



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Estadística

Optimización de carteras de inversión en activos de renta mixta

Autora: Rebeca González Andrés

Tutor: Ricardo Josa Fombellida

A mis padres, mi hermano y mi pareja

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi gratitud a Ricardo Josa Fombellida (mi tutor del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Valladolid). Y agradecer a todos mis compañeros del Grado en Estadística por su apoyo y confianza en mí, además de los momentos inolvidables que me han hecho vivir durante mis años de carrera.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	6
CAPÍTULO 2. LA BOLSA.....	8
2.1. La Bolsa de Valores.....	8
2.2. Conceptos Básicos en Bolsa.....	10
CAPÍTULO 3. OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS.....	15
3.1. El Problema de Selección de Carteras.....	15
3.2. El Modelo de Markowitz y la Frontera Eficiente.....	17
3.3. Índice o Ratio de Sharpe.....	18
3.4. Carteras Eficientes Notables.....	19
CAPÍTULO 4. DESARROLLO.....	20
4.1. Metodología.....	20
4.2. Métodos, Técnicas e Instrumentos de Recogida.....	20
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS.....	23
5.1. Rendimiento y Riesgo de la Inversión en Cada Empresa.....	23
5.2. Implementación de Problemas de Selección de Carteras.....	25
5.3. Optimización de Carteras Sin Frontera Eficiente.....	25
5.3.1. Modelo Básico Sin Letra.....	26
5.3.2. Modelo Básico Con Letra.....	26
5.3.3. Modelo Maximizando el Ratio de Sharpe.....	30
5.3.4. Modelo Básico con Costes de Compra/Venta y Cartera de Referencia.....	31
5.4. Optimización de Carteras Con Frontera Eficiente.....	32
5.4.1. Modelo Básico Sin Letra.....	33
5.4.2. Modelo Básico con Letra.....	38
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y BIBLIOGRAFÍA.....	44
6.1. Conclusiones.....	44
6.2. Referencias Bibliográficas.....	45
CAPÍTULO 7. ANEXOS.....	46
7.1. Anexo I. Datos.....	46
7.2. Anexo II. Tablas.....	47
7.3. Anexo III. Gráficos.....	53
7.4. Anexo IV. AMPL.....	56
7.4.1. Modelo de Markowitz Sin Frontera Eficiente. 35 Empresas.....	56
7.4.2. Modelo de Markowitz Sin Frontera Eficiente. 35 Empresas y Letras.....	58
7.4.3. Modelo Maximizando el SR.....	60
7.4.4. Modelo de Costes de Compra/Venta.....	62
7.4.5. Modelo de Markowitz Con Frontera Eficiente. 35 Empresas.....	65
7.4.6. Modelo de Markowitz Con Frontera Eficiente. 35 Empresas y Letras.....	67

Resumen

En este trabajo se analiza el problema de selección de carteras. La selección de carteras consiste en decidir cómo debe un inversor repartir un capital en distintas empresas que cotizan en Bolsa, exactamente en las 35 empresas del IBEX 35. Se describen modelos básicos de optimización de carteras con único objetivo, como el riesgo, el Ratio de Sharpe, con o sin gastos de compraventa. También se estudia el modelo de Markowitz. Un propósito importante del trabajo es estudiar el efecto sobre las carteras óptimas de la inclusión entre los productos donde invertir de un activo sin riesgo, típicamente una letra del Tesoro.

Palabras Claves: IBEX 35, Selección de Carteras, Frontera Eficiente, Modelo de Markowitz, Ratio de Sharpe, Letra del Tesoro, Rentabilidad y Riesgo.

Abstract

In this work the problem of portfolio selection is analyzed. The selection of portfolios consists of deciding how an investor should be handing out a capital in different companies listed, exactly in the 35 companies of the IBEX 35. There describe basic models of optimization of portfolios with only aim, as the risk, Sharpe's Ratio, with or without expenses of dealing. It also studies Markowitz model. An important purpose of the work is to study the effect on the optimal portfolio of inclusion among the products where to invest an asset without risk, typically a treasury bill.

Key words: IBEX 35, Portfolio Theory, Efficient Frontier, Model Markowitz, Sharpe's Ratio, Treasury Bill, Risk and Return.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

La Programación No Lineal es el proceso de resolución de un sistema de igualdades y desigualdades sujetas a un conjunto de restricciones sobre un conjunto de variables reales desconocidas, con una función objetivo a maximizar (o minimizar), cuando alguna de las restricciones o la función objetivo no son lineales. Los problemas de programación no lineal son muy comunes y cubren un amplio rango de aplicaciones en la vida real. Mayormente se usan en la toma de decisiones y, sobre todo, en el área de las finanzas. Aquí es donde entra a formar parte la selección de carteras, técnica utilizada por los inversores a la hora de repartir un capital.

Una cartera de inversión es una determinada combinación de activos financieros en los cuales se invierte un capital. A la hora de construir una cartera de inversión el principal objetivo es distribuir óptimamente la inversión entre distintos activos, minimizando su riesgo y maximizando su rentabilidad. En este trabajo se presentan varios modelos de selección de carteras, entre ellos veremos cómo cambian las carteras añadiendo a los modelos letras del Tesoro.

Para llevar a cabo este trabajo usaremos la Teoría de la Selección de Carteras, originada por Harry M. Markowitz en 1952. Este autor junto con Miller y Sharpe fueron premiados con el Premio Nobel de Economía en 1990. Aunque los tres galardonados eran ampliamente respetados en los ambientes académicos, no se esperaba que su trabajo fuese premiado. Markowitz propone que el inversor debe abordar la cartera como un todo, estudiando las características de riesgo y retorno global, en lugar de escoger valores individuales en virtud del retorno esperado de cada valor en particular.

De acuerdo con Markowitz, los inversores tienen una conducta racional a la hora de seleccionar su cartera de inversión y, por lo tanto, siempre buscan obtener la máxima rentabilidad sin tener que asumir un alto nivel de riesgo. Nos muestra también, como hacer una cartera óptima disminuyendo el riesgo de manera que el rendimiento no se vea afectado. Aquí es donde entra a formar parte la programación cuadrática. Un problema de programación cuadrática es aquél que contiene una función objetivo cuadrática y restricciones lineales. El riesgo medido como la varianza es cuadrático y el rendimiento es lineal.

El objetivo principal de este proyecto es decidir cómo un inversor tiene que repartir su capital en empresas que cotizan en Bolsa y que se encuentran en el IBEX 35 o en letras del tesoro. Para ello, vamos a crear carteras eficientes. La principal aportación de este trabajo respecto a otros de similares características es el análisis del efecto sobre las carteras óptimas de incorporar la posibilidad de invertir en un activo sin riesgo (típicamente una letra del Tesoro) en algunos modelos de selección de carteras. Así, en alguna sección del trabajo, nos centraremos en introducir diversas letras del tesoro a los modelos para ver así cómo cambian las carteras.

El trabajo se va a desarrollar de la siguiente forma. En primer lugar, en el Capítulo 1 se dedica a la introducción. Después, en el Capítulo 2, se verán conceptos de la Bolsa y económicos necesarios para la buena comprensión del trabajo. En el Capítulo 3 se explicará el problema de selección de carteras, el modelo de Markowitz, la frontera eficiente, el Ratio de Sharpe y las carteras eficientes. En el Capítulo 4 se darán a conocer los datos con los que se va trabajar junto con la metodología y los instrumentos de recogida de esos datos. A continuación, el Capítulo 5 servirá para ver ejemplos prácticos de carteras de inversión, se darán a conocer modelos con y sin frontera eficiente. Y, en este capítulo, también se verán ejemplos de modelos con letras del tesoro. Finalmente se presentarán las conclusiones, la bibliografía y los anexos con todo lo necesario para comprender mejor el trabajo.

CAPÍTULO 2. LA BOLSA

2.1. La Bolsa de Valores

La Bolsa o el mercado de valores español ha vivido en las dos últimas décadas un intenso y profundo proceso de cambio y crecimiento. Los sistemas técnicos, operativos y de organización en los que se apoya hoy el mercado han permitido canalizar importantes volúmenes de inversión y dotar a los mercados de una mayor transparencia, liquidez y eficacia.

La Bolsa es un mercado. Como en todo mercado, se negocian una serie de productos y se ponen en contacto compradores y vendedores. Efectivamente, en primer término, es punto de encuentro entre dos figuras muy importantes en una economía: empresas y ahorradores.

Las empresas que necesitan más fondos para alcanzar sus objetivos tienen diferentes formas de conseguirlos. Una de las más interesantes es acudir a la Bolsa y vender activos financieros, como acciones, bonos, obligaciones, etc. Esta primera venta se conoce como “mercado primario”. A partir de aquí, los productos se pueden comprar y vender, dando lugar al mercado secundario.

Por otro lado, los ahorradores (tanto instituciones como particulares) desean obtener rentabilidad de sus excedentes y entre las muchas alternativas de inversión que existen, pueden decidir la compra en Bolsa de los productos emitidos por las empresas.

La negociación de valores se efectúa a través de los miembros que la componen, conocidos usualmente con el nombre de corredores, operadores autorizados de valores, sociedades de corretaje de valores, casas de bolsa, agentes o comisionistas, según la denominación que reciben en cada país, quienes hacen su labor a cambio de una comisión.

Por tanto, la Bolsa cumple una función esencial en el crecimiento de toda Economía, puesto que canaliza el ahorro hacia la inversión productiva. Es un instrumento de financiación para las empresas y de inversión para los ahorradores. Facilita la movilidad de la riqueza.

Para poder cotizar sus valores en la Bolsa, las empresas primero deben hacer públicos sus estados financieros, puesto que a través de ellos se pueden determinar los indicadores que permiten saber la situación financiera de las compañías. Las Bolsas de valores son reguladas, supervisadas y controladas por los Estados nacionales, aunque la gran mayoría de ellas fueron fundadas en fechas anteriores a la creación de los organismos supervisores oficiales.

En España hay cuatro Bolsas oficiales de Valores: Barcelona (1915), Bilbao (1890), Madrid (es la más antigua, creada en 1831) y Valencia (1970). En ellas se negocian fundamentalmente acciones. Cabe indicar que, la Bolsa de Madrid es la quinta bolsa de Europa y la décima del mundo por su volumen de contratación.

Las acciones cotizadas en la Bolsa alcanzaron una parte importante del activo financiero de las familias en 1999, representando más de un 30%, casi equiparándose a las cantidades invertidas en los depósitos bancarios, los cuales, tras diez años de tendencia decreciente repuntaron en el año 2000 como consecuencia de los depósitos de alta rentabilidad ofrecidos por las instituciones financieras especializadas en la operativa a través de Internet. Durante la crisis de los mercados de valores, desde el año 2000 hasta marzo de 2003, se vio mermada la inversión en Bolsa, disminuyendo el porcentaje poseído por los hogares españoles en acciones hasta el 21%. A partir de 2004 se volvió recuperar alcanzando el 32% en 2008.

Características de la Bolsa de valores:

- Rentabilidad. Siempre que se invierte en Bolsa se pretende obtener un rendimiento y este se puede obtener de dos maneras: la primera es con el cobro de dividendos y la segunda con la diferencia entre el precio de venta y el de compra de los títulos, es decir, la plusvalía o minusvalía obtenida.
- Seguridad. La Bolsa es un mercado de renta variable, es decir, los valores van cambiando de valor tanto al alza como a la baja y todo ello conlleva un riesgo. Este riesgo se puede hacer menor si se mantienen títulos a lo largo del tiempo, con lo que la probabilidad de que la inversión sea rentable y segura es mayor. Por otra parte, conviene diversificar la compra de títulos, esto es, adquirir de más de una empresa.
- Liquidez. Facilidad que ofrece este tipo de inversiones de comprar y vender rápidamente.

Participantes:

- Intermediarios. Casas de Bolsa, agentes, sociedades de corretaje, sociedades y agencias de valores, etc.
- Inversores.
 - Inversores a corto plazo, que arriesgan mucho buscando altas rentabilidades.
 - Inversores a largo plazo, que buscan rentabilidad a través de dividendos, ampliaciones de capital y otras estrategias.
 - Inversores adversos al riesgo, que invierten preferiblemente en valores de renta fija del Estado, en muchos casos de baja rentabilidad como por ejemplo letras del Tesoro o bonos.
- Empresas y estados. Empresas, organismos públicos o privados y otras entes.

Funciones económicas:

- Canalizan el ahorro hacia la inversión, contribuyendo así al proceso de desarrollo económico.
- Ponen en contacto a las empresas y entidades del Estado necesitadas de recursos de inversión con los ahorradores.
- Confieren liquidez a la inversión, de manera que los tenedores de títulos pueden convertir en dinero sus acciones u otros valores con facilidad.
- Certifican precios de mercado.
- Favorecen una asignación eficiente de los recursos.
- Contribuyen a la valoración de activos financieros.

El índice IBEX 35 (Índice Bursátil Español) es el principal índice bursátil de referencia de la bolsa española elaborado por Bolsas y Mercados Españoles (BME). Está formado por las 35 empresas con más liquidez que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil Electrónico (SIBE) en las cuatro Bolsas Españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia).

Las 35 empresas que forman, actualmente, el IBEX 35 son: ABERTIS, ABENGOA, ACCIONA, ACS, AMADEUS, ARCELOR MITTAL STEEL, BANCO SABADELL, BANCO SANTANDER, BANKIA, BANKINTER, BBVA, BME, CAIXABANK, DIA, ENAGAS, ENDESA, FCC, FERROVIAL, GAMESA, GAS NATURAL, GRIFOLS, IBERIA, IBERDROLA, INDITEX, INDRA, JAZZTEL, MAPRE, MEDIASET ESPAÑA, OHL, BANCO POPULAR, RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA, REPSOL, SACYR, TÉCNICAS REUNIDAS, TELEFÓNICA.

2.2. Conceptos Básicos en Bolsa

Conviene entender algunos de los conceptos básicos de inversión en Bolsa para poder comprender mejor el trabajo que se va a realizar.

Cotizaciones

- Valor de cotización: valor en Bolsa o precio de una empresa en euros/acción.
- Apertura: precio al que comienza la negociación de un activo financiero en una sesión en el mercado financiero de valores.
- Cierre: momento en que termina oficialmente la contratación en Bolsa. El cambio o precio de cierre es la última cotización de un valor.

Acciones

Las empresas muchas veces necesitan ampliar su capital, para poder crecer. Una forma de hacerlo, es emitir nuevas acciones y ofrecerlas a inversores en la Bolsa. Una acción es una parte representativa del capital de una empresa: una pequeñísima porción de la misma.

Una vez que la empresa colocó sus acciones en Bolsa, es decir, los inversores adquirieron esas acciones que les vendió la empresa, ésta utiliza el dinero para financiar sus proyectos productivos. Ahora bien, los inversores que compraron acciones no se las tienen que quedar. En cualquier momento pueden venderlas a otros a través de la Bolsa de Valores. Ya en esto no participa la empresa, ni le afecta – son transacciones entre compradores y vendedores directamente.

Como cualquier precio en una Economía de libre mercado, los precios de las acciones están sujetos a la ley de la oferta y demanda. Es decir, suben o bajan de precio de acuerdo de acuerdo con esta ley. Una acción es una parte representativa del capital de una empresa. Quien las compra, entonces, se convierte en dueño de esa porción.

Suben o bajan de precio las acciones porque siempre hay compradores y siempre hay vendedores: el precio se determina según qué tanto están dispuestos los compradores a pagar por una acción.

Dividendo

Es la parte del beneficio de una empresa que se reparte entre los accionistas de una sociedad. El dividendo constituye la principal vía de remuneración de los accionistas como propietarios de una sociedad. Su importe debe ser aprobado por la Junta General de Accionistas de la sociedad, a propuesta del consejo de administración.

Se puede distinguir entre dividendo activo y dividendo pasivo. Por un lado, el *dividendo activo*, es la parte del beneficio obtenido por las sociedades mercantiles cuyos órganos sociales acuerdan que sea repartido entre los socios de las mismas. Por otro lado, el *dividendo pasivo* es el crédito que ostenta la sociedad mercantil frente al socio, por la parte del capital social que suscribió y que se comprometió a desembolsar.

Beneficio por Acción

El beneficio por acción es la rentabilidad o ganancia por acción en un periodo de tiempo determinado. Su cálculo se realiza dividiendo los beneficios de la empresa en el periodo de tiempo seleccionado entre el número de acciones que constituye su capital social.

Renta Fija

Los instrumentos de inversión de renta fija son emisiones de deuda que realizan los estados y las empresas dirigidos a un amplio mercado.

Generalmente son emitidos por los gobiernos y entes corporativos de gran capacidad financiera en cantidades definidas que conllevan una fecha de expiración.

La renta fija funciona exactamente igual que un préstamo bancario, pero tiene algunas particularidades:

- Los prestamistas son una gran cantidad de inversores.
- La deuda se representa mediante títulos negociables en el mercado de valores, por lo que el inversor puede acudir al mercado y vender su participación para recuperar su inversión rápidamente.

Los activos financieros o títulos de valores como los bonos, las obligaciones, las letras y pagarés son ejemplos de renta fija.

Renta Variable

Los instrumentos de renta variable son especialmente aquellos que son parte de un capital, como las acciones de las compañías anónimas. Las acciones son representativas del capital de una empresa. Por tanto, los accionistas son copropietarios y por lo tanto solidarios con la responsabilidad de la compañía, ejerciendo su papel en las asambleas generales ordinarias y extraordinarias, que eligen a las autoridades y deciden sobre los cambios y expansión de actividades que les propone la junta directiva.

Las acciones, las participaciones en fondos de inversión, los bonos y obligaciones convertibles son ejemplos de renta variable.

En el trabajo que presentamos, planteamos dos tipos de inversión: en renta variable y en renta mixta. Esta última combina la renta fija y la renta variable

Cartera de Inversiones

También denominada cartera de valores o portafolio de inversiones. Es una determinada combinación de activos financieros o empresas que cotizan en Bolsa, en los cuales se invierte un capital. Puede estar compuesta por una combinación de algunos instrumentos de renta fija y renta variable.

Los instrumentos de renta fija aseguran un retorno fijo al momento de invertir, pero normalmente con una rentabilidad menor a la de uno de renta variable, que no asegura un retorno inicial pero puede ofrecer retornos más altos. En cambio, la renta fija no tiene riesgo, pero sí la variable.

El principal objetivo en la construcción de una cartera de inversión consiste en distribuir óptimamente la inversión entre distintos activos, minimizando el riesgo y maximizando su rentabilidad.

Letra del Tesoro

El Gobierno de España, para poder financiar los gastos, la Sanidad, los funcionarios, etc. emite deuda pública, es decir, pide a los ciudadanos que le presten dinero para que pueda seguir pagando. Es una de las formas que tiene el Gobierno de asegurar los pagos aunque no tenga el dinero.

Esta deuda pública se materializa en forma de letras del tesoro, bonos del estado y obligaciones, que son los títulos que se compran, al igual que si se compraran acciones de una o varias empresas en Bolsa. La única diferencia entre estos tres títulos es el plazo en el que se emiten, siendo las letras del tesoro a 3, 6 y 12 meses, los bonos de 3 a 5 años y las obligaciones a más de 10 años.

En este trabajo nos centraremos sólo en las letras del Tesoro, aunque los desarrollos son válidos para el resto de productos, si bien necesitaríamos plazos amplios en estudios posteriores para hacer predicciones a futuro. Las letras del Tesoro se compran mediante subasta pública que organiza el Estado, la cual se lleva a cabo cada mes.

Rentabilidad

Se refiere a los rendimientos o ganancias obtenidos por el inversor o la persona que tiene el activo financiero.

Como cabe esperar, un inversor siempre buscará un activo financiero que le reporte la mayor rentabilidad posible, que tenga una alta liquidez y, al mismo tiempo, asumir el mínimo riesgo. Ahora bien, en el mercado es habitual encontrarnos que cuanto más rentabilidad tenga un activo también tiene mayor riesgo.

Riesgo

Hay distintas definiciones del riesgo. Una de ellas es la probabilidad de que el valor de un activo disminuya a causa de diversos factores. En este trabajo será medido como la varianza.

Clasificación Sectorial de las Empresas del IBEX 35

Todas las compañías admitidas a cotización en la Bolsa española están encuadradas dentro de una Clasificación Sectorial y Subsectorial unificada, que se implantó el 1 de enero de 2005.

Hay seis sectores básicos:

- Dos relacionados con la energía y la industria básica en sentido amplio: Petróleo y energía; y Materiales básicos, industria y construcción.
- Dos ligados al consumo: Bienes de Consumo y Servicios de Consumo.
- Uno que agrupa las actividades de componente financiero: Servicios financieros e inmobiliarias.
- Uno que agrupa las actividades relacionadas con la tecnología y las telecomunicaciones: Tecnología y Telecomunicaciones.

Existe un segundo nivel en la clasificación, la de subsectores, que desglosa, hasta donde es posible, la clasificación de actividades de las empresas cotizadas, permitiendo la inclusión de nuevos subsectores a medida que sea necesario, sin modificar la composición de los seis sectores básicos.

CAPÍTULO 3. OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS

A continuación se presentan el modelo de selección de carteras y el modelo de Markowitz.

3.1. El Problema de Selección de Carteras

El problema de la selección de carteras es básico en la economía de las denominadas empresas financieras (Bancos, entidades de Seguros, de Ahorro, Capitalización, Fondos de inversiones, etc.).

La teoría moderna del portafolio o teoría moderna de selección de cartera es una teoría de inversión que estudia como maximizar el retorno y minimizar el riesgo, mediante una adecuada elección de los componentes de una cartera de valores. La teoría moderna de la selección de cartera (modern portfolio theory) propone que el inversor debe abordar la cartera como un todo, estudiando las características de riesgo y retorno global, en lugar de escoger valores individuales en virtud del retorno esperado de cada valor en particular.

