



Universidad de Valladolid



ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**Tecnologías de sensorización e identificación
modal. Aplicación a la determinación del
amortiguamiento estructural.**

Autor:

Losa Miranda, Gonzalo

Tutores:

Lorenzana Ibán, Antolín

Pereda Llamas, José

Departamento de Construcciones Arquitectónicas,
Ingeniería del Terreno, Mecánica de los Medios Continuos
y Teoría de Estructuras.

Valladolid, marzo de 2015

AGRADECIMIENTOS

A la realización de este Grado, que culmina con el presente *Trabajo*, han contribuido personas cuyo reconocimiento es obligado por mi parte. Por tanto, es a ellos a quienes doy los siguientes agradecimientos por el apoyo recibido para llegar hasta aquí:

Al profesor Doctor Antolín Lorenzana, Tutor de este *Trabajo*, por su disponibilidad y todos los conocimientos que me ha transmitido, aceptándome como uno más en su equipo de trabajo en CARTIF.

A los investigadores de CARTIF, especialmente a Norberto Ibán, por haberme dado todas las facilidades posibles para realizar los ensayos necesarios, así como sus conocimientos y descubrimientos en el tema.

A mi novia Raquel, con la que he compartido tantas horas de estudio, tantas alegrías y otros tantos disgustos, por estar siempre a mi lado apoyándome y dándome sus mejores consejos.

A mis padres y a mi hermana Sara, por ayudarme en los malos momentos, preocupándose y tratando de que superara todos los problemas.

Resumen

Conocer las características dinámicas de las estructuras se ha convertido en un aspecto importante tras su construcción, puesto que resulta muy complicado contar con modelos numéricos fiables que incluyan las propiedades dinámicas. Los análisis modales tratan de extraer, tras *sensorizar* dichas estructuras, sus frecuencias, amortiguamientos y formas modales.

Las estructuras de nueva construcción, especialmente las pasarelas peatonales, cuentan con diseños esbeltos pero con escasa capacidad amortiguadora. Puesto que los usuarios poseen una gran sensibilidad a las vibraciones sufridas por las pasarelas, resulta de gran importancia aumentar su factor de amortiguamiento modal, tratando de mantener sus espectaculares diseños.

Este *Trabajo Fin de Grado* trata de mostrar las diversas metodologías de Análisis Modal, centrándose especialmente en el Análisis Modal Operacional (OMA), que ha experimentado grandes avances en los últimos años. Además, se evalúa cuantitativamente uno de los métodos empleados en pasarelas de nueva construcción para aumentar el factor de amortiguamiento modal: la imprimación de varias capas de caucho sobre la plataforma.

Palabras clave: Análisis Modal Operacional (OMA), factor de amortiguamiento modal, frecuencias modales, formas modales, estructuras esbeltas.

Índice General

1.	Introducción.....	1
1.1	Interés del tema.....	1
1.2	Objetivos.....	3
1.3	Metodología.....	3
2.	La dinámica de estructuras: análisis modal.....	5
2.1	Clasificación de las vibraciones.....	6
2.2	Conceptos básicos. Sistemas con un grado de libertad (SDOF).....	7
2.2.1	Vibración libre.....	7
2.2.2	Vibración forzada.....	10
2.3	Conceptos básicos. Sistemas con múltiples grados de libertad (MDOF).....	12
2.3.1	Frecuencias naturales, formas modales y factor de participación.....	13
2.4	Procesamiento de las señales.....	21
2.4.1	Transformada de Fourier.....	21
2.4.2	Errores de medición.....	22
2.4.3	Función de respuesta en frecuencia (FRF).....	25
2.4.4	Función de densidad de potencia espectral cruzada (XPSD).....	26
2.4.5	Identificación de las frecuencias modales.....	29
2.5	Indicadores de calidad de los parámetros modales.....	33
2.5.1	MPC (Modal Phase Collinearity).....	33
2.5.2	MPD (Mean Phase Deviation).....	34
2.5.3	MAC (Modal Assurance Criterion).....	35
3.	Técnicas experimentales.....	37
3.1	Análisis Modal Experimental (EMA).....	37
3.2	Análisis Modal Operacional (OMA).....	39
3.3	Instrumentación empleada.....	40
3.3.1	Acelerómetros.....	40
3.3.2	Registrador de señales.....	46
3.4	Metodología del Análisis Modal Operacional (OMA).....	48
3.4.1	Procedimiento experimental.....	49
3.4.2	Análisis de las señales.....	51
4.	Aplicación: Comparación de los amortiguamientos modales.....	63
4.1	Introducción.....	63

4.2	Estructuras y adquisición de datos	64
4.3	Análisis de las señales	69
4.3.1	Viga con masas puntuales distribuidas	69
4.3.2	Viga con recubrimiento de caucho	78
4.4	Comparación de los resultados.....	86
4.5	Comparación mediante MatLab	88
5.	Discusiones.....	93
5.1	OMA sobre la viga simple	93
5.2	OMA sobre la viga con masas	94
5.3	OMA sobre la viga con caucho.....	95
5.4	Comparación de los factores de amortiguamiento mediante MatLab.....	96
6.	Conclusiones y recomendaciones.....	99
6.1	Conclusiones	99
6.2	Recomendaciones	100
7.	Referencias bibliográficas	102
7.1	Libros.....	102
7.2	Artículos científicos.....	102
7.3	Tesis Doctorales y Trabajos Fin de Máster.....	103
7.4	<i>Papers</i> de conferencias.....	103
7.5	Webs consultadas	104

Índice de figuras

Figura 2.1. Sistema mecánico de 1 g.d.l.....	7
Figura 2.2. Descenso exponencial de la amplitud en una oscilación subamortiguada.....	9
Figura 2.3. Representación de la solución completa de la ecuación del movimiento (2.1).	12
Figura 2.4. Ejemplo de un modelo con N grados de libertad.	12
Figura 2.5. Aliasing. Función sinusoidal a 5Hz muestreado a 1Hz.	23
Figura 2.6. Hipótesis de periodicidad y leakage.....	24
Figura 2.7. Representación gráfica de una FRF.....	26
Figura 2.8. Representación gráfica de una XPSD.	29
Figura 2.9. Identificación de los picos presentes en una gráfica FRF.....	30
Figura 2.10. Representación gráfica de la CMIF de 3 referencias.....	31
Figura 2.11. Diagrama de estabilización. Extracción de los polos del denominador polinómico de la XPSD.....	33
Figura 2.12. Representación gráfica del indicador MAC.....	36
Figura 3.1. Esquema básico de los elementos necesarios para la realización de un EMA.	38
Figura 3.2. Esquema básico de los elementos necesarios para la realización de un OMA.	39
Figura 3.3. Sección de un acelerómetro piezoeléctrico uniaxial.	40
Figura 3.4. Acelerómetro MMF KS48C.....	41
Figura 3.5. Sección de un acelerómetro piezorresistivo uniaxial.	41
Figura 3.6. Sección de un acelerómetro capacitivo uniaxial.....	42
Figura 3.7. Acelerómetro MEMS capacitivo.	42
Figura 3.8. Disposición de los acelerómetros en la viga.	43
Figura 3.9. Esquema con imágenes reales del montaje.....	43
Figura 3.10. Representación temporal de las respuestas de los dos acelerómetros.	44
Figura 3.11. Detalle de representación temporal de las respuestas de los dos acelerómetros (A).....	44
Figura 3.12. Detalle de representación temporal de las respuestas de los dos acelerómetros (B).....	45
Figura 3.13. Detalle de representación temporal de las respuestas de los dos acelerómetros ©.	45

Figura 3.14. Detalle de representación temporal de las respuestas de los dos acelerómetros (D).....	46
Figura 3.15. Detalle de la portada delantera del registrador MGC Plus.	47
Figura 3.16. Detalle de los conectores de la portada trasera del registrador MGC Plus..	48
Figura 3.17. Detalle del perfil de la viga en ensayo.	48
Figura 3.18. Disposición de los acelerómetros en la viga.	49
Figura 3.19. Disposición de los acelerómetros sobre la viga.	50
Figura 3.20. Señal registrada por el acelerómetro 2 en la viga en estudio.	51
Figura 3.21. Explorador de FRF/XPSD en FEMTools.....	52
Figura 3.22. Extractor de polos a través de la XPSD sum y la CMIF en FEMTools.	53
Figura 3.23. Extractor de modos de vibración en FEMTools.	54
Figura 3.24. Ajuste numérico de la XPSD de un canal en FEMTools.	55
Figura 3.25. Representaciones del MAC en 2D y 3D.....	56
Figura 3.26. Extractor de polos a través de la CMIF en FEMTools (2º conjunto de datos).	57
Figura 3.27. Conflicto en la identificación de los modos (2º conjunto de datos).	58
Figura 3.28. Conflicto en la identificación de los modos (3 ^{er} conjunto de datos).	59
Figura 3.29. Conflicto en la detección de los modos de vibración (3 ^{er} conjunto de datos).	60
Figura 3.30. Formas modales identificadas por FEMTools.	62
Figura 4.1. Imágenes reales de la “Pasarela Pedro Gómez Bosque”, con pavimento de caucho.	64
Figura 4.2. Catenaria descrita por la “Pasarela Pedro Gómez Bosque”.	64
Figura 4.3. Creación de la capa de caucho sobre la viga.....	65
Figura 4.4. Disposición de los acelerómetros en las vigas.	66
Figura 4.5. Imágenes reales de los ensayos sobre la viga con masas.	67
Figura 4.6. Imágenes reales de los ensayos sobre la viga con caucho.....	68
Figura 4.7. Representación gráfica de la señal medida por un acelerómetro.	69
Figura 4.8. Exploración de la gráfica de la XPSD en FEMTools (1 ^{er} Conjunto de datos). ..	70
Figura 4.9. Extracción de los polos a través de la CMIF. (1 ^{er} Conjunto de datos).....	71
Figura 4.10. Representación en 3D y 2D del MAC inicial. (1 ^{er} Conjunto de datos).....	72
Figura 4.11. Representaciones del MAC en 3D y 2D final. (1 ^{er} Conjunto de datos).....	73

Figura 4.12. Exploración de la gráfica de la XPSD en FEMTools (2º Conjunto de datos)..	74
Figura 4.13. Diagrama de estabilización. Extracción de los polos mediante la CMIF. (2º Conjunto de datos).....	75
Figura 4.14. Diagrama de estabilización. Extracción de los polos mediante la CMIF. (3º Conjunto de datos).....	76
Figura 4.15. Representación gráfica de la señal medida por un acelerómetro.....	78
Figura 4.16. Exploración de la gráfica de la XPSD en FEMTools (1º Conjunto de datos).	79
Figura 4.17. Extracción de los polos a través de la CMIF y el algoritmo base. (1º Conjunto de datos).....	80
Figura 4.18. Peak-picking sobre la XPSD. (2º Conjunto de datos).	81
Figura 4.19. Diagrama de estabilización. Extracción de los polos a través de la CMIF (2º Conjunto de datos).....	82
Figura 4.20. Representaciones del MAC en 3D y 2D final.....	82
Figura 4.21. Diagrama de estabilización. Extracción de los polos a través de la CMIF. (3º Conjunto de datos).....	84
Figura 4.22. Gráficas de las señales registradas por el acelerómetro 2. En la zona superior (A), sobre la viga con masas distribuidas. En la zona inferior (B), sobre la viga con caucho.....	89
Figura 4.23. Detalles de las gráficas de las señales registradas por el acelerómetro 2. En la zona superior (A), sobre la viga con masas distribuidas. En la zona inferior (B), sobre la viga con caucho.	90
Figura 4.24. Gráfica de la FFT realizada sobre la selección de una señal cualquiera.	91
Figura 5.1. Ajuste de la XPSD de un canal en las inmediaciones de los 33Hz.....	96

Índice de Tablas

Tabla 3.1. Resumen de la extracción de las frecuencias.....	54
Tabla 3.2. Resumen de la extracción de los modos de vibración.	55
Tabla 3.3. Resumen de la extracción de los modos de vibración (2º conjunto de datos).	57
Tabla 3.4. Resumen de la extracción de los modos de vibración (2º conjunto de datos).	58
Tabla 3.5. Resumen de la extracción de los modos de vibración (3º conjunto de datos).	60
Tabla 3.6. Resultados finales de la extracción de los modos (3º conjunto de datos).....	61
Tabla 3.7. Resultados finales de la extracción de los modos.....	61
Tabla 4.1. Comparación de las barras de acero y sus masas.	65
Tabla 4.2. Resumen de la extracción de los modos de vibración (1er Conjunto de datos).	71
Tabla 4.3. Resultados finales del análisis modal (1er Conjunto de datos).....	73
Tabla 4.4. Resultados finales del análisis modal (2º Conjunto de datos).	75
Tabla 4.5. Resultados finales del análisis modal (3er Conjunto de datos).....	76
Tabla 4.6. Resultados finales de la extracción de los modos para la viga con masas distribuidas.....	77
Tabla 4.7. Resultados definitivos de la extracción de los modos con FEMTools.	77
Tabla 4.8. Resultados finales del análisis modal (1 ^{er} Conjunto de datos).....	80
Tabla 4.9. Resumen de la extracción de los modos de vibración (2º Conjunto de datos).	83
Tabla 4.10. Resultados finales del análisis modal (2º Conjunto de datos).	83
Tabla 4.11. Resumen de la extracción de los modos de vibración (3 ^{er} Conjunto de datos).	85
Tabla 4.12. Resultado final del análisis modal (3er Conjunto de datos).....	85
Tabla 4.13. Resultados finales de la extracción de los modos para la viga con dos capas de caucho.....	85
Tabla 4.14. Resultados definitivos de la extracción de los modos con FEMTools.	86
Tabla 4.15. Frecuencias obtenidas para los cuatro primeros modos de vibración.	86
Tabla 4.16. Factores de amortiguamiento obtenidos para los cuatro primeros modos de vibración.....	87
Tabla 4.17. Factores de amortiguamiento de todas las señales extraídos mediante MatLab.	92

Tabla 5.1. Frecuencias propias obtenidas para los cuatro primeros modos de vibración.	93
Tabla 5.2. Factores de amortiguamiento modal calculados para los cuatro primeros modos de vibración.....	94
Tabla 5.3. Factores de amortiguamiento modal calculados para los cuatro primeros modos de vibración.....	95
Tabla 5.4. Factores de amortiguamiento de todas las señales extraídos en el análisis paralelo.	97
Tabla 5.5. Datos arrojados por los distintos análisis realizados.	98

1. Introducción

1.1 Interés del tema

El presente trabajo responde a una doble finalidad: por un lado, ser el broche de cierre a mis estudios en el Grado de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Valladolid; por otro, responder al interés personal de averiguar qué herramientas están disponibles hoy en día para evaluar el comportamiento dinámico de las estructuras de uso cotidiano.

El estudio de la naturaleza física del fenómeno de las vibraciones ha sido un área muy importante para investigadores e ingenieros, hoy en día más aún, puesto que el diseño de las nuevas estructuras tiende a ser más esbelto, dando como resultado construcciones más ligeras y flexibles. Cuando una estructura vibra puede ocasionar graves problemas y limitaciones operativas que incluyen desde sensación de incomodidad y mal funcionamiento en servicio hasta fatiga. Para atajar dichos problemas derivados de las vibraciones, pueden considerarse dos opciones: por un lado la profilaxis, a través de un correcto diseño, por otro, la cura, mediante la modificación de la estructura o el diseño de un control de las vibraciones. En cualquier caso la comprensión completa de los estados vibratorios de la estructura resulta indispensable.

La primera opción presentada, conlleva el desarrollo de un modelo numérico fiable de la estructura que cuente con las propiedades dinámicas. Dicha tarea no resulta en absoluto sencilla, ya que implica contar con amplios conocimientos, experiencia y aptitudes en áreas tan diversas como el modelado en Elementos Finitos, la realización de ensayos en estructuras reales y la posterior actualización de los modelos en Elementos Finitos. Esta metodología suele emplearse en la ingeniería aeronáutica y aeroespacial, disciplinas en las que es habitual contar con prototipos durante el proceso de diseño.

Por el contrario, en la ingeniería civil, en contadas ocasiones se realizan prototipos de la estructura durante el proceso de diseño. Esto implica que lo anteriormente expuesto no puede realizarse tan fácilmente, por lo que la única opción posible es que, contando con la estructura ya edificada, puedan extraerse las propiedades dinámicas, modificando a posteriori aquellas características que impliquen problemas en servicio. Los Análisis Modales que se exponen en este trabajo nacen de esta necesidad: la caracterización dinámica o modal de aquellas estructuras que no han podido preverse durante su diseño, requiriendo, posiblemente, una *cura* de aquellas propiedades que provoquen inconvenientes en servicio.

La caracterización modal de las construcciones, especialmente de los puentes, lleva siglos siendo un aspecto importante, puesto que la seguridad y comodidad de los usuarios depende en gran medida de una correcta identificación de las propiedades modales. Prueba de ello son las víctimas históricas de la falta de conocimientos al respecto, como el ejército napoleónico en el siglo XIX, el conocidísimo caso del puente Tacoma Narrows en Estados Unidos en la década de 1940 y más actualmente, el Puente del Milenio de Londres.

Aunque este último no acabó en tragedia, tuvo gran repercusión mediática en 2000, año en el que se abrió al público. Después de haberse demorado su construcción durante dos meses más y haber aumentado el coste económico en más de 2,2 millones de Libras, el puente tuvo que cerrarse poco después de su apertura, como consecuencia de unas incómodas y preocupantes vibraciones inducidas por el paso de los viandantes. La solución pasó por añadirle marcos por debajo de la plataforma dotándolo de mayor rigidez. Además, se dispusieron grandes resortes en los extremos aumentando la capacidad amortiguadora de la estructura y disminuyendo las oscilaciones.

Los problemas no sólo se encuentran en el extranjero. En España se han dado casos provocados por una falta de la caracterización modal de las estructuras. Así ocurrió en 2006 con el puente sobre el río Tajo “Arcos de Alconétar” en Cáceres, Extremadura. Durante la construcción de dicho puente, las suaves ráfagas de viento (por debajo de 20km/h) excitaban a la estructura en su segundo modo de vibración, provocando grandes oscilaciones y preocupantes desplazamientos. Por suerte, antes de que se completase el puente, se realizaron diversas mejoras estructurales que modificaron la rigidez y capacidad de amortiguamiento, así como la manera en la que incidía el viento sobre sus arcos.

Tras esta breve exposición de problemas históricos derivados del desconocimiento de las propiedades modales de las estructuras, cabe preguntarse ¿qué métodos permiten obtener dichas características? y ¿en qué consisten? Por ello se escogió la *Tecnologías de sensorización e identificación modal* como tema del Trabajo Fin de Grado dentro del Grado de Ingeniería Mecánica.

El objetivo general propuesto es ofrecer una visión completa de los Análisis Modales, especialmente de aquellos que suponen el futuro de la caracterización modal de estructuras y que han sufrido un gran desarrollo durante los últimos años, como es el caso de los Análisis Modales Operacionales, que copan gran parte de este documento.

1.2 Objetivos

Entre los principales objetivos específicos que se han fijado a la hora de realizar este trabajo se encuentran los siguientes:

- Definir qué es un análisis modal, indicando sus distintas aplicaciones y su situación actual en el diseño de estructuras.
- Identificar las distintas modalidades de análisis modales, mostrando de manera esquemática, qué se requiere para la realización de cada una de ellas.
- Definir de manera clara los aparatos empleados para la toma de datos en los ensayos desarrollados sobre estructuras reales.
- Desarrollar, de manera pormenorizada, un Análisis Modal Operacional sobre una estructura en laboratorio, tratando de mostrar las diversas fases necesarias para llevar a cabo dicha modalidad de análisis y extrayendo las características modales de la estructura.
- Evaluar cuantitativamente uno de los métodos empleados para la modificación de la capacidad amortiguadora en las pasarelas peatonales de nueva construcción.
- Adquirir los conocimientos necesarios para realizar y comprender el funcionamiento de los Análisis Modales Operacionales.

1.3 Metodología

Inicialmente, el trabajo consistía en la realización de un Análisis Modal Operacional de la Pasarela Pedro Gómez Bosque, tratando de identificar las frecuencias, amortiguamientos y formas modales principales. Pero pronto surgieron numerosos inconvenientes: los análisis modales exigen contar con amplias nociones en varias áreas de conocimiento, un dominio de un correcto montaje para registrar las señales y conceptos sobre el funcionamiento de una herramienta CAE capaz de post-procesar las señales almacenadas.

Lo propuesto inicialmente exigía contar con un equipo extenso, preciso y capaz de transportarse hasta la estructura objeto de estudio. Además, para la realización de dicho análisis, se requería de mucho tiempo y una minuciosa planificación y sincronización de los agentes implicados.

De manera que se optó por emplear estructuras presentes en el laboratorio del Departamento de Diseño Estructural del Centro Tecnológico CARTIF, evitando tediosos desplazamientos y centrandó el trabajo en la caracterización modal de tres estructuras. Esto permitió exponer de forma más intensiva los conceptos involucrados en la realización de los análisis

modales, especialmente, en los Análisis Modales Operacionales, que han experimentado un mayor desarrollo en los últimos años.

Finalmente, se ha tratado de tener presente en el documento a la pasarela de nueva construcción de Pedro Gómez Bosque, ya que en ella se emplean soluciones de vanguardia en el diseño estructural. Por ello, los análisis modales finales realizados tienen como objetivo la evaluación cuantitativa de una de dichas soluciones.

El trabajo está dividido en siete epígrafes:

- En este primer epígrafe se recoge la justificación del tema, los objetivos que se persiguen conseguir con el trabajo realizado y la metodología empleada.
- El segundo engloba los conceptos que resultan necesarios para llevar a cabo un análisis modal, así como comprender el funcionamiento de dicho análisis.
- En el tercer epígrafe se muestran las diversas modalidades de análisis modal presentes en la actualidad. Asimismo, se presentan las herramientas necesarias y finalmente se desarrolla la metodología OMA sobre una estructura sencilla.
- En el cuarto epígrafe se realiza la comparación de los factores de amortiguamiento de dos estructuras. Una de ellas presenta una modificación con respecto a la otra, y se evaluará en qué medida modifica las características de la estructura.
- En el quinto epígrafe se discuten diversos aspectos relacionados con los análisis realizados a lo largo del documento.
- En el sexto epígrafe se exponen las conclusiones extraídas del trabajo, así como algunas recomendaciones para futuras aplicaciones.
- Por último, el séptimo, recoge las referencias bibliográficas utilizadas para su elaboración.

2. La dinámica de estructuras: análisis modal

El estudio experimental de las vibraciones en estructuras, ha contribuido a comprender y controlar los numerosos fenómenos que pueden darse en las construcciones. Desde que se tiene noción de la existencia de las vibraciones, las observaciones experimentales han ido encaminadas a cubrir dos necesidades básicas: por un lado, determinar la naturaleza y el alcance de las respuestas de las estructuras a distintos niveles vibratorios y, por otro, verificar algunos modelos teóricos y sus predicciones.

Puesto que, actualmente, máquinas y estructuras forman parte de nuestro día a día, resulta del todo necesario contar con herramientas fiables para el análisis de las vibraciones presentes en estos elementos. El *análisis modal*, no es más que una de estas herramientas imprescindibles, que trata de proporcionar al ingeniero información básica sobre la estructura diseñada como su comportamiento dinámico o la búsqueda de una solución a problemas dinámicos estructurales.

Como se ha indicado anteriormente, el *análisis modal* es, primeramente, una herramienta para extraer modelos fiables de representar la dinámica de las estructuras.

Antes de comenzar a desarrollar el tema objeto de este trabajo, es imprescindible dar respuesta a por qué son importantes los análisis modales en estructuras. Los resultados de un análisis modal pueden emplearse en numerosas aplicaciones, siendo éstos en ocasiones especialmente influyentes en el diseño de estructuras. Sin embargo, resulta necesario recordar que ningún procedimiento de análisis puede considerarse el perfecto para todos los casos y, por tanto, es crucial la definición clara de unos objetivos antes de aplicar cualquier análisis, eligiendo a partir de éstos, los métodos o técnicas a usar. Para abordar correctamente este proceso, pueden plantearse las siguientes cuestiones: ¿qué resultados se quieren obtener del estudio?, y ¿en qué formato interesa recopilar dichos resultados?

En muchos casos, la elección de un *análisis modal* es consecuencia de la búsqueda de un modelo matemático de la estructura, pero hoy en día, la aplicación de los análisis modales cubre un amplio campo de objetivos como:

- La validación, corrección o actualización de modelos analíticos de vibración;
- La identificación y evaluación de los fenómenos vibratorios;
- El desarrollo de modelos dinámicos experimentales;
- El cálculo, modificación y detección de errores en el diseño de estructuras;

- El establecer criterios y especificaciones para el diseño, comprobación y certificación de estructuras.

Uno de los requerimientos más notables que exige el análisis modal es un minucioso conocimiento de tres áreas (Ewins, 1992:5):

- Teoría básica de vibraciones;
- Precisión en la medida de las vibraciones;
- Análisis realista y detallado de los datos.

Tiempo atrás existía la tendencia de estudiar estas tres por separado, existiendo expertos para cada tema. Sin embargo, como anteriormente se ha señalado, actualmente resulta imprescindible contar con herramientas potentes de análisis, por lo que el ingeniero debe contar con conocimientos de las tres áreas, ya que si no, será imposible aprovechar al máximo el potencial de estos análisis.

En los próximos epígrafes, se dará solución a la primera exigencia del análisis modal: conocimientos sobre la teoría básica de vibraciones.

2.1 Clasificación de las vibraciones

Las vibraciones se consideran libres si no existen fuerzas exteriores que actúen sobre el sistema a lo largo del tiempo. Las vibraciones son forzadas si existen acciones o excitaciones externas que se aplican directamente sobre el sistema a lo largo del tiempo.

Ambos tipos de vibraciones pueden subdividirse según existan o no elementos que incluyan fuerzas resistentes que mermen el movimiento libre del sistema. Por tanto, puede decirse que, las vibraciones tanto libres como forzadas pueden ser:

- Con amortiguamiento: existen elementos en el sistema que aplican fuerzas o momentos disipativos que amortiguan el movimiento vibratorio.
- Sin amortiguamiento: no existen resistencias al movimiento del sistema.

Aunque la teoría básica de vibraciones presenta estos cuatro tipos de vibraciones, los conocimientos requeridos para abordar este trabajo pasan tan sólo por analizar las vibraciones libres y forzadas *con amortiguamiento*, por lo que los conceptos de los próximos epígrafes están destinados a dar una imagen detallada de este tipo de vibraciones.

2.2 Conceptos básicos. Sistemas con un grado de libertad (SDOF)

2.2.1 Vibración libre

Todas las propiedades dinámicas de los sistemas mecánicos están distribuidos en el espacio como la masa, la rigidez o el amortiguamiento, responsables de la inercia, la elasticidad y las fuerzas disipativas respectivamente. Resulta imposible por tanto, tratar de describir detalladamente todas las características de un sistema. Por ello se recurre a la discretización de un sistema con un grado de libertad, como el mostrado en la figura 2.1.

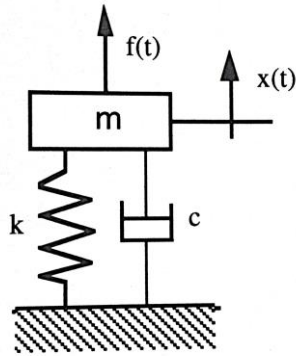


Figura 2.1. Sistema mecánico de 1 g.d.l.

- Una masa m , constante y rígida que proporciona inercia al sistema.
- Un muelle ideal sin masa, con una constante de rigidez k que proporciona elasticidad.
- Un amortiguador viscoso ideal sin masa, con coeficiente de amortiguamiento constante c .

La siguiente ecuación describe el movimiento del sistema de la figura 2.1:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = f(t) \quad (2.1)$$

Donde $f(t)$ y $x(t)$ son respectivamente la fuerza de excitación dependiente del tiempo y la respuesta en desplazamiento correspondiente. Como condiciones iniciales para $t=0$, $\dot{x}(0)$ y $x(0)$.

Como va a tratarse de estudiar la vibración libre, la fuerza de excitación $f(t)$ resulta ser 0, convirtiendo la ecuación diferencial 2.1 en una ecuación lineal homogénea con la siguiente forma:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = 0 \quad (2.2)$$

La ecuación 2.2 posee la siguiente solución general:

$$x(t) = X e^{st} \quad (2.3)$$

Donde s es la variable de Laplace. Sustituyendo en (2.2), se obtiene:

$$(ms^2 + cs + k) X e^{st} = 0 \quad (2.4)$$

La primera solución resulta trivial, y corresponde a $x(t) = X e^{st} = 0$. Esta solución es la respuesta a un movimiento nulo, y por tanto carece de importancia para este estudio. La segunda solución no trivial corresponde a:

$$m s^2 + c s + k = 0 \quad (2.5)$$

La ecuación 2.5 es la conocida como *ecuación característica*, y cuyas raíces s_1 y s_2 vienen dadas por:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.6)$$

Por tanto, la solución general para la ecuación homogénea 2.2 es:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (2.7)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes determinadas empleando las condiciones de contorno iniciales impuestas para $t=0$. Si se observan las raíces s_1 y s_2 , éstas pueden encontrarse en los siguientes casos:

- Las fuerzas de amortiguamiento gobiernan el movimiento de tal manera que, $(c/2m)^2 > k/m$ y ambas raíces son reales. En este caso el sistema está *sobreamortiguado*.
- La inercia y las fuerzas elásticas prevalecen sobre las de amortiguamiento, $(c/2m)^2 < k/m$ y las dos raíces son complejas conjugadas. En este caso el sistema está *subamortiguado*.
- Si la raíz cuadrada en la ecuación 2.6 es 0, $(c/2m)^2 = k/m$ y las raíces son reales e iguales. En este caso el sistema está con *amortiguamiento crítico*.

Del análisis realizado anteriormente, puede extraerse una conclusión muy simple. Todo sistema vibratorio tiene un parámetro definido como coeficiente de amortiguamiento crítico, denotado como c_c y que resulta de la igualdad $(c/2m)^2 = k/m$. Esta igualdad establece el límite entre subamortiguado y sobreamortiguado:

$$c_c = 2\sqrt{k m} = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 m \omega_n \quad (2.8)$$

Donde ω_n es la frecuencia natural de oscilación sin amortiguamiento. Ahora puede definirse un parámetro adimensional clave para el desarrollo de nuestro estudio, conocido como *factor de amortiguamiento* ξ .

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (2.9)$$

Pueden escribirse entonces las raíces de la ecuación característica como:

$$s_{1,2} = -\omega_n \xi \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.10)$$

Y por tanto para:

- Sistema sobreamortiguado: $\xi > 1$
- Sistema críticamente amortiguado: $\xi = 1$
- Sistema subamortiguado: $\xi < 1$

Mientras que la solución del sistema sin amortiguamiento ($\xi=0$) corresponde a un movimiento armónico, con frecuencia natural ω_n y amplitud constante, la solución del amortiguado ($0 < \xi < 1$) se asemeja a la realidad, tendiendo exponencialmente a 0. Se define por tanto a la *frecuencia de oscilación amortiguada* como:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.11)$$

El comportamiento característico de la reducción exponencial de la amplitud, puede ser tratada en términos del *factor de amortiguamiento* asociado al sistema. En el gráfico de la figura 2.2 se muestra el resultado de un ensayo de vibración libre y subamortiguada. En él existe un valor pico de la amplitud en algún instante de tiempo que se denota por X_i , y el valor pico de la amplitud n ciclos completados después se denomina X_{i+n} .

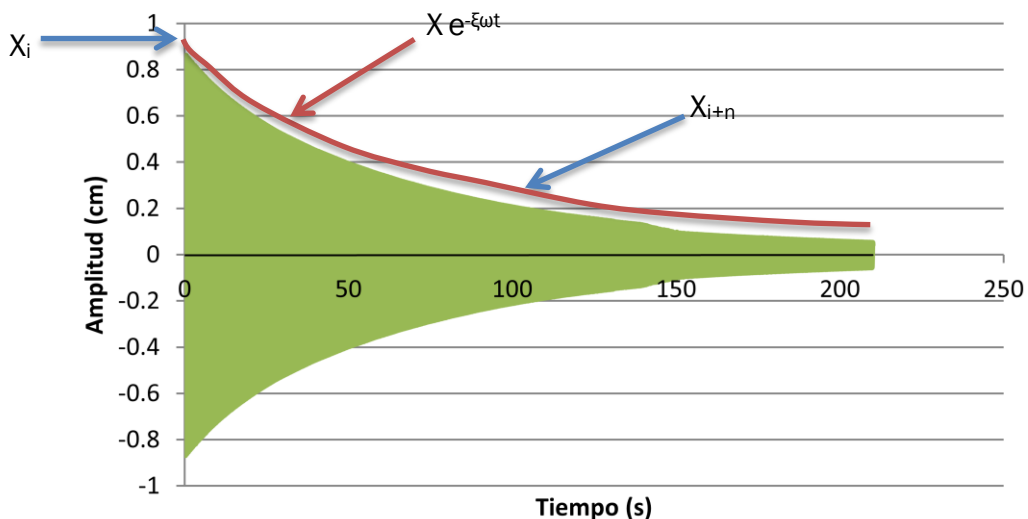


Figura 2.2. Descenso exponencial de la amplitud en una oscilación subamortiguada.

Teniendo en cuenta lo comentado anteriormente y de los resultados expuestos, puede obtenerse el decremento logarítmico definido por:

$$\delta_n = \ln \frac{X_i}{X_{i+n}} = \frac{2n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.12)$$

Existen numerosas aplicaciones prácticas en las que el comportamiento dinámico de los sistemas puede representarse mediante un modelo de un único grado de libertad (como el mostrado en la figura 2.1). El problema reside en extraer las propiedades espaciales del modelo. Puede conseguirse, por ejemplo, mediante la realización de un simple ensayo y dibujando la gráfica amplitud frente a tiempo (como el gráfico 2.2). A partir de ésta y a través de la ecuación (2.12), se extrae el valor de ξ . Contando n ciclos completos de vibración y leyendo en la gráfica el correspondiente intervalo de tiempo, se calcula el valor de la frecuencia natural amortiguada.

El siguiente paso es el cálculo de la frecuencia natural sin amortiguamiento ω_n a través de la ecuación (2.11). La identificación de las propiedades espaciales m , k y c , resulta relativamente sencillo, siempre y cuando se conozca el valor de una de ellas. En la mayoría de los casos, es sencillo medir la masa m , quedando por tanto resuelto el problema, ya que k puede obtenerse aplicando la igualdad $\omega_n = (k/m)^{1/2}$ y c a través de las ecuaciones (1.8) y (1.9).

Un aspecto importante a tener en cuenta es el hecho de que, en la mayoría de las estructuras reales, el factor de amortiguamiento ξ es bajo (generalmente por debajo del 0,1).

2.2.2 Vibración forzada

El problema de la vibración forzada parte de la figura 2.1, pero en la que $f(t)$ es distinta de 0. Tomando como función de excitación

$$f(t) = F e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

Donde F y ω son dos constantes (la fuerza de excitación armónica y la frecuencia, respectivamente) e $i = (-1)^{1/2}$, la solución particular viene dada por:

$$x(t) = \bar{X} e^{i\omega t} \quad (2.14)$$

Donde X es la amplitud compleja denominada fasor, que permite añadir un ángulo de fase a la respuesta con respecto a la función de la fuerza $f(t)$:

$$\bar{X} = X e^{i\theta} \quad (2.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.14) y (2.15) en la ecuación (2.1), se obtiene

$$\bar{X} = \frac{F}{(k - \omega^2 m) + i\omega c} \quad (2.16)$$

Como cualquier número complejo puede escribirse en formato módulo ángulo, la ecuación (2.16) puede escribirse como:

$$\bar{X} = \frac{F}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} e^{i\theta} \quad (2.17)$$

Con:

$$\tan \theta = \frac{-\omega c}{k - \omega^2 m} \quad (2.18)$$

La solución particular de la ecuación (2.1), para una fuerza de excitación harmónica definida por la ecuación (2.13), es

$$x(t) = \frac{F}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} e^{i(\omega t + \theta)} \quad (2.19)$$

Se trata de una función armónica con amplitud constante, al igual que la fuerza de excitación. Además, las ecuaciones 2.18 y 2.19 indican que la respuesta $x(t)$ está retrasada con respecto a la fuerza de excitación $f(t)$. Este retraso viene definido en términos del ángulo θ . La solución y la vibración que representa se denominan solución y vibración estacionarias.

La solución completa viene representada por la suma de la solución particular (2.19) y la solución de la ecuación homogénea:

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left(C_1 e^{i\omega_n t \sqrt{1-\xi^2}} + C_2 e^{-i\omega_n t \sqrt{1-\xi^2}} \right) + \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} e^{i(\omega t + \theta)} \quad (2.20)$$

Donde $\beta = \omega/\omega_n$ es un parámetro adimensional que representa la relación entre la frecuencia y la frecuencia natural sin amortiguar del sistema. La ecuación anterior indica que los movimientos correspondientes a la solución particular de la ecuación (2.1) y a la solución de la homogénea están superpuestos. En la gráfica de la figura 2.3, se representa la suma algebraica de ambas soluciones. Puede observarse que la respuesta transitoria, tan sólo es importante durante un breve periodo de tiempo inicial. Posteriormente, es la respuesta estacionaria la que prevalece.

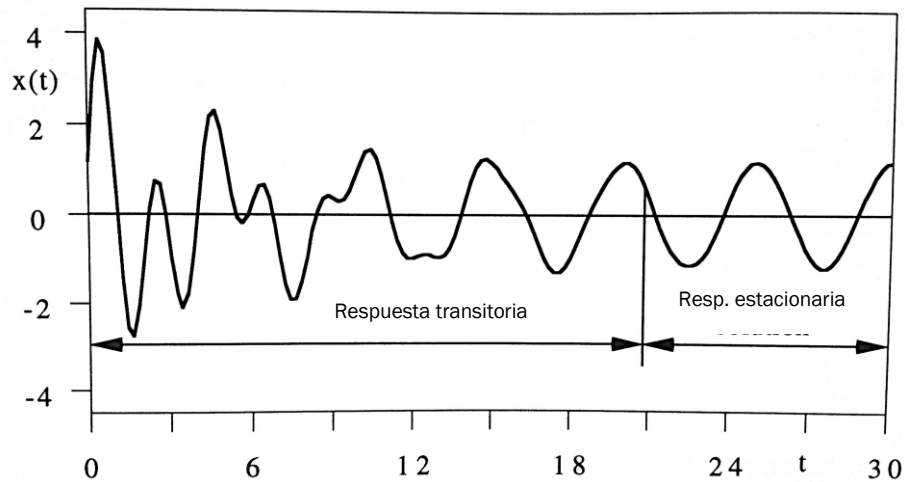


Figura 2.3. Representación de la solución completa de la ecuación del movimiento (2.1).

2.3 Conceptos básicos. Sistemas con múltiples grados de libertad (MDOF)

Aunque se ha comenzado definiendo sistemas con un único grado de libertad (SDOF), en la práctica, raras veces existen este tipo de sistemas.

Las estructuras reales son sistemas elásticos continuos y no homogéneos con un número infinito de grados de libertad. Su análisis, por tanto, siempre lleva asociado cierto grado de aproximación y simplificación, tomando como referencia para describir su comportamiento a un número finito de grados de libertad.

