto que la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  dada por  $f(z) = x$  está en  $\Gamma(x, x)$ , lo que nos da lo siguiente:

$$long_{\mathbb{H}}(f) = \int_a^b \frac{|f'(t)|}{Im(f(t))} dt = 0.$$

ya que  $f'(t) \equiv 0$ , por ser  $f$  constante.

Por otro lado, si  $x \neq y$ , el conjunto  $\Gamma(x, y)$  no tiene funciones constantes; por lo tanto, como  $Im(f(t))$  es estrictamente positiva  $\forall f \in \Gamma(x, y)$  y  $f'(t)$  no es idénticamente nula, tenemos que,  $\forall f \in \Gamma(x, y)$ ,  $long_{\mathbb{H}}(f) > 0$ .

Como  $inf\{long_{\mathbb{H}}(f), f \in \Gamma(x, y)\}$  es alcanzado y  $long_{\mathbb{H}}(f) > 0, \forall f \in \Gamma(x, y)$ , concluimos que  $d_{\mathbb{H}}(x, y) > 0$  si  $x \neq y$ .

De esta manera concluimos este apartado. Veremos en el siguiente capítulo que esta métrica también le da a  $\mathbb{H}$  una estructura de variedad riemanniana.

## 2.2. $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ , una variedad riemanniana

En esta parte del trabajo nos centraremos en estudiar a  $\mathbb{H}$  y le asociaremos una métrica de Riemann. Primero se darán varios conceptos previos y luego se procederá a obtener la métrica de Riemann de  $\mathbb{H}$  asociada a la longitud hiperbólica ya definida.

Consideramos una estructura de variedad diferenciable a  $\mathbb{H}$  (Ver [Wa], p.5). Sea  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ .  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Consideramos la carta  $\mathfrak{F} = \{(\mathbb{H}, \varphi)\}$ , siendo  $\varphi$  el homeomorfismo

$$\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$$

dado por  $\varphi(z) = (x, y)$ , para todo  $z \in \mathbb{H}$  de la forma  $z = x + iy$ . Esta carta define un atlas en  $\mathbb{H}$ , por tanto una estructura de variedad diferenciable (de clase  $C^\infty$ ).

### Definición 2.9:

Sea  $(M, \mathfrak{F})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  de clase  $C^\infty$  con una estructura diferenciable  $F$ . Sean

$$T(M) = \cup_{p \in M} T_p M,$$

$$T^*(M) = \cup_{p \in M} T_p^* M,$$

donde  $T_p^* M$  es el dual del espacio tangente a  $M$  en el punto  $p$ .

Sean las proyecciones

$$\begin{aligned} \pi : T(M) &\longrightarrow M, \text{ con } \pi(v) = p \text{ si } v \in T_p M \\ \pi^* : T^*(M) &\longrightarrow M, \text{ con } \pi(w) = p \text{ si } w \in T_p^* M \end{aligned}$$

Sea  $(U, \varphi) \in \mathfrak{F}$  con funciones coordenadas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Definimos

$$\bar{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \text{ y } \bar{\varphi}^* : (\pi^*)^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

dadas por

$$\bar{\varphi}(v) = (\varphi_1(\pi(v)), \dots, \varphi_n(\pi(v)), d\varphi_1(v), \dots, d\varphi_n(v))$$

$$\bar{\varphi}^*(w) = (\varphi_1(\pi^*(w)), \dots, \varphi_n(\pi^*(w)), w(\frac{d}{d\varphi_1}), \dots, w(\frac{d}{d\varphi_n}))$$

para todos los  $v \in \pi^{-1}(U)$  y los  $w \in (\pi^*)^{-1}(U)$ . Entonces, la familia

$$\bar{\mathfrak{F}} = \{(\pi^{-1}(U), \bar{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathfrak{F}\}$$

es un atlas (Ver [Wa], p.19). Consideramos la estructura diferenciable en  $T(M)$  definida por  $\bar{\mathfrak{F}}$ . De forma análoga se define una estructura de variedad diferenciable en el fibrado cotangente, pero con los duales.

**Definición 2.10:**

Sea  $(M, \mathfrak{F})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y de clase  $C^\infty$ . Una métrica riemanniana es una aplicación  $\phi$  que asocia a cada punto de  $M$  una forma bilineal  $\phi_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  simétrica, no degenerada y definida positiva de forma que, para cada elemento  $(U, \varphi) \in \mathfrak{F}$  las funciones  $f_{i,j} : M \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$f_{i,j}(p) = \phi_p(d\varphi_i(p), d\varphi_j(p)), \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

son de clase  $C^\infty$ . Decimos que el par  $(M, \phi)$  es una variedad riemanniana y que  $\phi$  es su métrica de Riemann asociada.

Denotamos la métrica, restringida a  $U$ , mediante

$$ds^2|_U = \sum_{1 \leq i, j \leq n} f_{i,j} \cdot (d\varphi_i \cdot d\varphi_j)$$

**Definición 2.11:**

Sea  $(M, \phi)$  una variedad riemanniana. Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  un camino diferenciable. Definimos la longitud de  $\gamma$  sobre  $M$  como

$$long(\gamma) = \int_b^a \|\gamma^\circ(t)\|_{\gamma(t_0)} dt$$

donde  $\gamma^\circ(t) = d\gamma|_t(\frac{d}{dt})$ .