La teoría de selección de cartera toma en consideración el retorno esperado a largo plazo y la volatilidad esperada en el corto plazo. La volatilidad se trata como un factor de riesgo, y la cartera se conforma en virtud de la tolerancia al riesgo de cada inversor en particular.

Para poder integrar una cartera de inversión equilibrada lo más importante es la diversificación ya que de esta forma se reduce la variación de los precios. El objetivo de la cartera es, entonces, diversificar las inversiones en diferentes activos o productos financieros (en nuestro trabajo empresas del IBEX 35) para así disminuir las fluctuaciones en la rentabilidad total de la cartera y por lo tanto también del riesgo.

Si disponemos de los datos de cotizaciones diarias en Bolsa de n empresas en T días, denotaremos $R_j(t)$ = *rendimiento diario de la inversión en la empresa j en el tiempo t , $t=1, 2, \dots, T$; $j=1, 2, \dots, n$* . Los R_j son variables aleatorias cuyos momentos se estiman con los datos históricos.

Se define el rendimiento esperado de la empresa j ($j=1, \dots, n$) en T días de cotización como la esperanza de R_j :

$$r_j = ER_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_j(t)$$

Se define el riesgo de la inversión en la empresa j ($j=1, \dots, n$) en T días de cotizados como la varianza de R_j :

$$\sigma_j^2 = \text{Var}R_j = E(R_j - r_j)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_j(t) - r_j)^2$$

Más adelante, en el Capítulo 4, explicaremos los datos históricos que utilizaremos. Corresponde a $n=35$ empresas del IBEX 35 en $T=547$ días de cotización.

En la Tabla 5.1.0 de la Sección 5.1 aparecen los rendimientos y riesgos de las 35 inversiones en cada una de las empresas del IBEX 35.

El riesgo se puede reducir diversificando la inversión, es decir, invirtiendo el capital en más de una empresa mediante una cartera de inversiones. Así, si x_j es la proporción de riqueza invertida en la empresa j , $j=1, \dots, n$, se tiene que el vector $x=(x_1, \dots, x_n)$ es una cartera de inversiones.

El rendimiento o rentabilidad de la cartera x se define así:

$$R(x) = \sum_{j=1}^n x_j R_j$$

El rendimiento o rentabilidad esperada de la cartera es:

$$r(x) = ER(x) = \sum_{j=1}^n x_j r_j$$

El riesgo de la cartera x es:

$$\sigma^2(x) = \text{Var}R_{(x)} = E(R_{(x)} - r(x))^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^n x_j (R_j(t) - r_j) \right)^2$$

El problema básico de selección de carteras se formula como un problema de programación cuadrática:

$$\min \sigma^2(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^n x_j (R_j(t) - r_j) \right)^2 \quad (\text{minimizar el riesgo})$$

s. a:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^n x_j r_j \geq k$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Este problema proporciona la cartera x^* de mínimo riesgo entre todas las carteras con rentabilidad igual o superior al valor prefijado k .

3.2. El Modelo de Markowitz y la Frontera Eficiente

En 1952 el economista norteamericano Harry Markowitz, especialista en análisis de inversiones, publicó un artículo llamado "Portfolio Selection" en donde expone su teoría sobre cómo hallar la composición óptima de un portafolio de valores, maximizando la rentabilidad para un determinado nivel máximo de riesgo aceptable; o en forma alternativa, minimizar el riesgo para una rentabilidad mínima esperada. Este problema tiene doble objetivo, por lo que no tiene solución óptima. Por ello, se hablará en términos de eficiencia. En otras palabras, Markowitz desarrolla su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversor. Es decir, el inversor desea la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por lo tanto, para él una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado, o de forma equivalente, si presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad.

La optimización de carteras de inversión es un aspecto central en el mundo financiero. El modelo de Markowitz ha logrado éxito a nivel teórico en el medio de las finanzas, en cuanto a la estructuración de portafolios y en la búsqueda de la diversificación implícita en el análisis de inversiones.

Como referente teórico en la optimización de carteras es de gran utilidad para los analistas y gestores de inversiones, ya que ha proporcionado carteras con mejor desempeño que los índices de referencia del mercado; sin embargo, cabe aclarar que el éxito en su aplicación depende de la correcta estimación de los rendimientos esperados de los títulos y de sus covarianzas. Además, tampoco se puede olvidar que sus cálculos se realizan tomando series de rentabilidades históricas, las cuales no permiten asegurar que el comportamiento futuro del mercado sea similar a como fue en el pasado.

Se busca determinar el conjunto de carteras eficientes que proporcionen el mínimo riesgo para un valor dado de rendimiento. Una solución o una cartera eficiente es una cartera $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ tal que no existe otra cartera x factible con $r(x) \geq r(x^*)$ y $\sigma^2(x) \leq \sigma^2(x^*)$ y, al menos, una desigualdad estricta. Es decir, no existe una cartera mejor que x^* en cuanto a rentabilidad y riesgo.

El conjunto de todas las soluciones eficientes se denomina *frontera eficiente* de rentabilidad-riesgo. El objetivo principal de este modelo es generar la frontera eficiente.

El propósito del Modelo de Markowitz es maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo. Su formulación es la siguiente:

$$\min f(x) = \mu\sigma^2(x) - r(x) = \mu \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^n x_j (R_j(t) - r_j) \right)^2 - \sum_{j=1}^n x_j r_j$$

s. a:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$0 \leq \mu < \infty \quad (\mu \text{ es un parámetro})$$

Un valor grande μ pone más énfasis a minimizar el riesgo y un valor pequeño a maximizar el rendimiento. Hay un problema de programación cuadrática para cada μ , cuya solución es una cartera eficiente. La frontera eficiente se obtiene resolviendo todos los problemas variando el parámetro μ .

Las carteras que se encuentran en la frontera eficiente son soluciones razonables, mientras que las que están fuera de la frontera eficiente no son soluciones óptimas del problema de minimizar el riesgo para una rentabilidad fijada.

Para obtener la frontera eficiente hay que resolver el problema dando valores a μ y hallando, para cada uno, la cartera óptima con su rentabilidad y su riesgo. Esta frontera se representa gráficamente en el plano uniendo los puntos (riesgo, rentabilidad) de las carteras eficientes, es decir, los puntos $(\sigma^2(x^*), \mu(x^*))$.

Hay varias cuestiones importantes del modelo de Markowitz que pueden afectar a la hora de su aplicación:

- A medida que aumentamos el número de activos a considerar, el tamaño de la matriz de covarianzas se vuelve abrumadora. Por ejemplo, 35 activos implica 1225 términos de covarianza.
- Si el modelo se aplica cada vez que estén disponibles nuevos datos, tendríamos que “reequilibrar” la cartera frecuentemente haciendo pequeños ajustes.

3.3. Índice o Ratio de Sharpe (SR)

El ratio de Sharpe es una medida de rentabilidad-riesgo creada por el premio Nobel de Economía (1990), William Forsyth Sharpe, de la Universidad de Stanford.

El ratio de Sharpe expresa la rentabilidad obtenida por cada unidad de riesgo soportado por el fondo.

El ratio de Sharpe de una cartera x es:

$$SR(x) = \frac{r(x) - \bar{r}}{\sigma(x)}$$

donde \bar{r} es la rentabilidad media del activo sin riesgo del mercado financiero.

Para los cálculos posteriores se tomará un tipo de interés anual del 2.92%, suponiendo 365 días. Entonces, el tipo de interés diario normalizado es $r=0.00008$.

Del valor numérico del ratio de Sharpe podemos extraer algunas conclusiones en términos de rentabilidad:

- Mientras mayor sea el índice de Sharpe, mejor es la rentabilidad del fondo comparado directamente a la cantidad de riesgo que se ha asumido en la inversión.
- Si el índice o ratio de Sharpe es negativo, indica un rendimiento inferior a la rentabilidad sin riesgo.
- Todo ratio de Sharpe inferior a uno significa que el rendimiento del activo es inferior al riesgo que estamos asumiendo al invertir en un activo determinado.

Por tanto, el ratio de Sharpe más alto dará la mejor cartera.

3.4. Carteras Eficientes Notables

Definidos los términos anteriores consideraremos tres carteras eficientes de más interés:

* La cartera de máxima rentabilidad, la cual no tiene en cuenta el riesgo. Ésta se obtiene para $\mu = 0$.

* La cartera de mínimo riesgo. Se aproxima con un valor grande del parámetro, $\mu = \infty$.

* La cartera con un Ratio de Sharpe (SR) mayor.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO

Para la realización de este trabajo se han utilizado datos reales de cotizaciones de todas las empresas del IBEX 35, obtenidas en las fechas comprendidas entre el 07/11/2012 y el 02/01/2015. En total se tienen datos de 547 días hábiles.

Se han obtenido las ganancias netas por 1€ invertido, a partir de las cotizaciones diarias al cierre. Y, para un manejo mejor de los datos, no se han tenido en cuenta los dividendos para los cálculos.

4.1. Metodología

Para los cálculos se utiliza el software AMPL con los solver *minos* y *cplex*. Y como editor se usa PFE.

AMPL es un lenguaje de modelado algebraico para programación matemática, capaz de expresar en notación algebraica problemas de optimización tales como problemas de programación lineal y no lineal. En el Anexo IV se adjuntan los programas.

4.2. Métodos, Técnicas e Instrumentos de Recogida

Con todo lo visto anteriormente pasamos al desarrollo del trabajo.

Para empezar a plantear el problema de selección de carteras hay que elegir los posibles fondos de inversión que, en este caso, van a ser empresas pertenecientes al IBEX 35. No vamos a realizar ningún tipo de elección, vamos a trabajar con todas las empresas.

Recurrimos a la Web de Invertia (<http://www.invertia.com/> → MERCADOS → BOLSA → En Índices: IBEX 35 → ACCIONES) debido a que ésta tiene la ventaja frente a otras de proporcionar los datos de las cotizaciones de las empresas y el periodo elegido en formato Excel.

La tabla siguiente es una muestra de los datos primarios que nos proporciona la Web para una empresa, por ejemplo, ABERTIS. Sólo se muestra una semana de cotización, elegida dentro del periodo que vamos a utilizar en el trabajo.

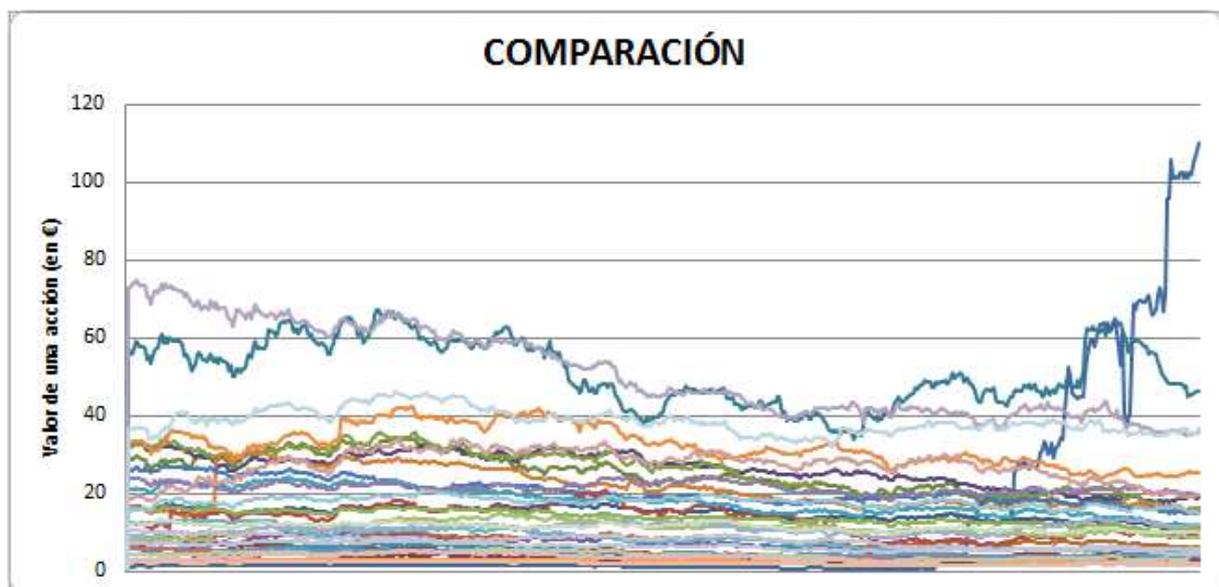
Fecha	Último	Apert.	%Dif.	Máx.	Mín.	Volumen
13/11/2012	10.72	10.54	0.80%	10.73	10.54	1 456 785
12/11/2012	10.64	10.82	-1.60%	10.82	10.64	995 775
09/11/2012	10.81	11.07	-2.50%	11.09	10.77	1 173 336
08/11/2012	11.09	11.43	-4.90%	11.45	11.09	1 188 154
07/11/2012	11.66	11.8	-0.80%	11.88	11.61	1 563 904

También es importante hacer referencia a que con una búsqueda exhaustiva en diferentes páginas y bases de datos, determinados valores de ciertos días no son completamente iguales. Esto puede ser debido al ajuste de decimales. No obstante lo despreciaremos al no ser cambios significativos.

La tabla anterior es un fragmento de cómo la Web de Invertia proporciona los datos que recogemos para empezar a tratarlos. Nos los proporciona, en formato Excel, para cada empresa del IBEX 35. Para cada día seleccionado obtenemos la cotización de apertura, la de cierre, la máxima y la mínima. La columna que tenemos en cuenta es la de “Último”. Este valor indica la cotización, expresada en euros por acción, de las acciones de la empresa al cierre de cada día.

En una misma hoja Excel están incluidos los datos de cotizaciones (columnas “Último”) de las 35 empresas del IBEX 35. Ver Tabla 1 Anexo I.

Siguiendo los valores de todas las cotizaciones a lo largo de un periodo de tiempo podemos ver si el valor de las acciones tiende a ir aumentando o a ir disminuyendo y, así, tener una primera idea general de la evolución de las empresas en las que voy a invertir. Obviamente, esto se ve mejor gráficamente, como se muestra a continuación.



Sólo con la tabla y la gráfica anteriores no estamos capacitados todavía para elegir carteras de inversión adecuadas, por ello tenemos que recurrir a los problemas de optimización presentados anteriormente.

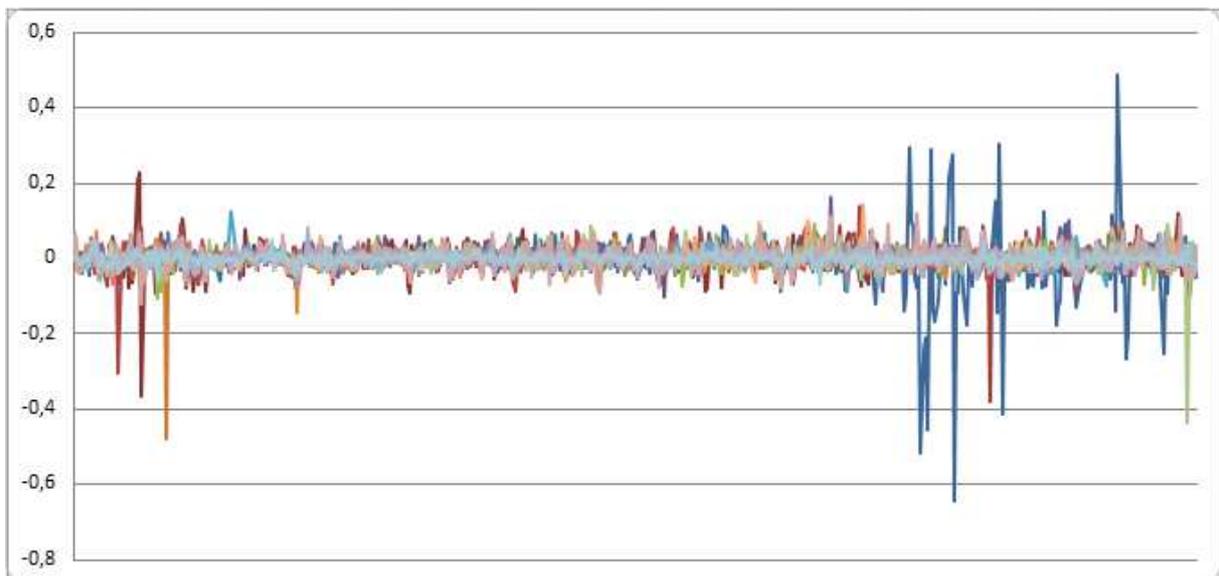
Para empezar a hacer un análisis exhaustivo y plantear el problema calculo las ganancias netas diarias para cada una de las 35 empresas. Para ello, utilizando la columna “Último”, resto el valor de un día entre el anterior y el resultado lo dividimos entre el mismo valor anterior, obteniendo así la ganancia normalizada (ganancia diaria). La expresión para este cálculo pone la empresa j en la t es:

$$R_j(t) = \frac{C_j(t) - C_j(t - 1)}{C_j(t - 1)}, \text{ ganancia neta diaria}$$

donde $C_j(t)$ es la cotización al cierre de la empresa j en el día t .

A continuación, en el siguiente capítulo, se calcula la media de todas las ganancias diarias de cada empresa en el periodo determinado para calcular el rendimiento o rentabilidad esperada de éstas. Análogo para hallar la matriz de varianzas-covarianzas. Estos cálculos los realizamos con AMPL como se muestra en el Anexo IV.

En la Tabla 2 del Anexo I se muestra la tabla normalizada (ganancias netas diarias). A partir de ella, se construye la gráfica siguiente, que muestra las ganancias netas diarias de las 35 empresas en el periodo seleccionado.



Si observamos valores superiores a 0 significa que en esos días ha habido una ganancia, iguales a 0 se interpreta que el valor al cierre es el mismo que el día anterior, por tanto no ha habido ni ganancia ni pérdida, y valores inferiores a 0 corresponden a días en los que hay una pérdida.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

5.1. Rendimiento y Riesgo de la Inversión en Cada Empresa

El siguiente paso es hacer la media de todas las ganancias diarias que han ido teniendo las empresas.

ABE	ABG	ACS	AMS	ANA	BBVA	BKIA
0.0007	0.0003	0.0012	0.0011	0.0006	0.0006	-0.0051
BKT	BME	CABK	DIA	ELE	ENG	FCC
0.0019	0.0014	0.0011	0.0004	0.0005	0.0010	0.0008
FER	GAM	GAS	GRF	IBE	ICAG	IDR
0.0008	0.0032	0.0011	0.0006	0.0008	0.0022	0.0001
ITX	JAZ	MAP	MTS	OHL	POP	REE
0.0005	0.0019	0.0008	-0.0004	0.0001	0.0001	0.0014
REP	SAB	SAN	SCYR	TEF	TL5	TRE
0.0002	0.0006	0.0006	0.0018	0.0004	0.0019	0.0001

Estas medias me proporcionan un resumen de la evolución que ha tenido cada empresa, haciendo más fácil el problema de la selección de carteras. Las medias son muy útiles para obtener la rentabilidad de las carteras.

Sólo con los datos que tenemos obtendría la cartera eficiente de máxima rentabilidad (para $\mu = 0$). Como me interesa también tener en cuenta el riesgo de las carteras debo obtener el riesgo de la inversión en cada empresa, y lo determino mediante la matriz de varianzas y covarianzas. Es una matriz cuadrada simétrica que contiene en la diagonal las varianzas (riesgos) y fuera de la diagonal las covarianzas entre las parejas de variables (empresas).

El proceso para calcular esta matriz es muy largo y complejo, por eso vamos a utilizar como herramientas la hoja de cálculo Excel y el software AMPL. Los datos que necesitamos son todas las ganancias diarias recogidas de las 35 empresas.

En la tabla siguiente podemos observar la rentabilidad (o media) y el riesgo (o varianza) de cada una de las empresas.

	Rentabilidad	Riesgo
ABE	0.0007	0.00017
ABG	0.0003	0.00149
ACS	0.0012	0.00026
AMS	0.0011	0.00013
ANA	0.0006	0.0005
BBVA	0.0006	0.00025
BKIA	-0.0051	0.00495
BKT	0.0019	0.00073
BME	0.0014	0.00025
CABK	0.0011	0.0004
DIA	0.0004	0.00027
ELE	0.0005	0.00061
ENG	0.001	0.00016
FCC	0.0008	0.00088
FER	0.0008	0.00016
GAM	0.0032	0.00079
GAS	0.0011	0.00018
GRF	0.0006	0.00028
IBE	0.0008	0.00014
ICAG	0.0022	0.00045
IDR	0.0001	0.00038
ITX	0.0005	0.00019
JAZ	0.0019	0.00027
MAP	0.0008	0.0003
MTS	-0.0004	0.00033
OHL	0.0001	0.0003
POP	0.0001	0.00104
REE	0.0014	0.00019
REP	0.0002	0.00019
SAB	0.0006	0.00049
SAN	0.0006	0.00024
SCYR	0.0018	0.00083
TEF	0.0004	0.00015
TL5	0.0019	0.00038
TRE	0.0001	0.00019

Tabla 5.1.0

El mayor rendimiento corresponde a una inversión de todo mi capital en GAMESA, y el mínimo riesgo a una inversión de todo el capital en AMADEUS. Si apuesto todo a una única empresa no es eficiente puesto que, por ejemplo, una inversión en JAZZTEL mejora a una inversión en INDITEX en cuanto a rentabilidad, y una inversión en AMADEUS mejora a JAZZTEL en cuanto a riesgo. Por eso vamos a construir carteras que permitan intervenir a más de una empresa.

5.2. Implementación de Problemas de Selección de Carteras

A partir de estos valores obtenidos de rendimiento, riesgo y covarianzas, empiezo a resolver los problemas de programación cuadrática. Estos problemas van a consistir en repartir el dinero que invierto entre las empresas teniendo en cuenta el rendimiento y el riesgo de este reparto.

Para esta tarea vamos a usar el software AMPL, el cual, mediante la programación y la introducción de datos me va a dar las soluciones, que son las carteras óptimas. Los datos que tengo que introducir de manera específica son las ganancias normalizadas de las 35 empresas, es decir, las ganancias diarias.

