Universidad de Valladolid

MATEMÁTICAS: MÚSICA Y LETRA

Trabajo fin de Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Especialidad: Matemáticas.

Valladolid, Julio 2015

Autora: *Carmen Eugenia Velasco Lorenzo*
Tutor: *José Manuel Aroca Hernández-Ros*

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La base de la justificación de nuestro trabajo, que se presenta en la sección siguiente, es que nos proponemos presentar en él las relaciones, supuestamente desconocidas, entre la matemática y la música, sin embargo si preguntamos a personas de una cultura media muchas de ellas nos dirán que hay relaciones evidentes entre ambas, pero si profundizamos veremos que se refieren al uso de la aritmética en la medida de los compases, a la *música de las esferas* y a otras generalidades que no dicen nada ni de la música ni de las matemáticas.

No obstante las matemáticas están presentes en la música en sus aspectos esenciales.

- Las matemáticas son parte esencial en la teoría física del sonido, su generación en los distintos instrumentos y su transmisión (Acústica).
- Las matemáticas están en la base del lenguaje musical.
- Las matemáticas intervienen en la composición musical y no solamente en la forma más obvia de proporcionar simetrías, pautas, o periodicidades, en la música moderna hay una gran cantidad de estadística matemática e incluso tiene cabida algunos conceptos enormemente abstractos de álgebra.
- Las matemáticas han aparecido en la estética y también en la teoría de la música como elemento cuantificador de la calidad.
- Por último, señalemos que recientemente las letras de canciones con contenido matemático, sean de naturaleza crítica o destinadas a la enseñanza están teniendo bastante repercusión.

Los puntos anteriores reflejan una guía de la parte teórica de nuestro trabajo, que los recogerá con la única excepción del relativo a la estética que preferimos tocar en esta introducción a modo de contraejemplo.

G. David Birkhoff (1884-1994) fue uno de los matemáticos más notables de su generación. Es famoso por sus aportaciones a la resolución del problema de los cuatro colores, por su revolucionaria concepción de los sistemas dinámicos que le permitió obtener importantes resultados en el problema de los tres cuerpos. Trabajó con éxito en muchos campos de las matemáticas desde la teoría de números a la teoría ergódica y se le debe desde una axiomática original de la geometría métrica hasta la teoría matemática de los agujeros negros.

También Birkhoff entró en filosofía de la ciencia, su interpretación de la Teoría de Galois como teoría de la ambigüedad está en la base de la muy actual Teoría de Galois de ecuaciones diferenciales. Sin embargo podríamos decir de él lo mismo que Hector Berlioz decía de la octava sinfonía de Beethoven: *También Homero a veces dormitaba.*

En 1932 Birkhoff publicó una teoría matemática de la estética en la que proponía un método matemático para determinar el valor estético de un objeto. Para Birkhoff en cada objeto artístico hay dos factores importantes (Lluis-Puebla, ¿Matemáticas en la Música?, 1998):

- Un factor subjetivo que es el esfuerzo que supone para el observador apreciar las cualidades estéticas del objeto
- Un factor objetivo que consiste en la armonía, simetría, orden y otras cualidades que se consideran necesarias para que el objeto proporcione una experiencia estética, a la medida de este factor la representa por **O**
- Entonces la medida estética del objeto es el cociente de ambas cantidades: **M = O/C**

Naturalmente Birkhoff precisa después la determinación de estas cantidades, pero a priori y vista la evolución del arte, su propuesta no parece muy razonable. Tuvo seguidores que llevaron al extremo, y también al absurdo, su teoría, entre ellos el Dr. Pritchard cuyo tratado *Apreciar la poesía*, es el sujeto de una escena memorable en la película *El club de los poetas muertos*, escena que nos permite pasar sin más comentarios de esta presencia de las matemáticas en el arte en general y en la música en particular.

Volviendo a nuestra afirmación inicial de que tradicionalmente se ha considerado que las matemáticas y la música están íntimamente relacionadas, destaquemos que según Gardner, el fundador de la teoría de inteligencias múltiples, las personas que están más dotadas para las matemáticas se muestran frecuentemente interesadas en la música. Hablamos de interés y no de habilidad. Probablemente sea Leibniz el que explica este hecho cuando define la música como: *El* *arte de contar sin saber que se está contando.* Cabe la posibilidad de que el buen matemático perciba de modo inconsciente pautas y relaciones que no están al alcance de personas menos entrenadas.

Por el contrario, a los músicos no le les atribuye un especial interés por las matemáticas, aunque desde la noche de los tiempos el lenguaje musical utiliza la matemática para su comprensión. Antiguas civilizaciones como los chinos, egipcios y mesopotámicos estudiaron los principios matemáticos del sonido. En Grecia, los pitagóricos fueron los primeros que investigaron las escalas musicales en términos de proporcionalidad numérica. Los pitagóricos dividieron la ciencia Matemática en cuatro secciones: aritmética, geometría, astronomía y música, que constituían la esencia del conocimiento. Su doctrina principal era: ***"****Toda naturaleza consiste en armonía que brota de los números".*

Los pitagóricos relacionaron los intervalos musicales con las distancias que separan los planetas y astros: por ejemplo, un tono estaría relacionado con la distancia entre la Tierra y la Luna, un intervalo de quinta se relacionaría con la distancia entre la Tierra y el Sol. La teoría no tiene soporte científico, pero de la misma manera que la luna y el sol regulan fenómenos naturales como las mareas de enorme repercusión en la vida humana, puede haber impreso en nuestros genes la capacidad de diferenciar matices relacionados con su actividad gravitatoria.

Señalemos que música y matemáticas, comparten una serie de propiedades que son las que intentaremos poner de manifiesto a lo largo de este trabajo.

- Ambas son lenguajes universales: esta es la propiedad fundamental y la más excepcional que comparten música y matemáticas.
- Son lenguajes abstractos: cada uno de estos lenguajes tiene su propia notación y no puede ser comprendido por los no iniciados.
- La teoría de ondas juega un papel prioritario en la percepción de la música y esta teoría se puede analizar matemáticamente.
- Ambas buscan la belleza: tanto los músicos como los matemáticos puros buscan la belleza de sus creaciones.

Y señalemos también que hay una diferencia esencial entre ambas, las matemáticas no son para espectadores, tienen un lenguaje que si no se domina, no se entiende en absoluto, Sylvester se preguntaba en 1864 (Lluis-Puebla, ¿Matemáticas en la Música?, 1998):

¿No será la música la matemática del sentimiento? ¿No será la matemática la música de la razón? ¿No tendrán ambas el mismo alma?

Para Emilio Lluis-Puebla notable matemático mexicano especialista en K-teoría y magnifico concertista profesional de piano:

La matemática es una de las Bellas Artes, la más pura entre ellas, que además tiene el don de ser la más precisa de las Ciencias.

JUSTIFICACIÓN DEL TEMA ELEGIDO

En la enseñanza, tanto elemental como media, una vez que se alcanza la etapa en la que se separan los bloques de materias, lengua, sociales, naturales, matemáticas etc., cada área funciona de manera totalmente independiente y nunca se trata de poner de manifiesto las interconexiones entre ellas. Este hecho es especialmente grave en el caso de las matemáticas, puesto que contribuye eficazmente a fomentar la opinión, ya muy extendida, de que las matemáticas no tienen aplicación en la vida real, son muy abstractas y no se sabe muy bien para qué sirven.

Los matemáticos profesionales tampoco somos conscientes muchas veces de la utilidad, el interés y la belleza de las matemáticas, nuestra formación es excesivamente técnica, especializada y sobre todo exclusivamente matemática, ya que los planes de estudio raramente contienen asignaturas que no sean de naturaleza estrictamente matemática.

Nuestro trabajo no se propone remediar esta situación, eso es algo que queda fuera de nuestro alcance, y de los límites de un trabajo de fin de master, nos proponemos simplemente romper una lanza en defensa de la multidisciplinariedad. Somos conscientes de que las matemáticas, tanto como lenguaje como en su papel instrumental, están presentes en casi todas las actividades humanas y pretendemos ponerlo de manifiesto tomando una actividad artística tan alejada, aparentemente, de las matemáticas como es la música.

Intentaremos mostrar que este alejamiento no es real, que las matemáticas están presentes en la música, y no solo en la física de la música o en el lenguaje musical, están presentes en la creación musical. Así, en la idea de transmitir al alumnado algunas de las múltiples relaciones existentes entre las matemáticas y otras actividades humanas, queremos presentar un proyecto diferente que trata de romper esquemas y luchar contra la monotonía. Queremos probar que se pueden y se deben abrir vías de colaboración entre los diferentes seminarios de un centro docente. Y eso queremos hacerlo sin olvidar la belleza de las matemáticas.

Los profesores debemos ser conscientes de la utilidad y el interés de lo que explicamos, pero sobre todo debemos sentirnos entusiasmarnos con nuestra materia. Solo así lograremos la atención de nuestros alumnos.

No olvidemos que el trabajo de un profesor es fundamentalmente formar a sus alumnos, pero hoy en día su papel no puede limitarse a "enseñar" unos conocimientos. El profesor debe promover el desarrollo cognitivo y personal de sus alumnos mediante actividades que, aprovechando la gran cantidad de información disponible les exijan un procesamiento activo e interdisciplinario de la misma. Este proceso de promoción de las capacidades del alumno no puede disociarse del de enseñar.

Los movimientos sociales tienen carácter pendular y tras un largo periodo de métodos de enseñanza basados exclusivamente la clase magistral y la posición autoritaria del profesor, hemos entrado en el extremo del profesor únicamente *mediador* y eso ante la complejidad y diversidad del quehacer matemático es difícil de defender.

Sin embargo, es bien cierto que los medios existentes permiten una atención cada vez más personalizada a los alumnos, alejándonos de la clase magistral, exigen colaboración con otros colegas (superando el tradicional aislamiento, fruto de la organización de los centros y los planes de estudio) y posibilitan mantener una actitud investigadora en las aulas. En ese espíritu tratamos de proponer actividades complementarias que requieran al alumno un pensamiento independiente y fomenten su capacidad de enfrentarse a problemas complejos de solución no concluyente, que son los comunes en la vida real.

L. Tébar Belmonte, en el libro de ensayos*: El perfil del profesor mediador* (Aula XXI, Santillana, Madrid 2003) expone una serie de rasgos fundamentales del profesor, entre los que destacamos:

- Fomentar el logro de aprendizajes significativos, transferibles.
- Fomentar la búsqueda de la novedad: curiosidad intelectual, originalidad. pensamiento convergente.
- Potenciar el sentimiento de capacidad: autoimagen, interés por alcanzar nuevas metas.
- Compartir las experiencias de aprendizaje con los alumnos: discusión reflexiva, fomento de la empatía del grupo.

Nuestra propuesta va esencialmente en esa línea, presentamos una serie de relaciones entre dos campos aparentemente alejados, Música y Matemáticas, que prueban que ese presunto alejamiento no es real. Las matemáticas están en el lenguaje de la música, en su base física, y en determinados casos aparecen incluso en la composición musical.

Pretendemos que los alumnos completen sus conocimientos musicales, para ello colaboraremos con el seminario de música, que discutan la base física de la música y que entiendan en qué manera las matemática tienen una capacidad para descubrir y producir pautas, que puede colaborar de modo importante con el arte.

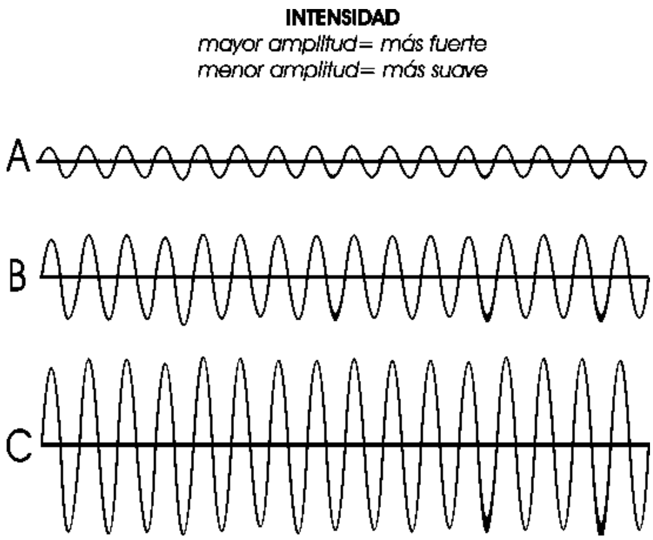
ASPECTOS FORMALES

§1 – Física de la música. Cualidades físicas del sonido.

El sonido es un movimiento ondulatorio que se propaga en un medio material, generalmente el aire y es susceptible de impresionar el, órgano del oído. Las ondas sonoras son longitudinales ya que las ondas sonoras se originan mediante el movimiento vibratorio de un cuerpo en contacto con el aire y su propagación tiene la misma dirección que la vibración que la produce. Desde el punto de vista físico, son cualidades básicas del sonido: intensidad, tono y timbre. Y no podemos olvidar un parámetro no estrictamente físico y de especial interés en la música la sensación sonora.

<u>Intensidad</u>

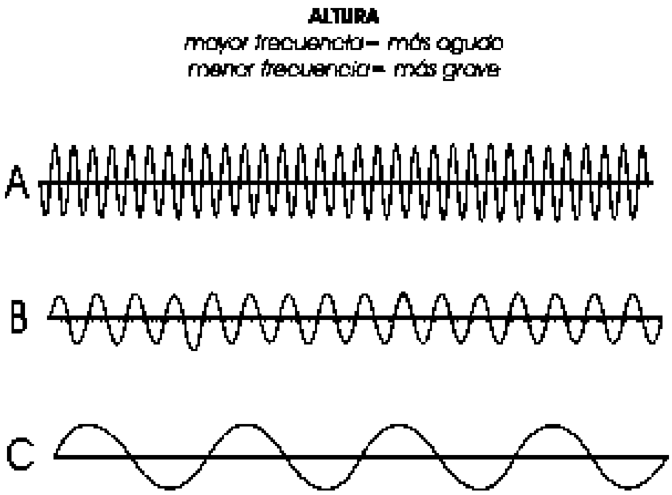
La intensidad de un sonido que percibimos y que nos permite interpretarlo como fuerte o débil, está relacionada con la amplitud de la onda sonora correspondiente. Se trata de una magnitud que nos indica cuánta energía está siendo transportada por la onda. Se define formalmente como la energía que atraviesa por segundo, a la unidad de superficie dispuesta perpendicularmente a la dirección de propagación. Se expresa en W/m^2.