Recordamos que

$$d\gamma|_{t_0} : T_{t_0} \mathbb{R} \rightarrow T_{\gamma(t_0)} M$$

viene dada por

$$d\gamma|_{t_0}((\frac{d}{dt})|_{t_0}) = d\gamma((\frac{d}{dt})|_{t_0}) = \sum_{i=1}^n \frac{d\gamma_i}{dt}(t_0) \frac{d}{dx_i}, t_0 \in \mathbb{R}$$

Consideramos ahora la métrica en  $\mathbb{H}$  definida en su única carta mediante

$$\frac{1}{\text{Im}^2(z)}(dx)^2 + \frac{1}{\text{Im}^2(z)}(dy)^2, z \in \mathbb{H}$$

Veamos que la longitud que define esta métrica es la considerada en la definición 2.4:

$$\|\gamma^\circ(z)\| = \sqrt{\frac{[\gamma_1'(z)]^2}{\text{Im}^2(z)} + \frac{[\gamma_2'(z)]^2}{\text{Im}^2(z)}} = \frac{|\gamma'(z)|}{\text{Im}(z)}, z \in \mathbb{H}.$$

Como se puede ver, la longitud definida por esta métrica es la de la definición 2.4. De aquí concluimos que  $\mathbb{H}$  con la métrica dada por los coeficientes anteriores es una variedad riemanniana.

### 3. Geometría en el espacio $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$

Ahora que sabemos que el espacio  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  es una variedad riemanniana, procederemos a hacer un pequeño estudio sobre este espacio para ver cuáles son sus rectas, cómo se comportan y qué diferencias y similitudes tiene la geometría hiperbólica con la euclídea.

#### 3.1. Las rectas de $\mathbb{H}$ . Propiedades básicas.

Antes que nada, pasaremos a hablar de cuáles son las rectas en  $\mathbb{H}$ . Para ello, algunos teoremas del primer capítulo serán claves. Sin embargo, hay que tener clara la noción de recta antes de continuar:

**Definición 3.1:** Sean  $x$  e  $y$  dos puntos de  $\mathbb{H}$  distintos entre sí. Un segmento hiperbólico entre  $x$  e  $y$  es una curva lisa  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  de modo que:

1.  $\gamma(a) = x$  y  $\gamma(b) = y$ .
2.  $long(\gamma) = d_{\mathbb{H}}(x, y)$ .

Una recta hiperbólica es una curva lisa  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  que verifica que para todo par de puntos  $a$  y  $b$  reales con  $a < b$ ,  $r|_{[a,b]}$  es un segmento hiperbólico.

**Teorema 3.2:** Las rectas del espacio métrico  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  son las intersecciones con  $\mathbb{H}$  de todas las circunferencias en  $\overline{\mathbb{C}}$  perpendiculares a  $\overline{\mathbb{R}}$  (Se considera la perpendicularidad en el sentido euclídeo, dada por la noción de ángulo de la definición 1.12), es decir, son las semicircunferencias en  $\mathbb{C}$  con centro en el eje real y las semirectas perpendiculares a  $\mathbb{R}$  que están contenidas en  $\mathbb{H}$ .

#### Demostración:

Los elementos de  $Mob(\mathbb{H})$  envían circunferencias en  $\overline{\mathbb{C}}$  que son perpendiculares a  $\overline{\mathbb{R}}$  en circunferencias en  $\overline{\mathbb{C}}$  que son perpendiculares a  $\overline{\mathbb{R}}$ . Esto es consecuencia del corolario 1.5 y del teorema 1.13, ya que por eso se conserva la perpendicularidad entre circunferencias a través de las transformaciones de Möbius.

Sabemos también por el procedimiento en la demostración del punto 2. del teorema 2.8 que el eje imaginario es una recta en  $\mathbb{H}$ , puesto que la longitud del arco del segmento que va de  $\mu i$  a  $\lambda i$ ,  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^+$ , es  $d_{\mathbb{H}}(\lambda i, \mu i)$ ,  $\lambda, \mu > 0$ .

Sea  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  la parametrización del eje imaginario dada por  $r(t) = ie^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $r$  perpendicular a  $\overline{\mathbb{R}}$  y como por la proposición 2.7  $d_{\mathbb{H}}$  es



invariante por transformaciones de Möbius; tenemos que, para todo  $\gamma \in Mob(\mathbb{H})$ ,  $\gamma \circ r$  es una recta. Esto combinado con el corolario 1.8 nos da que, si  $\alpha$  es la intersección con  $\mathbb{H}$  de un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$  que es perpendicular a  $\mathbb{R}$ , entonces existe una parametrización de una recta dada por  $\gamma \circ r$ , con  $\gamma \in Mob(\mathbb{H})$  cuya imagen es  $\alpha$ . Con esto terminamos esta parte.

Recíprocamente, si  $\alpha$  es una recta en  $\mathbb{H}$ , entonces, para todos  $a$  y  $b$  reales con  $a < b$ ,  $\alpha|_{[a,b]}$  es un segmento en  $\mathbb{H}$ . Por la proposición 1.17, tenemos que  $\alpha|_{[a,b]}$  es la imagen de un segmento de  $\mathbb{H}$  contenido en  $i\mathbb{R}$  por una transformación de Möbius contenida en  $Mob(\mathbb{H})$ . De esto concluimos que  $\alpha$  es intersección con  $\mathbb{H}$  de una circunferencia en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Además, por el teorema 1.13, la recta  $\alpha$  es perpendicular a  $\overline{\mathbb{R}}$ . Con esto concluye la demostración.