En el caso de la optimización de carteras con frontera eficiente (modelo de Markowitz) se usa el parámetro μ , el cual me permite modificar el peso del riesgo de la cartera en la función objetivo. Cuanto mayor sea μ , el riesgo se tendrá menos en cuenta.

Para poder obtener la representación gráfica de la frontera eficiente de rentabilidad-riesgo, tengo que dar diferentes valores a μ , y representar las rentabilidades y los riesgos respectivos en el plano. Previamente una selección de carteras eficientes serán recogidas en una tabla.

Para cada valor dado de μ obtengo una repartición exacta del capital que tengo que invertir en cada empresa, que es la solución al problema de carteras. No hay una única solución, hay infinitas soluciones eficientes y todas están dentro de la frontera eficiente. Son soluciones eficientes.

Para la frontera eficiente recopilo todos los datos obtenidos con AMPL para poder hacer la gráfica correspondiente y ver en forma de tabla las carteras eficientes.

En el Anexo IV se muestra el aspecto de los programas en AMPL y en el Anexo I la salida del mismo, con las soluciones para cada uno de los valores elegidos para el parámetro μ .

A continuación estudiamos la optimización de carteras sin frontera eficiente, y después con frontera eficiente.

5.3. Optimización de Carteras Sin Frontera Eficiente

En este apartado se estudia la optimización de carteras sin frontera eficiente a través de diversos modelos basados en el estudiado en la Sección 3.1. Comenzaremos viendo varios modelos en los cuales el objetivo es minimizar el riesgo, éstos son: el modelo básico de inversión en las 35 empresas y el modelo de 35 empresas pero añadiéndole diferentes letras del tesoro. Y, para finalizar, se estudiará el modelo en el cual se maximiza el Sharpe Ratio.

5.3.1. Modelo Básico Sin Letra

Consideramos el modelo de la sección 3.1 con $k=0.00008$ y $\bar{r} = 0.00005$. Para este modelo utilizamos las 35 empresas del IBEX 35, por lo que los rendimientos y riesgos de este modelo son los de la Tabla 5.1.0.

A continuación se recoge la cartera óptima obtenida. Esta cartera, como se ha comentado anteriormente, resulta de minimizar el riesgo.

Cartera optima

ABE 0	CABK 0	IBE 0.0921152	REE 0.0162809
ABG 0	DIA 0	ICAG 0	REP 0
ACS 0	ELE 0.0153446	IDR 0	SAB 0
AMS 0.314691	ENG 0.180177	ITX 0.0450481	SAN 0
ANA 0	FCC 0	JAZ 0.103215	SCYR 0
BBVA 0	FER 0.0365649	MAP 0	TEF 0.0356306
BKIA 0	GAM 0	MTS 0	TL5 0
BKT 0	GAS 0	OHL 0	TRE 0.0935165
BME 0.0526326	GRF 0.0147839	POP 0	

Mean= 0.000975817933, Variance = 0.000067983910, Sharpe Ratio = 0.112

Se observa que las inversiones de capital se realizan en AMADEUS (AMS), BME, ENDESA (ELE), ENAGAS (ENG), FERROVIAL (FER), GRIFOLS (GRF), IBERDROLA (IBE), INDITEX (ITX), JAZZTEL (JAZ), RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA (REE), TELEFÓNICA (TEF) y TÉCNICAS REUNIDAS (TRE).

La solución recomienda invertir alrededor del 31% en AMADEUS y el 18% en ENAGAS. El rendimiento esperado es aproximadamente del 0.1%, con una variación del 0.000068.

5.3.2. Modelo Básico Con Letra

Una Letra del Tesoro es un activo libre de riesgo. Cuando una de las inversiones es de este tipo, la composición óptima de la cartera tiene una forma particularmente simple debido a que prácticamente toda la inversión se realizará en ese activo. También se observará una disminución de la varianza.

Consideramos el modelo de la Sección 3.1 con $k=0.00008$. Para este modelo utilizamos las 35 empresas del IBEX 35 y añadiremos como empresa 36 una letra del Tesoro. Realizamos un estudio comparativo según el tipo de interés de la letra que hacemos coincidir con Ratio de Sharpe, $\bar{r} = r_0 = 0, 0.0000025, 0.000025, 0.00005, 0.000075, 0.0001$ y 0.0002 .

Letra del Tesoro 0%

Con esta letra la ganancia diaria es de 0€.

La cartera óptima que se obtiene al incluir esta letra del tesoro se muestra a continuación.

Cartera optima

ABE 0	CABK 0	IBE 0	POP 0
ABG 0	DIA 0	ICAG 0.00442362	REE 0.00890698
ACS 0	ELE 0	IDR 0	REP 0
AMS 0.00960096	ENG 0	ITX 0	SAB 0
ANA 0	FCC 0	JAZ 0.012541	SAN 0
BBVA 0	FER 0	LETRA 0.953735	SCYR 0
BKIA 0	GAM 0.00426507	MAP 0	TEF 0
BKT 0	GAS 0	MTS 0	TL5 0.00294659
BME 0.00358082	GRF 0	OHL 0	TRE 0

Mean= 0.000080000000, Variance = 0.000000242670, Sharpe Ratio = 0.162

Al incluir la letra del tesoro, la inversión de capital se realiza en AMADEUS, BME, GAMESA, IBERIA, JAZZTEL, RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA, MEDIASET ESPAÑA y en la LETRA. Siendo esta última en la que mayor inversión se realiza, un 95%.

Letra del Tesoro 0,09125%

La ganancia diaria es de 0.0000025€.

La cartera óptima que se obtiene se muestra a continuación.

Cartera optima

ABE 0	CABK 0	IBE 0	POP 0
ABG 0	DIA 0	ICAG 0.00429731	REE 0.00863257
ACS 0	ELE 0	IDR 0	REP 0
AMS 0.00928429	ENG 0	ITX 0	SAB 0
ANA 0	FCC 0	JAZ 0.0121681	SAN 0
BBVA 0	FER 0	LETRA 0.955143	SCYR 0
BKIA 0	GAM 0.00415061	MAP 0	TEF 0
BKT 0	GAS 0	MTS 0	TL5 0.00285917
BME 0.00346451	GRF 0	OHL 0	TRE 0

Mean= 0.000080000000, Variance = 0.000000228400, Sharpe Ratio = 0.162

Utilizando esta letra del tesoro se observa que la inversión se lleva a cabo en las mismas empresas que con la letra anterior. Y en la LETRA es también donde se realiza mayor inversión al ser un activo libre de riesgo, en este caso prácticamente el 96%.

Letra del Tesoro 0,9125%

La ganancia diaria es de 0.000025€.

La cartera óptima en este caso es:

Cartera optima

ABE 0	CABK 0	IBE 0	POP 0
ABG 0	DIA 0	ICAG 0.00335768	REE 0.00677568
ACS 0	ELE 0	IDR 0	REP 0
AMS 0.00661498	ENG 0	ITX 0	SAB 0
ANA 0	FCC 0	JAZ 0.00905368	SAN 0
BBVA 0	FER 0	LETRA 0.968527	SCYR 0
BKIA 0	GAM 0.00332171	MAP 0	TEF 0
BKT 0	GAS 0	MTS 0	TL5 0.0023491
BME 0	GRF 0	OHL 0	TRE 0

Mean= 0.000080000000, Variance = 0.000000119183, Sharpe Ratio = 0.159

Se observa que ha disminuido el número de empresas en las cuales invertir, ha pasado de ser 8 a 7. Invirtiéndose en AMADEUS, GAMESA, IBERIA, JAZZTEL, RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA, MEDIASET ESPAÑA y en la LETRA (el 97%).

Letra del Tesoro 1,825%

La ganancia diaria es de 0.00005€.

La cartera óptima obtenida con esta letra del tesoro se muestra a continuación.

Cartera optima

ABE 0	CABK 0	IBE 0	POP 0
ABG 0	DIA 0	ICAG 0.00231316	REE 0.00428831
ACS 0	ELE 0	IDR 0	REP 0
AMS 0	ENG 0	ITX 0	SAB 0
ANA 0	FCC 0	JAZ 0.00534666	SAN 0
BBVA 0	FER 0	LETRA 0.984355	SCYR 0
BKIA 0	GAM 0.00214668	MAP 0	TEF 0
BKT 0	GAS 0	MTS 0	TL5 0.00155019
BME 0	GRF 0	OHL 0	TRE 0

Mean= 0.000080000000, Variance = 0.000000037866, Sharpe Ratio = 0.154

Seguimos observando que a medida el aumenta el valor de la letra del tesoro disminuye el número de empresas en las cuales invertir y aumenta la inversión a realizar en la letra.

Aquí la cartera muestra que hay que invertir en GAMESA, IBERIA, JAZZTEL, RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA, MEDIASET ESPAÑA y la LETRA (98%).

Letra del Tesoro 2,7375%

La ganancia diaria es de 0.000075€.

La cartera óptima es:

Cartera optima

ABE 1.70276e-05	CABK 0	IBE 0	POP 0
ABG 0	DIA 0	ICAG 0	REE 0
ACS 0	ELE 0	IDR 0	REP 0
AMS 0	ENG 0	ITX 0	SAB 0
ANA 0	FCC 0	JAZ 0	SAN 0
BBVA 0	FER 0	LETRA 0.99839	SCYR 0
BKIA 0	GAM 0.00159337	MAP 0	TEF 0
BKT 0	GAS 0	MTS 0	TL5 0
BME 0	GRF 0	OHL 0	TRE 0

Mean= 0.000080000000, Variance = 0.000000002026, Sharpe Ratio = 0.111

En este caso invertimos sólo en ABERTIS, GAMESA y en la LETRA (99.8%).

Letra del Tesoro 3,65%

La ganancia diaria es de 0.0001€.

La cartera óptima obtenida es:

Cartera optima

ABE 0.0001	BME 0	GAS 0	MAP 0	SCYR 0
ABG 0	CABK 0	GRF 0	MTS 0	TEF 0
ACS 0	DIA 0	IBE 0	OHL 0	TL5 0
AMS 0	ELE 0	ICAG 0	POP 0	TRE 0
ANA 0	ENG 0	IDR 0	REE 0	
BBVA 0	FCC 0	ITX 0	REP 0	
BKIA 0	FER 0	JAZ 0	SAB 0	
BKT 0	GAM 0	LETRA 0.9999	SAN 0	

Mean= 0.000100062584, Variance = 0.000000000002, Sharpe Ratio = 0.049

Con la letra del 3.65% invertimos solamente en ABERTIS y en la LETRA. En la letra del tesoro la inversión ya es prácticamente completa, el 99.99%.

Letra del Tesoro 7,2%

La ganancia diaria es de 0.0002€.

Por último, para esta letra del tesoro, la cartera óptima que se obtiene es:

Cartera optima

ABE 0.0001	BME 0	GAS 0	MAP 0	SCYR 0
ABG 0	CABK 0	GRF 0	MTS 0	TEF 0
ACS 0	DIA 0	IBE 0	OHL 0	TL5 0
AMS 0	ELE 0	ICAG 0	POP 0	TRE 0
ANA 0	ENG 0	IDR 0	REE 0	
BBVA 0	FCC 0	ITX 0	REP 0	
BKIA 0	FER 0	JAZ 0	SAB 0	
BKT 0	GAM 0	LETRA 0.9999	SAN 0	

Mean= 0.000200052584, Variance = 0.000000000002, Sharpe Ratio = 0.041

La inversión es la misma que en el caso anterior, pero vemos cómo el Ratio de Sharpe ha disminuido de un 0.049 a 0.041.

Se observa, ya comentado inicialmente, que la mayor inversión se realiza en el activo libre de riesgo y, además, se produce una disminución del riesgo de la cartera óptima (de un 0.000068 a un 0.000000000002) y un aumento de la rentabilidad (de 0.00008 a 0.0002). En cuanto al Ratio de Sharpe, éste también disminuye de 0.162 a 0.041. Si tuviéramos que elegir, cogeríamos la cartera óptima correspondiente a la letra al 0%, por tener un SR mayor.

5.3.3. Modelo Maximizando el Ratio de Sharpe

En este modelo no se minimiza el riesgo, se maximiza el Ratio de Sharpe.

Mientras mayor sea el índice de Sharpe, mejor es la rentabilidad del fondo comparado directamente a la cantidad de riesgo que se ha asumido en la inversión. Por tanto, el Ratio de Sharpe más alto dará la mejor cartera. Tomamos $\bar{r} = 0.00005$.

La formulación del modelo es:

$$\max SR(x) = \left(\sum_{i=1}^{35} x_i r_i - \bar{r} \right) \sqrt{\sum_{i,j=1}^{35} Cov(i,j) x_i x_j}$$

s. a:

$$\sum_{i=1}^{35} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, \forall i$$

Cartera optima

ABE 0	CABK 0	IBE 0	REE 0.162007
ABG 0	DIA 0	ICAG 0.0929424	REP 0
ACS 0	ELE 0	IDR 0	SAB 0
AMS 0.191535	ENG 0.0615707	ITX 0	SAN 0
ANA 0	FCC 0	JAZ 0.268128	SCYR 0
BBVA 0	FER 0	MAP 0	TEF 0
BKIA 0	GAM 0.0953603	MTS 0	TL5 0.0589676
BKT 0	GAS 0	OHL 0	TRE 0
BME 0.0694895	GRF 0	POP 0	

Mean= 0.001713439299, Variance = 0.000110798825, Sharpe Ratio = 0.158

La inversión se reparte entre las siguientes empresas: AMADEUS, BME, ENAGAS, GAMESA, IBERIA, JAZZTEL, RED ELÉCTRICA ESPAÑOL Y MEDIASET ESPAÑA.

La mayor inversión se realiza en JAZZTEL (27%), en AMADEUS (19%) y en RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA (16%).

5.3.4. Modelo Básico con Costes de Compra/Venta y Cartera de Referencia

Los modelos anteriores no nos dicen con qué frecuencia ajustar nuestra cartera con la nueva información disponible. Actualizar la cartera cada vez que obtengamos datos nuevos, utilizando los modelos anteriores, sería un trabajo costoso. Si aplicásemos los susodichos modelos siempre que se actualiza la información, estaríamos constantemente ajustando nuestra cartera. Esto podría hacer muy feliz a nuestro agente de bolsa debido a todos los honorarios de comisión, pero debería ser un objetivo secundario a lo más.

La observación importante consiste en que hay gastos asociados con la compra y la venta. Por lo que hay gastos de comisión obvios a la hora de invertir.

El método que se describe a continuación asume que los gastos de transacción son pagados al principio del periodo. Se trata de una tarea sencilla, en la cual se modifica el modelo para manejar el caso de los costos de transacción pagados al final del periodo.

Las modificaciones principales al modelo de cartera básico son:

- 1.- Introducir dos variables adicionales para cada activo: una cantidad comprada y otra vendida.
- 2.- La restricción presupuestaria debe ser modificada para incluir el dinero gastado sobre comisiones.
- 3.- Y una restricción adicional para cada activo que cumpla:
$$\text{Importe invertido en el activo } i = (\text{tenencia inicial de } i) + (\text{cantidad comprada de } i) - (\text{cantidad vendida de } i)$$

En nuestro caso, suponemos que hay que pagar los honorarios de transacción del 1% sobre la cantidad comprada o vendida de cualquier acción. Vamos a ver cuál será, en este caso, la cartera óptima, también obtendremos la compra óptima a realizar al igual que la venta óptima.

El modelo se formula de la siguiente manera:

$$\min \sigma^2(x) = \sum_{i,j=1}^{35} \text{Cov}(i,j)x_i x_j$$

s. a:

$$\sum_{j=1}^{35} x_j + ct(c_j + v_j) = 1$$

$$\sum_{j=1}^{35} x_j r_j \geq k$$

$$x_j = xx_j + c_j - v_j, \forall j = 1, \dots, 35$$

Como antes, tomamos $k=0.00008$ y $\bar{r} = 0.00005$. Y, como cartera de referencia, la cartera óptima de la sección 5.3.1 (el modelo básico sin letra del Tesoro).

La solución que resulta al programarlo en AMPL es:

```

Cartera optima
ABE 0
ABG 0
ACS 0
AMS 0.0155301
ANA 0
BBVA 0
BKIA 0
BKT 0
BME 0.00747172
CABK 0
DIA 0
ELE 0
ENG 0.00694518
FCC 0
FER 0
GAM 2.85149e-05
GAS 0
GRF 0
IBE 0
ICAG 0
IDR 0
ITX 0
JAZ 0.0167402
MAP 0
MTS 0
OHL 0
POP 0
REE 0.0100335
REP 0
SAB 0
SAN 0
SCYR 0
TEF 0
TL5 0
TRE 0

Compra optima
ABE 0
ABG 0
ACS 0
AMS 0
ANA 0
BBVA 0
BKIA 4.93225e-17
BKT 0
BME 0
CABK 0
DIA 0
ELE 0
ENG 0
FCC 0
FER 0
GAM 2.85149e-05
GAS 0
GRF 0
IBE 0
ICAG 0
IDR 0
ITX 0
JAZ 0
MAP 0
MTS 0
OHL 0
POP 0
REE 0
REP 0
SAB 0
SAN 0
SCYR 0
TEF 0
TL5 0
TRE 0

Venta optima
ABE 0
ABG 0
ACS 0
AMS 0.299132
ANA 0
BBVA 0
BKIA 0
BKT 0
BME 0.0451609
CABK 0
DIA 0
ELE 0.0153446
ENG 0.173232
FCC 0
FER 0.0365649
GAM 0
GAS 0
GRF 0.0147839
IBE 0.0921152
ICAG 0
IDR 0
ITX 0.0450481
JAZ 0.0864748
MAP 0
MTS 0
OHL 0
POP 0
REE 0.00624744
REP 0
SAB 0
SAN 0
SCYR 0
TEF 0.0356306
TL5 0
TRE 0.0935165

Mean= 0.000080000000, Variance = 0.000000270476, Sharpe Ratio = 0.058

```

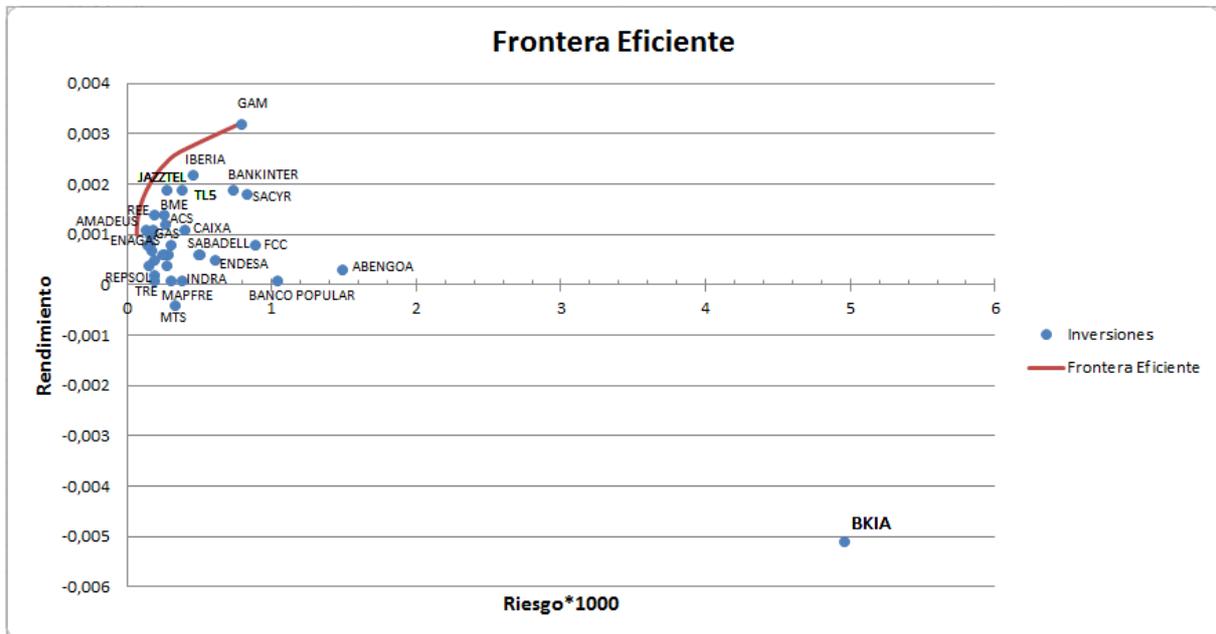
La solución recomienda comprar un poco más en BANKIA y GAMESA, y vender más acciones de AMADEUS.

5.4. Optimización de Carteras Con Frontera Eficiente

No hay manera precisa para que un inversor pueda determinar la compensación “correcta” entre riesgo y rentabilidad. Por lo tanto, hay que buscar un punto intermedio entre la rentabilidad de una cartera y su riesgo. Si un inversor quiere un rendimiento esperado más alto, tendrá que “pagarlo” con un riesgo mayor. En la terminología de las finanzas, tenemos que trazar la frontera eficiente de rentabilidad y riesgo.

A continuación se muestran los resultados del modelo básico con las 35 empresas del IBEX 35 y de los modelos en los cuales se va añadiendo y variando letras del tesoro.

5.4.1. Modelo Básico Sin Letra



En la gráfica se ha representado la rentabilidad y el riesgo (éste último multiplicado *1000) de las carteras eficientes (frontera eficiente), y la comparamos con carteras formadas por una única empresa (ver Tabla 5.1.0).

Observamos que sólo un punto de las empresas pertenece a la frontera eficiente (GAMESA), corresponde a la empresa con mayor rentabilidad, por tanto la solución del problema con $\mu = 0$.

Esta gráfica también nos deja ver cómo algunas empresas como IBERIA o JAZZTEL están muy cerca de la frontera eficiente, lo cual quiere decir que si invertimos todo el capital en esa empresa podríamos estar cerca de una cartera eficiente. Mientras que BANKIA está muy lejos, por lo que no es recomendable invertir en dicha empresa.