Generalmente, las estructuras continuas no homogéneas se discretizan mediante un conjunto de masas puntuales con múltiples grados de libertad. Por ejemplo, considérese el modelo de la figura 2.4 que representa a un sistema con amortiguamiento viscoso, descrito por sus propiedades

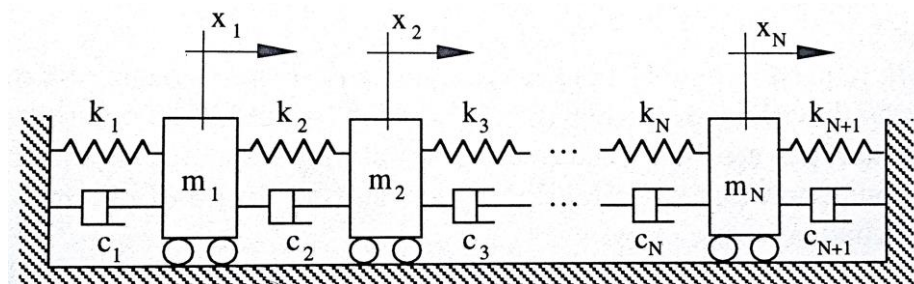


Figura 2.4. Ejemplo de un modelo con N grados de libertad.

espaciales como la masa, la rigidez y el amortiguamiento. Se requiere de un total de N desplazamientos relativos ($x_{i=1,2,\dots,N}(t)$) para describir la posición de sus N masas respecto de sus posiciones de equilibrio, y por tanto el sistema cuenta con N grados de libertad.

Asumiendo que cada masa está forzada a moverse mediante un fuerza externa ($f_{i=1,2,\dots,N}(t)$) y realizando el equilibrio de fuerzas que actúan sobre ellas, la ecuación del movimiento puede representarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 m_N \ddot{x}_N - c_N \dot{x}_{N-1} + (c_N + c_{N+1}) \dot{x}_N - k_N x_{N-1} + (k_N + k_{N+1}) x_N &= f_N \\
 m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= f_1
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

El sistema de ecuaciones (2.21) consiste en N ecuaciones diferenciales de segundo orden, cada una de las cuales requiere dos condiciones iniciales para calcular la respuesta completa de los N puntos móviles. Puede observarse que ninguna ecuación puede resolverse de manera individual, ya que, el movimiento de un único punto, depende del movimiento de los otros. Un método para resolver el sistema de ecuaciones presentado es el uso de matrices:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_N + c_{N+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_N + k_{N+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Puede condensarse lo anterior de la siguiente manera:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \tag{2.23}$$

Donde [M], [C] y [K] son matrices simétricas NxN de masa, amortiguamiento y rigidez, que describen las propiedades espaciales del sistema. Las matrices columna {x} son vectores Nx1 que varían con el tiempo, como la aceleración, la velocidad y el desplazamiento y {f} es un vector Nx1 de las fuerzas externas en función del tiempo.

2.3.1 Frecuencias naturales, formas modales y factor de participación

Como anteriormente se ha indicado para sistemas con un grado de libertad, cuando una estructura está sometida a una fuerza en un instante y posteriormente se le deja vibrar libremente, ésta comienza a oscilar alrededor del punto de equilibrio.

Para poder explicar los tres conceptos que integran este epígrafe, aplicados a los modelos de múltiples grados de libertad, se comienza analizando el caso más sencillo: vibración libre sin amortiguar. Posteriormente, se verá la

vibración libre con amortiguamiento viscoso y finalmente, la forzada con amortiguamiento viscoso.

2.3.1.1 Sistemas con múltiples grados de libertad (MDOF) sin amortiguamiento

Asumiendo que el sistema está sin amortiguamiento y en vibración libre, por lo que en la ecuación (2.23), los términos $[C]\{\dot{x}\}$ y $\{f\}$ son 0. Se obtiene por tanto la siguiente ecuación:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (2.24)$$

Puesto que las N ecuaciones simultáneas del sistema (2.24) son homogéneas, y las soluciones a estas ecuaciones vienen representadas por $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$, condensadas en $\{x\}$, entonces, si se multiplica por un factor constante y distinto de cero γ , también representan la solución del sistema anterior.

Se sabe que el sistema 2.24 tiene soluciones en las que los movimientos dependientes del tiempo de los puntos están sincronizados, obedeciendo a la misma ley de variación temporal. Estas soluciones son de la forma:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\}e^{i\omega t} \quad (2.25)$$

Donde $\{\bar{X}\}$ es un vector $N \times 1$ que recoge las amplitudes respuesta. Sustituyendo en la ecuación 2.24, obtenemos

$$[[K] - \omega^2[M]]\{\bar{X}\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (2.26)$$

Como $e^{i\omega t}$ es distinto de cero para cualquier instante de tiempo t , puede escribirse:

$$[[K] - \omega^2[M]]\{\bar{X}\} = \{0\} \quad (2.27)$$

Analizando detenidamente lo obtenido en la ecuación 2.27, se observa que se trata de un problema de valores propios. Ahora resulta obvio que, si existe solución $\{\bar{X}\}$, entonces $\gamma\{\bar{X}\}$ también es solución. Si se pre-multiplica a ambos lados de (2.27) por la inversa de $[[K] - \omega^2[M]]$, se obtiene:

$$[[K] - \omega^2[M]]^{-1}[[K] - \omega^2[M]]\{\bar{X}\} = [[K] - \omega^2[M]]^{-1}\{0\} \quad (2.28)$$

Si se obvia la solución trivial $\{\bar{X}\} = 0$, para encontrar la solución, la inversa de $[[K] - \omega^2[M]]$ debe no existir, y por tanto:

$$\det[[K] - \omega^2[M]] = 0 \quad (2.29)$$

Es decir el determinante debe ser cero. Se trata, por tanto, de una ecuación algebraica denominada ecuación característica del sistema, y que da como resultado N posibles soluciones positivas reales $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$, conocidas como valores propios de (2.27). Los valores $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ corresponden a las *frecuencias naturales* sin amortiguar del sistema.

Si se sustituye cada valor de las frecuencias naturales en (2.27) y se resuelven los sistemas resultantes para $\{\bar{X}\}$, se obtienen N posibles vectores solución $\{\psi_{r=1,2,\dots,N}\}$, denominados *formas modales del sistema*, y que no son más que los vectores propios del problema.

Cada $\{\psi_r\}$ contiene N elementos reales (positivos o negativos). Estos términos son relativos, por lo que lo único que se conoce es la dirección de los vectores pero no sus magnitudes absolutas.

El significado físico de la solución que se ha hallado es que el sistema puede vibrar de manera libre con un movimiento sincronizado, para N valores particulares de la frecuencia ω_r . Cada una de ellas, lleva asociada una configuración particular o “forma” en su movimiento libre, descrito por $\{\psi_r\}$. Cada par de valores de ω_r y $\{\psi_r\}$ se conoce como *modo de vibración del sistema*. El subíndice r indica el número de modo y varía desde 1 hasta N.

La solución completa a la vibración libre suele representarse mediante dos matrices NxN:

$$[\omega_r^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Y

$$[\psi] = [\{\psi_1\} \{\psi_2\} \dots \{\psi_N\}] \quad (2.31)$$

Contienen una descripción completa de las características dinámicas del sistema. Por tanto (2.30) y (2.31) constituyen lo que se conoce como *Modelo Modal*, ya que describen un sistema mediante sus propiedades modales (frecuencias naturales y formas modales), en oposición al *Modelo Espacial*, descrito mediante sus propiedades espaciales ([M], [C] y [K]). A la matriz $[\psi]$, se le conoce como matriz modal.

Los vectores de formas modales, que como se ha comentado anteriormente no son más que los vectores propios que satisfacen el problema simétrico de autovalores descrito por la ecuación 2.27, posee importantes propiedades como la ortogonalidad. Tomando (2.27) y dos modos cualquiera r y s, puede escribirse:

$$[[K] - \omega_r^2[M]]\{\psi_r\} = \{0\} \quad (2.32)$$

Y

$$[[K] - \omega_s^2[M]]\{\psi_s\} = \{0\} \quad (2.33)$$

Pre-multiplicando (2.32) por $\{\psi_s\}^T$ se obtiene:

$$\{\psi_s\}^T [[K] - \omega_r^2[M]]\{\psi_r\} = \{0\} \quad (2.34)$$

Por otro lado, si se realizan la traspuesta de (2.33) y se post-multiplica por $\{\psi_r\}$ se tiene:

$$\{\psi_s\}^T [[K]^T - \omega_s^2[M]^T]\{\psi_r\} = \{0\} \quad (2.35)$$

La ecuación (2.35) resulta igual que:

$$\{\psi_s\}^T [[K] - \omega_s^2[M]]\{\psi_r\} = \{0\} \quad (2.36)$$

Puesto que $[K]$ y $[M]$ son matrices simétricas. Combinando (2.34) y (2.36), se obtiene:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2)\{\psi_s\}^T [M]\{\psi_r\} = 0 \quad (2.37)$$

Con $\omega_r \neq \omega_s$ puede simplificarse (2.37) como:

$$\{\psi_s\}^T [M]\{\psi_r\} = 0 \quad (2.38)$$

Además, de (2.38) y (2.36) se tiene que para $\omega_r \neq \omega_s$:

$$\{\psi_s\}^T [K]\{\psi_r\} = 0 \quad (2.39)$$

Finalmente, si se considera $r=s$ y se toma tanto (2.34) como (2.36), se obtiene que:

$$\{\psi_r\}^T [K]\{\psi_r\} = \omega_r^2 \{\psi_r\}^T [M]\{\psi_r\} \quad (2.40)$$

O lo que es lo mismo:

$$\omega_r^2 = \frac{\{\psi_r\}^T [K]\{\psi_r\}}{\{\psi_r\}^T [M]\{\psi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} \quad (2.41)$$

Donde k_r y m_r son comúnmente conocidos como la rigidez y la masa modal del modo r .

Por tanto, considerando todas las posibles combinaciones de r y s , pueden establecerse las propiedades de ortogonalidad del modelo modal como:

$$[\psi]^T [M] [\psi] = [m_r] \quad (2.42)$$

$$[\psi]^T [K] [\psi] = [k_r]$$

Los vectores de formas modales, debido a sus propiedades ortogonales, son linealmente independientes, por lo que forman una base en el espacio N-dimensional. Como consecuencia, cualquier otro vector en el mismo espacio puede expresarse como combinación lineal de los N vectores de formas modales.

Los vectores de formas modales suelen normalizarse mediante un procedimiento basado en hacer que el mayor elemento de cada vector sea 1. Sin embargo, en el análisis modal es habitual normalizarlos como:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (2.43)$$

Donde [I] es la matriz identidad y [\Phi] es la matriz de modos normalizados, construida a partir de los vectores de formas modales como $\{\Phi_r\} = \gamma_r \{\psi_r\}$. Esta relación obedece a:

$$\{\Phi_r\}^T [M] \{\Phi_r\} = \{\gamma_r \psi_r\}^T [M] \{\gamma_r \psi_r\} = \gamma_r^2 \{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\} = 1 \quad (2.44)$$

Para cada modo de vibración r. de la ecuación (2.44) se obtiene:

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{\{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\}}} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \quad (2.45)$$

El parámetro γ_r se conoce como coeficiente de normalización de los modos.

A continuación, se define la transformación de los desplazamientos de los puntos como:

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{q(t)\} \quad (2.46)$$

Si se sustituye la transformación (2.46) en la ecuación 2.24 se obtiene la siguiente relación:

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}(t)\} + [K][\Phi]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.47)$$

Pre-multiplicando 2.47 por $[\Phi]^T$,

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.48)$$

Si se tiene en cuenta las propiedades ortogonales de la matriz de modos normalizados [\Phi] que se define como:

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\omega_r^2] \quad (2.49)$$

Ahora, la ecuación 2.48 se convierte en:

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\omega_r^2]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.50)$$

La ecuación 2.50 representa a un sistema de N ecuaciones de movimiento sin términos interrelacionados. Por tanto, hemos podido comprobar cómo el complicado sistema de ecuaciones de la ecuación (2.22), ha sido transformado en N sistemas independientes con un único grado de libertad (SDOF).

2.3.1.2 Sistemas con múltiples grados de libertad (MDOF) con amortiguamiento viscoso

Retomando las ecuaciones de movimiento del sistema general con múltiples grados de libertad y con amortiguamiento viscoso descrito en la ecuación (2.23), asumiendo $\{f\} = \{0\}$ y aplicando las técnicas descritas anteriormente, basadas en la matriz modal para el sistema sin amortiguamiento, se obtiene:

$$[\phi]^T [M][\phi]\{\ddot{q}(t)\} + [\phi]^T [C][\phi]\{\dot{q}(t)\} + [\phi]^T [K][\phi]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.51)$$

O también escrito como:

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\varphi]\{\dot{q}(t)\} + [\omega_r^2]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.52)$$

Donde $[\varphi]$ es una matriz no diagonal de NxN.

El amortiguamiento puede definirse como una situación disipativa en la que la matriz de amortiguamiento viscoso es directamente proporcional a la matriz de rigidez, a la matriz de la masa o una combinación lineal de las dos. Considerando el caso general de amortiguamiento, puede escribirse:

$$[C] = \varepsilon[K] + \rho[M] \quad (2.53)$$

Donde ε y ρ son constantes. Es inmediato que, para este caso, las propiedades ortogonales de la matriz modal sin amortiguamiento indican que:

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\phi]^T [\varepsilon[K] + \rho[M]][\phi]\{\dot{q}(t)\} + [\omega_r^2]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.54)$$

O lo que es lo mismo:

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\rho + \varepsilon\omega_r^2]\{\dot{q}(t)\} + [\omega_r^2]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.55)$$

Y por tanto, por analogía con la ecuación de un sistema de un único grado de libertad, puede escribirse:

$$\{\ddot{q}(t)\} + [2\xi_r\omega_r]\{\dot{q}(t)\} + [\omega_r^2]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.56)$$

Donde:

$$\xi_r = \frac{\rho}{2\omega_r} + \frac{\varepsilon\omega_r}{2} \quad r = 1, 2, \dots, N$$

Y se le denomina factor de amortiguamiento modal para el modo r .

Si tenemos en cuenta la ecuación 2.23, la solución general es de la forma:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\}e^{st} \quad (2.57)$$

Sustituyendo en (2.23), se obtiene:

$$[s^2[M] + s[C] + [K]]\{\bar{X}\} = \{0\} \quad (2.58)$$

Para resolver la ecuación 2.23, puede definirse un vector complejo como:

$$u(t) = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

Reescribiendo la ecuación (2.23) en términos de la nueva variable, se tiene:

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \{\dot{u}(t)\} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \{u(t)\} = \{0\} \quad (2.60)$$

Condensando la ecuación (2.60),

$$[A]\{\dot{u}(t)\} + [B]\{u(t)\} = \{0\} \quad (2.61)$$

Donde [A] y [B] son dos matrices simétricas reales $2N \times 2N$. En la ecuación (2.57) se indica la solución del sistema. Por tanto $\{u(t)\}$ ahora es:

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{X}\} \\ s\{\bar{X}\} \end{Bmatrix} e^{st} = \{\bar{U}\}e^{st} \quad (2.62)$$

Y

$$\{\dot{u}(t)\} = \begin{Bmatrix} s\{\bar{X}\} \\ s^2\{\bar{X}\} \end{Bmatrix} e^{st} = s\{\bar{U}\}e^{st} \quad (2.63)$$

Sustituyendo (2.62) y (2.63) en la ecuación (2.61) se tiene que:

$$[s[A] + [B]]\{\bar{U}\} = \{0\} \quad (2.64)$$

Se trata de un problema de autovalores y autovectores en el que, para el caso en estudio (sistemas subamortiguados), los valores propios serán pares de números complejos conjugados. Denotando a estos valores propios por s_r y s_r^* , y los autovectores como $\{\psi_r'\}$ y $\{\psi_r'^*\}$, se tiene:

$$\{\psi_r'\} = \begin{Bmatrix} \{\psi_r\} \\ \{\psi_r\}s_r \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

Y

$$\{\psi_r^*\} = \begin{Bmatrix} \{\psi_r^*\} \\ \{\psi_r^*\} s_r^* \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

Donde $\{\psi_r\}$ y $\{\psi_r^*\}$ son los autovectores complejos de dimensiones $N \times 1$.

En el caso de un sistema subamortiguado, los vectores propios atienden a la propiedad de ortogonalidad, por lo que, se define la siguiente transformación de los desplazamientos:

$$\{u(t)\} = [\psi']\{q(t)\} \quad (2.67)$$

Donde $[\psi']$ es una matriz modal compleja de dimensiones $2N \times 2N$. sustituyendo en la ecuación (2.61) y pre-multiplicando por $[\psi']^T$, se obtiene:

$$[\psi']^T[A][\psi']\{\dot{q}(t)\} + [\psi']^T[B][\psi']\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.68)$$

Que se transforma en:

$$[a_r]\{\dot{q}(t)\} + [b_r]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.69)$$

Por tanto, se tiene ahora un conjunto de $2N$ sistemas independientes con un único grado de libertad (SDOF). Considerando que cada solución es de la forma:

$$q_r(t) = \bar{Q}_r e^{s_r t} \quad (2.70)$$

Donde \bar{Q}_r depende de las condiciones iniciales, y sustituyendo en (2.67) y (2.69), se tienen los desplazamientos de la vibración libre en coordenadas absolutas:

$$\{u(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\psi_r\} \bar{Q}_r e^{s_r t} \quad (2.71)$$

Con $s_r = -b_r/a_r$. En la ecuación (2.71), \bar{Q}_r puede decirse que se trata de un factor de ponderación asociado a cada modo $\{\psi_r\}$, y que representa la contribución de cada modo al desplazamiento en cada eje. Se conoce como *factor de participación modal*, y proporciona una imagen acerca de la importancia del modo a los desplazamientos en determinados ejes.

Se tiene ahora un conjunto de N autovalores complejos s_r y sus correspondientes N autovectores $\{\psi_r\}$, más otro conjunto de autovalores s_r^* y sus correspondientes autovectores $\{\psi_r^*\}$.

2.4 Procesamiento de las señales

El procesamiento digital de las señales es una herramienta clave a la hora de realizar un análisis modal de un sistema concreto. El conjunto de las señales pueden clasificarse, en general, en estacionarias y no estacionarias.

Las señales estacionarias son aquéllas cuyas propiedades promedio no varían a lo largo del tiempo, pudiendo ser, a su vez, determinísticas o aleatorias. La naturaleza de las primeras permite representarlas matemáticamente y de manera explícita, de tal manera que, sus posibles valores futuros, puedan ser predichos. A este grupo pertenecen, por ejemplo, las señales periódicas. Sin embargo, el valor de las aleatorias depende del instante en el que nos encontramos, resultando casi imposible prever con exactitud sus valores futuros.

Las señales no estacionarias pueden dividirse en continuas o transitorias. Éstas últimas pueden definirse como señales que comienzan en cero en el periodo de observación.

Puesto que la finalidad del análisis de las señales es tratar de obtener la máxima información de ellas, resulta óptimo contar con la capacidad de estudiarlas en sus distintos dominios. Para extraer su contenido en frecuencias, resulta más sencillo analizar las señales en el dominio de las frecuencias. Se debe tener en cuenta que los registros se realizan en el dominio del tiempo, y por tanto, debemos acudir a la transformada (e inversa) de Fourier, ya que se trata de una herramienta que nos permite transformar de manera sencilla una señal en el tiempo a una señal en frecuencia y viceversa.

2.4.1 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier indica que, cualquier función periódica en el tiempo, puede ser representada por la suma de varios componentes sinusoidales a frecuencias equiespaciadas

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} G(k\Delta f) e^{2j\pi k\Delta f t} \quad (2.72)$$

Los coeficientes de Fourier vienen dados por:

$$G(k\Delta f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-2j\pi k\Delta f t} dt \quad (2.73)$$

Donde t es tiempo, k es un entero que cuenta los pasos en frecuencia, tal que $\Delta f=1/T$, j es el número imaginario y T el periodo de tiempo tal que $T=1/\Delta f$.

El conjunto de valores $G(k\Delta f)$ se denomina espectro de la función $g(t)$. En general el espectro posee valores complejos.

Al emplear sistemas digitales, es necesario obtener la señal continua en intervalos de tiempo. Esto significa que la señal continua debe representarse mediante una señal discreta que cuenta con valores a tiempos equidistantes. Considerando esto y aplicándolo a la transformada de Fourier, se obtiene la ecuación 2.74:

$$g(n\Delta t) = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} G(f) e^{-2j\pi f n \Delta t} df \quad (2.74)$$

Con:

$$G(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(n\Delta t) e^{-2j\pi f n \Delta t} \quad (2.75)$$

En donde n es un entero que cuenta el número de pasos de tiempo, Δt es el intervalo de muestreo tal que $\Delta t = 1/f_s$, y f_s es la frecuencia de muestreo tal que $f_s = 1/\Delta t$.

Las situaciones reales de mediciones imposibilitan la medición temporal de una señal hasta un tiempo infinito, teniendo que seleccionarse parte de ella. Asumiendo que la señal capturada se repite en un periodo T , que entrega una función periódica y combinando la hipótesis de periodicidad con un muestreo temporal de la señal de la señal, se obtiene la definición de la transformada discreta de Fourier (2.76):

$$g(n\Delta t) = \frac{1}{f_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} G(k\Delta f) e^{2j\pi n k / N_s} \quad (2.76)$$

Con:

$$G(f) = \frac{1}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} g(n\Delta t) e^{-2j\pi n k / N_s} \quad (2.77)$$

Donde N_s es el número de datos tal que $T = N_s \Delta t$ y $f_s = N_s \Delta f$.

2.4.2 Errores de medición

En cualquier proceso de análisis digital deben tenerse en cuenta los diversos errores que pueden llegar a darse. En el análisis digital de señales, las sobrecargas, el ruido digital, los errores de cuantificación o las limitaciones del rango dinámico son problemas bien conocidos por los expertos. Sin

embargo, existen dos especialmente importantes y que serán expuestos a continuación: el *aliasing* y el *leakage*.

2.4.2.1 Aliasing

El aliasing ocurre cuando se trata de digitalizar una señal analógica. La existencia de componentes de alta frecuencia en una señal puede ocasionar errores de amplitud y frecuencia en el muestreo. Si la mayor frecuencia perteneciente a una señal no cumple el teorema de Shannon ($f_{\max} \leq f_s/2$), aquellas frecuencias mayores que $f_s/2$ aparecerán como frecuencias menores a $f_s/2$. La figura 2.5 ejemplifica el fenómeno del aliasing. En ella se representa una función sinusoidal con frecuencia de 5 Hz, siendo muestreada mediante una a 1 Hz.

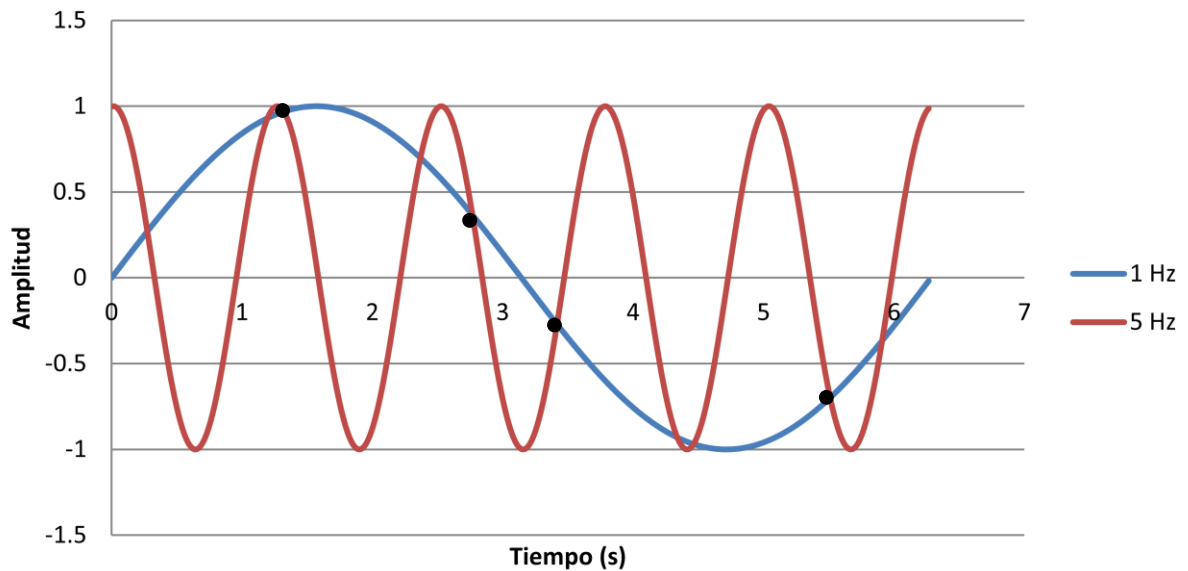


Figura 2.5. Aliasing. Función sinusoidal a 5Hz muestreado a 1Hz.

Este error de medición puede evitarse eliminando todos los componentes con frecuencias superiores a $f_s/2$. Esto es posible con una señal de excitación apropiada, aunque se logra generalmente empleando un filtro pasa bajos. Puesto que es imposible eliminar todas las frecuencias altas a 0 sin influenciar en las bajas, los filtros se fijan normalmente a un 40% de f_s .

2.4.2.2 Leakage

La adquisición de los datos debe realizarse con un periodo de observación finito T , y por tanto, su transformada discreta de Fourier asume que la señal es periódica con periodo T . Si esta condición no se cumple, se produce el error de leakage. La figura 2.6 muestra la representación de una señal tipo coseno cuando es periódica en T y cuando no lo es. En el segundo caso, el espectro discreto no coincide con el real. El error en la hipótesis de periodicidad produce errores importantes de amplitud y frecuencia.

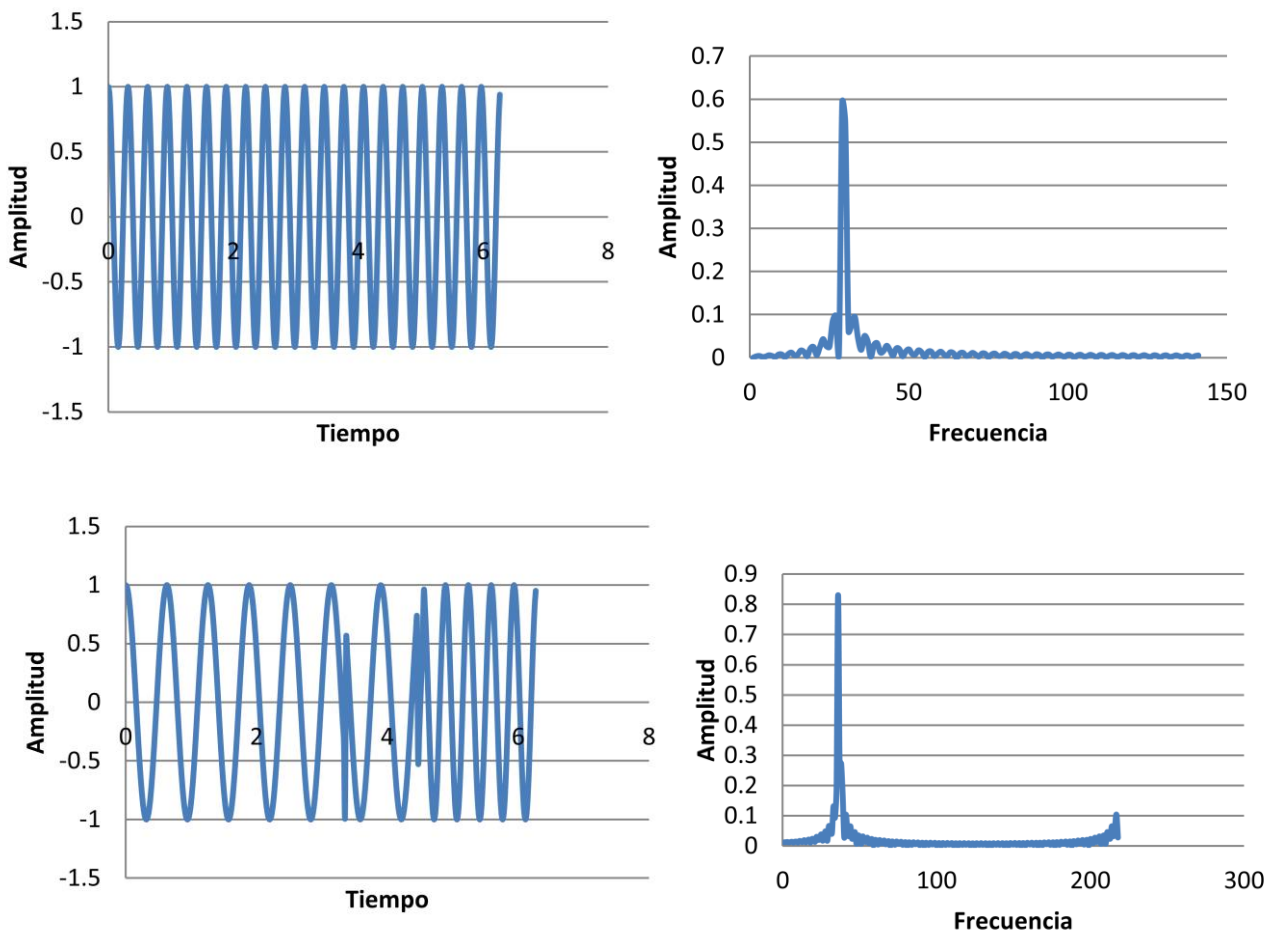


Figura 2.6. Hipótesis de periodicidad y leakage.

La única solución a este error es asegurarse de que la señal es periódica o se observa completamente en el periodo de adquisición. En sistemas perfectamente lineales se puede lograr excitarlos con una señal periódica en el intervalo de tiempo considerado. Aumentar el tiempo de adquisición, es decir, aumentar la resolución de frecuencias, ayuda a mejorar la periodicidad de la señal.

2.4.3 Función de respuesta en frecuencia (FRF)

La definición de función de respuesta en frecuencia indica la relación entre la señal de salida y la señal de entrada en el dominio de las frecuencias. Si definimos $F(f)$ como el espectro en frecuencia de la señal de entrada y $X(f)$ como el espectro en frecuencia de la señal de salida, entonces $H(f)$ puede escribirse como:

$$H(f) = \frac{X(f)}{F(f)} \quad (2.78)$$

Al evaluar la función en frecuencia con la ecuación 2.78, se corre el riesgo de que $F(f)$ sea cero para algunos términos. En la práctica existen formas alternativas de calcular $H(f)$, utilizando las potencias espectrales (ecuaciones 2.79 y 2.80):

$$H_1(f) = \frac{X(f) F^*(f)}{F(f) F^*(f)} = \frac{G_{XF}}{G_{FF}} \quad (2.79)$$

$$H_2(f) = \frac{X(f) X^*(f)}{F(f) X^*(f)} = \frac{G_{XX}}{G_{FX}} \quad (2.80)$$

El principal motivo para estimar las FRF's con las ecuaciones anteriores, es la disminución del ruido en las señales de entrada y salida al promediar.

En realidad, la función de respuesta en frecuencia se estima mediante valores promedio de las potencias espectrales,

$$\hat{G}_{FF} = \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} (G_{FF})_n \quad (2.81)$$

$$\hat{G}_{FF} = \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} (G_{XX})_n \quad (2.82)$$

$$\hat{G}_{FF} = \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} (G_{FX})_n \quad (2.83)$$

$$\hat{G}_{FF} = \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} (G_{XF})_n \quad (2.84)$$

Donde N_a es el número promedio que se repite el ensayo, lo que permite extraer una aproximación por mínimos cuadrados de $H(f)$. La figura 2.7 muestra la representación gráfica de una FRF.

Puesto que las funciones de respuesta en frecuencia se obtienen mediante una aproximación de mínimos cuadrados, se puede definir un coeficiente de correlación, que suele denominarse función de coherencia. Ésta permite dar una medida del error de la aproximación y se define como:

$$\gamma^2 = \frac{|\hat{G}_{FX}|^2}{\hat{G}_{FF}\hat{G}_{XX}} = \frac{H_1(f)}{H_2(f)} \quad (2.85)$$

La función de coherencia (2.85) toma valores entre 0 y 1. Un valor de 1, indica una relación completamente lineal entre las señales de entrada y las señales de salida. Si, por el contrario, el valor es menor que 1, puede buscarse la razón en los siguientes fenómenos:

- Existencia de *leakage* en el análisis,
- Desfase en las mediciones no compensado en el análisis,
- Ruido en las mediciones de $f(t)$ y/o $x(t)$,
- Falta de linealidades del sistema en análisis.

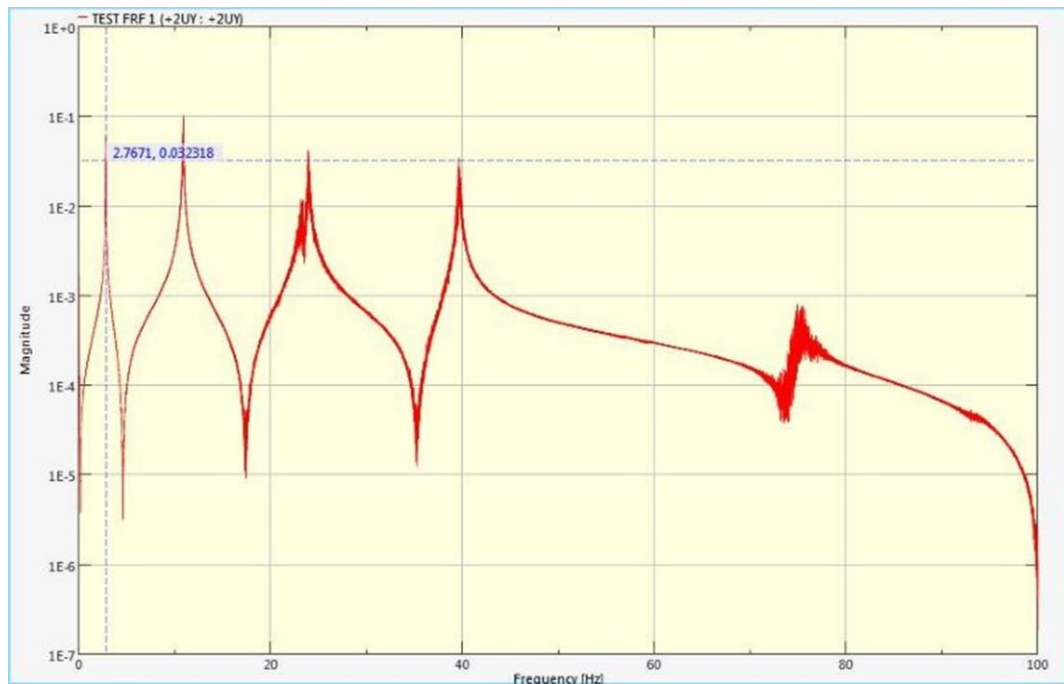


Figura 2.7. Representación gráfica de una FRF.

2.4.4 Función de densidad de potencia espectral cruzada (XPSD)

Los análisis modales experimentales (EMA) hacen uso de una fuerza de excitación conocida como input, midiendo las respuestas dinámicas de la estructura (outputs). Los resultados obtenidos se emplean para estimar la función de respuesta en frecuencia (FRF), y poder así extraer posteriormente

los parámetros modales del sistema. Como se analizará más adelante, los EMA presentan varias limitaciones que se traducen en un aumento del desarrollo y utilización de los análisis modales operacionales (OMA). Estos análisis no requieren de una fuerza de excitación conocida, ya que se realizan en condiciones vibratorias operativas.

Puesto que en un OMA la fuerza de excitación es desconocida, el concepto de función de transferencia es inaplicable y, por tanto, no puede calcularse la representación gráfica de la FRF. Es por ello que debe introducirse el concepto de función de densidad espectral de potencia o PSD.

En el dominio del tiempo, un proceso estocástico queda caracterizado si se conoce la función de medias $\mu_x(t)$ y la función de autocorrelación $R_x(\tau)$. Dicho proceso estocástico se define en el dominio de la frecuencia mediante la función de densidad espectral (también conocida como función espectral de potencia), que es la transformada de Fourier de $R_x(\tau)$. Las ecuaciones 2.88 definen la función de densidad espectral:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.88)$$
$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

Como la función de autocorrelación caracteriza al proceso estocástico en el dominio del tiempo, la función de densidad espectral caracteriza al proceso en el dominio de la frecuencia. Suprimiendo las frecuencias negativas, la función de densidad espectral puede escribirse como:

$$G_X(\omega) = 2S_X(\omega) \quad \omega \geq 0 \quad (2.89)$$

En la gran mayoría de los análisis modales, los datos obtenidos de los ensayos están almacenados en tantas señales como sensores activos haya conectados. En tal caso, es necesario introducir un nuevo concepto: función de densidad espectral cruzada o XPSD. El software de CAE empleado en este trabajo (FEMTools) permite el análisis de varias señales al mismo tiempo, ya que cuenta con dicha función implementada. Definiendo $X(t)$ e $Y(t)$ como dos procesos estocásticos estacionarios, la función de correlación cruzada es la ecuación 2.90:

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] \quad (2.90)$$
$$R_{YX}(\tau) = E[X(t + \tau)Y(t)]$$

La función de densidad espectral cruzada se define como la transformada de Fourier de la función de correlación cruzada. Por tanto, las dos funciones de densidad espectral cruzada se presentan en las ecuaciones 2.91:

$$S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$S_{YX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$
(2.91)

Como ya se ha mencionado, las FRF son propias de los EMA, necesitándose para la aplicación de los OMA las PSD. La relación entre la salida y la entrada de la PSD se muestra en la ecuación 2.92:

$$G_{YY}(j\omega) = H^*(j\omega)G_{XX}(j\omega)H^T(j\omega)$$
(2.92)

La descomposición modal de la FRF se muestra en la ecuación 2.93:

$$H(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{R_r}{j\omega - \lambda_r} + \frac{R_r^*}{j\omega - \lambda_r^*} \right)$$
(2.93)

Asumiendo que todas las entradas carecen de correlación, la matriz de salida de la PSD puede escribirse según la ecuación 2.94:

$$G_{YY}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{A_r}{j\omega - \lambda_r} + \frac{A_r^*}{j\omega - \lambda_r^*} + \frac{B_r}{j\omega - (-\lambda_r)} + \frac{B_r^*}{j\omega - (-\lambda_r^*)} \right)$$
(2.94)

Este modelo modal cuenta con $\lambda, \lambda^*, -\lambda, -\lambda^*$ como polos, de los cuales dos son estables (λ, λ^*) y dos son inestables ($-\lambda, -\lambda^*$). La PSD positiva (sólo tiene en cuenta las frecuencias positivas) está definida por la transformada de Fourier de las funciones de correlación, pudiéndose escribir como:

$$G_{YY}^+(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{A_r}{j\omega - \lambda_r} + \frac{A_r^*}{j\omega - \lambda_r^*} \right)$$
(2.95)

Comparando las ecuaciones 2.93 y 2.95, puede observarse que ambas presentan el mismo formato, por lo que, para los EMA la FRF y la PSD son la misma representación. Para los OMA, la PSD hace las funciones de FRF, ya que como anteriormente se ha indicado, la PSD caracteriza al proceso estocástico en el dominio del tiempo, pudiéndose aplicar las mismas técnicas de identificación de parámetros modales a través de las FRF. La imagen 2.8 muestra la representación de una PSD calculada mediante FEMTools. Como puede observarse, se trata de una gráfica muy parecida a una FRF.