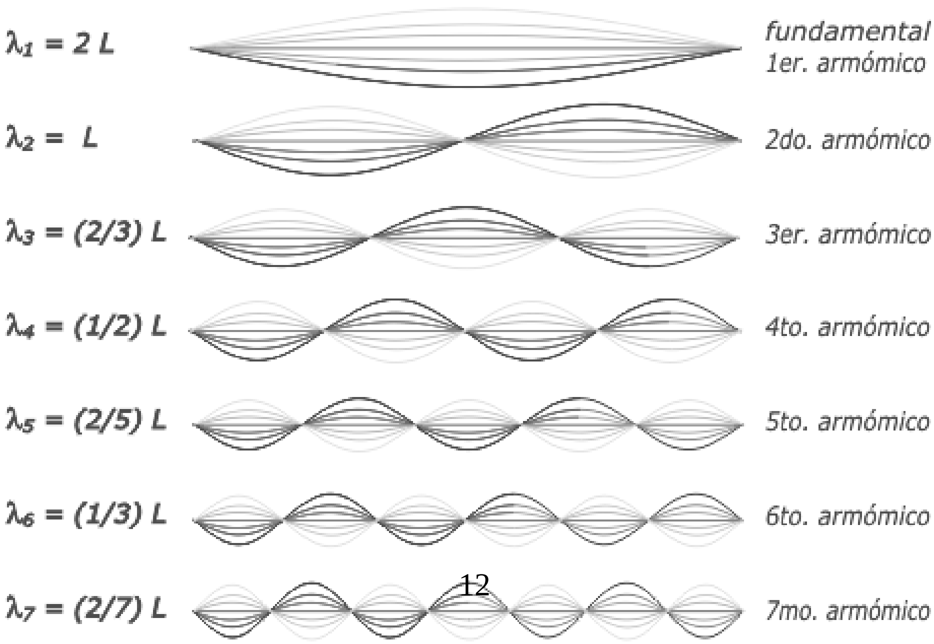
La energía transportada por la onda es proporcional al cuadrado de su amplitud. Por ejemplo, si la amplitud de un sonido es tres veces superior a la de otro, su intensidad será nueve veces mayor. Depende de la fuerza de la ejecución del sonido y de la distancia del receptor de la fuente sonora, de hecho es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al receptor.

<u>Tono o altura</u>

El tono de un sonido depende directamente de la frecuencia, permite clasificar los sonidos en agudos o altos, los de frecuencia alta y en graves o bajos los de baja frecuencia.



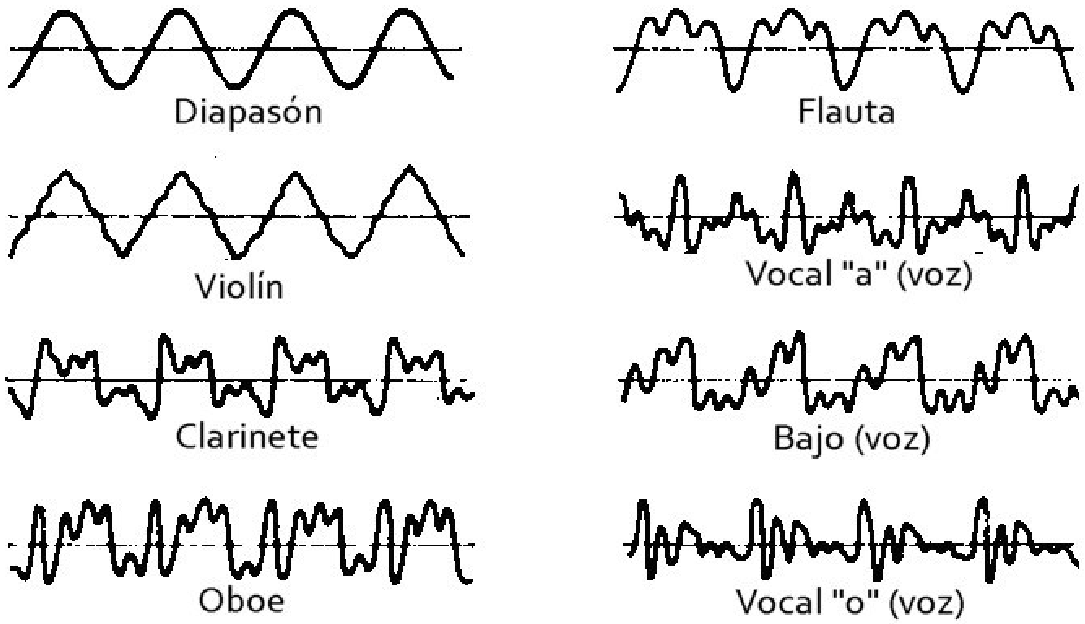
La unidad de medida de la frecuencia es el hercio, que es una vibración por segundo. Una cuerda que vibra cuanto más oscilaciones da, mayor será su frecuencia musical y más aguda será la nota musical resultante. Es la que determina el nombre de las notas. Aquellos sonidos cuyas frecuencias son múltiplos de la de otro, se dice que son sus armónicos:



El oído humano es capaz de percibir vibraciones con frecuencias en un rango de entre 20 y 20.000 Hz. Para ordenar las alturas relativas de los sonidos, en 1939 se determinó el *diapasón normal la* como tono de referencia cuyo valor es 440 Hz, aunque este valor es una convención, y en según las épocas y lugares puede variar. Hay que tener en cuenta que dos notas cuya frecuencia sean 441Hz y 882Hz están afinadas entre sí en relación de octava aunque no correspondan con el *la* oficial y si fueran por ejemplo 441Hz y 884Hz no estarían afinadas en relación de octava pero el oído reconocería una octava no afinada.

Timbre

Esta cualidad nos permite distinguir sonidos producidos por diferentes instrumentos aunque estén a mismo tono e intensidad. Cada instrumento tiene su propio timbre, incluso la voz de cada individuo, lo cual nos permite distinguir a las personas cuando hablan.



Fourier probó que “toda onda compleja puede descomponerse en suma de sus armónicos puros, afectados de la intensidad y de la fase adecuadas”. Es decir, que todo sonido musical, tenga el timbre que tenga, puede obtenerse sumando un número infinito de armónicos, lo que aunque sea impracticable de modo exacto, en la práctica nos permite obtener buenas aproximaciones.

Sensación sonora

En lo que se refiere a frecuencia los límites de la audición son por término medio de 20 a

20.000 hercios y en cuanto a intensidades el límite inferior está en torna a los 10^{-17} W/cm² y la sensación desagradable se sitúa en 10^{-4} W/cm², pero estos valores dependen de la frecuencia y a 1000 hercios el umbral de audición está en 10^{-16} W/cm².

Se ha comprobado experimentalmente que no existe proporcionalidad entre la intensidad física del sonido y la sensación sonora que nos produce. Una ley empírica, la ley de Weber–Fechner, que relaciona los estímulos con las sensaciones establece que la sensación es una función lineal del logaritmo de la excitación.

En nuestro caso, si dos sonidos de intensidades, $\mathrm{I}_0\,,\mathrm{I}_1$ producen sensaciones $\mathrm{S}_0\,,\mathrm{S}_1$, podemos escribir:

$$\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_0 = a \cdot log_{10} I_1 - a \cdot log_{10} I_0 = a \cdot log_{10} \frac{I_1}{I_0}$$

Si tomamos como I_0 la intensidad correspondiente al umbral de audición correspondiente a una frecuencia de 1000 herzios (10^{-16} W/cm²), el valor de S_0 será cero y para una intensidad I, (medida en W/cm²) la sensación sonora será:

$$S = a \cdot log_{10} \frac{I}{10^{-16}}$$

Como es un cociente de dos cantidades de la misma magnitud, la sensación sonora no tiene unidades. Inicialmente se dio a la constante a el valor uno y se decía que la sensación se mide en belios, llamando belio a la sensación sonora producida cuando la intensidad del sonido es diez veces la intensidad correspondiente al umbral de audición, pero como el oído humano percibe sensaciones más pequeña, se ha adoptado como unidad el decibelio o décima parte de un belio, entonces la sensación sonora es:

$$S = 10.\cdot log_{10} \frac{I}{10^{-16}} \text{ decibelios}$$

Señalemos para terminar que somos más sordos, es decir nos producen menos sensación sonora, para los sonidos graves que para los agudos, por lo que a medida que nos alejamos de un foco emisor de un sonido complejo (el producido por un conjunto de instrumentos musicales por ejemplo) el sonido percibido se nos hace más agudo, al ir dejando de percibir los graves, este hecho es utilizado frecuentemente por los compositores para dar la sensación de lejanía.

Indiquemos por último que la cantidad de energía que ha de transportar la onda para transmitir la sensación sonora es muy pequeña, se puede calcular la energía sonora emitida en un concierto sinfónico y comprobar que no bastaría para calentar una taza de café.

§2 .- Las escalas musicales. Teoría matemática.

¿Cómo se presentaría la teoría de las escalas musicales desde un punto de vistas axiomático? Siguiendo (Girbau i Badó, 1985) y a J.A. Navarro vamos a ver qué es posible presentar un sistema de axiomas elegir en los cuales encajan las diferentes escalas musicales.

Antes de nada, vamos a identificar a cada **sonido** con su frecuencia. El conjunto de sonidos será entonces el de los reales positivos, $\mathbf{R}^+$. Pero hay que tener en cuenta que nos es más difícil identificar un sonido por sí solo que compararlo con otro, esta comparación significa en términos matemáticos una "distancia" entre ellos. ¿Cómo definir esta distancia?

Supongamos que tenemos 4 sonidos s_1, s_2, s_3 y s_4 de tal forma que: $s1 < s2$, $s3 < s4$. Diremos que el **intervalo** musical determinado por s_1 y s_2 es igual (tiene la misma longitud) que el determinado por s_3 y s_4 si

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{s_4}{s_3}$$

y que el primer intervalo es más corto que el segundo si:

$$\frac{s_2}{s_1} < \frac{s_4}{s_3}$$

Si definiéramos la distancia entre s_1 y s_2, como $\frac{s_2}{s_1}$, esta función no cumple las propiedades de distancia ($\mathrm{d}(s_1, s_1) = 1 \neq 0$ por ejemplo), entonces, y precisamente para que la distancia entre dos sonidos sea cero si y solo si coinciden, modificaremos nuestra función y definiremos la **distancia** entre dos sonidos como:

$$d(s,t) = k \cdot |\log \frac{t}{s}|$$

donde k es una constante positiva que depende de la unidad de medida.

Puede apreciarse que estamos de nuevo y esta vez por razones formales ante la ley de Weber-Fechner.

Una **escala musical** es un subconjunto E del conjunto de frecuencias que cumple las siguientes propiedades:

A_1) Existe una biyección f entre el conjunto de los enteros y E que conserva el orden.

A_2) Si $s \in E$, entonces $2 \cdot s \in E$ y $\frac{s}{2} \in E$.

A los elementos de E los llamamos **notas**. La propiedad A_1 nos dice que la escala es ilimitada tanto por arriba como por abajo y la A_2 que si una escala contiene una nota, también contiene a una octava más alta y a una más baja.

Si E es una escala musical, podemos definir la siguiente relación de equivalencia: dos notas s y t de E son equivalentes ($s \equiv t$) si existe q entero con:

$$s = 2^q \cdot t$$

Proposición: El conjunto cociente $E/\equiv$ es un conjunto finito.

<u>Demostración</u>: Sea $s_1 \in E$. Entre s_1 y $2 \cdot s_1$ hay un número finito de elementos de E (en caso contrario no se cumpliría A_1). Los llamaremos $s_2, s_3 \ldots s_r$. Si tomamos cualquier $t \in E$, se verifica que t es equivalente a un s_i (con i entre 1 y r). En efecto, sea k el menor entero con $s_1 \leq 2^k \cdot t$. Entonces $2^k \cdot t < 2 \cdot s_1$ ya que en caso contrario, $2 \cdot s_1 \leq 2^k \cdot t$, implica que $s_1 \leq 2^{k-1} \cdot t$ lo cual contradice la elección de k. Tenemos pues que $s_1 \leq 2^k \cdot t < 2s_1$ con lo que $2^k \cdot t \equiv s_i$ para algún i entre 1 y r.

A las notas de una escala se les asigna un nombre de manera que dos notas equivalentes llevan el mismo nombre. Por ello podemos abusar del lenguaje y llamar notas a los elementos de $E/\equiv$. A veces en la música se recurre a los subíndices para distinguir notas equivalentes (do_1, do_{-1}, do_3…).

Escalas equivalentes. Podemos definir una escala dando las frecuencias de cada nota. Ahora bien, las frecuencias de las notas han ido cambiando con el paso del tiempo. Por ejemplo, el la_3, utilizado para afinar los instrumentos, ha pasado de 404 hercios en 1699 a 435 en 1879 a 440 en 1939. De manera rigurosa, estas escalas son diferentes al contener notas distintas, pero son escalas equivalentes.

Diremos que dos escalas E y E' son equivalentes si existe un $k > 0$ con $E' = k \cdot E$ (donde

$k \cdot E$ significa el subconjunto de $\mathbf{R}^+$ que se obtiene multiplicando por k cada elemento de E'). Como observación $d(s,t) = d(k \cdot s, k \cdot t)$ por lo cual dos escalas equivalentes conservan la distancia entre sus notas. Abusando de nuevo del lenguaje, utilizaremos *escala* para referirnos a la clase de equivalencia de escalas.

Con los axiomas A_1 y A_2 podemos imaginarnos una infinidad de escalas diferentes. Nos preguntamos ahora si podríamos acotar más esta definición.

Según la teoría de Fourier, cada sonido de frecuencia s se puede descomponer en sonidos sinusoidales de frecuencias $s, 2 \cdot s, 3 \cdot s, 4 \cdot s$ ... con menor amplitud cada vez. El sonido sinusoidal de frecuencia s se llama *fundamental*, y el resto se llaman sus *armónicos*. Nótese que si $s \in E$ entonces $2s, 4s, 6s, \ldots \in E$ en virtud de A_2.

¿Podríamos añadir los siguientes axiomas para que la escala contenga los primeros armónicos de cada nota?

A_3) (Axioma de Pitágoras) Si $s \in E$, *entonces* $3 \cdot s \in E$.

A4) Si $s \in E$, *entonces* $\frac{s}{3} \in E$.

Los pitagóricos aun no conociendo la teoría de los armónicos, estimaban la conveniencia de incluir estos axiomas en la definición de escala.

Teorema: A_1, A_2 y A_3 son incompatibles.

Demostración: Veamos que si E es un subconjunto de $\mathbf{R}^+$ que cumple A_2 y A_3 entonces no puede cumplir A_1. Para cada entero positivo q, denotamos $k(q)$ al mayor entero positivo tal que $2^{k(q)} < 3^q$. Se cumple que:

$$2^{k(q)} < 3^q < 2^{k(q)+1}$$

es decir:

$$1 < \frac{3^q}{2^{k(q)}} < 2$$

Sea $s \in E$. Tenemos que:

$$s < \frac{3^q \cdot s}{2^{k(q)}} < 2 \cdot s$$

Cada una de estas tres notas pertenece a E para cada entero positivo q (por los axiomas A_2 y A_3). Ahora bien, si $q \neq q'$ tenemos que

$$\frac{3^q}{2^{k(q)}} \neq \frac{3^{q'}}{2^{k(q')}}$$

Lo cual implica que entre s y $2 \cdot s$ existen infinitas notas de la escala contradiciendo A_1.

Dadas n frecuencias $s_1 \dots s_n$ designaremos por $< s_1 \dots s_n >$ a la mínima escala que las contiene, es decir:

$$< s_1 \dots s_n > = \{2^q \cdot s_i, con\ q\ entero\ y\ i = 1 \dots n\}.$$

Dada una escala E llamaremos **norma de E** a la máxima distancia entre dos notas consecutivas de E.

Dada una frecuencia s y un número positivo M con $\mathrm{M} < \mathrm{d}(\mathrm{s}, 2\mathrm{s})$ diremos que E es una **escala pitagórica** (asociada a s y M) si es de la forma:

$$E = < s, 3s, \dots, 3^q s >$$

con q siendo el primer entero positivo tal que la norma de $< s, 3 \cdot s, \dots, 3^q \cdot s >$ es menor que M.

La elección de s no es importante, ya que obtendríamos escalas equivalentes. Por ello, tomaremos $s = 1$. Lo que sí que determina la escala es la elección de M.