El motivo por el cual las empresas están tan dispersas en el gráfico, es que tienen rentabilidad y riesgo muy diferentes. Las empresas del IBEX 35 no tienen por qué comportarse igual.

A continuación se incluye la tabla que recoge las carteras eficientes obtenidas. Las empresas que no aparecen se debe a que no forman parte de ninguna cartera eficiente.

mu	AMS	BME	ELE	ENG	FER	GAM	GAS	GRF	IBE	ICAG	ITX	JAZ	REE	TEF	TL5	TRE	Rendimiento	Riesgo	SR
0						1											0,003206041	0,000794519	0,1109
1						0,9677				0,0323							0,003172095	0,000759784	0,1122
2						0,5171				0,1958		0,2871					0,002623008	0,000356847	0,1346
3						0,3415				0,1971		0,3617	0,0325		0,0672		0,002373599	0,00025508	0,1436
4						0,2427				0,1731		0,3517	0,1492		0,0826		0,002176864	0,000197711	0,1491
5	0,0692	0,036				0,1796				0,1431		0,3214	0,1741		0,0767		0,001999516	0,000158133	0,1526
6	0,1344	0,055		0,0092		0,1374				0,1195		0,2964	0,1785		0,0696		0,001865099	0,000133539	0,1545
7	0,1751	0,0654		0,0465		0,1075				0,1006		0,2763	0,1668		0,062		0,001757151	0,000116833	0,1552
8	0,2056	0,0731		0,0744		0,085				0,0864		0,2612	0,1579		0,0563		0,001676186	0,000105989	0,1550
9	0,2293	0,0791		0,0962		0,0676				0,0754		0,2495	0,1511		0,0519		0,001613215	9,8555E-05	0,1544
10	0,2483	0,0839		0,1136		0,0536				0,0666		0,2401	0,1456		0,0484		0,001562838	9,32374E-05	0,1536
11	0,2638	0,0878		0,1278		0,0422				0,0594		0,2324	0,1411		0,0455		0,001521621	8,93031E-05	0,1526
12	0,2758	0,0906		0,1368		0,0322	0,0083			0,0533		0,2255	0,1349		0,0427		0,001484917	8,61074E-05	0,1514
13	0,2857	0,0928		0,1437		0,0235	0,0172			0,0482		0,2196	0,129		0,0402		0,001453299	8,35739E-05	0,1502
14	0,2942	0,0948		0,1496		0,0161	0,0249			0,0438		0,2145	0,124		0,0381		0,001426198	8,15637E-05	0,1491
15	0,3016	0,0935		0,1548		0,0097	0,0316			0,04		0,21	0,1196		0,0362		0,001402711	7,99419E-05	0,1479
17	0,3137	0,0991		0,1634			0,0422			0,0336		0,2026	0,1124		0,033		0,001365418	7,7597E-05	0,1459
20	0,3255	0,0991		0,1735	0,0071		0,0481		0,0031	0,0227		0,1917	0,103		0,0262		0,001333703	7,58903E-05	0,1439
25	0,3328	0,0949		0,1791	0,03		0,043		0,0328	0,0077		0,1765	0,0874		0,0159		0,001275006	7,32489E-05	0,1396
30	0,3372	0,0919		0,1825	0,0446		0,0396		0,0523			0,1662	0,0772		0,0084		0,001238	7,18866E-05	0,1366
35	0,3393	0,0892		0,1846	0,0536		0,0375		0,0654			0,1586	0,0702		0,0017		0,001216777	7,12296E-05	0,1347
40	0,3375	0,0853	0,0012	0,1844	0,054		0,0339		0,0721		0,0047	0,1521	0,064		0,0107		0,001190379	7,05246E-05	0,1322
45	0,3356	0,0819	0,0028	0,1839	0,053		0,0307		0,0766		0,0098	0,1468	0,0588		0,0199		0,001168823	7,00156E-05	0,1301
50	0,3341	0,0792	0,0041	0,1836	0,0523		0,0281		0,0801		0,0139	0,1426	0,0547		0,0273		0,001151578	6,96516E-05	0,1284
55	0,3328	0,077	0,0052	0,1833	0,0516		0,026		0,083		0,0172	0,1391	0,0513		0,0333		0,001137474	6,93823E-05	0,1270
60	0,3315	0,0751	0,0061	0,1829	0,0508		0,0243	0,0011	0,0853		0,0199	0,1362	0,0484		0,0384		0,001125338	6,91709E-05	0,1257
65	0,3304	0,0736	0,0068	0,1825	0,05		0,0227	0,0022	0,0873		0,0222	0,1337	0,046		0,0427		0,001115011	6,90054E-05	0,1246
70	0,3294	0,0722	0,0074	0,1823	0,0493		0,0215	0,0031	0,0889		0,0241	0,1316	0,0438		0,0464		0,001106182	6,88744E-05	0,1237
75	0,3285	0,0711	0,008	0,182	0,0487		0,0204	0,0039	0,0904		0,0258	0,1297	0,042		0,0496		0,001098487	6,87681E-05	0,1228
100	0,3255	0,067	0,0099	0,1811	0,0467		0,0163	0,0067	0,0956		0,0317	0,1233	0,0356		0,0607		0,001071636	6,84549E-05	0,1199
125	0,3235	0,0642	0,011	0,1807	0,0449		0,0136	0,0083	0,0959		0,0346	0,1193	0,0317	0,005	0,0672		0,001053431	6,82917E-05	0,1178
150	0,322	0,0623	0,0117	0,1805	0,0435		0,0117	0,0094	0,0952		0,0363	0,1166	0,029	0,0101	0,0716		0,001040588	6,81975E-05	0,1163
175	0,321	0,0609	0,0122	0,1804	0,0425		0,0104	0,0102	0,0946		0,0376	0,1147	0,0272	0,0137	0,0747		0,001031415	6,81407E-05	0,1153
200	0,3202	0,0599	0,0126	0,1803	0,0417		0,0094	0,0107	0,0942		0,0385	0,1132	0,0257	0,0164	0,077		0,001024535	6,81039E-05	0,1145
500	0,3169	0,0555	0,0142	0,18	0,0386		0,0051	0,0131	0,0925		0,0424	0,1072	0,0198	0,0278	0,0869		0,000995636	6,80027E-05	0,1110
550	0,3167	0,0553	0,0143	0,1799	0,0384		0,0048	0,0133	0,0924		0,0426	0,1068	0,0195	0,0285	0,0874		0,000993885	6,79994E-05	0,1108

Todas las carteras que se muestran en esta tabla son carteras eficientes. Por ejemplo, si queremos alcanzar una rentabilidad de 0.003172095 la cartera eficiente estaría formada por GAMESA (0.9677) e IBERIA (0.0323).

En la tabla anterior se puede ver el porcentaje de dinero que hay que invertir en cada empresa según el riesgo que se quiera correr, para eso variamos μ y el propio software AMPL nos hace los cálculos, además nos dice el riesgo y el rendimiento para cada valor de μ . Además, mediante un cálculo, podemos sacar el Ratio de Sharpe ya explicado anteriormente. Hemos tomado el tipo de interés $\bar{r} = 2.92\%$ anual, que traducido a rendimiento neto diario es $(0.0292/365)=0.00008$.

Por ejemplo, para $\mu = 4$, la cartera eficiente está formada por GAMESA (24.27%), ICAG (IBERIA) (17.31%), JAZZTEL (35.17%), RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA (14.92%) y MEDIASET ESPAÑA (8.26%). Su rentabilidad es 0.002176864, su riesgo es 0.000197711 y su Ratio de Sharpe es 0.149.

Como podemos ver en la tabla con $\mu = 0$, invertiríamos todo el dinero a GAMESA. En cambio, a medida que aumentamos un poco más el parámetro ya aparecen otras empresas en las que invertir pero no llegamos a tener ninguna cartera en la que se invierta un poco de cada empresa.

En las siguientes empresas no invertimos absolutamente nada de nuestro capital: ABERTIS, ABENGOA, ACS, ACCIONA, BBVA, BANKIA, BANKINTER, CAIXA BANK, DIA, FOMENTO DE CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, INDRA, MAPFRE, ARCELOR MITTAL STEEL, OBRASCÓN HUARTE LAIN, BANCO POPULAR, REPSOL, BANCO SABADELL, BANCO SANTANDER y SACYR.

Los valores de cuánto invertimos en cada empresa les usaremos más tarde a la hora de seleccionar carteras.

De la tabla se deduce que de las 35 empresas del IBEX 35, 19 de ellas forman parte de la composición de alguna cartera de la frontera eficiente. La rentabilidad de una cartera eficiente debe estar entre 0.000993885 y 0.003206041. El riesgo va desde 0.0000679994 y 0.000794519. No es posible encontrar una cartera de inversiones eficiente con rentabilidad o riesgo fuera de esos rangos.

De la tabla se pueden obtener otras conclusiones inmediatas: no es eficiente invertir más del 33.91% en AMADEUS, ni más del 9.91% en BME, ni tampoco más del 1.43% en ENDESA, etc. Se observa también como conclusión inmediata que hay que invertir al menos un 0.97% en GAMESA si quiero hacerlo con eficiencia, de hecho es la única empresa donde es eficiente invertir el 100% del capital.

Pasamos a fijarnos en el Ratio de Sharpe. El mayor se encuentra para el valor $\mu = 7$, después de ese valor y de ir aumentando μ el Ratio de Sharpe empieza a disminuir.

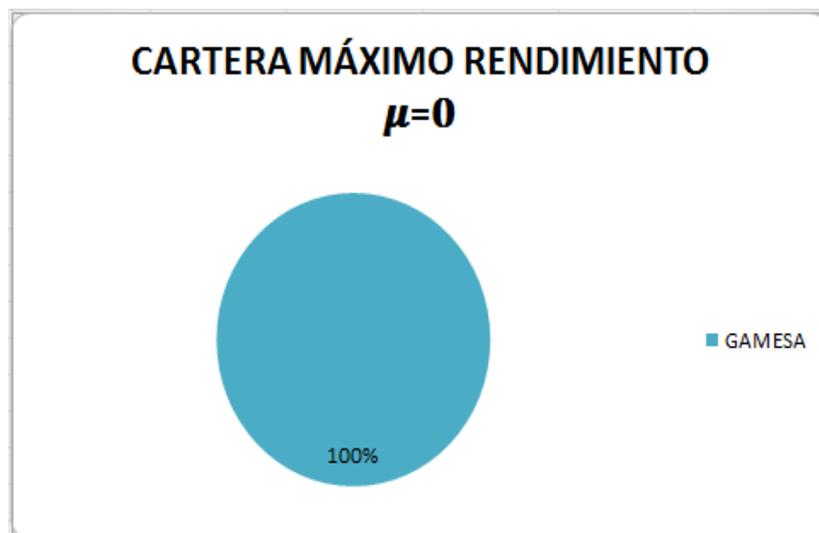
Cogiendo los datos de los porcentajes de ese valor de μ conseguiremos las carteras más eficientes respecto a la rentabilidad y riesgo. Así, la cartera eficiente con el Ratio de Sharpe máximo es:

AMADEUS (17.51%)
BME (6.54%)
ENAGAS (4.65%)
GAMESA (10.75%)
IBERIA (10.06%)
JAZZTEL (27.63%)
RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA (16.68%)
MEDIASET ESPAÑA (6.2%)
Rentabilidad: 0.001757151
Riesgo: 0.000116833
SR: 0.1552

Comparación de carteras.

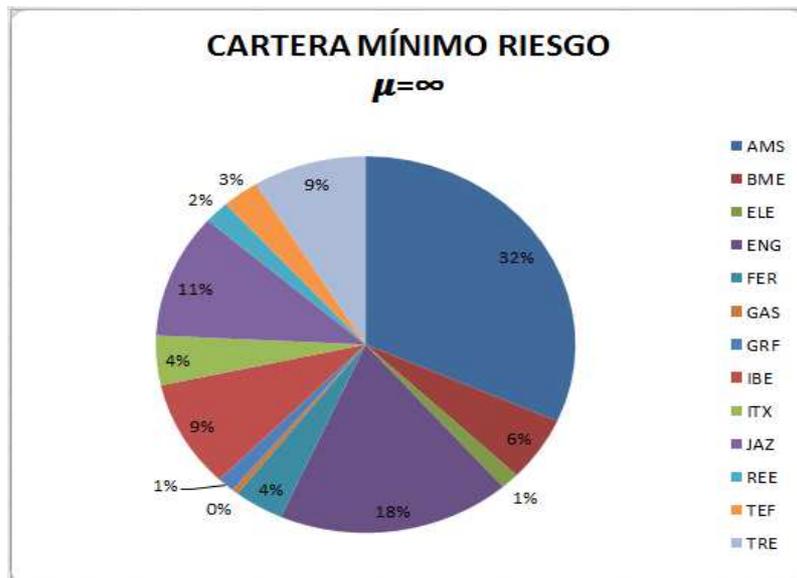
En este apartado vamos a comparar las diferentes carteras obtenidas fijándonos en 3 de ellas: la de máximo rendimiento ($\mu = 0$), la de mínimo riesgo ($\mu = \infty$) y la de máximo Ratio de Sharpe.

- Primera cartera ($\mu = 0$):



Damos el 100% del dinero a la empresa GAMESA.

- Segunda cartera ($\mu = \infty$):



A la hora de repartir el dinero, damos un 32% a AMADEUS, un 18% a ENAGAS y un 11% a JAZZTEL. En BME, ENDESA, FERROVIAL, GAS NATURAL, GRIFOLS, IBERDROLA, INDITEX, RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA, TELEFÓNICA Y TÉCNICAS REUNIDAS invertiríamos el 39% restante.

- Tercera cartera (máximo Ratio de Sharpe):

En este caso, la cartera eficiente de máximo Ratio de Sharpe tiene un $SR=0.1552$ y corresponde a $\mu = 7$.

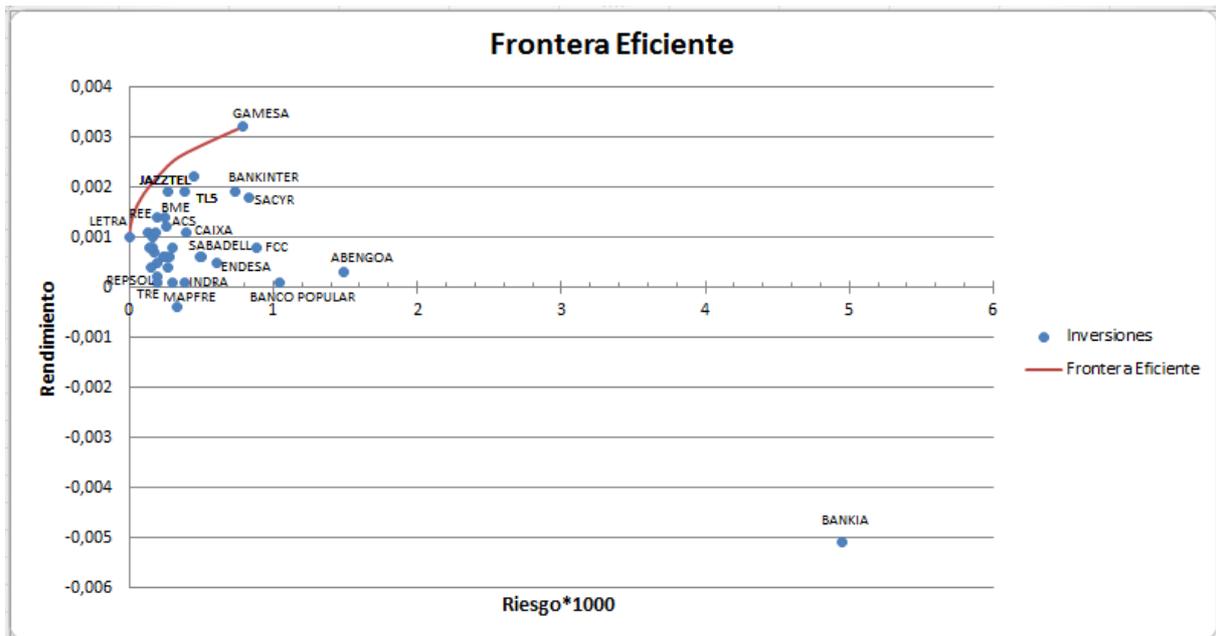


Invertimos un 28% en JAZZTEL, un 17% en AMADEUS, otro 17% en RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA, un 11% en GAMESA, un 10% en IBERIA y un 17% entre ENAGAS, BME y MEDIASET ESPAÑA.

5.4.2. Modelo Básico Con Letra

A continuación se muestran modelos en los cuales se van añadiendo varias letras del tesoro. En todos los modelos $\bar{r} = 0.00008$ y es variable el tipo r_0 de la letra. Alternativamente, se podría arrastrar $\bar{r} = r_0$ en cada modelo, pero se deja para futuro trabajo.

■ Letra del Tesoro 0.001



Observamos que sólo un punto pertenece a la frontera eficiente y corresponden a la empresa con mayor rentabilidad (GAMESA).

Comparación de carteras. Letra 0.001.

Vamos a comparar las diferentes carteras obtenidas fijándonos en 3 características: máximo rendimiento ($\mu = 0$), mínimo riesgo ($\mu = \infty$) y máximo Ratio de Sharpe.

- Primera cartera ($\mu = 0$):

```
mu=0.0000
GAM 1.0000
Mean= 0.003206041274, Variance = 0.000794519226, Sharpe Ratio = 0.111
```

La cartera con mejor rendimiento se obtiene invirtiendo todo nuestro capital en GAMESA.

- Segunda cartera ($\mu = \infty$):

```

mu=550.0000
                                GAM      0.0019
                                JAZ       0.0016
                                LETRA    0.9954
Mean= 0.001006788986, Variance = 0.000000006172, Sharpe Ratio = 11.797

```

A la hora de repartir el dinero, teniendo el menor riesgo posible, damos un 99.54% a la LETRA y el 0,35% restante entre GAMESA y JAZZTEL.

- Tercera cartera (máximo Ratio de Sharpe):

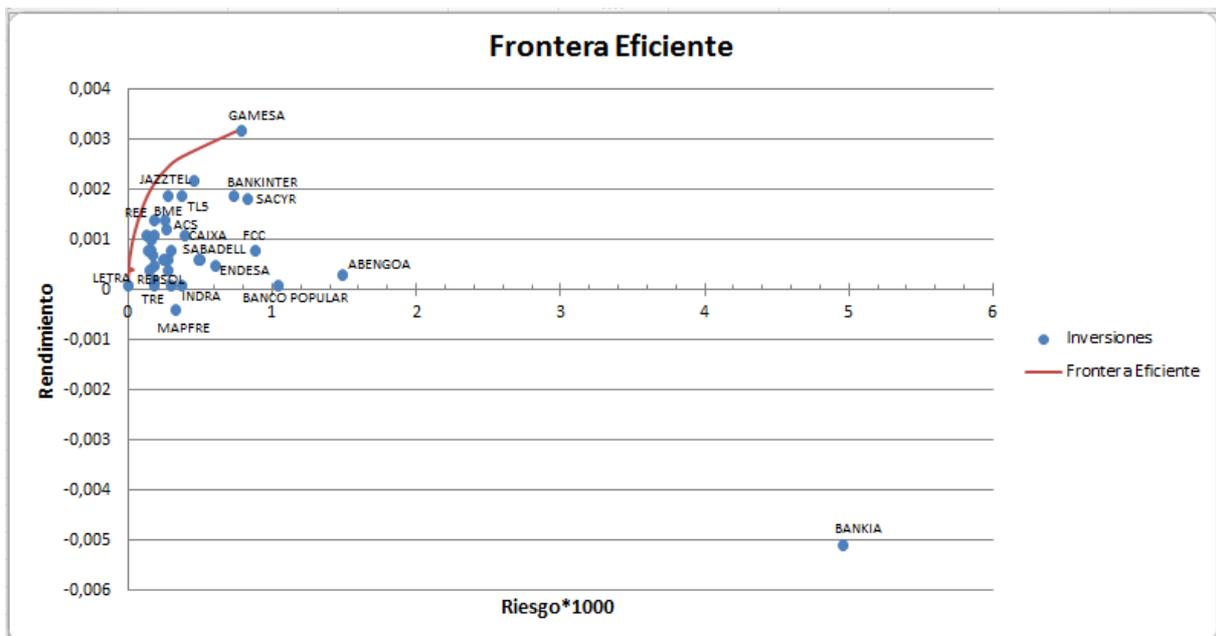
```

mu=550.0000
                                GAM      0.0019
                                JAZ       0.0016
                                LETRA    0.9954
Mean= 0.001006788986, Variance = 0.000000006172, Sharpe Ratio = 11.797

```

La cartera eficiente con máximo Ratio de Sharpe (11.797) coincide con la cartera de mínimo riesgo, es decir, $\mu = 550 = \infty$.

■ Letra del Tesoro 0.0001



Comparación de carteras. Letra 0.0001.

Vamos a comparar las diferentes carteras obtenidas fijándonos en 3 características: máximo rendimiento ($\mu = 0$), mínimo riesgo ($\mu = \infty$) y máximo Ratio de Sharpe.

- Primera cartera ($\mu = 0$):

```
mu=0.0000
          GAM      1.0000
Mean= 0.003206041274, Variance = 0.000794519226, Sharpe Ratio = 0.111
```

La cartera con mejor rendimiento se obtiene invirtiendo todo nuestro capital en GAMESA.