En lo que queda de apartado, intentaremos determinar el conjunto de todas las isometrías de  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ . Esto nos dará una buena visión de cómo se comportan este espacio y las rectas que hay en él, que complementará muy bien la siguiente parte de este capítulo. Para ello, nos apoyaremos en un resultado auxiliar que, además, resultará interesante de ver.

**Proposición 3.3:** Sean  $x, y, z \in \mathbb{H}$  tres puntos distintos entre sí. Entonces,  $d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z)$  si y sólo si  $y$  está contenido en el segmento hiperbólico que va de  $x$  a  $z$ .

**Demostración:**

Sea  $m$  un elemento de  $Mob(\mathbb{H})$  tal que  $m(x) = i$  y  $m(z) = \alpha i$ , para algún  $\alpha > 1$ . Esto se consigue realizando una elección adecuada en el procedimiento del corolario 1.7. Sea  $m(y) = a + bi$ . Vamos a estudiar los distintos casos posibles para  $y$ :

1.  $y$  está en el segmento hiperbólico que va de  $x$  a  $z$ .

En este caso,  $m(y) = bi$ , con  $1 \leq b \leq \alpha$ . De aquí se obtiene que:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(x, y) &= d_{\mathbb{H}}(i, bi) = \ln(b). \\ d_{\mathbb{H}}(y, z) &= d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) = \ln\left(\frac{\alpha}{b}\right) = d_{\mathbb{H}}(x, z) - d_{\mathbb{H}}(x, y). \end{aligned}$$

De donde obtenemos que  $d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z)$ .

2.  $y$  no está en el segmento hiperbólico que va de  $x$  a  $z$ .

Este caso tendrá varios subcasos:

1.  $m(y) = bi$ ,  $0 < b < 1$ .

En este caso,

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{H}}(x, y) &= d_{\mathbb{H}}(bi, i) = |\ln(b)| = -\ln(b). \\d_{\mathbb{H}}(y, z) &= d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) = \ln\left(\frac{\alpha}{b}\right) = d_{\mathbb{H}}(x, z) - \ln(b).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(x, z) - 2\ln(b) > d_{\mathbb{H}}(x, z),$$

pues  $\ln(b) < 0$ .

2.  $m(y) = bi$ ,  $\alpha < b$ .

En este caso,

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{H}}(x, y) &= \ln(b), \\d_{\mathbb{H}}(y, z) &= \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right) = \ln(b) - d_{\mathbb{H}}(x, z).\end{aligned}$$

Como  $\ln(b) > d_{\mathbb{H}}(x, z)$ , tenemos que:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) = 2\ln(b) - d_{\mathbb{H}}(x, z) > d_{\mathbb{H}}(x, z).$$

3.  $m(y) = a + bi$ ,  $a \neq 0$ .

Sea  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{H}$  un segmento tal que  $f(\alpha) = i$  y  $f(\beta) = a + bi$ . Sea  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{H}$  el camino dado por  $g(t) = \text{Im}(f(t))i$ . Tenemos que  $g(\alpha) = i$  y  $g(\beta) = bi$ , por tanto, como  $a \neq 0$ ,  $\text{long}_{\mathbb{H}}(g) < \text{long}_{\mathbb{H}}(f)$ . De aquí se obtiene, por definición de distancia hiperbólica:

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{H}}(i, bi) &< d_{\mathbb{H}}(i, a + bi) = d_{\mathbb{H}}(x, y), \\d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) &< d_{\mathbb{H}}(a + bi, \alpha i) = d_{\mathbb{H}}(y, z).\end{aligned}$$

De aquí obtenemos:

Si  $1 \leq b \leq \alpha$ ,

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(i, \alpha i) = d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

Si  $0 < b < 1$ ,

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) < d_{\mathbb{H}}(x, z) - 2\ln(b) = d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

Si  $\alpha < b$ ,

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) < 2\ln(b) - d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

Y con esto termina la demostración.

Como podemos observar; en este caso, la métrica hiperbólica se comporta igual que la métrica euclídea. Si bien observaremos varias similitudes más adelante, se destacarán también notables diferencias respecto a la métrica euclídea. Ahora pasaremos a otro resultado, que se necesitará como paso previo al teorema siguiente.

**Proposición 3.4:** Sean  $(z_1, z_2)$  y  $(w_1, w_2)$  dos pares de puntos distintos en  $\mathbb{H}$ . Entonces, existe una transformación  $\gamma \in Mob(\mathbb{H})$  que lleve un par en el otro si y sólo si  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$ .

**Demostración:**

Si existe una transformación  $\gamma \in Mob(\mathbb{H})$  que lleve  $(z_1, z_2)$  en  $(w_1, w_2)$ , entonces, por la proposición 2.7 tenemos que  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$ .

Recíprocamente, por la proposición 1.17, fijando  $\lambda = 1$  existe  $\mu > 1$  tal que  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(i, \mu i)$  y una transformación  $\gamma_z \in Mob(\mathbb{H})$  que manda el par  $(z_1, z_2)$  en el par  $(i, \mu i)$ . Análogamente, existe  $\mu' > 1$  tal que  $d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = d_{\mathbb{H}}(i, \mu' i)$  y una transformación  $\gamma_w \in Mob(\mathbb{H})$  que manda el par  $(w_1, w_2)$  en el par  $(i, \mu' i)$ . como  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$ , tenemos que  $\mu = \mu'$ . Las transformaciones buscadas serán  $\gamma_z \circ \gamma_w^{-1}$  y  $\gamma_w \circ \gamma_z^{-1}$ , en función del sentido en que queramos ir de un par de puntos al otro.