Partiendo de la escala pitagórica de 3 notas $< 1,3,9 >$ (hemos supuesto ya que $s = 1$), los representantes de 3 y de 9 en el intervalo [1,2] serán $\frac{3}{2}$ y $\frac{9}{8}$ respectivamente. La escala será:

$$\dots < 1 < \frac{9}{8} < \frac{3}{2} < 2 < \cdots$$

donde los puntos suspensivos indican que las notas se repiten multiplicadas por potencias de 2. Si calculamos las distancias entre las notas sucesivas de esta escala obtenemos:

$$d\left(1, \frac{9}{8}\right) = k \cdot \log(\frac{9}{8})$$

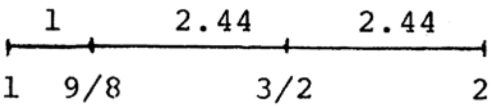
$$d\left(\frac{9}{8}, \frac{3}{2}\right) = k \cdot \log\left(\frac{4}{3}\right) = d(\frac{3}{2}, 2)$$

$$d(1,2) = k \log(2)$$

Tomando $k = (\log(\frac{9}{8}))^{-1}$ tenemos que:

$$d\left(1, \frac{9}{8}\right) = 1$$

$$d\left(\frac{9}{8},\frac{3}{2}\right) = d\left(\frac{3}{2},2\right) = 2.442\ldots$$
$$d(1,2) = 5.884\ldots$$



La elección de M hará que nuestra escala pitagórica sea más o menos espesa. La **escala pitagórica usual** se construye con:

$$M = d\left(1,\frac{9}{8}\right) = 1$$

Con ella obtenemos las 7 notas tradicionales

Escala pitagórica cromática: tomando un $0.56 < M < 1$, obtenemos las 12 notas.

Escala temperada: diremos que una escala es cromática y temperada, si cumple A_1, A_2 y el siguiente axioma:

A_5) la distancia entre dos notas consecutivas es constante.

Sea s una frecuencia. Consideramos las notas:

$$s, 2^{\frac{1}{12}}\cdot s, 2^{\frac{2}{12}}\cdot s, \ldots, 2^{\frac{11}{12}}\cdot s$$

y las generadas por sus multiplicaciones por potencias de 2. Todas las notas consecutivas están a la misma distancia, obtendremos una escala que llamaremos cromática temperada de 12 notas.

Si E es una escala temperada, y $s \in E$, entonces $3\cdot s \notin E$. Si $s \in E$, la mínima distancia entre $3\cdot s$ y un elemento de E es independiente de s. A esta distancia la llamaremos **desviación pitagórica** y la denotaremos con $DP(E)$. Este valor mide el grado de cumplimiento de A_3 de E. Si es muy pequeño, aunque $3\cdot s$ no pertenezca realmente a la escala, a efectos prácticos es como si perteneciera.

Vamos ahora a medir la desviación pitagórica para una escala temperada de n notas: $E_n = \{s, 2^{\frac{1}{n}}s, \ldots, 2^{\frac{n-1}{n}}s\}$. Por comodidad, la unidad de distancia tomada será tal que

$$d(s, 2\cdot s) = \log 2$$

es decir, $k = 1$ en la fórmula de la distancia. La distancia entre dos notas consecutivas será $\frac{\log 2}{n}$. Las distancias consecutivas estarán distribuidas como: (el 0 representa la la distancia de s a sí mismo)

$$\ldots, \frac{\log 2}{n}, 0, \frac{\log 2}{n}, \frac{2 \cdot \log 2}{n}, \ldots, \frac{(n-1) \cdot \log 2}{n}, log2, \ldots$$

El sonido de frecuencia $3 \cdot s$, que nos está en nuestra escala, estará a distancia $log3$ de s. Entonces $DP(E)$ vendrá dado por:

$$\left| \frac{m \cdot log2}{n} - log3 \right|$$

donde m es el entero positivo que hace mínima esta expresión.

Girbau obtiene la tabla que aparece en la página siguiente. En ella se aprecia que:

- De entre las escalas de pocas notas, las que mejor cumplen A_3 son las de 5 y 7 notas.
- Para $n = 12$, la desviación pitagórica es menor que el resto, lo cual indica que la escala cromática temperada de doce notas, que es la usual en el piano, es la que mejor cumple A_3 (de entre las escalas temperadas de 2 a 13 notas), es decir, $3 \cdot s$ sin estar en E, es como si lo estuviera.

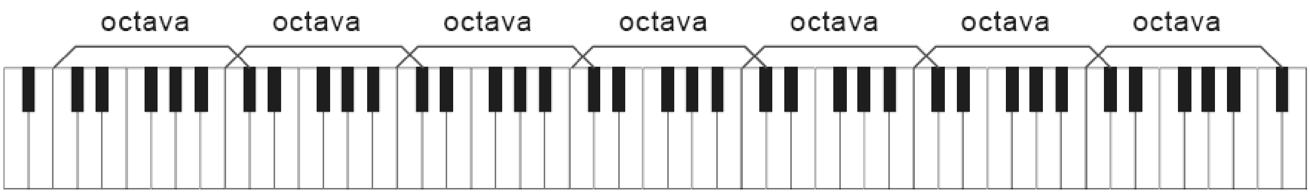
N	DP
2	0.0256
3	0.0246
4	0.0256
5	0.0045
6	0.0246
7	0.0041
8	0.0121
9	0.0089
10	0.0045
11	0.0119
12	0.0005
13	0.0092

Si hiciésemos el cálculo para valores de n más grandes con la esperanza de mejorar $DP(E_{12})$, obtenemos por ejemplo que $DP(E_{29}) = 0.00037$. Se calcularon para valores de n hasta 15601, y algunos de los mejores resultaros fueron:

$$DP(E_{41}) = 0.00012$$
$$DP(E_{53}) = 0.000017$$
$$DP(E_{665}) \simeq 10^{-7}$$
$$DP(E_{15601}) \simeq 10^{-9}$$

§3 .- Las escalas musicales. Teoría musical.

Las escalas son la base de los sistemas de organización, en orden de altura, de los sonidos; están formadas por una serie de notas consecutivas que se suceden (ascendente o descendentemente) de forma regular y que se repiten a partir de la octava. De modo que todas las escalas pueden transponerse, pero sigue siendo la misma escala, solo que desde otra altura



Aunque el estudio de la escalas se ha circunscrito dentro del ámbito de la música tonal, la realidad es que este sistema solo representa una pequeña parte de la organización de sonidos que han existido y existen. Dichos sistemas pueden ser englobados en dos bloques:

1. Jerárquicos (modal, tonal, etc.) que consideran que entre las notas de la escala que divide la octava hay unas notas más importantes que otras a las cuales se les otorga una polaridad o lo que es lo mismo un poder de atracción.

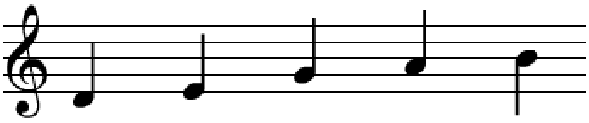
2. No jerárquicos (dodecafonismo, serialismo, atonal, etc.) las series usadas son de muy diversa índole dependiendo de la subdivisión mínima que se use como base; es decir, si existen o no micro intervalos

La razón de la escala está en la necesidad de disponer de un número limitado de notas entre las infinitas frecuencias existentes que el oído humano puede percibir. Para ello se busca dividir la gama de frecuencias en intervalos sencillos.

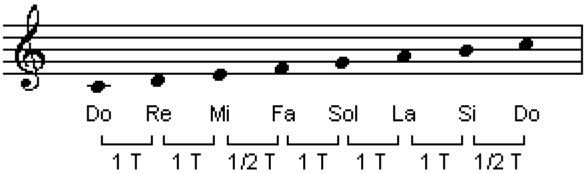
Esa idea intuitiva de sencillos, difiere con las culturas y las épocas. Inicialmente esa elección fue fruto de la intuición y la sensibilidad, que tienen que ver con el fenómeno físico de los armónicos de un sonido. Más adelante en el occidente europeo y en el siglo XVIII se comenzó a sistematizar la elección de los intervalos usando ya las bases físicas del sonido.

Como consecuencia de la diversidad de orígenes del proceso histórico de elección de intervalos, nos encontramos ante una enorme diversidad de escalas y formas de hacer música, la talla de este trabajo nos permitirá solamente hablar de unas pocas de ellas, de entre las que destacaremos tres:

1. La escala *pentafónica*, que como su nombre indica consta de 5 notas. Es característica de la cultura china y mongólica aunque también usada en muchas otras culturas (africanas, europeas asiáticas, americanas, etc.). El ejemplo mostrado a continuación representa la escala pentafónica *yo*, utilizada en los cantos budistas.

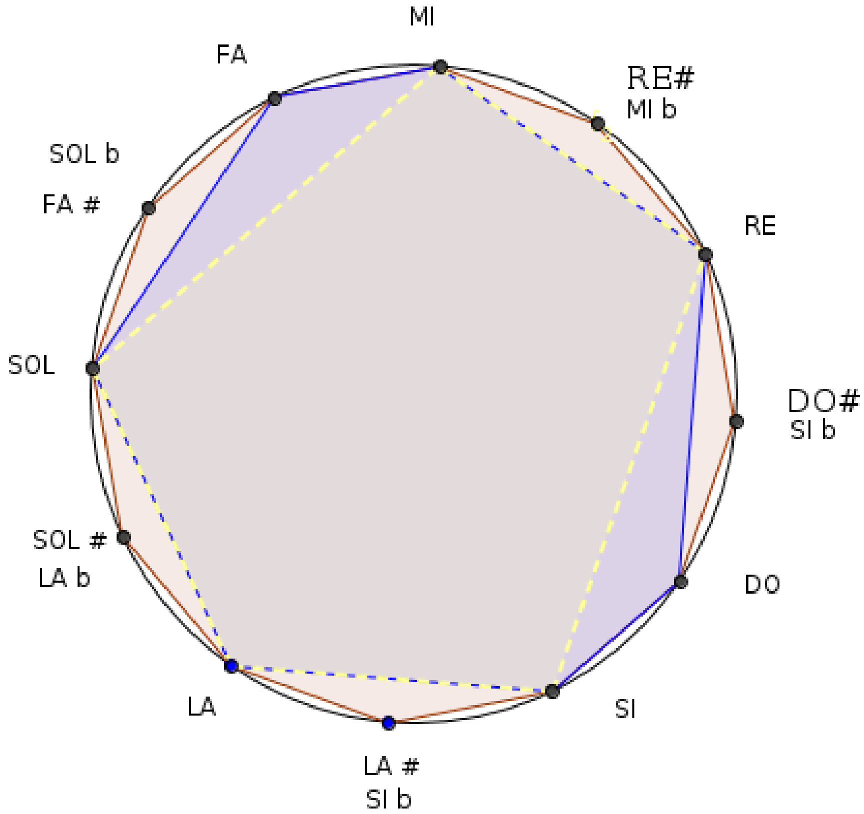


2. La *heptatónica* o *diatónica* también llamada *natural*. Esta escala se utiliza desde la Edad Media en todo el mundo occidental, y es la base de la música occidental.

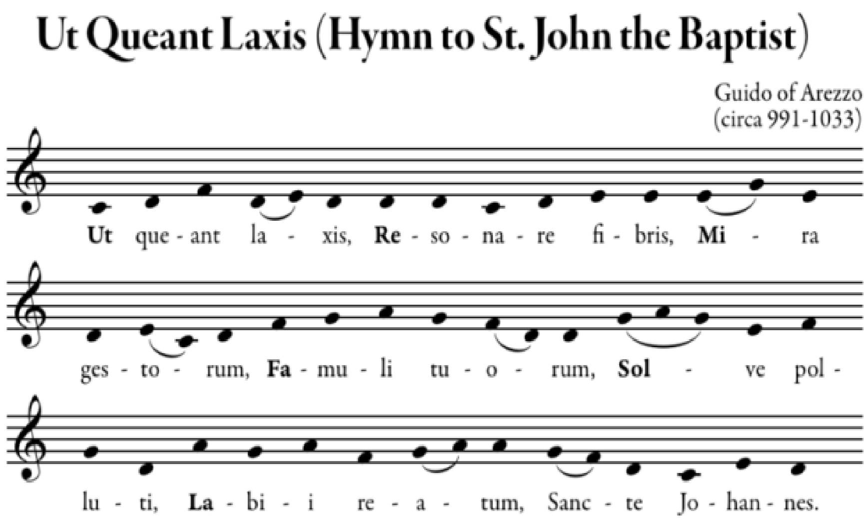


3. La escala *dodecafónica* o *cromática*, que es una ampliación de la diatónica, de manera que entre cada dos notas hay un semitono.

En el siguiente esquema comparativo aparecen representadas estas tres escalas por polígonos. El polígono de la escala cromática es regular mientras que en las otras dos son polígonos irregulares, que se corresponde con la asimetría acústica.



Las denominaciones do, re, mi, fa, sol, la, si de las notas de la escala diatónica fueron establecidas por Guido D'Arezzo (990-1058), benedictino al cual atribuimos la invención del sistema de solfeo actual. En la siguiente imagen vemos que cada nota toma su nombre de la primera sílaba del himno a San Juan Bautista, compuesto por él.



Traducción

Para que puedan
exaltar a pleno pulmón
las maravillas
estos siervos tuyos
perdona la falta
de nuestros labios impuros
San Juan.

Aunque no es nuestra intención hacer la parte musical de nuestro trabajo excesivamente técnica, necesitamos algunas definiciones para adecuar a la nomenclatura musical algunos de los conceptos que hemos manejado anteriormente y los que manejaremos de aquí en adelante.

- Un *sistema de afinación*, es cada una de las maneras de elegir los sonidos que utiliza la música. Como hemos señalado en la teoría matemática es un subconjunto de los reales que contiene las frecuencias usadas en la música. Se seleccionan unas frecuencias determinadas y se descartan el resto. Las seleccionadas en el sistema de afinación se denominan notas musicales.

- Hay dos tipos de sistemas de afinación:
    1. <u>Afinaciones</u>: Todos los números que aparecen como cociente de una nota y una nota patrón, llamada diapasón, son racionales. En este caso los intervalos entre notas se dice que son justos.
    2. <u>Temperamentos</u>: En este caso aparece como cociente algún número irracional. Los intervalos son aproximadamente iguales, ya que en estos casos se varía levemente la afinación de algunos de ellos.

Entonces la diferencia entre afinación y temperamento, está en que en el primer caso se trata de conseguir consonancias justas, como es el caso de la afinación Pitagórica y la afinación justa, y en el otro tenemos un compromiso o ajuste entre consonancias, adquiriéndose ciertas ventajas a costa de desafinar algunos intervalos (por ejemplo en el temperamento igual ninguna consonancia es justa pero se puede modular a cualquier tonalidad).

Hay dos tipos de afinaciones (sistemas cíclicos, y regulares) y tres tipos de temperamentos (iguales, irregulares y mesotónicos) en cuyas definiciones no entraremos.

- En música, un *tono*, es el mayor de los intervalos entre notas consecutivas de una escala, más intuitivamente, es el intervalo musical entre dos teclas adyacentes de un piano.