- Segunda cartera ($\mu = \infty$):

```
mu=550.0000
          AMS      0.0023
          GAM      0.0013
          ICAG     0.0013
          JAZ      0.0036
          REE      0.0021
          LETRA    0.9870
Mean= 0.000121370516, Variance = 0.000000019428, Sharpe Ratio = 0.297
```

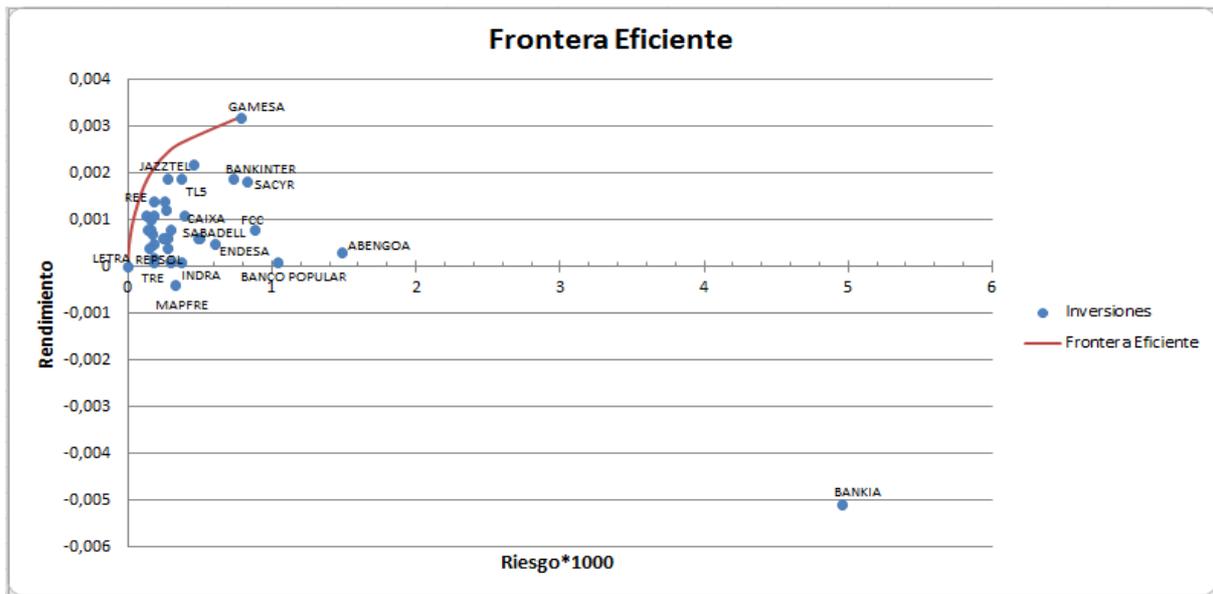
A la hora de repartir el dinero, teniendo el menor riesgo posible, damos un 98.70% a la LETRA y el resto hay que invertirlo en AMADEUS, GAMESA, IBERIA, JAZZTEL y RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA.

- Tercera cartera (máximo Ratio de Sharpe):

```
mu=550.0000
          AMS      0.0023
          GAM      0.0013
          ICAG     0.0013
          JAZ      0.0036
          REE      0.0021
          LETRA    0.9870
Mean= 0.000121370516, Variance = 0.000000019428, Sharpe Ratio = 0.297
```

En este caso también coincide la cartera eficiente con máximo Ratio de Sharpe (0.297) con la cartera de mínimo riesgo, es decir, $\mu = 550 = \infty$.

Letra del Tesoro 0.00001



Comparación de carteras. Letra 0.00001.

Comparamos las diferentes carteras obtenidas fijándonos en el máximo rendimiento ($\mu = 0$), mínimo riesgo ($\mu = \infty$) y máximo Ratio de Sharpe.

- Primera cartera ($\mu = 0$):

```
mu=0.0000
GAM 1.0000
Mean= 0.003206041274, Variance = 0.000794519226, Sharpe Ratio = 0.111
```

Para tener la cartera con mejor rendimiento hay que invertir todo el capital en GAMESA.

- Segunda cartera ($\mu = \infty$):

```
mu=550.0000
AMS 0.0028
BME 0.0010
GAM 0.0013
ICAG 0.0013
JAZ 0.0037
REE 0.0023
LETRA 0.9858
Mean= 0.000033815617, Variance = 0.000000021651, Sharpe Ratio = -0.314
```

Invertimos el capital, casi en su totalidad (98.58%), a la LETRA y el resto entre AMADEUS, BME, GAMESA, IBERIA, JAZZTEL y RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA.

- Tercera cartera (máximo Ratio de Sharpe):

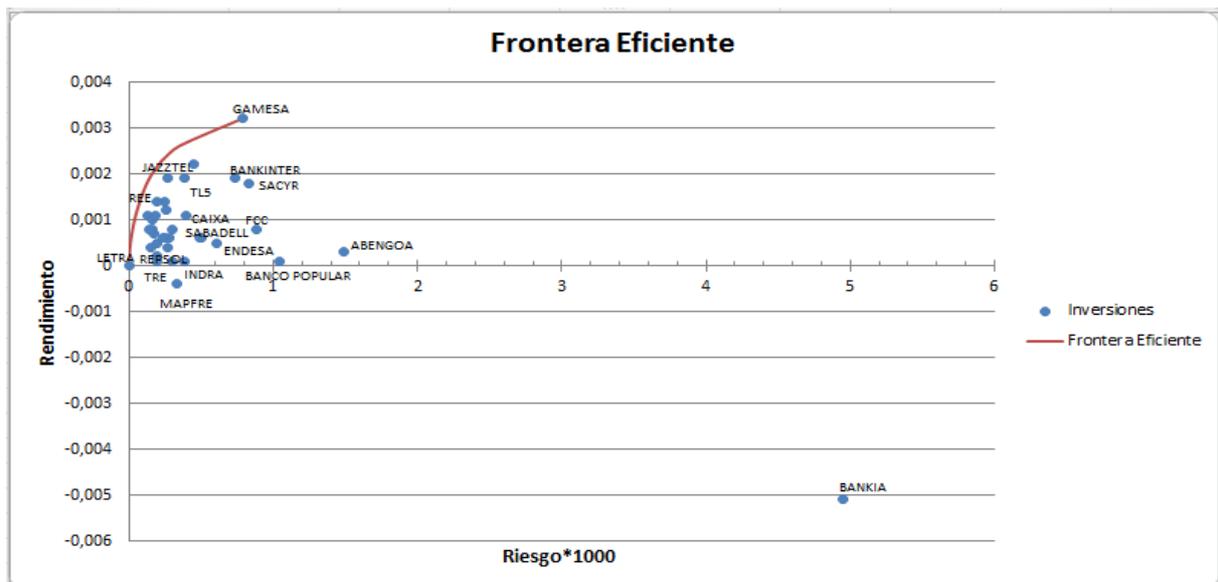
```

mu=7.0000
AMS      0.1751
BME      0.0654
ENG      0.0465
GAM      0.1075
ICAG     0.1006
JAZ      0.2763
REE      0.1668
TL5      0.0620
Mean= 0.001757150528, Variance = 0.000116832594, Sharpe Ratio = 0.155164

```

En este caso tenemos la cartera eficiente con máximo Ratio de Sharpe (0.155164) en $\mu = 7$. Observar que no interviene la LETRA.

■ Letra del Tesoro 0.000001



Comparación de carteras. Letra 0.000001.

Comparamos las diferentes carteras obtenidas fijándonos en el máximo rendimiento ($\mu = 0$), mínimo riesgo ($\mu = \infty$) y máximo Ratio de Sharpe.

- Primera cartera ($\mu = 0$):

```

mu=0.0000
GAM      1.0000
Mean= 0.003206041274, Variance = 0.000794519226, Sharpe Ratio = 0.111

```

Nos dice que hay que invertir todo el capital en GAMESA.

- Segunda cartera ($\mu = \infty$):

```

mu=550.0000
          AMS      0.0029
          BME      0.0010
          ENG      0.0010
          GAM      0.0013
          ICAG     0.0013
          JAZ      0.0038
          REE      0.0023
          LETRA    0.9857
Mean= 0.000025071605, Variance = 0.000000021883, Sharpe Ratio = -0.371

```

Invertimos el 98.57% del capital en la LETRA, y el resto en cantidad mínimas entre AMDEUS, BME, ENAGAS, GAMESA, IBERIA, JAZZTEL y RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA.

- Tercera cartera (máximo Ratio de Sharpe):

```

mu=7.0000
          AMS      0.1751
          BME      0.0654
          ENG      0.0465
          GAM      0.1075
          ICAG     0.1006
          JAZ      0.2763
          REE      0.1668
          TLS      0.0620
Mean= 0.001757150528, Variance = 0.000116832594, Sharpe Ratio = 0.155164

```

Nos sucede igual que en la letra anterior, la cartera eficiente con máximo Ratio de Sharpe (0.155164), se alcanza en $\mu = 7$.

Respecto de las 4 gráficas anteriores llegamos a conclusiones similares: no hay grandes diferencias globales entre las fronteras eficientes.

Se observa que principalmente dos de las empresas intervienen en las carteras de la frontera eficiente. Éstas corresponden a la empresa con mayor rentabilidad (GAMESA), la cual es por tanto la solución del problema con $\mu = 0$, y la empresa con menor riesgo (LETRA DEL TESORO).

La letra del Tesoro no forma parte de la composición de la cartera eficiente de SR máximo cuando su tipo de interés es menor que el usado en el SR, es decir, $\bar{r} = 0.00008$. A medida que disminuye éste la participación de la letra en las carteras eficientes es menor.

Las gráficas también nos dejan ver empresas como JAZZTEL y RED ELÉCTRICA ESPAÑOLA que están muy cerca de la frontera eficiente, lo cual quiere decir que si invertimos todo el capital en esas empresas podríamos estar cerca de una cartera eficiente. Mientras que BANKIA está muy lejos, por lo que no es recomendable invertir en dicha empresa.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y BIBLIOGRAFÍA

6.1. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado el modelo de Markowitz, un modelo que nos ayuda a la hora de seleccionar carteras de inversión. Es de mucha utilidad, ya que tiene en cuenta la rentabilidad y el riesgo de la cartera.

Utilizando el modelo de Markowitz y con los datos reales de las cotizaciones de todas las empresas del IBEX 35, obtenidas entre el 07/11/2012 y el 02/01/2015, se han obtenido y comparado carteras eficientes.

Comparando carteras de modelos sin frontera eficiente observamos que la cartera menos rentable es en la que se incluye la letra del Tesoro del 7.2%, ya que es la que menor Ratio de Sharpe tiene (0.041). Las más rentables son con la letra del 0% y con la letra de 0.09125%.

Al comparar las carteras de modelos con frontera eficiente se observa que las carteras más rentables corresponden al modelo con letra del Tesoro 0.001. Éstas son la de mínimo riesgo y la de Ratio de Sharpe máximo (en este caso 11.797).

La empresa GAMESA se encuentra siempre en la composición de las carteras eficientes y sucede lo mismo al incluir letra del Tesoro. Con esta última llegamos a la conclusión que no podemos invertir menos del 90% de capital en la LETRA.

Elegir uno u otro modelo dependerá del rendimiento o el riesgo que cada persona o inversor quiera afrontar.

Hemos podido observar lo interesante que es incluir letras del Tesoro a las carteras de inversión debido a que son activos sin riesgo, aunque a priori tengan menos rentabilidad.

Este trabajo podría continuarse haciendo comparaciones de las carteras eficientes con el IBEX 35. También se podría dar más peso a los últimos días de las cotizaciones en Bolsa haciendo uso de los logaritmos mediante el método de Vanderber. Otra ampliación para este proyecto sería poner restricciones, fijando el porcentaje de capital a invertir en cada empresa.

6.2. Referencias Bibliográficas

MENDIZABAL ZUBELDIA A., MIERA ZABALDA L.M. Y ZUBIA ZUBIAURRE M. (2002). "El Modelo de Markowitz en la Gestión de Carteras". Cuadernos de Gestión. Vol. 2, Nº1

Schrager, L. (2006) "Optimization Modeling with LINGO". Lindo Systems Inc.

VANDERBEI, R.J. (2008). "Linear Programming. Foundations and Extensions". Springer. Princeton

WINSTON, W.L. (2005). "INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES. Aplicaciones y algoritmos"

MARKOWITZ, H. (1952). "Portfolio Selection". Journal of Finance 7, pp. 77-91

<http://ampl.com/>

<http://ciberconta.unizar.es/leccion/fin004/110.HTM>

<http://www.observatoriodelinversor.com/ratio-de-sharpe-entre-rentabilidad-y-riesgo/>

<http://www.invertia.com/mercados/bolsa/indices/ibex-35/acciones-ib011ibex35>

<http://www.labolsa.com/mercado/BME/historico/>

Martín Sánchez, I. (2013) "Optimización de Carteras de Inversión". Trabajo Fin de Grado. Grado en Estadística, UVA.

CAPÍTULO 7. ANEXOS

7.1. Anexo I. Datos

A continuación se muestra un resumen de los datos obtenidos de la Web de Invertia, es decir, de las cotizaciones históricas de las empresas del IBEX 35. Vemos, por ejemplo, para BANKIA.

Fecha	Último	Apert.	%Dif.	Máx.	Mín.	Volumen
02/01/2015	1.27	1.26	2.30%	1.29	1.24	17 786 772
31/12/2014	1.24	1.23	0.10%	1.25	1.23	11 715 613
30/12/2014	1.24	1.25	-1.00%	1.25	1.21	26 579 730
29/12/2014	1.25	1.28	-3.60%	1.29	1.22	27 104 805
24/12/2014	1.3	1.29	0.50%	1.3	1.27	4 700 241
23/12/2014	1.29	1.26	2.10%	1.29	1.25	12 179 442
22/12/2014	1.26	1.27	0.00%	1.29	1.25	19 465 435
19/12/2014	1.26	1.34	-4.50%	1.34	1.26	42 495 638
18/12/2014	1.32	1.26	6.00%	1.34	1.26	48 383 192
17/12/2014	1.25	1.26	-1.30%	1.27	1.23	27 547 269
16/12/2014	1.27	1.25	2.00%	1.27	1.2	54 703 573
15/12/2014	1.24	1.28	-3.10%	1.3	1.24	29 431 310
12/12/2014	1.28	1.3	-2.60%	1.32	1.28	25 508 960
11/12/2014	1.32	1.29	1.20%	1.32	1.29	36 136 107
10/12/2014	1.3	1.31	0.50%	1.32	1.29	22 880 945
...
...
20/01/2012	355	361	-1.50%	361	355	25 389
19/01/2012	360.5	360	1.00%	361	357.1	28 136
18/01/2012	356.8	363	-1.50%	363	355.5	23 207
17/01/2012	362.4	360	1.10%	362.4	357.1	25 509
16/01/2012	358.5	353.5	0.40%	359	353.5	7 082
13/01/2012	357	352.4	0.80%	360	352.4	22 086
12/01/2012	354.3	356.4	-0.80%	359.8	354.3	23 253
11/01/2012	357.1	354	0.60%	358.6	351.7	25 143
10/01/2012	355	357.3	-0.10%	359.1	352.7	18 498
09/01/2012	355.2	355.8	-0.40%	359	354.6	10 292
06/01/2012	356.8	351.1	1.60%	359	350.8	11 634
05/01/2012	351.1	355.1	-2.00%	357.8	350	10 627
04/01/2012	358.2	358.8	0.30%	360	353.4	12 806
03/01/2012	357	358.1	-0.80%	359.9	353.3	11 675
02/01/2012	359.9	356.8	0.10%	360	355.1	7 907

Para todo el trabajo hemos utilizado la columna “Último”.

7.2. Anexo II. Tablas

Aquí se expone un resumen de los datos utilizados para este proyecto. La columna de “Últimos” del anterior anexo pero, en este caso, de las 35 empresas.

Fecha	ABE	ABG	ACS	AMS	ANA	BBVA	BKIA	BKT	BME	CABK	DIA	ELE	ENG	FCC	FER	GAM	GAS	GRF	IBE	ICAG	IDR	ITX	JAZ	MAP	MTS	OHL	POP	REE	REP	SAB	SAN	SCYR	TEF	TL5	TRE	
02/01/2015	16.57	1.95	29.22	32.86	57.05	7.92	1.27	6.93	32.89	4.51	5.72	16.08	25.92	11.89	16.36	7.9	20.99	33.45	5.6	6.21	8.22	23.79	12.59	2.84	9.01	19.12	4.43	73	15.57	2.31	7.03	3.05	11.89	10.5	36.63	
31/12/2014	16.43	1.83	28.97	33.09	56.2	7.85	1.24	6.7	32.14	4.36	5.63	16.55	26.19	11.75	16.43	7.56	20.81	33.12	5.6	6.19	8.07	23.71	12.55	2.81	9.05	18.55	4.16	73.21	15.55	2.21	7	2.86	11.92	10.45	36.29	
30/12/2014	16.34	1.89	28.91	32.66	56.03	7.86	1.24	6.78	32.24	4.37	5.68	16.49	26.04	11.86	16.04	7.61	20.9	33.31	5.59	6.14	8.15	23.73	12.56	2.83	9.09	18.6	4.2	74.11	15.57	2.19	7.02	2.95	11.88	10.44	36.15	
29/12/2014	16.56	1.97	29.22	32.73	57.46	7.97	1.25	6.76	32.54	4.41	5.71	16.57	26.44	11.96	16.24	7.8	21.16	33.36	5.64	6.04	8.27	23.85	12.6	2.86	9.21	19.07	4.27	73.86	15.75	2.22	7.14	3.08	12.07	10.54	36.83	
24/12/2014	16.7	1.97	29.54	33.2	59	8.02	1.3	6.91	32.9	4.48	5.61	16.57	26.53	12.02	16.38	7.92	21.3	33.25	5.68	6.04	8.33	23.91	12.6	2.88	9.16	19.25	4.39	74.95	15.89	2.25	7.17	3.16	12.24	10.6	36.91	
23/12/2014	16.63	1.97	29.47	32.83	58.81	8.04	1.29	6.89	32.55	4.5	5.66	16.47	26.55	12.04	16.39	7.99	21.27	33.51	5.68	6.04	8.37	23.91	12.58	2.89	9.2	19.48	4.4	74.29	15.84	2.26	7.18	3.14	12.22	10.56	36.97	
22/12/2014	16.55	1.98	29.16	32.8	57.89	7.91	1.26	6.91	33.01	4.45	5.57	16.17	26.03	12.13	16.24	7.95	21.1	33.39	5.63	6.02	8.09	23.75	12.57	2.87	9.02	19	4.36	73.67	15.62	2.24	7.09	3.13	12.11	10.37	36.74	
19/12/2014	16.35	1.95	28.5	32.58	57.69	7.98	1.26	6.86	32.57	4.45	5.52	16.1	25.9	11.93	16.15	7.91	21.17	33.21	5.61	5.98	7.97	23.64	12.57	2.87	9.21	19.03	4.34	73.6	16.08	2.23	7.09	3.14	12.07	10.27	36.99	
18/12/2014	16.22	2.01	28.74	32.15	57.37	8.03	1.32	6.95	32.66	4.46	5.42	15.85	26.69	12.05	16.19	7.9	21.08	32.62	5.63	5.9	8.13	23.55	12.57	2.86	9.11	18.5	4.35	73.57	16.07	2.25	7.08	3.17	12.26	10.4	36.8	
17/12/2014	15.69	1.98	27.33	31.06	54.6	7.78	1.25	6.82	31.94	4.29	5.21	15.46	25.77	11.57	15.68	7.64	20.73	31.96	5.51	5.6	7.79	22.29	12.54	2.78	8.81	18.31	4.22	70.8	15.68	2.18	6.83	3.02	11.97	10.07	36.25	
16/12/2014	15.9	1.96	27.1	31.55	55.34	7.86	1.27	6.9	32.48	4.3	5.21	15.16	25.98	11.69	15.66	7.6	20.45	32.3	5.49	5.82	7.75	22.44	12.54	2.74	8.78	18.21	4.26	70.56	15.64	2.19	6.82	3.03	12	10.25	34.52	
15/12/2014	15.64	1.96	26.49	31.39	53.66	7.72	1.24	6.62	31.05	4.19	5.05	15	25.21	11.12	15.38	7.62	20.22	30.16	5.4	5.71	7.57	22.08	12.52	2.7	8.56	18.02	4.08	68.91	15.7	2.11	6.64	2.91	12.08	9.93	33.9	
12/12/2014	15.97	2.03	26.84	32.14	55.3	7.95	1.28	6.8	31.6	4.27	5.23	15.3	25.6	11.05	15.69	7.8	20.8	31.26	5.51	5.77	7.76	22.59	12.55	2.85	8.88	18.11	4.17	70.43	16.18	2.14	6.78	2.99	12.46	9.99	34.55	
11/12/2014	16.23	2.07	27.31	31.57	56.73	8.22	1.32	7.18	32.3	4.32	5.31	15.42	25.88	11.32	16.04	7.98	21.14	31.08	5.62	5.87	7.97	23.3	12.55	2.94	9.14	18.68	4.27	71.89	17.21	2.2	7.01	3.1	12.92	10.3	34.93	
10/12/2014	16.27	2	27.33	31.45	57.3	8.23	1.3	7.15	32.05	4.34	5.29	15.56	26	11.69	16.01	8.13	21.3	31.11	5.65	5.82	8.01	22.35	12.56	2.93	9.27	19.18	4.27	71.88	17.41	2.2	6.98	3.13	12.92	10.14	34.51	
09/12/2014	16.21	1.99	27.13	31.54	57.6	8.33	1.29	7.12	32.39	4.39	5.35	15.51	25.98	12.08	16.03	8.17	21.7	31.18	5.67	5.78	8.24	22.63	12.55	2.95	9.49	19.58	4.33	71.45	17.61	2.23	7.03	3.2	12.92	10.1	34.66	
08/12/2014	16.75	2.05	28.2	32.14	60.17	8.56	1.34	7.4	33.65	4.55	5.67	15.74	26.98	13.05	16.47	8.54	22.45	32.23	5.89	6.07	8.51	23.38	12.56	3.04	9.71	20.38	4.5	73.23	18.04	2.34	7.29	3.29	13.25	10.22	35.17	
05/12/2014	16.92	2.09	28.56	32.09	61.15	8.66	1.33	7.28	33.88	4.59	5.72	15.85	26.97	12.61	16.72	8.7	22.83	32.6	5.9	6.16	8.52	23.58	12.55	3.04	9.9	20.71	4.49	74.2	18.31	2.35	7.38	3.32	13.37	10.24	36.1	
04/12/2014	16.76	2.09	27.65	32.13	58.7	8.37	1.33	7	32.68	4.4	5.57	15.55	26.8	12.06	16.35	8.33	22.47	33.18	5.83	5.9	8.4	23.05	12.53	2.96	9.77	20.25	4.29	72.69	17.95	2.28	7.14	3.16	12.9	10.25	36.35	
03/12/2014	17.22	1.97	28.5	32.19	60.06	8.66	1.42	7.22	33.55	4.55	5.72	15.7	27.17	11.67	16.56	8.56	22.99	34.89	5.85	5.97	8.57	23.58	12.62	3.01	9.94	21.75	4.5	74.05	18.26	2.37	7.38	3.26	13.11	10.21	37.22	
...