Con esto terminamos este apartado. Ahora pasaremos a hacer un estudio más gráfico de las rectas hiperbólicas.

### 3.2. Propiedades de las rectas hiperbólicas

En este punto nos centraremos en el estudio de propiedades que tienen las rectas en  $\mathbb{H}$ . De esta manera, observaremos las similitudes y diferencias que presenta la geometría hiperbólica respecto de la euclídea. Se sintetizará esto en un pequeño párrafo al final del capítulo, a modo de conclusión.

Por ahora, empezaremos con el siguiente resultado:

**Proposición 3.5:** Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de  $\mathbb{H}$ . Existe una única recta hiperbólica que pasa por  $A$  y  $B$ .

**Demostración:**

Separamos la demostración en dos casos:

1.  $Re(A) = Re(B)$

Nuestra única posibilidad es tomar la recta hiperbólica  $r = \{z \in \mathbb{H} \mid Re(z) = Re(A)\}$ .

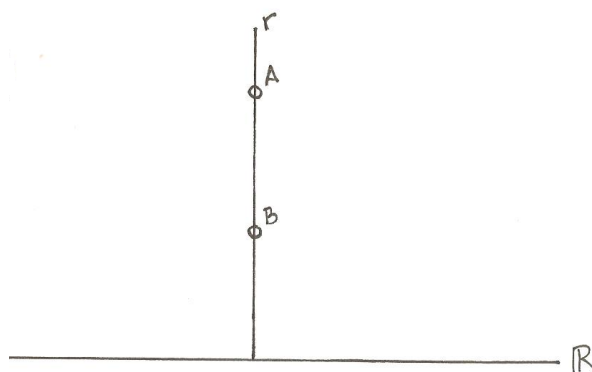


Fig. 4

2.  $Re(A) \neq Re(B)$

Tomamos el corte de la mediatriz euclídea del segmento euclídeo  $\overline{AB}$  con el eje real, al que llamamos  $C$ . La recta hiperbólica buscada es la semicircunferencia de centro  $C$  y radio  $\overline{AC}$ .

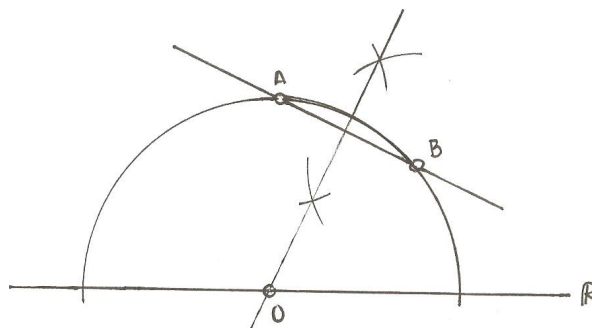


Fig. 5

**Proposición 3.6:** Sea  $A$  un punto de  $\mathbb{H}$  y sea  $r$  una recta hiperbólica que no contenga al punto  $A$ . Existe una única recta hiperbólica que pasa por el punto  $A$  y que es perpendicular a  $r$  (Tomaremos concepto de perpendicularidad euclídeo entre curvas, ver definición 1.12).

**Demostración:**

Sabemos por el teorema 1.13 que las transformaciones de Möbius conservan los ángulos entre curvas. Además, por la proposición 1.17, podemos reducir el problema al caso en que la recta hiperbólica es una semirrecta perpendicular al eje real.

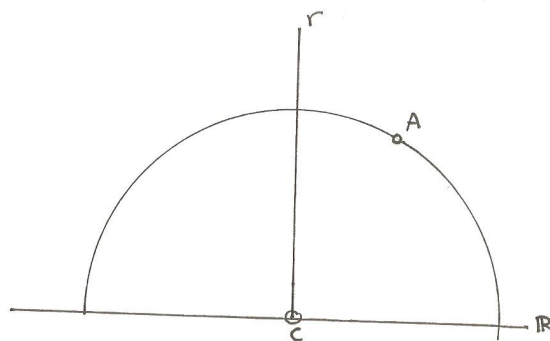


Fig. 6

Como se puede ver en la figura, la única posibilidad es la circunferencia con centro  $C = r \cap \mathbb{R}$  y radio  $\overline{CA}$ . Con esto se termina la demostración.

En estos casos, vemos que las propiedades de las rectas hiperbólicas coinciden con las de las rectas euclídeas. Sin embargo, la diferencia más significativa que presenta la métrica hiperbólica respecto de la euclídea es la noción de paralelismo. Veremos esto a continuación:

**Definición 3.7:** Se dice que dos rectas hiperbólicas son paralelas cuando son disjuntas.

**Teorema 3.8:** Sea  $r$  una recta hiperbólica y  $A$  un punto de  $\mathbb{H}$  que no está en  $r$ . Entonces, existen infinitas rectas hiperbólicas que pasan por  $A$  y son paralelas a  $r$ .

**Demostración:**

La demostración se basa en que los conjuntos de los centros posibles para las rectas hiperbólicas paralelas y que pasan por  $A$  (se considerará centro  $\infty$

para aquellas que son rectas euclídeas) son intervalos de  $\overline{\mathbb{R}}$ , con lo cual se obtienen una infinidad de posibilidades. Esto se mostrará en las siguientes figuras, que representarán todos los casos posibles:

1.  $r$  es una recta euclídea perpendicular al eje real.