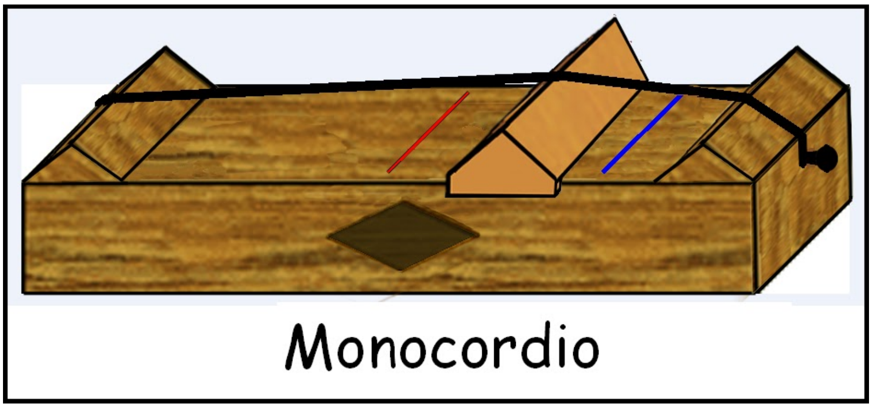
- Un *semitono* es cada una de las dos partes (aproximadamente iguales en general y en la escala temperada exactamente iguales) en que se divide el intervalo de un tono, y es el menor de los intervalos que se pueden producir entre notas consecutivas de una escala diatónica. Equivale a la doceava parte de una octava.

A lo largo de la historia, el concepto y la magnitud del semitono se han ido modificando. Hasta la adopción de la escala temperada podían encontrarse al mismo tiempo semitonos diferentes en un sistema de afinación dado. Para la realización de cálculos y comparaciones entre intervalos se usa como unidad el Cent, que es la centésima parte del semitono temperado por tanto la octava se divide en 1.200 Cents. Es importante señalar que las desviaciones respecto de la afinación justa que superan los 3 Cents son apreciables para un buen oído.

La historia de los diferentes sistemas comienza en Grecia, donde aparecen muchas maneras diferentes de dividir la octava. Las más importantes son la afinación Pitagórica, basada en las quintas justas, el sistema de Aristógenes, en el que se dividen los intervalos en partes iguales y la escala propuesta por Ptolomeo con las terceras justas.

3.1.- Sistema musical pitagórico

Los pitagóricos estudiaron la música a partir de la cuerda de un instrumento llamado monocordio. Variando la longitud al pulsar la cuerda, obtenían distintos sonidos. A menos longitud, sonidos más agudos.



Los pitagóricos compararon estos sonidos de dos en dos en busca de sonidos agradables, y para ello tomaban divisiones de la cuerda simples. Si pisamos la cuerda en la mitad de su longitud, obtenemos una relación 2:1 lo que se corresponde con un intervalo de octava. Si pisamos un punto situado a un tercio de la longitud total, 3:2 estamos ante un intervalo de quinta. Un intervalo de cuarta se corresponde con la relación 4:3. El patrón según el cual los intervalos de sonidos relacionados con forma $n+1{:}\,n$ forma sonidos armónicos y agradables. La consonancia de estos sonidos se reflejó más adelante en el Teorema de Tyndall: "*cuanto más simple sea la relación de frecuencias de dos sonidos, más consonante será el intervalo que forman*".

Como ya hemos señalado podemos pensar los intervalos como la proporción entre frecuencias de cada nota. Así, dos notas en un intervalo de quinta, la más aguda tendrá una frecuencia igual a 3/2 de la frecuencia de la más grave. Es decir, a partir de un sonido conocido podemos calcular el resto a la distancia del intervalo que deseemos. Así pues, teniendo el do inicial, podemos calcular encadenando frecuencias y cancelando octavas. Este procedimiento sirve por ejemplo para afinar un piano.

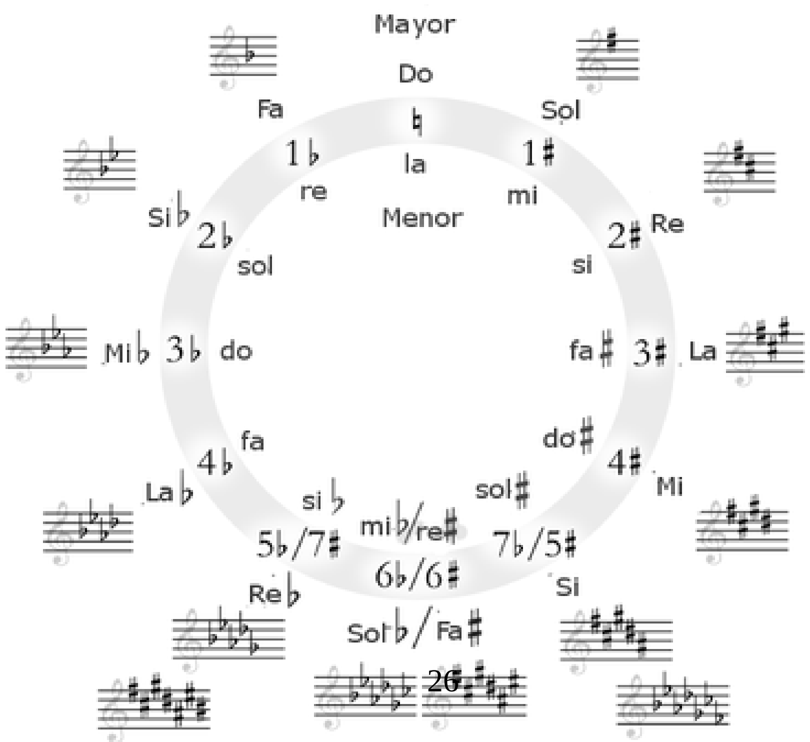
Imaginemos que se parte de la nota *do* calculamos la quinta ascendente y obtenemos sol. Podemos seguir así con el resto de notas del siguiente modo:

$$\boxed{fa \leftarrow \boldsymbol{do} \rightarrow sol \rightarrow re \rightarrow la \rightarrow mi \rightarrow si}$$

Hay que tener en cuenta que la quinta ascendente del sol es el Re de una octava más aguda, por lo que habría que rebajar una octava. A esto se le llama “cancelar octavas”. Si continuamos encadenando quintas llegaremos a los doce sonidos de la escala cromática y obtendremos el *círculo de quintas*:

$$\boxed{sol\flat \leftarrow re\flat \leftarrow la\flat \leftarrow mi\flat \leftarrow si\flat \leftarrow fa \leftarrow \boldsymbol{do} \rightarrow sol \rightarrow re \rightarrow la \rightarrow mi \rightarrow si \rightarrow fa\#}$$

El círculo de quintas resulta útil a la hora de componer armonías y melodías pues representa las relaciones entre los doce tonos de la escala cromática y sus respectivas armaduras (sostenido, bemol y becuadro) y las tonalidades mayores y menores.



Para que este círculo fuera perfecto, sería necesario que $fa\# = sol \flat$ pero si tomamos las proporciones pitagóricas (es decir, una quinta guarda la proporción 3:2 y una octava 2:1) esto no es posible. Si buscamos dos números naturales x e y que cumplan:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^y$$

(para ver cuantas elevaciones a quintas equivalen a elevaciones a octavas) tendrían que cumplir $3x^x = 2^{x+y}$ y esto no se puede dar ya que 3 y 2 son números primos.

La diferencia entre dichas notas, es decir el fa# y el sol $\flat$, es lo que se denomina *coma pitagórica*, y vamos a calcular su valor.

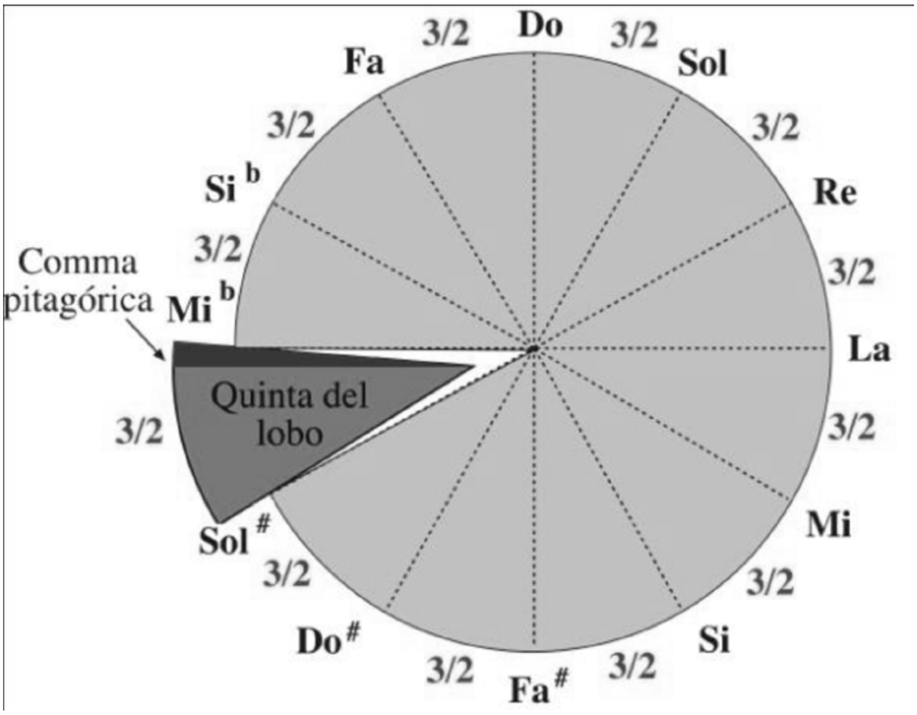
Nota	Relación de frecuencias	Orden de cálculos
do	**1**	1º Lo tomamos como valor normalizado
re $\flat$	$\frac{256}{243}$	12º $re \flat = \frac{3}{2} * la \flat$ (una quinta por debajo)
re	$\frac{9}{8}$	3º $re = sol * \frac{3}{2} * \frac{1}{2}$ (re está a una quinta de sol pero para obtener re hay que cancelar una octava)
mi $\flat$	$\frac{32}{27}$	10º $mi \flat = \frac{2}{3} * si \flat$ (una quinta por debajo)
mi	$\frac{81}{64}$	5º $mi = la * \frac{3}{2} * \frac{1}{2}$ (el mi está a una quinta del la cancelando una octava)
fa	$\frac{4}{3}$	7º $fa = \frac{2}{3} * do * 2$ (el fa está a una quinta por debajo del do subiendo una octava, o equivalentemente está a una cuarta del do)
fa#	$\frac{729}{512}$	14º $fa\# = \frac{3}{2} * \frac{1}{2} * si$ (una quinta por encima del si descendiendo una octava)
sol $\flat$	$\frac{1024}{729}$	13º $sol \flat = \frac{2}{3} * 2 * re \flat$ (una quinta por debajo ascendiendo una octava)
sol	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	2º $sol = \frac{3}{2} * do$ (el sol está a una quinta del do)

la ♭	$\frac{128}{81}$	11º $la \flat = \frac{3}{2} * mi \flat$ (una quinta por debajo ascendiendo una octava)
la	$\frac{27}{16}$	4º $la = re * \frac{3}{2}$ (el la está a una quinta del re)
si	$\frac{243}{128}$	6º $si = mi * \frac{3}{2}$ (el si está a una quinta del mi)
si ♭	$\frac{16}{9}$	9º $si \flat = \frac{2}{3} * fa * 2$ (quinta por debajo del fa aumentando una octava o bien una cuarta por encima del fa)
Do	**2**	8º $Do = 2 * do$ (el Do está a una octava del do)

Para hallar el valor de la coma pitagórica, vamos a dividir las frecuencias de fa# y sol ♭ :

$$CP = \frac{729}{512} : \frac{1024}{729} = 1{,}013643265$$

Vemos pues que la diferencia es algo más de 1% de octava. A la quinta que forman los sonidos $fa\# - re \flat$ se le denomina *la quinta del lobo* pues no es una quinta justa sino que difiere como hemos visto de una coma pitagórica.



Tras estos inconvenientes aritméticos de la afinación pitagórica, veamos ahora otras formas de afinación. Por un lado, la voz humana o los instrumentos de cuerda sin trastes permiten lo que se denomina como *afinación natural* es decir, la que produce mayor consonancia y armonía.

Clasificación de intervalos

Los intervalos se clasifican en mayores, menores o justos en función de la cantidad de semitonos que contienen. Ejemplo: $do - re$ es un intervalo de segunda mayor pues tiene 2 semitonos y $mi - fa$ es de segunda menor pues tiene 1 semitono.

Intervalo	Nº de semitonos
Unísono	0
2ª menor	1
2ª mayor	2
3ª menor	3
3ª mayor	4
4ª justa	5
4ª aumentada/ 5ª disminuida	6
5ª justa	7
6ª menor	8
6ª mayor	9
7ª menor	10
7ª mayor	11
Octava	12

La inversión de un intervalo es otro intervalo de tal forma que encadenados completa los 12 semitonos de la octava. Es un concepto similar al de los ángulos complementarios. Por ejemplo la inversión de una 2º mayor (2 semitonos) sería una 7º menor (10 semitonos).

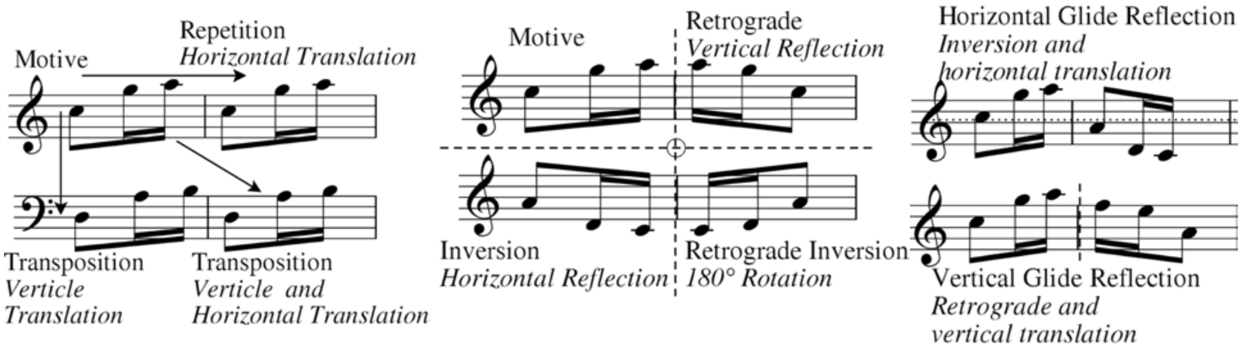
§4. – Utilización de elementos matemáticos en la composición musical

4.1.-Transformaciones geométrico-musicales.

Cuando hablamos de transformaciones geométricas en música, no podemos considerar la partitura como un plano y aplicarle transformaciones geométricas del plano, eso podría dar lugar a absurdos. Por al aplicar simetrías axiales las simétricas de las notas no representarían notas. A veces algunos compositores, Bach por ejemplo, consideran, no la partitura sino la composición como un segmento de una recta y le aplican una simetría respecto a uno de sus extremos. Pero estas transformaciones globales son poco comunes.

Así, cuando hablamos de transformaciones geométricas nos referimos a transformaciones geométricas locales. No vamos a caer en un exceso de formalización hablando de topología, y cuando digamos transformaciones locales, entendemos que son transformaciones que afectan a fragmentos de la composición, y que en el caso de transformaciones que conservan la orientación se puede entender también que afectan a fragmentos de la partitura. También señalaremos que no vamos a hacer en el exceso de encontrar transformaciones geométricas por todas partes, por ejemplo la repetición del estribillo de una canción se puede entender como una traslación local, pero está claro que en el ánimo de su compositor no estaba el uso de ese recurso geométrico.

Nuestro punto de vista será el estudiar la aplicación intencionada de transformaciones geométrico-musicales respecto a sonidos y/o a ritmos como una herramienta más de composición.



[Imágenes extraídas de (Hart, 2009)]

Por lo que se refiere a las transformaciones geométricas a utilizar, solo tienen sentido los movimientos, pues sería muy discutible la consideración de la homotecia en la música considerándola como ampliación de la intensidad, y sería muy complicado, y estaría fuera de los límites de este trabajo, considerar la música como un sistema dinámico y entrar en las transformaciones correspondientes.

