

INTEGRACIÓN DE “LIBROS GEOGEBRA” EN EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS EN EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Matías Arce, Laura Conejo, Tomás Ortega y Cristina Pecharromán.

Universidad de Valladolid

Resumen

En esta comunicación se describe una metodología innovadora llevada a cabo con alumnos del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Valladolid, para desarrollar la docencia relacionada con los conocimientos sobre geometría plana, con especial hincapié en los conceptos y las relaciones entre elementos. La propuesta está basada en el reconocimiento y la construcción de conceptos geométricos y en la detección de relaciones entre conceptos a través de la manipulación de “Libros GeoGebra” (agrupaciones de applets GeoGebra sobre un mismo tópico) por parte de los estudiantes. Sus respuestas a estas tareas son seleccionadas y puestas en común en debates dirigidos por el profesor y conducentes hacia la institucionalización de los conceptos y las relaciones tratadas de forma precisa, poniendo especial atención en la adecuada utilización del lenguaje geométrico en todo este proceso.

Palabras clave: *metodología, matemáticas, GeoGebra, Grado de Educación Primaria, geometría plan.*

PLANTEAMIENTO GENERAL Y JUSTIFICACIÓN

Esta comunicación pretende describir una metodología innovadora para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría que estamos desarrollando con varios grupos de alumnos¹ del Grado de Educación Primaria, en la Universidad de Valladolid (en concreto, en los campus de Valladolid y Soria). Dicha metodología es el resultado de varios Proyectos de Innovación Docente desarrollados por los autores de la comunicación, y relacionados con el uso del programa GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría plana en dicho grado universitario. GeoGebra es un software multi-plataforma gratuito que nos permite construir y descubrir elementos y relaciones matemáticas y que, en sus sucesivas versiones, ha ampliado progresivamente sus opciones y posibilidades, lo que lo ha convertido en una herramienta accesible, de fácil manejo pero con una enorme potencialidad para las matemáticas escolares.

Con este programa pueden construirse *applets*, componentes de software creados con el programa que se ejecutan en un navegador web y con los que un usuario puede interactuar, decidiendo el creador del applet qué acciones puede o no realizar el usuario con él; por ejemplo, mover la figura dada de forma dinámica, reproducir los pasos de la construcción, construir otros elementos, realizar mediciones... La popularización del programa y su carácter gratuito ha cristalizado en la creación de una página web, “GeoGebraTube” (<http://www.geogebraTube.org/>), en la que los profesores pueden compartir sus applets, así como ver applets creados por la “red” de usuarios de la página, la cual acoge una gran cantidad de materiales libres que pueden usarse en el aula de matemáticas. Los applets relacionados con un mismo tópico pueden agruparse, creando lo que la página denomina “Libro GeoGebra”.

El nivel de formación en matemáticas de los estudiantes que inician el Grado de Educación Primaria es muy variado y dispar, dependiendo de si han cursado o no asignaturas de Matemáticas en Bachillerato y de su interés por esta disciplina. Es usual que existan diferencias importantes en los conocimientos previos de los estudiantes, incluso en aquellos conocimientos propios de la educación primaria y secundaria obligatoria, como pueden ser los asociados a los conceptos geométricos básicos. Así, se hace necesaria una metodología que tenga en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y que respete los distintos ritmos de aprendizaje.

Siguiendo a Rico (2012), llamaremos representaciones a las expresiones, símbolos, signos o gráficos a través de los cuales se hace presente un concepto matemático, y que nos permiten relacionarlo con otros. Goldin (2007) afirma que la interacción entre las representaciones internas (imágenes mentales formadas de los objetos matemáticos) y las externas (aquellas con un soporte físico tangible) favorecen el aprendizaje de la geometría, infiriéndose y siendo subyacentes las representaciones internas a la creación y manejo de representaciones externas (Presmeg, 2006). De acuerdo con Duval (1999), la comprensión de un concepto está fundamentada en el dominio de al menos dos sistemas de representación del mismo y en la capacidad para realizar coordinaciones espontáneas (cambios) de uno a otro. En el caso de los objetos geométricos, las representaciones fundamentales son la gráfica (figuras geométricas) y la verbal (nombre, definición...), jugando un papel fundamental en la comprensión de estos objetos la *visualización* o el *procesamiento visual*, que Fernández Blanco (2013) concibe como el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, así como el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. Presmeg (2006) incluye en la visualización los procesos de construcción y transformación de imágenes mentales y representaciones planas o espaciales y la interpretación de información figurativa.

En nuestro caso, consideramos que la representación gráfica es una representación más intuitiva y que los alumnos suelen recordar mejor. De hecho, Duval (1999) plantea que el discurso verbal vaya unido a una gráfica que sirva como soporte de los razonamientos realizados. Esto nos lleva a plantear una metodología que parta mayoritariamente de las representaciones gráficas de los conceptos geométricos básicos. A partir de ellas, y mediante la aplicación de procesos de visualización del alumnado (reconocimiento e interpretación de representaciones gráficas), buscamos que los alumnos generen representaciones verbales (definiciones) y las relacionen con las representaciones gráficas. Estos procesos son apoyados y ayudados a través del dinamismo que nos proporciona el uso del programa GeoGebra en la manipulación de las figuras geométricas creadas (Sinclair, 2003). Además, la geometría dinámica también es de gran ayuda para detectar y poder conjeturar relaciones existentes entre diferentes conceptos u objetos (por ejemplo, relaciones angulares en la circunferencia), puesto que la animación de las figuras proporciona un rasgo de generalización de la relación (de Villiers, 1996), que aumenta el convencimiento de los estudiantes sobre la veracidad de las conjeturas realizadas y motiva su demostración matemática.

