



---

# Universidad de Valladolid

Facultad de ciencias

---

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Investigación en Matemáticas

**HOMOLOGÍA DE INTERSECCIÓN Y DESPLIEGUES**

**Autora: BEATRIZ MOLINA SAMPER**

Dirigido por:  
Dr. José Manuel Aroca Hernández-Ros

---

Valladolid, Julio de 2015



## Agraïments

Al meu tutor, el professor José Manuel Aroca, per acceptar dirigir aquest treball sense dubtar-ho un segon, per com s'ha implicat fins l'últim instant, per prestar-me el seu suport incondicional en tot moment, per tot allò que he après al seu costat i per tenir sempre una paraula d'ànim que m'ajudara a seguir endavant.

Però especialment per la infinita paciència que ha tingut amb mi al llarg de l'any.

A la professora Clementa Alonso, Clemen, perquè amb ella he après que les coses en matemàtiques sempre han de ser boniques i perquè d'una forma o d'una altra és també culpable de que estiga ací en aquest moment.

A tot el departament d'AAMGT de la Universitat de Valladolid, ja que en molt poc de temps m'han fet sentir que aquesta també es ma casa. En especial als meus companys de màster i doctorat, que han sigut els encarregats de recordar-me que de tant en tant cal detindre's a respirar.

Al professor Martín Saralegi, que em va fer veure la llum al final del túnel, per compartir amb mi els seus coneixements, perquè encara que no conste de manera oficial, per a mi ha sigut el codirector d'aquest treball.

I no puc deixar d'agrair la meua família, per tota la confiança que han depositat en mi, per l'enorme esforç que realitzen en el meu benefici dia rere dia, pel seu suport i la seua dedicació, ja que sense ells no seria la persona que hi sóc.

## Agradecimientos

A mi tutor, el profesor José Manuel Aroca, por aceptar dirigir este trabajo sin dudarlo un segundo, por cómo se ha implicado hasta el último instante, por prestarme su apoyo incondicional en todo momento, por todo lo que he aprendido a su lado y por tener siempre una palabra de ánimo que me ayudase a seguir adelante. Pero especialmente por la infinita paciencia que ha tenido conmigo a lo largo del año.

A la profesora Clementa Alonso, Clemen, por que con ella he aprendido que las cosas en matemáticas siempre deben ser bonitas y porque de una forma u otra es también culpable de que esté aquí en este momento.

A todo el departamento de AAMGT de la Universidad de Valladolid, pues en muy poco tiempo me han hecho sentir que ésta también es mi casa. En especial a mis compañeros de máster y doctorado, que han sido los encargados de recordarme que de vez en cuando hay que detenerse a respirar.

Al profesor Martín Saralegi, que me hizo ver la luz al final del túnel, por compartir conmigo sus conocimientos, porque aunque no conste de modo oficial, para mi ha sido el codirector de este trabajo.

Y no puedo dejar de agradecer a mi familia, por toda la confianza que han depositado en mi, por el enorme esfuerzo que realizan en mi beneficio día tras día, por su apoyo y su dedicación, ya que sin ellos no sería la persona que soy.



# Introducción

En su “Programa de Erlangen” [4] Felix Klein propone un nuevo modelo para la geometría. Para Klein, una geometría es un “espacio homogéneo”, es decir, un par  $(X, G)$  donde  $X$  es un conjunto y  $G$  es un grupo que actúa sobre  $X$  y la geometría es sencillamente el estudio de las propiedades de  $X$  invariantes por la acción de  $G$

Aunque la propuesta de Klein es completamente general, está pensada especialmente para un modelo básico. Su punto de partida, es el par  $(\mathbb{P}, G_{\mathbb{P}})$  donde  $\mathbb{P}$  es un espacio proyectivo y  $G_{\mathbb{P}}$  el grupo de sus proyectividades. Desde este modelo Klein pretende obtener todas las geometrías simplemente reduciendo el grupo. Obviamente esta reducción conlleva un aumento de las “propiedades geométricas” del espacio. En resumen, la idea del modelo de Klein es la siguiente:

Una geometría es un par  $(X, G)$  donde  $X$  es un conjunto y  $G$  es un grupo que actúa sobre  $X$

- Una propiedad relativa a  $X$  es geométrica para  $G$  si es invariante por la acción de los elementos de  $G$ .
- (Principio de especialización) Si  $(X, G)$  es una geometría y  $H$  es un subgrupo de  $G$ , toda propiedad geométrica en  $(X, G)$  será una propiedad geométrica para  $(X, H)$ . Sin embargo, en  $(X, H)$  aparecerán nuevas propiedades geométricas que no son invariantes para  $G$ .
- Todas las geometrías clásicas son “especializaciones” de la geometría proyectiva, es decir, corresponden a subgrupos del grupo proyectivo.

En una segunda etapa, Klein considera espacios más generales que los proyectivos, como bien pueden ser variedades diferenciales o incluso espacios topológicos (análisis situs). Esto le fuerza a considerar grupos más amplios que el grupo proyectivo.

Es decir, Klein entra en una de estas dinámicas:

- Cambiar el grupo  $G$  por un grupo más pequeño (resp. grande) obteniendo de este modo un incremento (resp. una disminución) de las propiedades geométricas.

- Añadir (resp. eliminar) en el conjunto  $X$  algún elemento de naturaleza “geométrica” que provoca una disminución (resp. crecimiento) del grupo  $G$ .

Este planteamiento permite considerar como geométricos muchos campos de las matemáticas. Por ejemplo, la teoría de categorías, considerada siempre como una generalización del álgebra abstracta, tiene una importante componente geométrica que permite enmarcarla en el programa de Erlangen. Dada una categoría  $\mathcal{C}$  el papel del “conjunto” en el planteamiento de Klein, lo juegan los objetos. Para cada objeto  $X$ , los automorfismos de  $X$  (Isomorfismos de  $X$  en  $X$ ) forman un grupo. De este modo, tenemos asociada a  $\mathcal{C}$  una familia de geometrías:

$$\{(X, Aut(X))\}_{X \in ob(\mathcal{C})}$$

El resto de los morfismos en  $Hom(X, Y)$  nos permiten suplir el hecho de que  $X \in ob(\mathcal{C})$  no es un conjunto y por tanto no podemos hablar de “elementos”.

Desde este punto de vista, los funtores son propiedades geométricas ya que un functor sobre  $\mathcal{C}$ , con valores en una categoría arbitraria  $\mathcal{C}'$ :

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$$

tiene la propiedad de ser un “invariante por isomorfismos”, esto es

$$X \cong Y \Rightarrow F(X) \cong F(Y)$$

Por tanto  $F$  es una “propiedad” invariante por la acción del grupo. En este sentido, las teorías de homología y cohomología son propiedades geométricas de la categoría de espacios topológicos desde el punto de vista del programa de Erlangen.

En el contexto de la topología, partimos de la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas, y podemos “especializar” esta categoría de distintas maneras añadiendo una estructura superpuesta:

- Pasando a la categoría de variedades topológicas.
- Pasando a la categoría de PL variedades
- Pasando a la categoría de variedades diferenciables.
- Pasando a la categoría de espacios filtrados o estratificados.

entre otras.

Esta especialización no supone restricción a una subcategoría, porque sobre un mismo espacio topológico pueden haber varias estructuras superpuestas no isomorfas.

En principio una teoría de homología o cohomología, como detallaremos más adelante, es una familia de funtores con un morfismo de conexión que verifica unas propiedades básicas, una familia de funtores de este tipo se puede construir de muchas maneras distintas sobre las diferentes especializaciones de la categoría de espacios topológicos, hay construcciones combinatorias como las simpliciales, puramente topológicas como la homología singular, otras que usan la estructura superpuesta como la cohomología de de'Rham etc.

Es una práctica usual no ser muy exigentes con la axiomática y seguir llamando homologías y cohomologías a familias de funtores más el morfismo de conexión que *casí* verifican los axiomas, pero en cambio verifican alguno de los teoremas importantes, Mayer-Vietoris, exactitud, fórmula de Künneth, dualidad, etc. Un problema fundamental una vez que construimos una de estas teorías es saber si es “topológica”.

Es decir, podemos construir homologías y cohomologías en la categoría de variedades diferenciables y en consecuencia invariantes o bien por los grupos de difeomorfismos, o bien en la categoría de espacios estratificados invariantes por las transformaciones estratificadas, etc; y la pregunta es si son o no invariantes por homeomorfismos, lo cual nos indica si representan propiedades de la topología del espacio o de la estructura superpuesta.

En esta memoria estudiamos teorías de homología de los espacios filtrados y estratificados conocidas por el nombre general de *Homologías de intersección* y descubiertas en 1974 por Mark Goresky y Robert MacPherson y que pese a los cuarenta años transcurridos desde su descubrimiento, aun no han llegado ni a los libros de texto ni a los cursos, incluso avanzados, de topología algebraica.

S. L. Kleimann [14] escribe:

*Intersection homology theory is a brilliant new tool: a theory of homology groups for a large class of singular spaces, which satisfies Poincaré duality and the Künneth formula and, if the spaces are (possibly singular) projective algebraic varieties, then also the two Lefschetz theorems. The theory was discovered in 1974 by Mark Goresky and Robert MacPherson. It was an unexpected find, but one highly suited to the study of singular spaces, and it has yielded profound results. Most notably, the Kazhdan-Lusztig conjecture was established via a remarkable bridge between representation theory and intersection homology theory provided by D-module theory. In fact, in 1980, the conjecture, which was a little over a year old, motivated the construction of that bridge, and the bridge in turn led to some far reaching new advances in intersection homology theory. All told, within a decade, the development of intersection homology theory had involved an unprecedented number of very bright and highly creative people. Their work is surely one of the grand mathematical endeavors of the century.*

Las líneas anteriores ponen de manifiesto que el hecho de que la teoría no figure en los currícula de matemáticas no se debe a la falta de interés de la misma, el problema reside en la enorme dificultad técnica y en la cantidad de material que interviene en ella. Recientemente, y para establecer un marco razonable para una teoría de de'Rham para variedades singulares, King y posteriormente Martin Saralegi han comenzado a desarrollar lo que Friedmann llama *Homología de intersección sin haces*. El objeto de nuestro trabajo consiste en exponer la versión de Saralegi de la homología de intersección y describir una herramienta de considerable importancia para el estudio de espacios singulares con estructura más débil que la analítica o la algebraica, los despliegues (unfolding).

Dedicaremos por último unas líneas a exponer brevemente algunos puntos que luego detallaremos. El objetivo de Goresky y MacPherson era tratar de construir un producto de clases de homología similar al de clases de cohomología, y para hacerlo necesitaban que las clases de homología fuesen intersecables, es decir, se pudiesen situar transversalmente una a la otra. Además estaban interesados en lograr este resultado en un espacio analítico singular y de forma adaptada a las singularidades. Ahora bien un espacio analítico complejo se puede dotar de modo natural una estratificación de Whitney, es decir, descomponerlo en unión disjunta de subespacios analíticos lisos (no singulares) y locamente cerrados, verificando una *condición de frontera*, el cierre de cada estrato es unión de estratos, una condición de buen comportamiento por paso al límite de los espacios tangentes y otra relativa a las propiedades de tangencia de los límites de secantes (ver 2.2.26), esta condición implica la trivialidad topológica a lo largo de cada estrato. El problema es: dados dos ciclos de homología hacerlos transversales y transversales a una estratificación de Whitney, y si esto no es posible relajar en alguna medida la condición de transversalidad permitiendo a los ciclos una cierta desviación (perversidad) cuyos efectos quedarían reflejados en la homología.

En lugar de trabajar en una categoría tan rígida como la de espacios analíticos Goresky y MacPherson se sitúan en la categoría más general de espacios lineales a trozos (PL-espacios). La estratificación de Whitney se sustituye, para un PL-espacio  $X$ , por una filtración de conjuntos cerrados:

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset X_{n-2} \supset \dots \supset X_1 \supset X_0$$

tal que:

1.  $X_{n-1} = X_{n-2}$
2. Cada estrato  $X_i \setminus X_{i-1}$  es vacío o es una variedad lineal a trozos de dimensión pura  $i$  a lo largo de la cual  $X$  es localmente topológicamente trivial
3. El cierre de cada estrato es unión de estratos
4. El estrato de dimensión máxima es orientado y denso



La condición de trivialidad topológica local significa que cada punto  $x \in X_i \setminus X_{i-1}$  admite un entorno  $U$  en  $X$  cuyo cierre  $\bar{U}$  es PL-homeomorfo a un producto  $B^i \times V$  donde  $B^i$  es la bola cerrada de dimensión  $i$ , y  $V$  es un PL-espacio compacto con una filtración por cerrados que termina en un punto:

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset V_{n-2} \supset \dots \supset V_i$$

de modo que el PL-homeomorfismo lleva cada  $\bar{U} \cap X_j$  sobre el correspondiente  $B^i \times V_j$

Estas condiciones, como veremos han sido generalizadas a espacios topológicos con casi ninguna condición suplementaria. La relajación de la condición de transversalidad entre un  $i$ -ciclo y un estrato  $X_{n-k}$  a la que aludíamos arriba, se logra fijando una función:

$$\bar{p} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

independiente de  $i$ , e imponiendo que la intersección entre el  $i$ -ciclo y  $X_{n-k}$  tenga dimensión menor o igual que  $i - k + \bar{p}(k)$ . Goresky y MacPherson llamaron a esta función *perversidad* y le exigieron las propiedades siguientes:

- $\bar{p}(2) = 0$
- $\bar{p}(k) \leq \bar{p}(k+1) \leq \bar{p}(k) + 1$

La primera condición impone que el ciclo esté contenido *en su mayor parte* en la *parte no singular* de  $X$  y la segunda que la perversidad es no decreciente pero crece a lo más en una unidad cada vez que lo hace la dimensión. De este modo se obtienen grupos de homología, dependientes de la perversidad, que por ejemplo:

- Son finitamente generados si  $X$  es compacto.
- Si  $X$  es normal, son los grupos ordinarios de cohomología (por dualidad de Poincaré) si la perversidad es cero.
- Si  $X$  es normal, son los grupos de homología ordinarios si la perversidad es  $\bar{p}(k) = k - 2$ .
- Existen acoplamientos (pairings)

$$H_i^{\bar{p}} \times H_j^{\bar{q}} \rightarrow H_{i+j-n}^{\bar{p}+\bar{q}}$$

que generalizan los productos de cohomología usual.

Nuestro planteamiento será en principio más general, pero cuando queramos obtener resultados más fuertes iremos poniendo condiciones suplementarias. No usaremos las teorías con valores en un haz, sino adaptaremos a una filtración, y a una función de perversidad, las construcciones clásicas de las teorías simplicial y singular. Las cantidades de notación necesarias hacen difícil ser más precisos en esta introducción. A medida que vayamos introduciendo los conceptos trataremos de dar las razones que justifican su introducción.



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Teorías de homología y cohomología</b>       | <b>1</b>  |
| 1.1. Teorías de [co]homología                      | 2         |
| 1.1.1. Teoremas                                    | 4         |
| 1.2. Teorías de [co]homología reducidas            | 6         |
| 1.3. Homología simplicial                          | 8         |
| 1.4. Homología singular                            | 12        |
| <b>2. Espacios filtrados y estratificados</b>      | <b>13</b> |
| 2.1. Espacios filtrados                            | 13        |
| 2.1.1. Operaciones con espacios filtrados          | 15        |
| 2.1.2. Propiedades                                 | 20        |
| 2.2. Espacios estratificados                       | 22        |
| 2.2.1. Definición, ejemplos y primeras propiedades | 22        |
| 2.2.2. Morfismos entre espacios estratificados     | 29        |
| 2.2.3. Espacios estratificados en variedades       | 30        |
| 2.2.4. Pseudovariedades estratificadas             | 33        |
| <b>3. Homología de intersección</b>                | <b>41</b> |
| 3.1. Perversidades                                 | 41        |
| 3.2. Homología de intersección simplicial          | 44        |
| 3.3. Homología de intersección singular            | 51        |
| 3.3.1. símlices filtrados                          | 51        |
| 3.3.2. símlices $\bar{p}$ -admisibles              | 57        |
| 3.3.3. Homología de intersección singular          | 59        |
| 3.3.4. Teorema de Mayer-Vietoris                   | 61        |
| 3.3.5. Aplicaciones en homología. S-homotopía      | 62        |
| 3.4. Homología del cono y la suspensión            | 67        |
| 3.5. invariancia topológica y dualidad de Poincaré | 68        |
| 3.5.1. Dualidad de Poincaré                        | 73        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4. Despliegues y blow-up simplicial</b>           | <b>79</b> |
| 4.1. Blow-up simplicial . . . . .                    | 81        |
| 4.2. Despliegues . . . . .                           | 88        |
| 4.2.1. Despliegue lineal . . . . .                   | 90        |
| 4.3. Cohomología de intersección de DeRham . . . . . | 92        |
| 4.3.1. Formas perversas . . . . .                    | 92        |
| 4.3.2. Integración . . . . .                         | 94        |

# Notación

|                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| $\sim$                            | Homotopía o Relación Binaria de Equivalencia          |
| $\vee$                            | Suma débil  |
| $\wedge$                          | Producto estrellado                                   |
| $SX$                              | Suspensión de $X$                                     |
| $\overset{\circ}{c} X$            | Cono abierto  |
| $\bar{c}X$                        | Cono cerrado  |
| $\vartheta$                       | Vértice del cono                                      |
| $\mathcal{PT}'$                   | Categoría de homotopía con un punto base.             |
| $\Delta_n$                        | $n$ -símplice   |
| $\pm\Delta_n$                     | $n$ -símplice orientado                               |
| $[\Delta_p : \Delta_{p-1}]$       | Número de incidencia                                  |
| $C_p$                             | $p$ -cadenas simpliciales                             |
| $S_p$                             | $p$ -cadenas singulares                               |
| $Z_p$                             | $p$ -ciclos   |
| $B_p$                             | $p$ -bordes   |
| $H_p$                             | $p$ -ésimo grupo de homología                         |
| $\sigma : \Delta_m \rightarrow X$ | $n$ -símplice singular                                |
| $d(X)$                            | Dimensión formal de $X$                               |
| $dim(X)$                          | Dimensión de $X$                                      |
| $\mathcal{S}_X$                   | Familia de estratos de $X$                            |
| $\Sigma_X$                        | Conjunto singular de $X$                              |
| $*$                               | Conjugación   |
| $\mathbb{S}^n$                    | $n$ -esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$                     |
| $B^{n+1}$                         | Bola unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$                     |
| $Sim_{n+1}$                       | Matrices simétricas $(n+1) \times (n+1)$              |
| $S_f$                             | Aplicación inducida por un morfismo estratificado $f$ |
| $M$                               | Variedad  |
| $M \times \overset{\circ}{c} L$   | Modelo básico   |
| $\partial M$                      | Frontera de $M$                                       |
| $\hat{X}$                         | Normalización de $X$                                  |
| $\{T_i, \pi_i, \rho_i\}$          | Sistema tubular                                       |
| $\bar{p}$                         | Perversidad   |
| $\bar{q}$                         | Perversidad dual                                      |
| $\bar{t}$                         | “top perversity”                                      |

|                         |   |
|-------------------------|---|
| $C_p^{\bar{p}}$         | p-cadenas de intersección para $\bar{p}$                                |
| $Z_p^{\bar{p}}$         | p-ciclos de intersección para $\bar{p}$                                 |
| $B_p^{\bar{p}}$         | p-bordes de intersección para $\bar{p}$                                 |
| $H_p^{\bar{p}}$         | p-ésimo grupo de homología de intersección para $\bar{p}$               |
| $H_p^{\bar{p}}$         | p-ésimo grupo de cohomología de intersección para $\bar{p}$             |
| $C_*^F$                 | Complejo de cadenas de símlices singulares filtrados                    |
| $\ \sigma\ $            | Grado de perversidad de $\sigma$  |
| $\tau_\sigma$           | Cara mala   |
| $X^*$                   | Estratificación intrínseca o minimal                                    |
| $\tilde{\Delta}$        | Blow-up simplicial  |
| $\mathcal{L}$           | Despliegue  |
| $\tilde{X}$             | Espacio desplegado  |
| $\Omega^*(X)$           | Complejo diferencial de formas sobre $X$                                |
| $\omega$                | Forma diferencial   |
| $\mathcal{S}_X^{Sing}$  | Familia de estratos singulares en $X$                                   |
| $T(X)$                  | Espacio tangente a $X$  |
| $\Pi^*(X)$              | Complejo diferencial de formas levantables sobre $X$                    |
| $\ \omega\ $            | Grado de perversidad de una forma                                       |
| $\Omega_{\bar{p}}^*(X)$ | Complejo diferencial de formas de intersección para $\bar{p}$ sobre $X$ |
| $\int :$                | Operador integral   |

# Capítulo 1

## Teorías de homología y cohomología

En este capítulo reuniremos definiciones y resultados muy elementales y sobradamente conocidos con el objetivo de usarlos como modelo de nuestro trabajo y para introducir las nociones que se precisan para el resto de la memoria. Como se puede apreciar, no hemos pretendido hacer una exposición compleja y detallada de todos los resultados.

La primera propuesta sistemática de una teoría de [co]homología es la de Eilenberg y Steenrod [3] que definen axiomáticamente una teoría de [co]homología como una familia de funtores de la categoría de pares de espacios topológicos en la de grupos abelianos que cumplen 7 axiomas (de los cuales los primeros son los que establecen la funtorialidad).

En las primeras versiones de esta axiomática se toma como base la categoría de pares de espacios topológicos, pero en versiones posteriores se utilizan *categorías admisibles* en las que los objetos no son todos los pares de espacios, pero a cambio se exigen unas condiciones que permiten el enunciado de los axiomas, como ya hemos indicado, y para no alargar esta exposición no entraremos a definir categoría admisible, entendiendo que nuestra categoría base tiene todos los objetos que se precisan para formular la axiomática. También señalaremos que el último de los axiomas (el axioma de dimensión):

Axioma de dimensión: Si  $X$  es un espacio unipuntual  $\Rightarrow H_p(X) = 0 \forall p$

se considera prescindible por muchos autores, y que también prescindiremos de él en nuestro trabajo.

## 1.1. Teorías de [co]homología

Sea  $\mathcal{C}$  una subcategoría completa admisible de la categoría de espacios topológicos. Llamamos categoría de pares de  $\mathcal{C}$ , a una categoría  $\mathcal{C}^2$  cuyos objetos son los pares  $(X, A)$  donde  $A, X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  y  $A \subset X$  y cuyos morfismos son los pares

$\tilde{f} = (f_1, f_2) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  donde  $f_1 \in \text{Hom}(X, Y)$ ,  $f_2 \in \text{Hom}(A, B)$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \\ i_A \uparrow & & \uparrow i_B \\ A & \xrightarrow{f_2} & B \end{array}$$

es conmutativo, siendo  $i_A$  e  $i_B$  las inclusiones.

La ley de composición de morfismos en  $\mathcal{C}^2$  viene dada por:

$$\tilde{f} \circ \tilde{g} = (f_1, f_2) \circ (g_1, g_2) = (f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2)$$

En  $\mathcal{C}^2$  llamamos functor restricción a  $R : \mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathcal{C}^2$  dado por:

$$\begin{aligned} R(X, A) &= (A, \emptyset) \\ R(\tilde{f}) &= R((f_1, f_2)) = (f_2, o) \text{ donde } \{o\} = \text{Hom}(\emptyset, \emptyset) \end{aligned}$$

Recordemos las siguientes definiciones y notaciones:

- Una *homotopía* de  $X$  a  $Y$  es una función continua  $F : X \times I \rightarrow Y$ , donde  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Para cada  $t \in I$ , denotaremos  $F_t : X \rightarrow Y$  a la aplicación dada por  $F_t(x) = F(x, t)$ .
- Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son morfismos en  $\mathcal{C}$ , decimos que  $f$  es homotópico a  $g$  y escribimos  $f \sim g$  si hay una homotopía  $F : X \times I \rightarrow Y$  de modo que  $F_0 = f$  y  $F_1 = g$ .
- En  $\mathcal{C}^2$  una homotopía de  $(X, A)$  en  $(Y, B)$  es un morfismo en  $\mathcal{C}^2$   $\tilde{F} = (F_1, F_2) : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ .  
Para cada  $t \in I$ , denotaremos  $\tilde{F}_t = (F_{1t}, F_{2t}) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  a la aplicación dada por  $\tilde{F}_t(x, a) = (F_{1t}(x), F_{2t}(a)) = (F_1(x, t), F_2(a, t))$ .
- Si  $\tilde{f}, \tilde{g} : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  son morfismos en  $\mathcal{C}^2$ , decimos que  $\tilde{f}$  es homotópico a  $\tilde{g}$  y escribimos  $\tilde{f} \sim \tilde{g}$  si hay una homotopía  $\tilde{F} : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  de modo que  $\tilde{F}_0 = \tilde{f}$  y  $\tilde{F}_1 = \tilde{g}$ .

Llamaremos categoría de pares de homotopía a la categoría  $\mathcal{C}^{2'}$  cuyos objetos son los mismos que en  $\mathcal{C}^2$  y cuyos morfismos son las clases de homotopía de los morfismos de  $\mathcal{C}^2$ .



El funtor de restricción de  $\mathcal{C}^2$  induce un funtor, al que seguiremos llamando restricción,

$R : \mathcal{C}^{2'} \longrightarrow \mathcal{C}^2$  dado por:

$$R(X, A) = (A, \emptyset)$$

$$R([\tilde{f}]) = R([f_1], [f_2]) = ([f_2], [o]) \text{ donde } \{o\} = Hom(\emptyset, \emptyset)$$

Una teoría de [co]homología,  $h_*$  [resp.  $h^*$ ], en  $\mathcal{C}^{2'}$  es una sucesión de funtores covariantes [resp. contrav.]  $h_n$  [resp.  $h^n$ ] :  $\mathcal{C}^{2'} \rightarrow \mathcal{A}$  con  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana y una sucesión de transformaciones naturales

$$\delta_n : h_n \rightarrow h_{n-1} \circ R \quad [\delta^n : h^{n-1} \circ R \rightarrow h^n]$$

de modo que si, dado un morfismo  $\tilde{f} : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  en  $\mathcal{C}^{2'}$ , denotamos por :

$$f_n = h_n([\tilde{f}]) : h_n(X, A) \rightarrow h_n(Y, B), \quad [f^n = h^n([\tilde{f}]) : h^n(Y, B) \rightarrow h^n(X, A)]$$

para todo  $n$  en  $\mathbb{Z}$ , se satisfacen los siguientes axiomas:

1. Exactitud : Sea  $(X, A) \in \mathcal{C}^2$  e  $\tilde{i} : (A, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$ ,  $\tilde{j} : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  las inclusiones, entonces la sucesión:

$$\dots \rightarrow h_n(A, \emptyset) \xrightarrow{i_n} h_n(X, \emptyset) \xrightarrow{j_n} h_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} h_{n-1}(A, \emptyset) \rightarrow \dots$$

$$[\dots \rightarrow h^{n-1}(A, \emptyset) \xrightarrow{\delta^n} h^n(X, A) \xrightarrow{j^n} h^n(X, \emptyset) \xrightarrow{i^n} h^n(A, \emptyset) \rightarrow \dots]$$

es exacta

2. Escisión : Para cada par  $(X, A) \in \mathcal{C}^2$  y cada subconjunto  $U \subset A$  tal que  $\bar{U} \subset \mathbb{A}$ , la inclusión  $\tilde{j} : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  induce isomorfismos:

$$j_n : h_n(X - U, A - U) \rightarrow h_n(X, A)$$

$$[j^n : h^n(X, A) \rightarrow h^n(X - U, A - U)]$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$

Se observará que aparentemente solo presentamos dos axiomas, y sin embargo hablamos de siete en las primeras líneas de esta sección, eso es debido a que:

- Los axiomas i) y ii) dicen que  $h_n$  [resp.  $h^n$ ] es un funtor en  $\mathcal{C}^2$ .
- El axioma iii) que  $\delta_n$  [resp.  $\delta^n$ ] es una transformación natural.
- El axioma v) que, de hecho,  $h_n$  [resp.  $h^n$ ] es un funtor en  $\mathcal{C}^{2'}$ .
- El axioma iv) es la exactitud y el axioma vi) escisión.

En lo sucesivo utilizaremos la notación  $h_*$  o  $h^*$  para indicar  $h_n$  o  $h^n$  cuando el índice este claro en el contexto.

### 1.1.1. Teoremas

Las teorías de homología y cohomología, como consecuencia de los axiomas, verifican unos teoremas clásicos, que no son equivalentes a los axiomas, es decir que a veces pueden probarse en teorías que no son homología en sentido clásico, pero que justifican su nombre con la verificación de estos teoremas. Sus enunciados son los siguientes:

- Sucesión exacta de un Triple

Si  $(X; A, B)$  es un triple en  $\mathcal{C}^{2'}$  (es decir,  $B \subset A \subset X$ ) y llamamos

$$\tilde{I} : (A, B) \rightarrow (X, B) \quad \tilde{J} : (X, B) \rightarrow (X, A)$$

a las inclusiones, entonces la sucesión

$$\dots \rightarrow h_n(A, B) \xrightarrow{I_*} h_n(X, B) \xrightarrow{J_*} h_n(X, A) \xrightarrow{\Delta} h_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

$$[\dots \rightarrow h^{n-1}(A, B) \xrightarrow{\Delta} h^n(X, A) \xrightarrow{J^*} h^n(X, B) \xrightarrow{I^*} h^n(A, B) \rightarrow \dots]$$

es exacta, donde  $\Delta$  es la composición

$$h_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} h_{n-1}(A, \emptyset) \rightarrow h_{n-1}(A, B), [h^{n-1}(X, A) \rightarrow h^{n-1}(A, \emptyset) \xrightarrow{\delta^n} h^n(X, A)]$$

- Sucesión exacta para  $(X, A), (X, B) \in \mathcal{C}^{2'}$

Sean  $(X, A), (X, B) \in \mathcal{C}^{2'}$  y sean  $\tilde{I} : (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ ,

$\tilde{J} : (X, A \cup B) \rightarrow (X, A)$  las inclusiones, entonces la sucesión

$$\dots \rightarrow h_n(A, A \cap B) \xrightarrow{I_*} h_n(X, B) \xrightarrow{J_*} h_n(X, A \cup B) \xrightarrow{\Delta} h_{n-1}(A, A \cap B) \rightarrow \dots$$

$$[\dots \rightarrow h^{n-1}(A, A \cap B) \xrightarrow{\Delta} h^n(X, A \cup B) \xrightarrow{J^*} h^n(X, B) \xrightarrow{I^*} h^n(A, A \cap B) \rightarrow \dots]$$

es exacta, donde  $\Delta$  es la composición

$$h_n(X, A \cup B) \xrightarrow{\delta_n} h_{n-1}(A \cup B, \emptyset) \rightarrow h_{n-1}(A \cup B, B) \xrightarrow{\cong} h_{n-1}(A, A \cap B)$$

$$[h^{n-1}(A, A \cap B) \xrightarrow{\cong} h^{n-1}(A \cup B, B) \rightarrow h^{n-1}(A \cup B, \emptyset) \xrightarrow{\delta^n} h^n(X, A \cup B)]$$

Para el teorema de Mayer-Vietoris, impondremos una condición adicional:

Dados  $(X, A), (X, B) \in \mathcal{C}^{2'}$  tales que  $X = A \cup B$ , la inclusión

$$\tilde{j} : (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$$

induce isomorfismos en [co]homología  $j_*$  [resp.  $j^*$ ].

Algunos autores usan esta condición en la formulación axioma de escisión, y otros, como hemos hecho nosotros, la imponen como condición necesaria para el teorema.

■ Teorema de Mayer-Vietoris

Sea  $(X, A), (X, B) \in \mathcal{C}'$  cumpliendo la condición anterior y  $C \subset A \cap B$  entonces la sucesión:

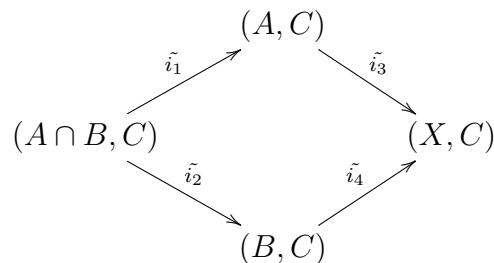
$$\dots \rightarrow h_n(A \cap B, C) \xrightarrow{\Psi} h_n(A, C) \oplus h_n(B, C) \xrightarrow{\Phi} h_n(X, C) \xrightarrow{\Delta} h_{n-1}(A \cap B, C) \rightarrow \dots$$

$$[\dots \rightarrow h^{n-1}(A \cap B, C) \xrightarrow{\Delta} h^n(X, C) \xrightarrow{\Phi} h^n(A, C) \oplus h^n(B, C) \xrightarrow{\Psi} h^n(A \cap B, C) \rightarrow \dots]$$

es exacta.

Donde:

- $\Psi(x) = (i_{1*}(x), i_{2*}(x))$  [ $\Psi(x) = (i_1^*(x), i_2^*(x))$ ]
- $\Phi(x, y) = (i_{3*}(x) - i_{4*}(y))$  [ $\Phi(x, y) = (i_3^*(x) - i_4^*(y))$ ]  
con  $\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \tilde{i}_3, \tilde{i}_4$  las inclusiones



- $\Delta$  es la composición

$$h_n(X, C) \xrightarrow{J_*} h_n(X, B) \xleftarrow{j_* \cong} h_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\Delta'} h_{n-1}(A \cap B, C)$$

$$[h^{n-1}(A \cap B, C) \xrightarrow{\Delta'} h^n(A, A \cap B) \xleftarrow{j_* \cong} h^n(X, B) \xrightarrow{J^*} h^n(X, C)]$$

con

- $(A, A \cap B) \xrightarrow{j} (X, B)$
- $(X, C) \xrightarrow{J} (X, B)$
- $\Delta'$  la composición

$$h_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\delta^n} h_{n-1}(A \cap B, \emptyset) \rightarrow h_{n-1}(A \cap B, C)$$

$$[h^{n-1}(A \cap B, C) \rightarrow h^{n-1}(A \cap B, \emptyset) \xrightarrow{\delta^n} h^n(A, A \cap B)]$$

## 1.2. Teorías de [co]homología reducidas

En la mayor parte de las teorías clásicas, no se define la [co]homología para un par de espacios topológicos, es decir, la teoría relativa; sino que se considera la homología de un solo espacio topológico. Cabe considerar las teorías de este tipo, llamadas teorías reducidas, como teorías de homología relativas en las cuales el segundo espacio se reduce al vacío. También es posible desarrollar una axiomática para las teorías “reducidas”, esto es en  $\mathcal{C}'$ . Estas axiomáticas tienen como modelo las axiomáticas clásicas reduciendo el segundo espacio a un punto o al vacío.