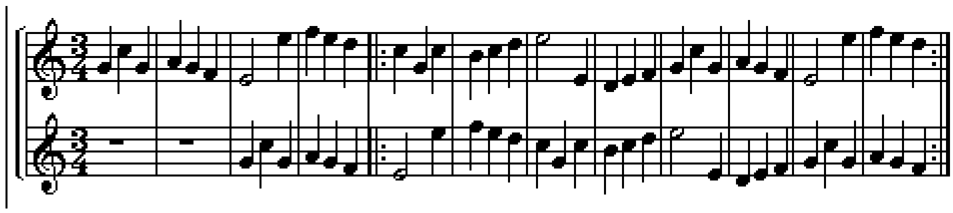
Tendríamos que discutir la dimensión de la pieza musical. Lo más normal sería considerarla como unidimensional, y en este caso los únicos tipos de transformaciones geométricas serían las traslaciones y las reflexiones (simetrías centrales). Pero como se aprecia en la figura, al tomar las notas musicales con su grafía, caben ciertas transformaciones del plano como giros o simetrías axiales.

Al considerar las transformaciones como transformaciones locales estamos jugando simultáneamente con la partitura escrita y con el tiempo, y con ello multiplicamos la variedad de transformaciones posibles. Veamos algunos ejemplos.

Traslación.

Traslación horizontal, se traduce como una traslación en el tiempo y en este caso podemos obtener una repetición o un canon si tenemos varias voces, como la canción infantil *Frère Jacques* o el conocido *Canon de Pachelbel* que combina dos tipos de traslación horizontal (una es el canon y la otra es la repetición para la cuarta voz):

Otro ejemplo notable es el *Canon a 2 perpetuus BWV 1075*, donde Bach utilizó las traslaciones para realizar una obra que se puede repetir indefinidamente.



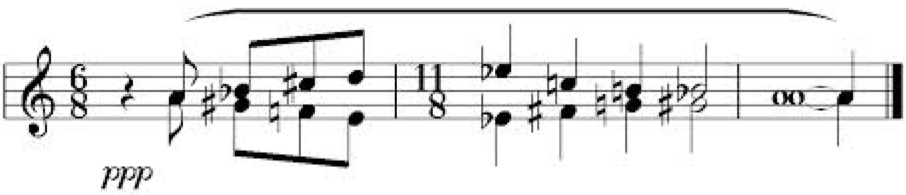
Traslación vertical, se obtiene la misma melodía pero con entonación más aguda o más grave, dependiendo de si se asciende o se desciende, es decir, cambia la altura absoluta de las notas de un fragmento conservando las alturas relativas entre ellas. Esto en lenguaje musical se denomina *transporte*. Se suele utilizar para cambiar la alturas de un fragmento entero (adaptar a una tesitura más cómoda por ejemplo), hacer viajar un tema, motivo o marchas armónicas, en los instrumentos transpositores. Se puede transportar por medio de intervalos o por medio de las claves.

(Ejemplo de traslación vertical o transporte)

Reflexión.

Es la simetría axial del plano, es decir es una transformación que cambia la orientación. En forma intuitiva podríamos decir que invierte la imagen como sucede con los reflejos en los espejos. En la música podemos reflejar sobre el eje horizontal y sobre el eje vertical. La combinación de ambos resulta ser una rotación de 180º o lo que es lo mismo una simetría central.

Si reflejamos sobre un eje horizontal, este eje puede estar también en el pentagrama, con lo que nos daría una simetría en la altura de un acorde. En la melodía final del primer movimiento de *Música para cuerdas, percusión y celesta* (ver Anexo1), Béla Bártok utiliza este tipo de reflexión:



A parte de reflejar melodías, también podemos considerar simetrías en el tiempo con respecto al ritmo: (ejemplo: A tempo - accel - decel - a tempo) o con respecto a la intensidad del sonido (ej: Piano - Forte – Piano).

En el caso de considerar un eje vertical, obtenemos una retrogradación. Se trata la melodía original con la secuencia contraria, respetando o no los ritmos. Si se ejecuta una después de la otra obtenemos un palíndromo melódico, como en el siguientes ejemplo.

Haydn en su sinfonía nº47 en sol mayor, introdujo en el tercer movimiento un minueto y un trío compuestos utilizando reflexiones. Por ello al *minuet al rovescio* se le denomina también *Palíndromo.*

Rotación

Una rotación en el pentagrama sólo se puede ser de 180º, no tiene sentido por el momento, porque no hay que descartar que algún compositor le dé un significado, escribir partituras con líneas inclinadas. Sería una composición de una inversión y una retrogradación.

La siguiente composición, *Der Spiegel* (el espejo) o también llamado *Dúo de la Mesa*, es un divertimento en Sol mayor para dos violines, atribuido a Mozart. La partitura está diseñada para que ambos violinistas puedan ejecutarla a la vez, cada uno leyéndola en sentido contrario. Por ejemplo, colocando la partitura en una mesa, los dos violinistas se deben colocar enfrentados, en lados opuestos de la mesa, con la partitura situada entre ambos. De esta forma, comenzando a la vez, mientras uno interpreta el primer compás, el otro se encuentra ejecutando el último (que para él es el primero, naturalmente), y cuando el primer violinista avanza hasta el segundo compás, el otro violinista avanza hasta el penúltimo.

Mozart Table Duet (I)

Nota: ahora los sostenidos van después de las notas

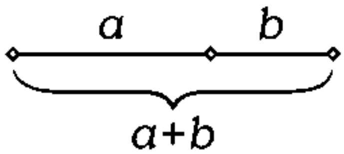
Mozart Table Duet (II)

4.2.- Número áureo.

El número áureo es un número algebraico irracional que posee propiedades interesantes. Su primera descripción en la historia se dio como relación o proporción entre segmentos de una recta. Se atribuye a Euclides la definición siguiente:

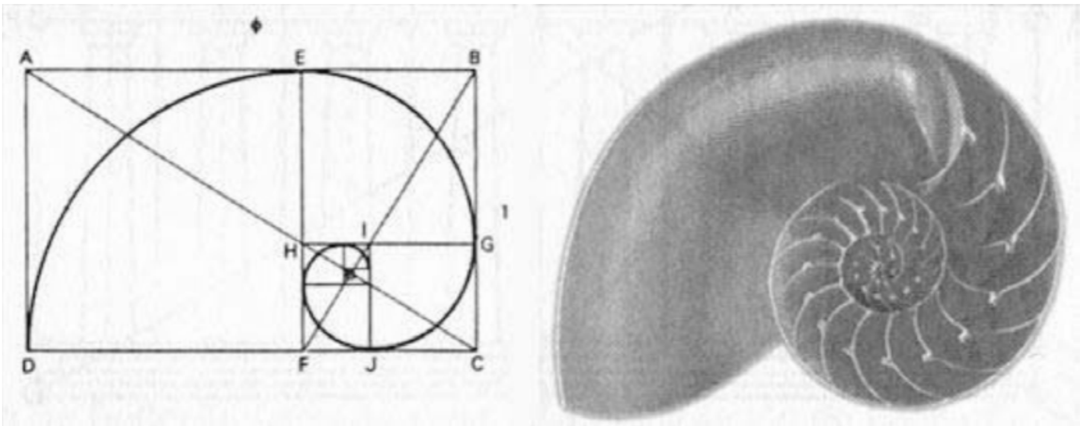
Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor"

Y el cociente de ambas razones es el número aúreo.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \qquad\qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874989...$$

Esta proporción se encuentra no solo en las figuras geométricas (como en el pentágono), sino que también en la naturaleza, en el arte (pintura, arquitectura, música, literatura, escultura, etc.), en objetos cotidianos (tarjetas de crédito, cajas) y hay mucha literatura respecto a este número, del cual solo queremos tratar algunos aspectos muy concretos que usaremos después en nuestro trabajo.



En el dibujo del caracol, si tomamos el rectángulo áureo ABCD y le quitamos el cuadrado AEFD tenemos que el rectángulo EBCF es áureo también. Este proceso se repite indefinidamente, y obtenemos una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen en el vértice O de una espiral logarítmica.

Centrándonos en la música, podemos encontrar el número áureo de diversas formas. Por un lado, lo encontramos en la construcción de instrumentos musicales (violines, guitarras, etc.) y por otro en las composiciones musicales. Para el análisis de estas obras, hay que tener en cuenta que no siempre la composición incluye de forma consciente esta proporción, ya que es agradable de forma intuitiva, y que el hecho de buscar proporciones áureas puede hacernos caer en la profecía auto cumplida. Por otro lado, hablamos siempre de aproximaciones, pues como sucede en la escala temperada, trabajar con irracionales en la música implica redondear en la práctica.

A parte de encontrar proporciones áureas, es común encontrar números de la sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...) definida como una recurrencia:

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ con los dos primeros términos igual a 1.

En esta sucesión, el límite de los cocientes de términos consecutivos, es precisamente el número áureo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$$

Veamos algunos ejemplos de piezas que contienen de algún modo este número y más adelante analizaremos brevemente uno en concreto.

- Algunas composiciones (por ejemplo de Mozart y de Beethoven) parecen alcanzar el momento de máxima tensión en el momento que se divide la obra en secciones cuyas extensiones están en proporción áurea (de manera aproximada), aunque no sabemos si este hecho es intencionado.

- Algunas obras de Debussy, parecen estar organizadas según los números de Fibonacci. Por ejemplo, en la introducción del tercer movimiento de su obra *La mer, Dialogue du vent et de la mer,* nos encontramos con 55 compases subdivididos en secciones de 21,8,8,5,13 compases de longitud y el compás 34 está marcado por un golpe de trombones.

- Messiaen y Stockhausen compusieron obras cuyas unidades formales se relacionan con la sección áurea. Por ejemplo Stockhausen en su obra *Klavierstück IX* organiza las proporciones rítmicas siguiendo los números de Fibonacci.

- Tool (grupo americano de rock progresivo) en su canción *Lateralus*, los versos se pronuncian de forma que el número de sílabas son de Fibonacci.

Proporción áurea en la obra de Bartók

Béla Bartók (1881-1946) es compositor húngaro que, según ciertos musicólogos, utilizó frecuentemente los números de Fibonacci para el diseño de sus composiciones. Él mismo escribió que se guiaba de la naturaleza para componer, los valores de las espirales de los girasoles, piñas de abetos, las flores, animales, y esto se traduce en números de Fibonacci posiblemente plasmados en su obra. Bártok nunca habló de su manera de componer, pero estudios posteriores apuntan a que desarrolló un método basado en la proporción áurea para integrar todos los elementos de la música.

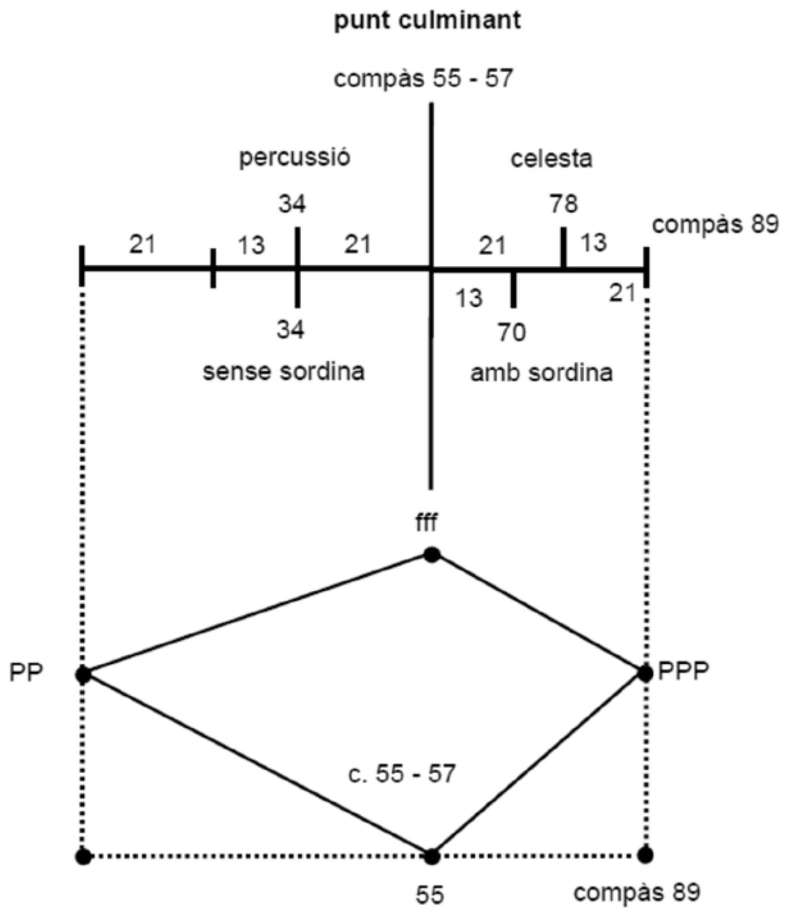
Una obra donde se presume la utilización del número áureo es *Música para cuerdas, percusión y celesta:*

1. Fuga inicial, *Andante tranquillo* (ver ANEXO 1): encontramos 89 compases, número de Fibonacci. (89 contando con la anacrusa que normalmente no se cuenta). Se dividen mediante la sección áurea, por un lado, tenemos un crescendo progresivo (desde pp hasta fff) en el cual se van sumando instrumentos hasta el punto culminante de la obra (en el compás 55). A continuación, se da un repliegue y se vuelve hasta llegar a ppp.

   Los acontecimientos más importantes están marcados por números de Fibonacci:

   - Compás 1: exposición del tema en solitario (1 voz)
   - Compás 5: entrada de la segunda voz
   - Compás 8: tercera voz
   - Compás 13: cuarta voz
   - Compás 21: primer pedal y aparición del primer episodio
   - Compás 34: primera entrada percusión (timbales) e indicación "sin sordina"
   - Compás 55-57: Punto culminante del movimiento fff. Aquí tenemos un desfase de compases. Considerando los compases 55, 56 y 57 como el conjunto 55, volvemos a obtener números de Fibonacci. (finaliza el crecimiento)
   - Compás 70 (57 + 13): indicación "con sordina" (comienza el repliegue)
   - Compás 78 (57 + 21): entra por primera vez la celesta
   - Compás 89: Final

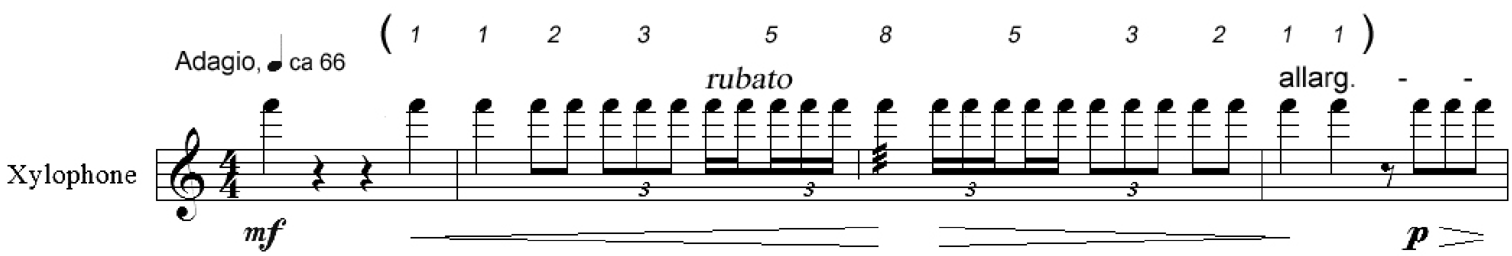
Un análisis esquemático de la aparición de proporciones áureas y números de Fibonacci lo podemos encontrar en el Anexo 2, o en la siguiente imagen:



[Imagen extraída de (Pous Soler, 2003)]

Cabe destacar que ante este hecho, existe una controversia acerca de si realmente Bartók utilizó conscientemente los números de Fibonacci y sobre si realmente son números de Fibonacci ya que otros análisis apuntan a los números de Lucas. Sin duda esto es interesante y puede constituir un trabajo de investigación.