En esta metodología también juega un papel muy importante la verbalización de los procesos mentales, pensamientos, nomenclatura de objetos... Por ello, en varias de las fases se establecen momentos que fomenten esa verbalización: trabajo por parejas con el programa GeoGebra, debate en el aula (guiado por el profesor) de las respuestas proporcionadas, en cuyo desarrollo se llegue a concretar definiciones precisas o relaciones entre objetos. A través de este proceso, los alumnos se concientian de la especial importancia del uso de un lenguaje preciso y adecuado en geometría, que les lleve a mejorar su competencia profesional como futuros docentes de Educación Primaria.

PLANIFICACIÓN DE LA DOCENCIA: PROPUESTA METODOLÓGICA

Nuestra metodología está inspirada en la metodología propuesta por Mariotti y colaboradores (Falcade, Laborde y Mariotti, 2007; Mariotti, 2009; Mariotti, 2013) en la que se utilizan tanto entornos de Geometría Dinámica (en el caso de estas autoras, el programa Cabri) como discusiones matemáticas colectivas como mediadores para el desarrollo y la evolución de lo que las autoras llaman *signos matemáticos*, a partir de los signos asociados al entorno virtual. En concreto, para realizar esa mediación las autoras proponen la realización de *ciclos didácticos*, compuestos por tres tipos de actividades diferentes, pero complementarias entre sí: actividades de laboratorio con el programa de Geometría Dinámica que versan sobre un cierto tópico o concepto, producciones individuales de los alumnos tras esas actividades y discusiones colectivas introducidas y dirigidas por el profesor, pudiéndose utilizar aquí las producciones individuales anteriores para promover su evolución.

En nuestro caso, hemos realizado una adaptación de la metodología anteriormente descrita, añadiendo algunos elementos en nuestra propuesta de ciclo didáctico, como un control de los conocimientos previos con los que los estudiantes acceden a la asignatura, y modificando ligeramente otros. Se detallan a continuación las diferentes fases del mismo:

1ª fase: Determinación de los conocimientos previos de los alumnos y diseño y elaboración de los applets GeoGebra que compondrán los “Libros GeoGebra”. Una vez seleccionado un tópico, se diseña un cuestionario de respuesta múltiple que es cumplimentado individualmente por los alumnos. Los resultados sirven de base para diseñar y elaborar los diferentes applets GeoGebra que conforman la siguiente fase.

2ª fase: Actividades prácticas con GeoGebra. Los alumnos, por parejas, interactuaban con los applets GeoGebra proporcionados, buscando la emergencia de los conceptos y relaciones geométricas a partir, generalmente, de las representaciones gráficas proporcionadas en dichos applets y su manipulación dinámica, y de las indicaciones proporcionadas en cada tarea. Las tareas se pueden clasificar en tres grupos: actividades de producción de una representación verbal (buscando que los alumnos leyeran las representaciones gráficas proporcionadas, 2º nivel de Van Hiele), actividades de construcción de elementos o actividades de detección de relaciones y establecimiento verbal de conjeturas.

Mientras interactuaban con los applets, cada pareja debía crear un documento de Word en el que quedara reflejada su respuesta a las diferentes tareas (por ejemplo, la escritura de la definición o la conjetura propuesta en cada caso). El análisis de las respuestas de los alumnos por parte del profesor proporciona información fundamental para el desarrollo de la siguiente fase.

3ª fase: Debate colectivo en el aula basado en las producciones de los alumnos. El profesor selecciona varias de las respuestas proporcionadas por los alumnos a una cierta tarea (por ejemplo, la escritura de una definición verbal de un concepto), que bien por su incompletitud, poca precisión o la presencia de elementos irrelevantes o erróneos merecen ser objeto de discusión en el aula. Dicha discusión es guiada por el profesor. Los alumnos intervienen libremente para comentar dichas respuestas, reconociendo elementos erróneos, imprecisos o incompletos y promoviendo textos alternativos que mejoren progresivamente las respuestas. El uso de contraejemplos juega un papel importante para discriminar la corrección de una respuesta de otra que no lo es.

4ª fase: Institucionalización de conceptos y relaciones. La fase anterior culmina con el establecimiento riguroso de los conceptos tratados, así como con la demostración matemática (en su caso) de aquellas relaciones que han sido conjeturadas y verbalizadas por los alumnos a partir del programa GeoGebra y el debate.

5ª fase: Control de los aprendizajes. En la última fase se plantea una pequeña prueba escrita individual basada en los conceptos y relaciones tratados, que nos sirva para controlar cuáles han sido los aprendizajes que se han producido como resultado de la aplicación de la metodología.

Puesta en práctica

La planificación anterior se ha puesto en práctica en la asignatura de 2º curso, Grado de Educación Primaria, “Fundamentos de la forma y del volumen y estrategias didácticas para su enseñanza” de la Universidad de Valladolid. Concretamente se ha desarrollado en dos grupos del campus de Valladolid y en otro más en el campus de Soria. En total, han participado más de 200 alumnos.