Vamos a dar en esta sección un ejemplo de una axiomática para una teoría reducida de nuevo siguiendo en [2] el capítulo 7.

Consideramos la categoría de homotopía de los espacios topológicos con un punto base  $\mathcal{PT}'$  y comenzaremos con algunas definiciones previas necesarias para enunciar los axiomas. Usaremos la notación  $(X, *)$  cuando, por simplicidad, no precisemos cual es el punto base, porque o bien es obvio del contexto, o bien es indiferente.

**Definición 1.2.1.** Dados  $(X, x_0), (Z, z_0) \in \mathcal{PT}'$ , la suma débil de  $X$  e  $Y$ ,  $(X \vee Y, *)$  es el subespacio de  $X \times Z$  dado por  $X \times \{z_0\} \cup \{x_0\} \times Z$

**Definición 1.2.2.** Dados  $(X, x_0), (Z, z_0) \in \mathcal{PT}'$ , definimos su “producto estrellado” (smash product)  $(X \wedge Z, *)$  como el cociente  $X \wedge Z = X \times Z / X \vee Z$

**Definición 1.2.3.** Si  $(X, x_0) \in \mathcal{PT}'$ , definimos la suspensión  $(SX, *) \in \mathcal{PT}'$  de  $X$  como el producto estrellado  $(\mathbb{S}^1 \wedge X, *)$  con  $\mathbb{S}^1$  la esfera unidad. En  $\mathcal{PT}'$  llamamos funtor de suspensión,  $S$  al funtor definido por:

$$S((X, x_0)) = (SX, *) \text{ y } S([f]) = [Sf] = [1^{\mathbb{S}^1} \wedge f]$$

**Definición 1.2.4.** Para cualquier  $(X, x_0) \in \mathcal{PT}'$  definimos el cono de  $X$   $(CX, *)$  como el producto estrellado  $(I \wedge X, *)$  donde el punto base de  $I$  se asume que es 0.

Observación: Explícitamente  $CX = I \times X / \{0\} \times X \cup I \times \{x_0\}$

**Definición 1.2.5.** Sean  $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathcal{PT}'$ . Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es una *n-equivalencia* si para cualquier  $x_0 \in X$  tenemos que  $f_* : \pi_r(X, x_0) \rightarrow \pi_r(Y, y_0)$  es una biyección para todo  $r < n$  y es sobreyectiva para  $r = n$ .

Diremos que  $f$  es una *equivalencia homotópica débil* si es una *n-equivalencia* para todo  $n \geq 0$ .

Una teoría de [co]homología reducida,  $k_*$  [resp.  $k^*$ ], en  $\mathcal{PT}'$  es una colección de funtores covariantes [resp. contrav.]  $k_n$  [resp.  $k^n$ ]:  $\mathcal{PT}' \rightarrow \mathcal{A}$  y una sucesión de transformaciones naturales

$$\sigma_n : k_n \rightarrow k_{n-1} \circ S \quad [\sigma^n : k^{n-1} \circ S \rightarrow k^n]$$

de modo que que si, dado un morfismo  $j : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  en  $\mathcal{PT}'$ , denotamos por:

$$j_n = k_n([j]) : k_n(X, x_0) \rightarrow k_n(Y, y_0), \quad [j^n = k^n([j]) : k^n(Y, y_0) \rightarrow k^n(X, x_0)]$$

para todo  $n$  en  $\mathbb{Z}$ , se satisfacen los siguientes axiomas:

1. Exactitud : Sea  $(X, A, x_0)$  un par con punto base  $x_0$ , e  $i : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  y  $j : (X, x_0) \rightarrow (X \cup CA, *)$  inclusiones, entonces la sucesión

$$\begin{aligned} k_n(A, x_0) &\xrightarrow{i_n} k_n(X, x_0) \xrightarrow{j_n} k_n(X \cup CA, *) \\ [k^n(X \cup CA, *) &\xrightarrow{j^n} k^n(X, x_0) \xrightarrow{i^n} k^n(A, x_0)] \end{aligned}$$

es exacta

2. Axioma débil de aditividad

Para cada colección  $\{(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}\} \subset \mathcal{PT}'$ , con  $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigvee_{\beta \in A} X_\beta$  las inclusiones, inducen un isomorfismo

$$i_{\alpha*} : \bigoplus_{\alpha \in A} k_n(X_\alpha) \rightarrow k_n(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha), \quad [i_\alpha^* : k^n(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} k^n(X_\alpha)]$$

3. Axioma débil de equivalencia homotópica

Si  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica débil entonces para todo  $n$  en  $\mathbb{Z}$  y para todo  $x_0$  en  $X$

$$f_n : k_n(X, x_0) \rightarrow k_n(Y, f(x_0)), \quad [f^n : k^n(Y, f(x_0)) \rightarrow k^n(X, x_0)]$$

es un isomorfismo.

### 1.3. Homología simplicial

**Definición 1.3.1.** Llamamos *n-símplice en  $\mathbb{R}^d$*  a la envolvente convexa de un conjunto de  $n$  puntos  $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^d$  afínmente independientes y lo denotaremos por  $[A_0, A_1, \dots, A_n]$ . A los  $A_i$  los llamaremos vértices del símplex. Es decir,

$$[A_0, A_1, \dots, A_n] = \left\{ X \in \mathbb{R}^d \mid \overrightarrow{OX} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

**Definición 1.3.2.** Un símplex  $\Delta_k$  es una *cara* de un símplex  $\Delta_n$  ( $k \leq n$ ) si cada vértice de  $\Delta_k$  es un vértice de  $\Delta_n$ .

Un símplex determina sus vértices, pero no el orden de ellos. Para nuestra construcción necesitamos precisar un poco más y seleccionar un orden de los vértices, es decir una orientación, como en un espacio afín real solo caben dos orientaciones, no consideraremos diferentes los  $(n+1)!$  órdenes distintos de los vértices del símplex, sino que los clasificaremos en dos tipos:

**Definición 1.3.3.** Un *n-símplice orientado*  $\Delta_n = \langle A_0, A_1, \dots, A_n \rangle$  es un *n-símplice*  $\Delta_n = [A_0, A_1, \dots, A_n]$  en el que se ha escogido un orden para sus vértices. La clase de equivalencia de las permutaciones pares del orden elegido determina el símplex *positivamente orientado*  $+\Delta_n$ , mientras que la clase de las permutaciones impares determina el símplex *negativamente orientado*  $-\Delta_n$ .

**Definición 1.3.4.** Se dice que dos símplexes  $\Delta_m$  y  $\Delta_n$  están *propriadamente unidos* si no se cortan, o si su intersección es una cara tanto de  $\Delta_m$  como de  $\Delta_n$ .

**Definición 1.3.5.** Un *complejo simplicial* es una familia finita  $K$  de símplexes que están propriadamente unidos y que tienen la propiedad de que cada cara de un miembro de  $K$  es también un miembro de  $K$ . Cada uno de los  $p$ -símplexes en el complejo se denomina una *cara de dimensión  $p$* . Como notación, a los  $p$ -símplexes de  $K$  los representamos por  $\Delta(K)_{p,i}$ , usando el primer subíndice para representar la dimensión y el segundo para individualizar cada símplex entre los símplexes de la dimensión indicada por el primero. Cuando no haya confusión omitiremos los índices sobrantes y la  $K$ .

**Observación 1.3.6.** *Un método para orientar un complejo es escoger un orden para todos sus vértices y usar este orden para inducir un orden sobre los vértices de cada símplex. Sin embargo, éste no es el único método: Se puede asignar una orientación a cada símplex individualmente sin tener en cuenta cómo están unidos los símplexes.*

**Definición 1.3.7.** El *n-símplice estándar*  $\Delta_n$  es el subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido por:

$$\Delta_n = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \right\}$$

Observemos que el símplice est andar es un símplice que tiene como vértices los puntos  $A_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $A_1 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $A_n = (0, 0, \dots, 1)$ .

**Proposición 1.3.8.** Dados dos  $n$ -símplices  $\Delta_n$  y  $\Delta'_n$  en  $\mathbb{R}^l$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente, y dos banderas de caras:

$$\begin{aligned} \Delta_{r_1} \subset \Delta_{r_2} \subset \dots \subset \Delta_n \subset \mathbb{R}^l \\ \Delta'_{r_1} \subset \Delta'_{r_2} \subset \dots \subset \Delta'_n \subset \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

podemos encontrar una afinidad entre ellos tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_{r_1} \subset & \Delta_{r_2} \subset & \dots & \subset & \Delta_n \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\ \Delta'_{r_1} \subset & \Delta'_{r_2} \subset & \dots & \subset & \Delta'_n \end{array}$$

*Demostración.* Podemos considerar los símplices, como símplices en una dimensión ambiente  $\mathbb{R}^N$ , suficientemente grande, completando con ceros.

Asociada a la bandera

$$\Delta_{r_1} \subset \Delta_{r_2} \subset \dots \subset \Delta_n \subset \mathbb{R}^N$$

elegimos una familia de puntos afinmente independientes  $A_0, A_1, \dots, A_N$  de modo que  $\Delta_{r_i} = [A_0 \dots A_{r_i}]$

Análogamente asociada a la bandera

$$\Delta'_{r_1} \subset \Delta'_{r_2} \subset \dots \subset \Delta'_n \subset \mathbb{R}^N$$

elegimos una familia de puntos afinmente independientes  $B_0, B_1, \dots, B_N$  de modo que  $\Delta'_{r_i} = [B_0 \dots B_{r_i}]$

Sabemos que existe una única afinidad  $F$  de  $\mathbb{R}^N$ , tal que

$$F(A_i) = B_i, \forall i \in \{0 \dots N\}$$

y por tanto se cumple además, por como se han escogido los vértices,  $F(\Delta_{r_i}) = \Delta'_{r_i}$

Esto nos permite, cuando hablemos de un  $n$ -símplice, trabajar con él y con sus caras como si fuera el  $n$ -símplice est andar. ■

**Definición 1.3.9.** Sea  $K$  un complejo simplicial orientado y sean  $\Delta_p$  y  $\Delta_{p+1}$  símlices de  $K$  cuya dimensión difiere en 1. Se asocia a cada uno de estos pares un *número de incidencia*  $[\Delta_{p+1} : \Delta_p]$  definido como sigue:

- Si  $\Delta_p$  no es una cara de  $\Delta_{p+1}$  entonces  $[\Delta_{p+1} : \Delta_p] = 0$ .
- Si  $\Delta_p$  es una cara de  $\Delta_{p+1}$ .

Sean  $A_0, A_1, \dots, A_p$  los vértices de  $\Delta_p$  de modo que  $+\Delta_p = + \langle A_0, A_1, \dots, A_p \rangle$  y sea  $V$  el vértice de  $\Delta_{p+1}$  que no está en  $\Delta_p$ . Entonces:

- si  $+\Delta_{p+1} = + \langle V, A_0, A_1, \dots, A_p \rangle$ ,  $[\Delta_{p+1} : \Delta_p] = 1$
- si  $+\Delta_{p+1} = - \langle V, A_0, A_1, \dots, A_p \rangle$ ,  $[\Delta_{p+1} : \Delta_p] = -1$ .

**Definición 1.3.10.** Sea  $K$  un complejo simplicial orientado y sea  $A$  un anillo. Dado un entero positivo  $p$ , se llaman *p-cadenas de  $K$  con coeficientes en  $A$*  a los elementos del  $A$ -módulo libre generado por los  $p$ -símlices positivamente orientados de  $K$ ,  $\{+\Delta_{p,1}, +\Delta_{p,2}, \dots, +\Delta_{p,r_p}\}$ . Para todo  $p$ -símlice de  $K$  tomamos el convenio:

$$-\Delta_p = (-1)(+\Delta_p)$$

De esta manera toda combinación lineal dada, con coeficientes en  $A$ , de los  $p$ -símlices positivamente orientados se escribe de forma única como:

$$\sum_{i=1}^{r_p} g_{p,i} (+\Delta_{p,i})$$

En lo que sigue, omitiremos el  $+$  y escribiremos

$$\sum_{i=1}^{r_p} g_{p,i} \Delta_{p,i}$$

**Definición 1.3.11.** El *operador frontera* u *operador borde* de un  $p$ -símlice  $\Delta_p$ , representado por  $\partial(\Delta_p)$ , se define como:

$$\partial(\Delta_p) = \sum_{i=1}^{r_p} [\Delta_p : \Delta_{p-1,i}] \cdot \Delta_{p-1,i}$$

y la frontera de una 0-cadena se define como 0.

Este operador borde se extiende por linealidad a un homomorfismo:

$$\partial : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$$



**Definición 1.3.12.** Sea  $K$  un complejo simplicial orientado.

- (a) Un  $p$ -ciclo es una  $p$ -cadena  $c_p \in C_p(K)$  tal que  $\partial c_p = 0$ . La familia de los  $p$ -ciclos se denota por  $Z_p(K)$
- (b) Un  $p$ -borde es una  $p$ -cadena  $d_p \in C_p(K)$  para la cual existe una  $(p+1)$ -cadena  $c_{p+1} \in C_{p+1}(K)$  tal que  $d_p = \partial c_{p+1}$ . La familia de los  $p$ -bordes se denota por  $B_p(K)$ .

$Z_p(K)$  y  $B_p(K)$  son submódulos de  $C_p(K)$  y además, puesto que  $\partial\partial = 0$ ,  $B_p(K) \subset Z_p(K)$  y el cociente  $Z_p(K)/B_p(K)$  está bien definido.

Este cociente es el  $p$ -ésimo grupo de homología  $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$

**Teorema 1.3.13.** Sea  $K$  un complejo geométrico con dos orientaciones y sean  $K_1$  y  $K_2$  los correspondientes complejos orientados. Entonces los grupos de homología  $H_p(K_1)$  y  $H_p(K_2)$  son isomorfos para todo  $p$ . Es decir, que los grupos de homología son independientes de la orientación elegida sobre el complejo.

Se puede construir también de modo paralelo una homología relativa: Sea  $p \in \mathbb{Z}$  un entero y sean  $K$  y  $K_1$  complejos simpliciales con  $K_1 \subset K$ ,  $K_1$  subcomplejo simplicial de  $K$ . Entonces  $C_p(K_1) \subset C_p(K)$  para todo  $p$  y podemos definir:

$$C_p(K; K_1) = C_p(K)/C_p(K_1)$$

El operador de borde induce homomorfismos:

$$\delta_p : C_p(K; K_1) = C_p(K)/C_p(K_1) \longrightarrow C_{p-1}(K; K_1) = C_{p-1}(K)/C_{p-1}(K_1), \quad \delta_{p-1}\delta_p = 0$$

y como antes, definimos la homología relativa por:

$$Z_p(K; K_1) = \text{Ker}(\delta_p), \quad B_p(K; K_1) = \text{Im}(\delta_{p+1}), \quad H_p(K; K_1) = Z_p(K; K_1)/B_p(K; K_1)$$

## 1.4. Homología singular

**Definición 1.4.1.** Sea  $X$  un espacio topológico. Llamaremos  *$n$ -símplice singular* de  $X$  a una aplicación continua  $\varphi : \Delta_n \rightarrow X$

**Definición 1.4.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Una  *$n$ -cadena singular* de  $X$  es un elemento del grupo abeliano libre con base el conjunto de  $n$  símplices singulares de  $X$ , es decir, una expresión de la forma  $\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$  donde  $\{\varphi_j; j \in J\}$  es la familia de todos los  $n$ -símplices singulares de  $X$  y los  $n_j \in \mathbb{Z}$  son todos cero salvo un número finito.

Denotamos por  $S_n(X)$  al conjunto de las  $n$ -cadenas singulares de  $X$ .

**Definición 1.4.3.** Sea  $X$  un espacio topológico. Dado un  $n$ -símplice singular  $\varphi : \Delta_n \rightarrow X$ , representaremos por  $\partial_i \varphi$  al  $(n-1)$ -símplice singular  $\partial_i \varphi : \Delta_{n-1} \rightarrow X$  definido por:

$$\partial_i \varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Existe un único homomorfismo de grupos

$$\partial_i : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X), \quad \partial_i \left( \sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j \partial_i \varphi_j$$

Con esta notación, llamamos *operador borde*  $\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  al homomorfismo de grupos:

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \dots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$$

**Definición 1.4.4.** Sea  $X$  un espacio topológico

- (a) Un  *$n$ -ciclo singular* es una  $n$ -cadena singular  $c \in S_n(X)$  tal que  $\partial c = 0$ . El conjunto de los  $n$ -ciclos singulares de  $X$  se denota por  $Z_n(X)$
- (b) Un  *$n$ -borde singular* es una  $n$ -cadena singular  $d \in S_n(X)$  para la cual existe una  $(n+1)$ -cadena singular  $e \in S_{n+1}(X)$  tal que  $d = \partial e$ . El conjunto de los  $n$ -bordes singulares de  $X$  se denota por  $B_n(X)$

$Z_n(X)$  y  $B_n(X)$  son submódulos de  $S_n(X)$  y además, puesto que  $\partial \partial = 0$ ,  $B_n(X)$  es un submódulo de  $Z_n(X)$ , el cociente  $Z_n(X)/B_n(X)$  está bien definido. Este cociente es el  *$n$ -ésimo grupo de homología singular de  $X$*

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$$

De modo análogo a la homología simplicial, también se puede considerar una homología singular relativa  $H_n(X; X_1)$  con  $X_1 \subset X$ .

# Capítulo 2

## Espacios filtrados y estratificados

### 2.1. Espacios filtrados

**Definición 2.1.1.** Un *espacio filtrado* es un par  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  formado por un espacio topológico,  $X$ , junto con una filtración por subespacios cerrados. Esto es:

- $X_i$  es cerrado en  $X$  para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$
- $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_{n-1} \subsetneq X_n$

**Nota 2.1.2.** Por convenio, cuando sea necesario en un enunciado, consideraremos extendida la filtración a todos los índices enteros considerando  $X_j = \emptyset \forall j < 0$  y  $X_j = X \forall j > n$ , pero en la definición el número  $n$  es un dato esencial.

Por comodidad muchas veces prescindiremos de escribir la filtración cuando no haya lugar a confusión.

**Definición 2.1.3.** Dado un espacio filtrado  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$ , llamamos:

- *Dimensión formal* de  $X$  y la denotamos  $d(X) = n$  al número  $n$ , que es el número de elementos de la filtración menos uno.
- *$i$ -esqueleto* de  $X$  a cada subespacio  $X_i$
- A cada componente conexa de  $X_i \setminus X_{i-1}$ ,  $S$ , se le llama *estrato* de  $X$  de dimensión formal  $i$  o codimensión formal  $n - i$ , y escribimos  $d(S) = i$ . Los estratos de  $X_n \setminus X_{n-1}$  se llaman *estratos regulares* de  $X$  y denotamos por  $S_X$  a la familia de estratos no vacíos de  $X$ .
- El subespacio  $X_{n-1}$  se llama conjunto *conjunto singular* y también se denota por  $\Sigma$ ,  $X_n \setminus X_{n-1} = X \setminus \Sigma$  se llama parte regular o componente regular del espacio filtrado.

**Observación 2.1.4.** El índice  $i$  en la filtración y la dimensión formal  $d(X)$  no tienen ninguna relación, en general, con el concepto de dimensión geométrica.

**Ejemplo 2.1.5.** Veamos algunos ejemplos sencillos de espacios filtrados:

1. Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  con  $X$  un espacio topológico cualquiera. A la filtración  $X_i = \emptyset \forall i = 0 \dots n-1$  y  $X_n = X$  se le llama *filtración trivial*.
2. Podemos dotar a un intervalo con la siguiente filtración:  $([-n, n], (X_i)_{i=0}^n)$  con  $X_i = [-i, i] \ i \in \{0 \dots n\}$  Para esta filtración:

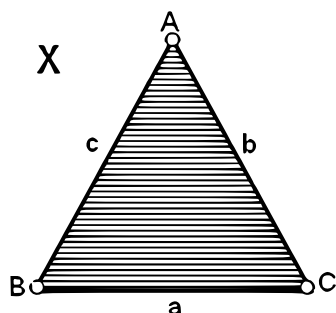
-Dimensión formal:  $n$

- $i$ -esqueleto:  $[-i, -i] \ i \in \{0 \dots n\}$

-Estratos de dimensión  $i$ :  $[-i, -(i-1))$ ,  $((i-1), i] \ i \in \{0 \dots n\}$  y  $\{0\}$  si  $i = 0$

más adelante veremos que este tipo de filtraciones no serán buenas para nuestros propósitos finales.

3. Consideremos un 2-símplice dotado de la filtración natural en la que el  $i$ -esqueleto es la unión de sus caras de dimensión  $i$ ,  $0 \leq i \leq 2$ . En este caso:



-Dimensión formal: 2

-0-esqueleto:  $X_0 = \{A, B, C\}$

-1-esqueleto:  $X_1 = \{a, b, c\}$

-2-esqueleto:  $X_2 = X$

-Estratos de dimensión 0:  $\{A\}, \{B\}, \{C\}$

-Estratos de dimensión 1:  $a \setminus \{B, C\}, b \setminus \{A, C\}, c \setminus \{A, B\}$

-Estratos de dimensión 2:  $X \setminus \{a, b, c\}$

Éste será el estilo de filtraciones con las que vamos a trabajar.

4. Cada complejo simplicial (resp. celular)  $X$  es un espacio filtrado por su esqueleto simplicial (resp. celular). Los estratos son los símlices abiertos (resp. los interiores de las celdas) de  $X$ .

### 2.1.1. Operaciones con espacios filtrados

#### 1. Producto de espacios filtrados

Sean  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$ ,  $(Y, (Y_j)_{j=0}^m)$  espacios filtrados. Se define una filtración natural sobre el producto  $X \times Y$  del siguiente modo:

$$(X \times Y)_i = \bigcup_{j+k=i} X_k \times Y_j = \bigcup_{k=0}^i X_k \times Y_{i-k} \quad i \in \{0 \dots n+m\}$$

Se observa que, efectivamente es una filtración:

$X_k \times Y_{i-k} \subseteq X_k \times Y_{i+1-k}$  pues  $Y_{i-k} \subseteq Y_{i+1-k}$ , por tanto:

$$\bigcup_{k=0}^i X_k \times Y_{i-k} \subseteq \bigcup_{k=0}^i X_k \times Y_{i+1-k} \subseteq \bigcup_{k=0}^{i+1} X_k \times Y_{i+1-k}$$

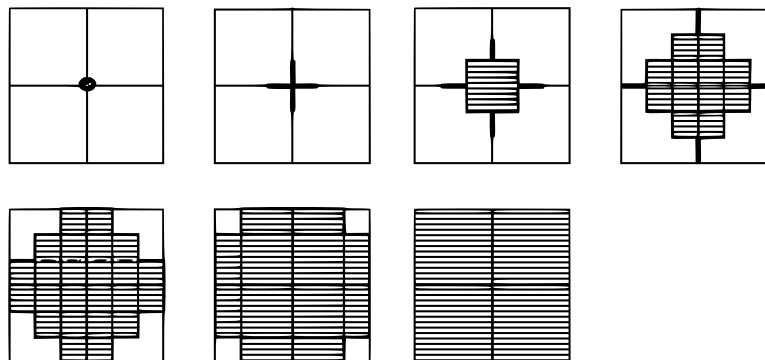
**Ejemplo 2.1.6.** Veamos como se comporta esta filtración en el producto:

a) Producto de dos intervalos con la filtración dada en el ejemplo 2.1.5 ap. 2)

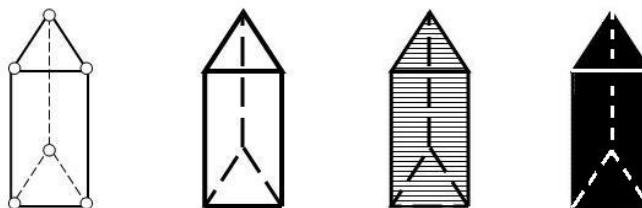
$$X = [-3, 3] \quad X_i = [-i, i] \quad i \in \{0, \dots, 3\}$$

$$Y = [-3, 3] \quad Y_i = [-i, i] \quad i \in \{0, \dots, 3\}$$

$$X \times Y = [-3, 3] \times [-3, 3]$$



b) Producto de un 2-símplice con un 1-símplice con la filtración inducida por sus caras como hemos dado en el ejemplo 2.1.5 ap. 3)



**Observación 2.1.7.** No todas las filtraciones en el producto  $X \times Y$  se pueden escribir como producto de filtraciones.

2. Cono de un espacio filtrado

Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio filtrado. El *cono abierto* de  $X$ ,  $\overset{\circ}{c}X$ , es el cociente  $X \times [0, 1] / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación que identifica todos los puntos de  $X \times \{0\}$  es decir:

$$(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, t_1) = (x_2, t_2), \text{ ó} \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$$

Al punto resultante de identificar todos los puntos de  $X \times \{0\}$  lo llamamos *vértice* del cono y lo denotamos por  $\vartheta$ .

Análogamente el cono cerrado  $\bar{c}X$  es el cociente  $X \times [0, 1] / \sim$  donde la relación de equivalencia es la anterior.

Podemos definir una filtración  $(\overset{\circ}{c}X)_{i=0}^{n+1}$  sobre el cono abierto como sigue:

$(\overset{\circ}{c}X)_i = \overset{\circ}{c}X_{i-1}$  para  $i \in \{0 \dots n+1\}$  con el convenio  $\overset{\circ}{c}\emptyset = \{\vartheta\}$ .

La filtración para el cono cerrado se construye exactamente igual.

A esta filtración se le llama *filtración cónica*

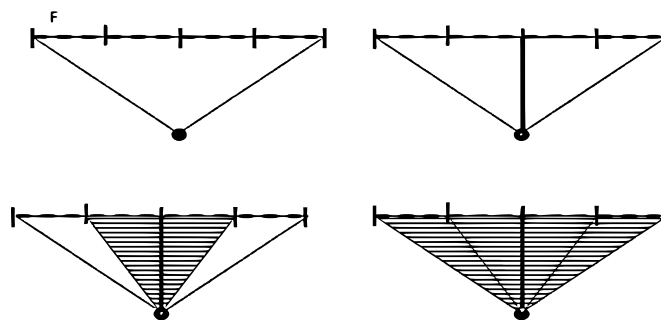
**Ejemplo 2.1.8.** Veamos un ejemplo muy sencillo que nos da la idea de cono abierto y de cómo es la filtración cónica

Sea  $([-2, 2], (X_i)_{i=0}^2)$ ,  $X_i = [-i, i]$ ,  $i \in \{0 \dots 2\}$  espacio filtrado.

Su cono,  $\overset{\circ}{c}[-2, 2] = [-2, 2] \times [0, 1] / [-2, 2] \times \{0\}$  es del siguiente tipo:



y la filtración anteriormente definida es como sigue:



3. Suspensión de un espacio filtrado

**Definición 2.1.9.** Dado un espacio topológico  $X$ , se denomina suspensión de  $X$ , y se denota por  $SX$ , al cociente  $X \times I / \sim$  donde:

$I = [0, 1]$  y  $\sim$  es la relación binaria de equivalencia que identifica los puntos de  $X \times \{0\}$  y los puntos de  $X \times \{1\}$ , es decir

$$(x_1, 0) \sim (x_2, 0), \forall x_1, x_2 \in X \text{ y } (x_1, 1) \sim (x_2, 1), \forall x_1, x_2 \in X$$

Si  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  es un espacio filtrado, definimos una filtración sobre  $SX$  de la forma natural:  $(SX)_i = S(X_i)$ .

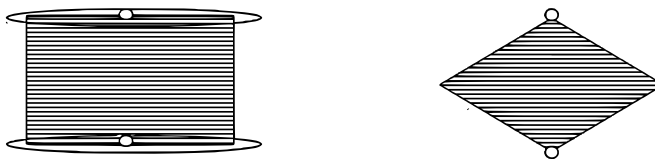
Puesto que  $SX$  se puede ver como unión de dos conos  $SX = \bar{c}X \cup \bar{c}X$  de vértices  $\vartheta_1$  y  $\vartheta_2$  respectivamente, definimos por convenio

$$(SX)_0 = S(\emptyset) = \{\vartheta_1, \vartheta_2\}$$

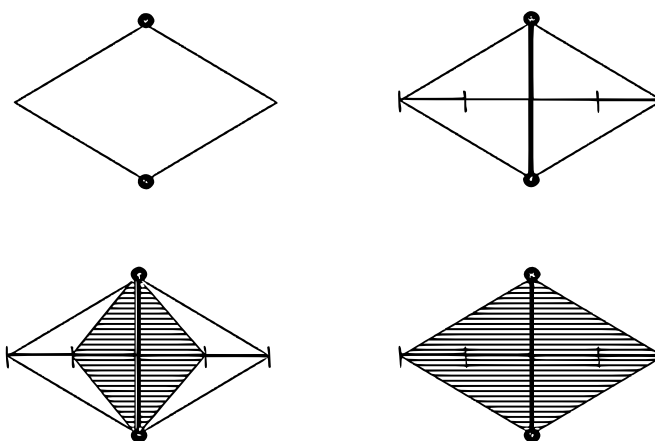
La filtración cónica genera entonces la filtración natural sobre  $SX$  pues  $(SX)_i = \bar{c}X_{i-1} \cap \bar{c}X_{i-1}$ .

**Ejemplo 2.1.10.** Veamos unos ejemplos ilustrativos de la suspensión y de la filtración de la suspensión.

Sea  $([-2, 2], (X_i)_{i=0}^2)$ ,  $X_i = [-i, i], i \in \{0, 1, 2\}$  espacio filtrado.



y la filtración anteriormente definida es como sigue:



4. Conjugación (Join) de dos espacios filtrados

**Definición 2.1.11.** Dados dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , se denomina *conjugación* de  $X$  e  $Y$  y se denota por  $X * Y$  al cociente  $X \times Y \times I / \sim$  donde:

$I = [0, 1]$  y  $\sim$  es la relación binaria de equivalencia:

$(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$  para todos  $x \in X, y_1, y_2 \in X$

$(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$  para todos  $x_1, x_2 \in X, y \in Y$

En consecuencia en  $X * Y$  hay tres tipos de puntos:

- $(x, y, t)$  con  $x \in X, y \in Y, t \in (0, 1)$
- $[x, *, 0] = \{(x, y, 0) \mid y \in Y\}$  con  $x \in X$
- $[*, y, 1] = \{(x, y, 1) \mid x \in X\}$  con  $y \in Y$

Si  $(X, (X_i)_{i=0}^n), (Y, (Y_j)_{j=0}^m)$  son espacios filtrados, se define una filtración natural sobre la conjugación  $X * Y$  del siguiente modo:

$$(X * Y)_k = \bigcup_{r+s=k} X_r * Y_s \text{ con } k \in \{0, 1, \dots, n + m\}$$

**Proposición 2.1.12.** Existen homeomorfismos:

$$\sigma_X : X \times \overset{\circ}{c}Y \rightarrow U_1 \subset X * Y, \sigma_Y : \overset{\circ}{c}X \times Y \rightarrow U_2 \subset X * Y$$

tales que:

- a)  $U_1 \cup U_2 = X * Y$
- b)  $(X * Y)_k = \sigma_X((X \times \overset{\circ}{c}Y)_k) \cup \sigma_Y((\overset{\circ}{c}X \times Y)_k), \forall k$

(Por abuso de lenguaje diremos en lo sucesivo que  $X * Y = X \times \overset{\circ}{c}Y \cup \overset{\circ}{c}X \times Y$ )

*Demostración.*

Los puntos en  $X \times \overset{\circ}{c}Y$  son de dos tipos:

- $(x, (y, t))$  con  $x \in X, y \in Y, t \in (0, 1)$
- $(x, [*, 0]) = \{(x, y, 0) \mid y \in Y\}$  con  $x \in X$

Entonces la aplicación

$$\sigma_X : X \times \overset{\circ}{c}Y \rightarrow X * Y, \sigma_X((x, (y, t))) = (x, y, t), \sigma_X((x, [*, 0])) = [x, *, 0]$$

es obviamente inyectiva y homeomorfismo sobre su imagen, a la que podemos llamar  $U_1$ .



La aplicación  $\sigma_Y$  se define casi de la misma forma. Los puntos de  $\overset{\circ}{c}X \times Y$  son de uno de los tipos siguientes:

- $((x, t), y)$  con  $x \in X, y \in Y, t \in (0, 1)$
- $([*], 0), y) = \{((x, 0), y) \mid x \in X\}$  con  $y \in Y$

Entonces la aplicación

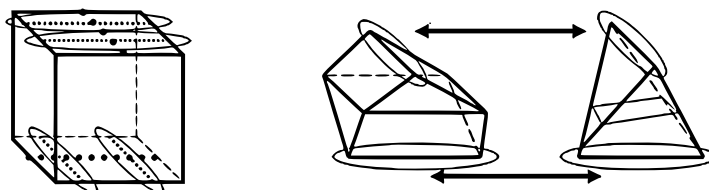
$$\sigma_Y : \overset{\circ}{c}X \times Y \rightarrow X * Y, \sigma_Y(((x, t), y)) = (x, y, 1 - t), \sigma_Y(([*], 0), y)) = [*], y, 1]$$

es también inyectiva y homeomorfismo sobre su imagen a la que podemos llamar  $U_2$ .