Tenemos el siguiente esquema:

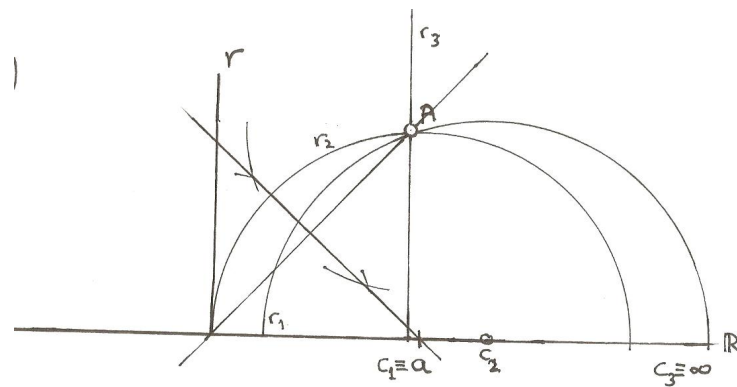


Fig. 7

Como se muestra en la figura, cualquier recta hiperbólica cuyo centro  $C$  está en el intervalo  $[a, \infty]$  y cuyo radio sea  $\overline{CA}$  es solución del problema, y como se puede observar, hay infinitas.

2.  $r$  es una circunferencia con centro en el eje real y la recta euclídea que pasa por  $A$  y es perpendicular al eje real corta a  $r$  en un punto.

Tenemos el siguiente esquema:

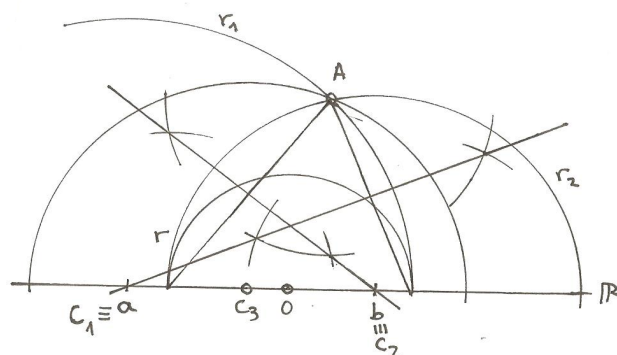


Fig. 8

Como se muestra en la figura, cualquier recta hiperbólica cuyo centro  $C$  está en el intervalo  $[a, b]$  y cuyo radio sea  $\overline{CA}$  es solución del problema. Idem en el caso de que el punto  $A$  sea interior a  $r$ .

3.  $r$  es una circunferencia con centro en el eje real y la recta euclídea que pasa por  $A$  y es perpendicular al eje real no corta a  $r$ .

Tenemos el siguiente esquema:

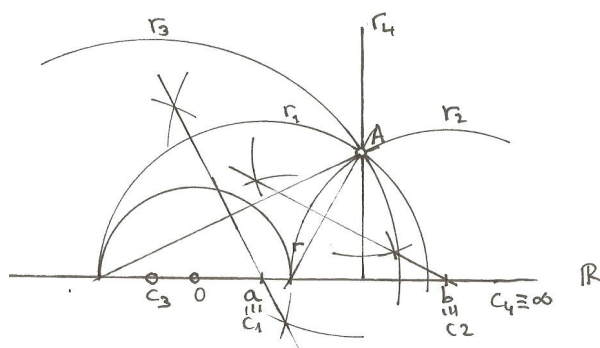


Fig. 9

En este caso, cualquier recta hiperbólica cuyo centro  $C$  no esté en el intervalo  $(a, b)$  y cuyo radio sea  $\overline{CA}$  nos da una solución del problema.

Podemos observar que en todos los casos obtenemos una infinidad de soluciones. De esta manera queda demostrado este resultado.

Como se puede observar, esto ya difiere bastante del caso euclídeo, pues ya no tenemos la unicidad que teníamos en la versión euclídea de este teorema. Además, esto ocasionará otra diferencia significativa, que se puede ver bien observando las figuras anteriores; y es que el paralelismo no es transitivo. Debido a esto, debemos introducir el siguiente concepto.

**Definición 3.9:** Se dice que dos rectas hiperbólicas son ultraparalelas si y sólo si son paralelas y disjuntas en el infinito. Se considerará  $\overline{\mathbb{R}}$  como el infinito en  $\mathbb{H}$ . Cabe destacar que, si  $r$  y  $s$  son ultraparalelas,  $d_{\mathbb{H}}(r, s) > 0$ .

**Proposición 3.10:** Sean  $r$  y  $s$  dos rectas hiperbólicas paralelas.  $r$  y  $s$  son ultraparalelas si y sólo si existe una recta hiperbólica que es perpendicular a

ambas.