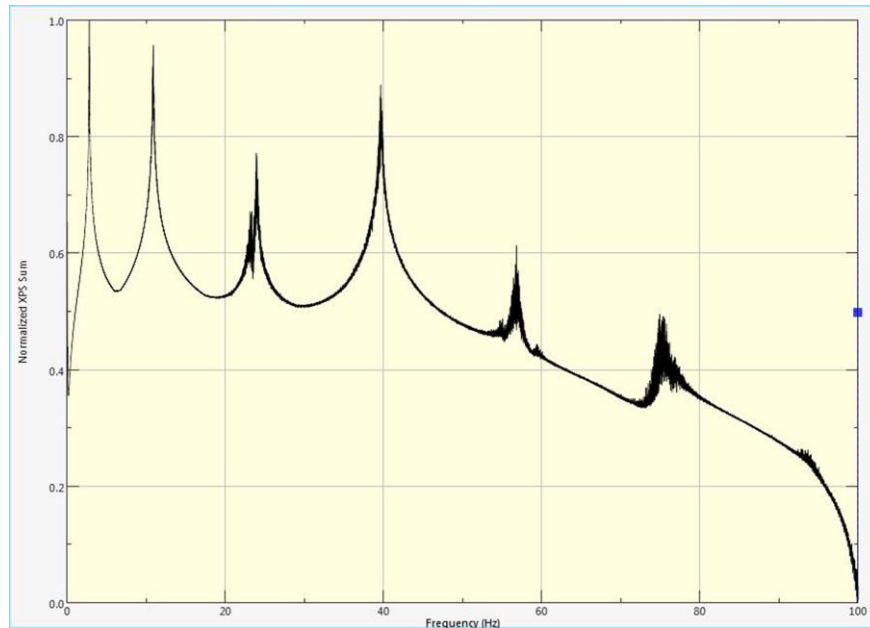


Figura 2.8. Representación gráfica de una XPSD.

2.4.5 Identificación de las frecuencias modales

Como posteriormente se mostrará, la identificación de las frecuencias modales es posible mediante el procesado de los datos que un *data-logger* proporciona tras medir la respuesta dinámica de la estructura excitada. Existen varios métodos que permiten dicha identificación de manera más o menos sencilla. Para este trabajo, el software empleado hace uso de tres técnicas que se muestran a continuación.

2.4.5.1 Obtención de frecuencias modales a través de la FRF

Las frecuencias experimentales se identifican a partir de las funciones de respuesta en frecuencia a través del *peak-picking*. En esta técnica, las frecuencias son elegidas por los picos máximos que aparecen en la gráfica de FRF.

En las cercanías de una frecuencia modal, la FRF está controlada por la contribución de ese modo de vibración, mientras que el resto de modos pueden despreciarse, ya que no se excitan a dicha frecuencia. Asumiendo la afirmación anterior, la FRF de un sistema con múltiples grados de libertad o incluso el de una estructura real, puede tratarse momentáneamente como la FRF de un sistema con un único grado de libertad. La figura mostrada a continuación (figura 2.9), presenta un gráfico con una FRF real en el que se han seleccionado los picos máximos. Debe señalarse que los posibles errores obtenidos a través de este método, vienen dados por la resolución de las frecuencias presentes en las FRF.

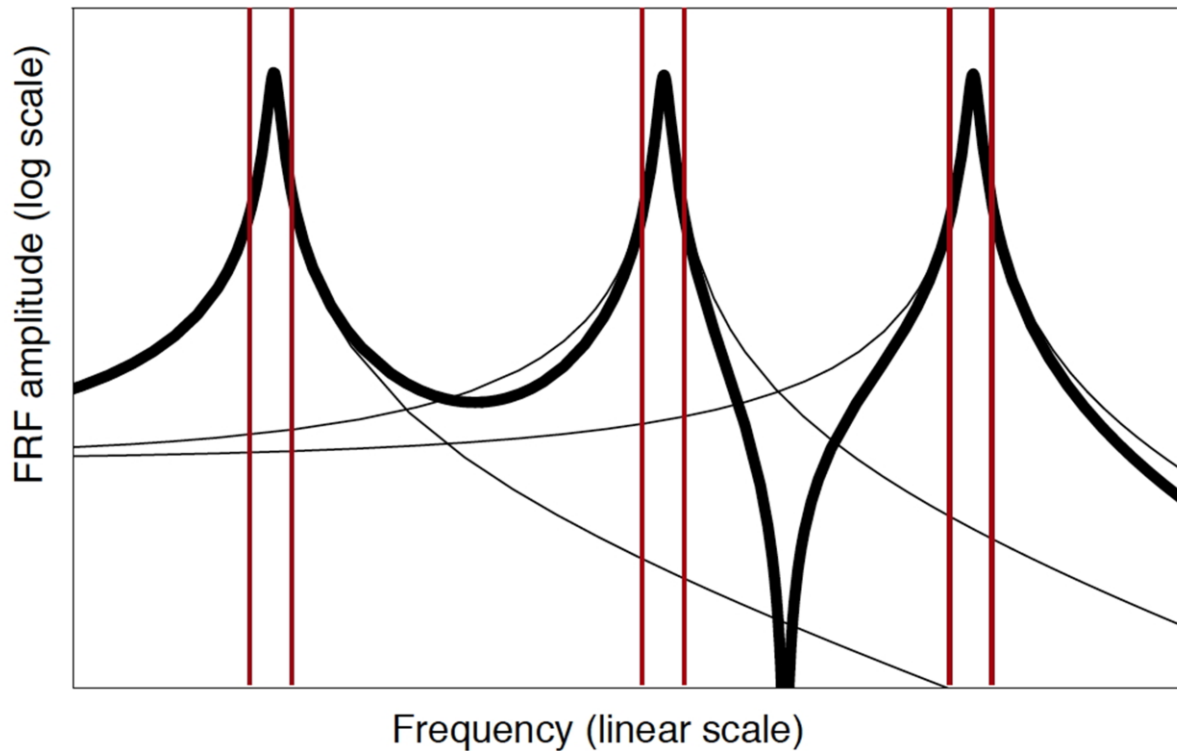


Figura 2.9. Identificación de los picos presentes en una gráfica FRF.

2.4.5.2 Complex Mode Indicator Function (CMIF)

La Complex Mode Indicator Function o CMIF, es un algoritmo empleado para la identificación de frecuencias modales, particularmente cuando éstas se encuentran estrechamente espaciadas. Este algoritmo está basado en el Teorema de la Expansión, que asume que, para cada frecuencia, la dimensión larga de la matriz de la FRF se obtiene como el sumatorio de los vectores modales.

Empleando una descomposición en valores singulares para comparar el sumatorio lineal de los vectores modales (dimensión larga de la matriz FRF) y las diversas referencias (dimensión corta de la matriz FRF), se extrae una gráfica que identifica el número de vectores modales dominantes participando en cada frecuencia. Si se estima la CMIF mediante una descomposición en valores singulares, los vectores singulares son unitarios y sus valores son una medida de la fuerza o predominancia de cada modo en cada frecuencia.

La CMIF se define como el conjunto de valores propios de la matriz normal de la FRF o la XPSD. Dicha matriz normal se obtiene premultiplicando a la matriz FRF (o XPSD en su defecto) sus matrices Hermitianas $[H(\omega)]^H[H(\omega)]$. La CMIF es la representación gráfica (figura 2.10) de dichos valores propios en función de la frecuencia y en escala logarítmica. Los picos detectados en la gráfica de la CMIF, indican la existencia de modos, y las frecuencias correspondientes a cada pico, ofrecen una estimación de las frecuencias naturales amortiguadas de cada modo. Puede programarse un detector

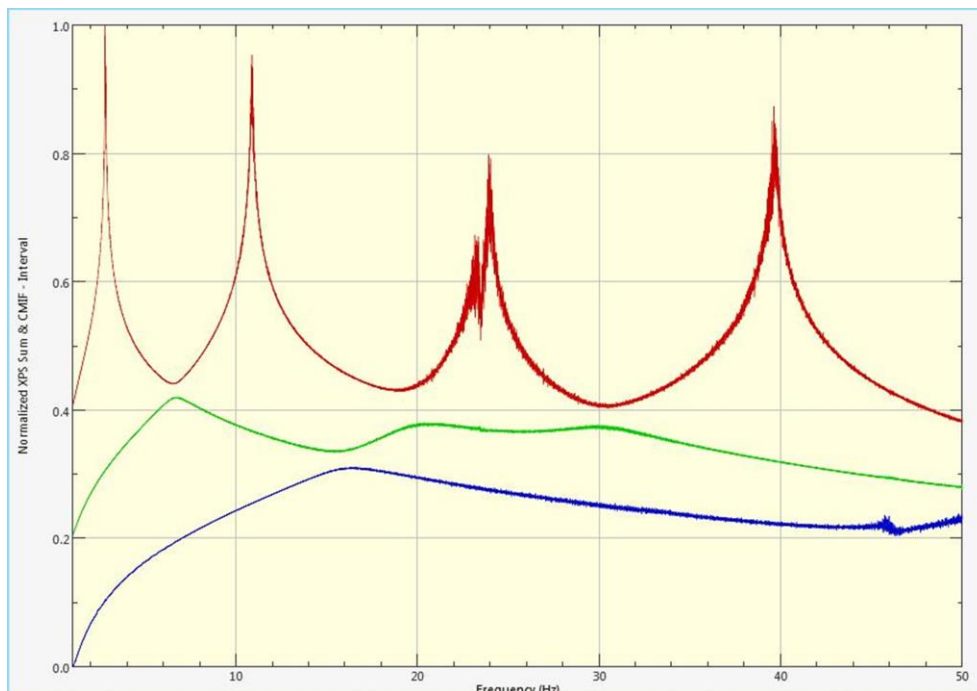


Figura 2.10. Representación gráfica de la CMIF de 3 referencias.

automático capaz de identificar así la existencia de modos. El vector singular correspondiente a cada pico detectado, es equivalente al factor de participación modal.

2.4.5.3 Algoritmo base para la identificación de frecuencias modales a través de funciones de transmisibilidad

El algoritmo base representa las frecuencias de resonancia mediante polinomios racionales. Las funciones de respuesta en frecuencia, así como la transmisibilidad, pueden definirse en forma de fracción racional, es decir, la razón de dos polinomios, en la que los órdenes del denominador y del numerador son independientes. La función de transmisibilidad puede representarse según la ecuación 2.86:

$$T_{ij}^k(\omega) = \frac{H_{ik}(\omega)}{H_{ij}(\omega)} = \frac{X_{ik}(\omega)}{X_{jk}(\omega)} = \frac{\sum_{p=1}^n a_p s^p}{\sum_{p=1}^m c_p s^p} \quad (2.86)$$

Los ceros del numerador son precisamente las frecuencias de la FRF de la fila i y columna k, mientras que los ceros del polinomio del denominador corresponden a las frecuencias de resonancia de FRF de la fila j y la columna k. A tenor de lo expuesto anteriormente, las funciones de transmisibilidad sólo muestran información acerca de las frecuencias modales. Tratando de ajustar las curvas de las funciones de transmisibilidad a la ecuación 2.85 y mediante la resolución de las raíces de ambos polinomios, pueden determinarse las frecuencias de resonancia del sistema para una determinada excitación.

Para determinar las frecuencias de la FRF de la fila j y la columna k con mayor exactitud, el algoritmo base emplea la suma de todas las funciones de transmisibilidad cuyos denominadores cuentan con respuesta en j.

$$T_j^k(\omega) = \sum_{p=1, p \neq j}^N T_{pj}^k = \sum_{p=1, p \neq j}^N \frac{X_{pk}(\omega)X_{jk}^*(\omega)}{X_{jk}(\omega)X_{jk}^*(\omega)} \quad (2.87)$$

Donde N es el número de respuestas medidas. Las funciones de transmisibilidad reducen el ruido presente en las señales, y por tanto, incrementan la precisión con que se extraen las frecuencias detectadas. La función resultante (ecuación 2.87) contiene solo los picos de las frecuencias de resonancia en la fila j y columna k de la FRF. Por tanto, si se ajusta la curva de la ecuación 2.87 a una forma de fracción racional y se resuelven las raíces del denominador, pueden identificarse las frecuencias de la fila j y columna k de la FRF. La siguiente imagen (figura 2.11) muestra como el algoritmo basado en funciones de transmisibilidad es capaz de identificar las frecuencias para un caso en particular.

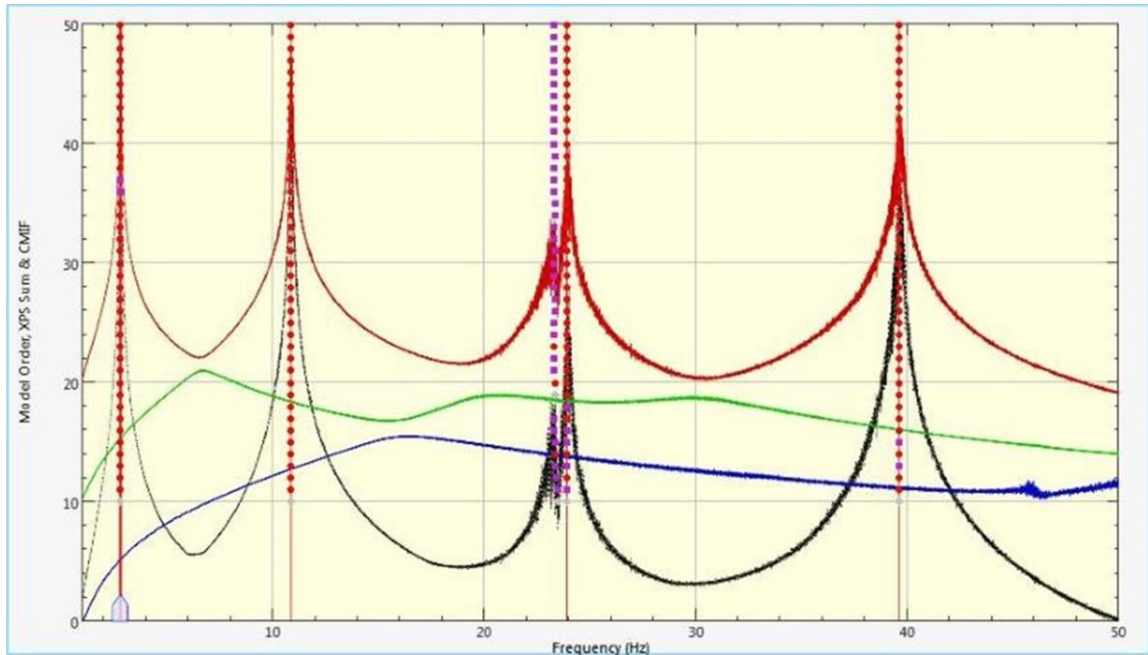


Figura 2.11. Diagrama de estabilización. Extracción de los polos del denominador polinómico de la XPSD.

2.5 Indicadores de calidad de los parámetros modales

En ocasiones, los datos obtenidos en un análisis modal ofrecen modos de vibración muy cercanos entre sí. El software de postprocesado de los datos es capaz de identificar dichos modos cercanos, cuyas propiedades modales son similares, mientras que sus formas modales pueden diferir sustancialmente. Para poder seleccionar aquel modo de vibración que resulta más coherente, puede hacerse uso de determinados indicadores que, mediante sencillos cálculos, cuantifican la calidad de las características modales de la estructura en estudio.

Aunque estos indicadores (Govers 2012: 20) son de vital importancia a la hora de tomar decisiones, también debe primar la visión subjetiva del ingeniero.

2.5.1 MPC (Modal Phase Collinearity)

El MPC permite cuantificar la estabilidad espacial de las formas modales identificadas. Cuando los modos son normales, las vibraciones de todos los puntos de la estructura están en fase o desfase con los demás. Sin embargo, en la práctica, puede ocurrir que los ángulos de fase de los vectores de desplazamiento modal identificados no sean consistentes. Este comportamiento no deriva necesariamente de las propiedades modales de la estructura, sino que puede deberse a la inclusión de ruido durante el proceso de toma de datos. El MPC es un indicador que muestra, cuantitativamente, la colinealidad del ángulo de fase en las formas modales identificadas,

determinando la precisión de dichos modos. Toma valores de 0 a 1, siendo 0 un indicativo de ángulos de fase en el modo identificado sin correlación, mientras que 1 (ó 100%) representa un modo perfecto en fase.

El MPC puede definirse, según Juang y Pappa a través de las fórmulas indicadas a continuación:

$$MPC_r = \frac{\|R\{\bar{\psi}\}_r\|^2 + \frac{1}{\epsilon_r} R\{\bar{\psi}\}_r^T I\{\bar{\psi}\}_r [2(\epsilon_r^2 + 1)\sin^2\theta_r - 1]}{\|R\{\bar{\psi}\}_r\|^2 + \|I\{\bar{\psi}\}_r\|^2} \quad (2.88)$$

Donde cada elemento j del vector $\{\bar{\psi}\}_r$ se calcula mediante la resta a todos los elementos de $\{\psi\}_r$ la media del valor complejo tal que:

$$\bar{\psi}_{jr} = \psi_{jr} - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \psi_{jr} \quad (2.89)$$

En cuanto a los valores de ϵ_r y θ_r , se obtienen a través de las siguientes relaciones:

$$\epsilon_r = \frac{\|I\{\bar{\psi}\}_r\|^2 - \|R\{\bar{\psi}\}_r\|^2}{2(R\{\bar{\psi}\}_r^T I\{\bar{\psi}\}_r)} \quad (2.90)$$

$$\theta_r = \arctan(|\epsilon_r| + \text{sgn}(\epsilon_r)\sqrt{1 + \epsilon_r^2})$$

2.5.2 MPD (Mean Phase Deviation)

La Desviación Media de Fase (o MPD) es un indicador que permite cuantificar la complejidad de una determinada forma modal. Este parámetro puede calcularse a través de las fórmulas que se muestran a continuación (Heylen et al.):

$$MPD_r = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M \omega_{jr} (\varphi_{jr} - MPH_r)^2}{\sum_{j=1}^M \omega_{jr}}} \quad (2.91)$$

con,

$$MPH_r = \frac{\sum_{j=1}^M \omega_{jr} \varphi_{jr}}{\sum_{j=1}^M \omega_{jr}} \quad (2.92)$$

Donde ω_{jr} representa un factor ponderal que puede establecerse, por ejemplo como $\omega_{jr} = 1$ ó $\omega_{jr} = |\psi_{jr}|$. El ángulo de fase de cada componente compleja puede determinarse como:

$$\varphi_{jr} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{R(\psi_{jr})}{I(\psi_{jr})}\right), & \text{si } \arctan\left(\frac{R(\psi_{jr})}{I(\psi_{jr})}\right) \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{R(\psi_{jr})}{I(\psi_{jr})}\right) + \pi, & \text{si } \arctan\left(\frac{R(\psi_{jr})}{I(\psi_{jr})}\right) < 0 \end{cases} \quad (2.93)$$

Para un modo complejo $\{\psi\}_r$, el valor del MPD es la desviación típica de los ángulos de fase de los coeficientes del vector complejo de la forma modal. El MPD no está normalizado y tiene dimensión física. Para formas modales normales el valor del MPD debe ser cero.

2.5.3 MAC (Modal Assurance Criterion)

El MAC es una de las herramientas básicas en el desarrollo de un análisis modal, ya que permite cuantificar el grado de linealidad entre dos vectores modales.

Este indicador puede definirse como una constante escalar que describe la dependencia lineal entre dos vectores modales. La interpretación matemática del MAC es el cuadrado del coseno del ángulo entre los vectores $\{\phi\}_k$ y $\{\phi\}_l$ obtenidos bien experimentalmente, o bien teóricamente:

$$MAC_{kl} = \frac{(\{\phi\}_k^T \{\phi\}_l)^2}{(\{\phi\}_k^T \{\phi\}_k)(\{\phi\}_l^T \{\phi\}_l)} \quad (2.94)$$

La fórmula anteriormente indicada da como resultado 1 si los dos vectores introducidos son iguales (y por tanto existe una correlación importante entre ambos) y 0 si ambos vectores son perpendiculares.

Para los análisis modales que se realizarán a lo largo de este trabajo, el MAC permite extraer información de datos experimentales. Este indicador puede emplearse para buscar correlaciones entre las formas modales detectadas y así determinar si los modos extraídos de distintos análisis son válidos, o incluso comparar aquéllos numéricos con los experimentales.

Un requisito básico a la hora de emplear este indicador es que los vectores de las formas modales ($\{\phi\}_k$ y $\{\phi\}_l$) deben estar igualmente bien definidos, es decir, que los elementos de ambos vectores correspondan a los mismos nodos y grados de libertad.

En la figura 2.12 pueden observarse las distintas formas de representación de los valores del MAC. Puesto que se comparan término a término los vectores modales, los valores realmente importantes deben encontrarse en la diagonal de dichas representaciones. Así pues, cuanto mejores son los valores de la diagonal, mayor correlación existe entre ambos vectores para cada modo, y por tanto, mayor parecido hay entre las formas modales detectadas.

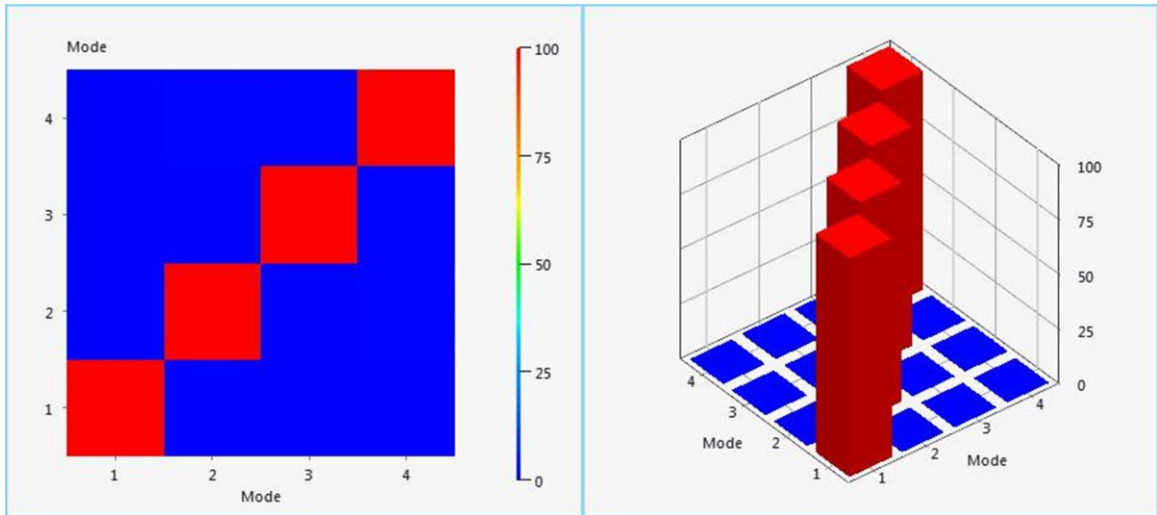


Figura 2.12. Representación gráfica del indicador MAC.

3. Técnicas experimentales

Anteriormente, en el epígrafe 2 del trabajo, se ha indicado que son tres las áreas de conocimiento básicas para poder extraer el máximo partido de un análisis modal (Ewins, 1992:5). La primera área, referida a la teoría básica de vibraciones, ya ha sido mostrada. La segunda, que trata de la medición precisa de las vibraciones, va a ser expuesta en los siguientes apartados.

Este tercer capítulo trata de analizar las diferentes metodologías experimentales que pueden ponerse en práctica a la hora de realizar un análisis modal, mostrando además, todos los elementos que permiten medir y extraer los parámetros dinámicos.

Se tratará primeramente de dar las bases teóricas de cada metodología para, al final del capítulo, mostrar los resultados obtenidos de la aplicación de las técnicas en una viga simplemente apoyada.

Los análisis modales, tratan de extraer las propiedades modales de una estructura (formas modales, frecuencias a las que se dan y factores de amortiguamiento) mediante la toma de medidas en la respuesta dinámica de la estructura a acciones externas. Estas acciones pueden ser inducidas, conociendo perfectamente las características de la excitación (EMA), o aleatorias, sin saber exactamente la magnitud de las acciones (OMA).

3.1 Análisis Modal Experimental (EMA)

Como se ha indicado anteriormente, el Análisis Modal Experimental busca la extracción de las propiedades modales de una estructura mediante las medidas de la respuesta dinámica (output) a una fuerza de excitación conocida (input).

Este análisis requiere de la utilización de varios componentes para la toma de datos, que pueden enumerarse en tres bloques básicos que se representan en la figura 3.1:

- Mecanismos de excitación;
- Sensores de medida;
- Aparatos de adquisición y procesado de datos.

El mecanismo de excitación está constituido por un sistema que proporciona el movimiento de entrada (input) a la estructura en estudio, generalmente mediante la aplicación de una fuerza $f(t)$ en un determinado eje. Existen numerosas variantes de este sistema, cuya elección viene condicionada por determinados factores del estudio como el tipo de excitación que se pretende implementar en la estructura o las propiedades físicas de la estructura. Este aparato (conocido habitualmente como “*shaker*”) suele tratarse de un vibrador electromagnético, dirigido mediante una señal de accionamiento

amplificada. Las señales de excitación, en estos casos, se producen mediante un generador de funciones, ya que permite elegir, de una gran variedad, la que mejor encaje en las características del análisis.

Lo cierto es que, este tipo de mecanismos de excitación, resultan sencillos de controlar, ya sea mediante su frecuencia de oscilación como por la amplitud de sus vibraciones. Sin embargo, cabe destacar que existen algunos inconvenientes, puesto que los *shakers*, deben estar conectados permanentemente a la estructura en estudio, modificando algunos parámetros clave como la masa.

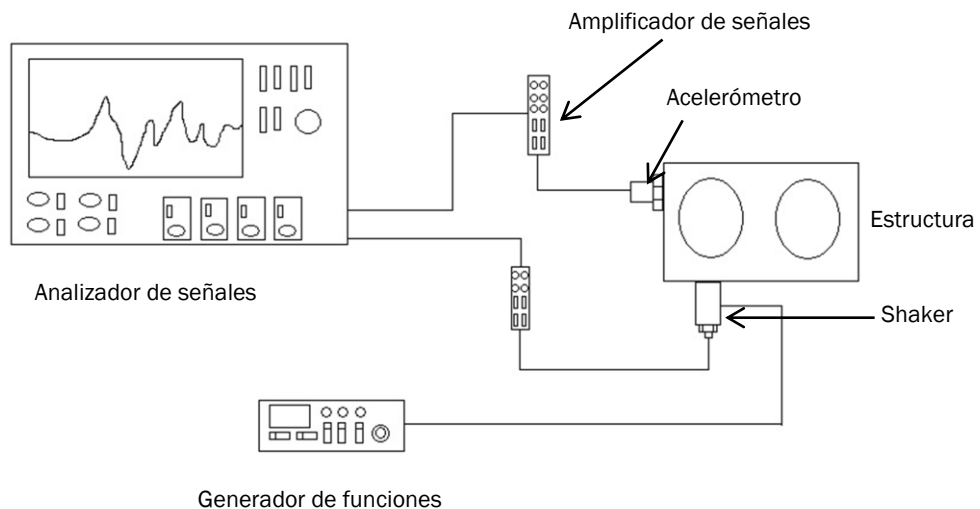


Figura 3.1. Esquema básico de los elementos necesarios para la realización de un EMA.

Aunque existen otros métodos de excitación controlada, como el martillo de excitación, en la práctica los *shakers* con accionamiento electromagnético o electrohidráulico son los más ampliamente empleados, por la facilidad de modular sus oscilaciones.

En cuanto al sistema de captación de las vibraciones, está formado básicamente por transductores. Existe una gran variedad de sensores, aunque los más empleados para los análisis modales experimentales son los sensores de aceleración (acelerómetros). Además, la existencia de numerosos mecanismos de medida internos implica una extensa colección de acelerómetros, aunque la finalidad de todos ellos es esencialmente la misma. Generan señales eléctricas proporcionales al parámetro físico que se pretende medir. Posteriormente se indicarán los tipos empleados a la hora de llevar a cabo los experimentos anunciados. En la mayoría de los casos, las señales eléctricas generadas por estos transductores, no pueden procesarse directamente. Este problema reside en el hecho de que las señales emitidas

por los acelerómetros son extremadamente débiles y a la impedancia eléctrica de los cables, solventándose mediante amplificadores de señal.

Finalmente debe considerarse el sistema de adquisición de datos y procesamiento de los mismos, cuyo objetivo pasa por convertir las señales generadas por los acelerómetros, a magnitudes físicas que describan el nivel de excitación.

3.2 Análisis Modal Operacional (OMA)

El análisis modal operacional, que ha ido ganando popularidad en los últimos años, se plantea como una alternativa al ya comentado EMA. Desarrollado principalmente por la comunidad de ingenieros civiles, trata de dar solución a las dificultades que plantea, en numerosas ocasiones, inducir una excitación artificial a estructuras de grandes dimensiones.

Las excitaciones se producen de manera arbitraria por el uso habitual de la estructura (viento, tráfico,...) y, mediante la toma de datos de la respuesta dinámica, pueden extraerse las características modales de la estructura (formas modales, frecuencias a las que se dan y factores de amortiguamiento).

Al igual que en el EMA, se requiere de diversos aparatos para medir las respuestas de la estructura. Puesto que es necesario inducir la excitación, se prescinde del “shaker”, teniendo que emplear:

- Sensores de medida
- Aparatos de adquisición de datos

La figura 3.2 muestra el esquema de un montaje para la realización de un OMA.

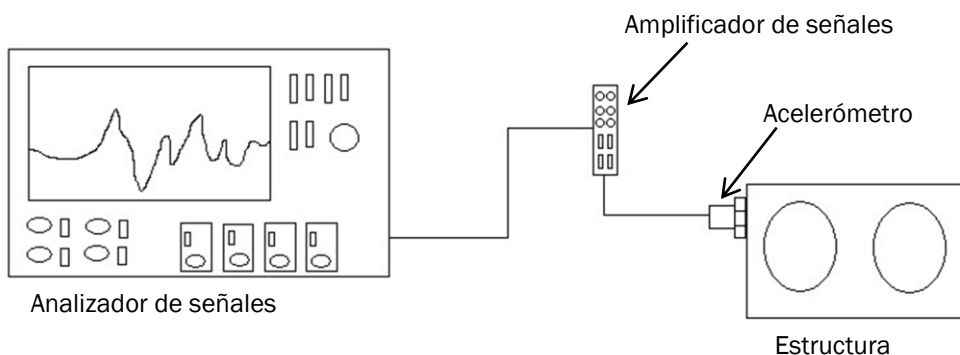


Figura 3.2. Esquema básico de los elementos necesarios para la realización de un OMA.

3.3 Instrumentación empleada

Los siguientes apartados tratan de describir detalladamente la instrumentación que se ha empleado para realizar los experimentos del presente trabajo.

Aunque se han incluido anteriormente algunas indicaciones de los aparatos necesarios en los análisis modales, resulta necesario precisar las características concretas de los instrumentos utilizados, ya que la realización del análisis mediante otros aparatos, puede modificar los resultados finales obtenidos. Por ello es esencial una concienzuda selección especialmente de los acelerómetros, ya que su introducción en la estructura altera su comportamiento. Además, son ellos los encargados de dar la primera lectura de las vibraciones de la estructura, por lo que su precisión y nitidez, condicionarán el resto del análisis.

3.3.1 Acelerómetros

Un acelerómetro es un transductor destinado a medir las aceleraciones. Pueden medir las aceleraciones en un único eje (conocidos como acelerómetros uniaxiales) o en varios ejes a la vez (triaxiales).

En su interior pueden encontrarse diversos mecanismos que condicionan la precisión y nitidez que consiguen en las medidas.

Acelerómetros piezoeléctricos

Se trata sin duda del acelerómetro más popular y el más empleado para la medida de las aceleraciones en los análisis modales. El principio físico básico de su funcionamiento consiste en el uso de un pequeño cristal piezoeléctrico (tanto natural como artificial) que genera una corriente eléctrica tras aplicársele una fuerza. La figura 3.3 muestra la sección de un acelerómetro piezoeléctrico típico. Son cuatro los elementos básicos que conforman un acelerómetro piezoeléctrico; una base, una carcasa, un cristal piezoeléctrico y

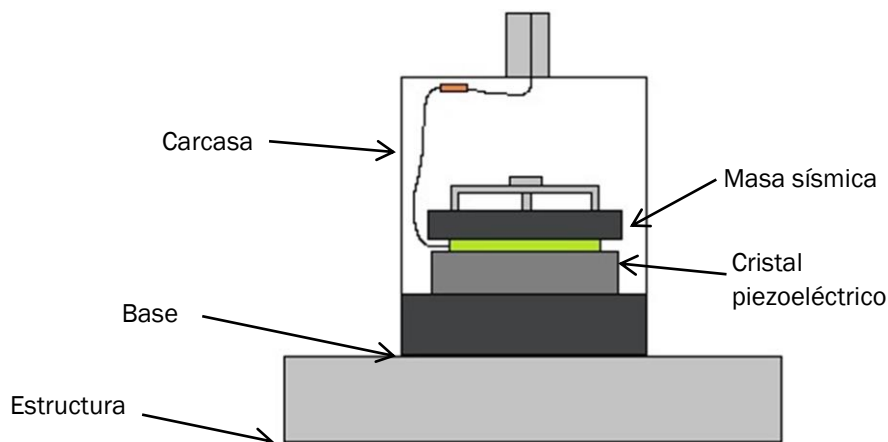


Figura 3.3. Sección de un acelerómetro piezoeléctrico uniaxial.

una masa sísmica. La base del acelerómetro se mueve con las oscilaciones de la estructura sobre la que apoya, viéndose comprimido el elemento piezoeléctrico por medio de la masa sísmica. La ligera deformación del elemento, ocasiona una pequeña carga eléctrica proporcional a la deformación, y por tanto, a la aceleración de masa sísmica y de la estructura.



Figura 3.4. Acelerómetro MMF KS48C.

La figura 3.4 muestra el acelerómetro empleado (MMF KS48C). Se trata de un acelerómetro de alta sensibilidad

de la empresa alemana MMF, especialmente diseñado para frecuencias no excesivamente altas.

Acelerómetros piezorresistivos y capacitivos (Tecnología MEMS)

Los numerosos avances en microelectrónica, han propiciado la creación de la tecnología MEMS (acrónimo anglosajón de Sistemas MicroElectroMecánicos). A lo largo del trabajo, se ha indicado la necesidad de medir las vibraciones para detectar y diagnosticar cualquier desviación del correcto funcionamiento de una estructura. Lo cierto es que, aunque los acelerómetros anteriormente mencionados son los empleados habitualmente en los análisis modales, su precio es relativamente alto. Los recientes avances en MEMS han provocado una disminución del precio de los dispositivos, alzándose como una alternativa más económica a los tradicionales transductores piezoeléctricos. Según Alhussein Albarbar (2008:784), el precio de un acelerómetro MEMS es en torno a un 10% inferior respecto al piezoeléctrico más económico.

En un acelerómetro MEMS piezorresistivo (representado en la figura 3.5), los elementos flexibles de semiconductor que soportan la masa sísmica, forman

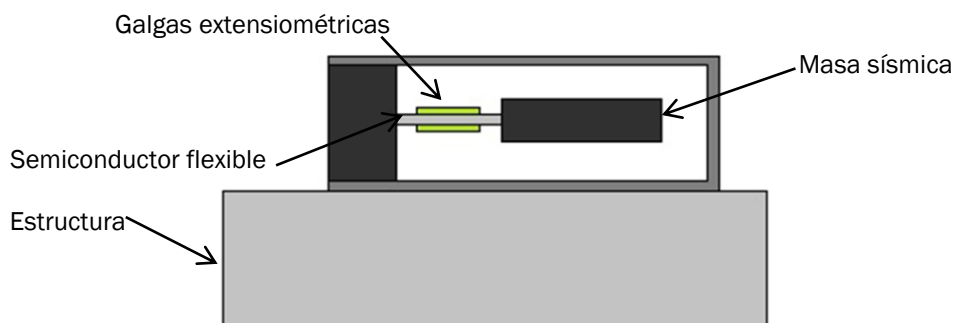


Figura 3.5. Sección de un acelerómetro piezorresistivo uniaxial.

parte de lo que se conoce como puente de Wheatstone. Como estos elementos se deforman, el puente de Wheatstone se desequilibra, y la diferencia de potencial a la salida (proporcional a la deformación aplicada) es una medida de la aceleración.

En un acelerómetro capacitivo (representado en la figura 3.6), los elementos de medida forman un condensador. La masa sísmica está sujeta por elementos flexibles entre dos electrodos. Cuando la masa sísmica se mueve

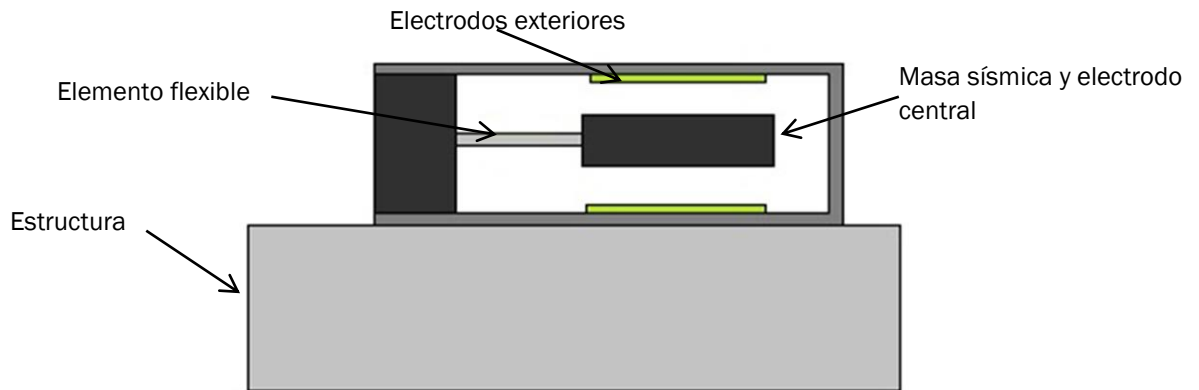


Figura 3.6. Sección de un acelerómetro capacitivo uniaxial.



Figura 3.7. Acelerómetro MEMS capacitivo.

en torno a su posición de equilibrio, el puente capacitivo se desequilibra. La diferencia de potencial de salida se mide de manera similar al acelerómetro piezorresistivo. La ventaja de estos acelerómetros es su capacidad de respuesta a bajas frecuencias.

Los acelerómetros MEMS empleados (figura 3.7), son de tecnología capacitiva.

3.3.1.1 Comparación de los acelerómetros

La sensibilidad de los acelerómetros varía, según modelos, desde 100 mV/g hasta 10000 mV/g (Catálogo de especificaciones 2004). En general, lo óptimo es contar con la mayor sensibilidad posible. Lo cierto es que, a mayor sensibilidad, mayor y más pesado resulta el acelerómetro, interfiriendo de manera más acusada en las propiedades de la estructura.

En este caso particular, el modelo de KS48C cuenta con una sensibilidad de 1000 mV/g, mientras que la de los acelerómetros MEMS es 800 mV/g.