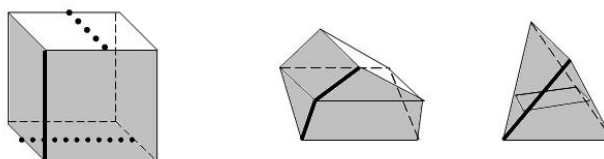
Es obvio que  $X * Y = U_1 \cup U_2$  y esta misma construcción sobre cada  $X_r * Y_s$  prueba la segunda afirmación. ■

**Ejemplo 2.1.13.** Veamos unos ejemplos ilustrativos de la conjugación y de la filtración que genera

Sea  $(X = [0, 1], (X_i)_{i=0}^1, X_0 = \{0\}, X_1 = [0, 1])$  y consideremos la conjugación  $X * X$



y la filtración anteriormente definida es como sigue:



donde hemos marcado en negro los estratos de codimensión formal 2 y hemos sombreado en gris los estratos de codimensión formal 1.

### 2.1.2. Propiedades

Algunas de las propiedades más conocidas para la conjugación, el cono y la suspensión son las siguientes:

1.  $X * \{A\} = \overset{\circ}{c}X$
2.  $X * \mathbb{S}^0 = SX$
3.  $\mathbb{S}\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{n+1}$
4.  $\overset{\circ}{c}\mathbb{S}^n = B^{n+1}$
5.  $c\Delta_n = \Delta_{n+1}$

Las dos primeras propiedades son muy sencillas de demostrar. Las otras tres pese a ser muy intuitivas no son fáciles de escribir.

Veremos, en particular la última de ellas, que además va a resultarnos útil más adelante.

$$\Delta_n * \Delta_0 = \overset{\circ}{c}\Delta_n = \Delta_{n+1}$$

*Demostración.* Consideramos  $\Delta_n$  como símplice afín. Por tanto:

$$x \in \Delta_n \Leftrightarrow \overrightarrow{Ox} = \lambda_0 \overrightarrow{Ov_0} + \lambda_1 \overrightarrow{Ov_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{Ov_n}$$

con  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \forall i \in \{0 \dots n\}$  y  $0 \leq \lambda_i \leq 1$

Tomamos  $A = \Delta_n$  y  $B = \{b\}$  con  $b \notin \text{aff}(\Delta_n)$

PASO 1:  $A + B = \Delta_{n+1}$

“ $\subseteq$ ”

$$x \in A + B \Rightarrow \overrightarrow{Ox} = \alpha \overrightarrow{OL} + \beta \overrightarrow{Ob} \mid \alpha + \beta = 1, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1 \text{ con } L \in A$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OL} = \lambda_0 \overrightarrow{Ov_0} + \lambda_1 \overrightarrow{Ov_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{Ov_n} \mid \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1$$

$$\forall i \in \{0 \dots n\} \Rightarrow \overrightarrow{Ox} = \alpha \lambda_0 \overrightarrow{Ov_0} + \alpha \lambda_1 \overrightarrow{Ov_1} + \dots + \alpha \lambda_n \overrightarrow{Ov_n} + \beta \overrightarrow{Ov_{n+1}}$$

con  $\alpha \lambda_0 + \dots + \alpha \lambda_n + \beta = 1, 0 \leq \alpha \lambda_i \leq 1 \forall i \in \{0 \dots n\}$  y  $0 \leq \beta \leq 1 \Rightarrow x \in \Delta_{n+1}$

“ $\supseteq$ ”

$$x \in \Delta_{n+1} \Rightarrow \overrightarrow{Ox} = \lambda_0 \overrightarrow{Ov_0} + \lambda_1 \overrightarrow{Ov_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{Ov_n} + \beta \overrightarrow{Ov_{n+1}} =$$

Si  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0 \Rightarrow x = v_{n+1} \in A + B$

$$= (\lambda_0 + \dots + \lambda_n) \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \dots + \lambda_n} \overrightarrow{Ov_0} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \dots + \lambda_n} \overrightarrow{Ov_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_0 + \dots + \lambda_n} \overrightarrow{Ov_n} \right) + \beta \overrightarrow{Ob}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Ox} = \alpha \overrightarrow{OL} + \beta \overrightarrow{Ob} \Rightarrow x \in A + B$$

PASO 2:  $A + B \cong A * B$

Si  $x \in \Delta_{n+1} \Rightarrow \overrightarrow{Ox} = \alpha \overrightarrow{OL} + \beta \overrightarrow{Ob}, \alpha + \beta = 1, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, L \in A$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Ox} = (1 - \beta) \overrightarrow{OL} + \beta \overrightarrow{Ob} \text{ con } 0 \leq \beta \leq 1.$$

Consideramos la aplicación:

$$A + B \longrightarrow A * B$$

$$x \longmapsto (L, b, \beta)$$

Veamos que está bien definida, para ello veamos que la descomposición que hemos hecho en la parte anterior del punto  $x$ , es única.

Supongamos que  $\overrightarrow{Ox} = (1 - \beta)\overrightarrow{OL} + \beta\overrightarrow{Ob} = (1 - \mu)\overrightarrow{OL'} + \mu\overrightarrow{Ob}$  con  $\beta \neq \mu$   
 $(1 - \beta)\overrightarrow{OL} - (1 - \mu)\overrightarrow{OL'} = (\mu - \beta)\overrightarrow{Ob} \Rightarrow \overrightarrow{Ob} = \frac{1-\beta}{\mu-\beta}\overrightarrow{OL} + \frac{\mu-1}{\mu-\beta}\overrightarrow{OL'}$  lo que contradice que  $b \notin \text{aff}(\Delta_n)$  por tanto  $\beta = \mu$

- Si  $\mu \neq 1 \Rightarrow (1 - \mu)\overrightarrow{OL} - (1 - \mu)\overrightarrow{OL'} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OL'} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OL'} \Rightarrow L = L'$
- Cuando  $\mu = 1 \Rightarrow \overrightarrow{Ox} = (1 - \beta)\overrightarrow{OL} + \beta\overrightarrow{Ob}, \forall L \in \Delta_n$  pero en  $A*B$  tenemos justo que  $(L, b, 1) \sim (L', b, 1), \forall L, L' \in A$ .

Por tanto la descomposición es única.

Una vez que tenemos que la aplicación está bien definida, se observa fácilmente que es biunívoca y por tanto  $\Delta_n * \Delta_0 = \Delta_{n+1}$

Y de esta propiedad se concluye además :  $\Delta_i * \Delta_j = \Delta_{i+j+1}$  ■

## 2.2. Espacios estratificados

### 2.2.1. Definición, ejemplos y primeras propiedades

Los espacios filtrados son suficientes para una definición de homología de intersección. En cambio, para que la homología construida tenga carácter funtorial es necesario introducir los espacios y aplicaciones estratificados.

**Definición 2.2.1.** Un *espacio estratificado* es un espacio filtrado tal que para cada par de estratos  $S$  y  $T$  con  $S \cap \bar{T} \neq \emptyset$  verifica que  $S \subset \bar{T}$ . A esta condición adicional la llamaremos *condición de frontera*.

**Nota 2.2.2.** La *condición de frontera* es una forma de imponer una cierta *homogeneidad sobre los estratos*.

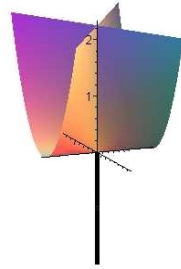
**Ejemplo 2.2.3.** Veamos algunos ejemplos de espacios filtrados que sí son estratificados y otros que no lo son.

1. La filtración del intervalo dada en el ejemplo 2.1.5 apartado 2) no es estratificada:

Para ello, consideramos, por ejemplo, los estratos:

$$\left. \begin{array}{l} S_{2_i} = ((i-1), i] \\ S_{2_{i-1}} = ((i-2), (i-1)] \end{array} \right\} \Rightarrow S_{2_{i-1}} \cap \bar{S}_{2_i} \neq \emptyset \text{ y en cambio } S_{2_{i-1}} \not\subset \bar{S}_{2_i}$$

2. Otro ejemplo menos artificial de espacio filtrado cuya estratificación no verifica la condición de frontera, viene dado por la superficie algebraica real llamada *paraguas de Whitney*:  $W$



$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid zx^2 - y^2 = 0\}$$

con la filtración:

$$X_0 = \emptyset \subset X_1 = \{(x, y, z) \in W \mid x = 0, y = 0\} \subset W = X_2$$

Hay tres estratos:

$S_1 = X_1$  el estrato de codimensión formal 1 y

$S_2 = \{(x, y, z) \in W \setminus X_1 \mid x > 0\}$ ,  $S_3 = \{(x, y, z) \in W \setminus X_1 \mid x < 0\}$  los estratos regulares.

Se observa ahora que:  $S_1 \cap \bar{S}_2 \neq \emptyset$  y en cambio  $S_1 \not\subset \bar{S}_2$

3. Si en el ejemplo anterior, en cambio, añadimos un elemento a la filtración y consideramos la siguiente:

$$\emptyset \subset \{(0, 0, 0)\} \subset \{(x, y, z) \in W : x = 0, y = 0\} \subset W$$

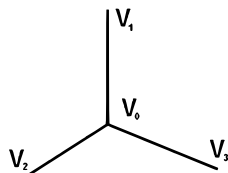
se comprueba fácilmente que ésta sí da lugar a un espacio estratificado.

4. La filtración del símplice de dimensión dos dada en ejemplo 2.1.5 apartado 3) se puede comprobar que sí es estratificada.
5. Las construcciones previas de filtraciones sobre la suspensión, el cono, la conjugación y el producto de espacios estratificados dadas en la sección anterior, son también estratificadas.

Usaremos en particular la del cono abierto de un espacio estratificado  $(X, \mathcal{S}_X)$ , que escrita en términos de la estratificación vendría dada del siguiente modo:

$$\mathcal{S}_{cX} = \{\vartheta\} \sqcup \{S \times (0, 1) : S \in \mathcal{S}_X\}$$

6. Veamos para el siguiente espacio topológico dos estratificaciones distintas: Una que da lugar a un espacio estratificado y otra para la que no se cumple la condición de frontera.



- a) Considerando la filtración  $X_0 = \{V_0\}$  y  $X_1 = X$  se comprueba inmediatamente que da lugar a un espacio estratificado.
- b) En cambio, no da lugar a una estratificación la filtración dada por

$$X_0 = [V_0, V_1] \subset X_1 = \{[V_0, V_1], [V_0, V_2]\} \subset X_2 = X$$

En efecto, considerando los estratos:

$$\left. \begin{array}{l} S_0 = [V_0, V_1] \\ S_1 = (V_0, V_2] \end{array} \right\} \Rightarrow S_0 \cap \bar{S}_1 \neq \emptyset \text{ y en cambio } S_0 \not\subset \bar{S}_1$$

El siguiente ejemplo, nos proporciona una idea sobre la motivación, basada en la dualidad de Poincaré, que llevó a Goresky y MacPherson a definir la homología de intersección.

**Ejemplo 2.2.4.** Sea  $M$  una variedad cerrada de dimensión  $n \geq 2$  y consideramos  $X = SM$ . Veamos que  $X$  no siempre es una variedad:

Podemos escribir la suspensión como unión de dos conos  $SM = \bar{c}M \cup \bar{c}M$ , y sean  $\{N, S\}$  los vértices de dichos conos.

$SM \setminus \{N, S\} \cong M \times (0, 1)$  que es una variedad de dimensión  $n + 1$ . Por ello, si  $X$  fuese una variedad, lo sería de dimensión  $n + 1$  también.

Supongamos ahora que  $N$  (resp.  $S$ ) tiene un entorno  $U \cong \mathbb{R}^{n+1}$  homeomorfo al espacio euclídeo.

En primer lugar:

$$\begin{aligned} H_*(X, X \setminus \{N\}) &\stackrel{(1)}{\cong} H_*(X \setminus (X \setminus U), (X \setminus \{N\}) \setminus (X \setminus U)) = H_*(U, U \setminus \{N\}) \stackrel{(2)}{\cong} \\ &\stackrel{(2)}{\cong} H_*(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \stackrel{(3)}{\cong} H_{*-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \stackrel{(4)}{\cong} H_{*-1}(\mathbb{S}^n) \end{aligned}$$

donde (1) es por escisión, (2) al ser  $U \cong \mathbb{R}^{n+1}$ , (3) usando la transformación natural  $\delta_n$  y (4) por homotopía.

Por otro lado, puesto que  $\mathring{c}M$  es un entorno de  $N$  (resp. de  $S$ )

$$\begin{aligned} H_*(X, X \setminus \{N\}) &\stackrel{(1)}{\cong} H_*(X \setminus (X \setminus \mathring{c}M), (X \setminus \{N\}) \setminus (X \setminus \mathring{c}M)) = H_*(\mathring{c}M, \mathring{c}M \setminus \{N\}) \stackrel{(2)}{\cong} \\ &\stackrel{(2)}{\cong} H_{*-1}(\mathring{c}M \setminus \{N\}) \stackrel{(3)}{\cong} H_{*-1}(M) \end{aligned}$$

donde (1) es por escisión, (2) usando la transformación natural  $\delta_n$  y (3) por homotopía.

Con estas dos condiciones deducimos que si  $X$  es una variedad,  $M$  tiene el tipo de homología de una esfera. En consecuencia, si  $M$  no tiene el tipo de homología de una esfera,  $X$  no es una variedad. Vemos que una construcción topológica muy natural como es la suspensión, transforma una variedad topológica en un espacio singular.

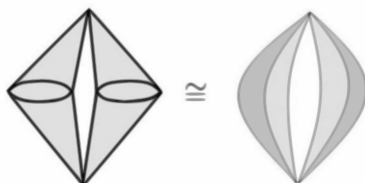
Como se hace habitualmente en geometrías más restringidas, a los puntos que no verifican la condición de tener algún entorno euclídeo les llamamos *puntos singulares* o *singularidades*. Al conjunto de todos estos puntos lo llamamos el *lugar singular* o *conjunto singular* de  $X$ . Cuando el conjunto de singularidades es discreto, decimos que el espacio tiene *singularidades aisladas*.

Pese a ser  $X$  “casi” una variedad (es una variedad salvo en dos puntos) ya se pierde una de las propiedades homológicas más importantes que se verifica para variedades: la dualidad de Poincaré. Para comprobar esta afirmación, tomemos  $M = \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$  cuyos grupos de homología conocemos:

$$H_0(M) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_1(M) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_i(M) = (0), \quad i \geq 2$$

La suspensión  $SM$  la podemos visualizar:



y puesto que sabemos el “significado” de los grupos de homología, podemos afirmar que:

$$H_0(SM) = \mathbb{Z}$$

$$H_1(SM) = (0)$$

$$H_2(SM) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_i(SM) = (0), \quad i \geq 3$$

De hecho, usando Mayer-Vietoris se prueba en general que para  $n \geq 1$ :

$$H_{n+1}(SM) = H_n(M)$$

Es obvio, entonces, que no se verifica la dualidad de Poincaré puesto que:

$$H_0(SM) \neq H_2(SM)$$

La estructura de la suspensión es un tipo muy particular de una estructura topológica que se presenta en muchos campos de la geometría. Se trata de espacios que verifican lo siguiente:

1. Están formados por varias piezas, cada una de ellas una variedad, de distintas dimensiones.
2. Entre todas las anteriores, hay varias piezas de dimensión formal máxima, de modo que la unión de todas ellas es densa.

Goresky-MacPherson observan que para este tipo de espacios no hay dualidad de Poincaré para la homología clásica, pero que tienen una *dualidad geométrica* que puede ponerse de manifiesto de forma topológica construyendo una nueva homología adaptada a las singularidades, la homología de intersección.

**Ejemplo 2.2.5.** Veremos ahora toda una gama de ejemplos, de espacios singulares y no singulares adaptados al modelo a que aludíamos en el ejemplo anterior.

1. Sea  $X$  una variedad algebraica o analítica afín, denotemos por  $\Sigma X$  al lugar singular de  $X$  que es de nuevo una variedad algebraica o analítica, y consideremos la filtración que viene dada de manera natural por los lugares singulares  $\Sigma^i X = \Sigma(\Sigma^{i-1} X)$ .

La filtración resultante es:

$$X = \Sigma^0(X) \supset \Sigma X \supset \Sigma(\Sigma X) \supset \dots \supset \Sigma^n X \supset \emptyset$$

donde  $\Sigma^n X$  y las variedades  $\Sigma^i X - \Sigma^{i-1} X$  son variedades lisas. En este caso el  $(n-1)$ -esqueleto  $\Sigma X$  viene dado como el lugar de los puntos singulares, como variedad algebraica, de  $X$ . Ésta es la razón por la que en una filtración general al conjunto  $X_{n-1}$  se le llama conjunto singular.

Si  $X$  es una variedad sobre un cuerpo  $K$  algebraicamente cerrado, esta filtración da lugar además a un espacio estratificado. En cambio, si el cuerpo  $K$  no es algebraicamente cerrado, no necesariamente los estratos cumplen la condición de frontera.

Tomando  $K = \mathbb{R}$ , en el ejemplo 2.2.3 apartado 2), la filtración considerada (la que no da lugar a una estratificación) es la dada por el lugar singular de  $W$ :

En efecto, dada  $f(x, y, z) = zx^2 - y^2$ , hallamos su lugar singular:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xz = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{x = 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$$

y puesto que éste es una recta, ya es una variedad lisa y por tanto su lugar singular es vacío.

2. Pero también podemos ver la variedad singular  $X$  embebida en una variedad regular  $Y$  y considerar la filtración dada por:

$$Y \supset X \supset \Sigma X \supset \Sigma(\Sigma X) \supset \dots \supset \Sigma^n X$$

3. Como caso particular del anterior, consideremos el conjunto de todas las cuádricas en  $\mathbb{P}_n(K)$  con  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado.

Una cuádrica en  $\mathbb{P}_n(K)$  viene dada, salvo producto por escalares, por una expresión del tipo:

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{ii} x_i^2 = 0$$



que puede representarse por una matriz  $Sim_{n+1}(K)$  de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por ello, cada cuádrica en  $\mathbb{P}_n(K)$  viene representada por un punto en  $\mathbb{P}_N(K)$  con  $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ .

Del mismo modo que una matriz en  $Sim_{n+1}(K)$  determina un punto en  $\mathbb{P}_N(K)$ , dado un punto en  $\mathbb{P}_N(K)$  se puede recuperar la matriz de la cuádrica a la que representa.

Se puede por tanto estratificar  $\mathbb{P}_N(K)$  por rangos de matrices:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_r = \{M \in Sim_{n+1}(K) | rg(M) \leq r\} \\ \Sigma_{n+1} = \mathbb{P}_N(K) \end{array} \right.$$

Veamos en particular que sucede con el caso  $n = 3$ :

$$\Sigma_4 = \{\text{conjunto de todas las cuádricas}\} \cong \mathbb{P}_9(K)$$

$$\Sigma_3 = \{\text{conjunto de todos los conos}\} \cong \text{Variedad de dim. 8 con un lugar singular de dim. 6}$$

$$\Sigma_2 = \{\text{conjunto de pares de planos}\} \cong \text{Variedad de dim. 6 con un lugar singular de dim. 3}$$

$$\Sigma_1 = \{\text{conjunto de todos los planos dobles}\} \cong \text{Variedad lisa de dim. 3}$$

Veamos ahora como se relacionan los diferentes estratos:

**Observación 2.2.6.** Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio estratificado. Los estratos forman una partición sobre  $X$  puesto que  $(X_{i+1} \setminus X_i) \cap (X_i \setminus X_{i-1}) = \emptyset$

**Proposición 2.2.7.** Si  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  es un espacio estratificado, las siguientes propiedades se satisfacen:

- i) Si  $S \subset \bar{S}'$  con  $S \neq S'$  entonces  $d(S) < d(S')$  donde  $d(S)$  es la dimensión formal del estrato  $S$ .
- ii) La relación  $S \preceq S'$  definida en el conjunto de estratos por  $S \subset \bar{S}'$  es una relación binaria de orden
- iii) La clausura de un estrato es unión de estratos de dim. formal menor, es decir,

$$\bar{S} = \bigcup_{S' \preceq S} S'$$

*Demostración.* i)  $S \subset \bar{S}'$ . Como  $X_{d(S')}$  es cerrado tenemos que  $\bar{S}' \subset X_{d(S')}$ . Supongamos que  $d(S) > d(S')$ , entonces  $S \subset X_{d(S)} \setminus X_{d(S)-1} \subset X_{d(S)} \setminus X_{d(S')}$  y por tanto  $S \not\subset X_{d(S')}$  lo cual es absurdo. Concluimos entonces que  $d(S) \leq d(S')$ . Veamos ahora que si  $S \neq S'$  entonces la desigualdad es estricta

$$S \subset X \setminus X_{d(S)-1} \Rightarrow S = S \cap (X \setminus X_{d(S)-1}) \subset \bar{S}' \cap (X \setminus X_{d(S)-1})$$

Si  $d(S) = d(S')$ , puesto que  $S'$  es cerrado en  $X \setminus X_{d(S)-1}$  tenemos

$$S' = \bar{S}' \cap X \setminus X_{d(S)-1} \Rightarrow S' \subset S \Rightarrow S' = S$$

ii) R:  $S \subset \bar{S}$ , por tanto  $S \preceq S$

T: Si  $S \subset \bar{S}'$  y  $S' \subset \bar{S}''$ , por la segunda inclusión  $\bar{S}' \subset \bar{S}''$  y por tanto  $S \subset \bar{S}''$

A: Sean  $S$  y  $S'$  tales que  $S \subset \bar{S}'$  y  $S' \subset \bar{S}$ . Por el apartado anterior,  $S = S'$

iii) La inclusión  $\bigcup_{S' \preceq S} S' \subset \bar{S}$  es obvia.

Para la otra inclusión, dado  $x \in \bar{S}$  puesto que los estratos forman una partición, existe un único estrato  $S'$  tal que  $x \in S'$ .  $\bar{S} \cap S' \neq \emptyset$  y entonces por definición,  $S' \subset \bar{S}$ . Por tanto  $S' \preceq S$  y  $x \in \bigcup_{S' \preceq S} S'$  ■

La siguiente noción de profundidad nos da una medida de cuantos “niveles de estratos” hay realmente en espacio estratificado. Previo a la definición, veamos un ejemplo que nos proporciona la motivación para introducir dicho concepto: Podemos tener sobre un mismo espacio topológico  $X$  las siguientes filtraciones:

- $\emptyset = X_0 = X_1 = \dots = X_{n-1} \subsetneq X_n = X, n \geq 2$
- $\emptyset = Y_0 \subsetneq Y_1 = X$

Ambas filtraciones son la trivial pero en un caso la dimensión formal es  $n$  y el otro es 1. Ambas tendrán en cambio profundidad 0, puesto que no hay estratos no triviales. Esto nos permitirá más adelante, en caso de ser necesario, considerar todas las filtraciones de la misma dimensión formal añadiendo el conjunto vacío el número de veces que sea necesario.

Demos ya la definición:

**Definición 2.2.8.** Sea  $S$  un estrato de un espacio estratificado  $X$  y supongamos que  $S = S_t \prec S_{t-1} \prec \dots \prec S_0$  es la cadena de estratos más larga que contiene a  $S$  como elemento minimal. Llamaremos a  $t$  la *profundidad* de  $S$ . La profundidad de un espacio estratificado  $X$  se define como el supremo de las profundidades de sus estratos.

### 2.2.2. Morfismos entre espacios estratificados

**Definición 2.2.9.** Un morfismo (resp. isomorfismo) estratificado

$$f : (X, \mathcal{S}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{S}_Y) (f : (X, (X_i)_{i=0}^n) \rightarrow (Y, (Y_j)_{j=0}^m))$$

es una aplicación continua entre espacios estratificados tal que, para cada estrato  $S \in \mathcal{S}_X$ , existe un estrato  $S^f \in \mathcal{S}_Y$  con  $f(S) \subset S^f$  y  $m - d(S^f) \leq n - d(S)$ .

Es decir, envía cada estrato de  $X$  de forma continua (resp. homeomorfa) en un estrato de  $Y$  de su misma dimensión.

Un morfismo estratificado *preserva la estratificación* si  $n = m$  y

$$f^{-1}(Y_{n-l}) = X_{n-l}$$

Un morfismo estratificado  $f$  es una *inmersión* si  $f(X) \subset Y$  es un subespacio estratificado y  $(X, \mathcal{S}_X) \rightarrow (f(X), \mathcal{S}_f)$  es un isomorfismo estratificado.

**Observación 2.2.10.** Observamos que una aplicación continua es estratificada si, y sólo si, para cada estrato  $S' \in \mathcal{S}_Y$  sucede:

- $f^{-1}(S') = \emptyset$
- o existe una familia  $\{S_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{S}_X$  tal que:  

$$f^{-1}(S') = \bigcup_{i \in I} S_i \text{ con } m - d(S') \leq n - d(S_i)$$

*Demostración.* Sea  $S' \in \mathcal{S}_Y$ . Distinguimos dos casos:

- $S' \neq S^f$  para cualquier  $S \in \mathcal{S}_X \Rightarrow f^{-1}(S') = \emptyset$
- Existe un  $S \in \mathcal{S}_X$  de modo que  $S' = S^f$ . Sea  $\{S_i | S_i^f = S'\}_{i \in I} \Rightarrow f(S_i) \subset S'$  y  $m - d(S') \leq n - d(S_i) \forall i \in I$   
 $\Rightarrow S_i \subset f^{-1}(f(S_i)) \subset f^{-1}(S') \forall i \in I$ . Por tanto:

$$\bigcup_{i \in I} S_i \subset f^{-1}(S')$$

Supongamos ahora que no se da la igualdad, y que existe

$$x \in f^{-1}(S') \setminus \bigcup_{i \in I} S_i$$

Sea  $T \in \mathcal{S}_X$  el estrato que cumple  $x \in T$ . Por hipótesis,  $T^f \neq S'$ .

Entonces, existe  $S'' \in \mathcal{S}_Y$  de modo que  $T^f = S'' \Rightarrow f(T) \subset S''$

Esto significa que:  $f(x) \in S' \cap S''$  lo cual es absurdo. ■

**Proposición 2.2.11.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación estratificada, la aplicación inducida  $S_f : (\mathcal{S}_X, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}_Y, \preceq)$  definida por  $S_f(S) = S^f$  es creciente.

*Demostración.* Sean  $S_1 \preceq S_2$  en  $\mathcal{S}_X$ . Puesto que  $f$  es continua y  $S_1 \subset \bar{S}_2$ , se da  $f(S_1) \subset f(\bar{S}_2)$ . Esto implica que  $S_1^f \cap \bar{S}_2^f \neq \emptyset$  y por tanto,  $S_f(S_1) \preceq S_f(S_2)$  ■

### 2.2.3. Espacios estratificados en variedades

**Definición 2.2.12.** Un *espacio estratificado en variedades* es un espacio estratificado donde todos los estratos  $i$ -dimensionales son variedades  $i$ -dimensionales, refiriendonos con variedades a variedades diferenciables de clase  $\mathcal{C}^1$

**Ejemplo 2.2.13.** Los que siguen son ejemplos que nos van a resultar útiles más adelante. En particular, el concepto de modelo básico va a resultar clave:

1. Cada variedad  $M$  junto con la filtración trivial, es un espacio estratificado en variedades
2. Si  $M$  es una variedad y  $(X, \mathcal{S})$  es un espacio estratificado en variedades entonces  $(M \times X, \mathcal{S}_{M \times X})$  donde  $\mathcal{S}_{M \times X} = \{M \times S : S \in \mathcal{S}\}$
3. Si  $(X, \mathcal{S}_X)$  es un espacio estratificado en variedades, inmediatamente se sigue que  $(\overset{\circ}{c}X, \mathcal{S}_{\overset{\circ}{c}X})$  es también un espacio estratificado en variedades
4. Un modelo básico es un producto de la forma  $M \times \overset{\circ}{c}L$  donde  $L$  es una variedad y  $(L, \mathcal{S}_L)$  es un espacio estratificado compacto. En particular, si  $L$  es un espacio estratificado en variedades, también lo es  $M \times \overset{\circ}{c}L$

Puesto que  $M$  es una variedad, cada punto de  $M$  posee un entorno isomorfo a un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^k$ . Por esta razón, y puesto que nos interesara trabajar con espacios localmente isomorfos a modelos básicos, nos limitaremos a los de la forma  $\mathbb{R}^k \times \overset{\circ}{c}L$ , pues son más sencillo en la práctica para hacer cálculos. Usaremos la siguiente fórmula que vamos a demostrar a continuación:

$$\mathbb{R}^k \times \overset{\circ}{c}L \simeq \overset{\circ}{c}(\mathbb{S}^{k-1} * L)$$

**Proposición 2.2.14.** Si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos,  $R$  y  $S$  son relaciones de igualdad en  $X$  e  $Y$  respectivamente y  $T$  es una relación de igualdad en  $(X/R) \times (Y/S)$  existe una relación de igualdad  $U$  en  $X \times Y$  tal que:

$$((X/R) \times (Y/S)) / T \simeq (X \times Y) / U$$

Y en consecuencia:

$$\overset{\circ}{c}(X * Y) \simeq \overset{\circ}{c}X \times \overset{\circ}{c}Y$$

*Demostración.* La primera afirmación es inmediata ya que basta definir la relación  $U$ , por:

$$(x, y)U(x', y') \Leftrightarrow (xR, yS)T(x'R, y'S)$$

Y para la segunda observemos que por definición  $\overset{\circ}{c}(X * Y)$  viene dado por las relaciones:

- $X * Y = (X \times Y \times [0, 1])/R$ ,  
donde  $(x, y, t)R(x', y', t') \Leftrightarrow [\{x = x', y = y', t = t'\} \vee \{t = t' = 0, x = x'\} \vee \{t = t' = 1, y = y'\}]$
- $\overset{\circ}{c}(X * Y) = ((X * Y) \times [0, 1])/T$ ,  $((x, y, t)R, u)T((x', y', t')R, u') \Leftrightarrow [\{(x, y, t)R = (x', y', t')R, u = u'\} \vee \{u = u' = 0\}]$

Y  $\overset{\circ}{c}X \times \overset{\circ}{c}Y$  viene definido, como producto de los cocientes por las relaciones:

$$\overset{\circ}{c}X = (X \times [0, 1])/H, (x, t)H(x', t') \Leftrightarrow [\{x = x', t = t'\} \vee \{t = t' = 0\}]$$

$$\overset{\circ}{c}Y = (Y \times [0, 1])/G, (y, u)G(y', u') \Leftrightarrow [\{y = y', u = u'\} \vee \{u = u' = 0\}]$$

Entonces  $\overset{\circ}{c}(X * Y)$  es el cociente de  $X \times Y \times [0, 1] \times [0, 1)$  por la relación  $U$  dada por:

$$(x, y, t, u)U(x', y', z', t') \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, t, u) = (x', y', t', u'), \text{ ó} \\ x = x', u = u', t = t' = 0, \text{ ó} \\ y = y', u = u', t = t' = 1, \text{ ó} \\ u = u' = 0 \end{cases}$$

Y sus puntos son de los tipos:

- $(x, y, t, u) \in X \times Y \times (0, 1) \times (0, 1)$
- $[x, *, 0, u] = \{(x, y, 0, u), y \in Y\}, \forall (x, u) \in X \times (0, 1)$
- $[*, y, 1, u] = \{(x, y, 1, u), x \in X\}, \forall (y, u) \in Y \times (0, 1)$
- $[*, *, *, 0] = \{(x, y, u, t), x \in X, y \in Y, t \in I\}$

con las condiciones obvias de continuidad. Mientras que los de  $\overset{\circ}{c}X \times \overset{\circ}{c}Y$  son:

- $(x, t, y, u) \in X \times (0, 1) \times Y \times (0, 1)$
- $[x, t, *, 0] = \{(x, t, y, 0), y \in Y\}, \forall (x, t) \in X \times (0, 1)$
- $[*, 0, y, u] = \{(x, 0, y, u), x \in X\}, \forall (y, u) \in Y \times (0, 1)$
- $[*, 0, *, 0] = \{(x, y, u, t), x \in X, y \in Y, t \in I\}$

Entonces la aplicación:

$$\mathring{c}(X * Y) \rightarrow \mathring{c}X \times \mathring{c}Y$$

inducida por la aplicación:

$$\varphi : X \times Y \times [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X \times [0, 1] \times Y \times [0, 1]$$

$$\varphi(x, y, t, u) = \begin{cases} (x, u, y, 2tu) & \text{si } t \leq 1/2 \\ (x, 2(1-t)u, y, u) & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases}$$

es un homeomorfismo. ■

Aplicando la proposición a  $\mathbb{S}^{k-1}$  y a una variedad  $L$ , se tiene:

$$\mathring{c}\mathbb{S}^{k-1} \times \mathring{c}L \simeq \mathring{c}(\mathbb{S}^{k-1} * L)$$

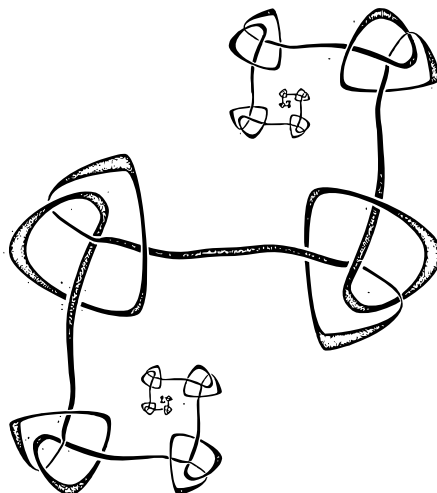
pero  $\mathring{c}\mathbb{S}^{k-1} \simeq \mathbb{R}^k$ , luego:

$$\mathbb{R}^k \times \mathring{c}L \simeq \mathring{c}(\mathbb{S}^{k-1} * L)$$

en particular,  $\mathbb{R} \times \mathring{c}L = \mathring{c}(SL)$ , ya que  $SL \simeq \mathbb{S}^0 * L$  donde recordamos  $S$  denota la suspensión.