Los grupos eran muy numerosos (alrededor de 80 alumnos). Esto ha ocasionado que, para realizar el trabajo práctico con las actividades GeoGebra, cada grupo se haya dividido en dos, trabajando por parejas en el Aula de Informática de cada Facultad de Educación, en sesiones de una hora de duración. Los alumnos disponían, en el campus virtual Moodle, de los applets y de un guión de trabajo con las actividades a realizar con cada uno, en el que se indicaba qué elementos debían ir recogiendo en el documento de Word (descripción de pasos de una construcción, definición de un concepto, conjeturas sobre relaciones entre elementos). Los

debates se realizaron en la sesión siguiente de clase, a partir de las producciones obtenidas, en gran grupo y en el aula de clase, siendo guiados por el profesor, que culminaba los mismos con el establecimiento de las definiciones rigurosas de los conceptos o las demostraciones matemáticas de las relaciones que se probaban. En general, el tiempo invertido en los debates e institucionalización posterior relativos a los applets trabajados con GeoGebra ha sido de dos a tres horas, por lo que la implementación de cada ciclo didáctico (excluida la primera fase) ha supuesto alrededor de una semana de clase de la asignatura.

PRIMERA FASE: DETECCIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS. DISEÑO Y ELABORACIÓN DE APPLETS GEOGEBRA

El punto de partida de nuestra metodología está basado en conocer y detectar cuáles son los conocimientos previos sobre los tópicos que van a ser objeto de la propuesta que tienen los alumnos que comienzan a cursar esta asignatura. Para ello, hemos diseñado un test inicial que los alumnos cumplimentaron de forma individual en la primera semana del curso, con anterioridad al comienzo de la docencia propia de la asignatura. El test consta de 30 preguntas relacionadas con diversos conceptos de los que se estudian en la asignatura, como pueden ser elementos básicos de la geometría plana, relaciones angulares, semejanza y Teorema de Tales o triángulos. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas, de las cuales, únicamente una de ellas es verdadera. Un ejemplo de pregunta del test es la siguiente:

Ejemplo de pregunta: Un ángulo es:

- La amplitud entre dos rectas o semirrectas.
- La parte común a dos rectas que se cortan en un vértice.
- La parte que determinan dos segmentos que tienen un origen común llamado vértice.
- La porción de plano limitado por dos semirrectas con un origen común.

Cada pregunta y sus posibles respuestas fueron planificadas teniendo en cuenta la experiencia de los profesores en esta asignatura, haciendo hincapié en los errores y deficiencias más frecuentes que, como profesionales, hemos ido detectando en la docencia impartida durante varios años.

Dado que la mayoría de los alumnos (salvo alumnos repetidores) no han cursado la asignatura con anterioridad y, además, algunos conceptos es posible que no los recordaran o sólo lo hicieran vagamente (pues los estudiaron bastantes años atrás, en Primaria y en los primeros cursos de la ESO), se esperaba que en muchos casos no supieran qué respuesta dar o no estuvieran seguros de la veracidad de la respuesta. Para detectar este comportamiento, se les pidió que contestaran a todas las preguntas (incluso en aquellos casos en que estuvieran totalmente inseguros de su respuesta o respondieran al azar), añadiendo en cada ítem una pregunta (que también debían contestar) sobre el grado de seguridad que tenían en la respuesta que habían seleccionado. La medición de este grado de seguridad se hizo a través de una escala Likert, de 1 a 5, donde "1" significa estar totalmente inseguro de la respuesta marcada, "2" significa tener poca seguridad en la respuesta; "3", tener cierta seguridad en la respuesta, pero no demasiada; "4", estar bastante seguro de la respuesta y "5" significa estar completamente seguro de la respuesta marcada. Así, el cuestionario nos permite no sólo obtener datos sobre cuáles son las preguntas con menor índice de acierto, así como las respuestas incorrectas más frecuentes, sino también establecer correlaciones entre las respuestas dadas y el grado de seguridad en éstas.

El análisis de las respuestas de los tests confirmó nuestra hipótesis de partida: los conocimientos geométricos de los alumnos del Grado de Educación Primaria son muy deficientes, existiendo una gran variedad de conceptos básicos que no recuerdan. Por ejemplo, ningún alumno contestó correctamente más de 24 preguntas de las 30 planteadas, mientras que el 50% de ellos tienen 11 o menos preguntas contestadas correctamente. En relación a las preguntas, tan sólo una de ellas, la relacionada con el concepto de escala, tuvo un porcentaje de aciertos superior al 70%, mientras que casi la mitad tienen un porcentaje de aciertos inferior al 30%,

siendo especialmente llamativo el caso de tres preguntas por debajo del 20%, una de ellas relativa al concepto de ángulo exterior con respecto a una circunferencia. Fijándonos en la pregunta destacada a modo de ejemplo (sobre el concepto de ángulo), el porcentaje de respuestas correctas se situó en un 40,8%, siendo la respuesta 3 la más elegida entre las incorrectas (31,1%), seguida de la respuesta 1 (18%) y en último lugar de la respuesta 2 (9,2%). En esta ocasión la respuesta más elegida es la respuesta correcta, cosa que no ocurre en varias de las preguntas que se plantearon, existiendo algunos atractores de error bastante marcados.