**Demostración:**

Primero, estudiaremos lo que ocurre cuando las rectas son ultraparalelas. Aquí se distinguen dos casos:

1.  $r$  es una recta euclídea y  $s$  una semicircunferencia, como se muestra en la figura

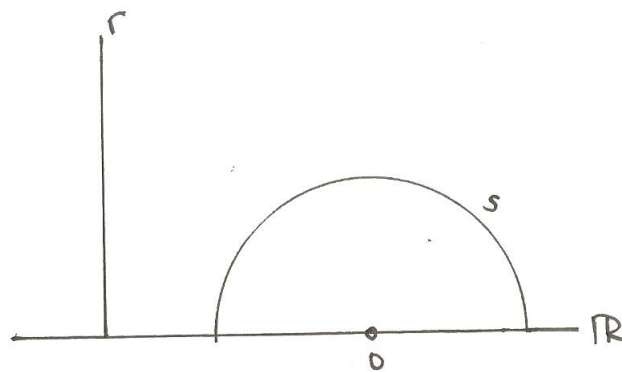


Fig. 10

Como buscamos una recta hiperbólica  $t$  perpendicular a  $r$  y a  $s$ , tenemos ya que su centro es el corte de  $r$  con el eje real, porque si no la recta  $t$  no sería perpendicular a  $r$ . Llamamos  $C$  su centro. También tenemos que existe un radio de  $t$  que es tangente a  $s$ , pues si no  $t$  no sería perpendicular a  $s$ . Por tanto, la recta hiperbólica  $t$  tendrá centro  $C$  y radio  $\overline{CT}$ , donde  $T$  es el punto de tangencia del radio tangente. Reuniendo estas condiciones, podemos reducir nuestro problema al siguiente problema de tangencias:

Trazar una recta tangente a una circunferencia dada y que pasa por un punto fijado:



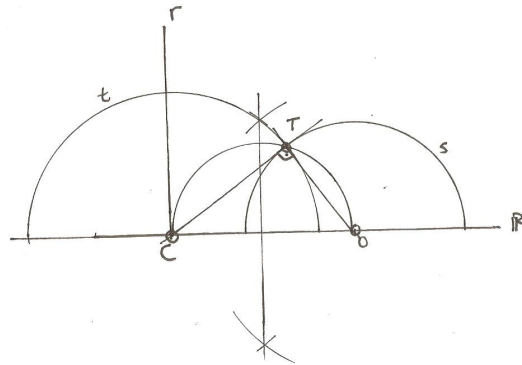


Fig. 11

- 1) Trazar circunferencia de diámetro  $\overline{CO}$ .
- 2) El punto de tangencia buscado,  $T$ , es el corte de esa circunferencia con  $s$ .

2.  $r$  y  $s$  son dos semicircunferencias, como se muestra en la figura:

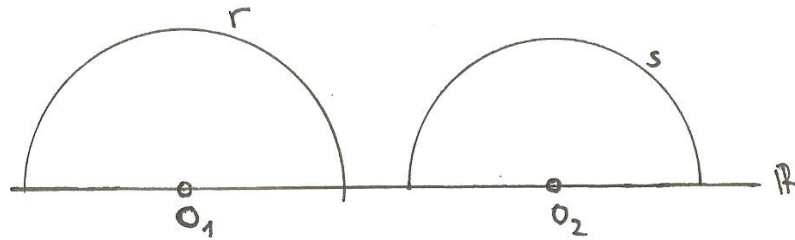


Fig. 12

El ultraparalelismo es equivalente a la condición  $d_{\mathbb{H}}(r, s) > 0$  y  $Mob(\mathbb{H})$  es el conjunto de las isometrías de  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ . Combinando esto con la proposición 1.17 podemos reducir este caso al caso anterior, con lo que terminamos esta parte.

Por tanto, si dos rectas hiperbólicas son ultraparalelas, existe una tercera que es perpendicular a las otras dos. Veamos ahora qué ocurre si ambas rectas no son ultraparalelas. Aquí tenemos tres posibles casos:

1.  $r$  es una recta euclídea y  $s$  una semicircunferencia, como se muestra en la figura:

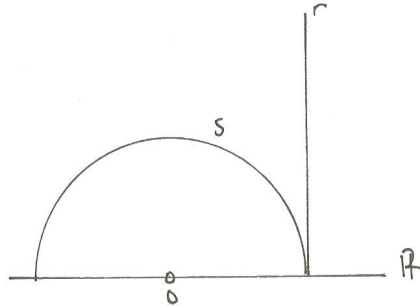


Fig. 13

Este esquema es similar al del primer caso de ultraparalelismo. Si razonamos de la misma forma, nos damos cuenta que el centro de la recta  $t$  buscada coincide con el punto de tangencia. Por lo tanto, nos damos cuenta de que  $t$  no puede ser perpendicular a  $r$  y a  $s$  simultáneamente.

2.  $r$  y  $s$  son dos semicircunferencias, como se muestra en la figura.

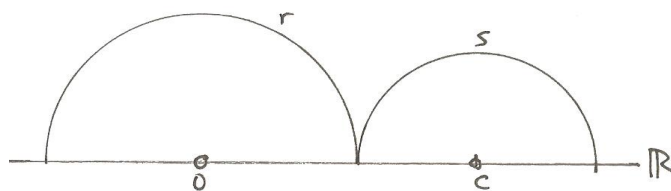


Fig. 14

El no ultraparalelismo es equivalente a la condición  $d_{\mathbb{H}}(r, s) = 0$  y  $Mob(\mathbb{H})$  es el conjunto de las isometrías de  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ . Combinando esto con la proposición 1.17 podemos reducir este caso al caso anterior, con lo que terminamos esta parte.

3.  $r$  y  $s$  son dos rectas euclídeas paralelas entre sí y perpendiculares al eje real.