El test propuesto para comparar las respuestas de ambos tipos de acelerómetros, pasa por medir, en una viga simplemente apoyada, la misma respuesta dinámica de un análisis modal operacional.

Contamos con una viga de 6 metros con una masa de 23,88 kg, además de los dos tipos de acelerómetros indicados anteriormente (piezoeléctricos y MEMS capacitivos).

Puesto que las mayores amplitudes, y por tanto mayores aceleraciones, se producen en la zona central de la viga, se decide colocar ambos acelerómetros en la cota de 3 metros, tal y como se muestra en la figura 3.8.

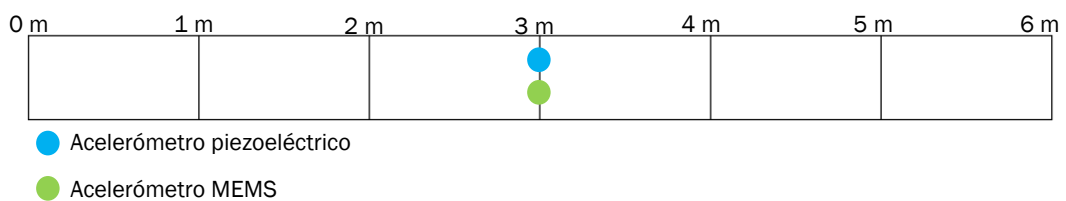


Figura 3.8. Disposición de los acelerómetros en la viga.

Para registrar las señales y poder procesar la información, recurrimos al MGCPPlus del fabricante Hottinger Baldwin Messtechnik (HBM). Se trata de un *datalogger*, del que posteriormente se dará más información, que se comunica con un PC mediante un programa *software* facilitado por la misma empresa denominado catMan. Éste permite almacenar y gestionar la información que recibe el MGCPPlus, mostrando representaciones temporales de los datos registrados. Así pues, el esquema presentado en la figura 3.9 resume mediante imágenes las conexiones entre todos los elementos del análisis.

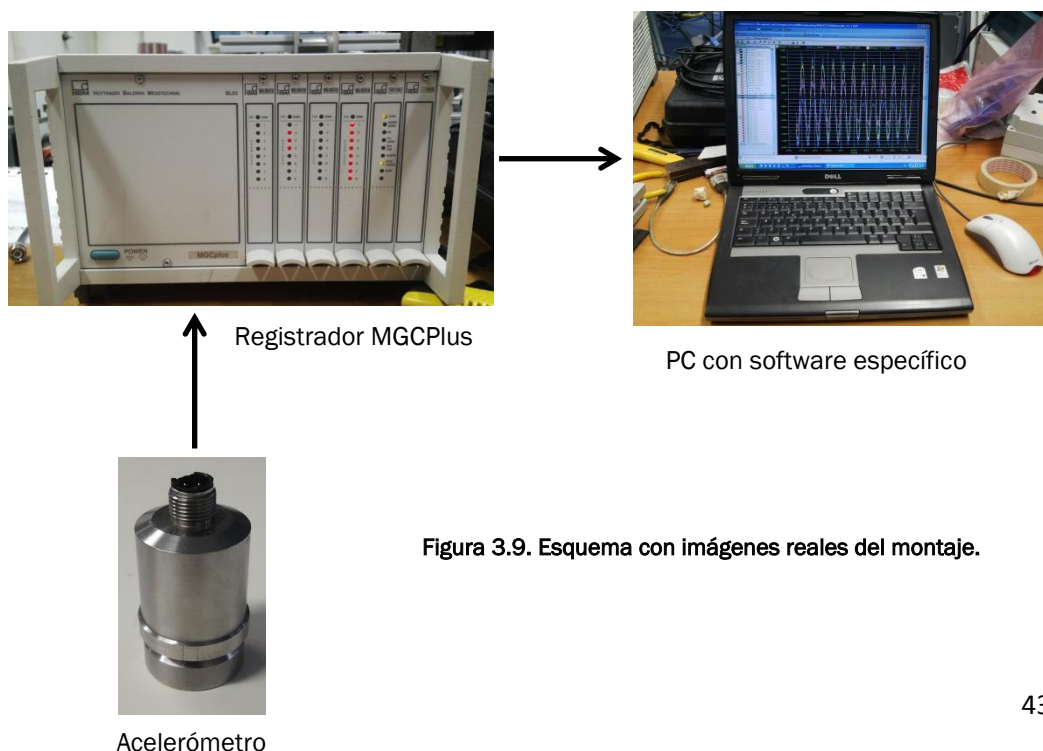


Figura 3.9. Esquema con imágenes reales del montaje.

Se excita de manera arbitraria la viga, simulando los efectos del viento o el tráfico, ya que, al encontrarse en un laboratorio, estas cargas son nulas. Tras la excitación, registramos la respuesta dinámica durante 5 minutos (300 segundos).

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3.10, en la que las respuestas temporales de ambos acelerómetros aparecen representadas en la misma gráfica.

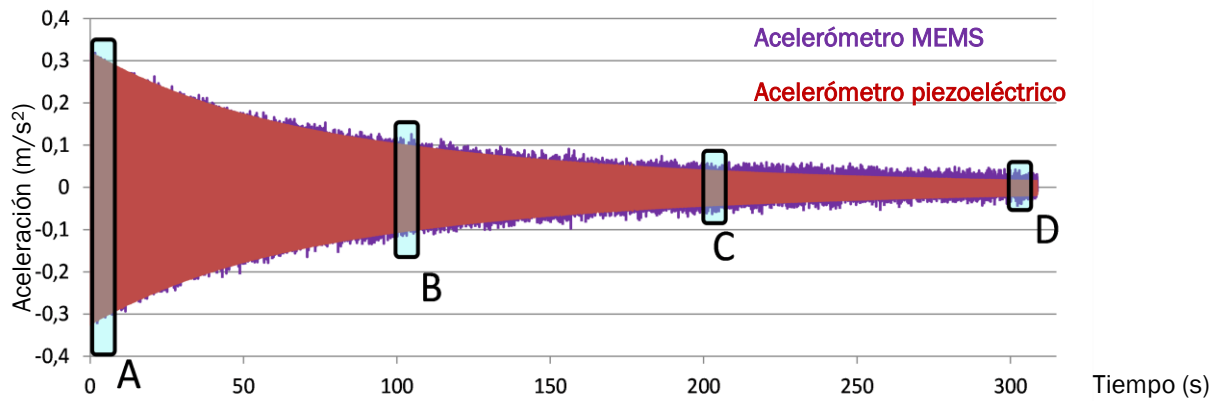


Figura 3.10. Representación temporal de las respuestas de los dos acelerómetros.

Analizando a simple vista la figura 3.9, puede verse que ambos acelerómetros dan una respuesta realmente parecida durante los primeros minutos del análisis y que, a medida que pasa el tiempo, las respuestas se alejan. Las cuatro zonas delimitadas pretenden dar una idea de la diferencia de nitidez en la respuesta mostrando, en distintos instantes de tiempo, una ampliación de la representación de la señal.

La figura 3.11 comprende dos segundos desde el instante inicial. El acelerómetro piezoeléctrico muestra una señal muy nítida y nada

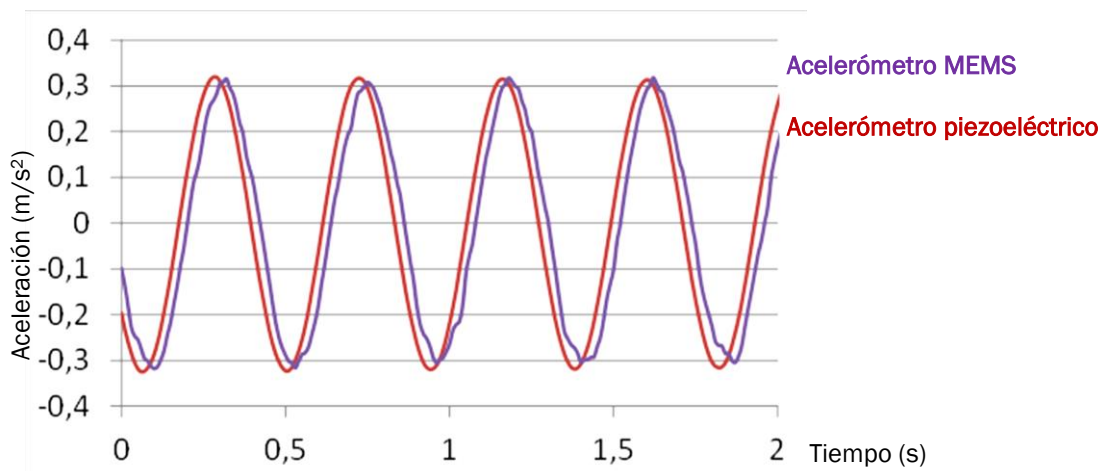


Figura 3.11. Detalle de representación temporal de las respuestas de los dos acelerómetros (A).

distorsionada. No ocurre lo mismo con el acelerómetro MEMS, cuenta con una respuesta inicialmente bastante nítida y poco distorsionada pero que, a medida que pasa el tiempo y disminuye la aceleración, pueden apreciarse pequeñas distorsiones. Cabe destacar el desfase que existe entre las señales de ambos acelerómetros que puede deberse a la posición de los acelerómetros en la viga.

La figura 3.12 muestra la representación de ambas señales desde el segundo 100 hasta el 102. Como anteriormente se ha indicado, los acelerómetros MEMS eran propensos a aumentar las distorsiones a medida que disminuían las aceleraciones como se muestra en esta gráfica. Aunque la señal de los MEMS sigue siendo nítida, no puede compararse a la de los piezoeléctricos, pues se muestra impecable en este rango de aceleraciones ($\pm 0,1 \text{ m/s}^2$).

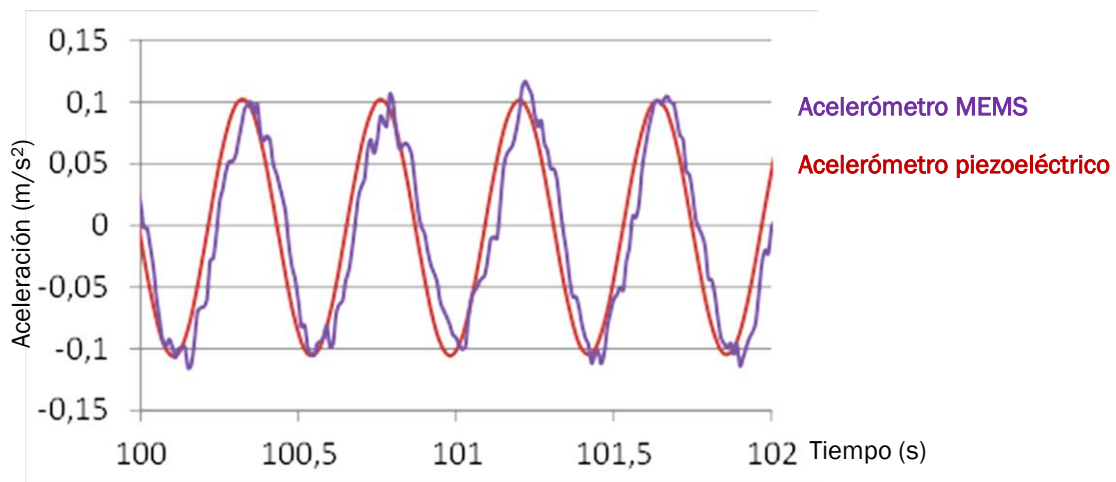


Figura 3.12. Detalle de representación temporal de las respuestas de los dos acelerómetros (B).

En la figura 3.13 aún pueden percibirse las ondulaciones en la señal del acelerómetro MEMS, pero el ruido ha aumentado considerablemente, no

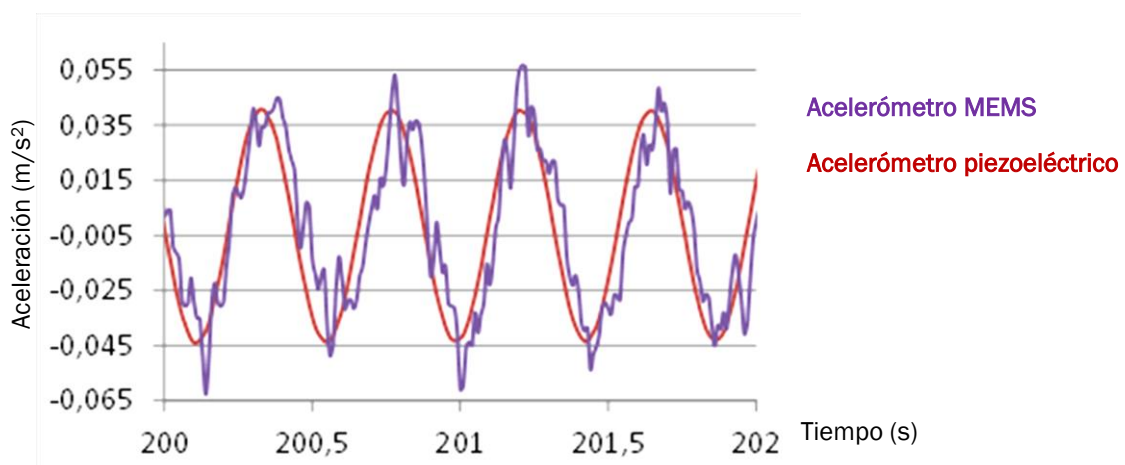


Figura 3.13. Detalle de representación temporal de las respuestas de los dos acelerómetros (C).

pudiéndose ver con demasiada nitidez la amplitud de las oscilaciones. Mientras la señal generada por el sensor piezoeléctrico indica que el rango de amplitudes es de $\pm 0,045 \text{ m/s}^2$ de manera clara, el MEMS muestra picos de hasta $-0,065 \text{ m/s}^2$, no resultando una medida fidedigna.

Finalmente, y para mostrar con mayor claridad las diferencias entre las señales de ambos sensores a bajos niveles de excitación, se recurre a la figura 3.14, delimitado por el cuadro D. Comprende los dos últimos segundos pasados los 5 minutos del experimento. Como puede observarse la señal del piezoeléctrico comienza a mostrar ruido, no resulta tan nítida y clara como en las anteriores ampliaciones, sin embargo puede apreciarse a la perfección la onda sinusoidal y los picos de cada onda. No puede decirse lo mismo de la señal ofrecida por el MEMS, ya que resulta imposible discernir la forma ondulada de la respuesta dinámica del ruido.

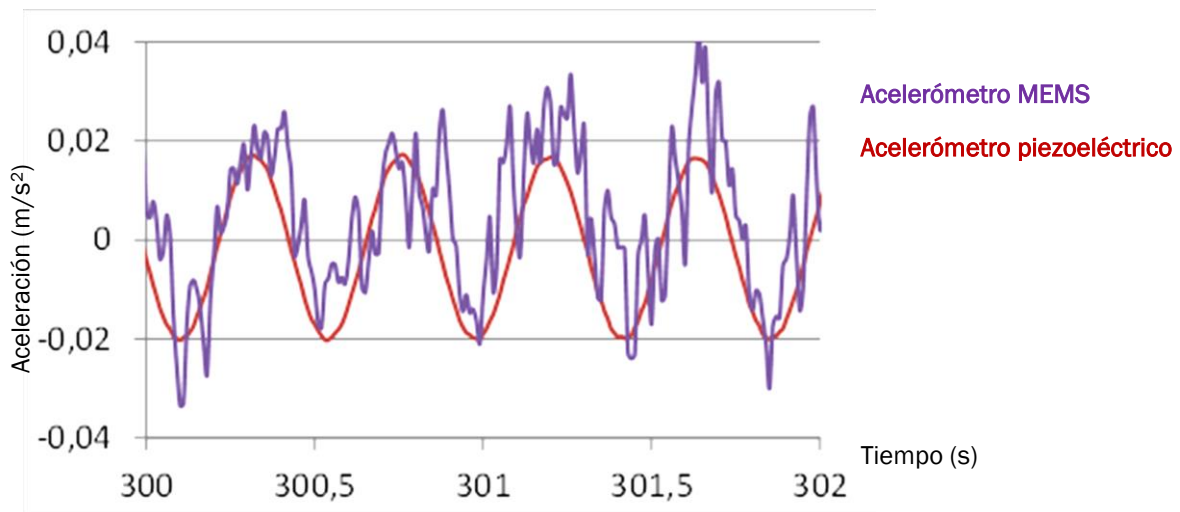


Figura 3.14. Detalle de representación temporal de las respuestas de los dos acelerómetros (D).

Aunque la sensibilidad de ambos acelerómetros es bastante similar, debe recordarse que mientras los piezoeléctricos son uniaxiales, midiendo magnitudes en un único eje, los MEMS son triaxiales, por lo que resulta complicado conseguir la misma precisión de medida en los tres ejes, pudiendo dar respuesta a la notable diferencia de las señales.

3.3.2 Registrador de señales

Puesto que el registro de señales es esencialmente la medida y el almacenamiento de algún parámetro físico en un periodo de tiempo, se necesita un aparato que sea capaz de adquirir las señales proporcionadas por los sensores. Es en este punto donde se recurre a los registradores de señales, conocidos también como *data logger*, que miden señales, los transforman en datos digitales y los almacenan internamente.

Aunque existen numerosos sistemas para la adquisición de datos que funcionan de manera independiente, hoy en día los registradores de datos basados en ordenadores son los más ampliamente utilizados y, por tanto, del que se hará uso a lo largo de este trabajo. Éstos ofrecen una conectividad mejorada frente a los tradicionales y autónomos. Con un registrador de datos basado en PC, el PC es parte del sistema, así el registrador de datos puede aprovechar el rendimiento del procesador, disco duro, pantalla y bus periférico. Estas habilidades ponen en práctica varias ventajas en comparación con los métodos tradicionales de registro de datos.

Para los experimentos realizados en el presente trabajo se hará uso del MGC Plus, un registrador modular de señales de la empresa alemana HBM®. Cuenta con varios módulos de medida básicos para placas de conexión de canal múltiple ML 801B (Catálogo de especificaciones, 2015). La figura 3.15 muestra una imagen de la portada delantera del registrador con las diferentes tarjetas en funcionamiento.

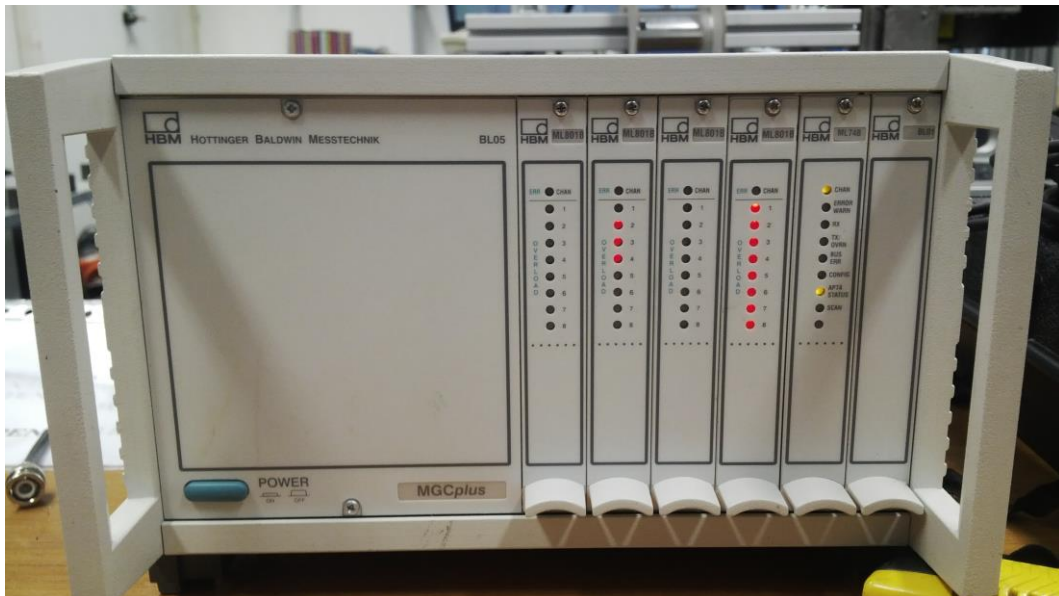


Figura 3.15. Detalle de la portada delantera del registrador MGC Plus.

Estas tarjetas poseen en la parte trasera los distintos puertos que permiten la conexión de los transductores que generan las señales. La figura 3.16 muestra la trasera del registrador con distintos transductores conectados, así como la salida USB de los datos que salen hacia el PC (cable azul).

Analizando la figura 3.16, pueden diferenciarse distintos conectores y por tanto, distintos transductores. Se observa que, puesto que los acelerómetros piezoeléctricos que se han empleado y que ya se comentaron en el apartado 3.3.1 de este trabajo son uniaxiales, utilizan cables coaxiales (cables negros) conectados mediante el ampliamente extendido conector BNC. En cambio los

acelerómetros MEMS al ser triaxiales, requieren un cable que transporte las tres señales separadas (cable gris).

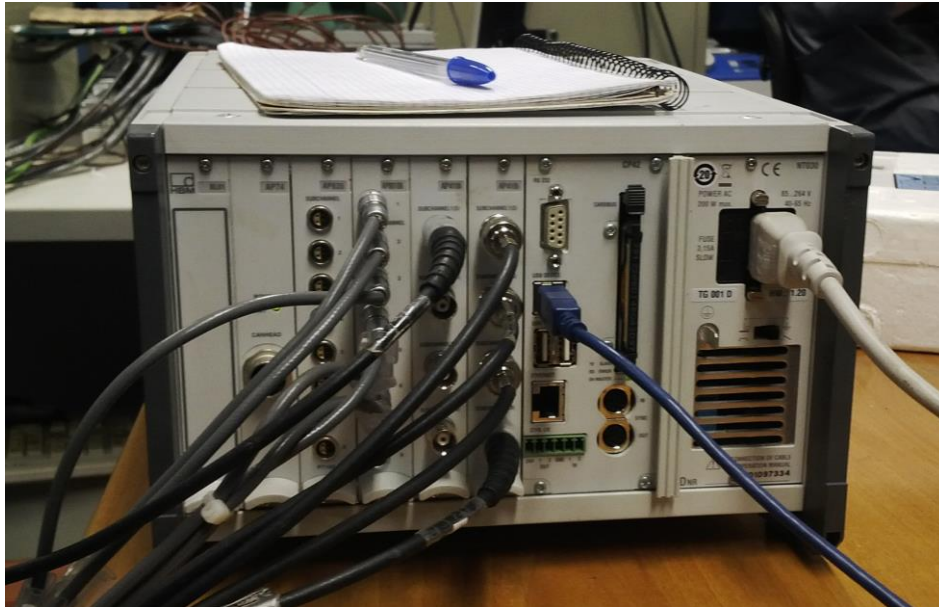


Figura 3.16. Detalle de los conectores de la portada trasera del registrador MGC Plus.

3.4 Metodología del Análisis Modal Operacional (OMA)

Tras haber mostrado las bases teóricas de los diversos análisis y los instrumentos necesarios para llevarlos a cabo, se procede a realizar un OMA sencillo, a modo de ejemplo, para mostrar de manera general el procedimiento.

La viga objeto de estudio se encuentra simplemente apoyada, con 6 metros de longitud y 23,88 kg. Se trata de un tubo rectangular de 2 milímetros de espesor, cuyo perfil se especifica en la figura 3.17. Sus medidas son: $A=10\text{cm}$, $B=3\text{cm}$ y $T=2\text{mm}$

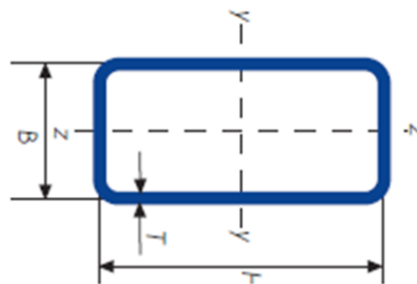


Figura 3.17. Detalle del perfil de la viga en ensayo.

Para la realización de este análisis, se emplearán los dispositivos descritos anteriormente:

En primer lugar, para medir la respuesta dinámica de la viga y tras observar detenidamente los datos ofrecidos por ambos tipos de acelerómetros, son los

de tecnología piezoeléctrica los seleccionados, por dar una señal más nítida a bajos niveles de vibración.

Se trata del modelo KS48C, ya mostrado en la figura 3.4, de la empresa MMF. Cuentan con un potente imán en la base que se adhiere de manera sólida a la superficie de la viga, evitando así posibles interferencias por movimientos relativos del acelerómetro respecto de la viga. Los acelerómetros tienen una sensibilidad nominal de 1000 mV/g, cuentan con un ruido residual inferior a 13 μ g y su frecuencia límite inferior es de 0,1 Hz.

La adquisición digital de datos se realiza con el MGCPlus de HBM, conectado con un ordenador que cuenta con software específico que permite la observación y el almacenaje en tiempo real de las señales ofrecidas por los acelerómetros. Puesto que son 5 los acelerómetros uniaxiales utilizados, se emplearán 5 canales de entrada coaxiales y uno de salida (USB) que va directo al ordenador.

3.4.1 Procedimiento experimental

Para construir una *imagen* lo más completa posible de las propiedades modales de la viga en cuestión, incluyendo las formas modales, es necesario colocar los acelerómetros de la manera más eficaz posible, generando una malla de puntos en los que se evaluarán la respuesta dinámica de la estructura. El tamaño de dicha malla dependerá del número de canales, los acelerómetros y el tiempo disponibles para el análisis.

Para la viga objeto de estudio, conociendo su longitud, y contando con 5 acelerómetros, se realizaron 5 marcas a un metro de distancia en las que debían encontrarse los acelerómetros. Las figuras 3.18 y 3.19 muestran la disposición real durante el experimento.

Para contar con alguna referencia, y tratando de ser lo más eficiente posible, se decide añadir dos puntos artificiales a los 0 metros y a los 6 metros, que representan los apoyos de la viga, en los que, si existiese algún acelerómetro, éste marcaría 0 a lo largo de todo el experimento.

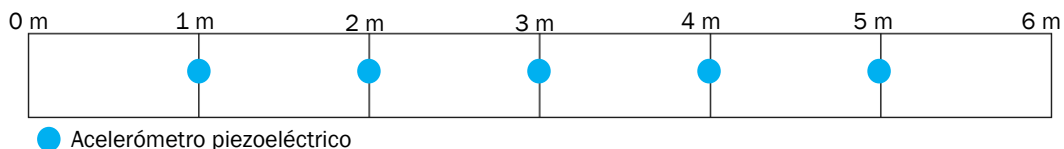


Figura 3.18. Disposición de los acelerómetros en la viga.

Antes de comenzar el proceso de adquisición de datos, debe realizarse una configuración del programa encargado de ello: catMan AP. Con los parámetros de adquisición adecuados se garantiza una mayor fiabilidad de

los datos obtenidos, ya que facilita el análisis posterior en el software de CAE. Algunas de las configuraciones adoptadas se señalan a continuación:

- Archivos generados: tipo asc (formato ASCII).
- Medición 1ª columna: tiempo.
- Frecuencia de muestreo: 200 Hz
- Número de mediciones: 3
- Tipo de ventana para canal de respuesta: exponencial.

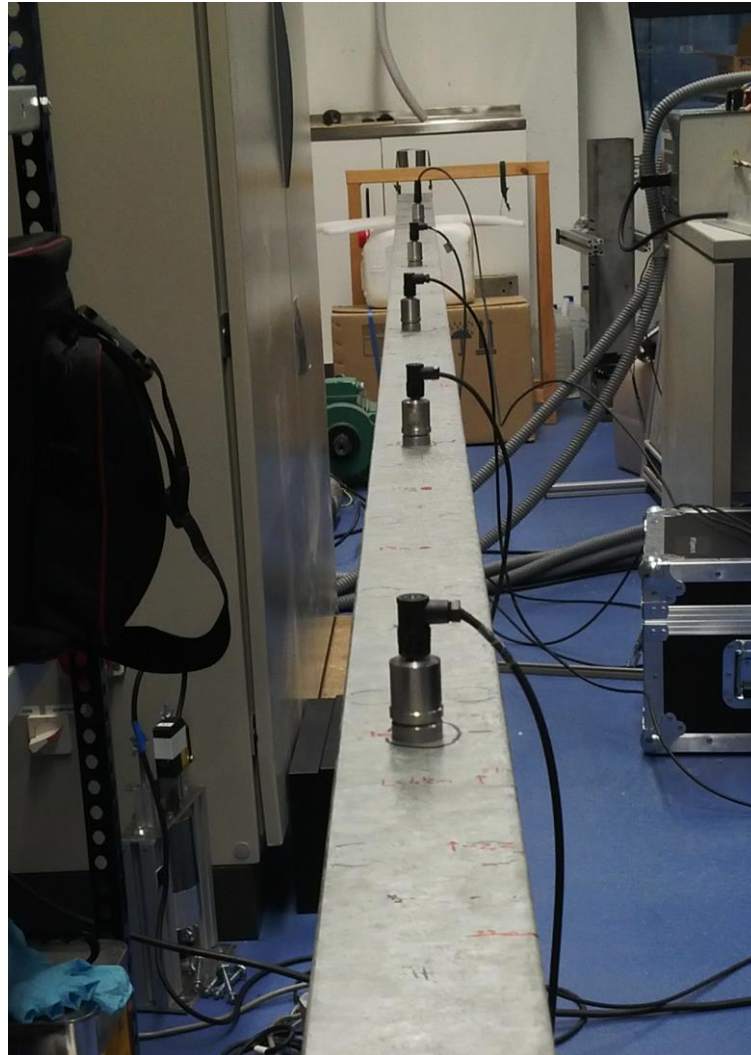


Figura 3.19. Disposición de los acelerómetros sobre la viga.

Tras comprobar que todos los sistemas funcionaban en perfectas condiciones y la configuración de los diversos parámetros, se procede a la toma de datos de la respuesta dinámica de la viga. Puesto que dicha viga se encuentra en un laboratorio, que carece de corrientes de aire, transeúntes y demás cargas externas, la viga debe excitarse de manera arbitraria, simulando las condiciones operativas de trabajo. Esta excitación fue realizada propinando suaves golpes a la viga en diversos puntos de la viga y a diversos instantes de

tiempo, tratando así de abarcar un amplio abanico de frecuencias y formas modales.

Se realizaron 3 medidas con un tiempo de medida de 5 minutos, asegurando así una cantidad de datos suficiente para un correcto post-procesado de las señales y la extracción de conclusiones consistentes.

3.4.2 Análisis de las señales

Las señales obtenidas durante el experimento deben ser procesadas por algún software específico capaz de extraer la información contenida en ellas. El programa de CAE seleccionado es el FEMtools® de la empresa Dynamic Design Solutions, ya que cuenta con un potente módulo de análisis modal.

El primer paso en el post-procesado de los datos es la apertura de los archivos ASCII y la comprobación de las señales son coherentes con lo realizado en los experimentos. Para ello pueden emplearse diversos programas, desde software específico para tratamiento de señales (Sigview®) como software genérico para datos como Excel. La siguiente gráfica (figura 3.20) muestra la señal recogida por el acelerómetro 2 (puede consultarse su situación en la figura 3.18) a lo largo de 5 minutos.

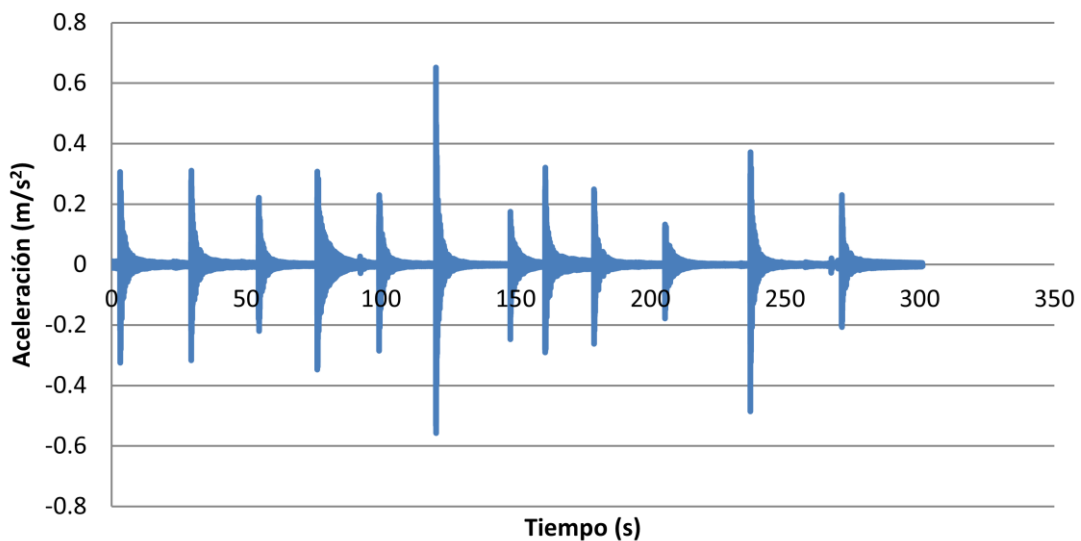


Figura 3.20. Señal registrada por el acelerómetro 2 en la viga en estudio.

En la gráfica superior se observan varios detalles que indican un correcto desarrollo del experimento. En primer lugar, la señal oscila en torno a su punto de equilibrio que se encuentra en 0. Además pueden apreciarse los picos provocados por las excitaciones imprimidas en la viga, contemplándose la capacidad de amortiguamiento de ésta tras cada golpe.

Tras comprobar las señales de los distintos acelerómetros sobre la viga, se procede a realizar el post-procesado de los datos con FEMTools. En este post-

procesado debe extraerse toda la información que la realización de un análisis modal ofrece: la caracterización modal de la estructura. Esta caracterización está representada por los siguientes parámetros modales:

- Formas modales
- Frecuencias características de cada forma modal
- Coeficiente de amortiguamiento modal de la estructura

Para comenzar este análisis de las señales, los archivos deben abrirse con el módulo de análisis modal de FEMTools. Tras realizar los oportunos cálculos, el primer paso del análisis es un sencillo repaso de la XPSD obtenida. En esta pantalla es posible recorrer la representación de la XPSD de cada canal y aplicar, de manera manual, el método de *peak-picking*.

Como puede observarse en la figura 3.21, mientras se recorre la gráfica de la XPSD de un canal, el programa muestra las distintas formas modales para cada pico, realizando así un sencillo análisis de los datos calculados, permitiendo centrar el análisis en aquellas frecuencias que realmente interesan para extraer información precisa.

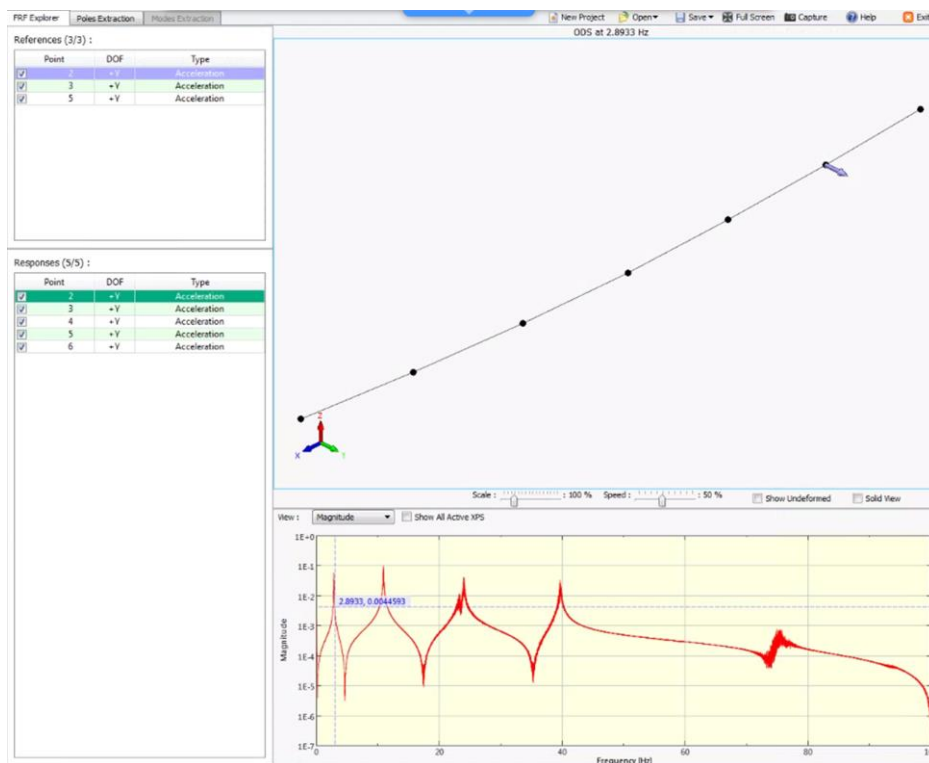


Figura 3.21. Explorador de FRF/XPSD en FEMTools.

Observando detenidamente la gráfica de la XPSD, cabe señalar la existencia de dos picos próximos entre sí en las inmediaciones de los 23Hz. Estos picos cercanos pueden ocasionar problemas en el análisis, ya que el software

puede identificar dos modos distintos. Realizando un rápido *peak-picking* y observando las formas modales de dichos picos, puede concluirse que realmente sólo existe un modo de vibración con una frecuencia aproximada de 23,9Hz. En análisis posteriores, se verá detenidamente si esta conclusión es válida. Además, los cuatro modos fundamentales de vibración se presentan en un abanico de frecuencias que no supera los 50Hz, por lo que, para agilizar el cálculo del programa, el análisis se centrará solamente en el rango de 1 a 50Hz.

A continuación, el segundo paso del análisis trata de extraer las frecuencias de cada modo de vibración, empleando el algoritmo base descrito en el epígrafe 2.4.4.2 de este trabajo, a través del cálculo de los polos del denominador de la ecuación 2.87. El programa permite, en primer lugar, elegir el orden del polinomio del denominador que debe ajustarse a la XPSD, y en segundo lugar, el rango de frecuencias para el que calculará las raíces del polinomio. Éste último ya ha sido seleccionado en el paso previo: de 1 a 50Hz. Tras realizar varias comprobaciones, se escoge como orden máximo 31 ya que, a pesar de aumentar dicho número, las frecuencias detectadas apenas cambian.

La figura 3.22 muestra la extracción de las frecuencias propias de cada modo de vibración detectado, así como el coeficiente de amortiguamiento. A continuación se presenta la tabla con los valores extraídos.