A partir de una planificación inicial de los conceptos y relaciones que se van a tratar utilizando este ciclo didáctico y de las posibles tareas prácticas con GeoGebra que se podrían proponer, el análisis de las respuestas proporcionadas y los resultados obtenidos en el test nos sirvieron para concretar dichas actividades, que plantearíamos a los estudiantes en la siguiente fase para trabajar los conceptos y relaciones geométricas seleccionadas.

SEGUNDA FASE: ACTIVIDADES PRÁCTICAS CON GEOGEBRA

Una vez diseñadas y creadas las tareas con applets GeoGebra que iban a ser propuestas a los alumnos, éstas han sido organizadas generalmente en bloques de cuatro tareas, constituyendo cada bloque una práctica de laboratorio en el Aula de Informática con el ordenador y el software GeoGebra. En ellas, se buscaba que el alumno reconociera el concepto a partir, generalmente, de su representación gráfica (en ocasiones, también a partir de la representación verbal, como una definición), buscando que el alumno manipulara gráficamente la representación del concepto (construcción, reproducción de su construcción, modificación) para llegar a describirlo verbalmente y plantear su definición desde este reconocimiento gráfico. Es decir, se pretende el reconocimiento del concepto y sus características en sus diversas representaciones, propiciar el cambio entre diferentes representaciones y promover una expresión verbal del concepto y sus características. En otras tareas lo que se pretendía era el establecimiento de relaciones, que son conjeturadas a partir del dinamismo que proporciona el programa GeoGebra. La filosofía subyacente con estas tareas es la realización de un aprendizaje por descubrimiento de los diferentes conceptos (en este caso, conceptos básicos geométricos) tomando como base la representación proporcionada en el applet GeoGebra, seguida en la fase siguiente de una puesta en común de las producciones realizadas por los alumnos junto con una institucionalización del concepto. No obstante, es esperable que ese aprendizaje por descubrimiento esté influenciado por los conocimientos y concepciones previas que poseen estos alumnos sobre los conceptos geométricos básicos.

En general, las tareas a realizar con los applets son de tres tipos distintos. Por una parte, hay tareas que buscan la producción de una representación verbal; por ejemplo, para describir los pasos seguidos en la construcción de un determinado concepto o elemento (como la mediatriz de un segmento) o para escribir la definición de un concepto una vez manipulada su representación gráfica (como en el applet presentado en la Figura 1, sobre el concepto de ángulo). Por otra parte, hay algunos applets (pocos) basados en la construcción de elementos que son definidos verbalmente en la tarea (por ejemplo, la construcción de la configuración con dos rectas paralelas cortadas por una secante y los diferentes tipos de ángulos que en ella aparecen). También hay applets con tareas enfocadas a la detección de relaciones entre elementos y al establecimiento verbal de conjeturas por parte de los alumnos (como el applet presentado en la Figura 2, sobre la relación entre un ángulo interior en una circunferencia y los ángulos centrales correspondientes).

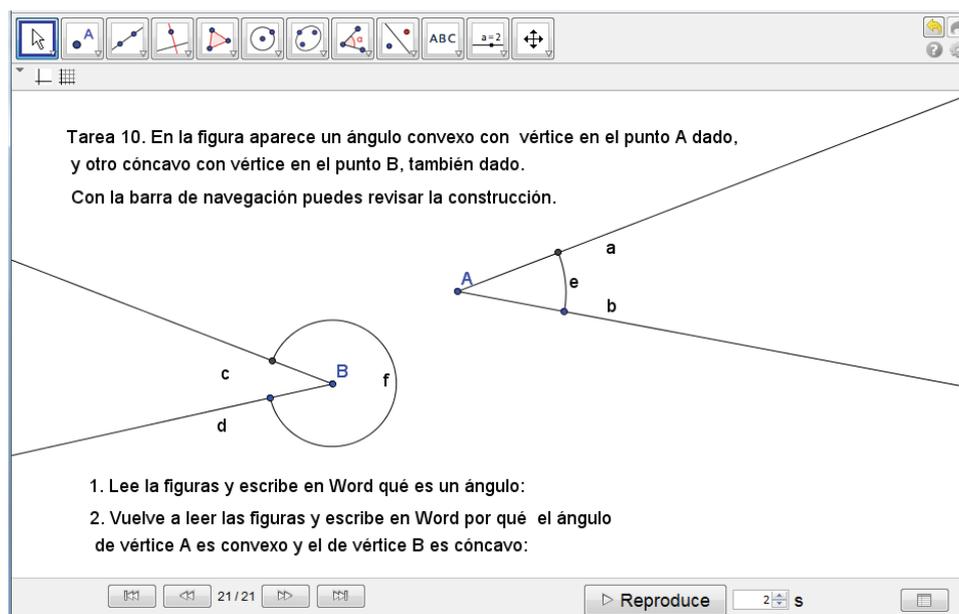


Figura 1. Applet GeoGebra en el que se plantea una actividad con el concepto de ángulo para su reconocimiento gráfico y verbal, y clasificación en cóncavo y convexo.