Tabla 1. Datos primarios

Fecha	ABE	ABG	ACS	AMS	ANA	BBVA	BKIA	BKT	BME	CABK	DIA	ELE	ENG	FCC	FER	GAM	GAS	GRF	IBE	ICAG	IDR	ITX	JAZ	MAP	MTS	OHL	POP	REE	REP	SAB	SAN	SCYR	TEF	TL5	TRE	
...
12/12/2012	11.69	1.84	17.15	18.35	55.78	6.7	70.9	3.01	17.67	2.66	4.77	17.51	16.23	9.55	11.25	1.62	12.96	24.71	3.93	2.15	9.14	20.77	5.4	2.25	12.66	20.2	2.83	36.79	15.99	2.2	5.86	1.41	10.12	5.13	35.21	
11/12/2012	11.51	1.86	16.63	18.37	56.29	6.62	68.3	2.93	17.65	2.67	4.66	17.17	15.97	9.44	11.31	1.64	12.79	24.57	3.88	2.11	9	20.72	5.41	2.15	12.49	20.27	2.83	36.85	15.98	2.18	5.8	1.4	10.06	4.93	35.29	
10/12/2012	11.3	1.86	16.26	18.24	56.21	6.51	65.7	3	17.45	2.65	4.57	16.67	15.85	9.1	11.34	1.64	12.5	24.9	3.81	2.13	9	20.16	5.25	2.14	12.25	19.81	2.82	35.86	15.72	2.15	5.75	1.4	9.93	4.91	35.19	
07/12/2012	11.36	1.82	16.07	17.83	56.06	6.57	67.5	3.03	17.56	2.71	4.62	16.48	15.85	9.16	11.42	1.66	12.52	24.96	3.81	2.11	9.13	20.16	5.36	2.13	12.14	20.1	2.75	35.69	15.86	2.18	5.85	1.37	10	4.97	34.84	
06/12/2012	11.42	1.89	16.05	18.24	53.78	6.63	71	3.05	17.48	2.77	4.68	16.51	15.82	9.12	11.3	1.69	12.55	25.2	3.83	2.16	9.29	19.98	5.44	2.12	12.36	20.42	3	35.65	16.18	2.18	5.9	1.4	10.1	5	34.96	
05/12/2012	11.35	1.89	15.79	18.2	52.49	6.59	72.9	3.11	17.44	2.83	4.69	16.85	15.5	9.2	11.37	1.68	12.4	24.73	3.82	2.16	9.4	19.73	5.34	2.15	12.2	20.53	3.16	35.66	16.29	2.14	5.88	1.4	10.04	4.97	35	
04/12/2012	11.26	1.91	16.04	18.1	50.92	6.55	71.2	3.04	16.95	2.85	4.74	16.15	15.52	9.03	11.55	1.67	12.19	24.7	3.83	2.13	9.34	20.15	5.2	2.15	11.96	20.1	3.09	35.75	16.33	2.1	5.93	1.4	10.1	4.79	34.99	
03/12/2012	11.19	1.98	16.04	17.92	50.24	6.5	66.9	3.04	16.9	2.85	4.76	16.05	15.37	9.08	11.36	1.63	12.05	24.45	3.79	2.1	8.99	20.74	5.22	2.15	11.79	19.5	3.13	35.73	16.29	2.12	5.9	1.37	10.05	4.83	35.35	
30/11/2012	11.24	2.04	16.44	17.95	49.85	6.52	71.7	3.06	16.67	2.94	4.77	15.61	15.74	9.14	11.4	1.65	11.94	24.6	3.82	2.07	9.01	21.08	5.19	2.16	11.69	19.94	3.21	35.63	16.31	2.15	5.91	1.37	10.09	4.53	35.8	
29/11/2012	11.27	2.02	16.6	18.17	48.8	6.55	96	3.06	16.8	2.94	4.81	15.87	15.45	9.17	11.3	1.74	12.05	24.55	3.85	2.1	9.2	21.13	5.34	2.18	11.78	20.42	3.29	35.9	16.58	2.15	5.89	1.4	10.12	4.5	34.94	
28/11/2012	11.07	2	16.24	17.93	48	6.35	96.1	2.92	16.82	2.83	4.83	15.66	15.05	8.84	11.35	1.63	11.96	24.55	3.87	2.1	9.05	20.79	5.23	2.1	11.44	20	3.13	35.69	16.38	2.04	5.76	1.34	10.03	4.26	35.64	
27/11/2012	11.15	2.04	16.38	18.2	48.43	6.41	106	2.95	16.55	2.79	4.85	15.6	15.21	8.98	11.15	1.67	12.15	24.7	3.95	2.1	9.01	20.5	5.28	2.19	11.47	20.1	2.87	36.18	16.4	2.03	5.77	1.37	10.11	4.35	36.19	
26/11/2012	10.99	2	16.58	17.96	48.07	6.42	101	2.95	16.85	2.78	4.77	15.82	15.11	8.97	11.19	1.71	12.18	24.25	3.99	2.1	8.72	20.6	5.36	2.21	11.5	20.04	2.71	36.34	16.61	2	5.78	1.37	10.2	4.25	36	
23/11/2012	11.14	2.05	16.29	18	48.19	6.46	101.3	2.93	17	2.77	4.83	15.78	15.08	9.15	11.26	1.7	12.3	24.59	4.02	2.08	8.88	20.49	5.14	2.23	11.68	20.1	2.75	36.25	16.73	1.97	5.81	1.43	10.26	4.37	36.08	
22/11/2012	11.12	2.07	15.9	18.48	48.08	6.43	101.8	2.96	16.95	2.76	4.81	15.64	15.23	9	11.14	1.71	12.24	24.3	4	2.08	9	20.6	5.07	2.16	11.61	19.97	2.76	36.11	16.56	1.87	5.77	1.42	10.22	4.44	35.75	
21/11/2012	10.93	2.04	15.87	18.52	48.07	6.36	101	2.94	16.73	2.71	4.81	15.69	15.1	8.92	11.18	1.63	12.14	24.26	4	2.04	9.27	20.23	5.02	2.17	11.55	19.32	2.77	36.05	16.33	1.84	5.71	1.4	10.16	4.45	35.44	
20/11/2012	10.89	1.82	15.9	18.65	48.35	6.3	102.6	2.93	16.52	2.7	4.79	15.8	15.22	8.75	11.11	1.63	12.07	24.75	3.96	2.08	9.26	20.3	5.05	2.08	11.52	19.62	2.81	36.27	16.16	1.82	5.67	1.42	10.15	4.45	36	
19/11/2012	10.72	1.76	15.75	18.68	48.24	6.28	102.7	2.96	16.26	2.68	4.63	15.8	15.22	8.83	11.12	1.56	12.16	24.78	3.96	2.04	9.28	20.29	4.95	2.1	11.72	19.55	2.85	35.84	16.08	1.81	5.66	1.28	10.17	4.41	36.68	
16/11/2012	10.58	1.84	15.61	18.77	47.41	6.11	101	2.92	15.9	2.59	4.71	15.6	14.86	8.52	10.93	1.55	12.01	24.85	3.84	1.98	8.99	19.7	5	1.99	11.47	18.97	2.85	35.25	15.65	1.78	5.48	1.27	10.01	4.2	36.14	
15/11/2012	10.55	1.92	15.67	18.85	47.54	6.27	102.4	2.99	16	2.65	4.72	15.73	14.8	8.84	10.98	1.59	12.04	25.15	3.91	2.01	8.7	19.93	5	2.01	11.71	19.04	2.85	35	15.76	1.82	5.62	1.3	10.11	4.15	36.61	
14/11/2012	10.6	1.99	15.55	19	44.91	6.24	101	2.98	15.85	2.62	4.81	15.93	14.9	8.98	10.94	1.65	11.86	25.45	3.89	2.07	8.65	19.96	5.09	2.01	11.96	18.95	2.9	35.14	15.23	1.8	5.59	1.28	10.14	4.22	36.09	
13/11/2012	10.72	2.15	16.08	19.36	45.57	6.23	102.4	3.02	15.98	2.62	4.86	15.66	14.89	9.41	10.97	1.68	11.79	25.6	3.87	2.11	8.59	19.98	5.09	2.01	12.12	19.02	5.13	35.35	15.26	1.8	5.63	1.35	10.13	4.17	34.8	
12/11/2012	10.64	2.4	15.73	19.29	45.33	6.02	102.3	3.02	16	2.65	4.86	15.69	14.91	9.54	10.71	1.66	11.85	25.24	3.77	2.12	8.58	19.73	4.9	2.01	12.15	19	5.85	35.29	15.07	1.79	5.43	1.39	9.97	4.22	35.03	
09/11/2012	10.81	2.45	15.98	19.33	46	6.09	105	2.99	16.1	2.69	4.87	15.4	14.78	9.75	11.02	1.7	11.88	25.3	3.79	2.14	8.65	20	4.78	2.04	12.05	19.31	5.59	35.24	15.2	1.83	5.5	1.42	10.03	4.18	35.38	
08/11/2012	11.09	2.5	16.03	18.8	46.08	6.09	108.1	3.05	16.2	2.73	4.88	15.28	15.07	9.73	10.9	1.75	11.87	25.33	3.84	2.12	8.58	19.44	4.75	2.08	11.91	19.38	5.59	35.56	15.12	1.86	5.52	1.43	10	4.37	35.85	
07/11/2012	11.66	2.48	16.24	19	46.16	6.09	110.1	3.07	16.25	2.8	4.93	15.72	15.27	9.88	10.91	1.7	11.92	25.35	3.86	2.16	8.72	19.57	4.82	2.03	12.02	19.61	5.76	36.16	15.02	1.89	5.52	1.44	10	4.22	36.6	

Tabla 1. Datos primarios (continuación)

A continuación se pueden ver todos los datos de las empresas normalizados a 0 para, así, poder ver más claramente cómo van variando las acciones en cada empresa.

Fecha	ABE	ABG	ACS	AMS	ANA	BBVA	BKIA	BKT	BME	CABK	DIA	ELE	ENG	FCC	FER	GAM	GAS	GRF	IBE	ICAG	IDR	ITX	JAZ	MAP	MTS	OHL	POP	REE	REP	SAB	SAN	SCYR	TEF	TLS	TRE	
02/01/2015	0,009	0,066	0,009	-0,007	0,015	0,009	0,024	0,034	0,023	0,034	0,016	-0,028	-0,010	0,012	0,003	0,003	0,011	-0,004	0,031	0,065	-0,003	0,001	0,045	0,004	0,066	-0,003	0,005	0,009	
31/12/2014	0,006	-0,032	0,002	0,013	0,003	-0,001	0,000	-0,012	-0,003	-0,002	-0,009	0,004	0,006	-0,009	-0,001	-0,001	-0,007	-0,004	-0,003	-0,010	-0,012	-0,001	0,009	-0,003	-0,031	0,003	0,001	0,004	
30/12/2014	-0,013	-0,041	-0,011	-0,002	-0,025	-0,014	-0,008	0,003	-0,009	-0,009	-0,005	-0,005	-0,015	-0,008	-0,005	-0,003	-0,010	-0,013	-0,025	-0,016	0,003	-0,011	-0,014	-0,017	-0,042	-0,016	-0,009	-0,018	
29/12/2014	-0,008	0,000	-0,011	-0,014	-0,026	-0,006	-0,038	-0,022	-0,011	-0,016	0,018	0,000	-0,003	-0,005	-0,003	0,000	-0,007	0,005	-0,009	-0,027	-0,015	-0,009	-0,013	-0,004	-0,025	-0,014	-0,006	-0,002	
24/12/2014	0,004	0,000	0,002	0,011	0,003	-0,002	0,008	0,003	0,011	-0,004	-0,009	0,006	-0,001	-0,002	0,000	0,002	-0,003	-0,004	-0,012	-0,002	0,009	0,003	-0,004	-0,001	0,006	0,002	0,004	-0,002	
23/12/2014	0,005	-0,005	0,011	0,001	0,016	0,016	0,024	-0,003	-0,014	0,011	0,016	0,019	0,020	-0,007	0,007	0,001	0,007	0,020	0,025	0,009	0,008	0,014	0,009	0,013	0,003	0,009	0,018	0,006	
22/12/2014	0,012	0,015	0,023	0,007	0,003	-0,009	0,000	0,007	0,014	0,000	0,009	0,004	0,005	0,017	0,005	0,000	0,000	-0,021	-0,002	0,005	0,001	-0,029	0,004	0,000	-0,003	0,003	0,010	-0,007	
19/12/2014	0,008	-0,030	-0,008	0,013	0,006	-0,006	-0,045	-0,013	-0,003	-0,002	0,018	0,016	-0,030	-0,010	0,004	0,000	0,003	0,011	0,029	-0,002	0,000	0,001	-0,009	0,001	-0,009	-0,015	-0,013	0,005	
18/12/2014	0,034	0,015	0,052	0,035	0,051	0,032	0,056	0,019	0,023	0,040	0,040	0,025	0,036	0,041	0,057	0,002	0,029	0,034	0,010	0,031	0,039	0,025	0,032	0,037	0,050	0,024	0,033	0,015	
17/12/2014	-0,013	0,010	0,008	-0,016	-0,013	-0,010	-0,016	-0,012	-0,017	-0,002	0,000	0,020	-0,008	-0,010	-0,007	0,000	0,015	0,003	0,005	-0,009	0,003	0,003	-0,005	0,001	-0,003	-0,002	-0,018	0,050	
16/12/2014	0,017	0,000	0,023	0,005	0,031	0,018	0,024	0,042	0,046	0,026	0,032	0,011	0,031	0,051	0,016	0,002	0,015	0,026	0,011	0,044	0,024	-0,004	0,038	0,027	0,041	-0,007	0,032	0,018	
15/12/2014	-0,021	-0,034	-0,013	-0,023	-0,030	-0,029	-0,031	-0,026	-0,017	-0,019	-0,034	-0,020	-0,015	0,006	-0,023	-0,002	-0,053	-0,036	-0,005	-0,022	-0,022	-0,030	-0,014	-0,021	-0,027	-0,030	-0,006	-0,019	
12/12/2014	-0,016	-0,019	-0,017	0,018	-0,025	-0,033	-0,030	-0,053	-0,022	-0,012	-0,015	-0,008	-0,011	-0,024	-0,030	0,000	-0,031	-0,028	-0,031	-0,023	-0,020	-0,060	-0,027	-0,033	-0,035	-0,036	-0,030	-0,011	
11/12/2014	-0,002	0,035	-0,001	0,004	-0,010	-0,001	0,015	0,004	0,008	-0,005	0,004	-0,009	-0,005	-0,032	0,043	-0,001	0,003	-0,014	-0,026	0,000	0,000	-0,011	0,000	0,004	-0,010	0,000	0,016	0,012	
10/12/2014	0,004	0,005	0,007	-0,003	-0,005	-0,012	0,008	0,004	-0,010	-0,011	-0,011	0,003	0,001	-0,032	-0,012	0,001	-0,007	-0,023	-0,020	-0,014	0,006	-0,011	-0,013	-0,007	-0,022	0,000	0,004	-0,004	
09/12/2014	-0,032	-0,029	-0,038	-0,019	-0,043	-0,027	-0,037	-0,038	-0,037	-0,035	-0,056	-0,015	-0,037	-0,074	-0,032	-0,001	-0,030	-0,023	-0,039	-0,038	-0,024	-0,024	-0,047	-0,036	-0,027	-0,025	-0,012	-0,015	
08/12/2014	-0,010	-0,019	-0,013	0,002	-0,016	-0,012	0,008	0,016	-0,007	-0,009	-0,009	-0,007	0,000	0,035	-0,008	0,001	0,000	-0,019	-0,016	0,002	-0,013	-0,015	-0,004	-0,012	-0,009	-0,009	-0,002	-0,026	
05/12/2014	0,010	0,000	0,033	-0,001	0,042	0,035	0,000	0,040	0,037	0,043	0,027	0,019	0,006	0,046	0,023	0,002	0,027	0,013	0,023	0,047	0,021	0,020	0,031	0,034	0,051	0,036	-0,001	-0,007	
04/12/2014	-0,027	0,061	-0,030	-0,002	-0,023	-0,033	-0,063	-0,030	-0,026	-0,033	-0,026	-0,010	-0,014	0,033	-0,022	-0,007	-0,017	-0,017	-0,069	-0,047	-0,018	-0,017	-0,038	-0,033	-0,031	-0,016	0,004	-0,023	
03/12/2014	0,003	0,031	0,022	0,002	0,020	0,006	0,014	0,004	0,008	0,016	0,021	0,008	0,008	0,032	0,008	-0,004	0,010	0,009	-0,003	0,014	0,017	0,012	0,026	0,015	0,019	0,015	0,014	0,006	
02/12/2014	-0,003	0,005	-0,005	0,001	-0,019	0,012	0,029	0,014	0,012	0,030	0,007	0,005	0,003	0,038	0,000	-0,010	0,014	0,015	0,003	0,030	-0,006	0,018	0,031	0,013	0,029	0,010	0,022	0,012	
01/12/2014	0,001	-0,069	-0,013	0,002	0,009	-0,015	-0,035	-0,017	-0,007	-0,020	-0,005	-0,003	-0,003	-0,306	-0,001	0,000	-0,003	-0,015	-0,005	-0,025	-0,006	-0,018	-0,018	-0,010	-0,016	-0,008	-0,003	-0,038	
28/11/2014	0,006	0,005	-0,003	0,001	0,007	0,007	0,000	0,011	-0,005	0,000	0,002	0,009	0,001	-0,008	0,006	0,002	0,003	-0,008	0,003	-0,016	0,013	-0,007	0,000	0,010	-0,025	0,011	0,011	-0,025	
27/11/2014	0,013	-0,051	0,006	0,018	-0,002	0,006	0,014	0,013	-0,006	0,014	-0,004	0,022	0,003	0,035	0,006	-0,002	0,010	-0,011	0,017	0,014	0,004	-0,014	0,013	0,006	0,000	0,011	-0,005	-0,026	
...