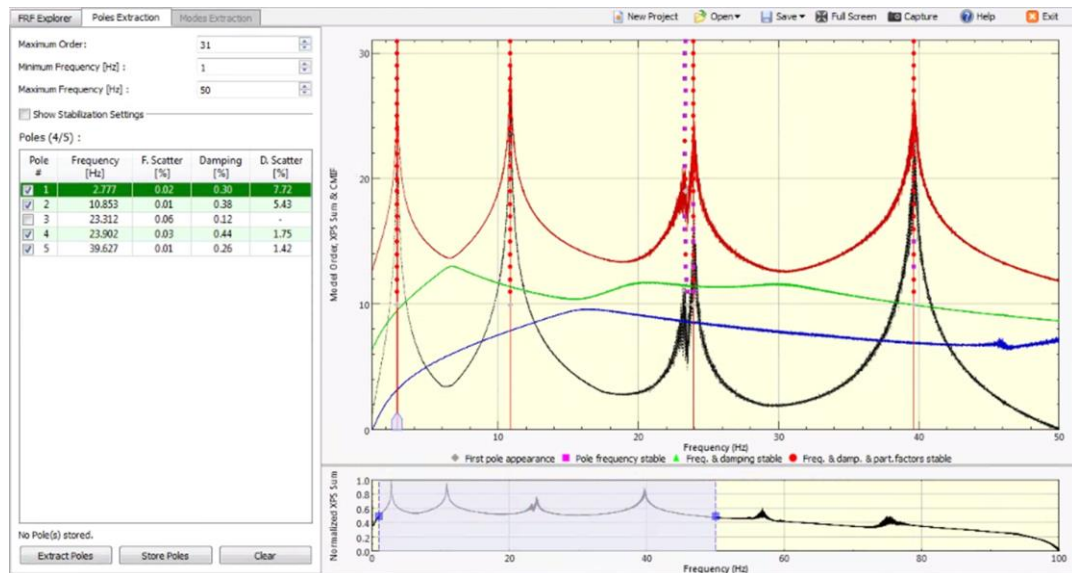


Figura 3.22. Extractor de polos a través de la XPSD sum y la CMIF en FEMTools.

En la tabla 3.1 pueden observarse las frecuencias identificadas para cada polo. En la primera columna, se indica el número de identificación del polo, en la segunda, su frecuencia característica, en la tercera la dispersión del valor calculado de la frecuencia, en la cuarta el coeficiente de amortiguamiento modal y por último la dispersión de dicho coeficiente calculado.

Polos	Frecuencia (Hz)	Dispersión F. (%)	Amortiguamiento (%)	Dispersión A. (%)
1	2,777	0,02	0,30	7,72
2	10,853	0,01	0,38	5,43
3	23,312	0,06	0,32	-
4	23,902	0,03	0,44	1,35
5	39,627	0,01	0,26	1,42

Tabla 3.1. Resumen de la extracción de las frecuencias.

En el primer paso del análisis, se detectó la existencia de dos picos muy cercanos a los 23Hz pero, tras una rápida comprobación, se concluyó que tan sólo uno de ellos era un modo de vibración. El software ha detectado ambos picos y ha trabajado con los dos, incluyéndolos en la tabla resumen de sus resultados. Es ahora tarea del ingeniero, a través de su visión crítica, (como ya se advirtió en la introducción del epígrafe 2.5 de este trabajo) tomar la decisión de no incluirla en los cálculos venideros. Por tanto, y a tenor de lo ya señalado en el paso primero del análisis se elimina el polo número 3, ya que éste no representa ningún modo de vibración.

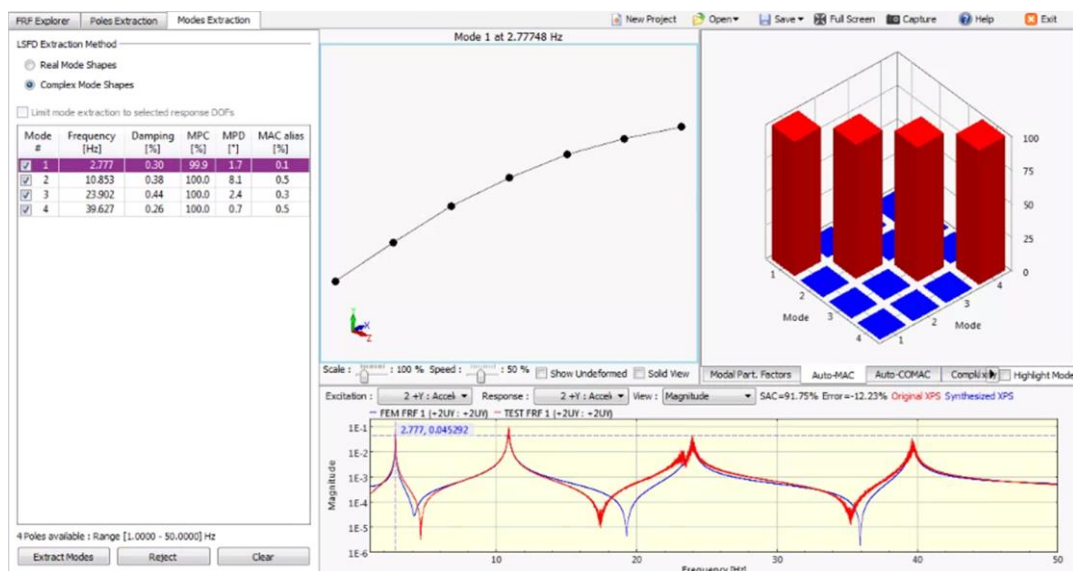


Figura 3.23. Extractor de modos de vibración en FEMTools.

Tras almacenar los polos derivados de los cálculos anteriores, se continúa con la extracción de los modos de vibración. En esta pantalla (figura 3.23) se

presenta, finalmente, todos los datos que se persiguen con un análisis modal: formas modales, frecuencias modales y coeficientes de amortiguamiento modal. Además dicha pantalla muestra una gráfica en la zona inferior que permite entender cómo trabaja el software. Contando con la representación gráfica de la XPSD, a través del orden de los polinomios establecido en el segundo apartado del análisis, se realiza el ajuste de la XPSD. Para poder extraer los indicadores de la calidad de los parámetros modales, se calculan los vectores modales de ambos modelos: el experimental (gráfica roja) y el numérico (gráfica azul) de la figura 3.24.

La tabla 3.2 resume los modos detectados y los parámetros que los definen.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,777	0,30	99,9	1,7	0,1
2	10,853	0,38	100,0	8,1	0,3
3	23,902	0,44	100,0	2,4	0,3
4	39,627	0,25	100,0	0,7	0,5

Tabla 3.2. Resumen de la extracción de los modos de vibración.

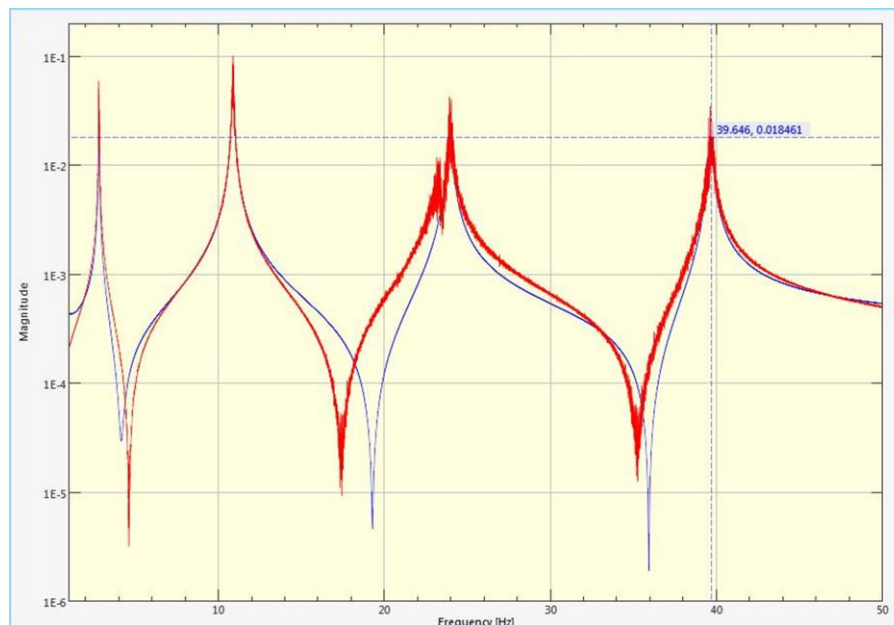


Figura 3.24. Ajuste numérico de la XPSD de un canal en FEMTools.

Se procede a analizar los datos ofrecidos por FEMTools, haciendo uso tanto de las representaciones de las formas modales, como de los indicadores de cada modo.

Si se realiza un repaso a simple vista sobre las representaciones de las distintas formas modales, puede decirse que todas ellas son razonables y

coherentes, lo que indica que desde un primer momento se ha realizado una buena selección de las frecuencias detectadas.

En cuanto a los indicadores de la calidad de los modos identificados, éstos son excelentes. El MPC es del 100% en todos los modos (exceptuando el primero que es del 99,9%), por lo que la estabilidad espacial y coherencia de las formas modales identificadas son inmejorables. Por otra parte, el MPD es relativamente bajo, puesto que el valor más alto presente en la tabla 3.2 es 8,1 (según la literatura consultada, el valor de dicho indicador nunca debe superar 18). Esto indica que las formas modales estimadas a partir de las señales se acercan en gran medida a las formas modales normales, y por lo tanto son válidas. La última columna de la tabla arroja un dato acerca de la MAC, sin embargo, no se trata de valores de la diagonal. El MAC alias, muestra el mayor valor de fuera de la diagonal en tanto por cien. Observando dichos valores (el mayor es 0,5%), indica que la correlación entre los vectores de formas modales numéricos y experimentales es bastante alta, ya que se supone que si no existen valores altos fuera de la diagonal, éstos deben encontrarse en ella. Para obtener información más precisa de la matriz, utilizamos la representación del MAC en 2D y 3D, expuestas en la figura 3.25.

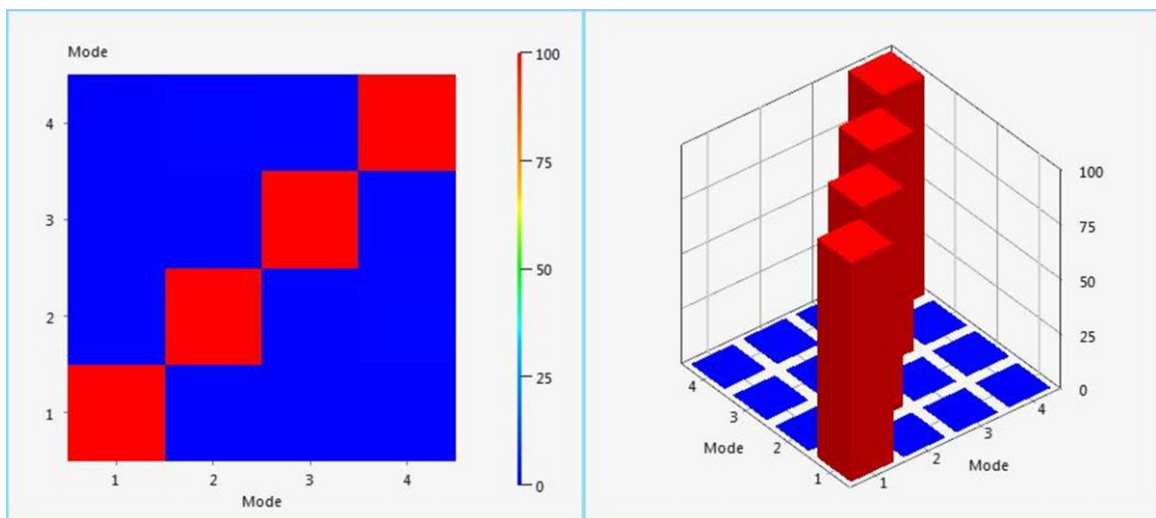


Figura 3.25. Representaciones del MAC en 2D y 3D.

Observando la figura 3.25, se confirma lo que anteriormente ya se había vaticinado, la ausencia de valores altos fuera de la diagonal implica que éstos se encuentren en la diagonal, por lo que los vectores de formas modales pueden considerarse válidos.

A tenor de lo anteriormente expuesto, el análisis del primer conjunto arroja datos consistentes, coherentes con lo que cabía esperar de un análisis modal operacional.

En el análisis del segundo conjunto de datos el primer problema se encuentra en la extracción de los polos (segundo paso del análisis modal).

Al igual que en el primer conjunto de datos, existen dos picos presentes en la gráfica de la XPSD, y por tanto de la CMIF, sin embargo, su amplitud y cercanía impiden tomar una decisión desde el inicio del análisis (figura 3.26). Además, el software no ha sido capaz de identificar como modo de vibración el quinto polo, sin embargo, éste será señalado, para posteriormente comprobar si se trata o no de un modo real de vibración.

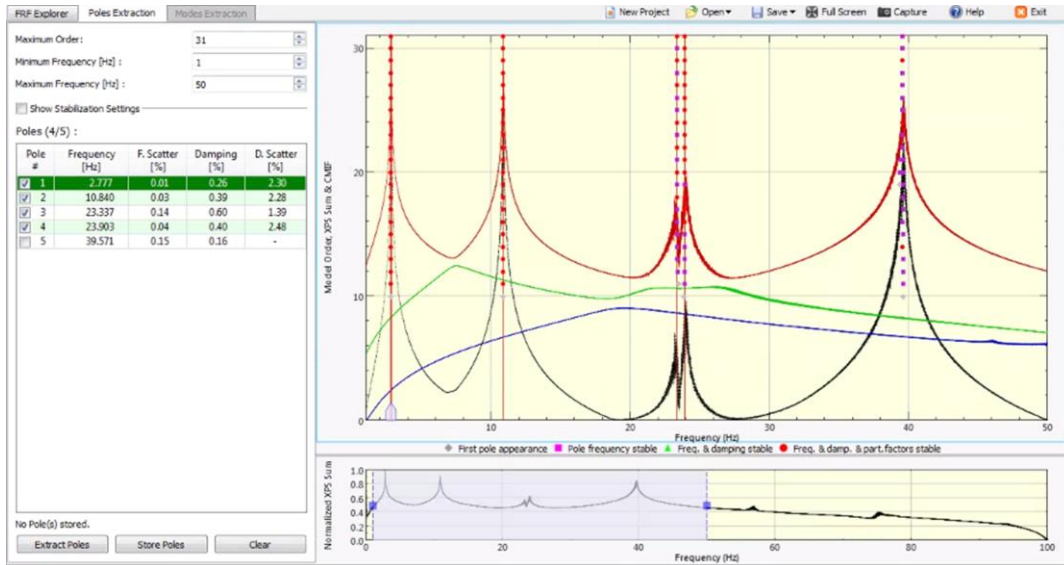


Figura 3.26. Extractor de polos a través de la CMIF en FEMTools (2º conjunto de datos).

Los problemas derivados de la imposibilidad de discernir entre los dos picos cercanos entre sí, se ven ahora amplificadas, puesto que el software es incapaz de indicar si es el tercer o el cuarto modo de vibración. En la figura 3.27 se muestra el aspecto de la tercera pantalla del análisis. Nótese que FEMTools avisa del problema en el tercer y cuarto modo de vibración señalando en rojo dichas filas. Sin embargo, ésta no es la única señal de problemas que puede observarse a primera vista. Como se ha expuesto a lo largo de este análisis, en la representación gráfica del MAC, interesa que los valores altos se encuentren en la diagonal y no fuera de ella. Si se observa la gráfica de la MAC presente en la figura 3.27, existen valores altos fuera de la diagonal. La tabla 3.3 resume los modos y sus indicadores modales.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,777	0,26	99,9	1,9	0,1
2	10,840	0,39	100,0	8,1	0,3
3	23,337	0,60	99,6	8,5	99,6
4	23,903	0,4	99,9	3,5	99,6
5	39,751	0,16	100,0	0,7	0,5

Tabla 3.3. Resumen de la extracción de los modos de vibración (2º conjunto de datos).

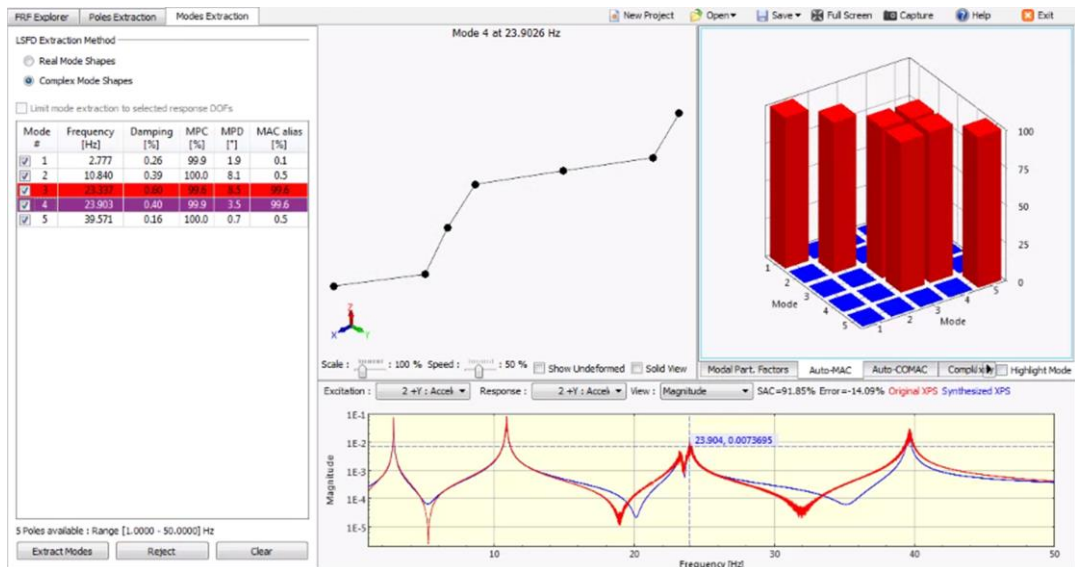


Figura 3.27. Conflicto en la identificación de los modos (2º conjunto de datos).

Debe procederse a la resolución del conflicto entre el tercer y el cuarto modo, empleando los indicadores modales. El primer indicador, el MPC, alcanza valores realmente buenos para ambos casos, sin embargo, para la frecuencia de 23,903Hz, es del 99,9%, por lo que podría decirse que para esta frecuencia, la forma modal es más coherente. Los valores del siguiente parámetro son también realmente parecidos, sin embargo, debe destacarse que el más cercano a 0 vuelve a ser el de frecuencia 23,903Hz, lo que se acerca aún más a la obtención de una solución para este conflicto. Por último, el MAC alias toma exactamente el mismo valor para ambas frecuencias, por lo que no aporta más información al respecto. A tenor de lo expuesto anteriormente, el tercer modo de vibración se da, en este caso, a 23,903Hz. Puesto que se trata de un proceso numérico, y por tanto iterativo, debe retrocederse en el análisis y modificar las selecciones iniciales. La tabla 3.4 muestra los datos definitivos tras la resolución de los problemas con la identificación de los modos de vibración.

Observando los datos ofrecidos en la tabla 3.4, puede concluirse que los modos calculados son coherentes y válidos. El MPC se encuentra en todo momento cercano al 100%, el MPD inferior a 18 y próximo a 0 y el MAC alias extremadamente bajo (el mayor valor es 0,5%).

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,777	0,26	99,9	1,9	0,1
2	10,840	0,39	100,0	8,1	0,3
-	23,337	0,60	-	-	-
3	23,903	0,4	100,0	1,7	0,4
4	39,751	0,16	100,0	0,6	0,5

Tabla 3.4. Resumen de la extracción de los modos de vibración (2º conjunto de datos).

Por último, se procede a analizar el tercer conjunto de datos experimentales. De nuevo el primer problema aparece en el segundo paso del análisis, cuando se realiza la extracción de los polos.

Como puede apreciarse en la figura 3.28, vuelve a aparecer el problema relacionado con la cercanía de los picos en torno a los 23Hz. Sin embargo, en esta ocasión, no son los únicos picos cercanos que el software ha detectado. En torno a los 40Hz, el programa no es capaz de distinguir qué pico es dominante, e incluye los dos en la extracción de polos. En este caso puede resultar sencillo decidir qué frecuencia debe incluirse y cuál no, sin embargo, esta selección se realizará en el siguiente paso, ya que se cuenta con más indicadores modales.

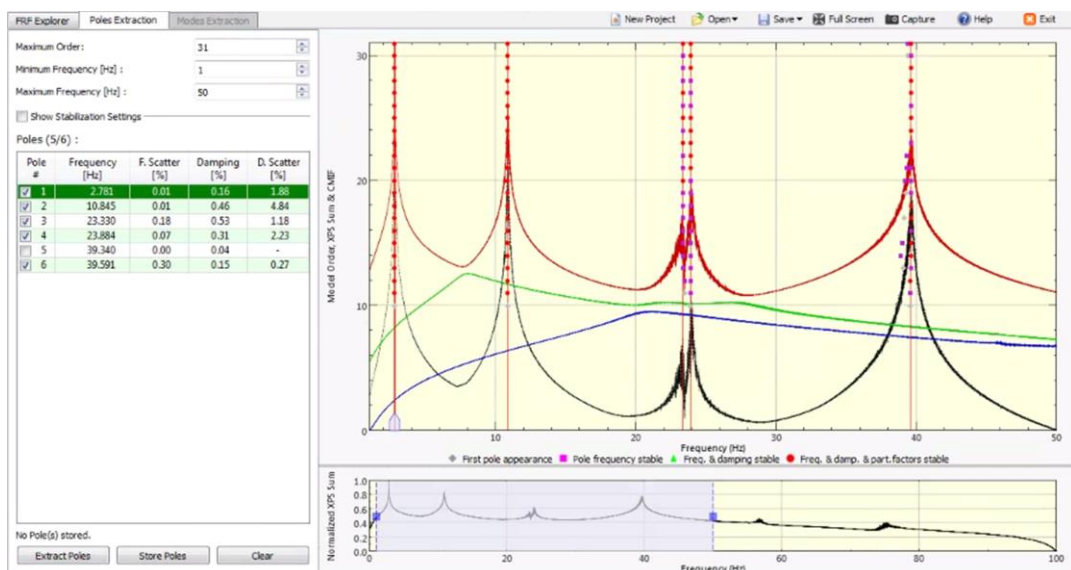


Figura 3.28. Conflicto en la identificación de los modos (3er conjunto de datos).

En el tercer paso del análisis, FEMTools vuelve a indicar la existencia de problemas en la identificación de los pares modos de vibración tres y cuatro, y cinco y seis. Además observando la representación en 3D de la matriz MAC, puede intuirse la existencia de problemas con la detección de las distintas formas modales: fuera de la diagonal existen valores altos de MAC. La figura 3.29 muestra la apariencia de la pantalla en este tercer paso del análisis.

Para solucionar los problemas señalados anteriormente, se acude a los valores de los indicadores modales. En la tabla 3.5, se muestran tanto los modos identificados como sus parámetros modales, señalando en color rojo las filas conflictivas.

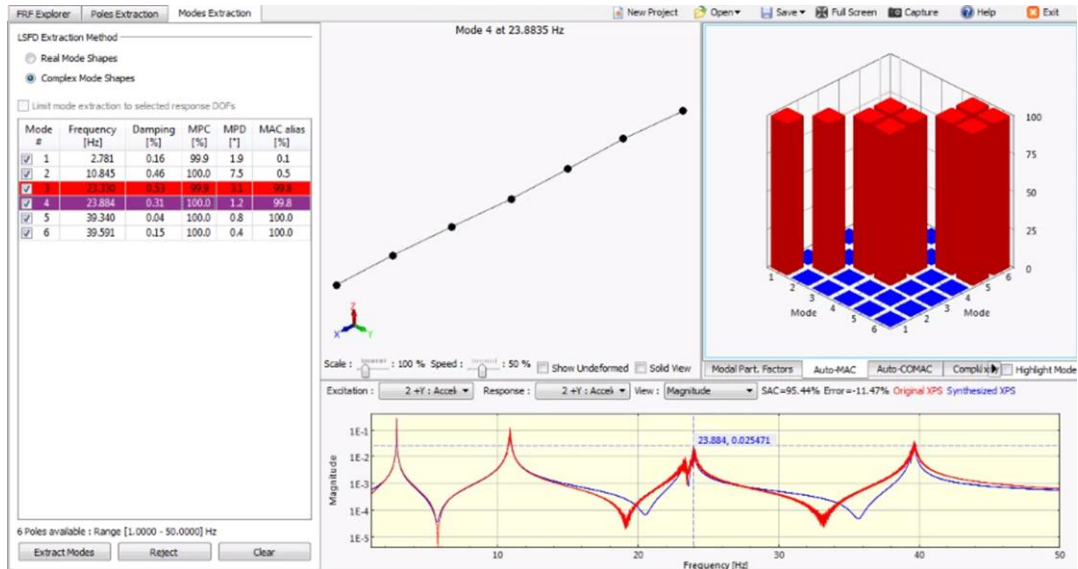


Figura 3.29. Conflicto en la detección de los modos de vibración (3er conjunto de datos).

El primer conflicto a resolver es el existente entre el tercer y cuarto modo. Los indicadores modales son realmente buenos para ambos modos, sin embargo, existen diferencias que ayudan a tomar una decisión consistente. En primer lugar, el MPC es del 99,9% para la frecuencia de 23,33Hz, y del 100% para la de 23,884Hz. Puesto que esta diferencia es insignificante, debe observarse el siguiente indicador, el MPD. Para ambas frecuencias, éste tiene un valor bastante cercano a 0, sin embargo, el de 23,884Hz es mucho menor. Por último, el MAC alias es igual para ambos, por lo que no resulta determinante. La solución para este primer conflicto es que la frecuencia seleccionada, a tenor de lo expuesto anteriormente, es la de 23,884Hz.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,781	0,16	99,9	1,9	0,1
2	10,845	0,46	100,0	7,5	0,5
3	23,330	0,53	99,9	3,1	99,8
4	23,884	0,31	100,0	1,2	99,8
5	39,340	0,04	100,0	0,8	100
6	39,591	0,15	100,0	0,4	100

Tabla 3.5. Resumen de la extracción de los modos de vibración (3er conjunto de datos).

El segundo problema reside en la imposibilidad de diferenciar entre el quinto y el sexto modo. El MPC y el MAC alias son del 100% para ambas frecuencias, lo que imposibilita tomar una primera decisión al respecto, teniendo que acudir necesariamente al MPD. Este indicador es realmente bajo y próximo a 0, sin embargo, es la frecuencia de 39,591Hz la que presenta menor MPD (0,4). La solución de este segundo conflicto pasa por seleccionar la frecuencia de 39,591Hz. Al tratarse de un cálculo numérico, se deseleccionan las

frecuencias desechadas y se repite la extracción de los modos. La tabla 3.6 sintetiza los resultados obtenidos de este análisis del tercer conjunto de señales.

Los datos contenidos en la tabla 3.6 son bastante coherentes, y resultan similares a los obtenidos con los dos conjuntos anteriores de señales.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,781	0,16	99,9	1,9	0,1
2	10,845	0,46	100,0	7,9	0,5
-	23,330	0,53	-	-	-
3	23,884	0,31	100,0	0,8	0,4
-	39,340	0,04	-	-	-
4	39,591	0,15	100,0	0,4	0,3

Tabla 3.6. Resultados finales de la extracción de los modos (3er conjunto de datos).

A continuación se facilita una tabla que recopila los resultados obtenidos tras los análisis realizados a los tres conjuntos de datos.

	Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1er Conjunto	1	2,777	0,30	99,9	1,7	0,1
	2	10,853	0,38	100,0	8,1	0,3
	3	23,902	0,44	100,0	2,4	0,3
	4	39,627	0,25	100,0	0,7	0,5
2º Conjunto	1	2,777	0,26	99,9	1,9	0,1
	2	10,840	0,39	100,0	8,1	0,3
	3	23,903	0,4	100,0	1,7	0,4
	4	39,751	0,16	100,0	0,6	0,5
3er Conjunto	1	2,781	0,16	99,9	1,9	0,1
	2	10,845	0,46	100,0	7,9	0,5
	3	23,884	0,31	100,0	0,8	0,4
	4	39,591	0,15	100,0	0,4	0,3

Tabla 3.7. Resultados finales de la extracción de los modos.

Por último debe comprobarse que las formas modales detectadas en cada conjunto de datos coinciden, y se calculan las frecuencias y amortiguamientos como la media de los resultados obtenidos. La tabla 3.8 muestra las características modales definitivas obtenidas en el análisis modal.

Además, FEMTools muestra las formas modales identificadas, que aparecen recopiladas en la figura 3.30, con sus frecuencias propias.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
1	2,778	0,24
2	10,846	0,41
3	23,896	0,38
4	39,656	0,19

Tabla 3.8. Resultados definitivos de la extracción de los modos con FEMTools.

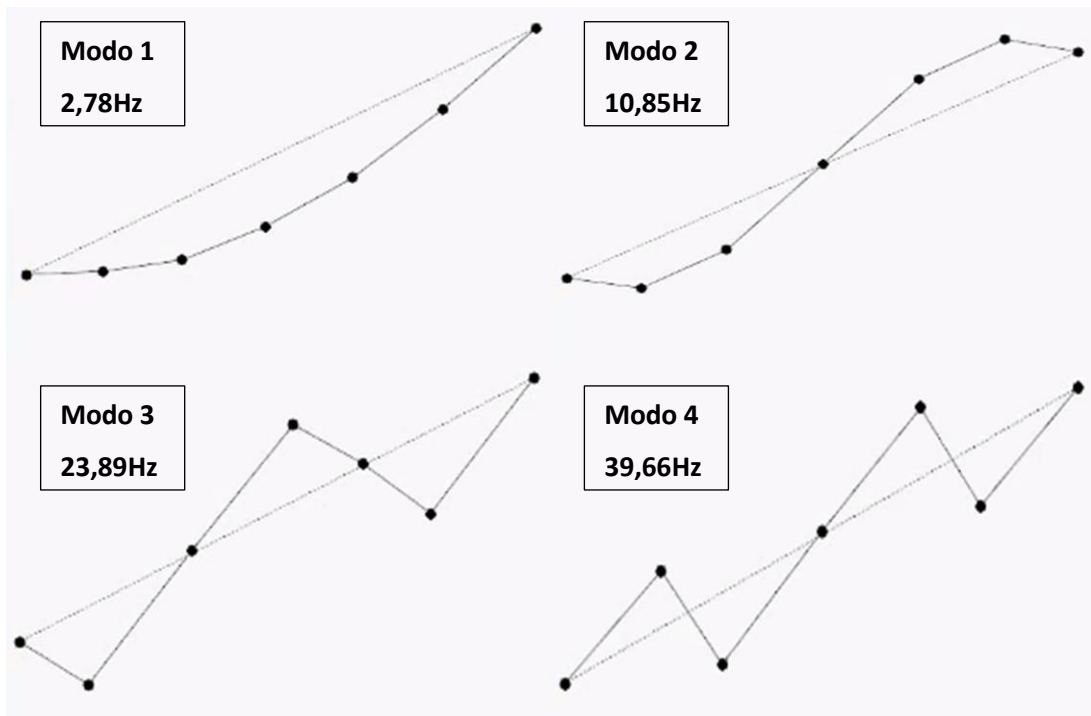


Figura 3.30. Formas modales identificadas por FEMTools.

4. Aplicación: Comparación de los amortiguamientos modales

4.1 Introducción

El aumento demográfico de las zonas residenciales en las ciudades, está incentivando la búsqueda de nuevas conexiones peatonales entre ellos. Estas nuevas vías, en ocasiones, deben atravesar accidentes geográficos naturales o artificiales, dando lugar a puentes peatonales que cruzan ríos y carreteras. Es por ello que la proliferación de estas pasarelas esté motivando la aparición de nuevos objetivos en el estudio de las características modales de las estructuras.

Las pasarelas peatonales actuales suelen contar con diseños extremadamente esbeltos, siendo habitualmente susceptibles a las vibraciones inducidas por el paso de los peatones y las cargas ambientales. Sus bajos factores de amortiguamiento han provocado en las últimas décadas numerosos problemas vibratorios en servicio, como es el caso de la popularmente conocida “Pasarela del Milenio” de Londres. Al tratarse de puentes cuyas cargas son ostensiblemente menores que los de tránsito de vehículos, las normativas son menos estrictas, dándose diseños con una estética impactante.

En una pasarela peatonal, la aparición de vibraciones debe estudiarse en detalle, ya que los usuarios cuentan con una gran sensibilidad. Aunque ni las deformaciones alcanzadas ni las vibraciones que se produzcan sean estructuralmente peligrosas, éstas pueden transmitir sensación de inseguridad al peatón, resultando incómodas en servicio.

Por ello, buscar soluciones al bajo nivel de amortiguamiento de las pasarelas peatonales se ha convertido en un aspecto importante a tratar en el diseño estructural, procurando mejorar la respuesta dinámica de la estructura sin comprometer su estética. El análisis modal de los distintos métodos puede ser un vehículo para comprobar la eficacia de las diversas soluciones posibles.

El análisis modal operacional (OMA) que se muestra a lo largo de este capítulo, pretende evaluar la eficacia de uno de los métodos para mejorar el amortiguamiento de una pasarela: la imprimación de varias capas de caucho reciclado a modo de pavimento sobre la plataforma estructural. Este método se ha visto aplicado en una de las pasarelas de última construcción de Valladolid, la “Pasarela Pedro Gómez Bosque”, que une los barrios de Arturo Eyrías y La Rubia. Como puede observarse en la figura 4.1, dicha pasarela cuenta con un pavimento que difiere de los empleados habitualmente (adoquines y asfaltos).



Figura 4.1. Imágenes reales de la “Pasarela Pedro Gómez Bosque”, con pavimento de caucho.

4.2 Estructuras y adquisición de datos

Como se ha indicado anteriormente, el objetivo de este OMA es evaluar la capacidad de aumentar el amortiguamiento de una pasarela peatonal, introduciendo varias capas de caucho reciclado sobre la plataforma estructural.

La pasarela anteriormente señalada cuenta con una estructura de banda tesa. Esta tipología de construcción parte del concepto de un elemento flexible simplemente suspendido en forma de catenaria. La imagen que aparece en la figura 4.2 muestra la forma de la pasarela con las cargas permanentes.

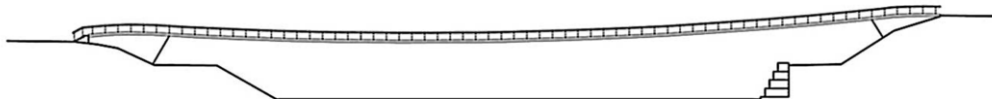


Figura 4.2. Catenaria descrita por la “Pasarela Pedro Gómez Bosque”.

Puesto que dicha pasarela se encuentra acabada y no puede compararse la estructura con y sin caucho, se propone caracterizar dos vigas de iguales dimensiones y mismos perfiles, ya que el concepto de banda tesa es también aplicable a una barra de acero simplemente suspendida. Se trata del mismo perfil empleado en el epígrafe 3.4.1 de este trabajo, pero con una salvedad: la masa. Se sabe que si ambas estructuras cuentan con el mismo perfil y la

misma masa, sus frecuencias y formas modales deben ser iguales, por lo que, para la comparación de ambas vigas, es imprescindible que las masas sean muy similares. Puesto que una de ellas contará con dos capas de goma, la solución para que las características modales sean iguales, pasa por añadir una carga distribuida a lo largo de la viga sin caucho, mediante la colocación de pequeños cilindros uniformemente distribuidos. La tabla 4.1 presenta las diversas masas de las vigas.

Barra	Masa Inicial	Caucho (2 capas)	Masa Final
Con caucho	23,88 kg	10,4 kg	34,28 kg

Barra	Masa Inicial	Masa Unidad	Nº Masas	Masa Final
Sin caucho	23,88 kg	0,250 kg	42	34,38 kg

Tabla 4.1. Comparación de las barras de acero y sus masas.

La imprimación de las capas de caucho, aumentaron la masa de la viga en 10,4 kg, por lo que se colocaron 42 cilindros de 0,250 kg cada uno sobre la viga sin caucho para conseguir una masa similar. La creación de la viga con caucho se muestra en las imágenes de la figura 4.3.



Figura 4.3. Creación de la capa de caucho sobre la viga.

La malla creada para la toma de datos consistió en 5 puntos con 5 acelerómetros. Puesto que las vigas son de 6 metros, se colocó un

acelerómetro por cada metro, cuya disposición aparece esquematizada en la figura 4.4. Se escogieron acelerómetros piezoeléctricos por contar estos con mejor respuesta con bajas oscilaciones que los de tecnología MEMS. Además, para caracterizar dichas vigas, sólo interesan las vibraciones en dirección vertical, por lo que contar con acelerómetros triaxiales, carece de utilidad.

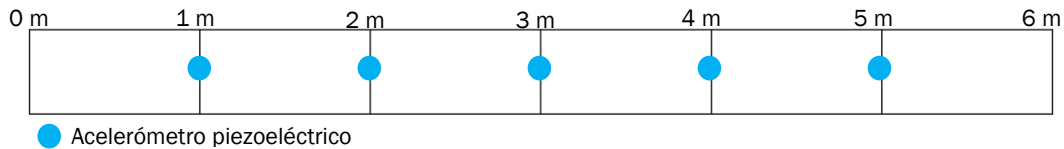


Figura 4.4. Disposición de los acelerómetros en las vigas.

Tratando de aprovechar, en la medida de lo posible, el material disponible, la colocación de acelerómetros en los extremos de las vigas no se llevó a cabo. Virtualmente, dichos puntos deben permanecer inmóviles bajo cualquier tipo de excitación, pues son los apoyos de la estructura. Para contar con estas referencias, se añadieron a los datos obtenidos durante la experimentación, dos columnas de ceros que simulan las señales registradas por los acelerómetros en los apoyos. Para evitar problemas de aliasing, se realizó un filtrado de la señal mediante un filtro pasa bajos con una frecuencia de consigna de 80Hz. Los datos iniciales obtenidos durante el experimento fueron muestreados a 200Hz. Cada experimento se realizó tres veces, obteniendo, en total seis conjuntos de datos, con un tiempo de muestreo cada uno de 5 minutos. Las imágenes mostradas en la figura 4.5 ilustran las disposiciones reales de los acelerómetros y las masas sobre la viga.

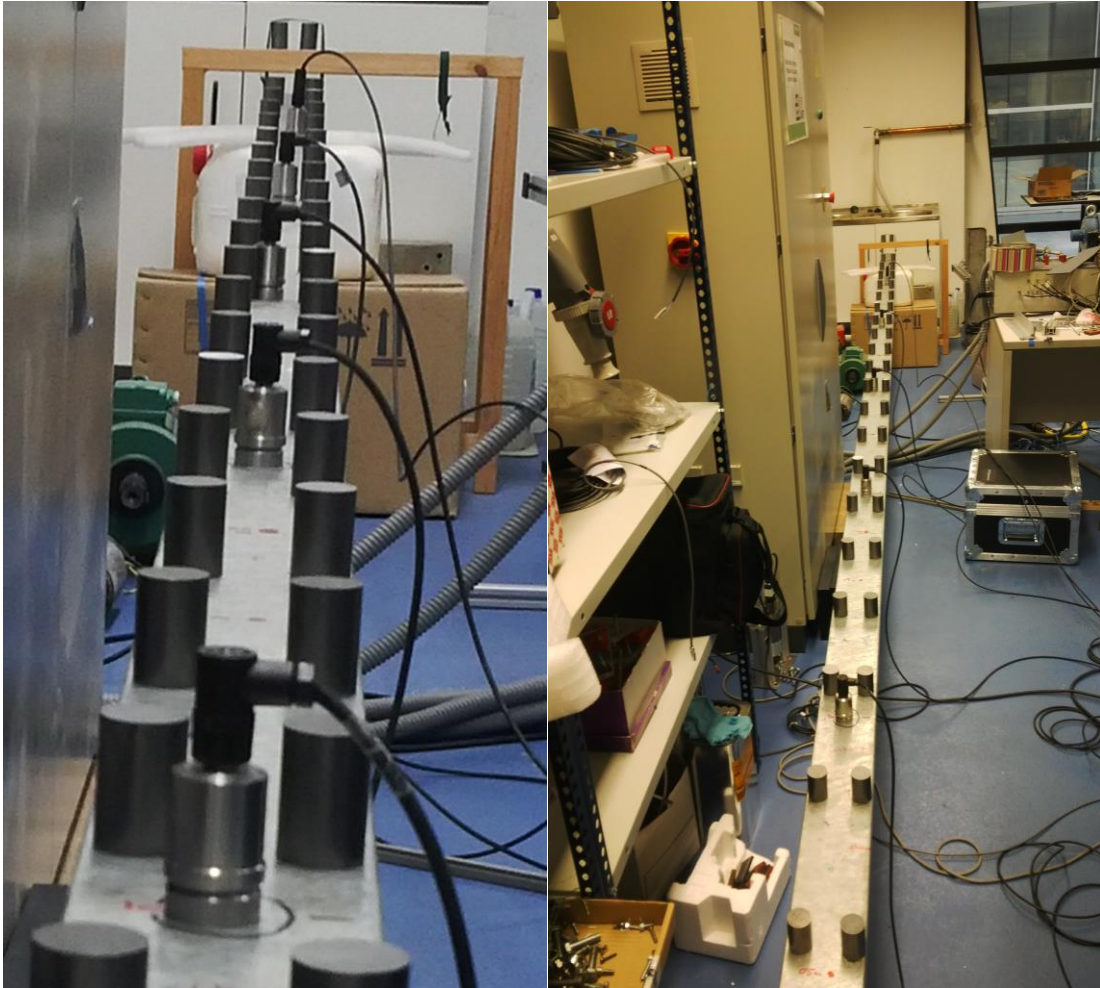


Figura 4.5. Imágenes reales de los ensayos sobre la viga con masas.