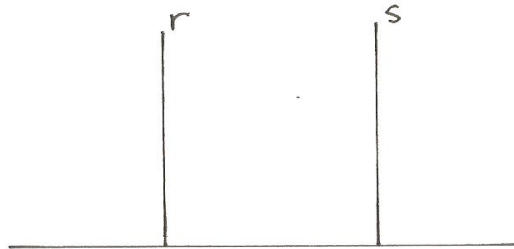


Fig. 15

Aquí, el centro de la circunferencia buscada tiene que ser el punto de corte de  $r$  con el eje real. Por simetría, el centro también tiene que coincidir con el corte de  $s$  con el eje real, por lo tanto no existe ningún centro que nos valga en este caso, luego  $t$  no es una semicircunferencia. Tampoco puede ser otra recta euclídea por razones obvias.

Con esto concluimos que, si  $r$  y  $s$  no son ultraparalelas, no existe una tercera recta  $t$  que sea perpendicular a las dos anteriores simultáneamente. De esta manera se concluye la demostración.

### 3.3. Las isometrías de $\mathbb{H}$

En este apartado estudiaremos las isometrías de  $\mathbb{H}$ , aunque primero hablaremos del concepto de isometría:

**Definición 3.11:** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una isometría es un homeomorfismo  $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$  que preserva la métrica; es decir, es un homeomorfismo para el que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)), \forall x, y \in X.$$

**Teorema 3.12:**  $Mob(\mathbb{H})$  es el conjunto de todas las isometrías del espacio métrico  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ .

**Demostración:**

Por la proposición 2.7, está claro que los elementos de  $Mob(\mathbb{H})$  son isometrías en  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ , así que nos limitaremos a probar que, si  $f$  es una isometría, entonces  $f \in Mob(\mathbb{H})$ .

Sea  $f$  una isometría en  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ . Sean  $p$  y  $q$  dos elementos de  $\mathbb{H}$ . Denotamos  $[p, q]$  al segmento hiperbólico que va de  $p$  a  $q$ . Por la proposición 3.3 y porque  $f$  es una isometría, tenemos que  $[f(p), f(q)] = f([p, q])$  (\*). Esto se prueba tomando un punto  $z$  del segmento  $[p, q]$  distinto de  $p$  y  $q$  genérico y aplicando 3.3 y el hecho de que  $f$  es una isometría. Sea  $m$  la mediatriz del segmento  $[p, q]$ , es decir:

$$m = \{z \in \mathbb{H} : d_{\mathbb{H}}(p, z) = d_{\mathbb{H}}(q, z)\}.$$

Como  $f$  es una isometría en  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ , combinado con (\*), tenemos que  $f(m)$  es la mediatriz del segmento  $[f(p), f(q)] = f([p, q])$ .

Sean  $x, y \in \mathbb{H}$  imaginarios puros. Por la proposición 3.4, existe un elemento  $\gamma \in Mob(\mathbb{H})$  tal que  $\gamma(f(x)) = x$  y  $\gamma(f(y)) = y$ , puesto que  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y))$ . Con esto sabemos que  $\gamma \circ f$  fija los puntos  $x$  e  $y$  y por tanto conserva el eje imaginario de  $\mathbb{H}$ . Por tanto, como la imagen de un conexo por una aplicación continua es un conexo, o bien conservamos los dos cuadrantes de  $\mathbb{H}$  o bien los intercambiamos. Si queremos que se conserven, basta con componer  $\gamma$  con la función  $B(z) = -\bar{z}$  en los casos en que sea necesario. Por tanto, sin perder generalidad, podemos asegurar que se conservan también ambos cuadrantes de  $\mathbb{H}$ .

Sea  $z \in \mathbb{H}$  otro imaginario puro distinto de  $x$  e  $y$ . Como  $d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(f(\gamma \circ f(x)), \gamma \circ f(z))$ , tenemos dos posibilidades para  $\gamma \circ f(z)$ . Una es que puesto que  $\gamma \circ f(z) = z$  y la otra es que  $x$  sea la mediatriz del segmento hiperbólico  $[z, \gamma \circ f(z)]$ . Esta última queda excluida porque también ha de verificarse que  $d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(f(\gamma \circ f(y)), \gamma \circ f(z))$ , puesto que  $\gamma \circ f$  es una isometría. Por tanto,  $z$  es fijo por  $\gamma \circ f$ . Como  $z$  es un punto genérico del eje imaginario, hemos demostrado que todos los puntos del eje imaginario son fijos por  $\gamma \circ f$ .

Sea ahora  $w \in \mathbb{H}$  con parte real no nula. Sea  $r$  la recta hiperbólica que pasa por  $w$  y que es perpendicular al eje complejo de  $\mathbb{H}$ .  $r$  será la semicircunferencia con centro 0 y radio  $|w|$  (ver proposición 3.6). Sea  $i\alpha$  la intersección de  $r$  con el eje complejo. Probemos ahora que  $r$  es la mediatriz de cualquier segmento contenido en el eje complejo donde  $i\alpha$  es el punto medio. Sean  $iz_1, iz_2 \in \mathbb{R}$  los extremos de un segmento en el eje imaginario con punto medio  $i\alpha$ . Como