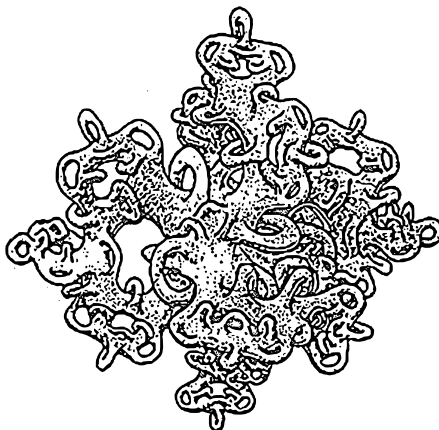
### 2.2.4. Pseudovariedades estratificadas

Llegados a este punto, hemos descrito espacios que se descomponen en union de cerrados, que hemos llamado estratos, de modo que cada uno de ellos es una variedad. Pero esta definición todavía es un poco general y admite casos patológicos. Si consideramos un nudo salvaje embebido en  $\mathbb{R}^3$ ,



el nudo es una 1-variedad, su complementario una 3-variedad y sin embargo los puntos del estrato singular no poseen “entornos cónicos” (No poseen un entorno que sea un modelo básico), pues hay una periodicidad infinita que lo impide.

Lo mismo sucede con un toro con infinitas asas como el de la siguiente imagen debida a Marta Macho.



Trataremos entonces de evitar situaciones de este estilo y para ello exigiremos que el espacio estratificado vaya acompañado de una familia de cartas cónicas que reflejen el modo en el que nos aproximamos a la parte singular.

**Definición 2.2.15.** Daremos la definición de *pseudovariiedad estratificada* por inducción sobre la dimensión:

- Una pseudovariiedad estratificada de dimensión 0 es un conjunto discreto de puntos.
- Para  $n > 0$  una pseudovariiedad estratificada  $n$ -dimensional es un espacio estratificado  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$   $n$ -dimensional tal que:
  1.  $X$  es un espacio estratificado en variedades
  2.  $X_n \setminus X_{n-1}$  es denso
  3. Para cada  $i$ , y para cada  $x \in S \in \mathcal{S}$  con  $S$  estrato de dimensión  $i$ , hay:
    - un entorno abierto  $x \subset U \subset S$
    - un entorno  $N$  de  $x$  en  $X$ , al que llamaremos *entorno distinguido* de  $x$
    - una pseudovariiedad estratificada compacta  $(L, \mathcal{S}_L)$  de dimensión menor que  $X$  (que podría ser vacía (\*)), a la que llamaremos *enlace* de  $x$
    - y un homeomorfismo  $h : U \times \overset{\circ}{c}L \rightarrow N$  tal que:

$$h(U \times (\overset{\circ}{c}L)_{k+1}) = X_{i+k+1} \cap N$$

Llamamos a  $V = Im(\alpha)$  un *entorno básico* de  $x$ , mientras que el par  $(U, \alpha)$  es una *carta* de  $x$ . La familia de cartas es un *atlas* en  $(X, \mathcal{S})$ .

Sin pérdida de generalidad asumiremos que  $\alpha(u, \vartheta) = u \forall u \in U$ , donde  $\vartheta$  es el vértice del cono.

Por tanto,  $U = V \cap S$  es un entorno abierto de  $x$  en  $S$ .

Un espacio topológico  $X$  se llama *pseudovariiedad* si posee una filtración respecto a la cual es una pseudovariiedad estratificada.

(\*)Solo podría ser vacía para el estrato regular. Veamos que:  
Si  $x \in S$  con  $dim S = i < n \Rightarrow L \neq \emptyset$

*Demostración.* Si  $x \in S \Rightarrow \exists V = \mathbb{R}^i \times \overset{\circ}{c} L$  entorno cónico de  $x$ .

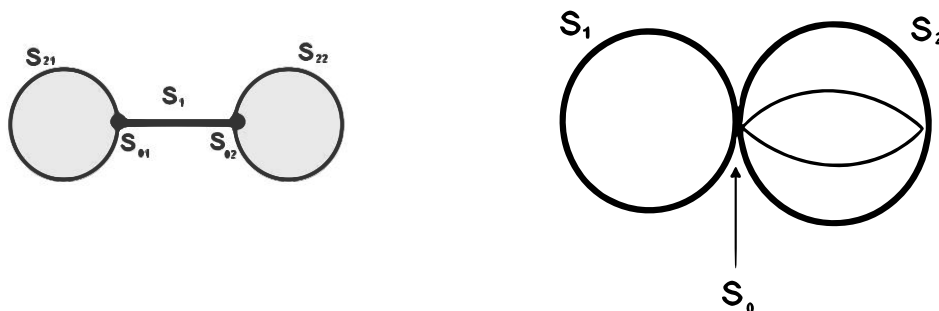
Si  $L = \emptyset \Rightarrow V = \mathbb{R}^i$

Por otro lado,  $\emptyset \neq V \cap (X_n \setminus X_{n-1}) \cong \mathbb{R}^n$  (por la densidad)

Y estas dos cosas son contradictorias. ■



**Observación 2.2.16.** *La condición de densidad de la parte regular es necesaria para evitar casos indeseados del estilo:*



**Observación 2.2.17.** *El homeomorfismo  $h$  de la definición lo único que indica es que pedimos que haya coherencia entre la filtración del modelo básico y la filtración del espacio  $X$*

**Observación 2.2.18.** *La definición de pseudovariedad estratificada se podría dar, de un modo más “fino” por inducción respecto a la profundidad. Puesto que, al estar trabajando con espacios estratificados en variedades, dada una cadena de estratos totalmente ordenada, cada uno de éstos va a tener dimensión estrictamente menor que el anterior.*

**Observación 2.2.19.** *Es más común encontrar que la definición de pseudovariedad debe satisfacer  $X_{n-1} = X_{n-2}$  (es decir, no tiene estratos de codimensión formal 1). Nos referiremos a éstas como pseudovariedades estratificadas clásicas y análogamente llamaremos pseudovariedad clásica a un espacio que posea una filtración respecto a la que es una pseudovariedad estratificada clásica.*

**Ejemplo 2.2.20.**

1. Un modelo básico  $U \times \overset{\circ}{c}L$  es una pseudovariedad estratificada si  $(L, \mathcal{S}_L)$  es una pseudovariedad estratificada compacta.
2. Si  $M$  es una variedad y  $X$  es una pseudovariedad estratificada, entonces  $M \times X$  es una pseudovariedad estratificada
3. Cada subconjunto abierto de una pseudovariedad estratificada es de nuevo una pseudovariedad estratificada
4. La suspensión de una variedad compacta, con la filtración natural que ya conocemos, es una pseudovariedad estratificada.
5. El siguiente ejemplo hace hincapié, de nuevo, en el hecho de que sobre un espacio topológico, la elección de la filtración es algo crítico.

Sea  $M$  una  $n$ -variedad compacta con frontera  $\partial M$ .

- Si consideramos  $M$  con la filtración dada por  $\partial M \subset M$ , entonces los puntos interiores de  $M$  tienen entornos distinguidos de la forma  $\mathbb{R}^n \times \overset{\circ}{c}\emptyset$  y los puntos de la frontera, entornos distinguidos de la forma  $\mathbb{R}^{n-1} \times \overset{\circ}{c}L$  donde  $L$  es un conjunto unipuntual. Por tanto,  $M$  con dicha filtración es una pseudovariedad estratificada.
- Si en cambio, consideramos  $M$  junto con la filtración trivial,  $\emptyset \subset M$ , entonces  $M$  no es una pseudovariedad estratificada.

De hecho,  $M$  no es siquiera un espacio estratificado en variedades.

(Las variedades con frontera no son variedades técnicamente, pues los puntos de la frontera no poseen ningún entorno isomorfo a un espacio euclídeo)

### Pseudovariedades lineales a trozos

Recordamos que un espacio  $X$  se dice *lineal a trozos (PL)* si admite una triangulación, es decir, si es homeomorfo a un complejo simplicial localmente finito. De hecho pensamos en  $X$  dotado con una clase de “triangulaciones admisibles”, donde decir que una triangulación sobre  $X$  es admisible, significa que es compatible con la triangulación de  $X$  es decir que ambas tienen una subdivisión común. Así cualquier subdivisión de una triangulación admisible, será también admisible.

Un espacio PL es un *espacio filtrado PL* si tiene una triangulación admisible de modo que cada esqueleto de  $X$  es un subcomplejo simplicial.

Una *pseudovariedad estratificada PL* es una pseudovariedad estratificada donde los estratos deben ser variedades PL, los enlaces pseudovariedades PL de dimensión menor y el homeomorfismo  $h$  también debe ser lineal a trozos.

**Ejemplo 2.2.21.** Si  $M$  es una variedad compacta PL, entonces la suspensión  $SM = \bar{c}M \cup \bar{c}M$  junto con la filtración  $\{N, S\} \subset SM$  donde  $N, S$  son los vértices de cada uno de los conos es una pseudovariedad estratificada PL compacta.

Además, si  $\dim(M) \geq 1$ ,  $SM$  es una pseudovariedad estratificada PL compacta clásica.

**Otros tipos de pseudovarietades estratificadas** Recogeremos aquí a título de ejemplo, algunos tipos de estructuras que aparecen en la literatura y que son casos particulares de nuestros objetos. Daremos definiciones y ejemplos y enunciaremos, sin pruebas, algunas de sus propiedades características.

**Pseudovarietades simpliciales clásicas** Las pseudovarietades simpliciales no son sino la generalización  $n$ -dimensional de la triangulación de superficies. Una *pseudovarietad simplicial de dimensión  $n$*  es un complejo simplicial tal que:

1. Cada símplice es cara de algún  $n$ -símplice para un  $n$  fijo.
2. Cada  $n - 1$ -símplice es cara de exactamente dos  $n$ -símplices.

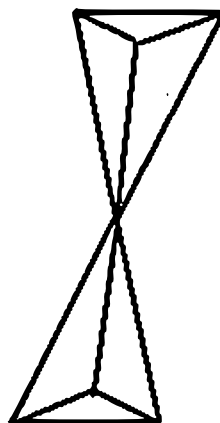
Esta definición nace como una primera aproximación a la construcción de una variedad  $n$ -dimensional.

- Se comienza con todos los símplices de la misma dimensión  $n$  puesto que una variedad posee dimensión homogénea (todos los puntos tienen entornos de la misma dimensión).

De este modo, no puede haber símplices de dimensión mayor que  $n$  y cualquier símplice de dimensión menor que  $n$  no puede estar libre, todos ellos deben estar unidos como caras de  $n$ -símplices.

- En particular, no puede haber  $n - 1$ -símplices libres, pues no estamos considerando variedades con frontera. Por ello, cada cara  $n - 1$  dimensional deber ir unida a otra de la misma dimensión. De hecho, cada una de estas caras debe estar unida exactamente a otra de la misma dimensión, pues en otro caso no obtendríamos una variedad  $n$ -dimensional.

La pregunta que surge en este contexto es: ¿Hemos construido una variedad? y la respuesta es que no necesariamente. Está claro que cualquier punto en el interior de un  $n$ -símplice o una cara  $(n - 1)$ -dimensional posee un entorno euclídeo, pero las cosas no tienen porque ser así para las caras en dimensión más baja, como bien podemos observar en la imagen de la derecha.



Por tanto, no hemos conseguido construir una variedad, pero todos los puntos singulares van a aparecer en el  $(n - 2)$ -esqueleto. Hemos obtenido realmente una pseudovarietad clásica PL.

**Pseudovariedades normales** Las pseudovariedades estratificadas normales fueron estudiadas por G.Padilla en [11]

**Definición 2.2.22.** Una pseudovariiedad estratificada se dice *normal* si el enlace de cada punto es conexo.

**Lema 2.2.23.** Si  $X$  es una pseudovariiedad estratificada normal, entonces:

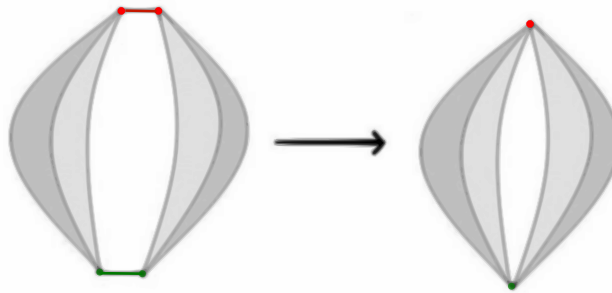
- Cada enlace de  $X$  es una pseudovariiedad estratificada normal.
- Si  $X$  es conexo, entonces  $X$  tiene un único estrato regular.

**Definición 2.2.24.** Sea  $X$  una pseudovariiedad estratificada  $n$ -dimensional. Una *normalización* de  $X$  es una pseudovariiedad estratificada  $n$ -dimensional  $\hat{X}$  junto con una aplicación  $p : \hat{X} \rightarrow X$  tal que:

1.  $p$  es un morfismo propio sobreyectivo
2.  $p$  preserva la estratificación
3. La restricción de  $p$  a  $\hat{X} - \Sigma_{\hat{X}}$  es un homeomorfismo sobre  $X - \Sigma_X$
4. Para cualquier punto  $x \in \Sigma_X$ ,  $p^{-1}(x)$  es una unión disjunta de puntos y la cantidad de dichos puntos es igual al número de componentes regulares del enlace de  $x$ .

**Proposición 2.2.25.** Una pseudovariiedad estratificada PL  $n$ -dimensional  $X$ , posee una única normalización.

**Ejemplo 2.2.26.** La pseudovariiedad construida en 2.2.1 no es normal. Su normalización es  $SS^1 \sqcup SS^1$  y el morfismo de normalización, el cociente que identifica los dos “vértices superiores” y los dos “vértices inferiores”.



**Espacios estratificados de Whitney** Supongamos que nuestro espacio estratificado  $X$  es un subespacio cerrado de una variedad lisa  $M$ . En particular, este será el caso si uno estudia variedades algebraicas o analíticas.

**Definición 2.2.27.** El espacio estratificado  $X \subset M$  tiene *estratificación de Whitney* si:

1. Cada estrato de  $X$  es una subvariedad de  $M$  lisa, localmente cerrada.
2. CONDICIÓN A:
  - Si  $\{x_i\} \subset S'$  es una sucesión de puntos en un estrato  $k$ -dimensional  $S'$  que convergen a un punto  $x$  en un estrato  $S \subset \bar{S}'$
  - Si además los espacios tangentes  $k$ -dimensionales  $T_{x_i}S'$  convergen a un subespacio  $k$ -dimensional  $V$  de  $T_xM$

Entonces  $T_xS \subset V$

3. CONDICIÓN B:

Si a las hipótesis en la condición A añadimos la siguiente:

- $\{y_i\} \subset S$  es una sucesión de puntos también convergente a  $x$  tal que la sucesión de líneas secantes entre  $x_i$  e  $y_i$  converge a una línea  $l$ .

Entonces  $l \subset V$

Para entender la condición  $B$  se debe escoger cartas coordenadas locales de  $M$  alrededor de  $x$ . De hecho, se puede mostrar que la condición es independiente de esta elección. Además en [8], Mather prueba que la condición B implica la condición A.

Las condiciones de Whitney fueron propuestas para estudiar singularidades de variedades algebraicas, pero, como ya hemos visto con la definición de espacio estratificado, la *filtración natural* de la variedad obtenida tomando como esqueletos de la filtración los lugares singulares sucesivos no siempre cumple estas condiciones:

**Ejemplo 2.2.28.** En 2.2.3 apartado 2) vimos que la filtración natural sobre el paraguas de Whitney, no daba lugar a un espacio estratificado. Pero también fallaría la condición A, pues tomando una sucesión  $\{x_i\}$  en el eje  $X$  positivo convergiendo al origen, se comprueba que no se dan las condiciones de Whitney. Aunque en este ejemplo técnicamente no se puede hablar de dichas condiciones porque el eje no está contenido en el cierre de los otros estratos. En cambio, en el apartado 3) dábamos una filtración que se puede comprobar que sí verifica las condiciones.

De hecho, los conjuntos algebraicos, semi-algebraicos, analíticos y sub-analíticos pueden ser todos filtrados de modo que posean una estratificación de Whitney.

**Espacios estratificados de Thom-Mather** Estos espacios se usan frecuentemente cuando se quieren utilizar argumentos analíticos sobre espacios estratificados. La idea es que cada estrato debe poseer un entorno tubular, pero los tubos de los diferentes estratos deben interactuar en cierto modo.

**Definición 2.2.29.** Para  $0 \leq k \leq \infty$  el subespacio estratificado en variedades  $X$  es un *espacio  $\mathcal{C}^k$  de Thom-Mather* si:

1. Cada estrato de  $X$  es una variedad  $\mathcal{C}^k$
2. Hay un sistema tubular  $\{T_i, \pi_i, \rho_i\}$  tal que:
  - $T_i$  es un entorno abierto de  $S_i$  en  $X$  (llamado entorno tubular)
  - $\pi_i : T_i \rightarrow S_i$  es una retracción (llamada la retracción local)
  - $\rho_i : T_i \rightarrow [0, \infty)$  es una aplicación tal que  $\rho_i^{-1}(0) = S_i$  (Es una medida de la distancia radial al estrato)
3. Para cada par  $S_i, S_j$ , si  $T_{ij} = T_i \cap S_j$  y denotamos  $\pi_{ij} := \pi_i|_{T_{ij}}$ ;  $\rho_{ij} := \rho_i|_{T_{ij}}$  entonces la aplicación  $(\pi_{ij}, \rho_{ij}) : T_{ij} \rightarrow S_i \times (0, \infty)$  es una submersión  $\mathcal{C}^k$   
 Esto quiere decir que  $\rho_i$  y  $\pi_i$  tienen un comportamiento estable.
4. Si  $S_i, S_j, S_k$  son estratos y  $x \in T_{jk} \cap T_{ik} \cap \pi_{jk}^{-1}(T_{ij})$ , entonces:

- $\pi_{ij}\pi_{jk}(x) = \pi_{ik}(x)$

Esto quiere decir que da lo mismo hacer una retracción los puntos de  $S_k$  a  $S_i$  directamente, a retraer primero en  $S_j$  y luego de  $S_j$  a  $S_i$ .

Pero para que esta afirmación tenga sentido se necesita:

- Que  $x \in S_k$  esté en el tubo de  $S_i$ , pero también en el de  $S_j$ :  
 $T_{jk} \cap T_{ik}$
- Que la imagen por  $\pi_j$  de  $x$  esté en  $S_j$ :  $\dots \cap \pi_{jk}^{-1}(T_{ij})$

- $\rho_{ij}\pi_{jk}(x) = \rho_{ik}(x)$

Que nos dice que la retracción local a  $S_j$  no varía la distancia radial de un punto al estrato  $S_i$ .

Los espacios estratificados de Whitney siempre poseen estratificaciones de Thom Mather  $\mathcal{C}^\infty$ . Además, los espacios estratificados de Thom Mather  $\mathcal{C}^\infty$  pueden ser triangulados con una triangulación compatible con su filtración. Por tanto, si  $X$  es un espacio estratificado de Thom Mather  $n$ -dimensional tal que  $X \setminus \Sigma_X$  es denso, entonces  $X$  es una pseudovariiedad PL. Tenemos, por ejemplo, que las variedades algebraicas complejas irreducibles pueden ser estratificadas como pseudovariiedades PL clásicas.

# Capítulo 3

## Homología de intersección

### 3.1. Perversidades

La idea para definir la homología de intersección es considerar los símlices y cadenas ordinarios pero imponiendo algunas limitaciones sobre el modo en que las cadenas interactúan con los diferentes estratos. La forma de poner estas limitaciones, viene dada en términos de un *parámetro de perversidad* (o simplemente *perversidad*). El modo de elegir este parámetro no es único, sino que hay muchas posibilidades, por tanto, realmente hay muchas homologías de intersección distintas.

En este apartado, daremos la definición actual de perversidad, la cual, desde los primeros trabajos de Goresky y MacPherson ha evolucionado considerablemente:

En primer lugar, cuando Goresky y MacPherson introdujeron por primera vez su homología de intersección, requerían que sus parámetros de perversidad, verificasen unas condiciones muy rígidas. Sus perversidades, a las que llamaremos *GM-perversidades* son funciones definidas sobre la codimensión formal de los estratos

$$\bar{p} : \{2, 3, 4, \dots\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

tales que:

1.  $\bar{p}(2) = 0$
2.  $\bar{p}(k) \leq \bar{p}(k + 1) \leq \bar{p}(k) + 1$

El número  $k$  representa la codimensión formal de los estratos mientras que  $\bar{p}(k)$  controla el modo en el que se permite interactuar a una cadena con dichos estratos.

Las tres perversidades siguientes tienen una importancia especial en la teoría, las dos primeras son los casos extremos de perversidades, y la tercera

asocia a cada perversidad su dual en una correspondencia que juega un papel “paralelo” al de dimensión-codimensión en las teorías clásicas:

- La GM-perversidad mínima es la perversidad  $\bar{0} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$
- La GM-perversidad máxima, la “top perversity”  $\bar{t} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Perversidades duales:

Dada  $\bar{p}$  una GM-perversidad se define la GM-perversidad dual como  $D\bar{p}(k) = \bar{t}(k) - \bar{p}(k) = k - 2 - \bar{p}(k)$ .

A ésta la denotaremos normalmente por  $\bar{q}$ .

Observación:  $D(D\bar{p}) = \bar{p}$

Se pueden ver entonces las perversidades como sucesiones

$$\{\bar{p}(2), \bar{p}(3), \bar{p}(4), \dots\}$$

comprendidas entre la mínima y la máxima para el orden lexicográfico con un decalaje máximo entre términos sucesivos de una unidad.

Las condiciones impuestas por Goresky y MacPherson a los parámetros de perversidad se deben a que en su teoría se busca dos propiedades:

1. Los grupos de homología de intersección deben ser un invariante topológico, y por ello independientes de la estratificación.
2. Además deben satisfacer una dualidad de Poincaré para pseudovariedades estratificadas.

Como tendremos ocasión de ver a lo largo de toda la memoria y en particular en el próximo apartado, la homología de intersección es muy sensible a los cambios de perversidad, de hecho, más adelante en la sección 3.5, cuando introduzcamos la homología de intersección y sepamos calcularla, veremos porque son necesarias estas condiciones para el objetivo de Goresky y MacPherson.

**Observación 3.1.1.** *Si nos fijamos, no tenemos información en lo referente a los estratos de codimensión formal 1. Esto sucede porque Goresky y MacPherson definieron su homología de intersección pensando en pseudovariedades estratificadas PL clásicas, en las que recordamos, no existían dichos estratos. Además, también veremos más adelante en la sección 3.5 que para obtener la dualidad de Poincaré que ellos buscan no cabe que existan dichos estratos.*

Si en cambio buscamos unas teorías de homología que prescindan de una o las dos propiedades, esto es, sustituyendo la invariancia topológica por condiciones más fuertes sobre las aplicaciones y omitiendo la dualidad podemos



considerar perversidades más generales. Esta pérdida no debe ser vista como algo negativo, sino como una oportunidad de estudiar mejor qué información proporciona la estratificación.

De hecho, escogiendo una generalización adecuada para la homología de intersección, todavía se pueden mantener los resultados de dualidad. Lo que complica ésta elección es el hecho de que hay una gran variedad de aproximaciones a la homología de intersección con las que empezar. El trabajo de encontrar las versiones “adecuadas” de dichas teorías cuando se permiten perversidades más generales ha sido llevado a cabo por Friedmann y por Saralegi, como nos explica el primero en [6].

¿Pero, a qué hacemos referencia cuando hablamos de perversidades más generales?

Avanzando en el tiempo, por un lado, en [7] King define las perversidades laxas:

**Definición 3.1.2.** Una *perversidad laxa* es una función arbitraria de la codimensión formal de los estratos  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  en  $\mathbb{Z}$

Introduce este concepto porque para tener un teorema de Mayer-Vietoris, “invariancia homotópica”, etc no se necesita ninguna condición adicional sobre las perversidades. King prueba además que para la invariancia topológica es suficiente la segunda condición de GM.

Dentro de las perversidades laxas, destacan las subperversidades, que son aquellas en las que para algún  $k$ ,  $\bar{p}(k) < 0$  y también las superperversidades, que son aquellas que para algún  $k$  exceden la “top perversity”, es decir,  $\bar{p}(k) \geq k - 2$ .

Finalmente, se consideran unas perversidades, que son funciones totalmente arbitrarias. Pues en principio, dos estratos de la misma dimensión pueden tener una naturaleza distinta con lo que no tiene mucho sentido exigirles que tomen la misma perversidad.

Se define una *perversidad general*  $\bar{p}$  como una función

$$\bar{p} : \{ \text{Estratos singulares de } X \} \rightarrow \mathbb{Z}$$

De hecho, adaptando a estas perversidades la condición primera de GM del siguiente modo:

$$\text{Si } S \preceq S' \Rightarrow \bar{p}(S) \leq \bar{p}(S') \leq \bar{p}(S) + \text{codim}(S') - \text{codim}(S)$$

y es posible mantener una “invariancia respecto a refinamientos” de la estratificación y una dualidad de Poincaré

En nuestro caso, nos limitaremos a trabajar con perversidades laxas.

## 3.2. Homología de intersección simplicial

Una vez tenemos los espacios topológicos con los que vamos a trabajar y hemos introducido la definición de perversidad, estamos en condiciones de definir la homología de intersección. Como ya se ha comentado al introducir el concepto de espacio estratificado, los espacios filtrados son suficientes para definir dicha homología. Por tanto, por el momento vamos a considerar espacios filtrados en general (sus estratos no están obligados a verificar la condición de frontera).

De un modo paralelo a como hicimos en el capítulo primero, trataremos en primer lugar con una versión simplicial que nos permitirá visualizar el efecto que las distintas perversidades provocan respecto al modo de interactuar los símlices con los estratos.

Llamaremos *espacio simplicial filtrado* a un espacio filtrado  $X$  con una triangulación de modo que cada esqueleto de la filtración sea un subcomplejo simplicial (no necesariamente un esqueleto simplicial)

**Definición 3.2.1.** Sea  $X$  un espacio simplicial filtrado dotado de una perversidad laxa  $\bar{p}$ , y sea  $C_*(X)$  el complejo de cadenas de símlices orientados de  $X$  que hemos definido en 1.3.12.

Diremos que un  $i$ -símlice  $\sigma$  de  $X$  es  $\bar{p}$ -admisibile si para cada estrato singular  $S \subset X$  de codimensión formal  $k$  se da la condición:

$$(1) \quad \dim(\sigma \cap S) \leq i - k + \bar{p}(k)$$

Esta condición solo tiene sentido comprobarla para  $0 \leq i \leq m$  con  $m$  la dimensión del complejo simplicial asociado al espacio topológico  $X$ .

Definimos  $\dim(\emptyset) = -\infty$ . Si la condición anterior se verifica con respecto a un estrato  $S$ , diremos que  $\sigma$  es  $\bar{p}$ -admisibile con respecto al estrato  $S$ .

**Nota 3.2.2.** La definición original que dieron GM es en términos de los elementos de la filtración:

$$(2) \quad \dim(\sigma \cap X_{n-k}) \leq i - k + \bar{p}(k)$$

que es una condición más fuerte que (1).

De hecho, si  $X_{n-k-2} \subsetneq X_{n-k-1} = X_{n-k}$  y  $S \subset X_{n-k-1} \setminus X_{n-k-2}$ :

- De (1) obtenemos la condición  $d(\sigma \cap S) \leq i - k - 1 + \bar{p}(k)$
- (2) da lugar a dos condiciones:

1.  $d(\sigma \cap X_{n-k}) \leq i - k + \bar{p}(k)$
2.  $d(\sigma \cap X_{n-k-1}) \leq i - k - 1 + \bar{p}(k)$

Pero se puede comprobar que si la perversidad es GM (en particular,  $\bar{p}(k) \leq \bar{p}(k+1) \leq \bar{p}(k) + 1$ ) entonces (1) y (2) son equivalentes.

Al considerar perversidades más generales (Como las perversidades laxas) Friedmann y Saralegi prefieren trabajar en términos de estratos.

**Observación 3.2.3.** La condición  $\dim(\sigma \cap S) \leq i - k$  exige que  $\sigma$  esté en posición general (contacto minimal con  $X_{n-k}$ ). Sumar  $\bar{p}(k)$  permite variar este contacto y éste es de hecho el modo en que las perversidades actúan.

**Observación 3.2.4.** No hemos definido la perversidad sobre los estratos regulares, pero a veces aparece  $\bar{p}(0) = 0$ . Veamos el motivo: Sea  $\sigma$  un  $i$ -símplice.

$$\dim(\sigma \cap S) \leq i - 0 + \bar{p}(0) \quad \text{entonces:}$$

- Si  $\bar{p}(0) \geq 0$  el símplice es  $\bar{p}$ -admisibile.
- Si  $\bar{p}(0) < 0 \Rightarrow \dim(\sigma \cap S) \leq i - 1 \Rightarrow \sigma \not\subset S$ .

Por tanto, si  $\bar{p}(0) < 0$  no hay ningún símplice admisibile que intersekte a  $S$  y por esta razón, no tiene sentido considerar estos casos.

Como la condición es vacía para todo  $\bar{p}(0) \geq 0$  por comodidad convenimos  $\bar{p}(0) = 0$ .

Una cadena  $\xi \in C_p(X)$  es  $\bar{p}$ -admisibile si todos los símplices de  $\xi$  (aquellos con coeficientes no nulos) son  $\bar{p}$ -admisibles.

Diremos que una cadena  $\xi \in C_p(X)$  es de intersección para  $\bar{p}$  si tanto  $\xi$  como  $\partial\xi$  son cadenas  $\bar{p}$ -admisibles. Denotaremos por  $C_*^{\bar{p}}(X)$  al complejo de cadenas de intersección simplicial,  $Z_*^{\bar{p}}(X)$  al de ciclos,  $B_*^{\bar{p}}(X)$  al de ciclos frontera y  $H_*^{\bar{p}}(X)$  al de grupos de homología de intersección simplicial.

**Observación 3.2.5.**  $C_*^{\bar{p}}(X)$  es realmente un complejo de cadenas

**Observación 3.2.6.** La condición (1) nos proporciona inmediatamente una acotación para aquellas perversidades que nos van a dar alguna información.

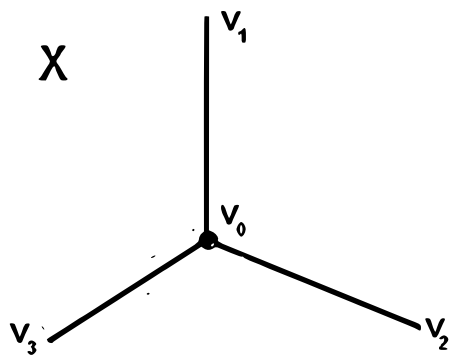
- Si  $\bar{p}(k) \geq k \Rightarrow i - k + \bar{p}(k) \geq i \geq \dim(\sigma \cap S)$  para cualquier estrato. Por tanto todo símplice es  $\bar{p}$ -admisibile y la homología de intersección coincide con la homología clásica.
- Si  $\bar{p}(k) < k - i \Rightarrow \dim(\sigma \cap S) \leq i - k + \bar{p}(k) < i - k + k - i = 0$ . Por tanto para estas perversidades solo serán  $\bar{p}$ -admisibles los  $i$ -símplices que no interactúan con la filtración ( $\dim(\sigma \cap S) = -\infty$  para todo estrato  $S$ ).

Tenemos entonces una cota inferior para las perversidades: Si  $\bar{p}(k) < k - m$ , los únicos símplices  $\bar{p}$ -admisibles son aquellos que no interactúan con ningún estrato (salvo los regulares).

Veamos a continuación algunos ejemplos que nos permitirán observar como al trabajar con distintas perversidades conseguimos información topológica de nuestro espacio que no se consigue con la homología simplicial clásica. Podremos observar también que esta información dependerá en gran medida de la filtración y la perversidad tomadas, y que solamente será útil cuando la filtración posea cierto sentido.

**Ejemplo 3.2.7.** Consideremos el complejo simplicial formado por tres 1-símplices con un solo vértice en común.

1. Tomemos la filtración más intuitiva, que es aquella en la que colocamos un solo elemento en la filtración que consta del vértice en el que se solapan los 1-símplices.



$$\{V_0\} = X_0 \subset X_1 = X$$

$X$  tiene cuatro estratos:

-regulares:  $X \setminus \{V_0\}$  determina tres estratos  $S_1, S_2, S_3$

-singular:  $\{V_0\}$

$$\bar{p}(0) = 0, \bar{p}(1) \in \mathbb{Z}$$

Veamos la  $\bar{p}$ -admisibilidad de los distintos  $i$ -símplices del complejo.