En cuanto a la viga con las capas de caucho, el procedimiento fue similar, empleando 5 acelerómetros, distribuidos a lo largo de la estructura. Las imágenes mostradas en la figura 4.6, ilustran los ensayos realizados sobre la viga con caucho. En la tercera imagen, al realizarse sobre uno de los extremos de la viga, puede observarse la catenaria de a viga al encontrarse simplemente suspendida.

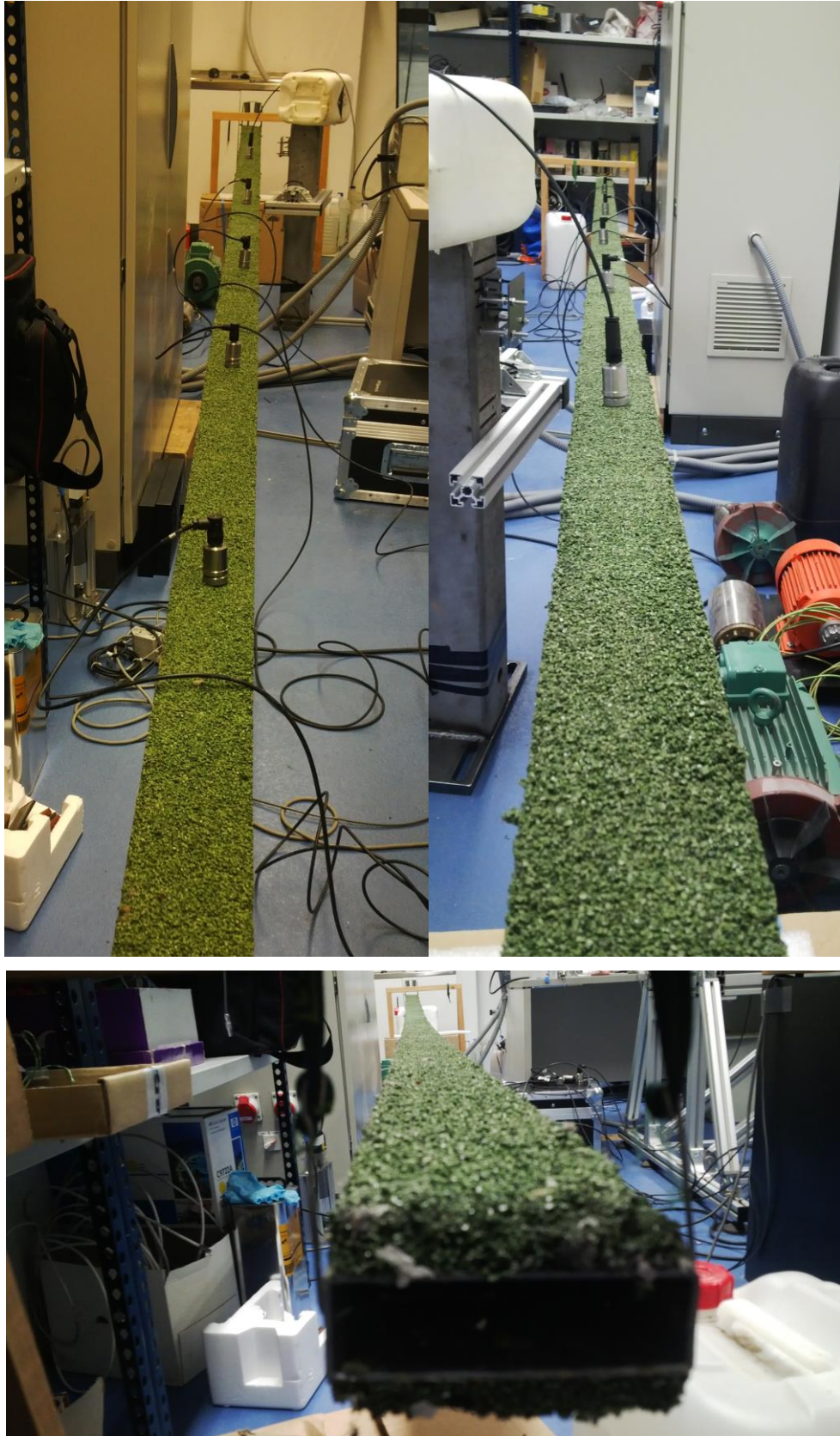


Figura 4.6. Imágenes reales de los ensayos sobre la viga con caucho.

4.3 Análisis de las señales

Tras recopilar las señales registradas por los acelerómetros en las estructuras, se procede a realizar el post-procesado de los datos mediante el software de CAE FEMTools. Se comenzará analizando los tres conjuntos de datos de la viga con masas puntuales distribuidas, para posteriormente procesar las señales de la viga con las capas de caucho. Por último, en el epígrafe 4.4, se compararán los factores de amortiguamiento modales mediante dos métodos: por un lado los ofrecidos por el software FEMTools y por otro, mediante un script realizado en Matlab.

4.3.1 Viga con masas puntuales distribuidas

El primer paso del análisis consiste en la comprobación de que las señales medidas son coherentes, leyéndolas bien con un software específico, bien mediante un programa genérico de procesamiento de datos como Excel. Observando la gráfica de la figura 4.7, existen varios detalles que indican que se trata de una señal temporal típica: por un lado las oscilaciones se encuentran en torno a cero, lo que denota un correcto funcionamiento del acelerómetro, y por otro, los decrementos logarítmicos dan una idea de la capacidad de amortiguación de la estructura.

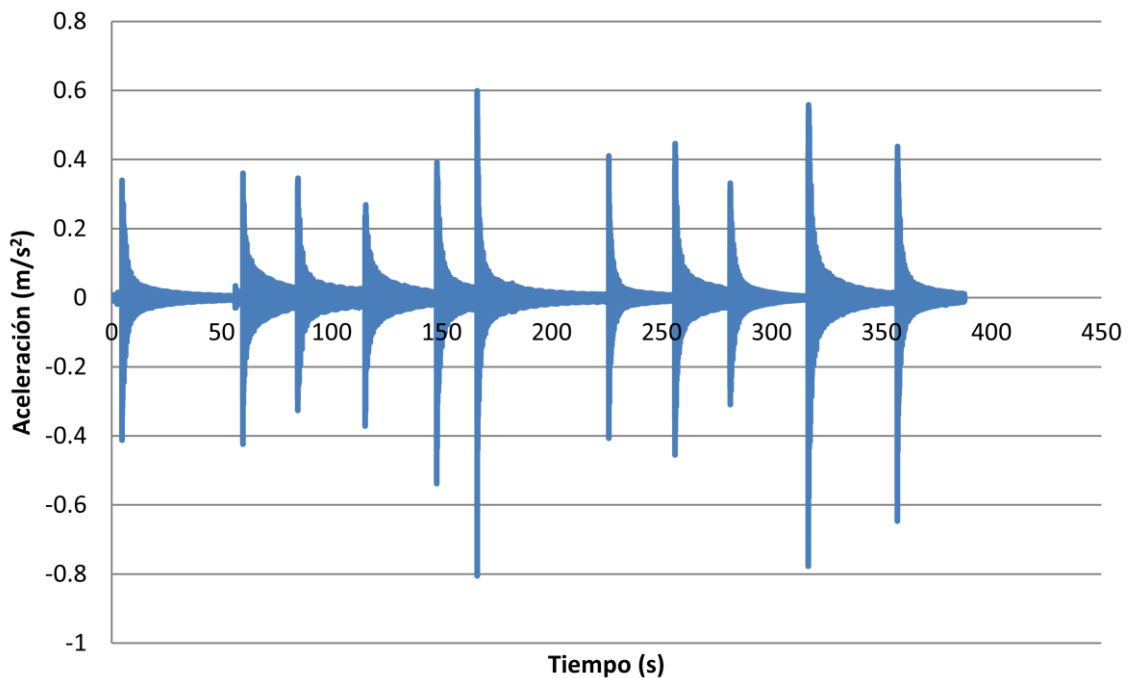


Figura 4.7. Representación gráfica de la señal medida por un acelerómetro.

Pueden observarse diversos detalles ya señalados en el epígrafe 3.4.2 de este mismo trabajo que indican un correcto registro de las señales. Tras la comprobación de los datos ofrecidos por los distintos acelerómetros, se procede a realizar el análisis modal mediante el software FEMTools.

Tras los oportunos cálculos internos del programa, FEMTools ofrece la gráfica de la XPSD, realizándose un pre-análisis de los resultados. En la figura 4.8 se muestra el peak-picking inicial. La XPSD contiene en el intervalo de 0 a 50Hz (en el que previsiblemente se encontrarán los modos de vibración de mayor relevancia) cuatro picos que han sido seleccionados: 2,27Hz, 9,18Hz, 19,62Hz y 33,84Hz. Sin embargo esta elección no es, en absoluto definitiva, ya que deben tenerse en cuenta los siguientes indicadores arrojados por el software.

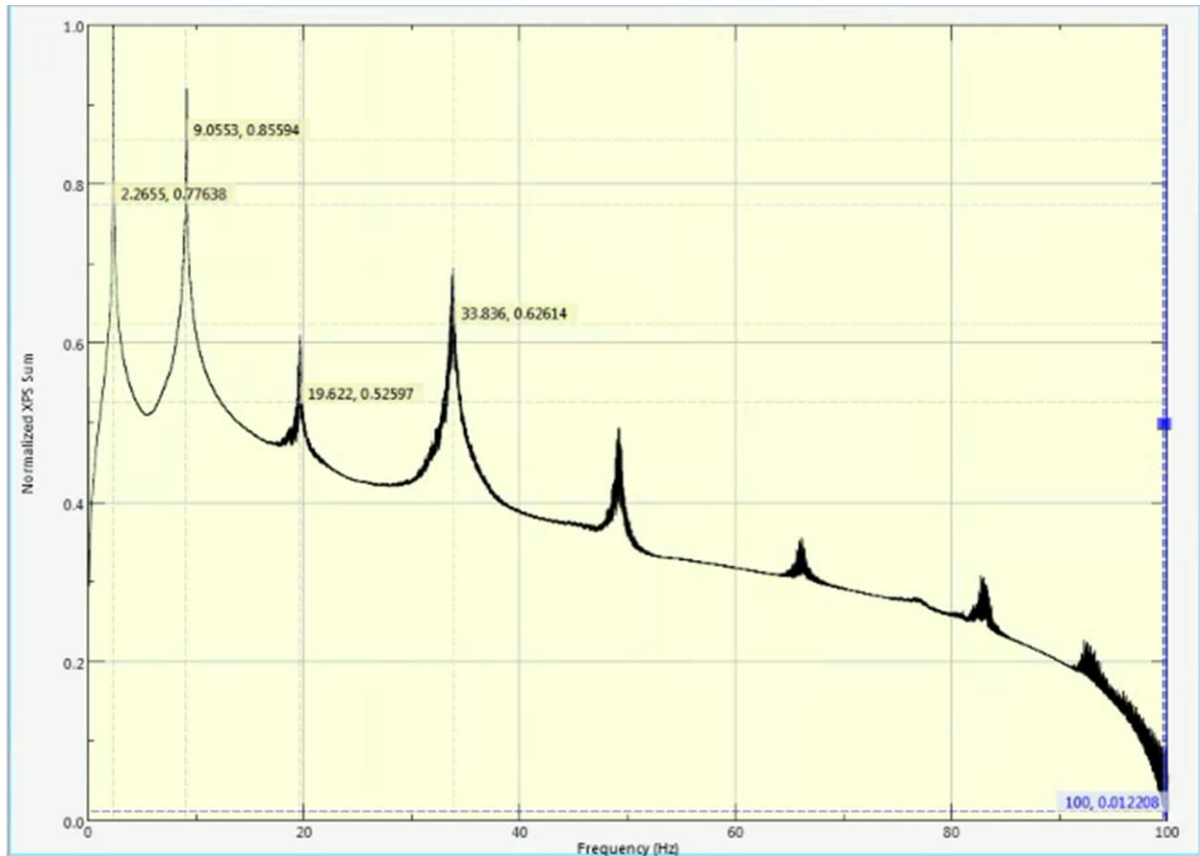


Figura 4.8. Exploración de la gráfica de la XPSD en FEMTools (1^{er} Conjunto de datos).

La extracción de polos a través de la CMIF ofrece datos realmente confusos. Al tratarse de un análisis que requiere mayor precisión de los resultados a obtener (va a realizarse una comparativa de parámetros modales), el orden del polinomio escogido que ajustará las curvas ha sido de 50. Esta elección ha propiciado que el software identifique numerosos modos de vibración que difieren de lo anteriormente indicado. Algunos de los polos mostrados en la figura 4.9 no son estables y, por tanto, no serán marcados para continuar con el análisis. De hecho, algunos de esos polos pertenecen a los mismos modos de vibración, apareciendo por duplicado en la tabla, puesto que el algoritmo detecta dos picos muy próximos y no es capaz de distinguirlos.

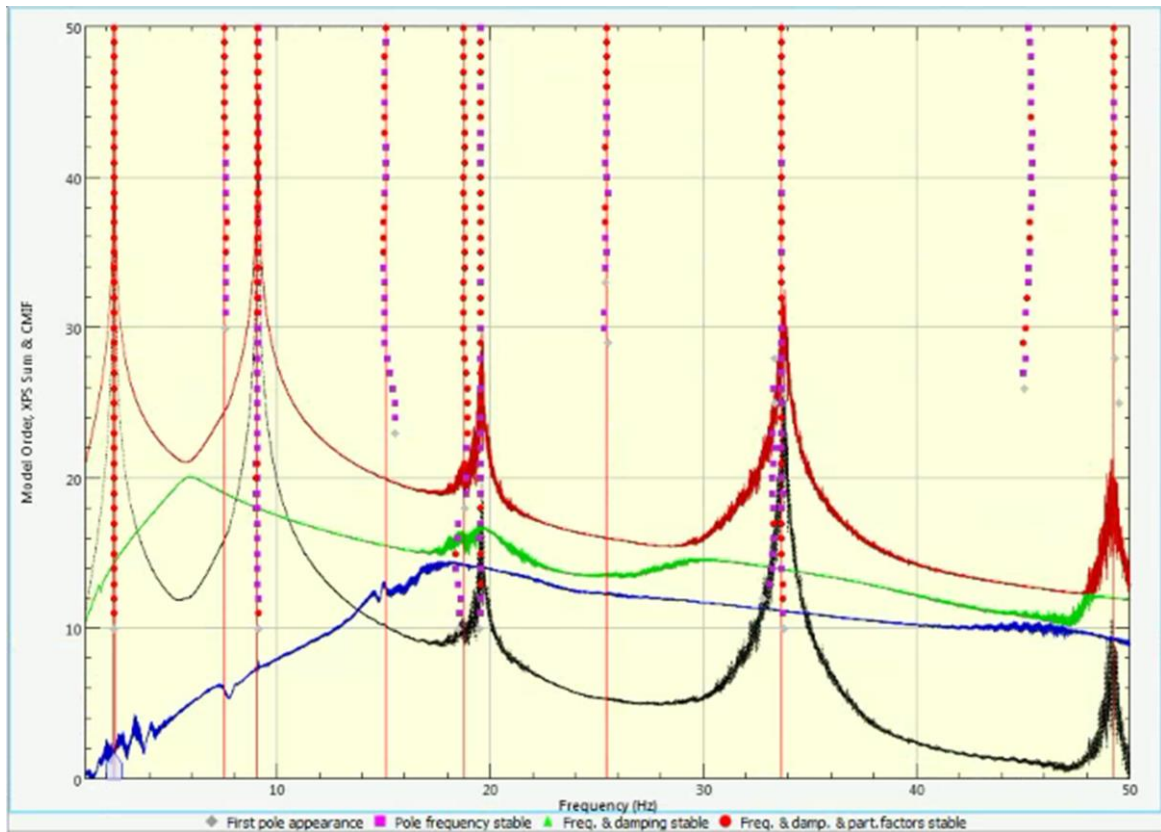


Figura 4.9. Extracción de los polos a través de la CMIF. (1er Conjunto de datos).

Para concluir con el análisis de este primer conjunto de datos, deben seleccionarse los modos de vibración reales, ya que resulta complicado identificarlos aplicando únicamente el diagrama de estabilización de la figura 4.9. Por ello, el ingeniero debe acudir a los indicadores de calidad de los parámetros modales calculados. La tabla 4.2 muestra los posibles modos extraídos a través de la CMIF, sin embargo, el software advierte de los problemas derivados de la identificación de algunos cercanos entre sí. En dicha tabla se señalan los problemas en la identificación de los modos de vibración mediante colores.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,327	0,14	99,9	2,0	0,5
2	7,508	3,89	100,0	37,2	100,0
3	9,040	0,83	100,0	4,7	100,0
4	15,073	1,83	98,8	10,1	72,6
5	19,518	2,74	93,8	6,2	42,4
6	25,440	1,46	88,3	25,4	71,0
7	33,636	0,40	100,0	5,0	28,8
8	49,206	0,14	99,9	2,6	3,5

Tabla 4.2. Resumen de la extracción de los modos de vibración (1er Conjunto de datos).

Puede observarse que han sido identificados 8 modos de vibración, sin embargo, el peak-picking realizado inicialmente indicaba que tan sólo 4 podrían ser modos reales de vibración. Antes de analizar los parámetros modales, la representación de la MAC tanto en 2D como en 3D ofrece una representación de ese indicador. La figura 4.10 ilustra dichas gráficas. Nótese que hay diversos colores que identifican los valores existentes fuera de la diagonal, lo que puede dar idea de la falta de correlación entre los resultados experimentales y el ajuste numérico realizado.

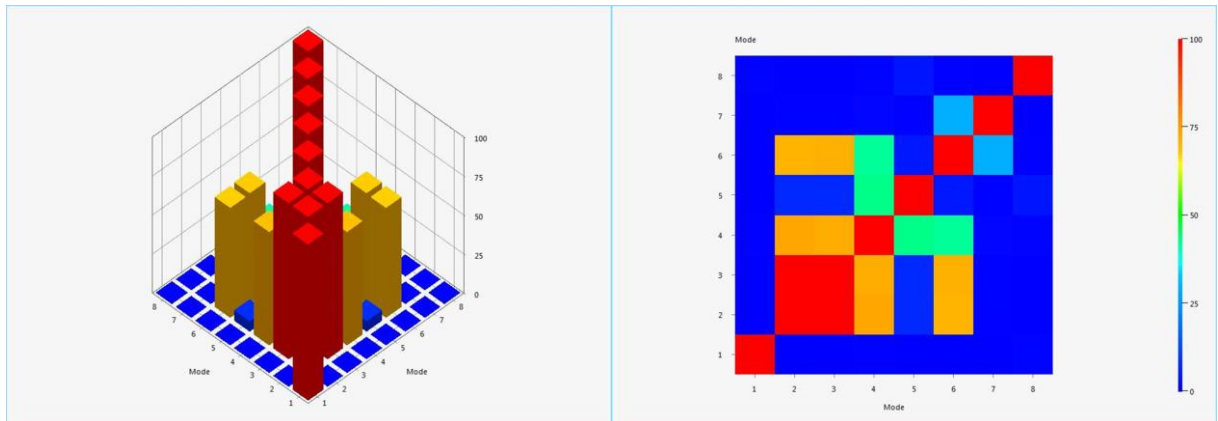


Figura 4.10. Representación en 3D y 2D del MAC inicial. (1^{er} Conjunto de datos).

Las representaciones muestran que fuera de la diagonal existen valores altos de la MAC, por lo que la correlación de los vectores de formas modales para algunos modos de vibración es baja, y cuenta con interferencia de otras formas modales. Por ello, deben analizarse los valores recopilados en la tabla 4.2. El primer problema reside en la imposibilidad de distinguir el segundo modo de vibración, existiendo valores del MAC de más de un 70% e interferencias con el tercero, cuarto y sexto. El MPC posee valores muy altos, y no permite seleccionar una de las frecuencias, mientras que el MPD difiere en gran medida entre las distintas frecuencias. Puesto que dicho indicador debe ser lo más próximo a cero posible, es la frecuencia de 9,042 la que menor MPD posee (4,2). Retomando el peak-picking inicial, ya se había observado un pico en las inmediaciones de los 9Hz, resulta altamente probable que dicho modo identificado sea el correcto y no los otros. Por tanto, para el segundo modo, la frecuencia seleccionada es 9,042Hz. La eliminación de la frecuencia que mayor interferencia presentaba como modo de vibración, modifica el ajuste numérico realizado, resultando más fácil la solución de los distintos problemas.

Las frecuencias seleccionadas en amarillo en la tabla 4.2, no pueden representar a ningún modo de vibración, ya que la información obtenida del peak-picking inicial mostraba que el tercer modo de vibración se encontraba en las inmediaciones de los 19Hz. Estas frecuencias identificadas, aparecen

por el alto grado del polinomio de ajuste, que identifica máximos locales de la XPSD que llevan a error la extracción de los modos de vibración.

Tras la eliminación como candidatos a modos de vibración de las frecuencias de 15,073Hz y 25,440Hz, la apariencia del MAC resulta mucho más convincente. Por último, el software identifica un quinto modo en la frecuencia de 49,206Hz. Puesto que observando la XPSD experimental se trata de un pico disperso, poco claro y en las inmediaciones de los 50Hz (límite superior seleccionado para los cálculos), decide eliminarse del análisis. Los resultados de este primer análisis modal se recogen en la tabla 4.3, y la apariencia del MAC final en la figura 4.11.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,327	0,14	99,9	2,0	0,1
-	7,508	3,89	-	-	-
2	9,040	0,83	100,0	4,2	3,2
-	15,073	1,83	-	-	-
3	19,518	0,22	99,6	6,2	0,4
-	25,440	1,46	-	-	-
4	33,636	0,40	100,0	5,5	0,4
-	49,206	0,14	-	-	-

Tabla 4.3. Resultados finales del análisis modal (1^{er} Conjunto de datos).

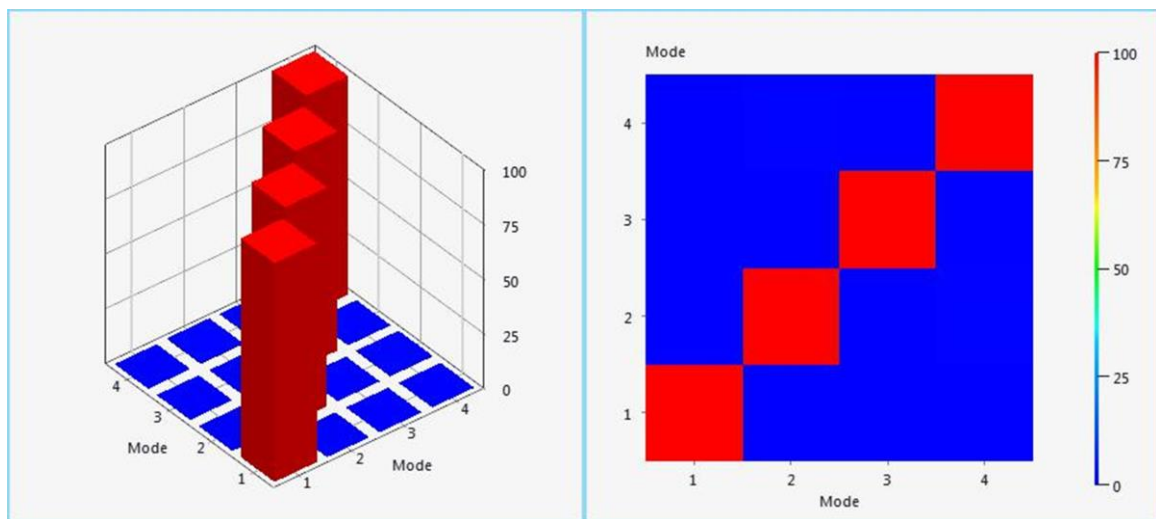


Figura 4.11. Representaciones del MAC en 3D y 2D final. (1^{er} Conjunto de datos).

Se procede por tanto a la realización del análisis del segundo conjunto de datos. De nuevo, antes de realizar el análisis numérico, conviene realizar un peak-picking sobre la XPSD experimental para contar con las inmediaciones de las frecuencias más probables de resultar modos de vibración. En la figura 4.12 se realiza dicho peak-picking para este segundo conjunto de datos. Las frecuencias seleccionadas no difieren en gran medida de las seleccionadas en el primer conjunto: 2,27Hz, 9,06Hz, 19,62Hz y 33,96Hz.

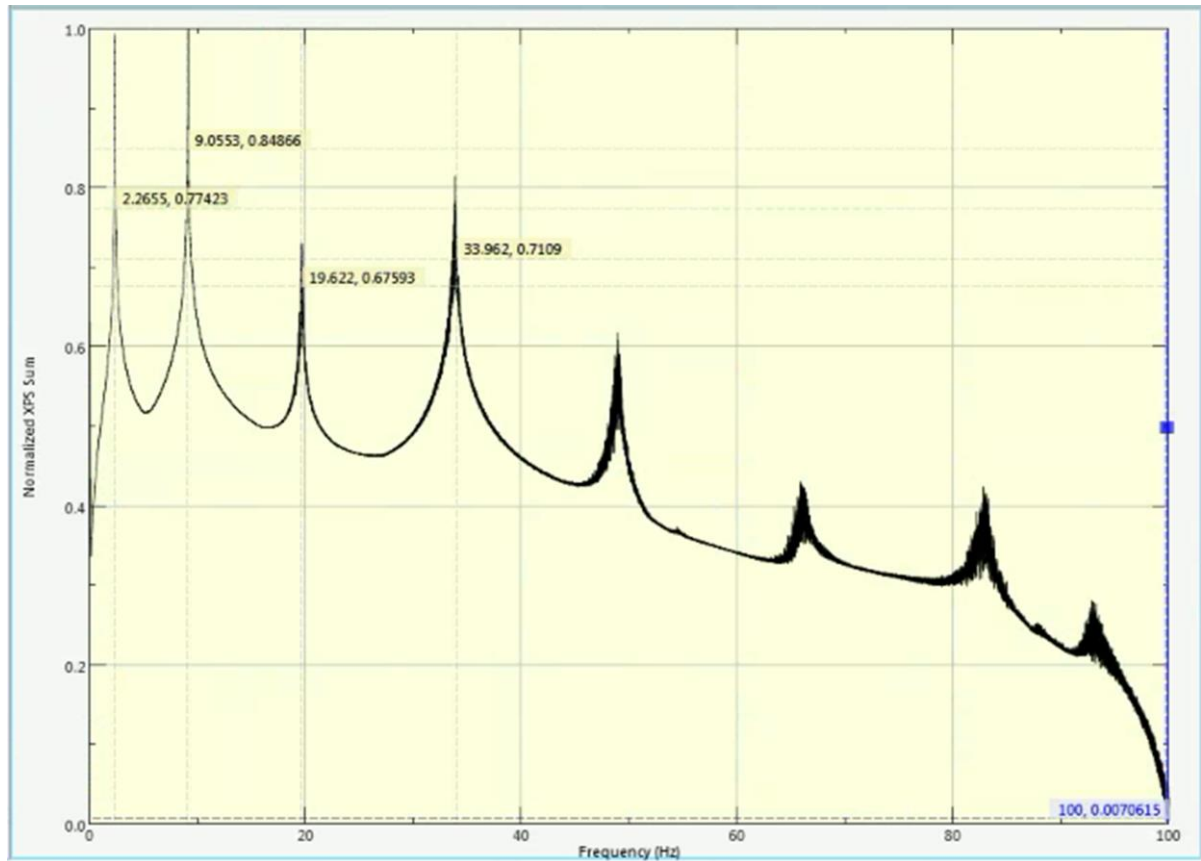


Figura 4.12. Exploración de la gráfica de la XPSD en FEMTools (2º Conjunto de datos).

Puesto que en el primer conjunto de datos el orden del polinomio fue 50, para éste, el criterio debe ser el mismo, así como el rango en el que deben buscarse los modos de vibración (entre 0 y 50Hz). El diagrama de estabilización con la extracción de los polos a través de la CMIF se presenta en la figura 4.13. Dicha representación difiere en gran medida de la presentada en la figura 4.9. En este caso, la CMIF y la suma de las XPSD se muestran mucho más claras y suaves, con unas señales de gran calidad y picos bien definidos en la XPSD, resultando mucho más sencilla la extracción de los polos. La razón de dicha situación puede encontrarse en la flexibilidad de la barra y las condiciones de contorno establecidas en el experimento. Por último, al contar con un polinomio de tan alto grado, el ajuste a la XPSD es mucho más preciso y por tanto, no aparecen situaciones de conflicto entre los modos identificados, y se identifica un quinto modo en las inmediaciones de los 50Hz. Dicho modo de vibración no se tendrá en cuenta en los sucesivos pasos, puesto que el análisis se centra en los 4 primeros y éste carece de importancia.

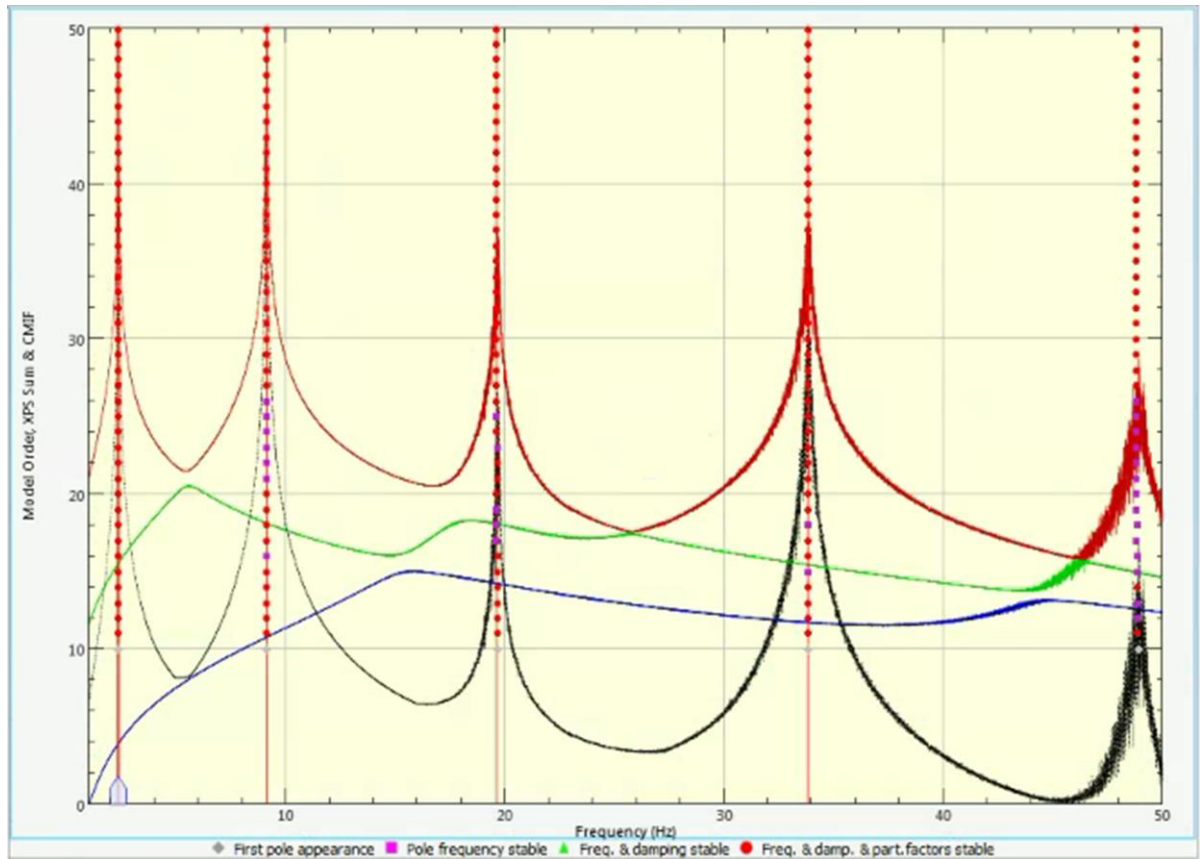


Figura 4.13. Diagrama de estabilización. Extracción de los polos mediante la CMIF. (2º Conjunto de datos).

Para concluir con el análisis de este 2º conjunto de datos, se procede a la identificación de las formas modales a través del ajuste realizado a la XPSD. Los polos extraídos anteriormente eran cuatro, que corresponden con los cuatro modos de vibración principales. Puesto que no se han encontrado conflictos entre los modos identificados, no existe discusión al respecto y la solución de este segundo análisis se presenta resumida en la tabla 4.4.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,328	0,14	99,9	2,0	0,1
2	9,100	0,20	100,0	0,3	0,4
3	19,608	0,36	100,0	1	0,1
4	33,820	0,34	100,0	0,6	0,4

Tabla 4.4. Resultados finales del análisis modal (2º Conjunto de datos).

Analizando brevemente los resultados arrojados por este segundo análisis, puede verse que resultan ser bastante coherentes con lo esperado. Las frecuencias identificadas en el peak-picking inicial, tienen ahora sus modos de vibración asociados. Además, los indicadores de la calidad de los parámetros modales son inmejorables: el MPC toma valores del 100%, el MPD realmente cercanos a 0 y el MAC alias prácticamente nulo. Esto indica

una correlación bastante estrecha entre los datos experimentales y los ajustes realizados a lo largo del análisis modal.

Para concluir con los ensayos realizados sobre la viga con pesos distribuidos, se procede a analizar los datos del tercer y último experimento. Este conjunto de datos no presenta graves conflictos, ya que, como puede observarse en la figura 4.14, la XPSD y la CMIF muestran picos claros que, sumado al alto grado del polinomio seleccionado (grado 50 de nuevo), facilitan la identificación de los polos. En esta ocasión, también ha sido encontrado un polo en las inmediaciones de los 50Hz que podría corresponder a un quinto modo de vibración y que por tanto no será incluido en los cálculos posteriores.

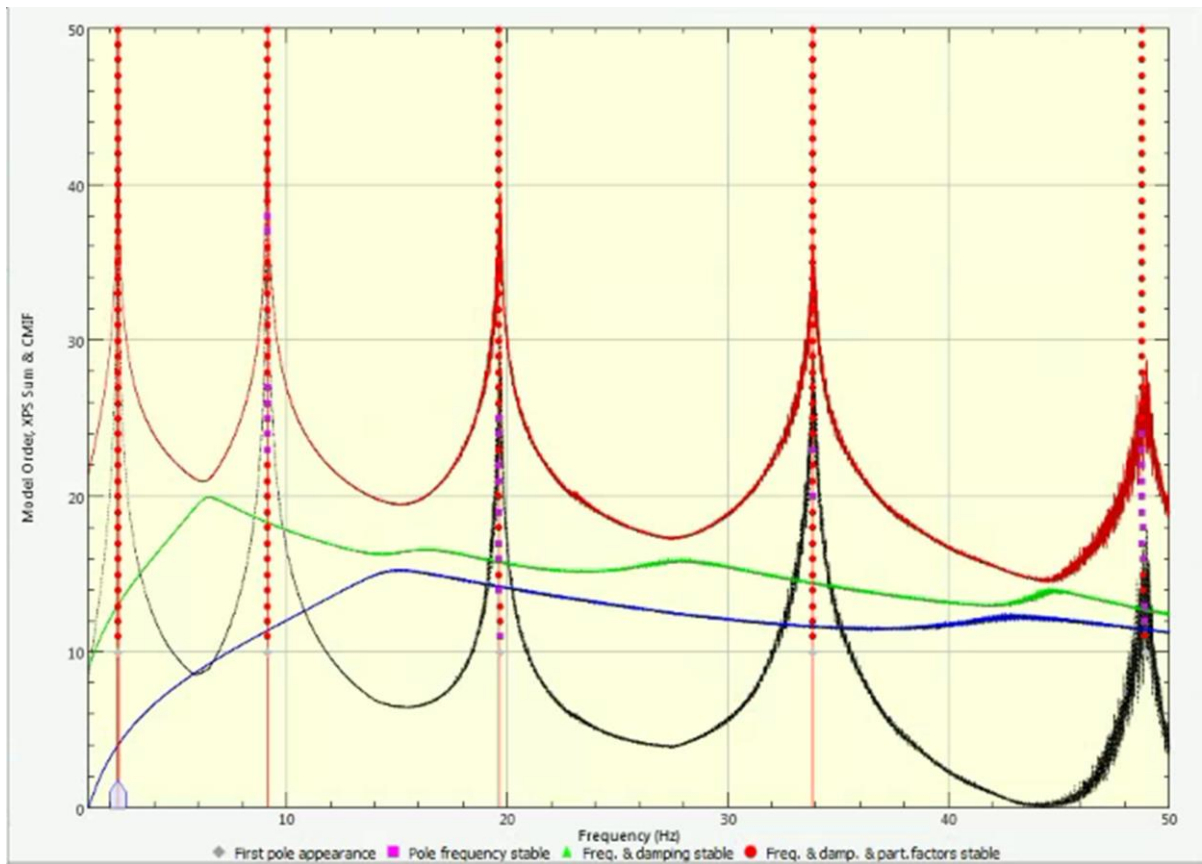


Figura 4.14. Diagrama de estabilización. Extracción de los polos mediante la CMIF. (3^{er} Conjunto de datos).

Por último, la extracción de los modos de vibración no presenta problema alguno, mostrándose los resultados finales en la 4.5.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,326	0,20	99,9	2,0	0,1
2	9,098	0,25	100,0	0,4	0,4
3	19,601	0,46	100,0	0,6	0,1
4	33,806	0,45	100,0	0,3	0,4

Tabla 4.5. Resultados finales del análisis modal (3^{er} Conjunto de datos).

Tras la realización del análisis de los tres conjuntos de señales correspondientes a esta viga con masas, resulta conveniente realizar una recopilación de todos los resultados obtenidos. Todos ellos se recogen a continuación en la tabla 4.6.

	Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1er Conjunto	1	2,327	0,14	99,9	2,0	0,1
	2	9,040	0,83	100,0	4,9	0,4
	3	19,518	0,22	99,6	6,2	0,4
	4	33,636	0,40	100,0	5,5	0,4
2º Conjunto	1	2,328	0,14	99,9	2,0	0,1
	2	9,100	0,20	100,0	0,3	0,4
	3	19,608	0,36	100,0	1	0,1
	4	33,820	0,34	100,0	0,6	0,4
3er Conjunto	1	2,326	0,20	99,9	2,0	0,1
	2	9,098	0,25	100,0	0,4	0,4
	3	19,601	0,46	100,0	0,6	0,1
	4	33,806	0,45	100,0	0,3	0,4

Tabla 4.6. Resultados finales de la extracción de los modos para la viga con masas distribuidas.

A pesar de haber contado con numerosos problemas de identificación el primer conjunto de datos, los resultados difieren poco de los obtenidos en los análisis posteriores, lo que indica que las decisiones adoptadas han sido acertadas y convergen hacia los mismos valores. Cabe destacar el amortiguamiento calculado para el segundo modo de vibración en el primer conjunto de datos. Éste es especialmente alto en comparación con el de los otros dos conjuntos de datos.

El objetivo de este análisis es la comparativa, por lo que resulta necesario reducir los resultados para facilitar dicho proceso. Por ello se procede a calcular la media de las frecuencias y los factores de amortiguamiento obtenidos, condensando los datos procedentes de los tres ensayos. La tabla 4.7 muestra dichas medias para cada modo de vibración.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
1	2,327	0,16
2	9,079	0,35
3	19,317	0,33
4	33,754	0,39

Tabla 4.7. Resultados definitivos de la extracción de los modos con FEMTools.

4.3.2 Viga con recubrimiento de caucho

Como ya es costumbre, el primer paso de cualquier análisis modal es la comprobación de que las señales medidas por los acelerómetros son coherentes mediante alguna herramienta informática. La figura 4.15 muestra la señal registrada por un acelerómetro.

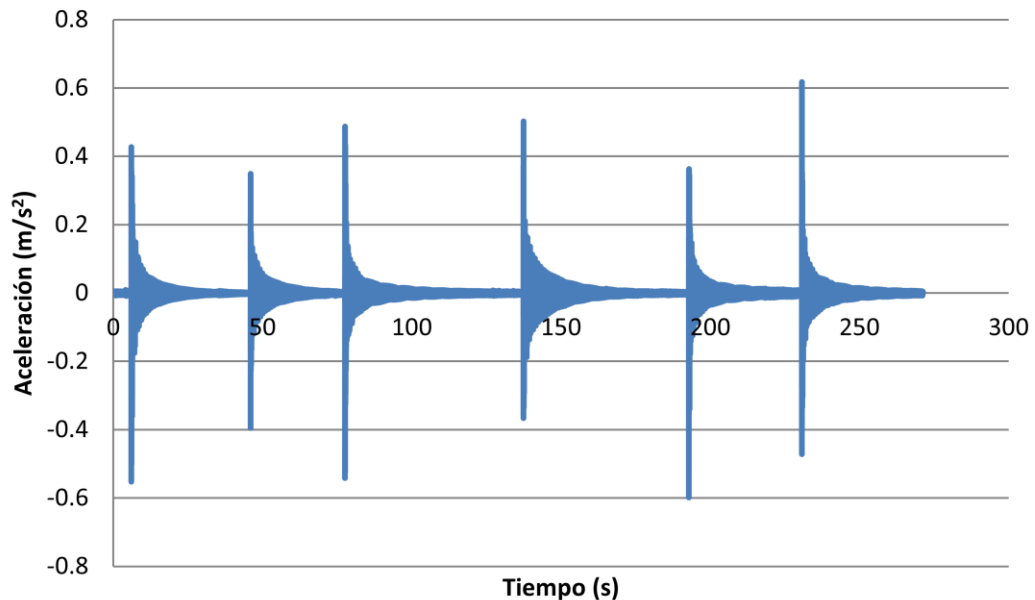


Figura 4.15. Representación gráfica de la señal medida por un acelerómetro.

Tras comprobar las señales y observar que las mediciones han sido correctas, se procede a analizar el primer conjunto de datos obtenidos.

Para comenzar con el análisis, puede realizarse un peak-picking sobre la gráfica de la XPSD experimental. La figura 4.16 muestra dicha representación. Nótese que existen numerosas diferencias entre la XPSD de la viga con masas distribuidas y la calculada ahora. En primer lugar, sólo los dos primeros picos se ven con suficiente nitidez y destacan claramente en dicha gráfica, sin embargo, a partir de los 20Hz comienza a observarse distorsiones, complicando la selección de los picos en torno a los 19Hz y los 30Hz. La explicación a dicho fenómeno puede encontrarse en que la inclusión de la capa de goma ha modificado la flexibilidad de la viga, lo que conlleva a una respuesta dinámica que difiere de la registrada en el anterior ensayo, siendo más difícil de excitar a partir de los 20Hz y mostrándose con más ruido.

Puede observarse también la existencia de un pico en las inmediaciones de los 50Hz, sin embargo, puesto que sólo los cuatro primeros son objeto de estudio, este quinto pico será obviado.

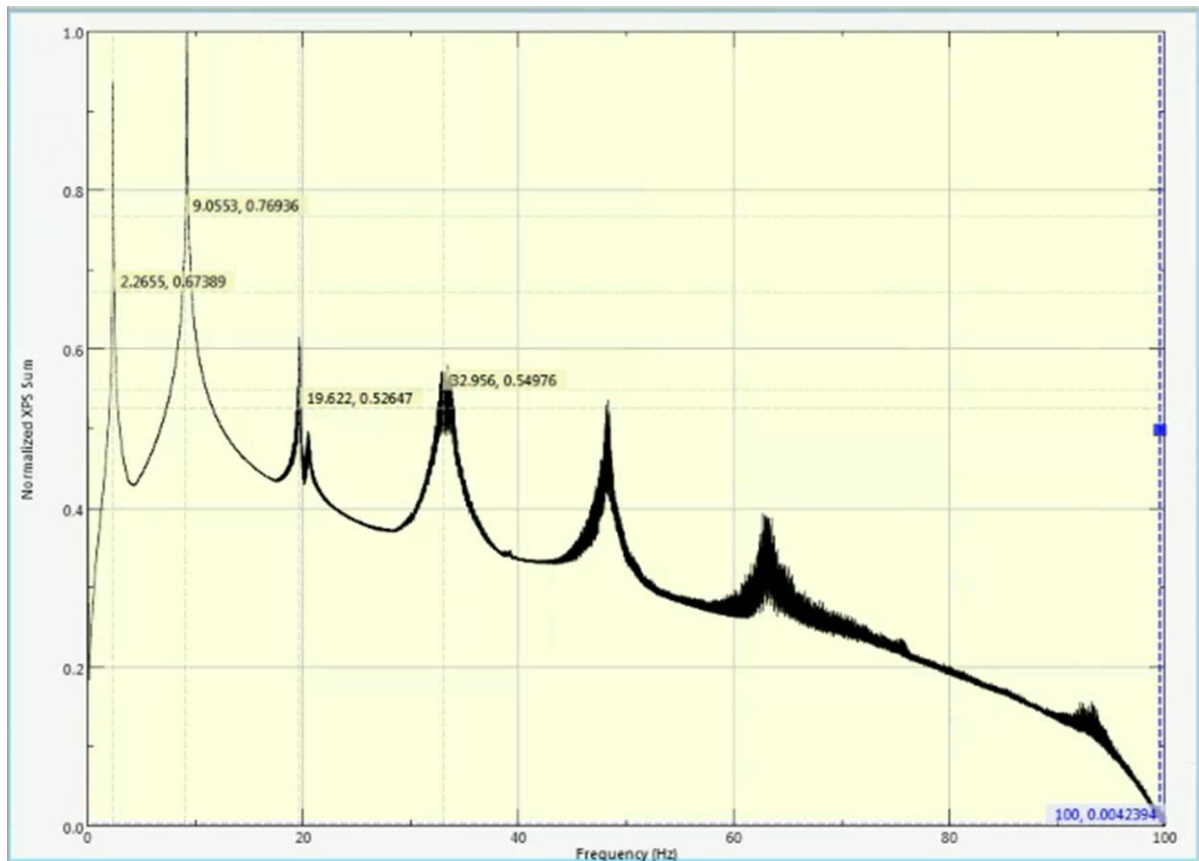


Figura 4.16. Exploración de la gráfica de la XPSD en FEMTools (1^{er} Conjunto de datos).

A continuación, deben extraerse los polos que permitirán identificar las distintas formas modales. Puesto que en el análisis de los datos de la viga con las masas distribuidas se estableció para el polinomio un orden de 50, este criterio debe mantenerse para el análisis de la viga con caucho, ya que es necesario contar con la misma precisión para realizar una correcta comparativa. A través del algoritmo CMIF se extraen dichos polos que pueden identificarse en el diagrama de estabilización de la figura 4.17. Debe observarse que, puesto que la XPSD sum cuenta con bastantes distorsiones a partir de los 20Hz, la representación de la CMIF sufre las mismas perturbaciones, sin embargo, el algoritmo ha sido capaz de distinguir sin problema alguno qué polos eran estables. Nótese, que como ya se había vaticinado, el algoritmo ha identificado un polo a una frecuencia de 48,092Hz que será descartado por no tener interés para el análisis.

Para concluir con el procesado de este primer conjunto de datos, deben identificarse los modos de vibración de la estructura. El alto grado del polinomio seleccionado, permite un ajuste bastante preciso de la curva de las XPSD y por tanto, una correcta identificación de las formas modales. La tabla 4.8 recoge los resultados de este primer análisis.

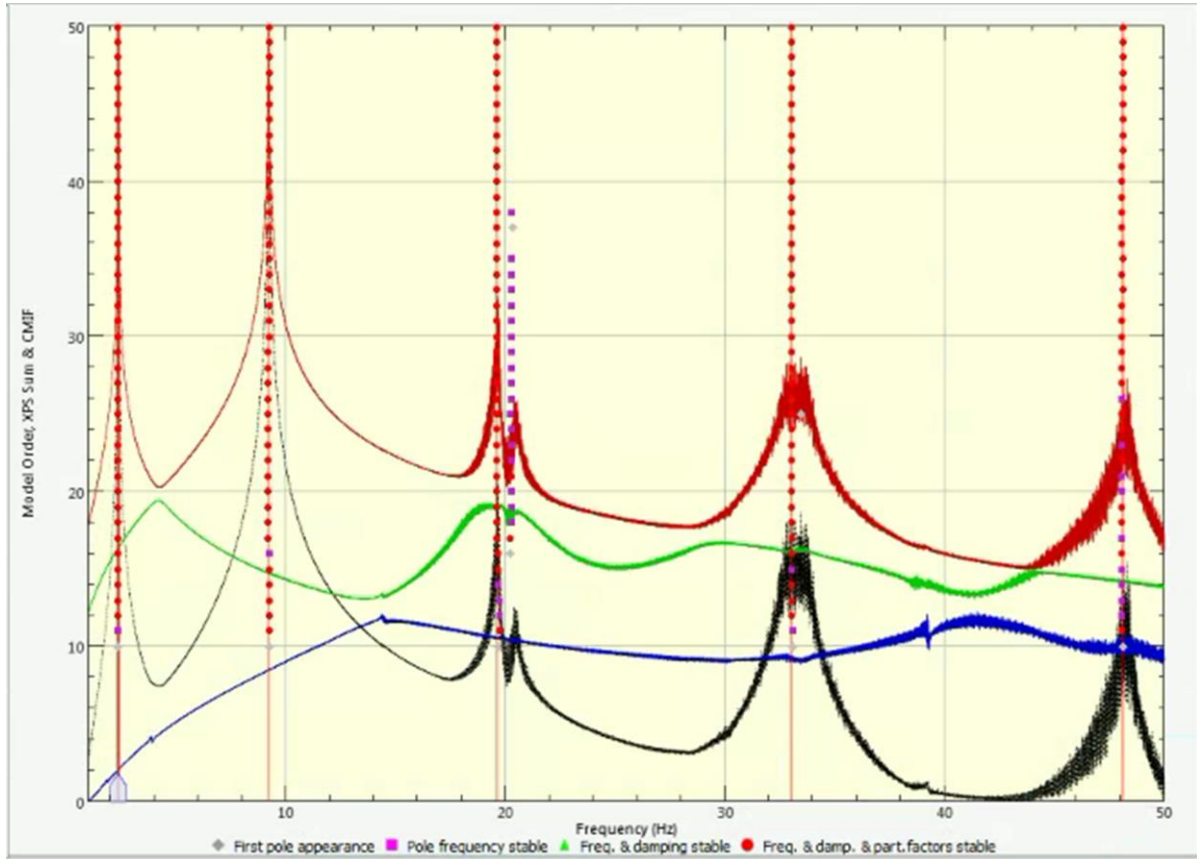


Figura 4.17. Extracción de los polos a través de la CMIF y el algoritmo base. (1er Conjunto de datos).

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,343	0,18	99,9	2,0	0,2
2	9,199	0,24	100,0	5,4	1,4
3	19,596	0,90	99,9	6,0	0,1
4	32,996	1,25	99,1	21,8	1,1

Tabla 4.8. Resultados finales del análisis modal (1er Conjunto de datos).

Conviene tomar un momento para reflexionar sobre los datos obtenidos. En primer lugar, el peak-picking realizado inicialmente confirma que, las frecuencias a las que se han identificado modos de vibración, tienen correspondencia con las seleccionadas en dicho proceso previo. Sin embargo, no todas cuentan con brillantes indicadores de calidad. Como ya se había observado en la XPSD, a partir de los 20Hz, comienza a existir distorsiones que dificultan la observación de los picos. Pues bien, observando la tabla 4.8, los dos primeros modos de vibración identificados gozan de indicadores MPD bastante bajos, sin embargo, el tercer y cuarto modo carecen de ellos. De hecho, el MPD del cuarto modo incumple el criterio establecido para dicho indicador, por lo que su forma modal dista en gran medida de una forma modal normal. La razón puede encontrarse en la dificultad que encuentra el

polinomio para ajustar la XPSD en una zona con grandes distorsiones como son las inmediaciones de los 30Hz.

El segundo conjunto de datos muestra amplificado el problema de las distorsiones a partir de los 20Hz. De hecho la realización de un peak-picking inicial resulta una tarea ardua para el tercer y cuarto modo, ya que las distorsiones para el entorno de los 30Hz son especialmente importantes. Sin embargo, se han escogido las siguientes, ya que este paso no es definitivo: 2,39Hz, 9,18Hz, 19,75Hz y 32,83Hz. La figura 4.18 muestra la realización del peak-picking sobre la gráfica de la XPSD.

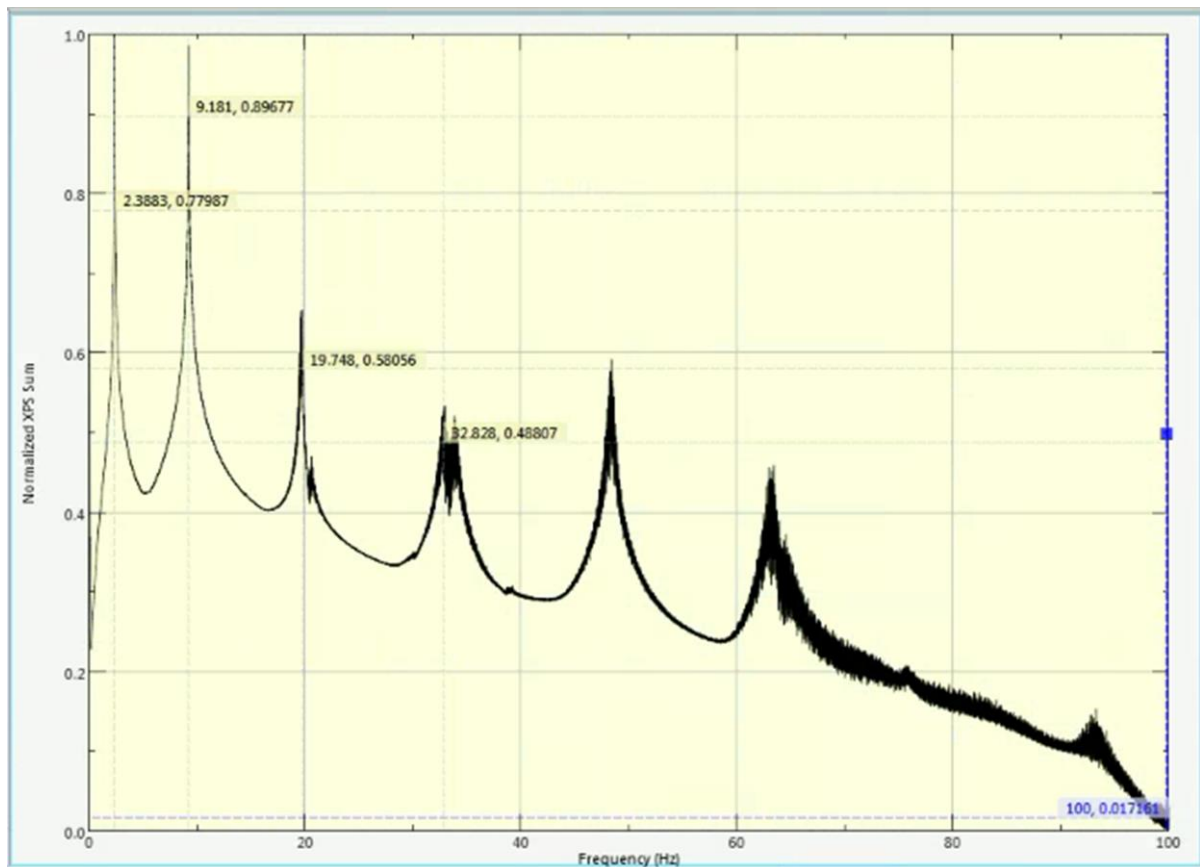


Figura 4.18. Peak-picking sobre la XPSD. (2º Conjunto de datos).

El problema de la existencia de varios picos en las inmediaciones de los 20 y 30Hz en la XPSD, tienen su correspondencia en la representación de la CMIF, provocando dificultades para la identificación de los polos mediante el algoritmo base. Dicho algoritmo, identifica siete polos todos ellos estables, por lo que la selección de los cuatro modos de vibración principales de la estructura debe realizarse mediante los indicadores de calidad de los parámetros modales. La figura 4.19 muestra el diagrama de estabilización para este segundo conjunto de datos.

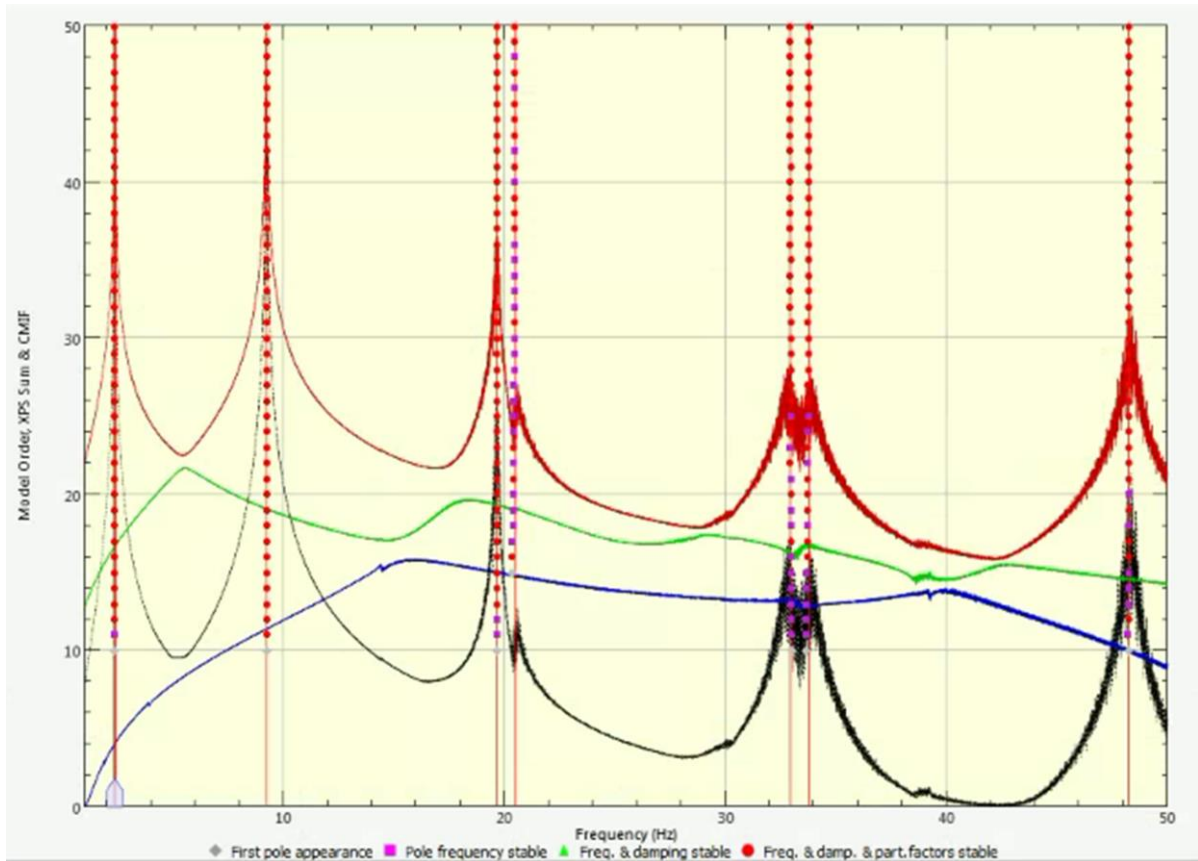


Figura 4.20. Diagrama de estabilización. (2º Conjunto de datos)

La identificación de varios polos en las cercanías de una misma frecuencia, provocan conflictos entre ellos. La figura 4.20 ilustra la matriz MAC tras la extracción de los polos. Como puede observarse, existen fuera de la diagonal valores altos de MAC, lo que indica que hay problemas para la identificación de los distintos modos de vibración.

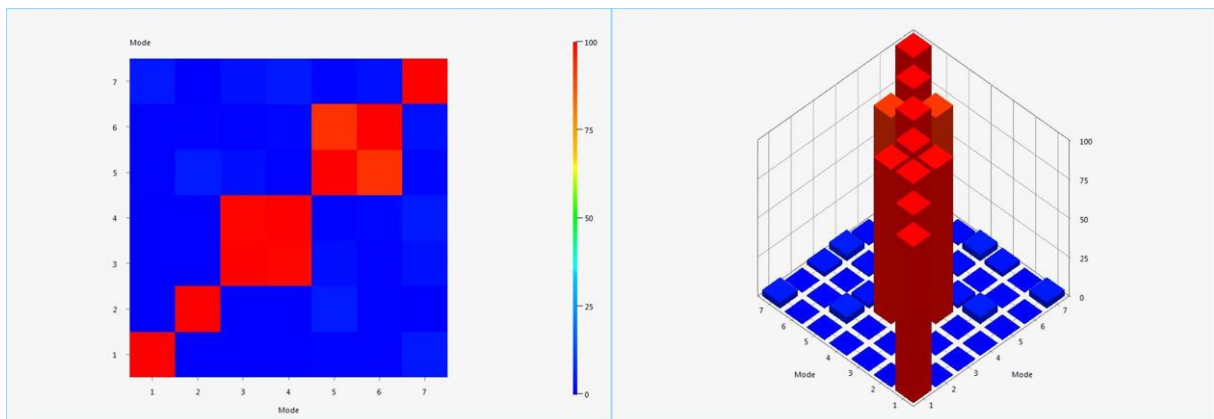


Figura 4.19. Representaciones del MAC en 3D y 2D final. (2º Conjunto de datos)

Para la toma de decisiones sobre los modos de vibración, puede hacerse uso de la tabla 4.9 que resume los resultados de la extracción de los modos a través de los polos identificados.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,344	0,18	99,9	2,0	3,9
2	9,205	0,23	100,0	10,2	4,4
3	19,635	0,42	100,0	3,0	99,1
4	20,470	0,52	99,8	13,4	99,1
5	32,921	0,64	98,2	13,4	91,9
6	33,752	0,70	99,1	45,9	91,9
7	48,240	0,64	100,0	1,4	4,1

Tabla 4.9. Resumen de la extracción de los modos de vibración (2º Conjunto de datos).

Los colores de las filas en la tabla 4.9 hacen referencia a los valores que pueden encontrarse fuera de la diagonal de la matriz MAC (MAC alias). La primera decisión que puede tomarse, es la eliminación como candidata la frecuencia de 48,24Hz, puesto que, al realizar el peak-picking inicial, se observó que podría identificarse con el quinto modo de vibración. A continuación, debe procederse a la resolución del primer conflicto sobre el tercer modo de vibración. Atendiendo al indicador MPD, la frecuencia de 20,47Hz es muy superior a la de 19,635Hz, lo que indica la forma modal de dicha frecuencia es más normal que la otra. En segundo lugar, la identificación del cuarto modo de vibración también presenta conflictos. El MPC para ambas frecuencias candidatas es bastante alto y muy similar, sin embargo, es el MPD en el que difieren en gran medida (el MPD de 33,752Hz es casi 3,5 veces el de 32,921Hz). Por lo tanto, a pesar de no cumplir con el criterio establecido para dicho indicador, la selección del cuarto modo se decanta para la frecuencia de 32,921Hz.

Finalmente, las selecciones realizadas, permiten rehacer los cálculos para la identificación de los de vibración, dando como resultado lo recogido en la tabla 4.10.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,344	0,18	99,9	2,0	0,3
2	9,205	0,23	100,0	10,1	4,1
3	19,635	0,42	100,0	3,5	2,0
4	32,921	0,64	95,5	22,7	4,1

Tabla 4.10. Resultados finales del análisis modal (2º Conjunto de datos).

Para concluir con el análisis modal de esta estructura con las capas de caucho, debe procesarse el tercer conjunto de datos obtenidos durante los ensayos. De nuevo, la representación de la XPSD muestra a partir de los 20Hz

bastantes inestabilidades, viéndose con meridiana claridad tan sólo los picos correspondientes a los dos primeros modos de vibración. El problema de dichas inestabilidades, es tal, que para el algoritmo de identificación de los polos le resulta imposible encontrar polos estables para el cuarto modo, que se encuentra, como ya ha podido comprobarse en los análisis anteriores, en las inmediaciones de los 30Hz. El problema reside en que la CMIF se ve influenciada por las inestabilidades de la XPSD. El quinto modo de vibración (48,17Hz) será eliminado por carecer de interés para el análisis. La figura 4.21 muestra el diagrama de estabilización. Nótese que no se identifican polos estables en el entorno de los 33Hz. Sin embargo, puesto que la realización de los análisis anteriores ha puesto de manifiesto que el cuarto modo se encuentra en dicha zona, pueden seleccionarse para continuar con los cálculos y posteriormente discernir cuál corresponde a un modo de vibración normal.

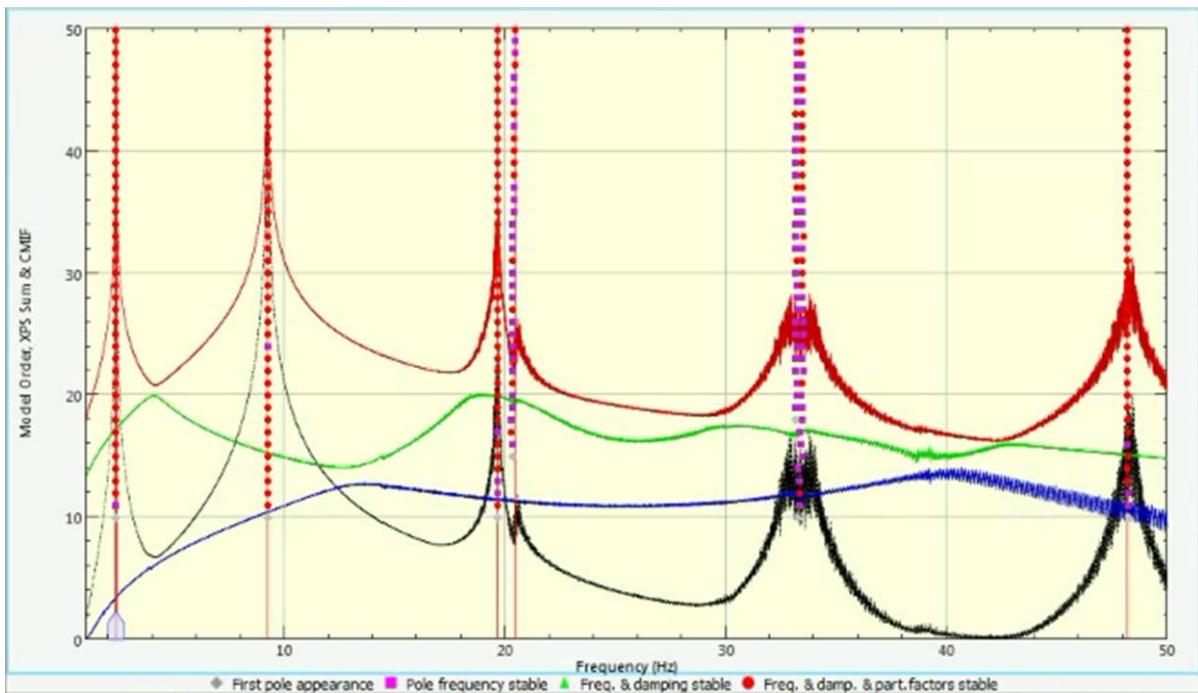


Figura 4.21. Diagrama de estabilización. Extracción de los polos a través de la CMIF. (3er Conjunto de datos).

Esta selección debe resolverse atendiendo a los indicadores de los parámetros modales que se obtienen en la extracción de los modos de vibración. La tabla 4.11 recoge la primera aproximación realizada, teniendo en cuenta los dos polos no estables identificados por el algoritmo en las inmediaciones de los 30Hz.

El primer conflicto que debe resolverse, pasa por identificar el tercer modo de vibración, que se encuentra en torno a los 20Hz. El MPC es realmente elevado para ambas frecuencias identificadas y por tanto, no es determinante en esta elección. La mayor diferencia se encuentra en el MPD, ya que el calculado

para la frecuencia de 20,429Hz es más de cuatro veces el de la frecuencia de 19,643Hz, lo que indica que la forma modal identificada para esta última frecuencia es menos compleja. Por ello, la solución a este conflicto pasa por seleccionar como modo de vibración la frecuencia de 19,643Hz.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,346	0,26	99,9	2,0	3,9
2	9,205	0,23	100,0	9,1	2,1
3	19,643	0,47	100,0	3,5	99,2
4	20,429	0,35	99,6	14,7	99,2
5	33,210	0,18	98,2	22,4	99,4
6	33,416	0,58	97,4	33,1	99,4

Tabla 4.11. Resumen de la extracción de los modos de vibración (3^{er} Conjunto de datos).

Para el segundo conflicto, tanto el MPC como el MPD toman valores más favorables para la frecuencia de 33,210Hz, ya que el MPC se acerca más al 100% y el MPD más a 0. Sin embargo, dicha elección vulnera (como ya ocurriera con los dos análisis anteriores) con el criterio establecido para el MPC. El resultado final de este último análisis se presenta en la tabla 4.12.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1	2,346	0,26	99,9	2,0	0,2
2	9,205	0,23	100,0	9,0	3,0
3	19,643	0,47	99,9	4,2	1,2
4	33,210	0,18	94,9	31,6	3,0

Tabla 4.12. Resultado final del análisis modal (3^{er} Conjunto de datos).

Para concluir con el análisis modal operacional de la viga con las capas de caucho, puede resumirse en una tabla los resultados de los tres ensayos realizados (tabla 4.13).

	Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)	MPC (%)	MPD (*)	MAC alias (%)
1^{er} Conjunto	1	2,343	0,18	99,9	2,0	0,2
	2	9,199	0,24	100,0	5,4	1,4
	3	19,596	0,90	99,9	6,0	0,1
	4	32,996	1,25	99,1	21,8	1,1
2^o Conjunto	1	2,344	0,18	99,9	2,0	0,3
	2	9,205	0,23	100,0	10,1	4,1
	3	19,635	0,42	100,0	3,5	2,0
	4	32,921	0,64	95,5	22,7	4,1
3^{er} Conjunto	1	2,346	0,26	99,9	2,0	0,2
	2	9,205	0,23	100,0	9,0	3,0
	3	19,643	0,47	99,9	4,2	1,2
	4	33,210	0,18	94,9	31,6	3,0

Tabla 4.13. Resultados finales de la extracción de los modos para la viga con dos capas de caucho.

A pesar de haber contado con numerosos problemas durante la identificación de los modos de vibración, observando la tabla 4.13 puede decirse que los resultados derivados de las diversas tomas de decisiones, con unos criterios preestablecidos y siempre teniendo una visión global del análisis, convergen hacia unos valores concretos. Dichos valores son obtenidos mediante la media aritmética y se presentan a continuación en la tabla 4.14.

Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
1	2,344	0,20
2	9,203	0,23
3	19,612	0,56
4	33,742	0,52

Tabla 4.14. Resultados definitivos de la extracción de los modos con FEMTools.

4.4 Comparación de los resultados

El epígrafe que se desarrolla a continuación pretende dar solución a lo que se busca con la extracción de los parámetros modales desarrollados anteriormente. Esta solución pasa por evaluar la eficacia de uno de los sistemas que se están poniendo en marcha para mejorar los factores de amortiguamiento de las pasarelas peatonales.

Según la teoría expuesta a lo largo de este documento, dos estructuras de iguales propiedades espaciales (masa y forma) cuentan con las mismas frecuencias y formas modales propias. A tenor de lo anteriormente indicado, las dos vigas de masas y formas muy similares, deben contar con frecuencias y formas modales iguales. Esta primera comparación se realiza en la tabla 4.15.

Modo	Viga con masas	Viga con caucho	Diferencia
1	2,327Hz	2,344Hz	0,73%
2	9,079Hz	9,203Hz	1,37%
3	19,317Hz	19,612Hz	1,53%
4	33,754Hz	33,742Hz	-0,036%

Tabla 4.15. Frecuencias obtenidas para los cuatro primeros modos de vibración.

Observando lo expuesto en la tabla 4.15, las frecuencias identificadas tras la realización de los análisis anteriormente descritos son muy similares. Todas aparecen en el mismo orden de magnitud y difieren, en el peor de los casos,

en décimas de Hertzios. Para el primer modo, la diferencia entre las frecuencias identificadas es de tan sólo un 0,73% sobre la calculada para la viga con masas, por lo que son datos extraordinariamente precisos y fiables. Para el segundo modo, la diferencia aumenta hasta un 1,37% sobre la frecuencia de la viga con masas, aunque sigue siendo un valor extremadamente reducido. En cuanto al tercer modo identificado en las vigas, la diferencia entre las frecuencias atribuidas es de un 1,53% y por último, en el cuarto modo la diferencia disminuye hasta el 0,036%.

Estos datos son, sin duda alguna, extraordinarios, sin embargo, deben realizarse algunos comentarios al respecto. En primer lugar, puesto que se está tratando de simular lo que ocurriría en una pasarela peatonal transitada, y estas estructuras se ven especialmente influenciadas por las cargas provocadas por el paso de seres humanos, debe tenerse nociones sobre dichas cargas. En la práctica, las pasarelas peatonales están sujetas a la acción simultánea de varias personas. Cada peatón cuenta con sus propias características (peso, frecuencia de pisada, velocidad), además, algunas de ellas (la longitud de la zancada o la velocidad a la que se mueven verbi gracia) pueden variar a lo largo del camino, llegando a sincronizarse sus movimientos con los de otros peatones o incluso con la propia pasarela. Algunos estudios estadísticos indican que el ser humano camina típicamente con una frecuencia de 2Hz. La particular naturaleza del caminar del ser humano, implica las acciones verticales y longitudinales inducidas sobre la estructura sean equivalentes. Debido a esta característica, y añadiendo un factor de seguridad, solamente los modos de vibración cuyas frecuencias naturales se encuentren por debajo de 5Hz deben tenerse en cuenta para un análisis en servicio. Por tanto, el modo con mayor importancia en este caso, es el primer modo de vibración por encontrarse en las inmediaciones de los 2Hz, aunque también se tendrán en cuenta el resto de modos calculados.

Por último, como ya se comentó durante los análisis del epígrafe 4.3.2, las formas modales identificadas con el cuarto modo, en torno a los 33Hz, no cumplen con el criterio establecido sobre el indicador MPD, por lo que este cuarto modo no debe formar parte de las comparativas

Modo	Viga con masas	Viga con caucho	Diferencia
1	0,16	0,20	25%
2	0,35	0,23	-34,28%
3	0,33	0,56	69,69%
4	0,39	0,52	33,33%

Tabla 4.16. Factores de amortiguamiento obtenidos para los cuatro primeros modos de vibración.

La tabla 4.16 recoge los factores de amortiguamiento calculados mediante FEMTools y el porcentaje de aumento sobre los de la viga con masas. En el primer modo, el factor de amortiguamiento ha aumentado un 25%, lo que supone un cambio significativo en el comportamiento de la estructura y en la respuesta dinámica tras una excitación en el entorno de los 2Hz. No ocurre así en el segundo modo, en el que el coeficiente de amortiguamiento disminuye un 34,28%. Sin embargo, la razón a este cambio en la tendencia ascendente del amortiguamiento, puede encontrarse en el factor calculado en el primer análisis. Ya se indicó que el amortiguamiento calculado para el segundo modo era extraordinariamente elevado (0,83), en torno a cuatro veces los obtenidos en los análisis posteriores realizados sobre esa misma estructura. Si se elimina dicho valor, el factor de amortiguamiento disminuye a 0,22 en lugar de 0,35. El caucho sobre la viga no provoca un aumento significativo en la capacidad amortiguadora para su segundo modo de vibración, que se encuentra en torno a los 9Hz. Por último, es el tercer modo en el que mayor aumento del factor de amortiguamiento hay, casi de un 70%. Este aumento tiene poco interés por la frecuencia a la que es necesario excitar la estructura, unos 19Hz.

A tenor de los datos extraídos mediante el software de CAE, el caucho si supone una mejora muy importante sobre las propiedades modales de la estructuras, especialmente sobre su factor de amortiguamiento, que aumenta notablemente en todos sus modos de vibración.

4.5 Comparación mediante MatLab

Bajo este epígrafe se muestra una comparativa de los factores de amortiguamiento obtenidos a través de las señales registradas, sin realizar análisis modales.

La visión crítica de un ingeniero le impide fiarse de los datos arrojados por un único método de cálculo, buscando nuevas vías para validar la información de sus supuestos. Este el motivo por el que se realiza una segunda comparativa, tratando de comprobar que las conclusiones obtenidas tras los análisis modales pueden extraerse mediante otros métodos.

En primer lugar, la primera comparación puede realizarse a simple vista sobre las gráficas de las señales registradas. En esta aproximación inicial se busca, sin necesidad de realizar cálculos, la capacidad amortiguadora de la estructura. Esto se realiza comparando la forma que poseen las representaciones de las señales tras una excitación inducida. Para ilustrar dicho procedimiento, se muestran las gráficas en la figura 4.22 del acelerómetro 2, situado como puede observarse en la figura 4.4 a 2 metros del extremo izquierdo de la viga.