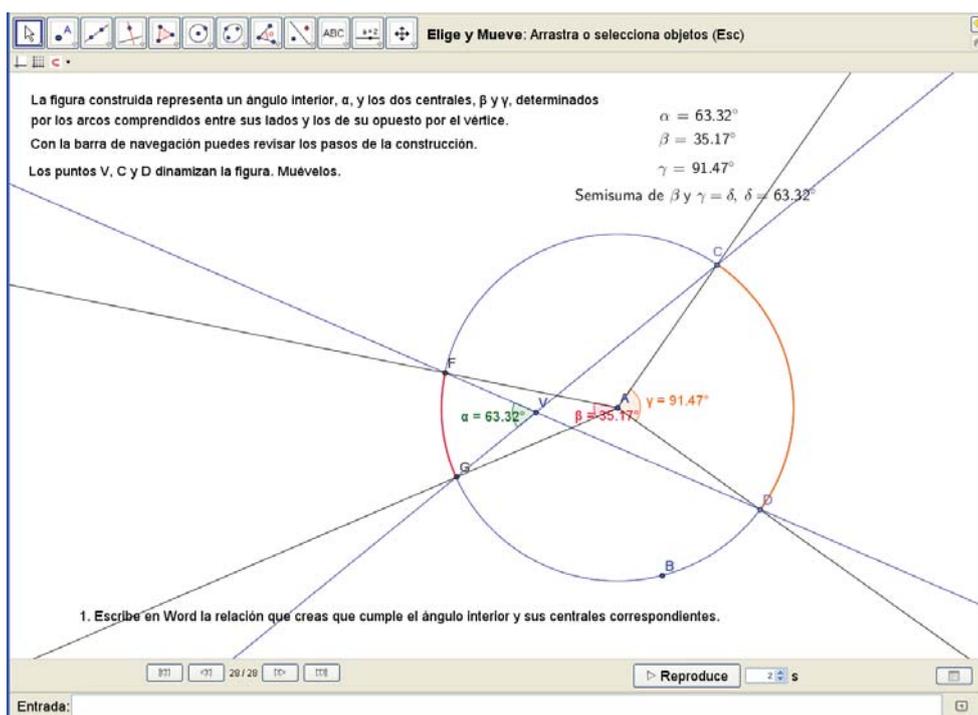


Figura 2. Applet GeoGebra en el que se plantea la detección de la relación angular entre un ángulo interior y sus centrales correspondientes, para establecer una conjetura.

Tras una primera práctica introductoria para que los alumnos aprendieran el entorno GeoGebra y el manejo del programa, se planificaron semanalmente prácticas de laboratorio en las que se trabajaba con un bloque de cuatro applets relacionadas con los conceptos geométricos básicos (en el caso que aquí presentamos). Los alumnos realizaban las prácticas por parejas (un ordenador por pareja), intentando así que los

estudiantes tengan que verbalizar sus diferentes propuestas, promoviendo su intercambio, análisis y el consenso de una respuesta para cada tarea. En cada sesión se proporcionaba a cada pareja de alumnos los applets GeoGebra, generalmente cuatro, junto con las tareas asociadas a cada uno, en los que se presentaban y trabajaban diversos conceptos geométricos básicos. En esta comunicación ejemplificamos algunas de las relativas al tema de ángulos. En cada tarea, los alumnos debían consensuar una única respuesta que tenían que escribir en un documento de Word que se habilitaba para ello en el campus virtual de la asignatura.

Se observaron algunas dificultades mínimas de manejo del programa y de tiempo para terminar la práctica propuesta en la sesión de clase. También hubo que tener cuidado con que los alumnos no usasen Internet para buscar la definición de los conceptos o aclaraciones sobre ellos, puesto que ese comportamiento alteraría los resultados naturales de la tarea, así como las etapas posteriores de esta metodología, dando lugar a un desarrollo inadecuado de la misma. Nosotros, como docentes, dábamos orientaciones para el uso del programa y la forma de recoger las producciones de los alumnos, pero evitábamos intervenir en el reconocimiento personal del concepto, aunque hubiese que dar alguna aclaración u orientación.

Al finalizar la sesión, los alumnos subían al campus virtual de la asignatura el documento de Word con sus respuestas a las tareas. Estas respuestas son la información a partir de la cual se estructura el debate de la siguiente fase. El profesor hace una lectura de las respuestas a cada tarea y selecciona varias respuestas o varias ideas contenidas en las respuestas que, por su incompletitud, imprecisión o por haber extraído características o relaciones erróneas sirvan para el desarrollo de dicho debate, teniendo en cuenta también aquellas que se presentan con mayor frecuencia. Estas respuestas son ordenadas según lo alejadas o cercanas que se encuentren de la respuesta pedida (una definición o una relación precisa, por ejemplo), buscando que el transcurso del debate y la discusión de las respuestas acerque progresivamente a los estudiantes a la respuesta precisa.

TERCERA FASE: DEBATE O DISCUSIÓN COLECTIVA EN EL AULA

Una vez realizada la selección de aquellas producciones que van a servir como apoyo para el desarrollo del debate o discusión colectiva en el aula, dicho debate es realizado (en nuestro caso, con todo el grupo de alumnos) en el aula, guiado por el profesor. En estos debates, los alumnos intervenían libremente para comentar las respuestas seleccionadas, buscando el reconocimiento de elementos que sean erróneos, poco precisos o incompletos para establecer una definición o relación precisa, así como la promoción de textos alternativos que mejoren progresivamente las respuestas dadas, y que se vayan acercando paulatinamente a la definición o relación buscada, para su posterior institucionalización en la siguiente fase. El papel del profesor en el debate, como señala Mariotti (2009), es esencial dentro de la discusión matemática que se produce, como guía en la discusión incitando la evolución desde las definiciones o relaciones personales (emergidas en la fase anterior) hacia las matemáticas, que son el objeto buscado. Mariotti (2009) señala cuatro intervenciones usuales de los docentes que se producen en el desarrollo de un debate de estas características, y que son esenciales para su propósito: volver atrás en la tarea, focalizar la atención en aspectos específicos, solicitar una síntesis de la discusión y proveer una síntesis, explicitando la aceptación de elementos clave que nos acerquen a la definición o relación matemática precisa. A continuación mostraremos algunos extractos de los debates, que muestran sus características principales y el papel del profesor en este caso concreto.