$$d_{\mathbb{H}}(i\alpha, iz_1) = d_{\mathbb{H}}(i\alpha, iz_2),$$

tenemos que

$$\ln(z_1) - \ln(\alpha) = \ln(\alpha) - \ln(z_2),$$

por lo que, utilizando las propiedades de los logaritmos, tenemos que  $\alpha^2 = z_1 z_2$ . Ahora, sea  $m(z) = -\frac{\alpha^2}{z}$ . Es fácil comprobar que  $m \in Mob(\mathbb{H})$ . También comprobamos evaluando  $m$  que  $m(i\alpha) = i\alpha$ , que  $m(iz_1) = iz_2$  y que  $m(w) = -\bar{w}$ . De esto concluimos, aplicando la proposición 3.4, que  $d_{\mathbb{H}}(w, iz_1) = d_{\mathbb{H}}(-\bar{w}, iz_2)$ , y usando la función  $B$  definida anteriormente, tenemos que  $d_{\mathbb{H}}(w, iz_2) = d_{\mathbb{H}}(-\bar{w}, iz_2)$ . Combinando estos dos hechos, concluimos que  $d_{\mathbb{H}}(w, iz_1) = d_{\mathbb{H}}(w, iz_2)$ . Esto quiere decir que  $r$  es la mediatriz de los segmentos contenidos en el eje imaginario con punto medio  $i\alpha$  y, como  $\gamma \circ f$  fija todos los puntos del eje imaginario, tenemos que  $\gamma \circ f(r) = r$ .

Puesto que  $\gamma \circ f(i\alpha) = i\alpha$ , que

$$d_{\mathbb{H}}(i\alpha, w) = d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f(i\alpha), \gamma \circ f(w)) = d_{\mathbb{H}}(i\alpha, \gamma \circ f(w))$$

que  $\gamma \circ f(w) \in r$  y que  $\gamma \circ f$  preserva los cuadrantes de  $\mathbb{H}$ , concluimos que  $\gamma \circ f(w) = w$ . Con esto se concluye la demostración, puesto que hemos probado que  $\forall w \in \mathbb{H} \setminus i\mathbb{R}^+$  tenemos que  $\gamma \circ f(w) = w$ , concluyendo así que  $\gamma \circ f$  es la identidad y que, por tanto,  $f = \gamma^{-1} \in Mob(\mathbb{H})$ .

### 3.4. Conclusión: Postulados de Euclides en la geometría hiperbólica

Primero, se mencionarán los cinco postulados de Euclides sobre la geometría plana (ver [Zi]). Son los siguientes:

1. Dados dos puntos en el plano, existe una única recta que los une
2. Cualquier segmento puede prolongarse indefinidamente de forma continua en ambos sentidos.
3. Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio
4. Todos los ángulos rectos son congruentes, es decir, son iguales salvo isometrías.
5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.

Como conclusión final, podemos darnos cuenta que, en el espacio  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  se verifican los cuatro primeros postulados de Euclides: El primero por la proposición 3.5, el segundo se demuestra al determinar el conjunto de rectas en  $\mathbb{H}$ , en el teorema 3.2. Veamos con más detalle los puntos 3 y 4 de los postulados de Euclides:

### 3. Se puede trazar una circunferencia desde cualquier punto y de cualquier radio

Como paso previo, debemos dar el concepto de circunferencia en un espacio métrico.

#### Definición 3.13:

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Sea  $x_0 \in X$  y sea  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ . Se define a la circunferencia de centro  $x$  y radio  $r$  por el conjunto:

$$S(x, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) = r\}$$

Comprobamos que se verifica el punto 3 de los postulados de Euclides porque  $\mathbb{H}$  es un espacio métrico.

### 4. Todos los ángulos rectos son congruentes, es decir, son iguales salvo isometrías

**Lema 3.14:** Sean  $r$  y  $s$  dos rectas de  $\mathbb{H}$  perpendiculares entre sí. Entonces, existe una transformación de Möbius  $\gamma \in Mob(\mathbb{H})$  que envía a  $r$  en  $\{z \in \mathbb{H} \mid Re(z) = 0\}$  y a  $s$  en  $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$ .

#### Demostración:

Sea  $z_0 = r \cap s$  y  $z_1 \in r \setminus \{z_0\}$ . Por la proposición 1.17, existe una transformación de Möbius  $\gamma \in Mob(\mathbb{H})$  tal que  $\gamma(z_0) = i$  y  $\gamma(z_1) = \mu i$ , para un  $\mu \in \mathbb{R}, \mu > 0$ . Está claro por construcción que  $\gamma(r) = \{z \in \mathbb{H} \mid Re(z) = 0\}$  y, Aplicando el teorema 1.13, la única posibilidad para  $\gamma(s)$  es  $\gamma(s) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$ , puesto que  $\gamma(z_0) = i$ . Con esto se termina la demostración de este lema.

Mediante el lema 3.14 podemos relacionar mediante transformaciones de Möbius todos los pares de rectas hiperbólicas perpendiculares entre sí por composición. Con esto y el teorema 1.13 obtenemos el cuarto postulado.

Sin embargo, no se verifica la unicidad en el quinto postulado. Este hecho queda expuesto en el teorema 3.8. De esta manera podemos ver la geometría de  $\mathbb{H}$  como un ejemplo de geometría no euclídea.

## Bibliografía

[An] James W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, Ed. Springer, Londres, 1999

[Wi] [[http://es.wikipedia.org/wiki/Geometría\\_euclidiana](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometría_euclidiana)], editado el 24/08/2014; última consulta 23/10/2014.

[Zi] Zirahuén Eliel Montaña Alvarez, [<http://fundamentosgeometricos.blogspot.com.es/2009/04/2-los-cinco-postulados-de-euclides.html>], editado el 14/4/2009; última consulta 1/7/2014

[Wa] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, Ed. Springer, Londres, 1971.

[Bo] William M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry*, Ed. Academic Press, Londres, 19891.