- 0-símplices ( $v$ )

$$\dim(v \cap \{V_0\}) \leq \dim(v) - \text{codim}(\{V_0\}) + \bar{p}(1) = 0 - 1 + \bar{p}(1)$$

- Si  $v = V_0 \Rightarrow 0 \leq \bar{p}(1) - 1 \Rightarrow \bar{p}(1) \geq 1$
- Si  $v \neq V_0 \Rightarrow -\infty \leq \bar{p}(1) - 1 \Rightarrow \bar{p}(1) \in \mathbb{Z}$

- 1-símplices ( $e$ )

$$\dim(e \cap \{V_0\}) \leq \dim(e) - \text{codim}(\{V_0\}) + \bar{p}(1) = 1 - 1 + \bar{p}(1)$$

- Para todo  $e$ ,  $0 \leq \bar{p}(1) \Rightarrow \bar{p}(1) \geq 0$

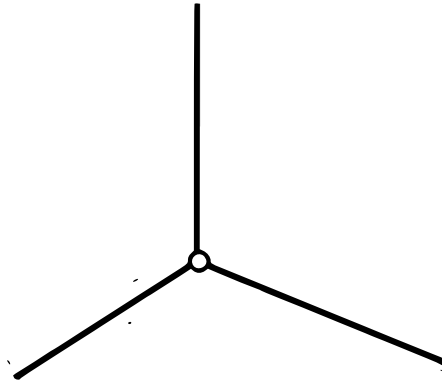
Distinguimos, por tanto 3 casos

- $\bar{p}(1) \geq 1$

Todos los símplices son admisibles, entonces:

$$H_*^{\bar{p}}(X) = H_*(X)$$

- $\bar{p}(1) = 0$



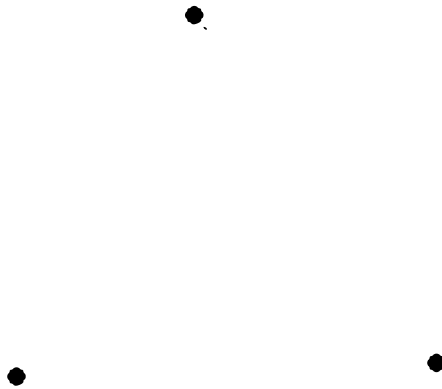
Observamos que  $[V_0, V_i]$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$  no son admisibles como cadenas, pero si  $[V_0, V_i] - [V_0, V_j]$ . Entonces:

$$H_0^{\bar{p}}(X) \approx \mathbb{Z}$$

$$H_1^{\bar{p}}(X) \approx \{0\}$$

$$\Rightarrow H_*^{\bar{p}}(X) = H_*(X)$$

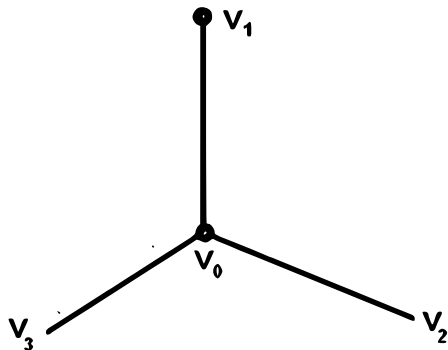
- $\bar{p}(1) \leq -1$



$$H_0^{\bar{p}}(X) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_1^{\bar{p}}(X) \approx \{0\}$$

2. Consideremos ahora sobre el mismo espacio topológico la filtración que consta de nuevo de un solo elemento pero en el que incluimos no solamente el vértice que tienen los 1-símplices en común, sino que añadimos otro de los tres 0-símplices, por ejemplo  $v_1$



$$\{V_0, V_1\} = X_0 \subset X_1 = X$$

$X$  tiene cinco estratos:

-regulares:  $X \setminus \{V_0, V_1\}$  determina tres estratos  $S_1, S_2, S_3$

-singulares:  $\{V_0\}, \{V_1\}$

$$\bar{p}(0) = 0, \bar{p}(1) \in \mathbb{Z}$$

Veamos la  $\bar{p}$ -admisibilidad de los distintos i-símplices del complejo

- 0-símplices ( $v$ )

$$\dim(v \cap \{V_0\}) \leq \dim(v) - \text{codim}(\{V_0\}) + \bar{p}(1) = 0 - 1 + \bar{p}(1)$$

- Si  $v = V_0$  o  $v = V_1 \Rightarrow 0 \leq \bar{p}(1) - 1 \Rightarrow \bar{p}(1) \geq 1$
- Si  $v \neq V_0$  o  $v \neq V_1 \Rightarrow -\infty \leq \bar{p}(1) - 1 \Rightarrow \bar{p}(1) \in \mathbb{Z}$

- 1-símplices ( $e$ )

$$\dim(e \cap \{V_0\}) \leq \dim(e) - \text{codim}(\{V_0\}) + \bar{p}(1) = 1 - 1 + \bar{p}(1)$$

- Para todo  $e$ ,  $0 \leq \bar{p}(1) \Rightarrow \bar{p}(1) \geq 0$

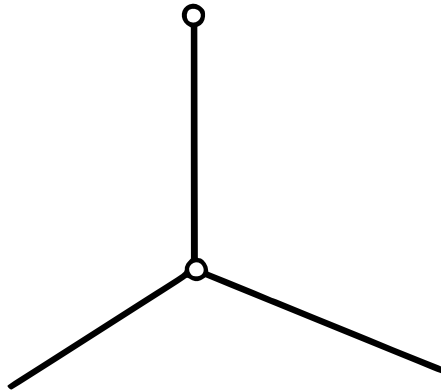
Distinguimos, por tanto 3 casos

- $\bar{p}(1) \geq 1$

Todos los símplexes son admisibles, entonces:

$$H_*^{\bar{p}}(X) = H_*(X)$$

- $\bar{p}(1) = 0$



La única cadena admisible es  $[V_0, V_2] - [V_0, V_3]$

$$H_0^{\bar{p}}(X) \approx \mathbb{Z}$$

$$H_1^{\bar{p}}(X) \approx \{0\}$$

$$\Rightarrow H_*^{\bar{p}}(X) = H_*(X)$$

- $\bar{p}(1) \leq -1$

$$H_0^{\bar{p}}(X) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_1^{\bar{p}}(X) \approx \{0\}$$



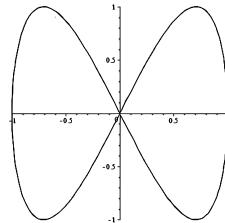
La primera filtración que hemos considerado es muy natural, pues al quitar el punto  $V_0$  del espacio  $X$  éste se desconecta, dando lugar a tres componentes conexas.

Este hecho no queda reflejado con la homología simplicial clásica. Tampoco lo reflejan las perversidades positivas (en codimensión formal 1), pero si lo visualizamos completamente al tomar perversidades negativas. Aquí queda plasmado lo que hemos dicho en la sección anterior: “Tomar perversidades más generales debe ser visto como una oportunidad de estudiar mejor qué información proporciona la estratificación”.

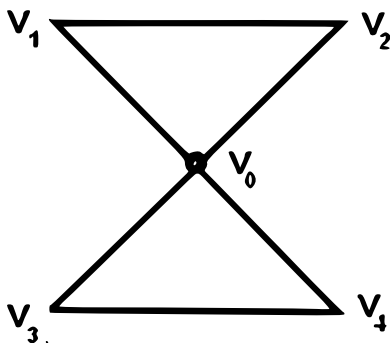
Respecto a la segunda filtración, no nos proporciona ninguna información coherente sobre el espacio. Esto se debe a que la hemos tomado de un modo artificial. Digamos que le hemos dado al vértice  $V_1$  la misma importancia que al  $V_0$  cuando no la tiene y que lo hemos considerado de un índole distinto al  $V_2$  y  $V_3$ , cuando juegan el mismo rol.

Finalmente, confirmamos también que al tomar perversidades con  $\bar{p}(-) \leq 0$  la homología de intersección deja de ser un invariante para el espacio topológico y pasa a depender también de la filtración.

**Ejemplo 3.2.8.** Consideremos la curva parametrizada  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (\sin(t), \sin(2t))$ , comunmente conocida como figura del 8 por tener su imagen forma de 8 tumbado:



Tomemos una triangulación de ésta, dada por la frontera de dos 2-símplices que están unidos por uno de sus vértices y tomemos la filtración natural que consiste en tomar un solo elemento en la filtración conteniendo al vértice que tienen en común (el origen de coordenadas en la figura original).



$\{v_0\} = X_0 \subset X_1 = X$   
 $X$  tiene tres estratos:  
 -regulares:  $X \setminus \{v_0\}$  determina dos estratos  $S_1, S_2$   
 -singular:  $\{v_0\}$   
 $\bar{p}(0) = 0, \bar{p}(1) \in \mathbb{Z}$

Veamos la  $\bar{p}$ -admisibilidad

- 0-símplices ( $v$ )  $\dim(v \cap \{V_0\}) \leq \dim(v) - \text{codim}(\{V_0\}) + \bar{p}(1) = 0 - 1 + \bar{p}(1)$ 
  - Si  $v = V_0 \Rightarrow 0 \leq \bar{p}(1) - 1 \Rightarrow \bar{p}(1) \geq 1$
  - Si  $v \neq V_0 \Rightarrow -\infty \leq \bar{p}(1) - 1 \Rightarrow \bar{p}(1) \in \mathbb{Z}$
- 1-símplices ( $e$ )
 
$$\dim(e \cap \{V_0\}) \leq \dim(e) - \text{codim}(\{V_0\}) + \bar{p}(1) = 1 - 1 + \bar{p}(1)$$
  - Si  $V_0 \in e, 0 \leq \bar{p}(1) \Rightarrow \bar{p}(1) \geq 0$
  - Si  $V_0 \notin e, -\infty \leq \bar{p}(1) \Rightarrow \bar{p}(1) \in \mathbb{Z}$

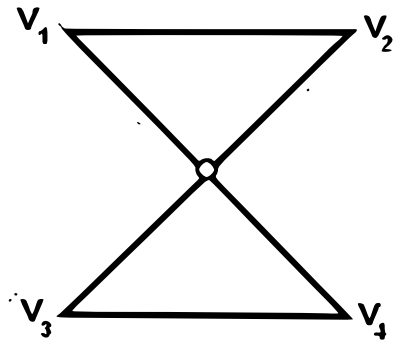
Distinguimos, por tanto 3 casos

- $\bar{p}(1) \geq 1$

Todos los símlices son admisibles, entonces:

$$H_*^{\bar{p}}(X) = H_*(X)$$

- $\bar{p}(1) = 0$



Observamos que  $[V_0, V_i]$  para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  no son admisibles como cadenas, pero sí tenemos que considerar las cadenas  $[V_0, V_1] - [V_0, V_4]$  y  $[V_0, V_2] - [V_0, V_3]$

$$H_0^{\bar{p}}(X) \approx \mathbb{Z} \text{ y } H_1^{\bar{p}}(X) \approx \{0\}$$

$$\Rightarrow H_*^{\bar{p}}(X) = H_*(X)$$

- $\bar{p}(1) \leq -1$



$$H_0^{\bar{p}}(X) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_1^{\bar{p}}(X) \approx \{0\}$$



De igual modo que en el ejemplo anterior, las perversidades negativas son las que revelan la información que posee la filtración.



### 3.3. Homología de intersección singular

Veamos ahora una versión singular para las homología de intersección. La condición de  $\bar{p}$ -admisibilidad dada en 3.2.1 se traduce en:

$$\dim(\sigma^{-1}(S)) \leq i - k + \bar{p}(k)$$

que se interpreta como  $\sigma^{-1}(S) \subset (i - k + \bar{p}(k))$ -esqueleto. (O en términos de la filtración:  $\sigma^{-1}(X_{n-k}) \subset (i - k + \bar{p}(k))$ -esqueleto).

En cambio, para el objetivo que se persigue, no se considerarán todos los simplex singulares, sino solamente aquellos en los que su dominio descomponga de cierto modo (compatible con la filtración). Esto es necesario para que cuando introduzcamos posteriormente el concepto de blow-up simplicial, podamos construir la cohomología de intersección de de'Rham

#### 3.3.1. símlices filtrados

**Definición 3.3.1.** Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio filtrado y sea  $\Delta_m$  un simplexe estándar. Un *m-símplex singular filtrado* es una aplicación continua  $\sigma : \Delta_m \rightarrow X$  que satisface una de las siguientes propiedades:

- i)  $\sigma^{-1}(X_i) = \emptyset$  o  $\sigma^{-1}(X_i)$  es una cara de  $\Delta_m$  para todo  $i \in \{0 \dots n\}$
- ii) Existe una descomposición  $\Delta_m = \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_n}$  con  $m = j_0 + \dots + j_n + n$  tal que:

$$\sigma^{-1}(X_i) = \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_i} \text{ para todo } i \in \{0 \dots n\}$$

**Nota 3.3.2.** Por comodidad en las demostraciones próximas, definimos  $\Delta_{-1} = \emptyset$

**Proposición 3.3.3.** Las propiedades anteriores son equivalentes:

*Demostración.* Recordemos, por la sección 2.1.2 prop. 5), que  $\Delta_i * \Delta_j = \Delta_{i+j+1}$

Supongamos que la imagen inversa por  $\sigma$  de cada elemento de la filtración es una cara de  $\Delta$  (considerando  $\emptyset$  también como cara de  $\Delta_m$ ). Veamos que  $\Delta_m$  admite una descomposición del modo que indica ii).

La condición i) se transforma en:

$$\sigma^{-1}(X_i) = \Delta_{x_i} \text{ con } x_i \geq -1 \text{ y } x_j \geq x_i, j \geq i \forall i \in \{0 \dots n\}$$

Si definimos:

$$\Delta_{j_i} = \Delta_{(x_i - \sum_{k=0}^{i-1} j_{k-i})}$$

nuestro problema se traduce en probar si:  $\Delta_{x_i} = \Delta_{j_0} * \Delta_{j_1} * \dots * \Delta_{j_i}$ ,

es decir, ¿ $x_i = \sum_{k=0}^i j_k + i$ ? Veámoslo:

$$\sum_{k=0}^i j_k + i = j_i + \sum_{k=0}^{i-1} j_k + i = (x_i - \sum_{k=0}^{i-1} j_k - i) + \sum_{k=0}^{i-1} j_k + i = x_i$$

La implicación inversa es inmediata:

Si  $\Delta - m = \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_n}$  y  $\sigma^{-1}(X_i) = \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_i}$  para todo  $i \in \{0 \dots n\}$

- $\sigma^{-1}(X_i)$  es una  $(\sum_{k=0}^i j_k + i)$ -cara si  $\sum_{k=0}^i j_k + i \geq 0$
- $\sigma^{-1}(X_i) = \emptyset$  si  $\sum_{k=0}^i j_k + i = -1$  ■

**Definición 3.3.4.** Denotamos por  $C_*^F(X; R)$  al *complejo de cadenas de símplices singulares filtrados*, que es un subcomplejo del complejo de cadenas singulares dado en 1.4.2, es decir, expresiones de la forma  $\sum_{i \in I} n_i \varphi_i$ , donde  $\{\varphi_i, i \in I\}$   $n$ -símplices filtrados y los  $n_i$  todos nulos salvo una cantidad finita.

**Observación 3.3.5.** *Efectivamente, sea  $\sigma : \Delta_m \rightarrow X$  un  $m$ -símplice singular filtrado, esto es,  $\Delta_m = \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_n}$  donde  $\Delta_{j_i} = \langle x_{i0}, \dots, x_{ij_i} \rangle$*

$$\partial_{ik} \sigma(x_{00}, \dots, x_{0j_0}, x_{10}, \dots, x_{n0}, \dots, x_{nj_n}) = \sigma(x_{00}, \dots, x_{0j_0}, x_{10}, \dots, \hat{x}_{ik}, \dots, x_{n0}, \dots, x_{nj_n})$$

por tanto  $\partial_{ik} \sigma : \Delta_{m-1} \rightarrow X$  es un  $(m-1)$ -símplice singular filtrado (para la misma filtración), con

$$\Delta_{m-1} = \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{k-1}} * \dots * \Delta_{j_n}$$

y por tanto,  $\partial \sigma$  es también un  $(m-1)$ -símplice singular filtrado y podemos afirmar que  $C_*^F(X; R)$  es un complejo de cadenas

**Definición 3.3.6.** Sea  $X$  un espacio filtrado. La  $\sigma$ -descomposición sólida de un símplice filtrado  $\sigma : \Delta \rightarrow X$  se obtiene quedándose solo con los elementos  $\Delta_{j_i}$  no vacíos de la  $\sigma$ -descomposición, escribiéndolos en el mismo orden.

**Definición 3.3.7.** Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio filtrado y  $\sigma : \Delta \rightarrow X$  un símplice filtrado. El *grado de perversidad* de  $\sigma$  es la  $(n+1)$ -upla  $\|\sigma\| = (\|\sigma\|_0 \dots \|\sigma\|_n)$  donde  $\|\sigma\|_l$  es la dimensión del esqueleto más pequeño conteniendo a  $\sigma^{-1}(X_{n-l})$ . Por convenio,  $\|\sigma\|_l = -\infty$  si  $\sigma^{-1}(X_{n-l}) = \emptyset$

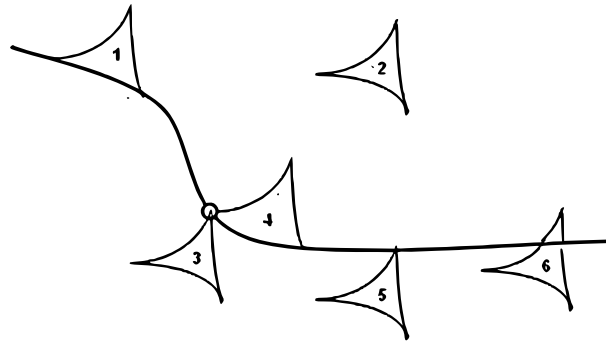
**Observación 3.3.8.** Si  $\sigma : \Delta = \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_n} \rightarrow X$  es tal que:

$$\Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{n-l}} = \emptyset \Rightarrow \sigma^{-1}(X_{n-l}) = \emptyset \Rightarrow \|\sigma\|_l = -\infty$$

$$\Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{n-l}} \neq \emptyset \Rightarrow \sigma^{-1}(X_{n-l}) \neq \emptyset \Rightarrow \|\sigma\|_l = \sum_{i=0}^{n-l} j_i + n - l$$

**Ejemplo 3.3.9.** Veamos ahora un ejemplo para familiarizarnos con las definiciones que acabamos de dar.

Consideramos  $\mathbb{R}^2$  y una filtración con dos elementos. En el primer esqueleto un punto y en el segundo una curva lisa, tal como se observa en la imagen siguiente:



1.

$$\sigma^{-1}(X_0) = \emptyset = \Delta_{-1} ; \sigma^{-1}(X_1) = \Delta_1 ; \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

- $\sigma$ -descomposición de  $\Delta$ :  $\Delta = \emptyset * \Delta_1 * \Delta_0$
- $\sigma$ -descomposición sólida de  $\Delta$ :  $\Delta = \Delta_1 * \Delta_0$
- grado de perversidad de  $\sigma$ :

$$\|\sigma\|_0 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

$$\|\sigma\|_1 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_1) = \Delta_1$$

$$\|\sigma\|_2 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_0) = \Delta_{-1}$$

Por tanto,  $\|\sigma\| = (2, 1, -\infty)$

2.

$$\sigma^{-1}(X_0) = \emptyset = \Delta_{-1} ; \sigma^{-1}(X_1) = \emptyset = \Delta_{-1} ; \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

- $\sigma$ -descomposición de  $\Delta$ :  $\Delta = \emptyset * \emptyset * \Delta_2$
- $\sigma$ -descomposición sólida de  $\Delta$ :  $\Delta = \Delta_2$
- grado de perversidad de  $\sigma$ :

$$\|\sigma\|_0 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

$$\|\sigma\|_1 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_1) = \Delta_{-1}$$

$$\|\sigma\|_2 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_0) = \Delta_{-1}$$

Por tanto,  $\|\sigma\| = (2, -\infty, -\infty)$

3.

$$\sigma^{-1}(X_0) = \Delta_0 ; \sigma^{-1}(X_1) = \Delta_0 ; \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

- $\sigma$ -descomposición de  $\Delta$ :  $\Delta = \Delta_0 * \emptyset * \Delta_1$
- $\sigma$ -descomposición sólida de  $\Delta$ :  $\Delta = \Delta_0 * \Delta_1$
- grado de perversidad de  $\sigma$ :

$$\|\sigma\|_0 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

$$\|\sigma\|_1 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_1) = \Delta_0$$

$$\|\sigma\|_2 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_0) = \Delta_0$$

Por tanto,  $\|\sigma\| = (2, 0, 0)$

4.

$$\sigma^{-1}(X_0) = \Delta_0 ; \sigma^{-1}(X_1) = \Delta_1 ; \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

- $\sigma$ -descomposición de  $\Delta$ :  $\Delta = \Delta_0 * \Delta_0 * \Delta_0$
- $\sigma$ -descomposición sólida de  $\Delta$ :  $\Delta = \Delta_0 * \Delta_0 * \Delta_0$
- grado de perversidad de  $\sigma$ :

$$\|\sigma\|_0 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

$$\|\sigma\|_1 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_1) = \Delta_1$$

$$\|\sigma\|_2 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_0) = \Delta_0$$

Por tanto,  $\|\sigma\| = (2, 1, 0)$

5.

$$\sigma^{-1}(X_0) = \emptyset = \Delta_{-1} ; \sigma^{-1}(X_1) = \Delta_0 ; \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

- $\sigma$ -descomposición de  $\Delta$ :  $\Delta = \emptyset * \Delta_0 * \Delta_1$
- $\sigma$ -descomposición sólida de  $\Delta$ :  $\Delta = \Delta_0 * \Delta_1$
- grado de perversidad de  $\sigma$ :

$$\|\sigma\|_0 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

$$\|\sigma\|_1 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_1) = \Delta_0$$

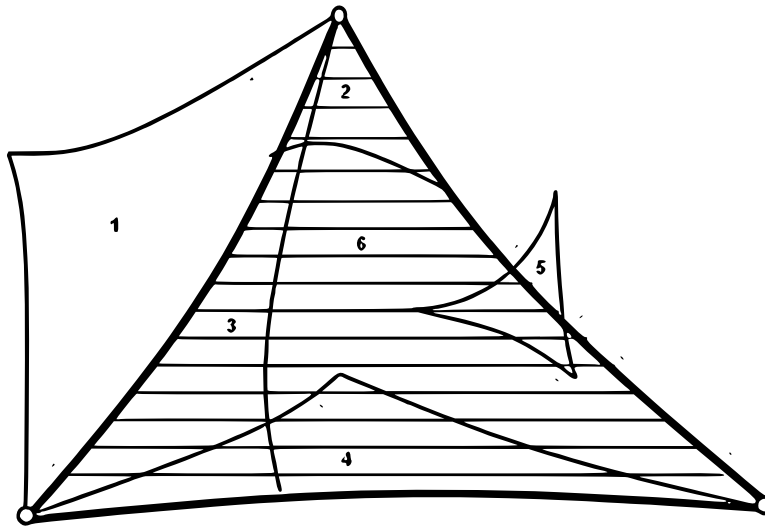
$$\|\sigma\|_2 \Rightarrow \sigma^{-1}(X_0) = \Delta_{-1}$$

Por tanto,  $\|\sigma\| = (2, 0, -\infty)$

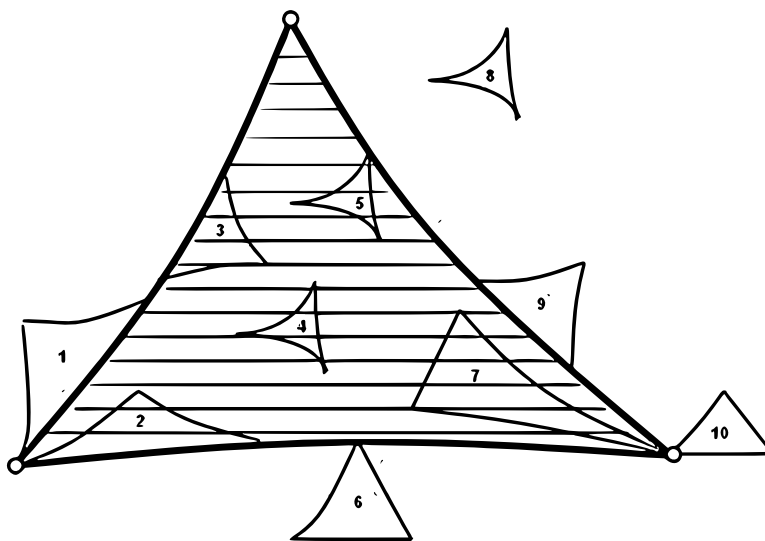
6.  $\sigma^{-1}(X_1)$  no es una cara de  $\Delta_2$ , por tanto éste no es un símplice filtrado

**Ejemplo 3.3.10.** Consideramos de nuevo el mismo espacio  $\mathbb{R}^2$  filtrado como indica la figura. Ahora hay muchas más posibilidades para los 2-símplices singulares, puesto que tenemos tres elementos en la filtración y por ello hay que ser más cuidadosos.

Hemos separado en dos figuras distintas aquellos símplices que no son filtrados de aquellos que si lo son, indicando todas las posibilidades.



- Para 1, 3 y 4,  $\sigma^{-1}(X_0)$  son dos vértices de  $\Delta$ .
- Para 6  $\sigma^{-1}(X_0)$  son de hecho 3 vértices de  $\Delta$ .
- Para 2, pese a que  $\sigma^{-1}(X_0)$  si es una cara de  $\Delta$ ,  $\sigma^{-1}(X_1)$  lo conforman dos aristas.
- Finalmente, en 5  $\sigma^{-1}(X_1)$  no forma parte del esqueleto de  $\Delta$



1.  $\Delta_0 * \Delta_0 * \emptyset * \Delta_0$  ;  $\|\sigma\| = (2, 1, 1, 0)$
2.  $\Delta_0 * \Delta_0 * \Delta_0 * \emptyset$  ;  $\|\sigma\| = (2, 2, 1, 0)$
3.  $\emptyset * \Delta_1 * \Delta_0 * \emptyset$  ;  
 $\|\sigma\| = (2, 2, 1, -\infty)$
4.  $\emptyset * \emptyset * \Delta_2 * \emptyset$  ;  $\|\sigma\| = (2, 2, -\infty, -\infty)$
5.  $\emptyset * \Delta_0 * \Delta_1 * \emptyset$  ;  
 $\|\sigma\| = (2, 2, 0, -\infty)$
6.  $\emptyset * \Delta_0 * \emptyset * \Delta_1$  ;  
 $\|\sigma\| = (2, 0, 0, -\infty)$
7.  $\Delta_0 * \emptyset * \Delta_2 * \emptyset$  ;  $\|\sigma\| = (2, 2, 0, 0)$
8.  $\emptyset * \emptyset * \emptyset * \Delta_2$  ;  $\|\sigma\| = (2, -\infty, -\infty, -\infty)$
9.  $\emptyset * \Delta_1 * \emptyset * \Delta_0$  ;  
 $\|\sigma\| = (2, 1, 1, -\infty)$
10.  $\Delta_0 * \emptyset * \emptyset * \Delta_1$  ;  $\|\sigma\| = (2, 0, 0, 0)$

Una de las cosas que más llama la atención al analizar este ejemplo es que el grado de perversidad es mayor (con el orden lexicográfico) conforme más interactúan los símlices singulares con la filtración.

Aunque todavía no hemos dado formalmente la definición de símlice singular  $\bar{p}$ -admisibles, podemos intuir haciendo una analogía con la definición simplicial, que esto se debe a que cuanto más interacción hay, más condiciones se deben verificar para que sea  $\bar{p}$ -admisibles, para una perversidad laxa  $\bar{p}$  dada. Por tanto a más interacción del símlice con la filtración, menos perversidades laxas para las que es  $\bar{p}$ -admisibles

### 3.3.2. símlices $\bar{p}$ -admisibles

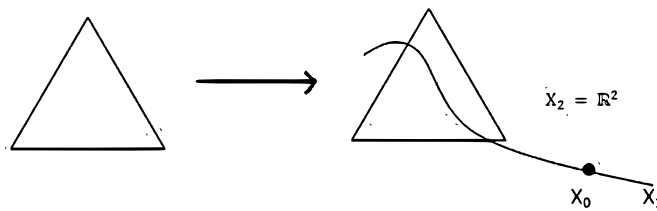
Ahora que ya hemos establecido el modo en el que deben encajar los símlices singulares con la filtración es momento de dar las condiciones, en parámetros de perversidades, respecto a como deben interactuar con ella.

**Definición 3.3.11.** Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio filtrado y  $\bar{p}$  una perversidad laxa. Un  $m$ -símlice singular  $\bar{p}$ -admisibile es un símlice singular filtrado  $\sigma : \Delta_m \rightarrow X$  tal que:

$$\|\sigma\|_l \leq m - l + \bar{p}(l) \quad \forall l \in \{0 \dots n\}$$

**Ejemplo 3.3.12.** Veamos un ejemplo de un símlice singular que no es filtrado y de un símlice filtrado que no es admisible, para recordar así los tres conceptos y en que se diferencian:

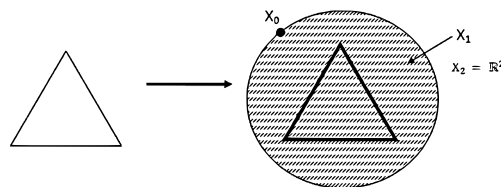
- El siguiente 2-símlice singular



no es filtrado, pues:

$$\sigma^{-1}(X_0) = \emptyset ; \sigma^{-1}(X_1) \text{ no es cara de } \Delta_2$$

- En cambio, el 2-símlice singular



si que es filtrado, pues:

$$\sigma^{-1}(X_0) = \emptyset ; \sigma^{-1}(X_1) = \Delta_2 ; \sigma^{-1}(X_2) = \Delta_2$$

pero no es  $\bar{0}$ -admisibile, donde  $\bar{0}$  es la perversidad laxa idénticamente nula, ya que:

$$\|\sigma\|_0 = 2 \leq 2 - 0 + 0$$

$$\|\sigma\|_1 = 0 \leq 2 - 1 + 0 = 1 \text{ no es cierto}$$

**Observación 3.3.13.** De hecho, para cualquier símplice filtrado podemos encontrar una perversidad laxa de modo que el símplice sea  $\bar{p}$ -admisibles y otra de modo que no lo sea.

Es más, hay una perversidad laxa límite que viene dada por:

$$\bar{p}(l) = \|\sigma\|_l - m + l$$

Todas las perversidades que sean mayores o iguales que ésta harán al símplice  $\bar{p}$ -admisibles, y las que sean menores no.

**Observación 3.3.14.** Sea  $\bar{p}$  una GM-perversidad y  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio filtrado. Un 0-símplice filtrado es  $\bar{p}$ -admisibles si y sólo si  $\sigma(\Delta_0) \subset X_n \setminus X_{n-1}$

*Demostración.*

Supongamos que  $\sigma(\Delta_0) \cap X_{n-1} \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(\Delta_0) \subset X_{n-1}$ , pues  $\sigma(\Delta_0)$  consta de un solo punto. De este modo,  $\sigma^{-1}(X_{n-1}) = \Delta_0$  y por tanto  $\|\sigma\|_1 = 0$

Que  $\sigma$  sea  $\bar{p}$ -admisibles, significa que:  $0 \leq 0 - 1 + \bar{p}(1)$  y para ello, necesariamente,  $\bar{p}(1) \geq 1$  lo cual es imposible para una GM-perversidad.

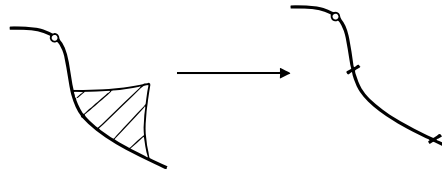
Recíprocamente, si  $\sigma^{-1}(\Delta_0) \subset X_n \setminus X_{n-1}$  significa que:

$$\sigma^{-1}(X_{n-l}) = \emptyset \quad \forall l \in \{1 \dots n\} \quad \text{y} \quad \sigma^{-1}(X_n) = \Delta_0$$

Esto es,  $\|\sigma\|_l = -\infty \quad \forall l \in \{1 \dots n\}$  y  $\|\sigma\|_0 = 0$ , y por tanto se verifican las condiciones de  $\bar{p}$ -admisibilidad. ■

Diremos que una cadena singular  $c$  es una *cadena singular  $\bar{p}$ -admisibles* con coeficientes en  $R$  si existen símplices singulares  $\bar{p}$ -admisibles  $\sigma_j$  de modo que  $c = \sum \lambda_j \sigma_j$  con  $\lambda_j \in R$

**Observación 3.3.15.** El conjunto de las cadenas  $\bar{p}$ -admisibles no es un subcomplejo del complejo de cadenas singulares pues el operador borde no manda  $m$ -símplices singulares  $\bar{p}$ -admisibles en  $(m-1)$ -símplices singulares  $\bar{p}$ -admisibles. Para verlo, basta con dar un ejemplo:



$$\left. \begin{array}{l} \Delta_2 = \emptyset * \Delta_1 * \Delta_0 \\ \|\sigma\| = (2, 1, -\infty) \\ 2 \leq 2 - 0 + 0 \\ 1 \leq 2 - 1 + 0 \\ -\infty \leq 2 - 2 + 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{es } \bar{0}\text{-admisible} \quad \left. \begin{array}{l} \Delta_1 = \emptyset * \Delta_1 * \emptyset \\ \|\sigma\| = (1, 1, -\infty) \\ 1 \leq 1 - 0 + 0 \\ 1 \not\leq 1 - 1 + 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{no es } \bar{0}\text{-admisible}$$

Esta observación nos conduce a la siguiente definición.



### 3.3.3. Homología de intersección singular

**Definición 3.3.16.** Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio filtrado y sea  $\bar{p}$  una perversidad laxa. Una cadena  $c$  es una *cadena de intersección para  $\bar{p}$*  si  $c$  y  $\partial c$  son cadenas  $\bar{p}$ -admisibles. Denotaremos por  $C_*^{\bar{p}}(X; R)$  al complejo de cadenas de intersección para  $\bar{p}$  con coeficientes en  $R$ . Las homología y cohomología asociadas las denotamos por  $H_*^{\bar{p}}(X; R)$  y  $H^*(X; R)$  y las llamamos *homología y cohomología de intersección para  $\bar{p}$* .

Una vez que ya tenemos todas las definiciones necesarias, vamos a caracterizar aquellos simplices  $\bar{p}$ -admisibles que son de intersección para  $\bar{p}$ .