En el primer debate, sobre el concepto de ángulo (asociado al applet de la Figura 1), se escogieron algunas definiciones que se iban aproximando progresivamente a la definición matemática, indicando explícitamente qué pareja había producido cada una, buscando que ellos mismos reconocieran algunos errores y añadieran elementos ausentes que iban generándose a lo largo del debate, para producir definiciones alternativas que se fueran aproximando al concepto matemático.

Por ejemplo, los estudiantes E1 y E2 se dan cuenta de una característica necesaria que faltaba y que sí había sido incluida por otros compañeros:

Prof: [Lee la definición de E1 y E2] “Porción de espacio comprendida entre dos semirrectas”

E1: Yo creo que ahí falta decir lo de... que están en un... que tienen un origen común.

Los estudiantes E3 y E4 reconocen un error en su definición después de que el profesor recurriera al applet (vuelta a la tarea) e incitara a los estudiantes a que observaran y leyeran la figura:

Prof: [Lee la definición propuesta por E3 y E4] “Un ángulo es una parte originada cuando dos rectas se unen en un mismo punto”. [Tras abrir el applet de la Figura 1] Eso sí que es un ángulo, ¿verdad? Entonces, parece que con lo que habéis escrito vosotras...

E3: Que se cortan.

Prof: Pero vosotras habláis de rectas...

E3: Semirrectas que se cortan...

E4: ¡Claro, lo que hay ahí son semirrectas!

La referencia concreta a estudiantes en las definiciones causaba que muchos de ellos no se implicaran en el debate si no aparecían las suyas, por lo se optó por no señalar explícitamente los autores de cada producción, fomentando que el debate fuera más abierto. En el siguiente pasaje encontramos una muestra clara de la filosofía del debate, con intervenciones de los alumnos en los que se va mejorando progresivamente una definición propuesta por una pareja de estudiantes, para el concepto “rectas perpendiculares”. El profesor cierra las intervenciones con una síntesis en la que reafirma una intervención correcta y alerta sobre la imprecisión de la definición inicial propuesta:

Prof.: [Lee la definición propuesta] “Recta que corta a otra horizontal formando ángulos rectos”.

E5: Mal del todo no está. Está claro que si se cortan tendrá que ser así para que no tengan la misma dirección.

Prof.: Esa definición, ¿no la puedes mejorar?

E3: No tiene por qué cortar a una recta horizontal, puede cortar a una recta vertical también.

E6: Yo iba a decir lo que ha dicho ella, que también puede cortar a una recta vertical, no hace falta que sea siempre la perpendicular... con dirección... arriba-abajo.

E7: Lo que tiene que hacer es cortarlo perpendicular... O sea, con un ángulo de... que forme cuatro ángulos de 90° , da igual la dirección en el plano.

Prof.: ¿Lo de recta horizontal tú lo quitarías?

Coro: Sí.

E8: Pero si especificas que es recta vertical antes... Dices una recta vertical que cruce... [error común de los estudiantes], o sea, que se corte con otra recta horizontal. Pues ya se cortan, y ya forman...

E6: Pero es que eso está mal también...

E9: Es que no tienen por qué ser ni verticales ni horizontales.

E10: Claro, el caso es que al cortarle forme cuatro ángulos rectos, independientemente de que sean horizontales o verticales.

Prof.: Entonces, ¿está correcta la definición o quitarías o pondrías algo?

E11: Yo creo que no tienen por qué estar obligatoriamente en horizontal y en vertical.

Prof.: Eso es. Fijaos, eso es una particularización, ¿de acuerdo? Al poner que la recta tenga que ser horizontal, se entiende... diríamos, que su altura respecto del suelo es la misma en todos los puntos. Suponiendo que el suelo fuese plano, claro.

En el desarrollo de los debates, además de volver al applet para contrastar las producciones y recordar la tarea pedida, también es de gran importancia el uso y la propuesta de contraejemplos por parte del profesor, que ayuden a discriminar definiciones correctas de los conceptos frente a otras definiciones incompletas o parciales, y que ayuden a identificar características necesarias que están ausentes. Un ejemplo es el siguiente, al hablar sobre ángulos adyacentes:

Prof: Una pareja ha escrito que “dos ángulos son adyacentes porque los dos suman 180° . Por lo tanto, dos o más ángulos son adyacentes si la suma de ellos da 180° ”. Que suman 180° , ¿eso está bien? ¿Es preciso? [Tras esto, dibuja dos ángulos suplementarios en la pizarra, pero que no tienen ni el vértice ni ninguna semirrecta en común; además abre el applet en el que aparecen dibujados dos ángulos adyacentes]

E6: Yo creo que... yo creo que sí que miden 180° , porque si es a partir de una recta... La recta esa siempre va a tener 180° .