2. Tercer movimiento *Adagio:* comienza con una progresión rítmica palindrómica en la que el mismo "fa" es tocado por el xilófono en grupos de 1, 1, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 2, 1, 1:



§5. – Composición con técnicas matemáticas

Los algoritmos han sido utilizados desde hace mucho tiempo para componer música. Algunos, que no tienen una inmediata relevancia musical, son usados como un modelo creativo e inspiración para la música, como los fractales, los modelos estadísticos, gráficos de censos, sistemas de coordenadas geográficas, el campo magnético, la frecuencia de las olas del mar, etc.

5.1 .- Composiciones con Variables Aleatorias Discretas

A finales del siglo XVIII y principios del XIX se hicieron populares los pasatiempos musicales consistentes en generar obras musicales sencillas, en los cuales destacaban los que utilizaban dados. Este tipo de juegos son los precursores de lo que más adelante se denominará música algorítmica. Kirnberger publicó en 1757 el primero de los juegos que sistematizan la composición musical, para que cualquier persona generase sus propias piezas. Mozart y Hadyn también participaron en este pasatiempo. Vamos a explicar en qué consiste el más famoso de ellos, atribuido a Mozart cuando tenía 21 años.

Juego de dados de W.A. Mozart (Das Musikalisches Würfelspiel)

Para componer con el juego de dados de Mozart se utilizan dos dados. Se compone un vals formado por un minueto y un trio. Mozart explicó el juego y lo hizo en los idiomas más utilizados en su época.

El juego consta de una colección de 176 compases ya compuestos, dos tablas y dos dados. La primera tabla sirve para construir el minueto formados por 16 compases. Para saber qué compas escoger, se lanzan 2 dados 16 veces y la suma de estos indica la fila de cada tirada. Por ejemplo, si en la segunda tirada sacamos {4,3} entonces nuestro segundo compás del minueto será el 157 (fila 7, columna 2). Para el trío, se realiza la misma operación pero con un solo dado.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	72	6	59	25	81	41	89	13	36	5	46	79	30	95	19	66
2	56	82	42	74	14	7	26	71	76	20	64	84	8	35	47	88
3	75	39	54	1	65	43	15	80	9	34	93	48	69	58	90	21
4	40	73	16	68	29	55	2	61	22	67	49	77	57	87	33	10
5	83	3	28	53	37	17	44	70	63	85	32	96	12	23	50	91
6	18	45	62	38	4	27	52	94	11	92	24	86	51	60	78	31

Ahora cabe preguntarse cuántas combinaciones distintas podemos obtener.

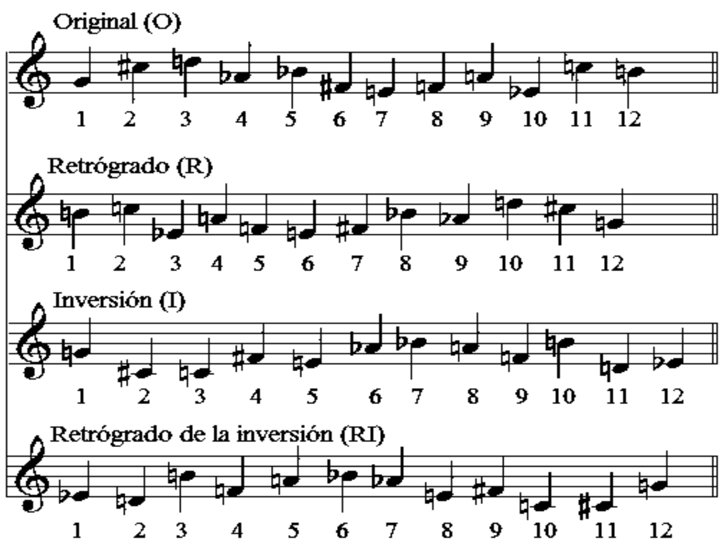
Dodecafonismo

El dodecafonismo es una forma de música atonal, es decir, las 12 notas (*dodeca* es doce en griego) son equivalentes en cuanto a la importancia, no hay una jerarquía como sucede en la música tonal. Su fundador fue el compositor austriaco austriaco Arnold Schönberg en 1921. Por un lado busca unificar el *fa sostenido* y el *sol bemol* tomándolos como equivalentes, que hasta entonces mantenían identidades separadas. Por otro lado cada referencia a un sonido incluye a su clase, es decir cada vez que se habla del *do* se habla del *do* de cualquier octava, donde cualquier *do* es representante de dicha clase. Esto implica 12 clases de equivalencia de los sonidos.

Para no jerarquizar unas notas frente a otras, se desarrollaron diversas técnicas: por ejemplo, pre asignar a todas el mismo valor relativo y organizando la música para que cada nota (clase) aparezca aproximadamente el mismo número de veces.

- Serialismo: Se trata de una técnica de composición musical con orígenes en el dodecafonismo. Tiene un sentido más amplio que este, pues no solo abarca a la altura de las notas como ocurre en el dodecafonismo, sino que también se puede aplicar el principio serial a otros parámetros como el ritmo, la intensidad sonora, la dinámica o el timbre.

- Serialismo dodecafónico: El método consiste en establecer un orden para las doce notas de la escala cromática, llamado original y denotado por (O). A continuación se retrograda la serie, es decir, las notas escritas de manera inversa. A esta nueva serie se la llama Retrógrada (R). Luego, tenemos la inversión (I) que consiste en invertir la dirección (ascendente/descendente) de cada intervalo de nuestra serie. (Ejemplo, una cuarta ascendente se convierte en una cuarta descendente). Por último, se realiza la inversión retrógrada (RI) que como vimos es equivalente a un giro de 180º. Aquí podemos ver un ejemplo de lo anteriormente descrito:



Una vez que tenemos nuestros cuatro elementos generadores, el compositor los puede utilizar adaptándolos a sus necesidades expresivas.

LETRAS

Las letras de canciones con contenidos relacionados con las matemáticas son cada vez más populares, hay infinidad de páginas web destinadas a exponer canciones con contenidos matemáticos, y su estudio y clasificación harían demasiado largo este trabajo. Pero dada la cantidad de material existente sería interesante hacer un estudio sociológico sobre el tema.

En una primera aproximación se observa que hay cuatro tipos de canciones:

1. Canciones de tipo didáctico destinadas a facilitar la enseñanza de las matemáticas, especialmente a los más pequeños.
2. Canciones de tipo crítico con letras matemáticas que enfatizan determinados puntos del formalismo matemático, con la intención lúdica.
3. Canciones que utilizan de modo incidental términos matemáticos.
4. Canciones compuestas usando técnicas matemáticas.

Aquí nos limitamos a reproducir algunas de las muchas existentes del segunda tipo, para poner de manifiesto que como tema de trabajo el estudio de estas canciones tiene interés.

Una de las más conocidas es aquiella de Les Luthiers, en la que habla del Teorema de Thales (Luthiers, 1971):

Mundstock: Johann Sebastian Mastropiero dedicó su divertimento matemático, op. 48, el "Teorema de Thales", a la condesa Shortshot, con quien viviera un apasionado romance varias veces, en una carta en la que le dice: "Condesa, nuestro amor se rige por el Teorema de Thales: cuando estamos horizontales y paralelos, las transversales de la pasión nos atraviesan y nuestros segmentos correspondientes resultan maravillosamente proporcionales". El cuarteto vocal "Les frères luthiers" interpreta: "Teorema de Thales" op. 48, de Johann Sebastian Mastropiero. Son sus movimientos: Introducción, Enunciazione in tempo di menuetto, Hipotesis agitatta, Tesis, Desmostrazione, ma non troppo, Finale presto con tutti.

Si tres o más paralelas, si tres o más parale-le-le-las
Si tres o más paralelas, si tres o más parale-le-le-las
Son cortadas por dos transversales
Son cortadas por dos transversales
Si tres o más parale-le-le-las

Son cortadas, son cortadas Dos segmentos de una de estas, dos segmentos cualesquiera Dos segmentos de una de estas son proporcionales a los dos segmentos correspondientes de la otra. a paralela a b, b paralela a c, a paralela a b, paralela a c, paralela a d OP es a PQ MN es a NT OP es a PQ como MN es a NT a paralela a b, b paralela a c OP es a PQ como MN es a NT La bisectriz yo trazaré y a cuatro planos intersectaré Una igualdad yo encontraré: OP más PQ es igual a ST Usaré la hipotenusa Ay no te compliques, nadie la usa Trazaré, pues, un cateto Yo no me meto, yo no me meto. Triángulo, tetrágono, pentágono, hexágono, heptágono, octógono, son todos polígonos Seno, coseno, tangente y secante, y la cosecante, y la cotangente Thales, Thales de Mileto Thales, Thales de Mileto Que es lo que queríamos demostrar. Quesque loque loque queri queri amos demos demos demostrar.

También nos podemos encontrar con versiones de canciones famosas cambiando la letra original por letras con contentido matemático, como sucede con la canción de I will survive, que se transforma en I will derive (MindofMatthew, 2008):

At first I was afraid, what could the answer be? It said given this position find velocity. So I tried to work it out but I knew that I was wrong. I struggled; I cried, "The problem shouldn't take this long!" I tried to think, control my nerve … It's evident that speed's tangential to that time–position curve. This problem would be mine If I just knew that tangent line But what to do? Show me a sign! So I thought back: do calculus, Way back to Newton and to Leibniz And to problems just like this. And just like that when I had given up all hope I said nope. here's just one way to find that slope – And so now I, I will derive! Find the derivative of x's position with respect to time. It's as easy as can be –	Primero tuve miedo, ¿cuál podía ser la respuesta? Decía "dada esta posición, encuentra la velocidad". Yo intenté resolverlo, pero sabía que lo hacía mal Luché, lloré, "¡el problema no puede ser tan largo!" Intenté pensar, controlar mis nervios… Es evidente que la velocidad es tangente a la curva posición-tiempo. Este problema tenía que ser mío, Si solo conociera esa recta tangente… Pero ¿qué hacer? ¡Dame una señal! Entonces pensé: utiliza el cálculo. Busca en el libro a Newton y a Leibniz y otros problemas parecidos. Y cuando había perdido toda la esperanza, Dije ¡No! Solo hay una forma de encontrar esa "fórmula". Entonces, ¡Derivaré! Encontraré la derivada de la posición x respecto del tiempo.

Just have to take dx/dt – I will derive, I will derive, hey hey! And then I went ahead to the second part But as I looked at it I wasn't quite sure how to start: It was asking for the time at which velocity was at a maximum. And I was thinking, "Woe is me!" But then I thought, "This much I know: I gotta find acceleration, set it equal to zero. Now if only knew what the function was for it … I guess I'm gonna have to solve for it some way."	Más fácil no puede ser, sólo hace falta hacer dx/dt Derivaré, derivaré, ¡hey hey! Y entonces seguí y vi la segunda parte, Pero cuando la vi no estaba seguro de cómo empezar: Preguntaba por el tiempo en el cual la velocidad estaba en un máximo. Y yo ya pensaba… ¡esto es mío! Pero entonces pensé: Esto es todo lo que sé, tengo que encontrar la aceleración e igualarla a cero. Ahora bien, si sólo supiera para que sirve la función… Creo que voy a tener que resolverla de alguna manera.

Thomas Anrew Lehrer (1928- ?) es un cantautor matemático que ha escrito varias canciones matemáticas de caracter lúdico como: *The Professor's Song*, *The derivative song*, *There's a Delta for every Epsilon*, *The New Math*, *That's Mathematics* entre otras. Un ejemplo sería The derivative song (Leher, 1951):

You take a function of x and you call it y, Take any x-nought that you care to try, You make a little change and call it delta x, The corresponding change in y is what you find nex', And then you take the quotient and now carefully Send delta x to zero, and I think you'll see That what the limit gives us, if our work all checks, Is what we call dy/dx, It's just dy/dx.	Tomas una función de x, y la llamas y, Tome cualquier x-nada que le importa a probar, Usted hace un pequeño cambio y lo llaman x delta, El cambio correspondiente en y es lo que encuentras después, Y luego tomas el cociente ahora cautelosamente Envias delta x a cero, y creo que veras lo que el límite nos da, si nuestro trabajo está correcto, Es lo que llamamos dy / dx, Es sólo dy / dx.

1+1=11 (TheSingingNerd, 2013) donde nos explica que 1+1 puede ser 11 si tomamos módulo 3.

1 + 1 is 11 1 + 1 is 11 mod 3 but what the heck is mod 3? There are three options when you divide by 3 Only 3 remainders that we can see Just 3 groups for every integer 11 is 2. This could not be stranger Unless you know modular math 1 + 1 is 11 1 + 1 is 11 mod 9 but what the heck is mod 9? In modular math The numbers wrap around	1 + 1 es 11 1 + 1 es 11 mod 3 pero qué diablos es mod 3 ? Hay tres opciones cuando se divide por 3 Sólo 3 restos podemos ver sólo 3 grupos para cada entero 11 es 2. Esto no podría ser más raro A menos que sepamos aritmética modular 1 + 1 es 11 1 + 1 es 11 mod 9 pero qué diablos es mod 9 ? En aritmética modular Los números se envuelven

There are 9 numbers mod 9 to be found 2 and 11 mod 9 are congruent they are in the same set. See -- you can do it! This is just modular math We use modular math When we use a clock 10 + 5 = 3. This should be no shock Mod 12 is for months and hours It's not hard, you need no powers But you gotta know modular math And now you know modular math	Hay 9 números mod 9 que hay que buscar 2 y 11 mod 9 son congruentes están en el mismo conjunto . Mira- tú puedes hacerlo! Esto es sólo aritmética modular Utilizamos aritmética modular Cuando usamos un reloj 10 + 5 = 3. Esto no debería ser ninguna sorpresa Mod 12 es para meses y horas No es difícil, no necesitas ningún poder ahora que ya sabes aritmética modular

Calculus Rhapsody (WordGospel09's channel, 2009)

Is this x defined? Is f continuous? How do you find out? You can use the limit process. Approach from both sides, The left and the right and meet. Im a just a limit, defined analytically Functions continuous, Theres no holes, No sharp points, Or asymptotes. Any way this graph goes It is differentiable for me for me. All year, in Calculus We've learned so many things About which we are going to sing We can find derivatives And integrals And the area enclosed between two curves. Y prime oooh Is the derivative of y Y equals x to the n, dy/dx Equals n times x to the n-1. Other applications Of derivatives apply If y is divided or multiplied You use the quotient and product rules And dont you forget To do the dance Also oooh (dont forget the chain rule) Before you are done, You gotta remember to multiply by the chain I need to find the area under a curve Integrate! Integrate! You can use the integration	Se define esta x? Es F continua? ¿Cómo te enteraste? Puede utilizar el proceso de límite. Acércate a ambos lados, La izquierda y la derecha y se encuentran. Sólo soy solo límite, definido analíticamente Funciones continuas, No hay agujeros, No hay puntos picudos, O asíntotas. De todos modos este gráfico va Es diferenciable para mí para mí. Todos los años, en Cálculo Hemos aprendido tantas cosas Acerca de lo que vamos a cantar Podemos encontrar derivados E integrales Y el área encerrada entre dos curvas. Y prima Es la derivada de y Y igual a x a la n, dy / dx Es igual a n veces x a la n-1. Otras aplicaciones De derivadas Si y es dividida o multiplicada Usa las normas de productos y de cocientes Y no se olvida Para hacer la danza También (no te olvides de la regla de la cadena) Antes de que haya terminado, Tienes que recordar que multiplicar por la cadena Necesito encontrar el área bajo una curva Integrar! Integrar! Puedes utilizar la integración

Raise exponent by one multiply the reciprocal Plus a constant Add a constant Add a constant labeled C (Labeled C-ee-ee-ee-ee)	Eleve el exponente por uno multiplicar el recíproco Además de una constante Añade una constante Añade una constante etiquetada C (llamada C)
Im just a constant Nobody loves me. Hes just a constant Might as well just call it C Never forget to add the constant C	Soy solo justo una constante Nadie me quiere. Es sólo una constante Puedes llamarla también C Nunca te olvides de añadir la constante C
Can you find the area between f and g In-te-grate f and then integrate g (then subtract) To revolve around the y-axis (integrate) outer radius squared minus inner radius squared (multiplied) multiplied by pi (multiply)	¿Puedes encontrar el área entre f y g Integra f y luego integra g (Luego restar) Para girar en torno al eje y (Integrar) radio exterior cuadrado menos radio interior cuadrado (Multiplicado) multiplicado por pi (Multiplicar)
Pi tastes real good with whipped cream!	Pi tiene buen sabor con crema batida!
Mama-Mia, Mama-Mia Mama-Mia let me go. Pre-calculus did not help me to prepare for Calculus, for Calculus, help me!	Mama-Mia, Mama-Mia Mama-Mia déjame ir Pre-cálculo no me ayudó a prepararme para Cálculo, ayúdame!
So you think you can find out the limit of y? So you think youll find zero and have it defined Oh baby cant define that point baby Its undefined Goes to positive and negative infinity	Así que piensas que puedes encontrar el límite de y? Así que piensas que vas a encontrarar cero y tenerlo definido No puedo definir ese puntito está indefinido Tiende a infinito positivo y negativo
Oooh. Oooh yeah, oooh yeah. Differentiation Anyone can see Any mere equation It is differentiable for me.	Diferenciación Cualquiera puede ver Cualquier mera ecuación Es diferenciable para mí.