**Proposición 3.3.17.** Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio filtrado,  $\bar{p}$  una perversidad laxa y  $\sigma : \Delta = \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_n} \rightarrow X$  un  $m$ -simplex singular  $\bar{p}$ -admisibile.

Entonces son equivalentes:

1.  $\sigma$  es de intersección para  $\bar{p}$
2.  $\Delta_{j_i} \neq \emptyset \Rightarrow \|\sigma\|_l < m - l + \bar{p}(l) \quad \forall l \in \{n - i, \dots, l(\sigma)\}$
3.  $\Delta_{j_i} \neq \emptyset \Rightarrow n - i > l(\sigma)$

*Demostración.* Por definición, que  $\sigma$  sea  $\bar{p}$ -admisibile significa que:

$$\dim(\Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{n-l}}) = \|\sigma\|_l \leq m - l + \bar{p}(l) \quad \forall l \in \{1, \dots, n\}.$$

1)  $\Leftrightarrow$  2)

$\sigma$  es de intersección para  $\bar{p}$  si y sólo si  $\partial\sigma$  es  $\bar{p}$ -admisibile, es decir, si y sólo si  $\partial_k\sigma$  es  $\bar{p}$ -admisibile para todo  $k \in \{0, \dots, m\}$  (donde  $v_1, \dots, v_m$  son los vértices de  $\Delta$ ).

Existe un  $i \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $v_k \in \Delta_{j_i} \neq \emptyset$ . Por tanto, tomando la cara de codimensión 1 de  $\Delta_{j_i}$ ,  $F_i$ , correspondiente a eliminar  $v_k$  tenemos:

$$\partial_k\sigma = \sigma_{i_k} : \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{i-1}} * F_i * \Delta_{j_{i+1}} * \dots * \Delta_{j_n} \rightarrow X$$

Basta por ello con estudiar las restricciones  $\sigma_i$  tomando  $F_i$  como cualquier cara de  $\Delta_{j_i} \neq \emptyset$  de codimensión 1.

$\sigma_i$  es  $\bar{p}$ -admisibile si y sólo si:

$$\|\sigma_i\|_l \leq m - l + \bar{p}(l) \quad \forall l \in \{0 \dots n\}$$

y

$$\|\sigma_i\|_l = \begin{cases} \|\sigma\|_l - 1 & \text{si } l \leq n - i \\ \|\sigma\|_l & \text{si } l > n - i \end{cases} \quad (*)$$

Observamos que, por la  $\bar{p}$ -admisibilidat de  $\sigma$ , (\*) se da para  $l \leq n - i$

Además, por definición de  $l(\sigma)$ ,  $\|\sigma\|_l \leq m - 1 - l + \bar{p}(l) \quad \forall l > l(\sigma)$  con lo que la condición (\*) también es cierta para  $l > l(\sigma)$ .

Por tanto:

$$\sigma \text{ es de intersección para } \bar{p} \Leftrightarrow \|\sigma\|_l \leq m - l + \bar{p}(l) \quad \forall n - i < l \leq l(\sigma)$$

2)  $\Leftrightarrow$  3)

Veamos que la condición 2) solo es cierta por vacuidad, pues cuando  $l = l(\sigma)$

$$m - l(\sigma) + \bar{p}(l(\sigma)) = \|\sigma\|_{l(\sigma)} < m - l(\sigma) + \bar{p}(l(\sigma))$$

es un absurdo. Por tanto, necesitamos que  $n - i > l(\sigma)$  ■

Podemos traducir esta proposición en términos de la siguiente definición:

**Definición 3.3.18.** Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio filtrado,  $\bar{p}$  una perversidad laxa y  $\sigma : \Delta \rightarrow X$  con  $\Delta = \Delta_{j_0} * \Delta_{j_1} * \dots * \Delta_{j_n}$  un m-símplice singular  $\bar{p}$ -admisibles. Denotamos por  $l(\sigma) \in \{0, \dots, n\}$  al entero tal que:

- $\|\sigma\|_{l(\sigma)} = m - l(\sigma) + \bar{p}(l(\sigma))$
- $\|\sigma\|_l < m - l + \bar{p}(l)$  para todo  $l > l(\sigma)$

Puesto que  $\|\sigma\|_0 = m = m - 0 + 0 = m - 0 + \bar{p}(0)$  para cualquier perversidad laxa  $\bar{p}$ , tenemos la garantía de que el entero  $l(\sigma)$  existe.

Cuando  $\dim(\Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{n-l(\sigma)}}) \neq m$ , la restricción

$$\tau_\sigma : \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{n-l(\sigma)}} * \emptyset * \dots * \emptyset \rightarrow X$$

se llama la *cara mala* de  $\sigma$ .

**Corolario 3.3.19.** Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio filtrado,  $\bar{p}$  una perversidad laxa y  $\sigma : \Delta = \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_n} \rightarrow X$  un m-símplice  $\bar{p}$ -admisibles. Entonces:

1. El símplice  $\sigma$  es de intersección para  $\bar{p}$  si, y sólo si, no contiene caras malas
2. Una cara de codimensión 1 de  $\sigma$  es no  $\bar{p}$ -admisibles si, y sólo si, contiene la cara mala de  $\sigma$
3. Sea  $\sigma' : \Delta \rightarrow X$  otro m-símplice  $\bar{p}$ -admisibles de  $X$  que tiene una cara  $\sigma''$  no  $\bar{p}$ -admisibles en común con  $\sigma$ . Entonces  $\sigma''$  contiene a la cara mala de  $\sigma$  y además  $\sigma$  y  $\sigma'$  tienen la misma cara mala.

*Demostración.*

1)  $\sigma$  es de intersección para  $\bar{p} \Leftrightarrow \Delta_{j_i} = \emptyset \quad \forall i \geq n - l(\sigma)$

Es decir,  $\dim(\Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{n-l(\sigma)}}) = \dim \Delta = m \Leftrightarrow \sigma$  no posee cara mala.

2)  $\sigma_i$  no es  $\bar{p}$ -admisibles  $\Leftrightarrow \exists i > n - l(\sigma)$  con  $\Delta_{j_i} \neq \emptyset$ .

En tal caso,  $\dim(\Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{n-l(\sigma)}}) \neq \dim \Delta$  por tanto, existe

$$\tau_\sigma : \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{n-l(\sigma)}} * \emptyset * \dots * \emptyset \rightarrow X$$

cara mala de  $\sigma$  y es obviamente una cara de  $\sigma_i$

3) Sea  $\sigma' : \Delta_{k_0} * \dots * \Delta_{k_n} \rightarrow X$  otro símplice  $\bar{p}$ -admisibles y  $\sigma'' : \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{i-1}} * F_i * \Delta_{j_{i+1}} * \dots * \Delta_{j_n} \rightarrow X$  la cara no  $\bar{p}$ -admisibles de  $\sigma'$  y  $\sigma$ . Por el apartado anterior, sabemos que  $\sigma''$  contiene la cara mala de  $\sigma$  y de  $\sigma'$ . Ahora veamos que la cara mala es la misma para ambos símplices, y para ello es suficiente probar que  $l(\sigma) = l(\sigma')$ .

- Por ser  $\sigma''$  no  $\bar{p}$ -admisibles para  $\sigma$ ,  $\exists i > n - l(\sigma)$  tal que  $\Delta_{j_i} \neq \emptyset$ . y ya que  $\sigma$  y  $\sigma'$  tienen una cara de codimensión 1 en común, existe un único entero  $r \in \{0 \dots n\}$  donde se verifica  $k_r = j_r + 1$

Veamos por reducción al absurdo que  $m > n - l(\sigma)$  y por tanto  $l(\sigma') \geq l(\sigma)$ :

$$\begin{aligned} \dim \Delta - l(\sigma) + \bar{p}(m) &\geq \|\sigma'\|_{l(\sigma)} = \dim(\Delta_{k_0} * \dots * \Delta_{k_{n-l(\sigma)}}) = \\ &= \dim(\Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_{n-l(\sigma)}}) + 1 = \dim \Delta - l(\sigma) + \bar{p}(l(\sigma)) + 1 \end{aligned}$$

cosa que es imposible.

- De modo simétrico, al ser  $\sigma''$  no  $\bar{p}$ -admisibles para  $\sigma'$ ,  $l(\sigma) \geq l(\sigma')$ . ■

### 3.3.4. Teorema de Mayer-Vietoris

La homología de intersección verifica el teorema de Mayer-Vietoris. La demostración no la veremos, pues no es sencilla.

A la dificultad que ya posee la prueba para la homología de intersección clásica, se le añade el hecho de que el conjunto de símplices  $\bar{p}$ -admisibles no es una base del complejo de cadenas de intersección pues hay que tener en cuenta los elementos que son admisibles como símplice pero no como cadenas (este hecho lo veamos reflejado en los ejemplos de la homología de intersección simplicial) y encontrar una base para el complejo de cadenas de intersección no es una tarea fácil.

### 3.3.5. Aplicaciones en homología. S-homotopía

El objetivo de esta sección es probar que una aplicación estratificada induce un morfismo en homología, y que además reduce el grado de perversidad. Necesitamos para ello el siguiente lema:

**Lema 3.3.20.** Sea  $(X, (X_i)_{i=0}^n)$  un espacio estratificado y sea  $\sigma : \Delta \rightarrow X$  un símplice filtrado. Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:

- i) Hay un estrato  $S \in S_X$  tal que  $\sigma(\overset{\circ}{\Delta}) \subset S$
- ii) La familia de estratos que tienen intersección no vacía con la imagen de  $\sigma$  es totalmente ordenada. Si  $S_1 \prec S_2 \prec \dots \prec S_p$  es esta familia, se verifica:

$$\sigma^{-1}(X_i) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i < d(S_1) \\ \sigma^{-1}(S_1 \sqcup S_2 \sqcup \dots \sqcup S_k) & \text{si } d(S_k) \leq i < d(S_{k+1}), 1 \leq k < p \\ \sigma^{-1}(S_1 \sqcup S_2 \sqcup \dots \sqcup S_p) & \text{si } i \geq d(S_p) \end{cases} \quad (*)$$

*Demostración.*

- i) Sea  $k$  el entero tal que  $\sigma(\Delta) \subset X_k$  y  $\sigma(\Delta) \not\subset X_{k-1}$ . Esto es, existe un  $t \in \Delta$  de modo que  $\sigma(t) \in X_k \setminus X_{k-1}$ , y consideremos el estrato  $S$  caracterizado por:

$$\sigma(t) \in S \subset X_k \setminus X_{k-1}$$

Por definición de símplice estratificado,  $\Delta' = \sigma^{-1}(X_{k-1})$  es una cara de  $\Delta$  (Que bien puede ser el vacío) y además propia ( $\Delta \neq \Delta'$ ) pues  $t \in \Delta \setminus \Delta'$ .

Tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \Delta \setminus \Delta' \text{ es conexo} \Rightarrow \sigma(\Delta \setminus \Delta') \text{ es conexo} \\ \text{b) } \sigma(t) \in \sigma(\Delta \setminus \Delta') \cap S \neq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma(\Delta \setminus \Delta') \subset S$$

Por tanto:  $\sigma(\overset{\circ}{\Delta}) \subset \sigma(\Delta \setminus \Delta') \subset S$  (pues  $\overset{\circ}{\Delta} \subset \Delta \setminus \Delta'$ )

- ii) Para cualquier  $i \in \{0, \dots, n\}$  arbitrario, por la definición de símplice filtrado, se tiene que  $\sigma^{-1}(X_i) \setminus \sigma^{-1}(X_{i-1})$  es conexo. Y por tanto, si no es vacío, es el pullback de un solo estrato  $S_i$  de dimensión  $i$ .

Por eso deducimos que existe una familia de enteros  $0 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_p \leq n$  tales que

$$\sigma^{-1}(X_i) \setminus \sigma^{-1}(X_{i-1}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \notin \{d-1, \dots, d_p\} \\ \sigma^{-1}(S_i) & \text{si } i = d_k \text{ con } k \in \{1, \dots, p\} \end{cases} \quad (1)$$

Denotaremos  $S_k = S_{d_k}$  al  $k$ -ésimo estrato de la familia y cuya dimensión es  $d_k$ . De este modo tenemos, utilizando (1):

$$\sigma^{-1}(X_i) = \sigma^{-1}(X_i) \setminus \sigma^{-1}(X_{i-1}) \sqcup \sigma^{-1}(X_{i-1}) \setminus \sigma^{-1}(X_{i-2}) \sqcup \dots \sqcup \sigma^{-1}(X_0) \setminus \sigma^{-1}(X_{-1}) = (*)$$

Queda ver ahora que,  $\forall k \in \{2, \dots, p\}$ ,  $S_{k-1} \prec S_k$ .

Por 2.2.7 iii),  $\sigma^{-1}(\bar{S}_k) = \bigcup_{S \preceq S_k} \sigma^{-1}(S)$

En particular,  $\forall i < k$ ,

$$\sigma^{-1}(\bar{S}_k \cap (X_{d_i} \setminus X_{d_{i-1}})) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } S_i \not\preceq S_k \\ \sigma^{-1}(S_i) & \text{si } S_i \preceq S_k \end{cases} \quad (\bullet)$$

De nuevo por (1),  $\sigma^{-1}(X_{d_k}) \setminus \sigma^{-1}(X_{d_{k-2}}) = \sigma^{-1}(S_{k-1} \sqcup S_k)$ . (2)

$$\sigma^{-1}(X_{d_k}) \setminus \sigma^{-1}(X_{d_{k-2}}) = \sigma^{-1}(S_{k-1} \sqcup (\bar{S}_k \cap (X_{d_k} \setminus X_{d_{k-1}}))) =$$

$$= \sigma^{-1}(S_{k-1} \cup (\bar{S}_k \cap (X_{d_k} \setminus X_{d_{k-2}}))) = \sigma^{-1}(S_{k-1}) \cup \sigma^{-1}(\bar{S}_k \cap (X_{d_k} \setminus X_{d_{k-2}}))$$

a)  $S_{k-1}$  es cerrado en  $X_{d_k} \setminus X_{d_{k-1}}$  que a su vez es cerrado en  $X_{d_k} \setminus X_{d_{k-2}}$  y por ser  $\sigma$  una aplicación continua,  $\sigma^{-1}(S_{k-1})$  es cerrado en  $\sigma^{-1}(X_{d_k} \setminus X_{d_{k-1}})$  que a su vez es cerrado en  $\sigma^{-1}(X_{d_k} \setminus X_{d_{k-2}})$

De igual modo,

b)  $\sigma^{-1}(\bar{S}_k \cap (X_{d_k} \setminus X_{d_{k-2}}))$  es cerrado en  $\sigma^{-1}(X_{d_k} \setminus X_{d_{k-2}})$

Por a), b) y la conexión de (2), deducimos que:

$$\sigma^{-1}(S_{k-1}) \cap \sigma^{-1}(\bar{S}_k \cap (X_{d_k} \setminus X_{d_{k-2}})) \neq \emptyset$$

y para que esto suceda,

$$S_{k-1} \subset \bar{S}_k \cap (X_{d_{k-1}} \setminus X_{d_{k-2}}) \subset \bar{S}_k \cap (X_{d_k} \setminus X_{d_{k-2}})$$

entonces por  $(\bullet)$ ,  $S_{k-1} \preceq S_k$

Puesto que  $d_{k-1} \neq d_k \Rightarrow S_{k-1} \prec S_k$

■

**Teorema 3.3.21.** Una aplicación estratificada,  $f : X \rightarrow Y$  induce un morfismo entre complejos de cadenas filtrados  $f_* : C_*^F(X) \rightarrow C_*^F(Y)$  definido por  $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$ . Además, para cada  $l \geq 0$  se verifica:  $\|f_*(\sigma)\|_l \leq \|\sigma\|_l$ .

*Demostración.* Sea  $f : (X, (X_i)_{i=0}^n) \rightarrow (Y, (Y_i)_{i=0}^m)$  una aplicación estratificada y  $\sigma : \Delta \rightarrow X$  un símplice filtrado. Dado  $l \geq 0$

- Si  $(f \circ \sigma)^{-1}(Y_{m-l}) = \emptyset \Rightarrow \|f \circ \sigma\|_l = -\infty$
- $Y_{m-l} = \bigsqcup_{d(S') \leq m-l} S'$ . Por 2.2.10,  $\forall S' \in S_Y$ :
  - $f^{-1}(S') = \emptyset$
  - o bien  $f^{-1}(S') = \bigsqcup_{i \in I} S$  donde  $m - d(S') \leq n - d(S_i)$

por tanto, para  $S' \in S_Y$  tal que  $d(S') \leq m - l$ , se tiene:

$$m - m + l \leq m - d(S') \leq n - d(S_i) \Rightarrow d(S_i) \leq n - l \Rightarrow f^{-1}(Y_{m-l}) \subset X_{n-l}$$

con lo cual  $(f \circ \sigma)^{-1}(Y_{m-l}) \subset \sigma^{-1}(X_{n-l})$ .

$$\text{Si } \sigma^{-1}(X_{n-l}) = \emptyset \Rightarrow \|f \circ \sigma\|_l = \|\sigma\|_l = -\infty$$

- Supondremos entonces que  $(f \circ \sigma)^{-1}(Y_{m-l}) \neq \emptyset$  y  $\sigma^{-1}(X_{n-l}) \neq \emptyset$  y por ello  $0 \leq l \leq \min\{m, n\}$ . Tenemos que probar que:

- $(f \circ \sigma)^{-1}(Y_{m-l})$  es una cara de  $\Delta$ , es decir,  $f \circ \sigma \in C_*^F(Y)$  y  $f_*$  está bien definida.
- $\dim((f \circ \sigma)^{-1}(Y_{m-l})) \leq \dim(\sigma^{-1}(X_{n-l}))$ , es decir,  $f$  reduce el grado de perversidad.

Recordemos, por el lema anterior, que la familia de estratos que cortan a la imagen de  $\sigma$  puede ser ordenada del siguiente modo:  $S_1 \prec S_2 \prec \dots \prec S_p$

lo que implica, por 2.2.11  $S_1^f \preceq S_2^f \preceq \dots \preceq S_p^f$ .

Consideramos  $\mathcal{A} = \{T \in S_Y/T \cap ((f \circ \sigma)(\Delta)) \neq \emptyset\} = \{T_1 \prec T_2 \prec \dots \prec T_q\}$

$T \in \mathcal{A} \Leftrightarrow f^{-1}(T) \cap \sigma(\Delta) \neq \emptyset$ . Por definición de aplicación estratificada,

existe por tanto  $k \in \{1, \dots, p\}$  de modo que  $T = S_k^f$  y

$$m - d(T) \leq n - d(S_k).$$

Vamos a denotar por  $0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_q = p$  a los enteros tales que:

$$\begin{cases} T_1 = S_1^f = \dots = S_{k_1}^f & \text{con } S_{k_1}^f \neq S_{k_1+1}^f \\ T_2 = S_{k_1+1}^f = \dots = S_{k_2}^f & \text{con } S_{k_2}^f \neq S_{k_2+1}^f \\ \dots \\ T_q = S_{k_{q-1}+1}^f = \dots = S_{k_q}^f \end{cases}$$

y por tanto podemos ver  $f^{-1}(T_j)$  como  $\bigsqcup_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} S_k$  para cualquier

$$j \in \{1, \dots, q\}$$

Por 2.2.7 i):  $0 \leq d(T_1) < d(T_2) < \dots < d(T_q) \leq m$ . Con el convenio  $d(T_0) = 0$  y  $d(T_{q+1}) = m$  denotamos por  $a \in \{0, \dots, q\}$  al entero tal que  $d(T_a) \leq m - l < d(T_{a+1})$ .

Si  $a = 0 \Rightarrow m - l < \dim(T_1) \Rightarrow (f \circ \sigma)^{-1}(Y_j \setminus Y_{j-1}) = \emptyset$

$\forall j \leq m - l \Rightarrow (f \circ \sigma)^{-1}(Y_{m-l}) = \emptyset$ , lo que contradice nuestra hipótesis de partida.

$$(f \circ \sigma)^{-1}(Y_{m-l}) = \bigcup_{j=0}^{m-l} (f \circ \sigma)^{-1}(Y_j \setminus Y_{j-1}) =$$

$$\bigcup_{i=1}^a (f \circ \sigma)^{-1}(T_i) = \bigcup_{k=1}^{k_a} \sigma^{-1}(S_k) = \sigma^{-1}(X_{d(S_{k_a})})$$

que es una cara del s3mplice  $\Delta$ , pues  $\sigma$  es un s3mplice filtrado.

Adem3s, puesto que  $m - d(T_j) \leq n - d(S_{k_j}) \ \forall j \in \{1, \dots, q\}$ , se deduce:

$$d(S_{k_a}) \leq n - m + d(T_a) \leq n - m + (m - l) \leq n - l$$

lo que implica

$$\sigma^{-1}(X_{d(S_{k_a})}) \subset \sigma^{-1}(X_{n-l})$$

y con ello la desigualdad buscada:

$$\dim((f \circ \sigma)^{-1}(Y_{m-l})) = \dim(\sigma^{-1}(X_{d(S_{k_a})})) \leq \dim(\sigma^{-1}(X_{n-l})).$$

■

**Corolario 3.3.22.** Una aplicaci3n estratificada,  $f : X \rightarrow Y$  induce un morfismo entre complejos de cadenas de intersecci3n  $f_* : C_*^{\bar{p}}(X) \rightarrow C_*^{\bar{p}}(Y)$  para cualquier perversidad laxa  $\bar{p}$ .

*Demostraci3n.* Dada una perversidad laxa  $\bar{p}$ , sea  $\sigma$  un  $n$ -s3mplice de  $\bar{p}$ -intersecci3n.

1.  $\sigma$  es  $\bar{p}$ -admisibile

$$\Rightarrow \|f_n(\sigma)\|_l = \|f \circ \sigma\|_l \leq \|\sigma\|_l \leq \dim(\Delta_n) - l + \bar{p}(l)$$

2.  $\partial\sigma = \sum_i a_i \sigma_i$  con los  $\sigma_i$   $(n-1)$ -s3mplices  $\bar{p}$ -admisibles.

$$\Rightarrow \|f_{n-1}(\sigma_i)\|_l = \|f \circ \sigma_i\|_l \leq \|\sigma_i\|_l \leq \dim(\Delta_{n-1}) - l + \bar{p}(l)$$

$$\Rightarrow \sum_i a_i f_{n-1}(\sigma_i) = f_{n-1}(\sum_i a_i \sigma_i) \text{ es una cadena } \bar{p}\text{-admisibile}$$

$\Rightarrow f_n(\sigma)$  es un  $n$ -s3mplice de  $\bar{p}$ -intersecci3n.

Por tanto,  $f_*$  est3 bien definido.

■

En los ejemplos de homolog3a simplicial, hac3amos el c3mputo y ve3amos que la homolog3a de intersecci3n no respetaba la homotop3a.

Si en cambio, nos quedamos con las homotop3as que son aplicaciones estratificadas s3 conseguimos inmediatamente una invariancia homot3pica.

A continuación intruducimos la noción de s-homotopía. Para ello consideraremos el intervalo  $[0, 1]$  con la filtración trivial de dimensión 1 y  $X \times [0, 1]$  con la filtración heredada en el producto.

**Definición 3.3.23.** Dos aplicaciones estratificadas  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  son *s-homotópicas* si existe una aplicación estratificada  $f : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  de modo que:

$$f(x, 0) = f_0(x) \text{ y } f(x, 1) = f_1(x)$$

A esta aplicación  $f$  se le llama *s-homotopía* de  $f_0$  a  $f_1$

Para la prueba del resultado final de esta sección (la invariancia s-homotópica), se requiere de un lema previo, el cual no vamos a demostrar pero que enunciamos a continuación:

**Lema 3.3.24.** Sea  $\bar{p}$  una perversidad laxa. Para cualquier espacio filtrado,  $X$ , las inclusiones canónicas  $i_0, i_1 : X \rightarrow X \times I$ , definidas por  $i_k(x) = (x, k)$  para  $k = 0, 1$ , inducen el mismo homomorfismo en homología de intersección:

$$H_*^{\bar{p}}(i_0) = H_*^{\bar{p}}(i_1) : H_*^{\bar{p}}(X) \rightarrow H_*^{\bar{p}}(X \times [0, 1])$$

**Proposición 3.3.25.** Si  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  son dos aplicaciones estratificadas s-homotópicas, inducen el mismo homomorfismo en la homología de intersección

$$H_*^{\bar{p}}(f_0) = H_*^{\bar{p}}(f_1) : H_*^{\bar{p}}(X) \rightarrow H_*^{\bar{p}}(Y)$$

para cualquier perversidad laxa  $\bar{p}$

*Demostración.* En 3.3.22 se afirma que las aplicaciones  $f_0$  y  $f_1$  inducen ambos morfismos sobre los complejos de cadenas de intersección y que por tanto tiene sentido hablar de  $H_*^{\bar{p}}(f_0)$  y  $H_*^{\bar{p}}(f_1)$ .

Sea  $F : X \times I \rightarrow Y$  una s-homotopía de  $f_0$  a  $f_1$  y sean  $i_k : X \rightarrow X \times I$ , las inclusiones canónicas para  $k = 0, 1$  dadas por  $i_k(x) = (x, k)$ .

Tenemos:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{F} & Y \\ \uparrow i_0 & \nearrow f_0 & \\ X & & \end{array}$$

$$F \circ i_0 = f_0$$

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{F} & Y \\ \uparrow i_1 & \nearrow f_1 & \\ X & & \end{array}$$

$$F \circ i_1 = f_1$$

Por el lema previo,  $H_*^{\bar{p}}(i_0) = H_*^{\bar{p}}(i_1)$  y por tanto, ahora es inmediato ya que:

$$H_*^{\bar{p}}(f_0) = H_*^{\bar{p}}(F \circ i_0) = H_*^{\bar{p}}(F \circ i_1) = H_*^{\bar{p}}(f_1)$$

■



### 3.4. Homología del cono y la suspensión

Entender los conos juega un papel crucial en casi todo lo relativo a la teoría de la homología de intersección, cosa que no sorprende, pues las pseudovariedades son localmente productos de conos con el espacio euclídeo.

De hecho, muchas pruebas profundas pueden ser reducidas de algún modo a estudiar aquello que sucede en los entornos distinguidos. Por ejemplo, veremos a continuación el caso de la invariancia topológica.

Dada  $L$  una pseudovariedad estratificada compacta PL  $(k - 1)$ -dimensional y  $\overset{\circ}{c} L$  el cono abierto de  $L$ , se tiene que:

$$H_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c} L) = \begin{cases} 0 & i \geq k - 1 - \bar{p}(k) \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k - 1 - \bar{p}(k) \end{cases}$$

Este es el motivo por el que de hecho se trabaja con pseudovariedades estratificadas, pues nos permiten hacer cálculos, ya que la  $s$ -homotopía junto con la fórmula del cono nos permite obtener la homología para el modelo básico.

Además, usando la fórmula de la homología del cono junto a la sucesión de Mayer-Weitoris se sigue que:

$$H_i^{\bar{p}}(SL) = \begin{cases} H_{i-1}^{\bar{p}}(L) & i > k - 1 - \bar{p}(k) \\ 0 & i = k - 1 - \bar{p}(k) \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k - 1 - \bar{p}(k) \end{cases}$$

obteniendo así una fórmula para el cálculo de la homología de la suspensión que también nos va a resultar útil en el próximo apartado.

### 3.5. invariancia topológica y dualidad de Poincaré

Ahora que ya se ha introducido la homología de intersección y se ha visto que hay resultados para el cálculo sobre pseudovariedades estratificadas, volvamos a las condiciones sobre las perversidades. Veamos de donde se obtienen las condiciones de G-M y para que son necesarias (y suficientes).

Para empezar, como ya hemos dicho en repetidas ocasiones, uno de los requisitos de Goresky y MacPherson para la homología de intersección es que hubiese una invariancia topológica (Es decir, una invariancia respecto las diferentes estratificaciones que se puedan dar en el espacio). Ésta nos conduce a las siguientes conclusiones:

- No podemos permitir perversidades negativas.

Si en la fórmula del cono ( $\mathring{c}L$ ) se considera que  $\bar{p}(k) < 0$  (con  $k - 1 = \dim(L)$ ) entonces ningún símplice  $\bar{p}$ -admisibles va a intersecar a  $\vartheta$ , el vértice del cono.

*Demostración.* Si  $\bar{p}(k) < 0$ , entonces:

$$0 = \dim(\sigma \cap \vartheta) \leq i - k - \bar{p}(k) < i - k \Leftrightarrow 0 < i - k \Leftrightarrow i > k$$

y esto es absurdo, pues en una pseudovariedad de dimensión  $k$  ( $\mathring{c}L$ ) no tiene sentido hablar de símplices de dimensión mayor que  $k$ . ■

Tenemos por tanto, que la homología de intersección del  $\mathring{c}L$  es la misma que si eliminamos el vértice del cono.

De hecho, en [9] se prueba que, de un modo más general,

$$H_*^{\bar{p}}(X) \cong H_*^{\bar{p}}\left(X \setminus \bigcup_{d(S)=k} S\right) \quad \text{si } \bar{p}(k) < 0$$

De este modo, sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$ . Sabemos que

$$H_*^{\bar{p}}(M) \cong H_*(M) \text{ sin importar como esté } M \text{ estratificada.}$$

Sea ahora  $N$  una subvariedad de  $M$  de dimensión  $n - k$  y estratifiquemos  $M$  por  $M \supset N \supset \emptyset$ .

Supongamos que  $\bar{p}(k) < 0$ , entonces se da

$$H_*(M) \cong H_*^{\bar{p}}(M) \cong H_*^{\bar{p}}(M \setminus N) \cong H_*(M \setminus N)$$

y esto es absurdo.

- En segundo lugar, en [7] King prueba que si  $(X, S_X)$  es una pseudovariedad estratificada, ésta posee una *estratificación intrínseca*  $(X, S_{X^*})$  que denotaremos abreviadamente como  $X^*$ . Esta estratificación se construye como sigue a continuación.

Consideramos la relación de equivalencia en  $X$  dada por: Dos puntos  $x_0$  y  $x_1$  son equivalentes si existen entornos  $U_i$  de  $x_i$  y un homeomorfismo  $h : (U_0, x_0) \rightarrow (U_1, x_1)$ .

Por definición de pseudovariedad, todos los puntos en un mismo estrato son equivalentes. Por tanto, las clases de equivalencia son uniones de estratos de  $X$ .

Sea  $Y_i$  la unión de las clases de equivalencia que contienen estratos de dimensión  $\leq i$ . Se comprueba que  $(X, (Y_i)_{i=0}^n)$  es también una pseudovariedad estratificada.

**Nota 3.5.1.** *En realidad King hace esta construcción para unos conjuntos más generales: los conjuntos CS, “localmente conos”.*

Además, prueba también que esta estratificación “minimal” es única. Esto es, si  $X$  y  $X'$  son dos estratificaciones distintas de un mismo espacio, existe una única  $X^*$  de modo que es la estratificación intrínseca de ambas.

Al mismo tiempo, observa también que basta estudiar la invariancia localmente, es decir, para modelos básicos.

Dada  $L$  una pseudovariedad estratificada compacta PL  $(k-1)$ -dimensional, en 2.2.13 hemos probado que  $\mathring{c}(SL) = \mathbb{R} \times \mathring{c}L$  (como espacios topológicos).

Consideramos entonces  $\mathring{c}(SL)$  con su estratificación natural (dada por la filtración para el cono descrita en 2.1.1) y su estratificación intrínseca tal como la define King es justo la estratificación natural sobre  $\mathbb{R} \times \mathring{c}L$  (dada por la filtración para el cono y el producto descritas de nuevo en 2.1.1).

Para que haya una invariancia topológica, la homología para ambas estratificaciones debe ser la misma. Veamos para ello que condiciones deben verificar las perversidades laxas para este propósito.

- Homología para  $\mathbb{R} \times \mathring{c}L$

$$H_i^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times \mathring{c}L) \cong H_i^{\bar{p}}(\mathring{c}L) \cong \begin{cases} 0 & i \geq k-1-\bar{p}(k) \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k-1-\bar{p}(k) \end{cases} \quad (1)$$

- Homología para  $\overset{\circ}{c}(SL)$

$$H_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}(SL)) \cong \begin{cases} 0 & i \geq k - \bar{p}(k+1) \\ H_i^{\bar{p}}(SL) & i < k - \bar{p}(k+1) \end{cases} \cong$$

$$\cong \begin{cases} 0 & i \geq k - \bar{p}(k+1) \\ H_{i-1}^{\bar{p}}(L) & i < k - \bar{p}(k+1) \\ & i > k - 1 - \bar{p}(k) \\ 0 & i < k - \bar{p}(k+1) \\ & i = k - 1 - \bar{p}(k) \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k - \bar{p}(k+1) \\ & i < k - 1 - \bar{p}(k) \end{cases} \quad (2)$$

Distinguimos casos:

$$1) \bar{p}(k+1) = \bar{p}(k) = p$$

Reformulamos (1)

$$H_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L) \cong \begin{cases} 0 & i \geq k - 1 - p \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k - 1 - p \end{cases}$$

Reformulamos (2)

$$H_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}(SL)) \cong \begin{cases} 0 & i \geq k - p \\ H_{i-1}^{\bar{p}}(L) & i < k - p \\ & i > k - 1 - p \text{ No ocurre} \\ 0 & i < k - p \\ & i = k - 1 - p \Rightarrow i = k - 1 - p \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k - p \\ & i < k - 1 - p \Rightarrow i < k - 1 - p \end{cases}$$

Coincide la homología en  $\mathbb{R} \times \overset{\circ}{c}L$  y en  $\overset{\circ}{c}(SL)$

$$2) \bar{p}(k+1) = \bar{p}(k) + 1 = p + 1$$

Reformulamos (1)

$$H_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L) \cong \begin{cases} 0 & i \geq k - 1 - p \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k - 1 - p \end{cases}$$

Reformulamos (2)

$$H_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}(SL)) \cong \begin{cases} 0 & i \geq k - (p + 1) = k - p - 1 \\ H_{i-1}^{\bar{p}}(L) & i < k - (p + 1) = k - p - 1 \\ & i > k - 1 - p & \text{No ocurre} \\ 0 & i < k - (p + 1) = k - p - 1 \\ & i = k - 1 - p & \text{No ocurre} \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k - (p + 1) = k - p - 1 \\ & i < k - 1 - p & \Rightarrow i < k - 1 - p \end{cases}$$

Coincide la homología en  $\mathbb{R} \times \overset{\circ}{c}L$  y en  $\overset{\circ}{c}(SL)$

$$3) \bar{p}(k + 1) = \bar{p}(k) = p + 2$$

Reformulamos (1)

$$H_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L) \cong \begin{cases} 0 & i \geq k - 1 - p \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k - 1 - p \end{cases}$$

Reformulamos (2)

$$H_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}(SL)) \cong \begin{cases} 0 & i \geq k - (p + 2) = k - p - 2 \\ H_{i-1}^{\bar{p}}(L) & i < k - (p + 2) = k - p - 2 \\ & i > k - 1 - p & \text{No ocurre} \\ 0 & i < k - (p + 2) = k - p - 2 \\ & i = k - 1 - p & \text{No ocurre} \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k - (p + 2) = k - p - 2 \\ & i < k - 1 - p & \Rightarrow i < k - 2 - p \end{cases}$$

El  $(k - 2 - p)$ -ésimo grupo de homología no coincide generalmente, por tanto en esta situación no hay invariancia topológica.