Prof: Pero ellos no dicen eso, ¿no?

E6: Ya, no lo dicen.

Prof: Fíjate, yo he dibujado aquí dos ángulos cuya suma son 180° , estas dos semirrectas he querido trazarlas paralelas. ¿Alguien diría que estos dos ángulos que he pintado son adyacentes?

Coro: No.

Prof.: ¿Por qué?

E12: Porque no comparten lado.

Prof.: Vale, pues ya hay algo que ha salido, y es que tienen que compartir lado [para ser adyacentes].

Una vez finalizado el debate relativo a un concepto o a una relación, comentando las diferentes definiciones o ideas seleccionadas por el profesor, se pasa a la recopilación por parte del profesor de aquellas ideas surgidas durante el debate que son necesarias para el establecimiento preciso de la definición de un concepto o la relación entre elementos, pasando a la fase de institucionalización.

CUARTA FASE: INSTITUCIONALIZACIÓN DE CONCEPTOS Y RELACIONES

En esta fase, inmediatamente posterior al debate, se produce la institucionalización de los conceptos y relaciones por parte del profesor, entendiendo institucionalización en el sentido de Brousseau (1998), como la puesta en común de aquellas ideas surgidas durante el debate que son necesarias para el establecimiento de una definición precisa de un concepto o una relación entre elementos, definición o relación que pertenece al saber cultural (en este caso matemático) de una sociedad.

Así, por una parte se produce la institucionalización de una definición tras el debate previo basado en algunas respuestas de los estudiantes a la tarea GeoGebra, estableciéndose ésta de modo preciso y pidiendo después a algunos estudiantes que la verbalicen. Algo similar sucede con las relaciones entre elementos (por ejemplo, relaciones angulares en una circunferencia, como la mostrada en la Figura 2), estableciendo de modo preciso la relación, motivando la necesidad de demostrar la misma de forma matemática y realizando dicha demostración, una vez que ha sido conjeturada por los estudiantes y debatida en el aula su veracidad a partir del dinamismo del programa GeoGebra.

En algunos casos esa institucionalización de los saberes matemáticos también se produce cuando aparecen conflictos o discusiones en los debates en los que aparecen posturas enfrentadas entre grupos de alumnos que argumentan sus posiciones sin que se produzca un avance en las mismas. Un ejemplo se produjo en el debate encaminado a obtener la definición de rectas paralelas, al discutir la definición propuesta por una pareja de estudiantes: “Son aquellas rectas que no se cortan por mucho que se prolonguen”. Una parte de los alumnos defendía que la definición era correcta, considerando que las rectas sí se podían prolongar en su trazado; mientras que otro grupo consideraba que no era correcta, puesto que las rectas son infinitas y no se pueden prolongar. El profesor intervino para aclarar que el conflicto en el primer grupo estaba derivado de la confusión entre el concepto y su representación gráfica, que una representación de una recta sí se puede prolongar (ya que es imposible que esta representación sea infinita), mientras que la recta como concepto, que está en la mente de la persona, sí que es infinita, por lo que no tiene sentido hablar de su prolongación.

QUINTA FASE: CONTROL DE LOS APRENDIZAJES

Una semana después del ciclo didáctico realizado, y a modo de cierre del mismo, se realizó una pequeña prueba individual por escrito, de corta duración (diez minutos), en la que se planteaban tres cuestiones relacionadas con los conceptos y relaciones que habían sido abordados en el ciclo didáctico, en el caso de esta comunicación elementos básicos de geometría plana. El control planteado fue el siguiente:

Nombre y apellidos

1. Justifica por qué el siguiente enunciado es correcto o no. Si no lo fuere escríbelo correctamente.

Dos rectas paralelas son aquellas que por mucho que se prolonguen no llegan a cortarse.

2. Escribe la definición de ángulos opuestos por el vértice.
3. El gráfico adjunto representa a dos rectas paralelas cortadas por una secante.
 - a) Indica qué ángulos son iguales a β y cómo se denominan en relación a éste.
 - b) Indica qué ángulos son iguales a α y cómo se denominan en relación a éste.

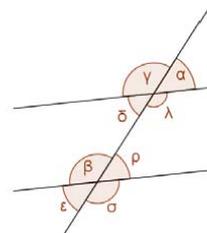


Figura 3. Escaneo con las preguntas de la prueba escrita sobre elementos básicos de geometría plana.

Cada cuestión fue evaluada por el profesor de 0 a 10 puntos, según su grado de proximidad a la respuesta correcta completa. En general, observamos que los resultados de los estudiantes no fueron demasiado buenos, con una media de puntuaciones entre 5 y 6 en las preguntas 2 y 3, pero una media inferior (3'5) en la primera pregunta. Varios alumnos obtienen puntuaciones muy altas, pero un número también importante, especialmente en la primera pregunta, obtienen puntuaciones muy bajas, que muestran una falta de asimilación de las definiciones y relaciones tratadas.

En la primera pregunta, con los resultados peores de las tres, observamos cómo se siguen planteando problemas derivados de la identificación del concepto y su representación gráfica, apareciendo bastantes respuestas contradictorias en las que los estudiantes reconocen que las rectas son infinitas, pero creen que éstas se pueden prolongar, mostrándose la posibilidad de prolongación como una concepción muy arraigada a pesar de haber sido tratada explícitamente en el debate (no sólo en el aspecto antes comentado, sino en más ocasiones), respondiendo que el enunciado es correcto.