ASPECTOS DIDÁCTICOS

Como hemos visto en los apartados anteriores, las matemáticas y la música están relacionadas de modo que el alumnado de la ESO o Bachiller pueden entender y apreciar. Por ello, deberíamos aprovechar este hecho y tenerlo en mente como recurso didáctico. Hay maneras diversas de presentar estas relaciones y muchas ya se están implementando en el aula.

Este trabajo que exponemos aquí como prueba de que lo que proponemos es perfectamente realizable, es un trabajo de tres alumnos de la ESO (Camarero Linares, Martín Villacasillas, & Mínguez Monedero, 2014)**.** Todos ellos tocan algún instrumento musical. Pretenden mostrar que las matemáticas y la música tienen puntos en común a pesar de ser disciplinas aparentemente diferentes. Lo primero que hicieron fue buscar un problema matemático con contenido musical que fuera abordable desde sus conocimientos, lo cual no fue sencillo. Gracias a ello descubrieron muchas conexiones interesantes aunque algunas contenían matemáticas avanzadas para ellos y otras requerían de más formación musical. Al final optaron por la composición aleatoria de Mozart, y se centraron en el juego de dados para componer. Plantearon la siguiente pregunta: “¿Sabía Mozart Matemáticas?”.

Tras hacer una introducción contextual y explicación de la dinámica del juego plantearon su principal objetivo: cómo consigue Mozart que los minuetos suenen bien dada la aleatoriedad de los dados.

La primera observación fue la disposición de los números en la tabla. Pensaron que se trataba de una obra ya compuesta, pero al tocarlos en orden se dieron cuenta de que de ese modo no sonaba bien. Tras hacer varios análisis, dedujeron que los números estaban así dispuestos para dar un aspecto más aleatorio.

A continuación realizaron un estudio exhaustivo de los 176 compases: disposición en el minueto y en el trío, probabilidades de salir, tonalidades, grado, etc. Descubrieron que en cada columna cada compás tenía la misma tonalidad y grado, lo cual explica que salga lo que salga, la composición va a sonar bien. Los grados seguían un patrón simétrico.

Otro objeto de estudio fue la existencia de compases repetidos. Los clasificaron en 13 clases (donde cada clase contiene compases iguales salvo en la primera que están todos los compases sin repetición) y estudiaron el número de veces que aparece cada compás y se dieron cuenta de que hay 129 compases distintos. Una curiosidad es que el compás central del minueto, columna 8, siempre es el mismo y algo similar ocurre en la columna 16, el último compás del minueto, salvo si los dados suman 11, el resultado nos lleva a un mismo compás. El resto de compases repetidos están repartidos siempre en las columnas 1,2, 13 y 14 y tienen asignada la misma probabilidad Esto

Compás		Posición en el minuto																Suma
Clase	Cantidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
A	117	3	1	11	11	11	11	11		11	11	11	11	1	1	11	1	
B	4	1	1											1	1			11
C	11								11									
D	4	1	1											1	1			3
E	10																10	
F	4	1	1											1	1			12
G	3		1											1	1			5
H	4	1	1											1	1			2
I	4	1	1											1	1			10
J	3		1											1	1			9
K	4	1	1											1	1			4
L	4	1	1											1	1			6
M	4	1	1											1	1			7

deriva en que no es casual esta organización de los compases.

Colores según la probabilidad (·36):	1	2	3	4	5	6

Después de realizar cálculo de probabilidades, y concluir sobre el ingenio de Mozart, los alumnos diseñaron sus propios métodos para componer, inspirándose en el hacer de Mozart aunque añadiendo otras ideas. No solo se contentaron con componer sino que también grabaron cada compás y simularon unos resultados siguiendo 5 métodos (aleatorio clásico, libre, simétrica, con repetición y Steinway). De esta manera aplicaron los conocimientos músicos y matemáticos para crear sus propias canciones.

Este trabajo es un modelo de tarea a realizar, hay muchas obras musicales, como hemos visto en las líneas anteriores, susceptibles de un estudio matemático con herramientas elementales. Estos estudios también pueden incitar a grupos selectos de estudiantes brillantes a realizar un trabajo con resultados visibles exteriores a las matemáticas empleando técnicas matemáticas.

Otros trabajos que han realizado alumnos de institutos han sido los *treball de recerca* que consisten en una investigación acerca de una materia o de varias, y se hacen en Cataluña al final del bachiller. Algunos de estos trabajos vemos que han tenido como temática las matemáticas y la música. (Pous Soler, 2003)

Ensayos de este tipo reflejan no solo el hecho de la aplicabilidad real de las relaciones de la música y las matemáticas en la educación, sino del interés que estas suscitan en el alumnado.

Propuesta de actividades

La variedad de actividades que se pueden realizar en el aula es muy amplia, y por ello vamos a presentar solo una pequeña muestra de propuestas de actividades, factibles de implementar en el aula, en coordinación con el departamento de música y/o de física y siempre teniendo en cuenta una adaptación a cada contexto.

- Calcular la duración de una obra o de un fragmento
- Utilizar las escalas para el concepto de logaritmo
- Investigar acerca de la sucesión de Fibonacci en la música
- Calcular la energía transmitida por los instrumentos de diferentes tipos de concierto
- Qué significa la potencia de un altavoz
- Umbrales de audición
- Resonancias. ¿Puede matar una resonancia?
- Por qué rompe el sonido un cristal.
- Cómo afecta a la música el tamaño de la sala y la situación de los instrumentos
- Efectos sonoros que simulan alejamientos

A continuación, veremos un esquema de tres propuestas de actividades para realizar en colaboración con el departamento de música.

<u>Propuesta de actividad 1: Fracciones y ritmo musical a través del dominó</u>

Miguel de Guzmán, relaciona al juego y la enseñanza de las matemáticas mediante el siguiente pensamiento:

> *El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se la han pasado tan bien jugando y han disfrutado tanto contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprender la matemática a través del juego y de la belleza?*

<u>Objetivos</u>:

- Introducir conocimientos musicales y experimentar mediante la manipulación los elementos musicales: ritmos de las notas y de los silencios.
- Reconocer la capacidad de las fracciones para expresar relaciones
- Aprender relación de equivalencia de las fracciones
- Relacionar la música con las matemáticas

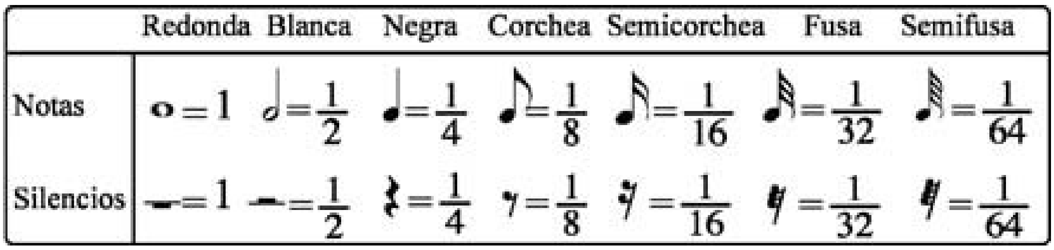
<u>Contenidos</u>:

- Figuras musicales (silencios, notas, puntillo)
- Fracciones simples y equivalencias.

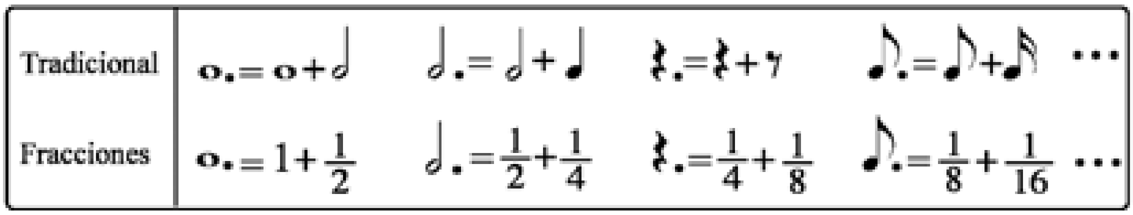
<u>Nivel</u>:

- Por el contenido esta actividad puede realizarse en 1º o 2º de la ESO, aunque también puede servir como recurso didáctico para atención a la diversidad o como plan complementario.

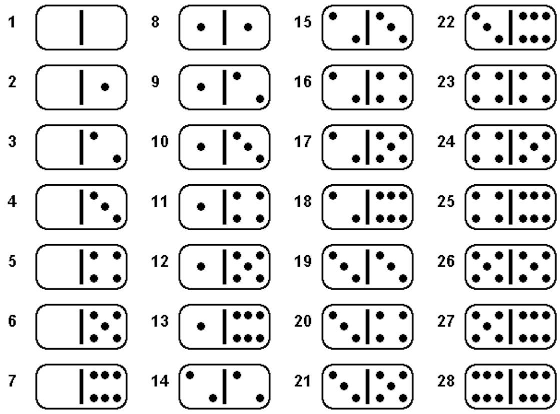
<u>Metodología</u>: Breve explicación de los ritmos musicales, en coordinación con el profesor de música. Repaso de los diferentes símbolos (notas, silencios, puntillo) con sus valores. Se les entregará las siguientes tablas [Imágenes extraídas de (Liern Carrión, 2011)]:



	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Fusa	Semifusa
Notas	𝅝 $=1$	𝅗𝅥 $=\frac{1}{2}$	𝅘𝅥 $=\frac{1}{4}$	𝅘𝅥𝅮 $=\frac{1}{8}$	𝅘𝅥𝅯 $=\frac{1}{16}$	𝅘𝅥𝅰 $=\frac{1}{32}$	𝅘𝅥𝅱 $=\frac{1}{64}$
Silencios	𝄻 $=1$	𝄼 $=\frac{1}{2}$	𝄽 $=\frac{1}{4}$	𝄾 $=\frac{1}{8}$	𝄿 $=\frac{1}{16}$	𝅀 $=\frac{1}{32}$	𝅁 $=\frac{1}{64}$

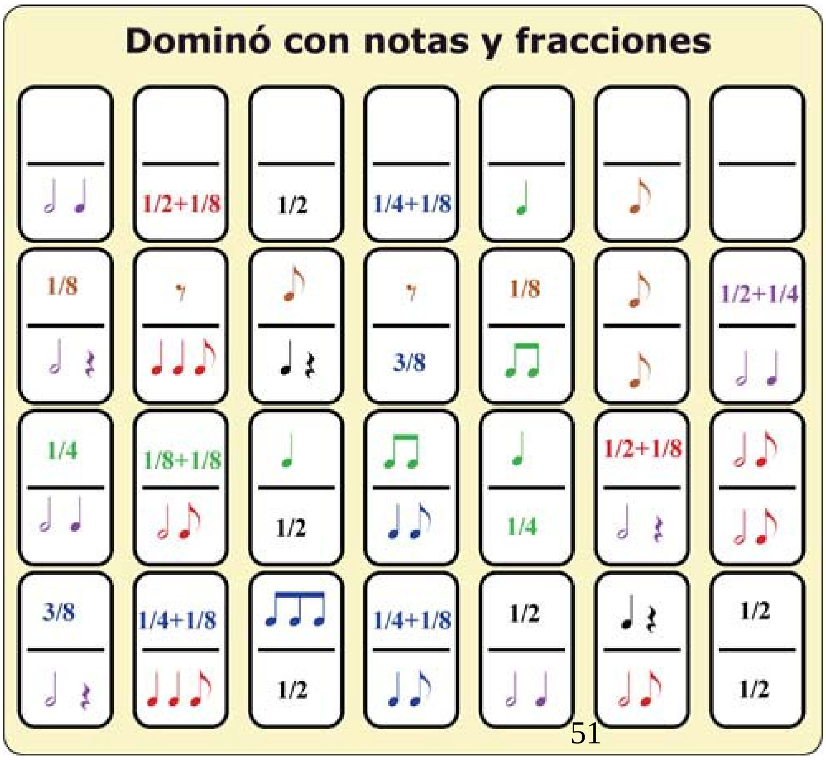


En grupos de cuatro construirán su propio dominó de 28 piezas teniendo en cuenta el patrón de modelo tradicional:



En vez de los valores del 0 al 6 del dominó, tendrán que crear grupos de 8 equivalentes a 7 valores de fracciones previamente asignados. Ejemplo: para el valor $\frac{3}{8}$, un grupo equivalente sería: 3 corcheas unidas, el silencio de negra con puntillo, el valor $\frac{3}{8}$, una negra y un silencio de corchea, 6 semicorcheas unidas…

A continuación crearán las fichas de dominó con papel. Esto es una muestra de lo que podría resultar:



[Imagen extraída de (Liern Carrión, 2011)]

Una vez construido su dominó, los alumnos podrán jugar unas partidas, y opcionalmente pegar el resultado de su partida en una cartulina para exponerlo en los pasillos del instituto:

[Fotografía tomada de un instituto de Valladolid]

Propuesta de actividad 2: Media aritmética, armónica y geométrica a través de relaciones entre notas de la octava.