Es obvio que los casos  $\bar{p}(k + 1) > \bar{p}(k) + 2$  tampoco van a ser válidos.

$$4) \bar{p}(k + 1) = \bar{p}(k) - 1 = p - 1$$

Reformulamos (1)

$$H_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L) \cong \begin{cases} 0 & i \geq k - 1 - p \\ H_i^{\bar{p}}(L) & i < k - 1 - p \end{cases}$$

Reformulamos (2)

$$H_i^{\bar{p}}(\mathring{c}(SL)) \cong \begin{cases} 0 & i \geq k - (p - 1) = k - p + 1 \\ H_{i-1}^{\bar{p}}(SL) & i < k - (p - 1) = k - p + 1 \\ & i > k - 1 - p & \Rightarrow i = k - p \\ 0 & i < k - (p - 1) = k - p + 1 \\ & i = k - 1 - p & \Rightarrow i = k - 1 - p \\ H_i^{\bar{p}}(SL) & i < k - (p - 1) = k - p + 1 \\ & i < k - 1 - p & \Rightarrow i < k - 1 - p \end{cases}$$

El  $(k - p)$ -ésimo grupo de homología no coincide generalmente, por tanto en esta situación no hay invariancia topológica.

Es también claro que los casos  $\bar{p}(k + 1) < \bar{p}(k)$  no son válidos.

Por tanto la condición queda:

$$\bar{p}(k) \leq \bar{p}(k + 1) \leq \bar{p}(k) + 1$$

esto es, la segunda de las condiciones GM

En la prueba de King no se impone en ningún momento que  $\bar{p}(2) = 0$ . Por tanto, la primera condición de Goresky-MacPherson no es necesaria para la invariancia topológica, de hecho King observa que la invariancia topológica va ligada directamente a la perversidad sin pasar por propiedades de intersección como sí hacían Goresky y MacPherson. Es por ello que no tienen en cuenta algunas posibilidades para la perversidad, de las que King dice:

Unfortunately, these new perverse intersection homology classes do not seem to intersect with anything. But in any case these groups are invariants of singular spaces which might be of some interest.

Independientemente de esto, recordamos también que la segunda propiedad que ellos buscaban para la homología de intersección es la dualidad de Poincaré

Si se permitiese tomar  $\bar{p}(2) > 0$ , entonces la perversidad dual  $\bar{q}$  cumpliría  $\bar{q}(2) < 0$  (ya que  $\bar{p}(2) + \bar{q}(2) = \bar{t}(2) = 2 - 2 = 0$ ) y los grupos de homología  $H_*^{\bar{q}}$  no serían un invariante topológico.

Por tanto si se busca, como hacían Goresky y MacPherson, invariancia topológica junto con dualidad de Poincaré sus condiciones impuestas a las perversidades son ambas necesarias.

Es también ahora inmediato observar que bajo estas condiciones no hay lugar para los estratos de codimensión 1 puesto que al tener que verificarse para cualquier perversidad laxa:

$$0 = \bar{0}(k) \leq \bar{p}(k) \leq \bar{t}(k) = k - 2$$

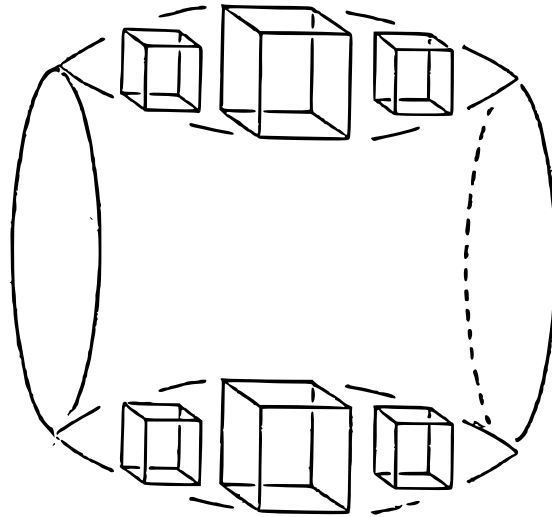
tendríamos:  $0 \leq \bar{p}(1) \leq \bar{t}(1) = 1 - 2 = -1$  que es absurdo.

### 3.5.1. Dualidad de Poincaré

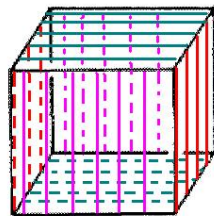
Con el siguiente ejemplo, proporcionado por Goresky y MacPherson en [12] buscamos mostrar como es la dualidad de Poincaré en homología de intersección. En él, calculamos la homología de intersección del producto cartesiano de  $\mathbb{S}^1$  con la suspensión del toro 3-dimensional.

Usaremos la notación  $X = ST^3 \times \mathbb{S}^1$ .

Nuestro espacio  $X$  lo podemos intuir como tenemos aquí dibujado:



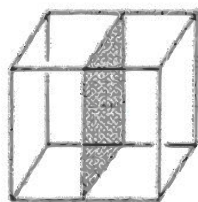
donde el toro lo visualizamos como un cubo en el que se identifican caras opuestas



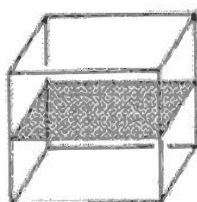
El espacio  $X$  lo estratificamos de la forma natural con un estrato de dimensión 5 ( $ST^3 \times \mathbb{S}^1 \setminus (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1)$ ) y dos estratos singulares de dimensión 1 ( $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{S}^1$ )

Los grupos de homología de intersección con perversidad  $\bar{p}$  están determinados por  $\bar{p}(4) = p$  que bajo las condiciones GM sólo puede tomar los valores 0, 1 o 2. Por tanto, las cadenas de intersección para  $\bar{p}$  serán aquellas  $\xi$  que intersecan al conjunto singular en dimensión  $\leq i - 4 + p$  y su frontera interseca al conjunto singular en dimensión  $\leq i - 5 + p$

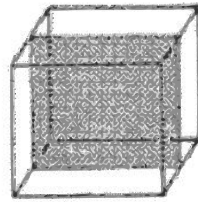
Si ahora elegimos un punto base en  $\mathbb{S}^1$  podemos identificar los siguientes ciclos en  $T^3$ , que tenemos a continuación dibujados



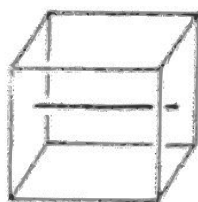
$$T_a^2 = \{b\} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$



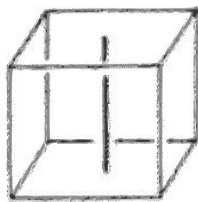
$$T_b^2 = \mathbb{S}^1 \times \{b\} \times \mathbb{S}^1$$



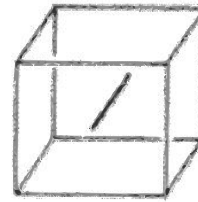
$$T_c^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \{b\}$$



$$T_a^1 = \mathbb{S}^1 \times \{b\} \times \{b\}$$



$$T_b^1 = \{b\} \times \mathbb{S}^1 \times \{b\}$$



$$T_c^1 = \{b\} \times \{b\} \times \mathbb{S}^1$$

En  $ST^3 \times \mathbb{S}^1$  tenemos los siguientes ciclos para (a) (análogamente para (b) y (c)).

■ *dim 0*

1)  $c = pt$  y  $dim(\Sigma \cap c) = -\infty$

■ *dim 1*

1)  $c = T_a^1$  y  $dim(\Sigma \cap c) = -\infty$

2)  $c = pt \times \mathbb{S}^1$  y  
 $dim(\Sigma \cap c) = -\infty$

■ *dim 2*

1)  $c = T_a^2$  y  $dim(\Sigma \cap c) = -\infty$

2)  $c = ST_a^1$  y  $dim(\Sigma \cap c) = 0$

3)  $c = T_a^1 \times \mathbb{S}^1$  y  
 $dim(\Sigma \cap c) = -\infty$

■ *dim 3*

1)  $c = ST_a^2$  y  $dim(\Sigma \cap c) = 0$

2)  $c = ST_a^1 \times \mathbb{S}^1$  y  $dim(\Sigma \cap c) = 1$

3)  $c = T_a^2 \times \mathbb{S}^1$  y  
 $dim(\Sigma \cap c) = -\infty$

4)  $c = T^3$  y  $dim(\Sigma \cap c) = -\infty$

■ *dim 4*

1)  $c = sT^3$  y  $dim(\Sigma \cap c) = 0$

2)  $c = ST_a^2 \times \mathbb{S}^1$  y  $dim(\Sigma \cap c) = 1$

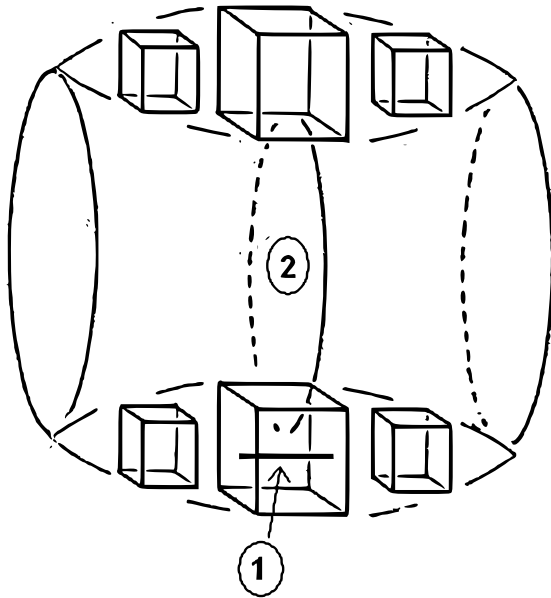
3)  $c = T^3 \times \mathbb{S}^1$  y  
 $dim(\Sigma \cap c) = -\infty$

■ *dim 5*

1)  $c = ST^3 \times \mathbb{S}^1$  y  $dim(\Sigma \cap c) = 1$

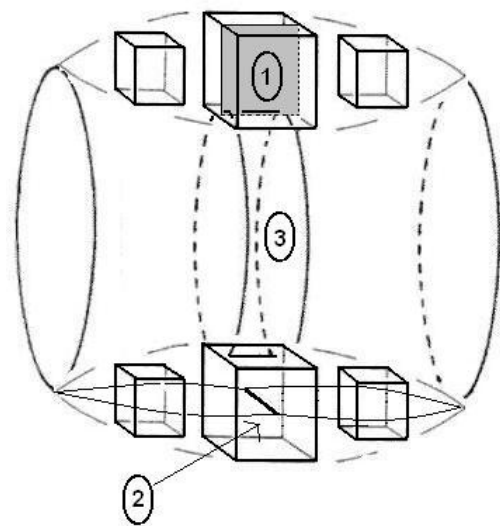


Tenemos aquí dibujados los ciclos en dimensiones 1 y 2, que son aquellas en las que es posible visualizarlos:



Donde:

1. es  $T_a^1$ , que al identificar los puntos de las caras opuestas resulta una circunferencia.
2. es  $c = pt \times \mathbb{S}^1$  que es también una circunferencia y por tanto un ciclo.



Donde:

1. es  $T_c^2$ , que al identificar los puntos de las caras opuestas resulta un toro “pequeño” en dimensión 2.
2. es  $c = ST_c^1$  que es la suspensión de una circunferencia y por tanto un ciclo en  $X$ .
3. es  $c = T_a^1 \times \mathbb{S}^1$  que al identificar caras opuestas en el cubo, resulta un toro “grande”.

A continuación, presentamos una tabla que resume quienes son los distintos ciclos admisibles en cada caso:

|                 | $p = 0$   | $p = 1$  | $p = 2$   |
|-----------------|---|--|---|
| $H_5^{\bar{p}}$ | $\leq 1$  | $\leq 2$   | $\leq 3$  |
|                 | $ST^3 \times \mathbb{S}^1$  | $ST^3 \times \mathbb{S}^1$   | $ST^3 \times \mathbb{S}^1$  |
|                 |   |  |   |
| $H_4^{\bar{p}}$ | $\leq 0$  | $\leq 1$   | $\leq 2$  |
|                 | $ST^3$  | $ST^3$   | $ST^3$  |
|                 |   | $ST_a^2 \times \mathbb{S}^1$<br>$ST_b^2 \times \mathbb{S}^1$<br>$ST_c^2 \times \mathbb{S}^1$ | $ST_a^2 \times \mathbb{S}^1$<br>$ST_b^2 \times \mathbb{S}^1$<br>$ST_c^2 \times \mathbb{S}^1$                            |
|                 | a)  | a)   | a)  |
| $H_3^{\bar{p}}$ | $\leq -1$   | $\leq 0$   | $\leq 1$  |
|                 | $T_a^2 \times \mathbb{S}^1$<br>$T_b^2 \times \mathbb{S}^1$<br>$T_c^2 \times \mathbb{S}^1$                         | $ST_a^2$<br>$ST_b^2$<br>$ST_c^2$   | $ST_a^2$ $ST_a^1 \times \mathbb{S}^1$<br>$ST_b^2$ $ST_b^1 \times \mathbb{S}^1$<br>$ST_c^2$ $ST_c^1 \times \mathbb{S}^1$ |
|                 | b)  | b) c)  | b) c)   |
|                 |   |  |   |
| $H_2^{\bar{p}}$ | $\leq -2$   | $\leq -1$  | $\leq 0$  |
|                 | $T_a^2$ $T_a^1 \times \mathbb{S}^1$<br>$T_b^2$ $T_b^1 \times \mathbb{S}^1$<br>$T_c^2$ $T_c^1 \times \mathbb{S}^1$ | $ST_a^1 \times \mathbb{S}^1$<br>$ST_b^1 \times \mathbb{S}^1$<br>$ST_c^1 \times \mathbb{S}^1$ | $ST_a^1$<br>$ST_b^1$<br>$ST_c^1$  |
|                 |   | d)   | d) e)   |
|                 |   |  |   |
| $H_1^{\bar{p}}$ | $\leq -3$   | $\leq -2$  | $\leq -1$   |
|                 | $T_a^1$<br>$T_b^1$ $pt \times \mathbb{S}^1$<br>$T_c^1$  | $T_a^1$<br>$T_b^1$ $pt \times \mathbb{S}^1$<br>$T_c^1$                                       | $pt \times \mathbb{S}^1$  |
|                 |   |  | f)  |
|                 |   |  |   |
| $H_0^{\bar{p}}$ | $\leq -4$   | $\leq -3$  | $\leq -2$   |
|                 | pt  | pt   | pt  |
|                 |   |  |   |

- a)  $T^3 \times \mathbb{S}^1 \equiv 0$  dado que es la frontera de la cadena de dimensión 5  $\bar{c}T^3 \times \mathbb{S}^1$ , que es  $\bar{p}$ -admisibles por serlo  $ST^3 \times \mathbb{S}^1$  como 5-ciclo
- b)  $T^3 \equiv 0$  puesto que es la frontera de la 4-cadena  $\bar{c}T^3$ , que es  $\bar{p}$ -admisibles por serlo  $ST^3$  como ciclo de dimensión 4.
- c)  $T_a^2 \times \mathbb{S}^1 \equiv 0$  pues es la frontera de la 4-cadena  $\bar{c}T_a^2 \times \mathbb{S}^1$ , que es cadena admisible, puesto que  $ST_a^2 \times \mathbb{S}^1$  es admisible).
- d)  $T_a^2 \equiv 0$  pues aquí es la frontera de  $\bar{c}T_a^2$ , que es cadena admisible, puesto que  $ST_a^2$  es un ciclo admisible

- e)  $T_a^1 \times \mathbb{S}^1 \equiv 0$  ya que es la frontera de la 3-cadena  $\bar{c}T_a^1 \times \mathbb{S}^1$ , que es admisible, pues  $ST_a^1 \times \mathbb{S}^1$  es un 3-ciclo admisible.
- f)  $T_a^1 \equiv 0$  dado que es la frontera de la cadena 2-dimensional  $\bar{c}T_a^1$  que es  $\bar{p}$ -admisible por serlo  $ST_a^1$  como 2-ciclo.

Por tanto, tenemos que los distintos grupos de homología de intersección (con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ ) son los siguientes:

| $p = 0$                   | $p = 1$                   | $p = 2$                   |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $H_0^0(X) = \mathbb{Z}$   | $H_0^1(X) = \mathbb{Z}$   | $H_0^2(X) = \mathbb{Z}$   |
| $H_1^0(X) = \mathbb{Z}^4$ | $H_1^1(X) = \mathbb{Z}^4$ | $H_1^2(X) = \mathbb{Z}$   |
| $H_2^0(X) = \mathbb{Z}^6$ | $H_2^1(X) = \mathbb{Z}^3$ | $H_2^2(X) = \mathbb{Z}^3$ |
| $H_3^0(X) = \mathbb{Z}^3$ | $H_3^1(X) = \mathbb{Z}^3$ | $H_3^2(X) = \mathbb{Z}^6$ |
| $H_4^0(X) = \mathbb{Z}$   | $H_4^1(X) = \mathbb{Z}^4$ | $H_4^2(X) = \mathbb{Z}^4$ |
| $H_5^0(X) = \mathbb{Z}$   | $H_5^1(X) = \mathbb{Z}$   | $H_5^2(X) = \mathbb{Z}$   |

y recuperamos rápidamente la dualidad de Poincaré

$$H_i^{\bar{p}}(X) = H_{n-i}^{\bar{q}}(X) \quad \text{donde } \bar{p} + \bar{q} = \bar{t}$$

Dado que  $\bar{t}(4) = 4 - 2 = 2$ , la perversidad dual a  $\bar{p}(4) = 0$  es  $\bar{q}(4) = 2$  y la dual a  $\bar{p}(4) = 1$  es  $\bar{q}(4) = 1$ .

De este modo observamos que:

$$H_i^0(X) = H_{5-i}^2(X)$$

y

$$H_i^1(X) = H_{5-1}^1(X)$$



# Capítulo 4

## Despliegues y blow-up simplicial

En este capítulo, vamos a describir una nueva herramienta, el blow-up simplicial, e indicar el uso que Saralegi hace de ella para probar que la homología de intersección se puede calcular con cohomología de formas diferenciales (Cohomología de intersección de de'Rham).

La herramienta básica de la teoría de de'Rham es la integración de formas diferenciales. Para construir dicha cohomología, se necesita dotar de contenido a:

1. El concepto de forma diferenciable  $\omega$  en  $X$ , que es posiblemente singular
2. El concepto de símplice  $\sigma : \Delta \rightarrow X$  “regular”
3.  $\int_{\Delta} \omega$
4. Algo similar a un teorema de Stokes

Por lo que se refiere a las formas diferenciales, podemos limitarnos a considerar las formas definidas en la parte regular de  $X$  y prescindir de las singularidades. Pero al hacer esto, tenemos un problema con el borde del dominio de integración. Un símplice puede estar “casi-contenido” en la parte regular de  $X$  que no es compacta y por ello puede no existir  $\int_{\Delta} \omega$  incluso cuando  $Im(\Delta) \subset R$ .

Existe además la posibilidad de que en el borde de  $\Delta$ ,  $\omega$  no esté definida, de modo que hablar del teorema de Stokes carece de sentido.

Una alternativa a reducirnos a trabajar en la parte singular, es intentar transformar  $X$  en una variedad regular  $\tilde{X}$ , pero esto plantea ahora los siguientes problemas:

1. En general, en el caso diferenciable no existe un modelo no singular  $\tilde{X}$  de  $X$ . Concretando un poco más, no tiene porque existir una variedad  $\tilde{X}$  no singular y un morfismo  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  que sea isomorfismo fuera del lugar singular y de modo que la contraimagen del lugar singular tenga propiedades razonables.

2. A priori, no es evidente la existencia de un proceso que permita elevar las formas diferenciales definidas sobre  $R$ , la parte regular de  $X$ , a formas diferenciales sobre  $\tilde{X}$  de un modo que permita la integración.
3. Trabajamos no solo con  $X$  no regular, sino que también tenemos una estratificación en  $X$  que este nuevo modelo regular  $\tilde{X}$  debe respetar y por lo que este proceso se hace más complicado.
4. La elevación de funciones no es un problema, pues basta componerlas con el morfismo, pero la elevación de símplices que toquen a la parte singular ya es otra historia, pues supone elevar a  $\tilde{X}$  funciones que “terminan” en  $X$

Saralegi propone utilizar una variante de las explosiones, los despliegues. Construye para  $X$  un modelo  $\tilde{X}$  en el que la condición de isomorfismo fuera del lugar singular se cambia por la de revestimiento; en lenguaje algebraico es algo similar a explotar y ramificar a continuación. Además, prueba que se elevan a  $\tilde{X}$  adecuadamente suficientes formas sobre  $X$ . Dentro de este capítulo especificaremos, entre otras cosas, que queremos decir con que una forma se eleve o levante “de manera adecuada”.

Como queremos poder integrar, también tenemos que aplicar transformaciones sobre el dominio de integración y es aquí donde surge la necesidad de definir el blow-up simplicial.

De este modo dado  $X$  y el despliegue  $\tilde{X} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  consideramos un conjunto de formas diferenciales sobre  $R \subset X$ ,  $\Pi^*$  y un conjunto de símplices singulares  $\mathcal{S}$  tales que:

1.  $\forall \omega \in \Pi^*$ ,  $\omega$  admite un levantamiento a  $\tilde{X}$
2.  $\forall \sigma : \Delta \rightarrow X$  de  $\mathcal{S}$ , existe  $\tilde{\Delta}$  y  $\tilde{\sigma} : \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{X}$  (no necesariamente diferenciable) de modo que:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

es conmutativo. Así, una forma de  $\Pi^*$  definida sobre  $\Delta$  se levanta a otra definida sobre  $\tilde{\Delta}$  de manera que lo que hemos añadido al levantarla es irrelevante.

Saralegi prueba que considerar los símplices y formas diferenciales levantables es suficiente para hacer los cálculos de la cohomología y alcanzar así su objetivo.

## 4.1. Blow-up simplicial

Para este apartado, hemos seguido en general, la descripción dada en [10] por Saralegi donde llama a este tipo de blow-up “déplissage”.

**Definición 4.1.1.** El *blow-up* de un simplexe filtrado  $\Delta = \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_n}$  con  $j_n \geq 0$  es la aplicación

$$\mu : \tilde{\Delta} = c\Delta_{j_0} \times \dots \times c\Delta_{j_{n-1}} \times \Delta_{j_n} \rightarrow \Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_n} = \Delta$$

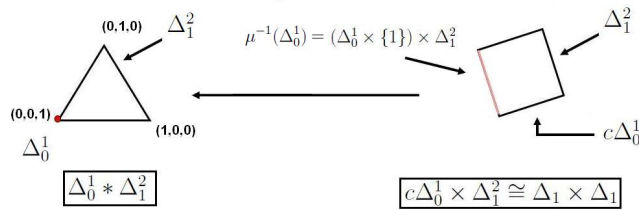
donde  $c\Delta_k = \Delta_k \times [0, 1] / \Delta_k \times \{0\}$  es el cono de  $\Delta_k$ , que viene definida por:

$$\begin{aligned} \mu([y_0, s_0], \dots, [y_{n-1}, s_{n-1}], y_n) = & s_0 y_0 + (1-s_0)s_1 y_1 + \dots + (1-s_0)\dots(1-s_{n-2})s_{n-1} y_{n-1} + \\ & + (1-s_0)\dots(1-s_{n-2})(1-s_{n-1})y_n \end{aligned}$$

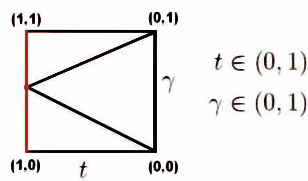
donde como es habitual representamos por  $[y_i, s_i]$  a la clase de equivalencia del punto  $(y_i, s_i)$  en  $c\Delta_{j_i}$  con  $y_i \in \Delta_{j_i}$ , e  $y_n \in \Delta_{j_n}$ .

La cara  $\Delta_{j_i} \times \{1\}$  de  $c\Delta_{j_i}$  se corresponde con  $s_i = 1$ .

**Ejemplo 4.1.2.** Veamos un primer ejemplo que nos ayude a comprender esta definición y en un caso particular, como se obtiene dicha aplicación.



Consideremos la transformación de  $c\Delta_0 \times \Delta_1$  en  $\Delta_0 * \Delta_1$  que tenemos dada en la siguiente figura



Los puntos en  $c\Delta_0 \times \Delta_1$  son de la forma  $([(0, 0, 1), t], (\gamma, 1 - \gamma, 0))$ , y los representamos en la figura anterior por las coordenadas  $(t, \gamma)$ .

La transformación sobre dichos los puntos actúa de la siguiente manera:

- $(1, \gamma) \mapsto (0, 0, 1)$
- $(0, \gamma) \mapsto (\gamma, 1 - \gamma, 0)$
- $(t, 1) \mapsto (t, 0, 1 - t)$
- $(t, 0) \mapsto (0, t, 1 - t)$

De este modo

$$(\gamma, t) \mapsto ((1 - t)\gamma, (1 - t)(1 - \gamma), t)$$

Que es de hecho lo que obtenemos con la aplicación  $\mu$ , pues:

$$\mu([(0, 0, 1), t], (\gamma, 1 - \gamma, 0)) = t(0, 0, 1) + (1 - t)(\gamma, 1 - \gamma, 0) = ((1 - t)\gamma, (1 - t)(1 - \gamma), t)$$

**Observación 4.1.3.**  $\mu$  está bien definida.

*Demostración.* Para  $s_i \neq 0$   $[y_i, s_i] = (y_i, s_i)$  y no hay ningún problema. En otro caso, supongamos  $s_i = 0$  para algún  $i$

$$([y_0, s_0], \dots, [y_i, 0], \dots, [y_{n-1}, s_{n-1}], y_n) \quad (1)$$

$$([y_0, s_0], \dots, [\tilde{y}_i, 0], \dots, [y_{n-1}, s_{n-1}], y_n) \quad (2)$$

(1) y (2) son dos representaciones distintas de un mismo punto

$$\mu((1)) = s_0 y_0 + (1 - s_0) s_1 y_1 + \dots + (1 - s_0) \dots (1 - s_{i-1}) 0 y_i + \dots + (1 - s_0) \dots (1 - s_{n-1}) y_n$$

$$\mu((2)) = s_0 y_0 + (1 - s_0) s_1 y_1 + \dots + (1 - s_0) \dots (1 - s_{i-1}) 0 \tilde{y}_i + \dots + (1 - s_0) \dots (1 - s_{n-1}) y_n$$

y por tanto se sigue que :

$$\tilde{\mu}((1)) = \tilde{\mu}((2))$$

■

El blow-up,  $\mu$ , puede definirse también utilizando coordenadas baricéntricas.

Para esta escritura consideramos cada  $\Delta_{j_i} \subset \mathbb{R}^{j_i+1}$  sumergido en  $\mathbb{R}^N$  donde:

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{j_0+1} \times \mathbb{R}^{j_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{j_n+1}$$

Expresamos un punto de  $c\Delta_{j_i}$  por  $(\mathbf{x}_i, t_i)$  con:

$$\mathbf{x}_i = (x_{i_0}, \dots, x_{i_{j_i}}) \in \mathbb{R}^{j_i+1}, \quad t_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad t_i + \sum_{k=0}^{j_i} x_{i_k} = 1$$

La sumersión de  $\mathbf{x}_i$  en  $\mathbb{R}^N$  la denotamos por  $\bar{x}_i$  y consiste en añadir ceros en las posiciones correspondientes y establecemos:

$$\mu((\mathbf{x}_0, t_0), \dots, (\mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1}), \mathbf{x}_n) = \bar{x}_0 + t_0 \bar{x}_1 + t_0 t_1 \bar{x}_2 + \dots + t_0 \dots t_{n-1} \bar{x}_n$$



pero por comodidad en la escritura, con un abuso de notación, omitiremos a partir de ahora las barras y los remarcados en negrita, teniendo siempre presente aquello a lo que hacemos referencia.

Para esta visión, el punto  $((0, 0, 1), t], (\gamma 1 - \gamma, 0))$  del ejemplo anterior vendría dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= t & t_0 &= 1 - t & \bar{x}_0 &= (t, 0, 0) \\ \mathbf{x}_1 &= (\gamma, 1 - \gamma) & \bar{x}_1 &= (0, \gamma, 1 - \gamma) \end{aligned}$$

$$y \quad \mu((t, 1-t), (\gamma, 1-\gamma)) = (t, 0, 0) + (1-t)(0, \gamma, 1-\gamma) = (t, (1-t)\gamma, (1-t)(1-\gamma))$$

llegando al mismo punto de  $\Delta_0 * \Delta_1$  (con una permutación de las coordenadas) que para la definición anterior.

Así, las coordenadas baricéntricas nos permiten escribir los resultados de una manera más cómoda y clara.

En el lenguaje de coordenadas baricéntricas, la cara  $\Delta_{j_i} \times \{1\} = \mu^{-1}(\Delta_{j_i})$  se corresponde con el conjunto de elementos que satisfacen  $t_i = 0$  y el vértice del cono se corresponde al punto de coordenadas en  $c\Delta_{j_i}$  dado por  $(0_{j_i}, 1)$ .

En el caso  $\Delta_{j_i} = \emptyset$  (es decir,  $j_i = -1$ ) tenemos:  $c\Delta_{j_i} = \{(0_{j_i}, 1)\}$ .

En general al prisma  $\tilde{\Delta}$  se le llama también *blow-up* de  $\Delta$ .

**Proposición 4.1.4.** La aplicación  $\mu$  induce un difeomorfismo entre el interior del blow-up  $\tilde{\Delta}$  y el interior del símplice  $\Delta$

*Demostración.* Lo más delicado de la prueba reside en comprobar que es una biyección pues la bicontinuidad y bidiferenciabilidad se verifican por como está definido  $\mu$ .

Inyectividad: Sean  $d, e \in \overset{\circ}{\tilde{\Delta}}$  dos puntos en el interior de  $\tilde{\Delta}$

$$d = ((x_0, t_0), \dots, (x_{n-1}, t_{n-1}), x_n) \quad t_i \neq 0 \quad \forall i = 0, \dots, n-1$$

$$e = ((y_0, s_0), \dots, (y_{n-1}, s_{n-1}), y_n) \quad s_i \neq 0 \quad \forall i = 0, \dots, n-1$$

y supongamos que sus imágenes coinciden,  $\mu(d) = \mu(e)$

Veamos que necesariamente son el mismo punto utilizando coordenadas baricéntricas.

$$\mu(d) = \mu(e) \Rightarrow x_0 + t_0 x_1 + \dots + t_0 \dots t_{n-1} x_n = y_0 + s_0 y_1 + \dots + s_0 \dots s_{n-1} y_n \Rightarrow x_0 = y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + t_1 x_2 + \dots + t_1 \dots t_{n-1} x_n = y_1 + s_1 y_2 + \dots + s_1 \dots s_{n-1} y_n \Rightarrow \dots \Rightarrow x_n = y_n$$

Sustituyendo, tenemos ahora:

$$\begin{aligned} x_0 + t_0 x_1 + t_0 t_1 x_2 + \dots + t_0 t_1 \dots t_{n-1} x_n &= x_0 + s_0 x_1 + s_0 s_1 x_2 + \dots + s_0 \dots s_{n-1} x_n \Rightarrow t_0 x_1 = s_0 x_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_0 = s_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow t_0 \dots t_{n-2} t_{n-1} x_n = t_0 \dots t_{n-2} s_{n-1} x_n \Rightarrow t_{n-1} = s_{n-1} \end{aligned}$$

y llegamos a que  $d = e$

Sobreyectividad: Dado  $a \in \overset{\circ}{\Delta}$ , ¿existe  $b \in \tilde{\Delta}$  tal que  $\mu(b) = a$  ?