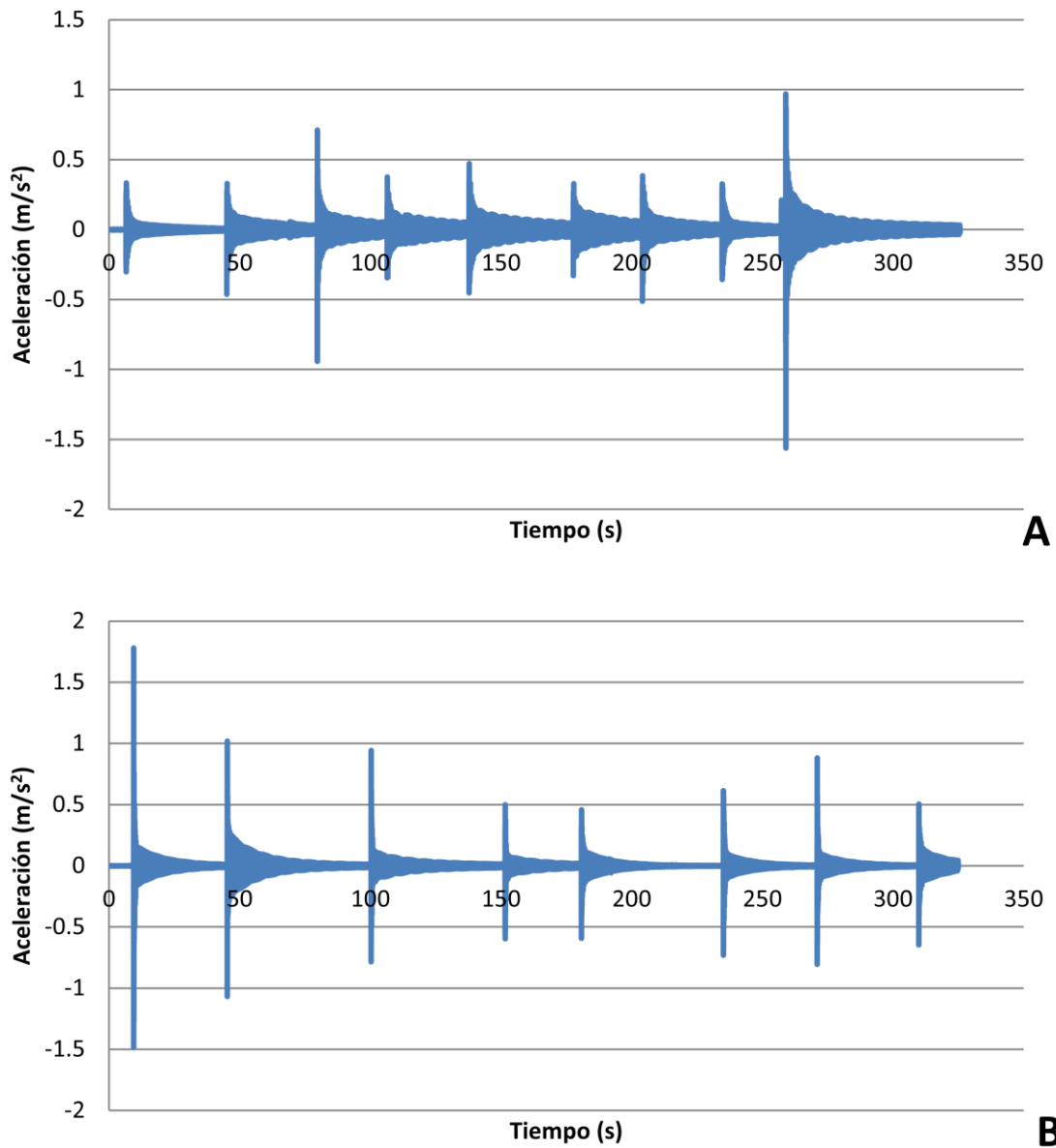


Figura 4.22. Gráficas de las señales registradas por el acelerómetro 2. En la zona superior (A), sobre la viga con masas distribuidas. En la zona inferior (B), sobre la viga con caucho.

En efecto, observando la respuesta dinámica de la viga con masas distribuidas tras la excitación inducida, sus señales muestran un decremento logarítmico ostensiblemente menor que el registrado por los acelerómetros sobre la viga con caucho. Para comparar de manera más detallada, pueden seleccionarse dos espacios de tiempo en los que la excitación inducida sea de magnitud similar. Esto ocurre, por una parte, a los 140 segundos en la viga con masas distribuidas (A), que sufre una excitación de $0,5m/s^2$, y a los 150 segundos en la viga con caucho (B) con excitación de magnitud similar. Estas dos selecciones se representan en la figura 4.23.

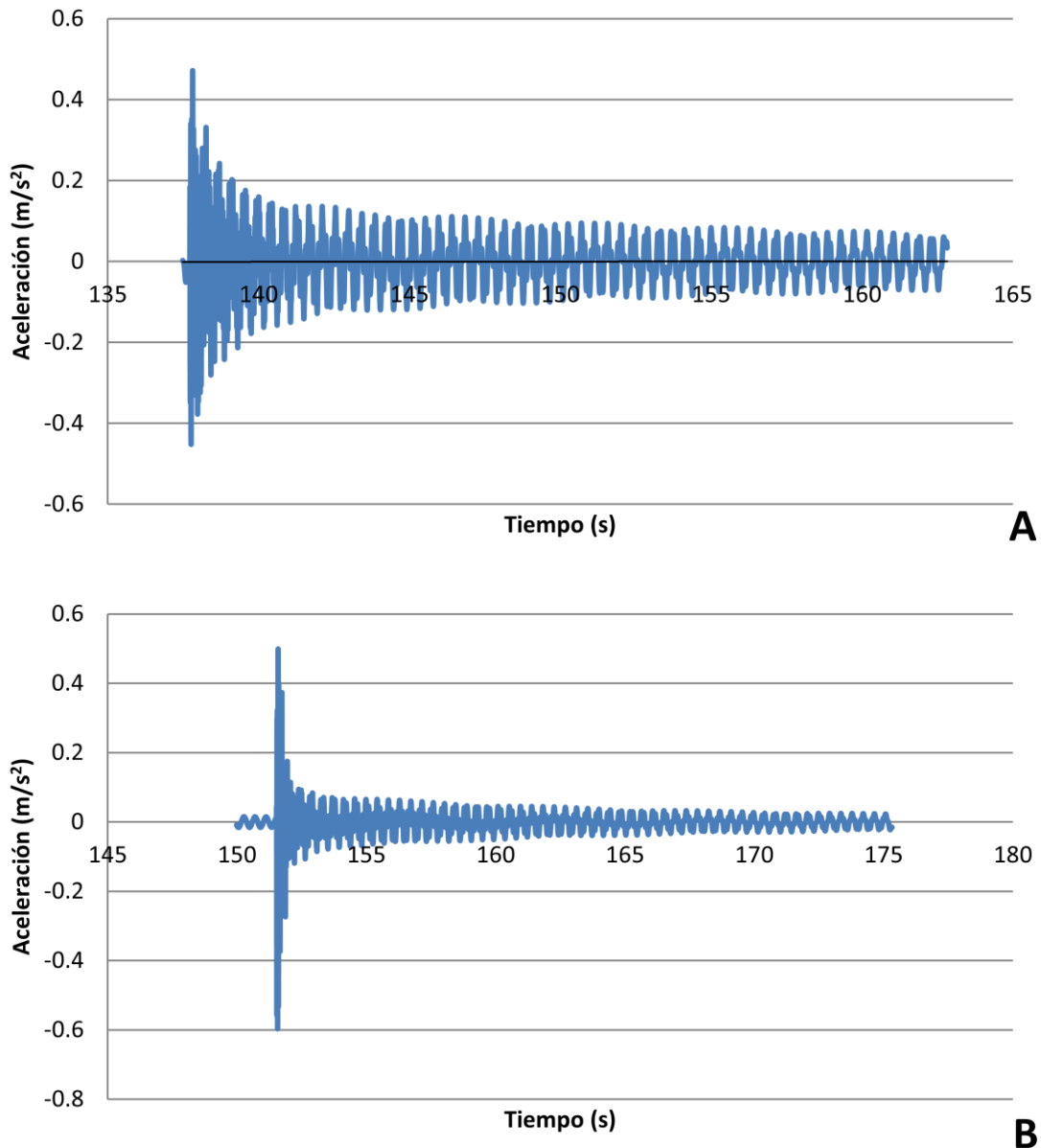


Figura 4.23. Detalles de las gráficas de las señales registradas por el acelerómetro 2. En la zona superior (A), sobre la viga con masas distribuidas. En la zona inferior (B), sobre la viga con caucho.

Como muestran las gráficas A y B de la figura 4.23, el nivel de excitación inicial de ambas es bastante similar, en torno a $0,5\text{m/s}^2$, sin embargo, la capacidad de la estructura para amortiguar dicha excitación es notablemente distinta. El factor de amortiguamiento de la gráfica A permite a la estructura oscilar por más tiempo con amplitudes considerablemente mayores que las que pueden verse en la gráfica B. En dicha representación, se pone de manifiesto que el caucho sobre la superficie de la estructura modifica su capacidad de amortiguamiento, puesto que tras la excitación inducida de $0,5\text{m/s}^2$, la estructura reduce sus oscilaciones a menos de $0,1\text{ m/s}^2$ en

cuestión de un segundo, empleando los 15 segundos posteriores para reducirlas a $0,05\text{m/s}^2$.

Tras lo observado anteriormente se procede a realizar los cálculos oportunos, tratando de evaluar cuantitativamente las variaciones en las características modales de la estructura. El uso de las señales registradas durante los ensayos, permite caracterizar únicamente el primer modo de vibración de la estructura, puesto que no es un análisis modal. Como ya se ha indicado, se tienen datos procedentes de 6 ensayos con 5 acelerómetros, realizados sobre 2 vigas, lo que implica un total de 30 señales y 2 registros de tiempo.

La metodología empleada para este análisis complementario, puede resumirse en los siguientes puntos:

- Apertura la señal.
- Selección del espacio temporal óptimo
- Ejecución de la rutina en MatLab
- Almacenamiento de los cálculos

La selección temporal más idónea, debe contemplar el decremento logarítmico lo más limpio posible, mejorando así los resultados arrojados por el script de MatLab. La rutina programada en MatLab permite, primeramente, extraer el espectro en frecuencias de las señales facilitadas (figura 4.24), de tal manera que pueda seleccionarse la frecuencia para la que se quiere conocer el factor de amortiguamiento. Los análisis realizados previamente, indican que el primer modo de vibración de ambas estructuras se encuentra

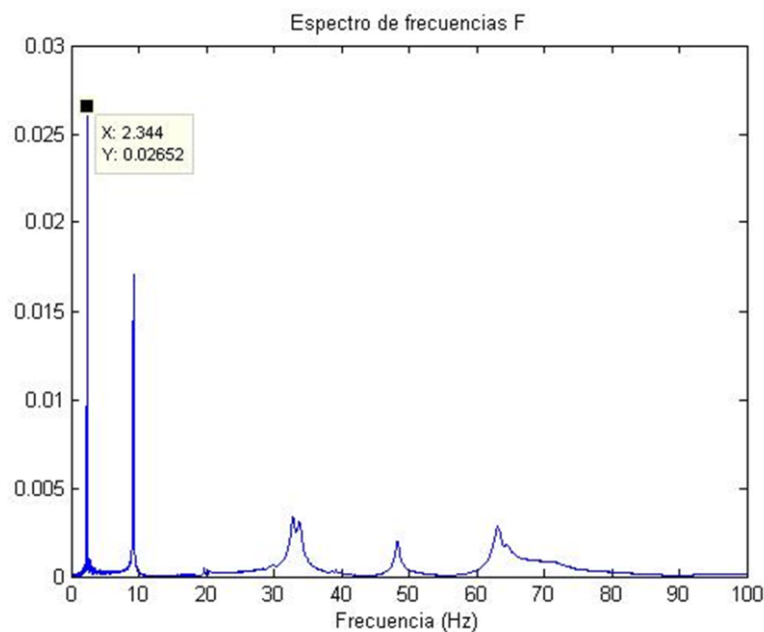


Figura 4.24. Gráfica de la FFT realizada sobre la selección de una señal cualquiera.

en los 2,3Hz, sin embargo, la extracción del espectro en frecuencias de las señales, permiten comprobar la certeza de los cálculos y mejorar la precisión con la que se estima el factor de amortiguamiento. En la figura 4.24 se muestra la gráfica de la FFT realizada sobre una señal, así como el valor de la frecuencia dominante (2,344Hz). El resultado es alentador, pues difiere muy poco de lo obtenido en los análisis modales anteriormente expuestos.

El script de MatLab emplea los conceptos expuestos en el epígrafe 2.2.1 e ilustrados por la ecuación 2.12. Extrae los picos de las señales, para posteriormente realizar un ajuste del decremento logarítmico, calculando así el factor de amortiguamiento presente en la señal.

En la tabla 4.17 se recogen los resultados ofrecidos tras la realización del análisis sobre las 30 señales. Cada columna representa un acelerómetro.

Viga con masas	A1	A2	A3	A4	A5	Media
1 ^{er} Conjunto	0,24	0,39	0,15	0,31	0,43	0,29
2 ^o Conjunto	0,42	0,15	0,06	0,05	0,13	0,12
3 ^{er} Conjunto	0,29	0,20	0,07	0,23	0,32	0,2
					Media total	0,19

Viga con caucho	A1	A2	A3	A4	A5	Media
1 ^{er} Conjunto	0,59	0,54	0,33	0,52	0,65	0,51
2 ^o Conjunto	0,31	0,19	0,17	0,11	0,36	0,21
3 ^{er} Conjunto	0,56	0,37	0,17	0,39	0,82	0,41
					Media total	0,35

Tabla 4.17. Factores de amortiguamiento de todas las señales extraídos mediante MatLab.

En la tabla 4.17 puede observarse que el factor de amortiguamiento del primer modo de vibración (2,3Hz) para la viga con masas es del 0,19%, aumentando hasta un 0,35% con la imprimación de las capas de caucho. Esto supone un aumento de más del 84% en el factor de amortiguamiento de la estructura, lo que refleja que el empleo de capas de caucho sobre la plataforma modifica ostensiblemente su capacidad de amortiguación.

5. Discusiones

El capítulo que a continuación se desarrolla ofrece comentarios y discusiones sobre los análisis realizados a lo largo del documento. Se exponen en primer lugar las observaciones realizadas sobre el análisis modal operacional efectuado a la viga sin carga alguna, para posteriormente señalarlas sobre la viga con masas distribuidas y la que cuenta con capas de caucho. Finalmente, se realizarán comentarios sobre la comparativa de los factores de amortiguamiento mediante MatLab.

5.1 OMA sobre la viga simple

A pesar de que se esperaba que los datos obtenidos experimentalmente estuvieran contaminados con ruido y falta de uniformidad por no emplear métodos calibrados para su excitación, las frecuencias obtenidas por los análisis modales variaron muy poco en los cuatro primeros modos de vibración identificados, pues la diferencia máxima hallada no supera el 0,40% como refleja la tabla 5.1.

Modo	1 ^{er} Conjunto	2 ^o Conjunto	3 ^{er} Conjunto	Dif. Máx (%)
1	2,777Hz	2,777Hz	2,781Hz	0,14%
2	10,853Hz	10,840Hz	10,845Hz	0,12%
3	23,902Hz	23,903Hz	23,884Hz	0,08%
4	39,627Hz	39,751Hz	39,591Hz	0,40%

Tabla 5.1. Frecuencias propias obtenidas para los cuatro primeros modos de vibración.

Aunque las diferencias entre las frecuencias son realmente bajas, la que mayor diferencia presenta es la del cuarto modo de vibración (es el modo cuya frecuencia propia es más alta). La explicación a esto último puede encontrarse en la falta de precisión en la identificación de esta frecuencia. La causa reside en la dificultad de excitar la estructura objeto de estudio a esas frecuencias mediante el método de excitación escogido, afectando a la información que contienen las señales y, a la postre, a la precisión con la que se extraen las frecuencias en el análisis modal.

Con respecto a los factores de amortiguamiento modal, los valores calculados difieren en gran medida entre ensayos, llegando a hallarse diferencias máximas entre los factores de hasta el 87,5%, lo que implica que para un mismo modo, el primer análisis ha arrojado un factor de amortiguamiento modal de casi dos veces el calculado en el tercer análisis como se muestra en la tabla 5.2.

La razón a esta variabilidad en los valores obtenidos se encuentra en dos razones relacionadas entre sí: por un lado, el método numérico empleado para la estimación del factor de amortiguamiento desarrollado en el epígrafe 2.4.6 de este mismo trabajo, y por otro, la precisión con la que se ajusta la curva de la XPSD. La primera razón no puede modificarse, pues el método numérico de cálculo viene implementado en el software de CAE, por lo que, solo puede recurrirse a la segunda. Como ya se ha expuesto anteriormente, el usuario del software puede escoger el grado del polinomio que ajusta la curva de la XPSD. Si se aumenta el grado del polinomio, la precisión de ajuste a la curva aumenta, lo que no afecta a la identificación de las frecuencias propias pero si de los cálculos numéricos posteriores de los que forman parte los factores de amortiguamiento.

Modo	1 ^{er} Conjunto	2 ^o Conjunto	3 ^{er} Conjunto	Dif. Máx (%)
1	0,30	0,26	0,16	87,5%
2	0,38	0,39	0,46	21,1%
3	0,44	0,40	0,31	41,9%
4	0,25	0,16	0,15	66,7%

Tabla 5.2. Factores de amortiguamiento modal calculados para los cuatro primeros modos de vibración.

Por tanto, una posible solución a la amplia variabilidad de los factores de amortiguamiento hallados pasa por aumentar el grado del polinomio (se escogió un grado 31), afectando en gran medida al tiempo de computación.

5.2 OMA sobre la viga con masas

Lo anteriormente expuesto se pone de manifiesto a lo largo del análisis realizado a la viga con masas distribuidas. La primera diferencia con respecto al análisis modal comentado en el epígrafe anterior es la elección del grado del polinomio. En este caso fue 50, pues la comparativa posterior exigía una mayor precisión en los factores de amortiguamiento calculados. Como puede observarse en la tabla 5.3, las diferencias que se hallan en este análisis son ostensiblemente menores. Para el primer modo de vibración, la diferencia máxima detectada es del 42,9%, en contraposición del casi 90% calculado en el primer análisis. Esta diferencia disminuye hasta un 25% para el segundo modo, lo que denota un cálculo mucho más homogéneo de los factores de amortiguamiento tras el aumento del grado del polinomio.

Modo	1 ^{er} Conjunto	2 ^o Conjunto	3 ^{er} Conjunto	Dif. Máx (%)
1	0,14	0,14	0,20	42,9%
2	0,22	0,20	0,25	25%
3	0,22	0,36	0,25	63,6%
4	0,40	0,34	0,45	32,4%

Tabla 5.3. Factores de amortiguamiento modal calculados para los cuatro primeros modos de vibración.

5.3 OMA sobre la viga con caucho

Observando lo expuesto en el análisis modal operacional sobre la viga con caucho, el primer comentario realizado en el epígrafe 4.3.2 tiene como protagonista a la representación de la XPSD. Como se observa en la figura 4.18, y en contraposición de lo ilustrado en la 4.8, la representación de la XPSD a partir de los 20Hz se muestra poco nítida y con mucho ruido, afectando en gran medida a los cálculos realizados posteriormente. Los problemas derivados de una XPSD de mala calidad hacen imposible la identificación coherente del cuarto modo en los tres conjuntos de datos (los MPD calculados están por encima del criterio establecido para dicho indicador).

Las razones de los problemas señalados anteriormente pueden buscarse en dos características relacionadas entre sí: por un lado, la imposibilidad de excitar adecuadamente la estructura, y por otro, el ajuste numérico de la curva XPSD.

En primer lugar, el procedimiento de excitación seleccionado trataba de evitar beneficiar a una frecuencia y un modo en particular, buscando en todo momento abarcar el mayor abanico posible de frecuencias. En las vigas anteriormente ensayadas esto no suponía ningún problema, pues su superficie era metálica y los golpes propinados sobre ella recorrían la estructura gracias a la gran elasticidad del acero. Sin embargo, al contar con una capa de caucho sobre la superficie metálica, como la mostrada en la figura 4.6, los suaves golpes propinados sobre el caucho pueden no haber sido suficientes para excitar el cuarto modo, contaminando las señales con ruido y viéndose una representación de la XPSD poco nítida a altas frecuencias.

Por otra parte, si la representación de la XPSD no es suficientemente nítida en aquellas zonas candidatas a contar con un modo de vibración, el posterior ajuste de la XPSD no será preciso, y por tanto, dará lugar a una pobre identificación tanto de los factores de amortiguamiento de la estructura como

de sus formas modales propias. Para ilustrar el problema que supone la falta de nitidez en la XPSD se muestra la figura 5.1.

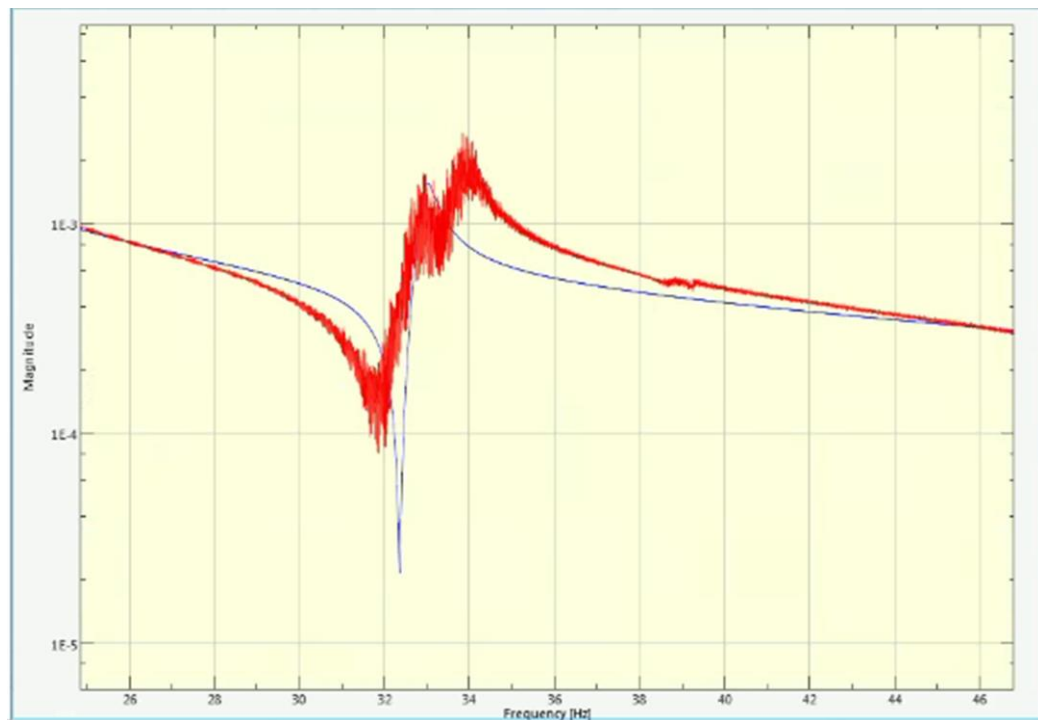


Figura 5.1. Ajuste de la XPSD de un canal en las inmediaciones de los 33Hz.

Como puede observarse en la figura 5.1, la XPSD experimental (curva roja) presenta grandes distorsiones, en forma de numerosos picos en las inmediaciones de frecuencias propias. Aunque la XPSD sintetizada (curva azul) trata de ajustar la forma, las imprecisiones presentes en la XPSD experimental impiden contar con un buen ajuste, lo que a la postre se traduce en una falta de precisión en el cálculo de los factores de amortiguamiento y las formas modales.

5.4 Comparación de los factores de amortiguamiento mediante MatLab

Este método de comparación presenta grandes inconvenientes derivados, en gran medida, por la imposibilidad de automatizar el análisis. Uno de los problemas con los que se tuvo que lidiar para llevar a cabo esta comparativa, fue la dificultad de escoger los espacios temporales más favorables que exige el programa. Para solucionar dicho problema, se planeó la realización de un selector en Excel de tal manera que, contando con todas las señales abiertas y disponibles en todo momento, una hoja de Excel permitía, modificando ciertos parámetros, recorrer las señales seleccionadas viendo a la vez su representación gráfica. De esta manera, los decrementos logarítmicos óptimos podían ser vistos, copiados y procesados en poco tiempo. Sin embargo, el número de señales, sus dimensiones y la realización de la

selección temporal, requirieron una gran cantidad de tiempo para su desarrollo.

Otro problema derivado de la selección temporal necesaria es la falta de homogeneidad entre los resultados obtenidos del cálculo del decremento logarítmico presente en la señal escogida. Dichos valores están condicionados, en gran medida, de la selección realizada en la señal, dando como resultados valores muy dispares medidos incluso en instantes de tiempo iguales. La tabla 4.16 así lo atestigua, encontrando valores del amortiguamiento, para el mismo ensayo, desde un 0,05% hasta un 0,42%. Esta disparidad en los valores obtenidos del amortiguamiento modal llevó a la realización de un análisis paralelo en el que se mantuvo en todo momento el mismo lapso de tiempo, sin tener en cuenta en ningún momento, si dicha selección temporal representaba correctamente el decremento logarítmico derivado de la capacidad de amortiguamiento de la estructura. Los valores de este análisis paralelo se recogen en la tabla 5.4.

Viga con masas	A1	A2	A3	A4	A5	Media
1 ^{er} Conjunto	0,53	0,54	0,76	0,53	0,59	0,58
2 ^o Conjunto	0,63	0,52	0,53	0,49	0,68	0,56
3 ^{er} Conjunto	0,77	0,65	0,65	0,68	0,83	0,71
Media total						0,62

Viga con caucho	A1	A2	A3	A4	A5	Media
1 ^{er} Conjunto	0,79	0,74	0,53	0,71	0,84	0,72
2 ^o Conjunto	0,92	0,81	0,88	0,79	1,03	0,88
3 ^{er} Conjunto	0,85	0,69	0,62	0,71	0,92	0,75
Media total						0,78

Tabla 5.4. Factores de amortiguamiento de todas las señales extraídos en el análisis paralelo.

En esta ocasión, los valores arrojados del análisis son mucho más homogéneos, encontrándose poca variación de los datos incluso entre ensayos, pero resultando muy diferentes de los recogidos en la tabla 4.16. La tendencia de la estructura, sin embargo, sigue siendo clara: la adición de las capas de caucho sobre la viga provocan un cambio en su capacidad de

amortiguamiento. En este caso, este aumento es del 26%, mientras que el extraído de la tabla 4.16, refleja un 84%.

Esto conlleva una nueva comparación, entre los datos extraídos mediante MatLab y los calculados mediante el análisis modal con el software de CAE.

La tabla 5.5 muestra los valores obtenidos de la realización de los tres análisis realizados. Observando dicha tabla puede notarse que haciendo la selección de los espacios temporales óptimos, tras la observación de la totalidad de la señal, los valores del análisis mediante MatLab son mucho más parecidos que si se mantiene constante el intervalo de tiempo para dicha selección. De hecho, la máxima diferencia que puede encontrarse entre los valores calculados por FEMTools y los calculados mediante MatLab en dichas condiciones es de un 42%, mientras que si se mantiene constante el intervalo temporal, dicha diferencia asciende a un 73%.

Viga con masas	Distinto Instante	Mismo Instante	FEMTools
1^{er} Conjunto	0,29	0,29	0,14
2^o Conjunto	0,12	0,56	0,14
3^{er} Conjunto	0,20	0,71	0,20
MEDIA TOTAL	0,19	0,62	0,16

Viga con caucho	Distinto Instante	Mismo Instante	FEMTools
1^{er} Conjunto	0,51	0,72	0,18
2^o Conjunto	0,21	0,88	0,18
3^{er} Conjunto	0,41	0,75	0,26
MEDIA TOTAL	0,35	0,75	0,20

Tabla 5.5. Datos arrojados por los distintos análisis realizados.

La explicación a la situación anteriormente descrita puede encontrarse en la necesidad de contar con una visión global de las señales, buscando la representación, lo más limpia posible, del decremento logarítmico registrado. Resulta por tanto imprescindible evitar que en la selección temporal se encuentren datos que no formen parte del decremento logarítmico, ya que éstos interfieren en gran medida en el correcto cálculo del amortiguamiento modal.

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

Las principales conclusiones que pueden extraerse del trabajo desarrollado pueden resumirse en las siguientes:

1. Del análisis comparativo de dos tecnologías de acelerómetros, llama la atención que, a pesar de contar con sensibilidades muy parecidas, los datos registrados por ambos difieren en gran medida. Aunque los acelerómetros de tecnología MEMS eran triaxiales, y por tanto, la calidad de sus registros se ve comprometida, las excitaciones inducidas en la estructura fueron en todo momento verticales y se configuraron para almacenar solamente los datos correspondientes a dicho eje. Esto indica que dicha tecnología, a pesar de competir en precio, no supone un salto cualitativo en el registro de las respuestas dinámicas en las estructuras.
2. Ha podido comprobarse, mediante la realización de varios ensayos, que los Análisis Modales Operacionales constituyen una herramienta indispensable para la validación de los comportamientos dinámicos de las estructuras, permitiendo obtener numerosas características que condicionan el correcto funcionamiento de una estructura. Además, la realización sobre estructuras de pequeñas dimensiones, permiten extrapolar sus resultados.
3. Tras la realización de los diversos Análisis Modales Operacionales, se ha podido comprobar que resulta providencial el espíritu crítico del ingeniero encargado de ellos, pues la toma de decisiones a la hora de seleccionar aquellas formas modales normales resultan clave para la obtención de resultados coherentes y consistentes.
4. Asimismo, contar con amplios y claros conocimientos de las tres áreas de conocimiento que abarcan los análisis modales, permiten dominar en gran medida el correcto desarrollo de dichos análisis, dotando al ingeniero de una herramienta muy potente para la caracterización dinámica de las estructuras.
5. Dentro de los Análisis Modales Operacionales, existen diversos pasos, algunos de los cuales condicionan la posibilidad de tomar decisiones posteriores. En primer lugar, la realización de un peak-picking inicial permite tener una visión global del análisis que se realiza, pudiendo prever la posible situación de las frecuencias propias y por tanto, de los modos de vibración de la estructura.

6. Además, la selección del orden óptimo del polinomio de ajuste puede comportar una solución de compromiso entre la precisión de los resultados del análisis y de su coste computacional. Emplear tiempo en esta selección puede disminuir en gran medida el tiempo que requiere el procesado de las señales registradas.
7. Ha podido comprobarse que los indicadores de la calidad de los parámetros modales ayudan en gran medida a la toma de decisiones a la hora de identificar las diversas formas modales. Sin embargo, dichos indicadores deben estar acompañados de la representación de las diversas formas modales, que pueden dar idea de la complejidad del modo identificado.
8. En cuanto a la solución llevada a cabo para modificar la capacidad amortiguadora de las pasarelas peatonales esbeltas, ha podido comprobarse que resulta un método eficaz. El Análisis Modal Operacional llevado a cabo para cuantificarlo arroja datos concluyentes sobre dicha solución. La viga a la que se le añadieron dos capas de caucho en su superficie ha visto aumentado su factor de amortiguamiento en un 25% para el primer modo con respecto a aquella sin caucho, lo que supone un salto cuantitativo en su capacidad amortiguadora.
9. La comprobación de dicho análisis mediante la rutina de MatLab refuerza la conclusión extraída, pues el factor de amortiguamiento de la estructura calculado para el primer modo de vibración aumenta en gran medida.
10. Por último, debe tenerse en cuenta que los resultados obtenidos mediante la rutina de MatLab presentan una gran heterogeneidad, derivada en gran medida del intervalo temporal que se escoja en cada señal.

6.2 Recomendaciones

Se proponen como recomendaciones a tener en cuenta en futuros desarrollos de este proyecto las siguientes:

1. Una de las aplicaciones de los Análisis Modales Operacionales es lo que se conoce como Model Updating. Si se cuenta con un modelo en elementos finitos de la estructura, puede realizarse una actualización modal del comportamiento dinámico de la misma obteniendo las características modales mediante un OMA. De esta manera, podría contarse con un modelo actualizado y más preciso del comportamiento de dicha estructura.

2. Si se cuenta con una estructura de grandes dimensiones, en la que el peso del shaker no interfiera en las características modales de la misma, podría realizarse un Análisis Modal Experimental, de tal manera que, se extrajesen los parámetros modales mediante dos métodos distintos. La comparación de los resultados de ambos análisis puede resultar un ejercicio interesante.

7. Referencias bibliográficas

7.1 Libros

Evins, D.J. (1992). *Modal Testing: Theory and Practice*. Taunton: Research Studies Press Ltd.

He, J., Fu, Z.F. (2001). *Modal analysis*. Oxford: Butterworth-Heinemann.

Heylen, W., Lammens, S., Sas, P. (1998). *Modal Analysis: Theory and Practice*. Leuven: KU Leuven.

7.2 Artículos científicos

Albarbar, A., Mekid, S., Starr, A., Pietruszkiewicz, R. (2008). "Suitability of MEMS Accelerometers for Condition Monitoring: An experimental study". *Journal of Sensors*. Vol. 8, No. 2: pp. 784-799.

Allemang, R.J. (2003) "The Modal Assurance Criterion- Twenty years of use and abuse". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 265, No. 3: pp. 14-21.

Dorvash, S., Pakzad, S.N. (2012). "Effects of measurement noise on modal parameter identification". *Smart Materials and Structures*. Vol. 21.

Hanson, D. et al. (2008). "An in-service dynamic model of a diesel railcar from operational modal analysis and finite-element model updating". *Journal of Rail and Rapid Transit*. Vol. 222: pp. 313-320.

Hernández, J.M., Llorente, J.I., Fernandes, M.H., Avilés, R. (1996). "Un método integrado de actualización de modelos de elementos finitos utilizando datos procedentes del análisis modal experimental". *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 12, No. 1: pp. 53-71.

Juang, J.N., Pappa, R.S. (1985). "An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction". *Journal of Guidance*, Vol 8, No.5: pp. 620-627.

Pavic, A., Miskovic, Z., Reynolds, P. Modal testing and FE model updating of a lively open-plan composite building floor. 2007.

Peeters, B., De Roeck, G. (1999). "Reference-based Stochastic Subspace Identification for Output-Only Modal Analysis". *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 13, No. 6: pp. 855-878.

Rincon-Jara, R.I., Ambrosio, R., Mireles, J. (2010). "Análisis y caracterización de un acelerómetro capacitivo fabricado con tecnología polimúmp´s". *Superficies y Vacío*. Vol. 23, No. 3: pp. 26-31.

Van Nimmen, K., Lombaert, G., De Roeck, G., Van den Broeck, P. (2014). "Vibration serviceability of footbridges: Evaluation of the current codes of practice". *Journal of Engineering Structures*. Vol.59: pp. 448-461.

Zhang, L., Wang, T., Tamura, Y. (2009). "A frequency-spatial domain decomposition (FSDD) method for operational modal analysis". *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 24: pp. 1227-1239.

Živanović, S., Pavić, A. and Reynolds, P. (2007) "Finite element modelling and updating of a lively footbridge: the complete process. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 301, No. 1-2: 126-145.

7.3 Tesis Doctorales y Trabajos Fin de Máster

Govers, Y. (2012). *Parameter identification of structural dynamic models by inverse statistical analysis*. PhD Thesis, Kassel University.

Hoi, S. (2009). *Damage assessment in structures using vibration characteristics*. PhD Thesis, University of Technology, Queensland.

Kaya, H. (2004). *Experimental Modal Analysis of a Steel Grid Frame*. MSc Dissertation, The Middle East Technical University, Ankara.

Oyarzo, C. A. (2012). *Damage identification of unreinforced masonry structures based on vibration response*. PhD Thesis, The University of Auckland.

Qin, P. (2007). *System Identification of constructed civil engineering structures and uncertainty*. PhD Thesis, Drexel University, Philadelphia.

7.4 Papers de conferencias

Allemang, R.J., Brown, D.L. (2006). A Complete Review of the Complex Mode Indicator Function (CMIF) with Applications. In: *ISMA2006, International Conference on Noise and Vibration*. Leuven, 18-20 September 2006.

Garitaonandia, I., Albizuri, J., Fernandes, M.H., Hernández, J.M. (2007). Modelo dinámico reducido para la predicción de vibraciones autoexcitadas en una rectificadora sin centros. En: *8º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica*. Cuzco, 23-25 Octubre 2007.

Lauwagie, T., Guggenberger, J., Strobbe, J., Dascotte, E. (2010). Model updating using operational data. In: *The 24th International Conference on Noise and Vibration Engineering*. Leuven, 20-22 September, 2010. pp. 2669-2678.

Pavic, A., Hartley, M.J., Waldron, P. (1998). Updating of the analytical models of two footbridges based on modal testing of full-scale structures. In: *Proceedings of ISMA 23: International Conference of Noise and Vibration Engineering*. Leuven, 16-18 September 1998, Vol. 3, pp. 1111-1118.

Pavic, A., Widjaja, T., Reynolds, P. (2002). The use of modal testing and FE model updating to investigate vibration transmission between two nominally identical building floors. In: *International Conference on Structural Dynamic Modelling: Test, Analysis, Correlation and Validation*. Madeira, 3-5 June, 2002.

Phillips, A.W., Allemang, R.J., Fladung, W.A. (1998). The Complex Mode Indicator Function (CMIF) as a Parameter Estimation Method. In: *IMAC XVI - 16th International Modal Analysis Conference - Model Updating and Correlation*. Santa Bárbara, 2-5 February 1998.

Shih, C.Y., Tsuei, Y.G., Allemang, R.J., Brown, D.L. (1989). Complex Mode Indicator Function and its Applications to Spatial Domain Parameter Estimation. In: *IMAC VII- 7th International Modal Analysis Conference*. Orlando, 30 January-2 February 1989.

Tamura, Y., Zhang, L., Yoshida, A., Cho, K., Nakata, S., Naito, S. (2002). Ambient vibration testing and modal identification of an office building. In: *Proceedings of IMAC-XX*:

Conference & Exposition on Structural Dynamics, Smart Structures and Transducers. Los Ángeles 4-7 February 2002, Vol. 1, pp. 141-146.

Tim De Troyer, M.R., Guillaume, P. (2010). Frequency-domain modal analysis in the OMAX framework. In: *Proceedings of the IMAC-XXVIII.* Jacksonville, 1-4 February 2010.

Zhang, L., Sun, X., Wang, T., Tamura, Y. (2009). Narrow-band, Select-band vs Broadband Modal Identification: their Features and Comparisons. In: *Proceedings of the IMAC-XXVII.* Orlando, 9-12 February 2009.

7.5 Webs consultadas

Catálogo de especificaciones de acelerómetros piezoeléctricos, 2004. Disponible en: http://www.sensores-de-medida.es/uploads/acelerometros_piezoelctricos_mmf_r.pdf. [Último acceso: 21-02-2015].

Catálogo de especificaciones del registrador de señales MGC-Plus, 2015. Disponible en: <http://www.hbm.com/es/menu/productos/medicion-electronica-software/laboratorio-bancos-de-prueba/>. [Último acceso: 21-02-2015].