Objetivos:

- Conocer la escala pitagórica y la escala temperada
- Practicar los diferentes tipos de medias
- Utilizar el uso del redondeo en un caso real
- Relacionar la música con las matemáticas

Contenidos:

- Escalas musicales
- Frecuencias de las notas
- Redondeo, sistema decimal
- Proporcionalidad

Nivel:

- Por el contenido esta actividad puede realizarse en 1º o 2º de la ESO

Metodología: Se explicará la actividad brevemente. Se trabajará en grupos de 2, el cual escogerá una octava de entre las proporcionadas por unas tablas. Ciertos grupos de alumnos recibirán frecuencias de la escala pitagórica y otros de la escala temperada del piano. También se les proporcionará la siguiente tabla:

Nombre del intervalo	Valor	Tipo de proporción	Fórmula
Quinta	$\frac{3}{2}$	$Aritmética$	$\frac{a+b}{2}$
Cuarta	$\frac{4}{3}$	$Armónica$	$\frac{2ab}{a+b}$
Octava	$\frac{2}{1}$	$Geométrica$	$\sqrt{ab}$
Tono	$\frac{9}{8}$	$\frac{Aritmética}{Armonica}$	$\frac{(a+b)^2}{4ab}$

Tendrán que utilizar estas fórmulas y averiguar mediante el redondeo cual es la nota resultante. Una vez obtenida esa nota, tendrán que calcular el cociente de esa nota con la nota de la octava más baja para ver si se corresponde con el valor esperado. Luego habrá una puesta en común y comparación de ambas escalas.

Propuesta de actividad 3: transformaciones métricas y la música

Con esta actividad se pretende aplicar las transformaciones geométricas a la música. Se trata de unas actividades para hacer después de haber visto las transformaciones geométricas como un ejemplo más.

Objetivos:

- Consolidar conceptos matemáticos a través de elementos musicales
- Relacionar la música con las matemáticas
- Aplicar las transformaciones geométricas a una situación concreta

- Reconocer transformaciones geométricas en contextos diversos

Contenidos:

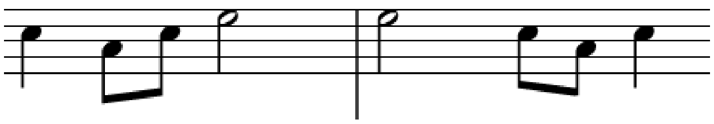
- Figuras musicales (representación de las notas en el pentagrama)
- Trasformaciones geométricas

Nivel:

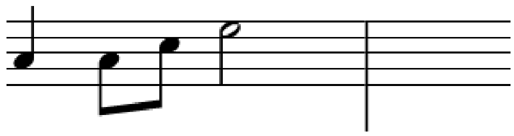
Por el contenido esta actividad puede realizarse en 3º o 4º de la ESO, aunque también puede servir como recurso didáctico para atención a la diversidad o como plan complementario.

Metodología: En coordinación con el departamento de música, se recordará a los alumnos los conceptos de la música que utilizaremos en las actividades. Se entregará a los alumnos una ficha, para que la resuelvan de manera individual, con varias actividades del estilo a las que proponemos a continuación.

1.- ¿Qué transfromación geométrica puedes identificar en el siguiente fragmento musical?



2.- Completa el pentagrama de modo que aparezca una con una reflexión sobre el eje vertical.



3.- Tratar de identificar transformaciones geométricas en una partitura dada. (Habría que seleccionar una partitura acorde a sus conocimientos musicales).

[Béla Bártok, Mikrokosmos, Six Unison Melodies]

BIBLIOGRAFÍA

Arbonés, J., & Milrud, P. (2011). *La armonía es numérica. Música y matemáticas.* Barcelona: RBA Libros.

Camarero Linares, P., Martín Villacasillas, E., & Mínguez Monedero, S. (2014). Trabajo: ¿Sabía Mozart Matemtemáticas? *Premios del departamento de matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para estudiantes de secundaria, octava edición*. Madrid: IES Alameda de Osuna.

De Diego Beade, A. M., & Merino de la Fuente, J. M. (1998). *Fundamentos físicos de la música.* Valladolid: Universidad de Valladolid.

Girbau i Badó, J. (1985). Les matematiques i les escales musicals. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 3-27.

Hart, V. (2009). Symmetry and transformations in the musical plane. (C. S. Sarhangi, Ed.) *Proceedings of Bridges 2009: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, 169-176.

Jofré i Fradera, J. (2005). *El lenguaje musical II. la jerarquía de los sonidos.* Barcelona: Robinbook.

Leher, T. *The derivative song.*

Liern Carrión, V. (Febrero de 2011). Música y matemáticas en educación. *Suma*(66), 107-112.

Lluis-Puebla, E. (1998). ¿Matemáticas en la Música? *Miscelánea matemática SMM*(27), 15-27.

Lluis-Puebla, E. (2002). Matemática en la musicología. *Pro Matemática*, *7*(33).

Luthiers, L. *Demostración del teorema de Thales.*

MindofMatthew. (8 de Mayo de 2008). *I will derive.* Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=P9dpTTpjymE

Pous Soler, N. (Gener de 2003). Matemàtiques i Música. Manlleu: IES Antoni Pous.

TheSingingNerd. (1 de Febrero de 2013). *1+1=11.* Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=OuZ9Kb97DQA

Tiburcio Solis, S. (2002). Teoría de la Probabilidad en la Composición. México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

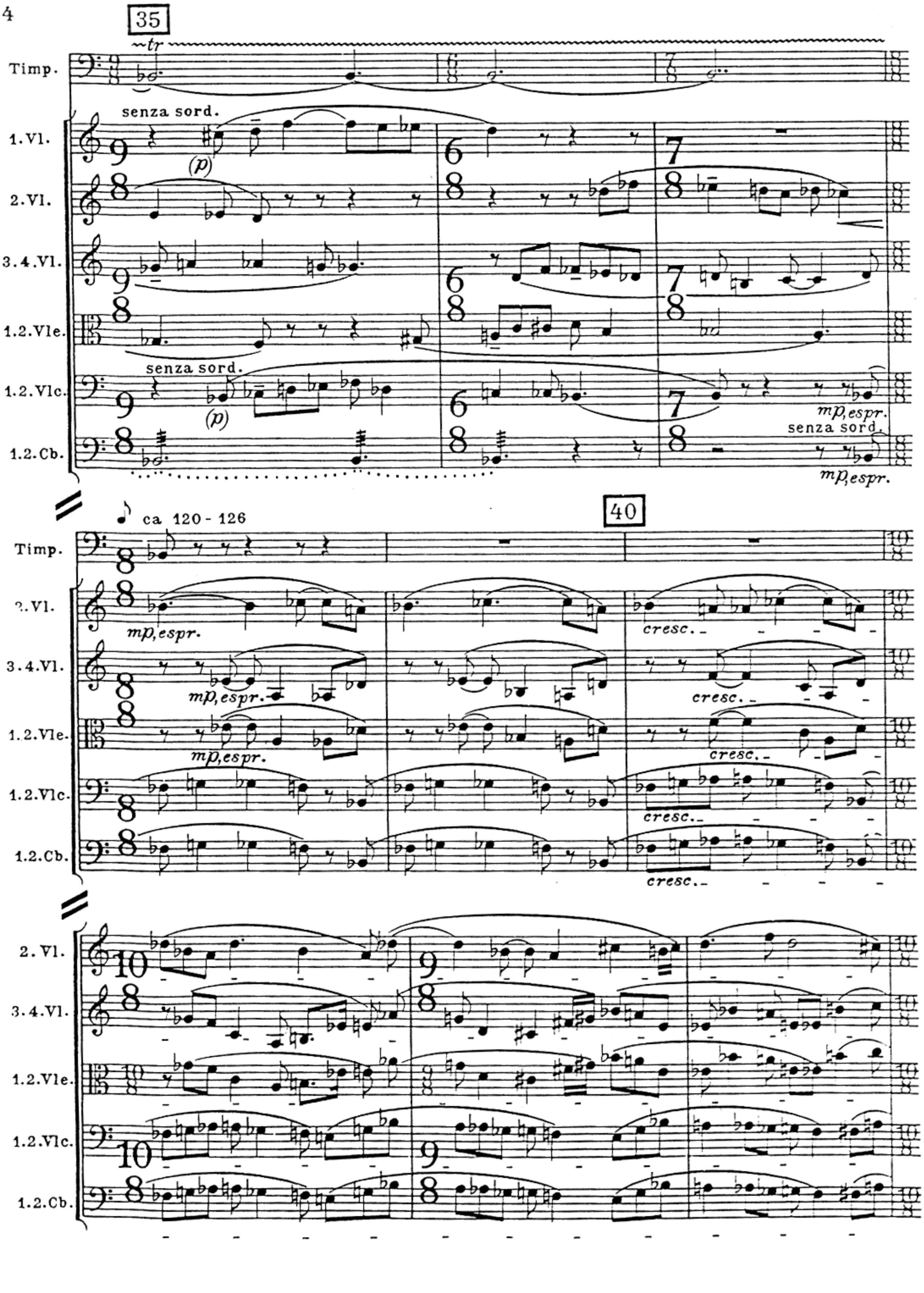
WordGospel09's channel. (22 de Mayo de 2009). *Calculus Rhapsody* . Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=uqwC41RDPyg

ANEXOS

ANEXO 1: MÚSICA PARA CUERDAS, PERCUSIÓN Y CELESTA, I. Andante tranquillo, BÉLA BARTÓK


2. Vl.
3.4. Vl.
1.2.Vle.
1.2.Vlc.
1.2.Cb.
oon sord
pp
20


25
con sord.
1. Vl.
2. Vl.
3.4. Vl.
1.2. Vle.
1.2. Vlc.
1.2. Cb.
30
Timp.
tr
pp
senza sord.
(p)


35
tr
Timp.
senza sord.
1.Vl.
(p)
2.Vl.
3.4.Vl.
1.2.Vle.
senza sord.
1.2.Vlc.
(p)
mp,espr.
senza sord.
1.2.Cb.
mp,espr.
ca 120 - 126
40
Timp.
2.Vl.
mp,espr.
cresc.
3.4.Vl.
mp,espr.
cresc.
1.2.Vle.
mp,espr.
cresc.
1.2.Vlc.
cresc.
1.2.Cb.
cresc.
2. Vl.
3.4.Vl.
1.2.Vle.
1.2.Vlc.
1.2.Cb.

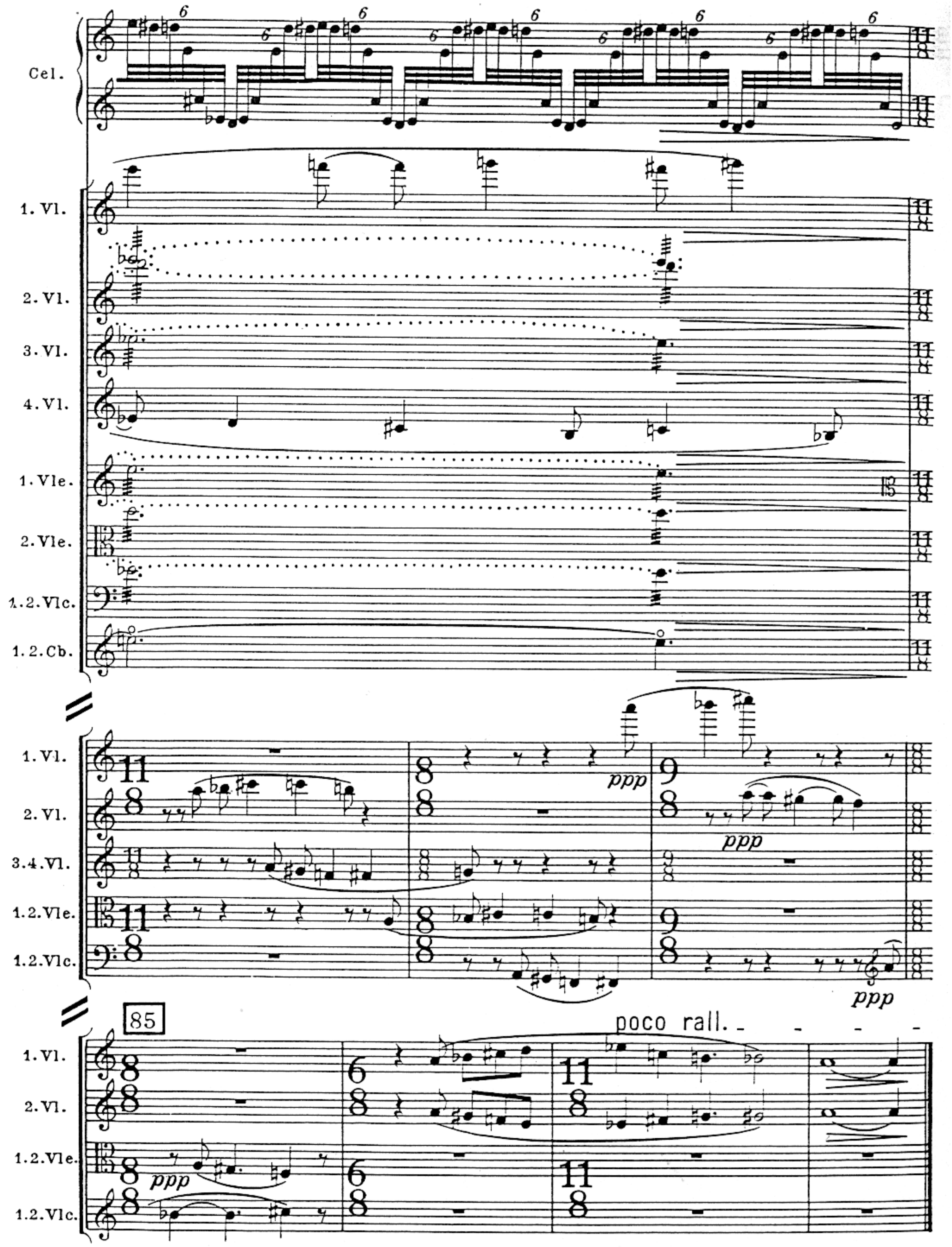

45
5
1.Vl.
2.Vl.
3.4.Vl.
1.2.Vle.
1.2.Vlc.
1.2.Cb.
sempre cresc.
50
Piatti
Timp.
a 2
ca 120 - 116
(non div.)
cresc.
2.Cb.


55
gr. Tr.
Timp.
1. Vl.
2. Vl.
3.4. Vl.
1.2. Vle.
1.2. Vlc.
1.2. Cb.
(non div.)
Punt culminant
60
gliss.
poco rall.
a


65
tempo ♪ ca 116 - 112
1. Vl.
2. Vl.
3. 4. Vl.
con sord.
(p)
1.2. Vle.
1.2. Vlc.
1.2. Cb.
70
3. 4. Vl.
con sord.
1.2. Vle.
(p)
II
con sord.
1.2. Vlc.
(p)
2. Vl.
con sord.
più p
3. Vl.
4. Vl.
più p
1. Vle.
2. Vle.
più p
1.2. Vlc.
più p


75
2. Vl.
3. Vl.
4. Vl.
1. Vle.
2. Vle.
1.2. Vlc.
ca 108
Cel.
p
con sord.
1. Vl.
pp
2. Vl.
pp
3. Vl.
4. Vl.
pp
pp
1. Vle.
pp
2. Vle.
pp
1 2. Vlc.
pp


Cel.
1.Vl.
2.Vl.
3.Vl.
4.Vl.
1.Vle.
2.Vle.
1.2.Vlc.
80
1.2.Cb.
II
pp


Cel.
1. Vl.
2. Vl.
3. Vl.
4. Vl.
1. Vle.
2. Vle.
1.2. Vlc.
1.2. Cb.
ppp
3.4. Vl.
1.2. Vle.
85
poco rall.

ANEXO II: ANÁLISIS DE LARRY SOLOMON, 1973

Bartok: Music for String Instruments, Percussion and Celeste   I. Fugue