En 2.1.2 habíamos probado que  $A * B \cong A + B$ , por tanto:

Si  $a \in \overset{\circ}{\Delta}$ ,  $a$  es de la forma  $a = t_0 x_0 + t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$  donde:

$$\sum_{i=0}^n t_i = 1, \quad 0 < t_i < 1; \quad \mathbf{x}_i \in \Delta_{j_i}, \quad \mathbf{x}_i = (x_{i_0}, \dots, x_{i_{j_i}}), \quad \sum_{k=0}^{j_i} x_{i_k} = 1$$

Se comprueba de forma inmediata que  $b = ((t_0 \mathbf{x}_0, \frac{t_1}{t_0}), \dots, (t_0 \mathbf{x}_{n-1}, \frac{t_n}{t_{n-1}}), t_0 \mathbf{x}_n)$  es el elemento de  $\tilde{\Delta}$  que buscábamos. ■

Otra de las propiedades que posee la aplicación  $\mu$  es que además, envía caras de  $\tilde{\Delta}$  a caras de  $\Delta$  de la forma que mostramos a continuación:

### 1. Blow-up de una cara

Si  $C$  es una cara de  $\Delta$  con  $C_i = C \cap \Delta_{j_i} \neq \emptyset \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$ , tendremos  $C = C_0 * \dots * C_n$  y el blow-up de  $C$  es la restricción de  $\mu : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$  a  $\tilde{C}$ .

El caso general (donde la cara no necesariamente tiene contacto con todos los elementos de la descomposición de  $\Delta$ ) se complica debido al hecho de que la posición relativa de  $C$  respecto a los  $\Delta_{j_0}, \dots, \Delta_{j_n}$  se expresa con la ayuda de las subdivisiones de los  $\Delta_{j_i}$  y no con la de las caras de los  $\Delta_{j_i}$ .

### 2. Blow-up de un elemento de una subdivisión

Sea  $C$  un elemento de una subdivisión lineal de  $\Delta$ . Extraemos de  $\{0, \dots, n\}$  el subconjunto maximal  $\{i_0, \dots, i_q\}$  verificando:

$$0 \subsetneq C^0 \subsetneq C^1 \subsetneq \dots \subsetneq C^q = C$$

donde hemos denotado, por simplicidad en los índices  $C^k$  como sigue:

$$C^k = C \cap (\Delta_{j_{i_0}} * \dots * \Delta_{j_{i_k}}) \supsetneq C \cap (\Delta_{j_{i_0}} * \dots * \Delta_{j_{i_{k-1}}})$$

Para cada  $k \in \{0, \dots, q\}$  denotamos por  $C_k$  a la cara de  $C^k$  opuesta a  $C^{k-1}$  y se obtiene la siguiente descomposición:

$$C^k = C^{k-1} * C_k = C_0 * C_1 * \dots * C_k \quad \text{con el convenio } C^{-1} = \emptyset$$

En particular,  $C = C^q = C_0 * C_1 * \dots * C_q$  y a ésta la llamamos descomposición inducida de  $C$ .

Dentro de este caso se incluye el anterior, tomando  $(i_0, \dots, i_q) = (0, \dots, n)$  y para esta situación  $C_k = C \cap \Delta_{j_k}$  para cada  $k$ .

Con esta descomposición, tiene sentido hablar del blow-up de  $C$ , dado por  $\tilde{C}$  y  $\mu_C : \tilde{C} \rightarrow C$  que está relacionado con el blow-up simplicial  $\mu : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$  por la proposición que sigue a continuación y que no demostraremos.

**Definición 4.1.5.** Una aplicación definida sobre un poliedro  $P \subset \mathbb{R}^N$  es diferenciable si es la restricción de una aplicación diferenciable, en el sentido usual, definida sobre un abierto de  $\mathbb{R}^N$  que contiene a  $P$ .

**Proposición 4.1.6.** Sea  $C$  un símplice de una subdivisión lineal de  $\Delta$ . Entonces existe una aplicación diferenciable  $h : \tilde{C} \rightarrow \tilde{\Delta}$  tal que  $\mu \circ h = \mu_C$ .

De este modo, cuando estamos en el caso particular en el que  $(i_0, \dots, i_q) = (0, \dots, n)$  la aplicación  $h$  es la inclusión  $\tilde{C} \subset \tilde{\Delta}$

3. Blow-up del borde Sea  $F$  una cara de  $\tilde{\Delta}$  de codimensión 1 y  $C = \mu(F)$ . Estas caras son de tres tipos:
- a.1)  $F = c\Delta_{j_0} \times \dots \times c\Delta_{j_{i-1}} \times cF_i \times c\Delta_{j_{i+1}} \times \dots \times c\Delta_{j_{n-1}} \times \Delta_{j_n}$  donde  $F_i$  es una cara de codimensión 1 de  $\Delta_{j_i}$
  - a.2)  $F = c\Delta_{j_0} \times \dots \times c\Delta_{j_{n-1}} \times F_n$  donde  $F_n$  es una cara de codim. 1 de  $\Delta_{j_n}$
  - b)  $F = c\Delta_{j_0} \times \dots \times c\Delta_{j_{i-1}} \times (\Delta_{j_i} \times \{1\}) \times c\Delta_{j_{i+1}} \times \dots \times c\Delta_{j_{n-1}} \times \Delta_{j_n}$

Cuando  $F$  recorre las caras de tipo (a.1) y (a.2) se verifica que  $C$  recorre las caras de codimensión 1 de  $\Delta$ .

Para el tercer caso, se obtiene que  $C$  es la cara  $\Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_i}$ .

La restricción de  $\mu$  a  $F$  viene dada en cada caso por:

- a.1) y a.2) La explosión de  $C$  a lo largo de la descomposición inducida.
- b) La composición de la proyección natural de  $F$  en  $c\Delta_{j_0} * \dots * c\Delta_{j_{i-1}} * \Delta_{j_i}$  con la explosión simplicial de  $C$  a lo largo de la descomposición inducida.

Por tanto, en la frontera de  $\tilde{\Delta}$ , denotada por  $\partial\tilde{\Delta}$ , no sólo encontramos la explosión de la frontera de  $\Delta$ , esto es  $\widetilde{\partial\Delta}$  (casos a.1) y a.2)) sino que también hay que tener en cuenta las caras del caso b) a las que llamaremos *caras malas*.

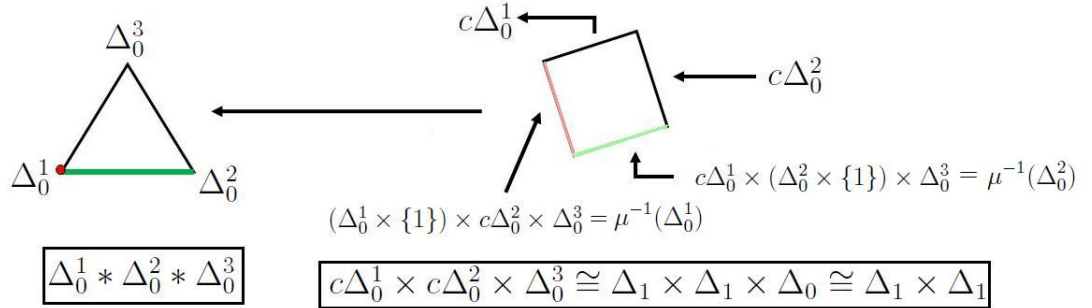
Esto da lugar a la descomposición  $\partial\tilde{\Delta} = \widetilde{\partial\Delta} + \delta\Delta$ .

Notar que, si  $F$  es una cara mala, entonces:

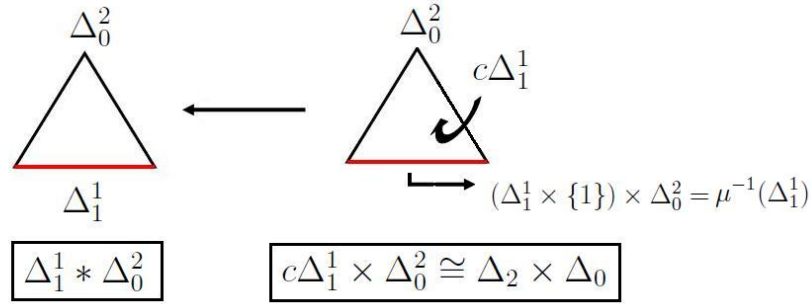
$$\dim(\mu_\Delta(F)) = \dim(\Delta_{j_0} * \dots * \Delta_{j_i}) \leq \dim\Delta - 1 = \dim F \quad (*)$$

**Ejemplo 4.1.7.** Veamos ahora dibujados otros ejemplos que nos ayuden a comprender bien la definición:

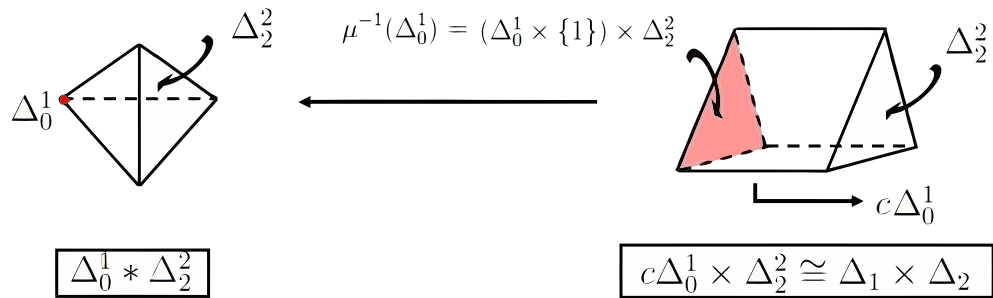
1.



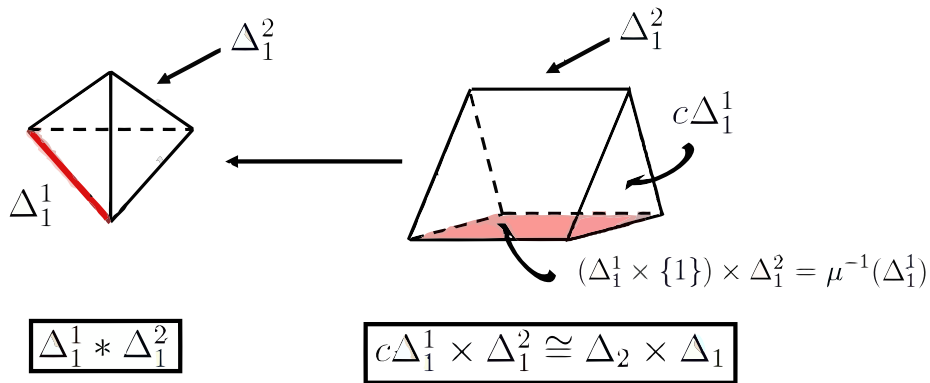
2.



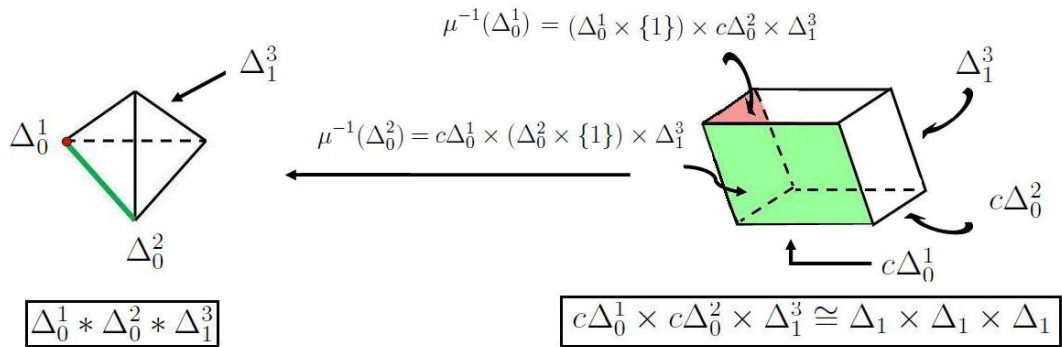
3.



4.



5.



Los superíndices en los  $\Delta_i^k$  denotan la posición que ocupa el símplex en la descomposición.

Por otro lado, hemos coloreado en verde y rojo las caras malas correspondientes a cada estrato, que son el análogo a lo que en geometría algebraica se llama divisores excepcionales.

Además, observamos que en los casos en los que dichas caras poseen más interés es cuando en (\*) se da la desigualdad estricta.

## 4.2. Despliegues

**Definición 4.2.1.** Un *despliegue* de  $X$  consiste en una variedad  $\tilde{X}$  y una aplicación continua, sobreyectiva  $\mathcal{L} : \tilde{X} \rightarrow X$  que satisface:

1. Condiciones inductivas

Hay una familia de despliegues de los enlaces de los estratos singulares

$$\{\mathcal{L}_S : \tilde{L}_S \rightarrow L_S : S \text{ singular}\}$$

2. Regularidad

La restricción  $\mathcal{L} : \mathcal{L}^{-1}(X \setminus \Sigma) \rightarrow X \setminus \Sigma$  es un recubrimiento trivial finito diferenciable

3. Existencia de cartas desplegadas

Para cada punto  $z \in \mathcal{L}^{-1}(\Sigma)$  hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times \tilde{L} \times \mathbb{R}^{\tilde{\alpha}} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow c & & \downarrow \mathcal{L} \\ U \times \overset{\circ}{c}L & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

tal que:

- $(U, \alpha)$  es una carta de  $x = \mathcal{L}(z)$
- $c(u, \tilde{l}, t) = (u, [\mathcal{L}_L(\tilde{l}), |t|])$
- $\tilde{\alpha}$  es un difeomorfismo sobre  $\mathcal{L}^{-1}(Im(\alpha))$

Una pseudovariiedad estratificada  $X$  es *desplegable* si posee un despliegue

En [15] T. Guardia y G. Padilla prueban que los espacios estratificados de Thom Mather, que como ya hemos visto son pseudovariiedades PL, son desplegadas. Para ello, construyen un functor que envía cada espacio simple (esto es, profundidad 1) de Thom-Mather en una variedad regular llamada *despliegue primario*, prueban que esta construcción es functorial y que se preserva bajo morfismos de Thom-Mather. Posteriormente, en [16] extienden este resultado a cualquier espacio estratificado de Thom-Mather.

ENTENDIENDO EL DESPLIEGUE:

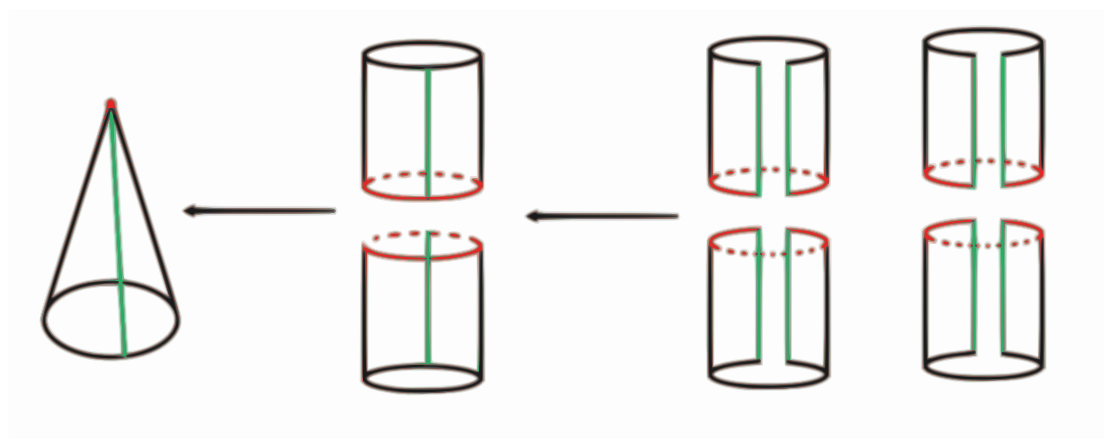
- El despliegue del cono es el cilindro (intuitivamente, quitar la singularidad y abrir), y ambas cosas son difeomorfas fuera de la singularidad. De aquí en la condición (3)

$$\begin{array}{ccc}
 U \times \tilde{\mathbf{L}} \times \mathbb{R}^{\tilde{\alpha}} & \longrightarrow & \tilde{X} \\
 \downarrow c & & \downarrow \mathcal{L} \\
 U \times \mathring{\mathbf{c}}\mathbf{L} & \xrightarrow{\alpha} & X
 \end{array}$$

- Se sustituye el  $[0, 1[$  de  $\mathring{\mathbf{c}}\mathbf{L}$  por  $] - 1, 1[$  (Que haciendo una transformación se puede tomar como  $\mathbb{R}$ ).

De este modo, se evitan las variedades con borde. Por ello, el número de copias en cada “iteración” del despliegue se duplica.

A continuación, tenemos un ejemplo que ilustra este hecho:



Esta es justamente la condición que se impone en (2), que es un recubrimiento trivial finito.

- En último lugar, la condición (1) es necesaria para poder realizar el cálculo, ya que así de un modo iterativo, calculamos el despliegue de toda la pseudovariedad, como composición de los despliegues  $\mathcal{L}_S$ .

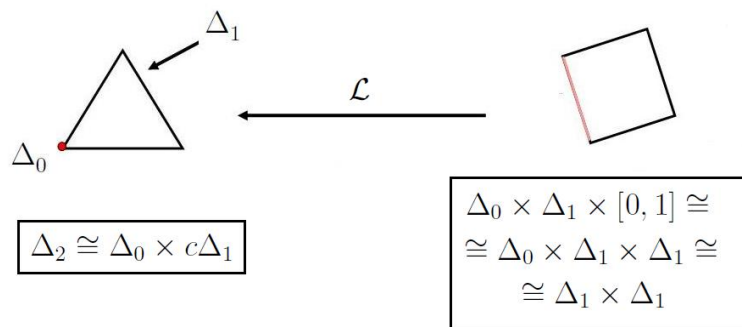
### 4.2.1. Despliegue lineal

La explosión simplicial es el caso más sencillo de despliegue (aunque en este caso no se va duplicando el espacio, pues los objetos combinatorios es natural que tengan esquinas y bordes) ya que los entornos cónicos se pueden tomar globales, entendiéndose por global el hecho de tener el mismo entorno para todos los puntos del estrato.

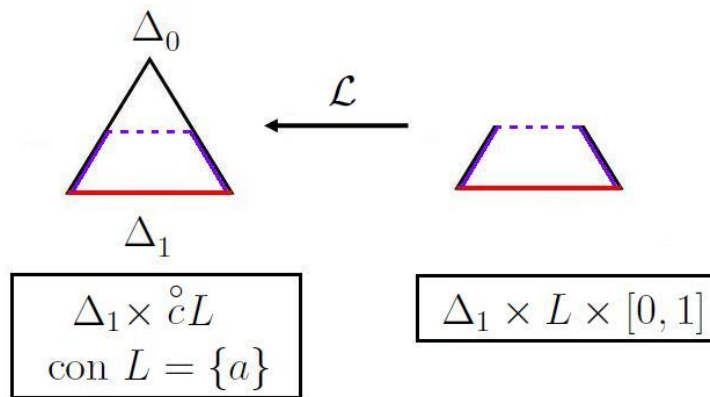
Veamos para algunos de los ejemplos anteriores que con la definición de despliegue (sin hacer el duplicado) obtenemos el mismo resultado.

#### Ejemplo 4.2.2.

1.

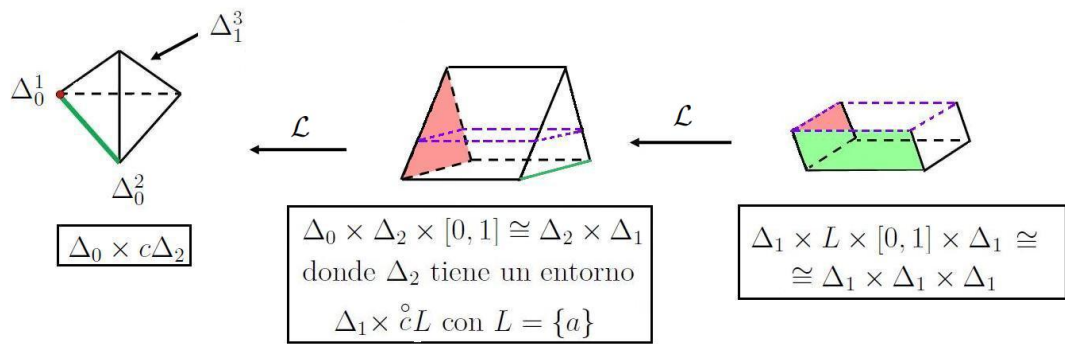


2.

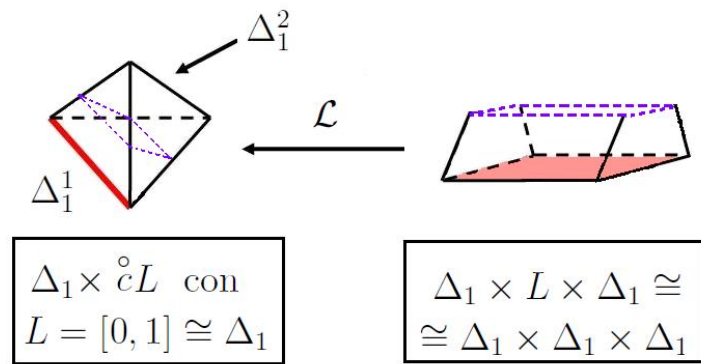




3.



4.



### 4.3. Cohomología de intersección de DeRham

La cohomología de intersección de DeRham fue introducida por Brylinski en 1989. Nosotros vamos a dar una visión de ella muy general siguiendo [13] y únicamente para dar una idea de una de las aplicaciones de la teoría

#### 4.3.1. Formas perversas

Sea  $X$  una pseudovariiedad estratificada desplegable con despliegue  $\tilde{X}$  y  $\mathcal{L} : \tilde{X} \rightarrow X$ .

**Definición 4.3.1.** Una *forma levantable* es una forma diferencial  $\omega \in \Omega^*(X \setminus \Sigma)$  de modo que existe otra forma  $\tilde{\omega} \in \Omega^*(\tilde{X})$  verificando que  $\mathcal{L}^*\omega = \tilde{\omega}$  en  $\mathcal{L}^{-1}(X \setminus \Sigma)$ .

**Nota 4.3.2.**  $\Omega^*(Y)$  denota el complejo diferencial de formas sobre  $Y$  y denotamos por  $\Pi^*(X)$  al complejo diferencial de formas diferenciales levantables.

Dadas dos formas diferenciales  $\omega$  y  $\eta$  tenemos las siguientes propiedades:

1.  $\widetilde{\omega + \eta} = \tilde{\omega} + \tilde{\eta}$
2.  $\widetilde{\omega \wedge \eta} = \tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta}$
3.  $\widetilde{d\omega} = d\tilde{\omega}$

**Definición 4.3.3.** Para todo  $S \in \mathcal{S}_X^{Sing}$ , donde  $\mathcal{S}_X^{Sing}$  denota la familia de estratos singulares en  $X$ , consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longleftarrow & \mathcal{L}^{-1}(S) \\ \mathcal{L} \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}|_{\mathcal{L}^{-1}(S)} \\ X & \longleftarrow & S \end{array}$$

Diremos que un vector tangente a  $\mathcal{L}^{-1}(S)$   $v \in T(\mathcal{L}^{-1}(S))$  es *vertical* si  $\mathcal{L}_*v = 0$

**Definición 4.3.4.** Dada  $\omega \in \Pi^*(X)$ , para cada  $S \in \mathcal{S}_X^{Sing}$  podemos asignarle a  $\omega$  un *grado de perversidad*, dado del siguiente modo:

1.  $\|\omega\|_S \leq 0$  si  $\omega(v) = 0 \quad \forall v \in T(\mathcal{L}^{-1}(S))$  vertical
2.  $\|\omega\|_S \leq 1$  si  $\omega(v, v') = 0 \quad \forall v, v' \in T(\mathcal{L}^{-1}(S))$  verticales

En particular,  $\|\omega\|_S = 1$  si

- $\omega(v, v') = 0 \quad \forall v, v' \in T(\mathcal{L}^{-1}(S))$  verticales
- $\exists v \in T(\mathcal{L}^{-1}(S))$  vertical tal que  $\omega(v) \neq 0$

De este modo, definimos  $\|w\|_S = l$  si:

- $w(v_1, \dots, v_l) = 0 \quad \forall (v_1, \dots, v_l) \in (T(\mathcal{L}^{-1}(S)))^l$   $l$ -upla de vectores verticales.
- $\exists (v'_1, \dots, v'_{l-1}) \in (T(\mathcal{L}^{-1}(S)))^{l-1}$   $(l-1)$ -upla de vectores verticales tal que  $\omega(v'_1, \dots, v'_{l-1}) \neq 0$

**Definición 4.3.5.** Dada  $\bar{p}$  una perversidad laxa, definimos el *complejo diferencial de formas diferenciales de intersección para  $\bar{p}$*  como:

$$\Omega_{\bar{p}}^*(X) = \left\{ \omega \in \Pi^*(X) \mid \max(\|\omega\|_S, \|d\omega\|_S) \leq \bar{p}(k) \text{ con } k \text{ codim. de } S, \forall S \in \mathcal{S}_X^{Sing} \right\}$$

La cohomología de este complejo es la cohomología de de'Rham de intersección para  $\bar{p}$  de  $X$ .

La cohomología de intersección de de'Rham verifica unas propiedades computacionales importantes:

- La propiedad de Mayer-Vietoris
- La fórmula del producto  $H_{\bar{p}}^*(\mathbb{R} \times X) = H_{\bar{p}}^*(X)$ .
- También se tiene para ella la fórmula del cono:

Si  $L$  es una pseudovariiedad estratificada compacta de dimensión  $k-1$  y  $\overset{\circ}{c}L$  el cono abierto de  $L$  se tiene que:

$$H_{\bar{p}}^i(\overset{\circ}{c}L) = \begin{cases} 0 & i > \bar{p}(k) \\ H_{\bar{p}}^i(L) & i \leq \bar{p}(k) \end{cases}$$

### 4.3.2. Integración

La relación entre la homología de intersección y la cohomología de intersección de de'Rham se establece usando la integración de formas diferenciales sobre símlices.

Puesto que  $X$  no es una variedad, trabajaremos en su despliegue  $\tilde{X}$ .

Si consideramos un símlice levantable  $\sigma : \Delta \rightarrow X$ , sabemos que existe un estrato  $S$  conteniendo a  $\sigma(\overset{\circ}{\Delta})$ . Puesto que  $\mu_\Delta : \overset{\circ}{\tilde{\Delta}} \rightarrow \overset{\circ}{\Delta}$  es un difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \tilde{X} \\ \downarrow \mu_\Delta & & \downarrow \mathcal{L}_X \\ \overset{\circ}{\tilde{\Delta}} & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

$\sigma = \mathcal{L}_X \circ \tilde{\sigma} \circ \mu_\Delta^{-1}$  es una aplicación suave.

Consideramos ahora una forma diferencial levantable  $\omega \in \Pi^*(X)$  y definimos la integración como:

$$\int_\sigma \omega = \begin{cases} \int_{\overset{\circ}{\Delta}} \sigma^* \omega & \text{S es un estrato regular (es decir, } \sigma(\Delta) \not\subset \Sigma) \\ 0 & \text{S es un estrato singular (es decir, } \sigma(\Delta) \subset \Sigma) \end{cases}$$

Esta definición tiene sentido, puesto que:

$$\int_{\overset{\circ}{\Delta}} \sigma^* \omega = \int_{\overset{\circ}{\tilde{\Delta}}} \tilde{\sigma}^* \tilde{\omega} = \int_{\tilde{\Delta}} \tilde{\sigma}^* \tilde{\omega}$$

Por linealidad tenemos el acoplamiento lineal  $f : \Pi^*(X) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{L}_*(X); \mathbb{R})$

Este operador conmuta con la diferencial  $d$  en algunos casos:

**Lema 4.3.6.** Si  $\bar{p}$  es una perversidad laxa, entonces el operador integral  $f : \Omega_{\bar{p}}^*(X) \rightarrow \text{Hom}(C^{\bar{q}}(X); \mathbb{R})$  es un acoplamiento diferencial.

Este acoplamiento, induce un acoplamiento  $f : H_{\bar{p}}^*(X) \rightarrow \text{Hom}(H_*^{\bar{q}}(X); \mathbb{R})$  que no es en general un isomorfismo, pues las perversidades negativas presentan problemas. Para ello se usa una teoría de homología relativa y se tiene el siguiente teorema de de'Rham:

**Teorema 4.3.7.** Si  $X$  es una pseudovariedad estratificada desplegable y  $\bar{p}$  una perversidad laxa entonces la integración induce un isomorfismo

$$H_{\bar{p}}^*(X) \cong \text{Hom}(H_*^{\bar{q}}(X, X_{\bar{p}}); \mathbb{R})$$

donde  $X_{\bar{p}}$  denota el conjunto de estratos en los que la perversidad es negativa.

En particular, si  $\bar{p} \geq 0$  tenemos el isomorfismo:

$$H_{\bar{p}}^*(X) \cong H_*^{\bar{q}}(X)$$

# Índice alfabético

- $\sigma$ -descomposición sólida, 52
- Atlas, 34
- Blow-up, 81, 83
- Borde, 11
- Borde singular, 12
- Cadena, 10
- Cadena  $\bar{p}$ -admisibles, 45
- Cadena de intersección para  $\bar{p}$ , 45, 59
- Cadena singular, 12
- cadena singular  $\bar{p}$ -admisibles, 58
- Cara, 8
- Cara (de un complejo), 8
- Cara mala, 60
- Carta, 34
- Categoría de pares, 2
- Ciclo, 11
- Ciclo singular, 12
- Cohomología de de'Rham de intersección para  $\bar{p}$ , 93
- Complejo de formas de intersección para  $\bar{p}$ , 93
- Complejo simplicial, 8
- Condición de frontera, 22
- conjugación, 18
- Conjunto singular, 13, 24
- Cono, 6
- Cono abierto, 16
- Cono cerrado, 16
- Despliegue, 88
- Dimensión formal, 13
- Enlace, 34
- Entorno básico, 34
- Entorno distinguido, 34
- Equivalencia homotópica débil, 6
- Escisión, 3
- Espacio estratificado, 22
- Espacio estratificado en variedades, 30
- Espacio filtrado, 13
- Espacio filtrado PL, 36
- Espacio lineal a trozos (PL), 36
- Espacio simplicial filtrado, 44
- Espacios estratificados de Thom-Mather, 40
- Estratificación de Whitney, 39
- Estratificación intrínseca, 69
- Estrato, 13
- Estrato regular, 13
- Exactitud, 3, 7
- Filtración cónica, 16
- Filtración producto, 15
- Filtración trivial, 14
- Forma levantable, 92
- Functor suspensión, 6
- GM-perversidades, 41
- grado de perversidad, 52
- Grupo de homología, 11
- Grupo de homología singular, 12
- Homología de intersección para  $\bar{p}$ , 59
- Homotopía, 2
- i-esqueleto, 13
- Mayer-Vietoris, 5
- Morfismo estratificado, 29
- n-equivalencia, 6
- Número de incidencia, 10
- Normalización, 38
- Operador borde, 10, 12
- Perversidad general, 43
- Perversidad laxa, 43
- Producto estrellado, 6
- Profundidad, 28
- Propiamente unidos, 8
- Pseudovariedad, 34
- Pseudovariedad clásica, 35
- Pseudovariedad estratificada, 34
- Pseudovariedad estratificada clásica, 35
- Pseudovariedad estratificada desplegable, 88
- Pseudovariedad estratificada PL, 36
- Pseudovariedad normal, 38
- Pseudovariedad simplicial, 37
- s-homotopía, 66
- Símplice, 8
- Símplice  $\bar{p}$ -admisibles, 44
- Símplice estándar, 8
- Símplice negativamente orientado, 8
- Símplice orientado, 8
- Símplice positivamente orientado, 8
- Símplice singular, 12
- Símplice singular  $\bar{p}$ -admisibles, 57
- Símplice singular filtrado, 51
- Singularidad aislada, 24
- Singularidades, 24
- Suma débil, 6
- Suspensión, 6, 17
- Teoría de [co]homología reducida, 7
- Teoría de [co]homología, 3
- Vector tangente vertical, 92



# Bibliografía

- [1] Chataur, D. ; Saralegi-Aranguren, M. ; Tanré, D. *Intersection Cohomology. Simplicial Blow-up and Rational Homotopy* ArXiv e-prints (Jul. 2014)
- [2] Switzer, Robert M. *Algebraic Topology-Homotopy and Homology* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1975)
- [3] Eldon Dyer *Cohomology theories*, W. A. Benjamin (1969)
- [4] Klein, Felix *A comparative review of recent researches in geometry* ArXiv e-prints (Jul. 2008)
- [5] Friedman, Greg *An introduction to intersection homology (without sheaves)* libro en progreso (Feb. 2015)
- [6] Friedman, Greg *An introduction to intersection homology with general perversity functions*, Topology of Stratified Spaces, MSRI Publications, Volume 58, 177-222 (2011)
- [7] King, Henry C. *Topological invariance of intersection homology without sheaves* Topology and its Applications 20, 149-160 (1985)
- [8] John Mather, *Notes on topological stability*, Lecture notes from Harvard University (1970)
- [9] Friedman, Greg *Singular chain intersection homology for traditional and super-perversities*, ArXiv e-prints (Jul. 2004)
- [10] J. P. Brasselet; G. Hector; M. Saralegi *Théorème de De Rham pour les Variétés Stratifiées*, Annals of Global Analysis and Geometry, Volume 9, No 3, 211-243 (1991)
- [11] Padilla, G. *On normal stratified pseudomanifolds*, Extracta mathematicae, Volume 18, No 2, 223-234 (2003)
- [12] M.Goresky; R.MacPherson *Intersection Cohomology, A. Borel et al.: A sample computation of intersection homology*, Birkhäuser, 35-40 (1984)
- [13] Martintxo Saralegi-Aranguren *De Rham Intersection Cohomology for general perversities* Illinois Journal of Mathematics, Volume 49 No 3, 737-758 (2005)
- [14] Kleimann, Steven L. *The development of Intersection Homology Theory*, Pure and Appl. Math. Quart. Volume 3, (1), 25-282 (2007)
- [15] T. Guardia; G. Padilla *On the Functoriality of Stratified Desingularizations*, Extracta mathematicae, Volume 23, No 2, 139-153 (2008)
- [16] T. Guardia; G. Padilla *Categorical Properties of Smooth Unfoldings on Stratified Spaces*, ArXiv e-prints (Abril 2010)