Con respecto a la pregunta 2, aquellos estudiantes que optan por definir los ángulos opuestos por el vértice utilizando la idea de prolongación de las semirrectas que forman sus lados escriben la definición correcta,

pero eso no es así en muchos de los estudiantes que parten de una intersección de dos rectas para definir este concepto, no acertando a indicar correctamente qué ángulos de los que aparecen en esa intersección son los opuestos por el vértice. Algunos siguen recurriendo indebidamente a la amplitud para definir estos ángulos, incluso sin establecer la configuración inicial de dos rectas que se cortan (por ejemplo, ángulos opuestos por el vértice como aquellos ángulos iguales con un vértice común). Otros se limitan a describir de forma errónea la situación gráfica que genera ángulos opuestos por el vértice, sin llegar a definirlos.

En la pregunta 3 se plantean bastantes problemas asociados a la nomenclatura de los ángulos, apareciendo nombres genéricos o incompletos como “ángulos opuestos”, “internos” o “alternos”, o escribiendo el mismo nombre a todos los ángulos que son iguales al ángulo indicado (por ejemplo, los ángulos γ , λ y σ son iguales a β y son alternos externos”). La identificación que más problemas ha dado es la de ángulos correspondientes, sustituyendo este nombre por otros como “congruentes” o “correlacionales”. También existen alumnos que únicamente indican los ángulos como agudos u obtusos.

LIMITACIONES Y PROPUESTAS DE MEJORA

Los resultados finales de este ciclo didáctico que aquí se ha ejemplificado pueden considerarse como mejorables en ciertos aspectos, derivándose de la reflexión sobre el proceso algunos problemas y limitaciones que pueden servir para mejorar la metodología propuesta. Por un lado, el número de alumnos de los grupos (entre 80 y 90 alumnos) es muy numeroso, lo cual produce que en los debates, aunque el profesor intente que participen el mayor número posible, haya alumnos que no intervengan y no se impliquen en la actividad, o sólo lo hagan en algún momento concreto. Una solución posible sería realizar estos debates partiendo el grupo completo en dos (al igual que en la fase 2), aunque eso conllevaría el doble de tiempo para su realización en la planificación de la asignatura. Además, el control de aprendizajes ha puesto de manifiesto que varios alumnos mantienen concepciones erróneas que pusieron de manifiesto en la fase 2 o durante el debate, por lo que proponemos como mejora que, después del debate y la institucionalización, se instara a los estudiantes a que, individualmente, escribieran verbalmente un resumen de los elementos y problemas tratados en el debate, así como progresos en su concepción sobre el concepto tratado, errores detectados, dudas u otros sentimientos que quiera compartir. Ese trabajo fomentaría que el alumno reflexionara sobre el debate producido, teniendo que verbalizar las ideas que en él han salido y poner éstas en relación con su respuesta en la tarea GeoGebra o con sus concepciones previas, lo cual podría servir para que el debate “calara” más en todos los alumnos, no sólo en aquellos que más se implican en el mismo. Esto puede ser especialmente importante en el caso de los alumnos con los que aquí trabajamos, alumnos adultos, en los cuales las concepciones o ideas imprecisas o erróneas que tienen sobre algunos conceptos básicos (con los que han trabajado varios años durante su historial educativo) parecen mostrarse como un obstáculo importante hacia el establecimiento de una definición o relación matemática precisa, elementos que forman parte de los conocimientos que necesitan para desarrollar su futura labor profesional como docentes.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte de un Proyecto de Innovación Docente aprobado por la Universidad de Valladolid, titulado “Diseño y elaboración de unidades didácticas de matemáticas basadas en Libros GeoGebra para el Grado de Educación Primaria”, cuyos miembros son los autores de la comunicación. El primer firmante de la comunicación cuenta con la ayuda y financiación de una beca predoctoral FPU (Ref.:AP2012-2241)

Referencias

- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia : La Pensée Sauvage Éditions.
- de Villiers, M. (1996). Why proof in dynamic geometry. En M. de Villiers (Ed.), *Proofs and Proving: why, when and how?* (pp. 23-42). Sudáfrica: AMESA.

- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Fernández Blanco, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, N. Climent y A. Estepa (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.
- Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66 (3), 317-333.
- Goldin, G. A. (2007). Representation in School Mathematics: A unifying research perspective. En J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston: NCTM.
- Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM. The international journal on Mathematics Education*, 41 (4), 427-440.
- Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM. The international journal on Mathematics Education*, 45 (3), 441-452.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, present and future* (pp. 205-235). Holanda: Sense Publishers.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(1), 39-63.
- Sinclair, M.P. (2003). The provision of accurate images with dynamic geometry. En N. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 4, 191-198.

Para hacer referencia al artículo:

Arce, M, Conejo, L, Ortega T y Pecharromán, C. (2015). Integración de “libros geogebra” en el aprendizaje de conceptos geométricos en el grado de Educación Primaria. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*. (pp. 297-308). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

ⁱ Durante toda la comunicación se hará un uso genérico del masculino (por ejemplo, “los alumnos”, “los estudiantes”, “el profesor”), sin hacer referencia al sexo concreto de los participantes.