Tabla 2. Datos normalizados

Fecha	ABE	ABG	ACS	AMS	ANA	BBVA	BKIA	BKT	BME	CABK	DIA	ELE	ENG	FCC	FER	GAM	GAS	GRF	IBE	ICAG	IDR	ITX	JAZ	MAP	MTS	OHL	POP	REE	REP	SAB	SAN	SCYR	TEF	TL5	TRE	
...
14/12/2012	0,014	0,010	0,000	0,001	-0,002	0,007	-0,014	-0,007	0,011	-0,019	-0,013	0,004	-0,012	0,003	0,003	0,007	-0,013	0,005	0,015	0,000	0,010	-0,003	-0,027	0,000	0,027	0,000	0,037	0,012	
13/12/2012	0,026	0,038	-0,006	0,001	0,038	0,007	-0,013	0,003	0,008	0,008	-0,008	-0,013	0,010	-0,009	-0,006	0,011	0,022	0,002	0,027	-0,007	0,001	0,004	0,014	0,007	0,050	0,007	0,014	0,000	
12/12/2012	0,016	-0,011	0,031	-0,001	-0,009	0,012	0,038	0,027	0,001	-0,004	0,024	0,020	0,016	0,012	0,002	-0,002	0,047	0,014	-0,003	0,000	-0,002	0,001	0,009	0,010	0,007	0,006	0,041	-0,002	
11/12/2012	0,019	0,000	0,023	0,007	0,001	0,017	0,040	-0,023	0,011	0,008	0,020	0,030	0,008	0,037	0,028	0,030	0,005	0,020	0,023	0,004	0,028	0,017	0,014	0,009	0,000	0,013	0,004	0,003	
10/12/2012	-0,005	0,022	0,012	0,023	0,003	-0,009	-0,027	-0,010	-0,006	-0,022	-0,011	0,012	0,000	-0,007	0,000	-0,021	0,005	0,009	-0,014	0,025	0,005	-0,009	-0,014	-0,017	0,022	-0,007	-0,012	0,010	
07/12/2012	-0,005	-0,037	0,001	-0,022	0,042	-0,009	-0,049	-0,007	0,005	-0,022	-0,013	-0,002	0,002	0,004	0,009	-0,015	0,005	-0,018	-0,016	-0,083	0,001	-0,020	0,000	-0,008	-0,021	-0,010	-0,006	-0,003	
06/12/2012	0,006	0,000	0,016	0,002	0,025	0,006	-0,026	-0,019	0,002	-0,021	-0,002	-0,020	0,021	-0,009	0,013	0,019	-0,014	0,013	-0,005	-0,051	0,000	-0,007	0,019	0,003	0,000	0,006	0,006	-0,001	
05/12/2012	0,008	-0,010	-0,016	0,006	0,031	0,006	0,024	0,023	0,029	-0,007	-0,011	0,043	-0,001	0,019	-0,021	0,027	0,000	0,020	0,021	0,023	-0,003	-0,002	0,019	-0,008	0,000	-0,006	0,038	0,000	
04/12/2012	0,006	-0,035	0,000	0,010	0,014	0,008	0,064	0,000	0,003	0,000	-0,004	0,006	0,010	-0,006	-0,028	-0,004	0,000	0,014	0,031	-0,013	0,001	0,002	-0,009	0,005	0,022	0,005	-0,008	-0,010	
03/12/2012	-0,004	-0,029	-0,024	-0,002	0,008	-0,003	-0,067	-0,007	0,014	-0,031	-0,002	0,028	-0,024	-0,007	-0,016	0,006	-0,005	0,009	-0,022	-0,025	0,003	-0,001	-0,014	-0,002	0,000	-0,004	0,066	-0,013	
30/11/2012	-0,003	0,010	-0,010	-0,012	0,022	-0,005	-0,253	0,000	-0,008	0,000	-0,008	-0,016	0,019	-0,003	-0,002	-0,028	-0,009	-0,008	-0,024	-0,024	-0,008	-0,016	0,000	0,003	-0,021	-0,003	0,007	0,025	
29/11/2012	0,018	0,010	0,022	0,013	0,017	0,031	-0,001	0,048	-0,001	0,039	-0,004	0,013	0,027	0,037	0,016	0,021	0,038	0,030	0,021	0,051	0,006	0,012	0,054	0,023	0,045	0,009	0,056	-0,020	
28/11/2012	-0,007	-0,020	-0,009	-0,015	-0,009	-0,009	-0,093	-0,010	0,016	0,014	-0,004	0,004	-0,011	-0,016	0,014	-0,009	-0,041	-0,003	-0,005	0,091	-0,014	-0,001	0,005	-0,002	-0,022	-0,008	-0,021	-0,015	
27/11/2012	0,015	0,020	-0,012	0,013	0,007	-0,002	0,050	0,000	-0,018	0,004	0,017	-0,014	0,007	0,001	-0,005	-0,015	-0,009	-0,003	0,003	0,059	-0,004	-0,013	0,015	-0,002	0,000	-0,009	0,024	0,005	
26/11/2012	-0,013	-0,024	0,018	-0,002	-0,002	-0,006	-0,003	0,007	-0,009	0,004	-0,012	0,003	0,002	-0,020	0,005	0,043	-0,009	-0,015	-0,003	-0,015	0,002	-0,007	0,015	-0,005	-0,042	-0,006	-0,027	-0,002	
23/11/2012	0,002	-0,010	0,025	-0,026	0,002	0,005	-0,005	-0,010	0,003	0,004	0,004	0,009	-0,010	0,017	-0,005	0,014	0,032	0,006	0,007	-0,004	0,004	0,010	0,053	0,007	0,007	0,004	-0,016	0,009	
22/11/2012	0,017	0,015	0,002	-0,002	0,000	0,011	0,008	0,007	0,013	0,018	0,000	-0,003	0,009	0,009	0,018	0,010	-0,005	0,005	0,034	-0,004	0,002	0,014	0,016	0,011	0,014	0,006	-0,002	0,009	
21/11/2012	0,004	0,121	-0,002	-0,007	-0,006	0,010	-0,016	0,003	0,013	0,004	0,004	-0,007	-0,008	0,019	-0,003	-0,006	0,043	0,003	-0,015	-0,014	-0,006	0,011	0,011	0,007	-0,014	0,001	0,000	-0,016	
20/11/2012	0,016	0,034	0,010	-0,002	0,002	0,003	-0,001	-0,010	0,016	0,007	0,035	0,000	0,000	-0,009	0,000	0,020	-0,010	-0,017	0,004	-0,014	0,012	0,005	0,006	0,002	0,109	-0,002	0,009	-0,019	
19/11/2012	0,013	-0,043	0,009	-0,005	0,018	0,028	0,017	0,014	0,023	0,035	-0,017	0,013	0,024	0,036	0,030	-0,010	0,055	0,022	0,031	0,000	0,017	0,027	0,017	0,033	0,008	0,016	0,050	0,015	
16/11/2012	0,003	-0,042	-0,004	-0,004	-0,003	-0,026	-0,014	-0,023	-0,006	-0,023	-0,002	-0,008	0,004	-0,036	-0,012	0,000	-0,010	-0,020	-0,004	0,000	0,007	-0,007	-0,022	-0,025	-0,023	-0,010	0,012	-0,013	
15/11/2012	-0,005	-0,035	0,008	-0,008	0,059	0,005	0,014	0,003	0,009	0,011	-0,019	-0,013	-0,007	-0,016	-0,002	-0,018	0,000	-0,021	0,005	-0,017	-0,004	0,035	0,011	0,005	0,016	-0,003	-0,017	0,014	
14/11/2012	-0,011	-0,074	-0,033	-0,019	-0,014	0,002	-0,014	-0,013	-0,008	0,000	-0,010	0,017	0,001	-0,046	-0,001	0,000	0,000	-0,013	-0,004	-0,435	-0,006	-0,002	0,000	-0,007	-0,052	0,001	0,012	0,037	
13/11/2012	0,008	-0,104	0,022	0,004	0,005	0,035	0,001	0,000	-0,001	-0,011	0,000	-0,002	-0,001	-0,014	0,013	0,039	0,000	-0,002	0,001	-0,123	0,002	0,013	0,006	0,037	-0,029	0,016	-0,012	-0,007	
12/11/2012	-0,016	-0,020	-0,016	-0,002	-0,015	-0,011	-0,026	0,010	-0,006	-0,015	-0,002	0,019	0,009	-0,022	-0,014	0,025	-0,015	0,008	-0,016	0,047	0,001	-0,009	-0,022	-0,013	-0,021	-0,006	0,010	-0,010	
09/11/2012	-0,025	-0,020	-0,003	0,028	-0,002	0,000	-0,029	-0,020	-0,006	-0,015	-0,002	0,008	-0,019	0,002	0,029	0,006	-0,019	0,012	-0,004	0,000	-0,009	0,005	-0,016	-0,004	-0,007	0,003	-0,043	-0,013	
08/11/2012	-0,049	0,008	-0,013	-0,011	-0,002	0,000	-0,018	-0,007	-0,003	-0,025	-0,010	-0,028	-0,013	-0,015	-0,007	-0,015	0,025	-0,009	-0,012	-0,030	-0,017	0,007	-0,016	0,000	-0,007	0,000	0,036	-0,020	

Tabla 2. Datos normalizados (continuación)

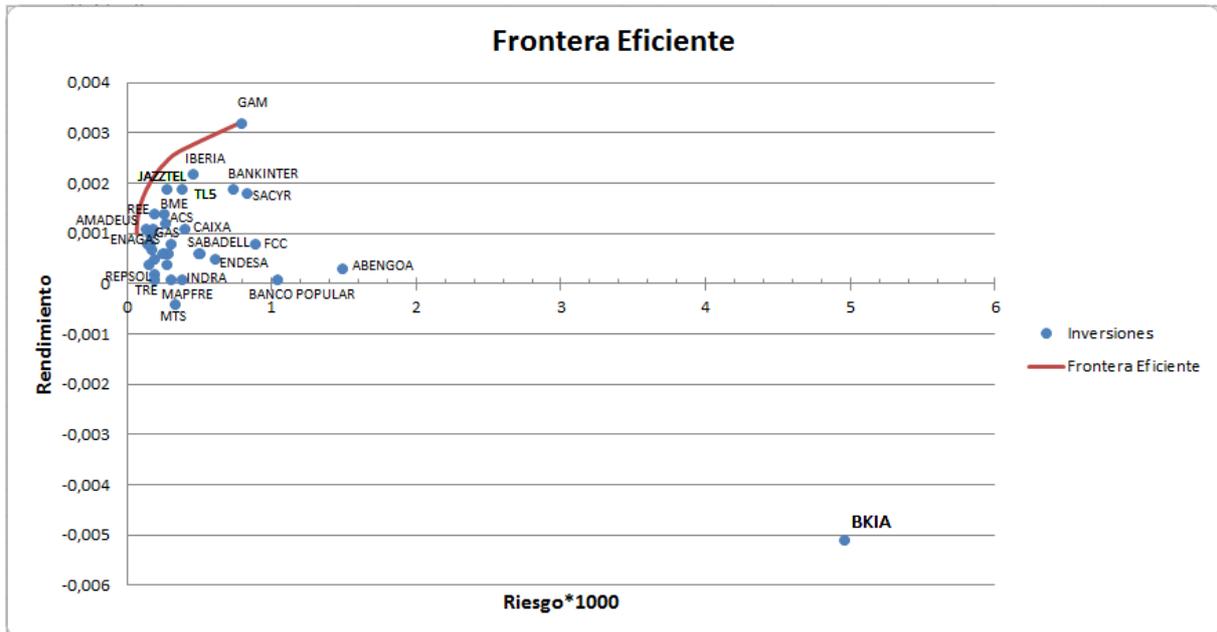
	Rentabilidad (Mean)	Riesgo (Variance)
ABE	0.0007	0.00017
ABG	0.0003	0.00149
ACS	0.0012	0.00026
AMS	0.0011	0.00013
ANA	0.0006	0.0005
BBVA	0.0006	0.00025
BKIA	-0.0051	0.00495
BKT	0.0019	0.00073
BME	0.0014	0.00025
CABK	0.0011	0.0004
DIA	0.0004	0.00027
ELE	0.0005	0.00061
ENG	0.001	0.00016
FCC	0.0008	0.00088
FER	0.0008	0.00016
GAM	0.0032	0.00079
GAS	0.0011	0.00018
GRF	0.0006	0.00028
IBE	0.0008	0.00014
ICAG	0.0022	0.00045
IDR	0.0001	0.00038
ITX	0.0005	0.00019
JAZ	0.0019	0.00027
MAP	0.0008	0.0003
MTS	-0.0004	0.00033
OHL	0.0001	0.0003
POP	0.0001	0.00104
REE	0.0014	0.00019
REP	0.0002	0.00019
SAB	0.0006	0.00049
SAN	0.0006	0.00024
SCYR	0.0018	0.00083
TEF	0.0004	0.00015
TL5	0.0019	0.00038
TRE	0.0001	0.00019

Tabla 3. Rendimientos y riesgos 35 empresas

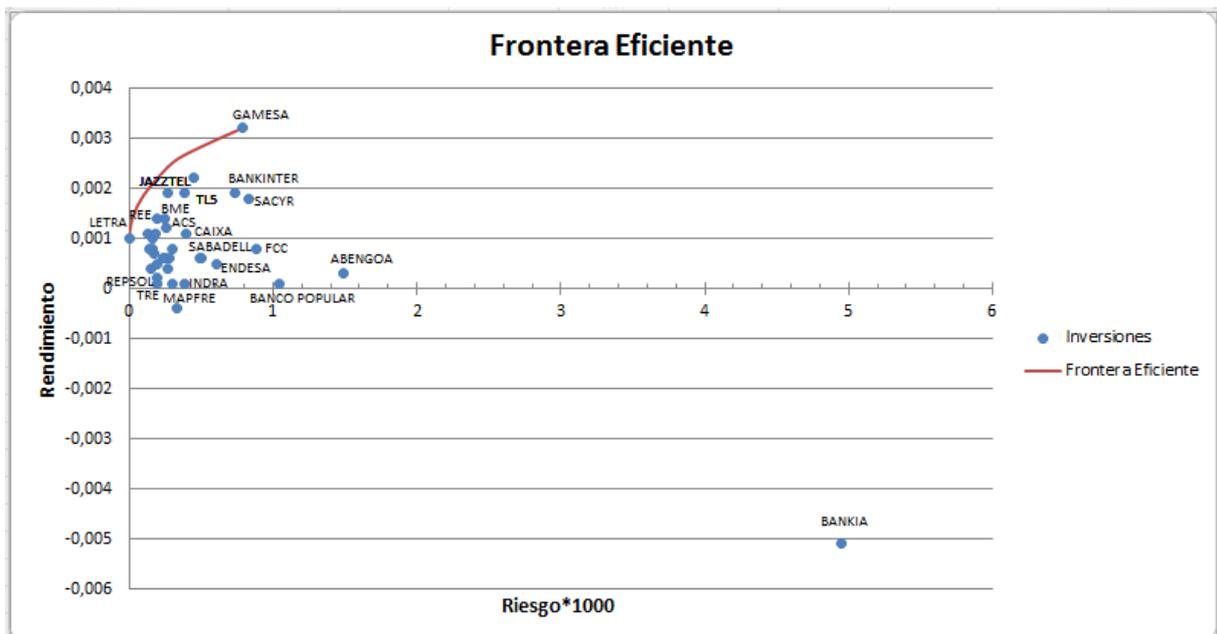
mu	AMS	BME	ELE	ENG	FER	GAM	GAS	GRF	IBE	ICAG	ITX	JAZ	REE	TEF	TL5	TRE	Rendimiento	Riesgo	SR
0						1											0,003206041	0,000794519	0,1109
1						0,9677				0,0323							0,003172095	0,000759784	0,1122
2						0,5171				0,1958		0,2871					0,002623008	0,000356847	0,1346
3						0,3415				0,1971		0,3617	0,0325		0,0672		0,002373599	0,00025508	0,1436
4						0,2427				0,1731		0,3517	0,1492		0,0826		0,002176864	0,000197711	0,1491
5	0,0692	0,036				0,1796				0,1431		0,3214	0,1741		0,0767		0,001999516	0,000158133	0,1526
6	0,1344	0,055		0,0092		0,1374				0,1195		0,2964	0,1785		0,0696		0,001865099	0,000133539	0,1545
7	0,1751	0,0654		0,0465		0,1075				0,1006		0,2763	0,1668		0,062		0,001757151	0,000116833	0,1552
8	0,2056	0,0731		0,0744		0,085				0,0864		0,2612	0,1579		0,0563		0,001676186	0,000105989	0,1550
9	0,2293	0,0791		0,0962		0,0676				0,0754		0,2495	0,1511		0,0519		0,001613215	9,8555E-05	0,1544
10	0,2483	0,0839		0,1136		0,0536				0,0666		0,2401	0,1456		0,0484		0,001562838	9,32374E-05	0,1536
11	0,2638	0,0878		0,1278		0,0422				0,0594		0,2324	0,1411		0,0455		0,001521621	8,93031E-05	0,1526
12	0,2758	0,0906		0,1368		0,0322	0,0083			0,0533		0,2255	0,1349		0,0427		0,001484917	8,61074E-05	0,1514
13	0,2857	0,0928		0,1437		0,0235	0,0172			0,0482		0,2196	0,129		0,0402		0,001453299	8,35739E-05	0,1502
14	0,2942	0,0948		0,1496		0,0161	0,0249			0,0438		0,2145	0,124		0,0381		0,001426198	8,15637E-05	0,1491
15	0,3016	0,0935		0,1548		0,0097	0,0316			0,04		0,21	0,1196		0,0362		0,001402711	7,99419E-05	0,1479
17	0,3137	0,0991		0,1634			0,0422			0,0336		0,2026	0,1124		0,033		0,001365418	7,7597E-05	0,1459
20	0,3255	0,0991		0,1735	0,0071		0,0481		0,0031	0,0227		0,1917	0,103		0,0262		0,001333703	7,58903E-05	0,1439
25	0,3328	0,0949		0,1791	0,03		0,043		0,0328	0,0077		0,1765	0,0874		0,0159		0,001275006	7,32489E-05	0,1396
30	0,3372	0,0919		0,1825	0,0446		0,0396		0,0523			0,1662	0,0772		0,0084		0,001238	7,18866E-05	0,1366
35	0,3393	0,0892		0,1846	0,0536		0,0375		0,0654			0,1586	0,0702		0,0017		0,001216777	7,12296E-05	0,1347
40	0,3375	0,0853	0,0012	0,1844	0,054		0,0339		0,0721		0,0047	0,1521	0,064		0,0107		0,001190379	7,05246E-05	0,1322
45	0,3356	0,0819	0,0028	0,1839	0,053		0,0307		0,0766		0,0098	0,1468	0,0588		0,0199		0,001168823	7,00156E-05	0,1301
50	0,3341	0,0792	0,0041	0,1836	0,0523		0,0281		0,0801		0,0139	0,1426	0,0547		0,0273		0,001151578	6,96516E-05	0,1284
55	0,3328	0,077	0,0052	0,1833	0,0516		0,026		0,083		0,0172	0,1391	0,0513		0,0333		0,001137474	6,93823E-05	0,1270
60	0,3315	0,0751	0,0061	0,1829	0,0508		0,0243	0,0011	0,0853		0,0199	0,1362	0,0484		0,0384		0,001125338	6,91709E-05	0,1257
65	0,3304	0,0736	0,0068	0,1825	0,05		0,0227	0,0022	0,0873		0,0222	0,1337	0,046		0,0427		0,001115011	6,90054E-05	0,1246
70	0,3294	0,0722	0,0074	0,1823	0,0493		0,0215	0,0031	0,0889		0,0241	0,1316	0,0438		0,0464		0,001106182	6,88744E-05	0,1237
75	0,3285	0,0711	0,008	0,182	0,0487		0,0204	0,0039	0,0904		0,0258	0,1297	0,042		0,0496		0,001098487	6,87681E-05	0,1228
100	0,3255	0,067	0,0099	0,1811	0,0467		0,0163	0,0067	0,0956		0,0317	0,1233	0,0356		0,0607		0,001071636	6,84549E-05	0,1199
125	0,3235	0,0642	0,011	0,1807	0,0449		0,0136	0,0083	0,0959		0,0346	0,1193	0,0317	0,005	0,0672		0,001053431	6,82917E-05	0,1178
150	0,322	0,0623	0,0117	0,1805	0,0435		0,0117	0,0094	0,0952		0,0363	0,1166	0,029	0,0101	0,0716		0,001040588	6,81975E-05	0,1163
175	0,321	0,0609	0,0122	0,1804	0,0425		0,0104	0,0102	0,0946		0,0376	0,1147	0,0272	0,0137	0,0747		0,001031415	6,81407E-05	0,1153
200	0,3202	0,0599	0,0126	0,1803	0,0417		0,0094	0,0107	0,0942		0,0385	0,1132	0,0257	0,0164	0,077		0,001024535	6,81039E-05	0,1145
500	0,3169	0,0555	0,0142	0,18	0,0386		0,0051	0,0131	0,0925		0,0424	0,1072	0,0198	0,0278	0,0869		0,000995636	6,80027E-05	0,1110
550	0,3167	0,0553	0,0143	0,1799	0,0384		0,0048	0,0133	0,0924		0,0426	0,1068	0,0195	0,0285	0,0874		0,000993885	6,79994E-05	0,1108

Tabla 4. Modelo de Markowitz 35 empresas

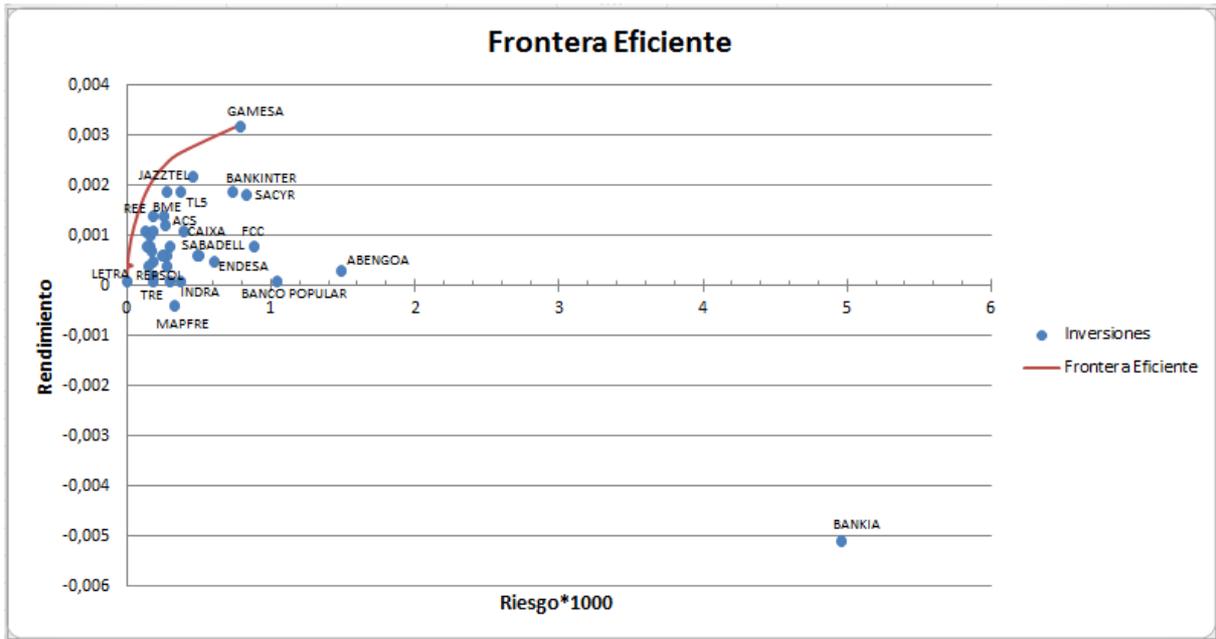
7.3. Anexo III. Gráficos



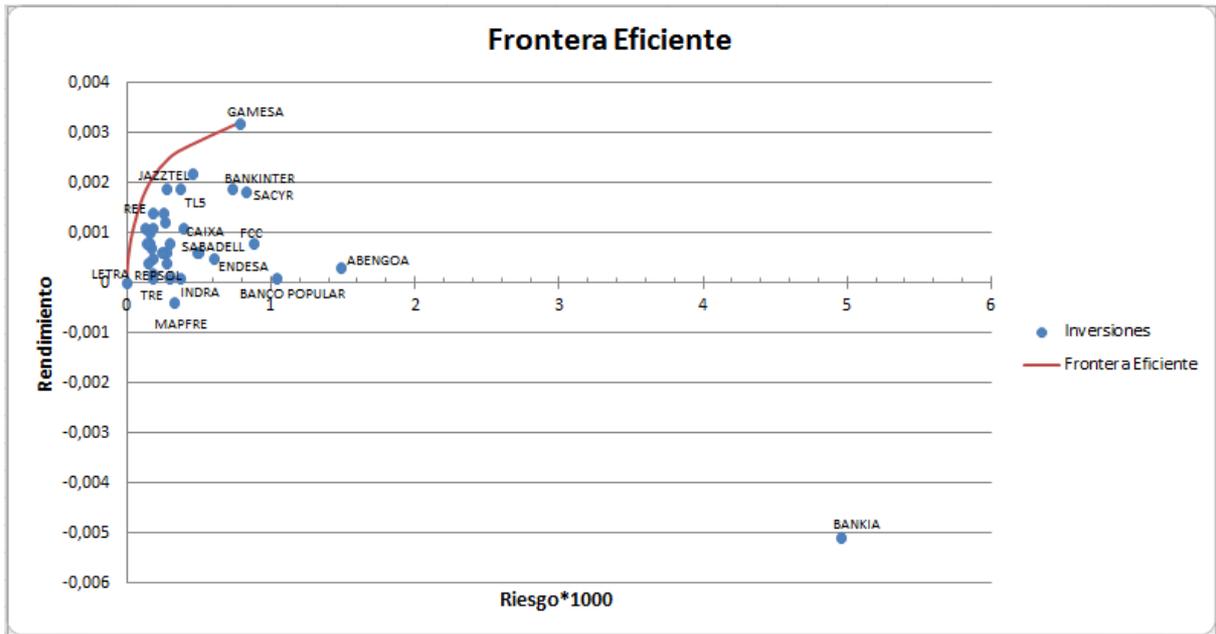
Gráfica 1. Frontera eficiente 35 empresas



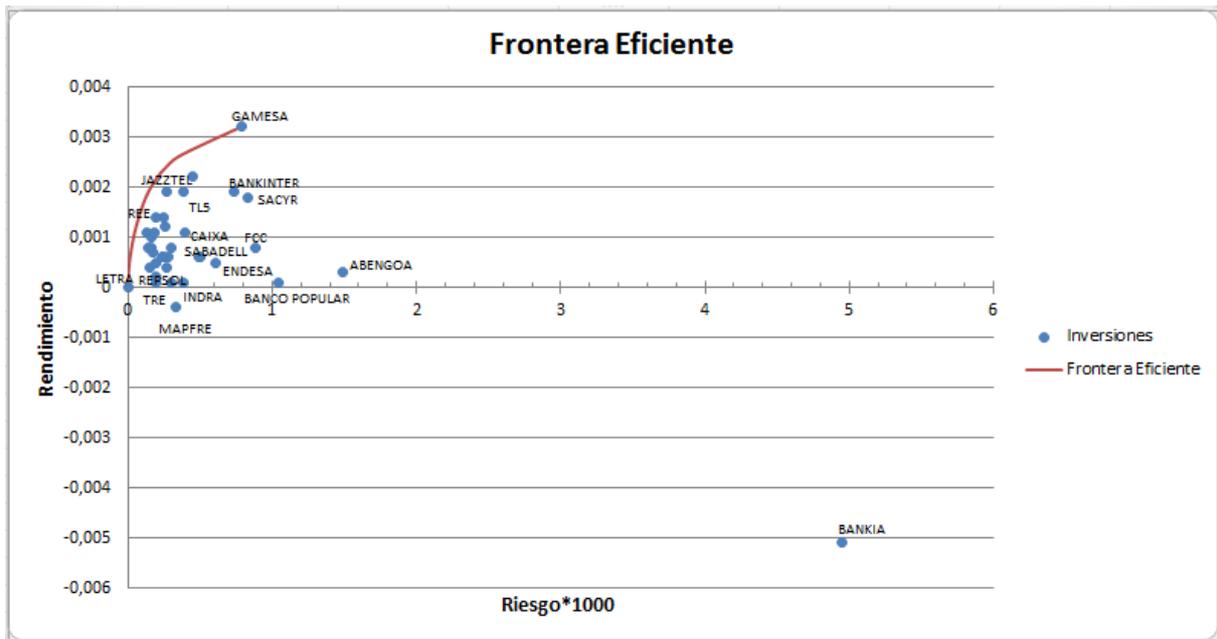
Gráfica 2. Frontera eficiente 35 empresas y letra del Tesoro 0.001



Gráfica 3. Frontera eficiente 35 empresas y letra del Tesoro 0.0001



Gráfica 4. Frontera eficiente 35 empresas y letra del Tesoro 0.00001



Gráfica 5. Frontera eficiente 35 empresas y letra del Tesoro 0.00001

7.4. Anexo IV. AMPL

En este apartado se puede ver cómo se ha trabajado con el software AMPL. Se puede observar la cantidad de activos (empresas) con las cuales se ha trabajado.

7.4.1. Modelo de Markowitz Sin Frontera Eficiente. 35 Empresas

```
reset;
set ACTIVOS; # asset categories
set T := {1..547}; # days
param R {T,ACTIVOS};
param mean {j in ACTIVOS}
    := ( sum{i in T} R[i,j] )/card(T);
param Rtilde {i in T, j in ACTIVOS}
    := R[i,j] - mean[j];
param Cov {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
    := sum {i in T} (Rtilde[i,j]*Rtilde[i,k]) / card(T);
#param Corr {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
# := Cov[j,k]/sqrt(Cov[j,j]*Cov[k,k]);
param r0;
param k;
var x{ACTIVOS} >=0;
minimize riesgo: sum{i in ACTIVOS, j in ACTIVOS} Cov[i,j]*x[i]*x[j];
subject to tot_mass:
    sum{j in ACTIVOS} x[j] = 1;
subject to rest_target:
    sum{j in ACTIVOS} x[j]*mean[j] >= k;
data;
set ACTIVOS :=
ABE ABG ACS AMS ANA BBVA BKIA BKT BME CABK DIA ELE ENG FCC FER GAM GAS GRF IBE ICAG IDR ITX JAZ MAP MTS OHL POP REE REP SAB SAN SCYR TEF TL5 TRE;
```

```

param R:
ABE ABG ACS AMS ANA BBVA BKIA BKT BME CABK DIA ELE ENG FCC FER GAM GAS GRF IBE ICAG IDR ITX JAZ MAP MTS OHL POP REE REP SAB SAN SCYR TEF TL5
TRE:=
1      0.00852099817407185  0.0655737704918032   0.00862961684501208  -0.0069507404049563   0.0151245551601422   0.00891719745222934   .....
2      0.0055079559363525   -0.0317460317460317   0.0020754064337599   0.0131659522351502   0.00303408888095666  -0.00127226463104334   .....
3      -0.0132850241545893   -0.0406091370558376   -0.0106091718001368   -0.00213871066300031  -0.0248868778280543  -0.0138017565872019   .....
.
.
.
545    -0.0157261794634598   -0.0204081632653062   -0.0156445556946183  -0.00206932229694771  -0.0145652173913044  -0.0114942528735633   .....
546    -0.0252479711451758   -0.01999999999999999  -0.00311915159076736  0.028191489361702    -0.00173611111111107    0                       .....
547    -0.048885077186964     0.00806451612903226   -0.0129310344827585   -0.0105263157894736   -0.00173310225303289    0                       .....
;

param k := 0.00008;
param r0 := 0.00005;
show;
expand;
display Cov;
printf: "-----\n\n";
printf: "          Asset   Mean  Variance StandardDeviation\n";
printf {j in ACTIVOS}: "%45s %10.4f %10.5f %10.5f\n",
      j, mean[j], Cov[j,j],sqrt(Cov[j,j]);
printf: "\n-----\n";
option solver minos;
option solver_msg 0;
solve;
printf: "-----\n\n";
printf: "Cartera optima\n";
display x;
printf: "\n Mean= %10.12f, Variance = %10.12f, Sharpe Ratio = %10.3f\n",
      sum{j in ACTIVOS} mean[j]*x[j],
      riesgo,
      (sum{i in ACTIVOS} x[i] * mean[i]- r0)/(sqrt(sum{i in ACTIVOS, j in ACTIVOS} Cov[i,j]*x[i]*x[j]));

```

7.4.2. Modelo de Markowitz Sin Frontera Eficiente. 35 empresas y Letras

```
reset;
set ACTIVOS; # asset categories
set T := {1..547}; # days
param R {T,ACTIVOS};
param mean {j in ACTIVOS}
    := ( sum{i in T} R[i,j] )/card(T);
param Rtilde {i in T, j in ACTIVOS}
    := R[i,j] - mean[j];
param Cov {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
    := sum {i in T} (Rtilde[i,j]*Rtilde[i,k]) / card(T);
#param Corr {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
# := Cov[j,k]/sqrt(Cov[j,j]*Cov[k,k]);
param r0;
param k;
var x{ACTIVOS} >=0;
minimize riesgo: sum{i in ACTIVOS, j in ACTIVOS} Cov[i,j]*x[i]*x[j];
subject to tot_mass:
    sum{j in ACTIVOS} x[j] = 1;
subject to rest_target:
    sum{j in ACTIVOS} x[j]*mean[j] >= k;
data;
set ACTIVOS :=
ABE ABG ACS AMS ANA BBVA BKIA BKT BME CABK DIA ELE ENG FCC FER GAM GAS GRF IBE ICAG IDR ITX JAZ MAP MTS OHL POP REE REP SAB SAN SCYR TEF TL5 TRE LETRA;

param R:
ABE ABG ACS AMS ANA BBVA BKIA BKT BME CABK DIA ELE ENG FCC FER GAM GAS GRF IBE ICAG IDR ITX JAZ MAP MTS OHL POP REE REP SAB SAN SCYR TEF TL5 TRE LETRA:=
1 0.00852099817407185 ... .....
.
.
.
547 -0.048885077186964 ... .....
;
```

```

param k:=0.00008;
param r0:=.....;
show;
expand;
display Cov;
printf: "-----\n\n";
printf: "          Asset   Mean  Variance StandardDeviation\n";
printf {j in ACTIVOS}: "%45s %10.4f %10.5f %10.5f\n",
    j, mean[j], Cov[j,j],sqrt(Cov[j,j]);
printf: "\n-----\n";
option solver minos;
option solver_msg 0;
solve;
printf: "-----\n\n";
printf: "Cartera optima\n";
display x;
printf: "\n Mean= %10.12f, Variance = %10.12f, Sharpe Ratio = %10.3f\n",
    sum{j in ACTIVOS} mean[j]*x[j],
    riesgo,
    (sum{i in ACTIVOS} x[i] * mean[i]- r0)/(sqrt(sum{i in ACTIVOS, j in ACTIVOS} Cov[i,j]*x[i]*x[j]));

```

Para el resto de modelos de Markowitz sin frontera eficiente y con letra del Tesoro tenemos que ir añadiendo en la letra, es decir, al final de las 547 filas. Y modificando lo subrayado, e ir poniendo las letras correspondientes. Tenemos como letras: 0, 0.0000025, 0.000025, 0.00005, 0.000075, 0.0001 y 0.0002.

7.4.3. Modelo Maximizando el Ratio de Sharpe

```
reset;
set ACTIVOS; # asset categories
set T := {1..547}; # days
param R {T,ACTIVOS};
param mean {j in ACTIVOS}
    := ( sum{i in T} R[i,j] )/card(T);
param Rtilde {i in T, j in ACTIVOS}
    := R[i,j] - mean[j];
param Cov {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
    := sum {i in T} (Rtilde[i,j]*Rtilde[i,k]) / card(T);
#param Corr {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
# := Cov[j,k]/sqrt(Cov[j,j]*Cov[k,k]);
param return;
var x{ACTIVOS} >=0;

maximize SR:
(sum{i in ACTIVOS} x[i] * mean[i]- return)/(sqrt(sum{i in ACTIVOS, j in ACTIVOS} Cov[i,j]*x[i]*x[j])) ;

subject to tot_mass:
    sum{j in ACTIVOS} x[j] = 1;
data;
set ACTIVOS :=
ABE ABG ACS AMS ANA BBVA BKIA BKT BME CABK DIA ELE ENG FCC FER GAM GAS GRF IBE ICAG IDR ITX JAZ MAP MTS OHL POP REE REP SAB SAN SCYR TEF TL5 TRE;

param R:
ABE ABG ACS AMS ANA BBVA BKIA BKT BME CABK DIA ELE ENG FCC FER GAM GAS GRF IBE ICAG IDR ITX JAZ MAP MTS OHL POP REE REP SAB SAN SCYR TEF TL5 TRE:=
1 0.00852099817407185 0.0655737704918032 ...
.
.
.
547 -0.048885077186964 0.00806451612903226 ...
;
```

```

param return := 0.00005;
show;
expand;
display Cov;
printf: "-----\n\n";
printf: "          Asset   Mean  Variance StandardDeviation\n";
printf {j in ACTIVOS}: "%45s %10.4f %10.5f %10.5f\n",
    j, mean[j], Cov[j,j],sqrt(Cov[j,j]);
printf: "\n-----\n";
option solver minos;
option solver_msg 0;
solve;
printf: "-----\n\n";
printf: "Cartera optima\n";
display x;
printf: "\n Mean= %10.12f, Variance = %10.12f, Sharpe Ratio = %10.3f\n",
    sum{j in ACTIVOS} mean[j]*x[j],
    sum{i in ACTIVOS,j in ACTIVOS} Cov[i,j]*x[i]*x[j],
    SR;
#(sum{i in ACTIVOS} x[i] * mean[i]- return)/sqrt((sum{i ACTIVOS, j in ACTIVOS} Cov[i,j]*x[i]*x[j]))
#(sum{i in ACTIVOS} x[i] * mean[i]- return)/(sum{i in ACTIVOS, j in ACTIVOS} Cov[i,j]*x[i]*x[j])
#;
#};

```

7.4.4. Modelo de Costes de Compra/Venta

```
reset;
set ACTIVOS; # asset categories
set T := {1..547}; # days
param R {T,ACTIVOS};
param mean {j in ACTIVOS}
    := ( sum{i in T} R[i,j] )/card(T);
param Rtilde {i in T, j in ACTIVOS}
    := R[i,j] - mean[j];
param Cov {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
    := sum {i in T} (Rtilde[i,j]*Rtilde[i,k]) / card(T);
#param Corr {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
# := Cov[j,k]/sqrt(Cov[j,j]*Cov[k,k]);
param r0;
param k;
param ct;
# porcentaje pagado de transacción
param xx {ACTIVOS};
#cartera de referencia
param a;
var x{ACTIVOS} >=0;
# cantidad invertida de 1 euro de cada empresa
var c{ACTIVOS}>=0;
# cantidad comprada de 1 euro de cada empresa
var v{ACTIVOS}>=0;
# cantidad vendida de 1 euro de cada empresa

minimize riesgo: sum{i in ACTIVOS, j in ACTIVOS} Cov[i,j]*x[i]*x[j];
subject to tot_mass:
    sum{j in ACTIVOS} (x[j] + ct* (c[j]+v[j]))= 1;
subject to rest_target:
    sum{j in ACTIVOS} x[j]*mean[j] >= k;
subject to res_refer{j in ACTIVOS}:
    x[j] = xx[j]+c[j]-v[j];
data;
```



```

solve;
printf: "-----\n\n";
printf: "Cartera optima\n";
display x;
printf: "Compra optima\n";
display c;
printf: "Venta optima\n";
display v;
printf: "\n Mean= %10.12f, Variance = %10.12f, Sharpe Ratio = %10.3f\n",
    sum{j in ACTIVOS} mean[j]*x[j],
    riesgo,
    (sum{i in ACTIVOS} x[i] * mean[i]- r0)/(sqrt(sum{i in ACTIVOS, j in ACTIVOS} Cov[i,j]*x[i]*x[j]));

```

7.4.5. Modelo de Markowitz Con Frontera Eficiente. 35 Empresas

```
reset;
set ACTIVOS;      # asset categories
set T := {1..547}; # days
param mu;
set valores:={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,
15, 17, 20, 25, 30, 35, 40,45, 50,55,60,65,70, 75, 100,125, 150,175, 200, 500,550};
param R {T,ACTIVOS};
param mean {j in ACTIVOS}
  := ( sum{i in T} R[i,j] )/card(T);
param Rtilde {i in T, j in ACTIVOS}
  := R[i,j] - mean[j];
param Cov {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
  := sum {i in T} (Rtilde[i,j]*Rtilde[i,k]) / card(T);
param Corr {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
  := Cov[j,k]/sqrt(Cov[j,j]*Cov[k,k]);
param return;
var x{ACTIVOS} >=0;
minimize lin_comb:
  mu *
  sum{i in T} (sum{j in ACTIVOS} Rtilde[i,j]*x[j])^2 / card{T}
  -
  sum{j in ACTIVOS} mean[j]*x[j]
;
subject to tot_mass:
  sum{j in ACTIVOS} x[j] = 1;
data;
set ACTIVOS :=
ABE ABG ACS AMS ANA BBVA BKIA BKT BME CABK DIA ELE ENG FCC FER GAM GAS GRF IBE ICAG IDR ITX JAZ MAP MTS OHL POP REE REP SAB SAN SCYR TEF TL5 TRE;
```

```

param R:
ABE ABG ACS AMS ANA BBVA BKIA BKT BME CABK DIA ELE ENG FCC FER GAM GAS GRF IBE ICAG IDR ITX JAZ MAP MTS OHL POP REE REP SAB SAN SCYR TEF TL5 TRE:=
1      0.00852099817407185  0.0655737704918032 ...
.
.
.
547    -0.048885077186964   0.00806451612903226
;

param return := 0.00008;
display Cov;
printf: "-----\n\n";
printf: "          Asset   Mean  Variance StandardDeviation\n";
printf {j in ACTIVOS}: "%45s %10.4f %10.5f %10.5f\n",
      j, mean[j], sum{i in T} Rtilde[i,j]^2 / card(T), sqrt(sum{i in T} Rtilde[i,j]^2 / card(T));
printf: "\n-----\n";
option solver minos;
option solver_msg 0;
for{k in valores}{
      let mu:=k;
      solve;
printf "\n\n mu=%10.4f\n",
      mu;
printf {j in ACTIVOS}: x[j] > 0.001}: "%45s %10.4f\n", j, x[j];

printf: "\n Mean= %10.12f, Variance = %10.12f, Sharpe Ratio = %11f\n",
      sum{j in ACTIVOS} mean[j]*x[j],
      sum{i in T} (sum{j in ACTIVOS} Rtilde[i,j]*x[j])^2 / card(T),
      (sum{i in ACTIVOS} x[i] * mean[i]- return)/(sum{i in T} (sum{j in ACTIVOS} Rtilde[i,j]*x[j])^2 / card(T))^(0.5)
;
};

```

7.4.6. Modelo de Markowitz Con Frontera Eficiente. 35 Empresas y Letras

```
reset;
set ACTIVOS;      # asset categories
set T := {1..547}; # days
param mu;
set valores:={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,
15, 17, 20, 25, 30, 35, 40,45, 50,55,60,65,70, 75, 100,125, 150,175, 200, 500,550};
param R {T,ACTIVOS};
param mean {j in ACTIVOS}
  := ( sum{i in T} R[i,j] )/card(T);
param Rtilde {i in T, j in ACTIVOS}
  := R[i,j] - mean[j];
param Cov {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
  := sum {i in T} (Rtilde[i,j]*Rtilde[i,k]) / card(T);
param Corr {j in ACTIVOS, k in ACTIVOS}
  := Cov[j,k]/sqrt(Cov[j,j]*Cov[k,k]);
param return;
var x{ACTIVOS} >=0;
minimize lin_comb:
  mu *
  sum{i in T} (sum{j in ACTIVOS} Rtilde[i,j]*x[j])^2 / card{T}
  -
  sum{j in ACTIVOS} mean[j]*x[j]
;
subject to tot_mass:
  sum{j in ACTIVOS} x[j] = 1;
data;
set ACTIVOS :=
ABE ABG ACS AMS ANA BBVA BKIA BKT BME CABK DIA ELE ENG FCC FER GAM GAS GRF IBE ICAG IDR ITX JAZ MAP MTS OHL POP REE REP SAB SAN SCYR TEF TL5 TRE LETRAS;
```

```

param R:
ABE ABG ACS AMS ANA BBVA BKIA BKT BME CABK DIA ELE ENG FCC FER GAM GAS GRF IBE ICAG IDR ITX JAZ MAP MTS OHL POP REE REP SAB SAN SCYR TEF TL5 TRE
LETRAS:=
1      0.00852099817407185   0.0655737704918032 ... .....
.
.
.
547    -0.048885077186964    0.00806451612903226 ... .....
;

param return := 0.00008;
display Cov;
printf: "-----\n\n";
printf: "          Asset   Mean  Variance StandardDeviation\n";
printf {j in ACTIVOS}: "%45s %10.4f %10.5f %10.5f\n",
      j, mean[j], sum{i in T} Rtilde[i,j]^2 / card(T), sqrt(sum{i in T} Rtilde[i,j]^2 / card(T)));
printf: "\n-----\n";
option solver minos;
option solver_msg 0;
for{k in valores}{
      let mu:=k;
      solve;
printf "\n\n mu=%4f\n",
      mu;
printf {j in ACTIVOS: x[j] > 0.001}: "%45s %10.4f\n", j, x[j];
printf: "\n Mean= %10.12f, Variance = %10.12f, Sharpe Ratio = %11f\n",
      sum{j in ACTIVOS} mean[j]*x[j],
      sum{i in T} (sum{j in ACTIVOS} Rtilde[i,j]*x[j])^2 / card(T),
      (sum{i in ACTIVOS} x[i] * mean[i]- return)/(sum{i in T} (sum{j in ACTIVOS} Rtilde[i,j]*x[j])^2 / card(T))^(0.5)
;
};

```

Para el resto de modelos de Markowitz sin frontera eficiente y con letra del Tesoro tenemos que ir añadiendo en la letra, es decir, al final de las 547 filas.

Tenemos como letras: 0.001, 0.0001, 0.00001 y 0.000001.