Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Grado en Economía

Programación Lineal Entera: Un problema de Planificación de Plantilla

Presentado por:

María Rosa Docio Tomás

Valladolid, 27 de Julio de 2015

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN

La programación lineal entera (en adelante P.L.E.) surge como respuesta a problemas donde las variables de decisión deben tomar valores enteros.

Aunque los problemas de P.L.E. puedan parecer sencillos de resolver, puesto que bastaría con calcular el valor de las variables de decisión y elegir la que proporcione un mayor óptimo, en la práctica al enfrentarnos a situaciones reales, donde existen un gran número de soluciones, se hace complejo el análisis individual de cada variable de decisión. Cabe destacar también, que los métodos de redondeo hacia números enteros, no proporcionan en la mayoría de los casos buenas soluciones. Es por ello, que a lo largo del tiempo han ido surgiendo diferentes métodos de resolución de problemas de P.L.E. , con el fin de facilitar la resolución de éstos y obtener los valores de las variables de decisión en el menor tiempo posible.

El objetivo principal de este trabajo es doble, por una parte analizar los diferentes métodos de resolución de problemas enteros, profundizando en el "Método de los Planos Cortes de Gomory" y en "Los Métodos de Branch and Bound", donde a partir de ejemplos prácticos se proporcionará una mayor comprensión de dichos métodos. Por otra, resolver un problema complejo de P.L.E.

El trabajo se organiza como sigue. En la Sección 2 se da una visión de la programación lineal entera, en la sección 3 se explican y se analizan métodos de resolución de problemas de programación entera, divididos en tres grandes bloques como son: los Métodos de los Planos de Cortes, los Métodos Enumerativos y los Métodos Heurísticos, en la sección 4 se propone un problema de resolución de plantilla, donde las variables de decisión son enteras y cuya resolución se llevará a cabo mediante el programa Gams[1]. El trabajo finaliza con las conclusiones.

---

[1] El sistema de modelado algebraico general (GAMS) es un sistema de modelado de alto nivel para la programación matemática y optimización.

2 INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA PROGRAMACIÓN ENTERA

La programación lineal entera surge como respuesta a los problemas de programación lineal, donde algunas, o todas las variables de decisión, están condicionadas a tomar valores enteros.

La condición de integralidad para las variables de decisión aparece en una gran cantidad de problemas lineales. Por ejemplo, una constructora que construye edificios en dos zonas diferentes de una misma ciudad (zona N y zona S), sabe que para maximizar sus beneficios debe construir 7,8 edificios en la zona N y 9,3 en la zona B, sin embargo, esta solución no es válida. Será necesaria una solución entera. Existen multitud de ejemplos como éste, como pueden ser los problemas de selección de proyectos, del transporte, de asignación de servicios, del viajante, del coste fijo, de distribución de un presupuesto.., en definitiva , de todo aquello que no es divisible.

Cabría pensar que, puesto que el conjunto de soluciones factibles de un problema entero es mucho más reducido que el del mismo problema lineal con las variables libres de esta condición, se podría obtener la solución simplemente evaluando la función objetivo en dichos puntos. Sin embargo no es fácil conocer explícitamente las soluciones posibles enteras y habitualmente hay un número excesivamente grande de ellas.
Tampoco el redondeo de la solución óptima del problema lineal continuo (problema lineal entero sin la restricción de integralidad para las variables) conduce a la solución del problema entero ya que en la mayor parte de los casos incumple algunas de las restricciones del problema.

Se han desarrollado métodos específicos para la resolución de estos problemas, pero no hay un "método" de resolución de problemas lineales enteros como el algoritmo del Simplex en Programación Lineal, sino una colección de algoritmos generalmente basados en las particularidades específicas de cada tipo de problema. Una característica común a la mayoría de estos métodos de solución es que comienzan resolviendo el P.L. Continuo (en adelante P.L.C.) asociado y a partir de su solución óptima introducen técnicas específicas para alcanzar la solución óptima entera. Los primeros intentos surgieron en 1958 de la mano de R. Gomory, se trataba del primer algoritmo finito, conocido como "Método de los Cortes de Gomory". Tan sólo dos años después, en 1960, A. Lang y A. Doig, a partir del método de Gomory desarrollaron "Los Métodos de Branch and Bound ", también conocidos como métodos de ramificación y acotación. En 1965, E. Balas desarrolló "Los Métodos de Enumeración Implícita".

A pesar de los avances en el campo de la P.L.E. y aunque la solución mediante los algoritmos desarrollados esté teóricamente garantizada, otros factores como el número de variables y de condiciones que hacen indispensable el uso de ordenadores restan eficacia a los procedimientos de obtención de óptimo. En estos casos otro tipo de métodos, los algoritmos heurísticos, proporcionan una buena aproximación a la solución del P.L.E.

2.1 FORMULACIÓN GENERAL DEL POBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA

En un problema de programación lineal entera con *n* variables y *m* restricciones se trata de encontrar el valor de las variables x_1 , x_2,…., x_n:

$$
\begin{aligned}
&máx\ o \min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots .. + c_nx_n \\
&s.a{:}\quad a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (\geq)(=) b_1 \\
&\qquad\quad a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (\geq)(=) b_2 \\
&\qquad\quad \cdots \\
&\qquad\quad a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (\geq)(=) b_m \\
&\qquad\quad x_j\ \ enteras, j\ \in J\ \subseteq\ \{1, \ldots., n\}
\end{aligned}
$$

Donde, si J es un subconjunto de $\{1, \ldots., n\}$, todas las variables de decisión están condicionadas a tomar valores enteros, recibiendo este problema el nombre de problema de programación lineal entera pura. Mientras que si J es

un subconjunto propio de $\{1, \dots, n\}$,sólo algunas de las variables de decisión deben tomar valores enteros, denominándose este problema como problema de programación lineal entera mixta.
Recibirán el nombre de problemas de programación lineal entera cero-uno o problemas binarios, aquellos problemas en los que las variables de decisión sólo podrán tomar el valor 0 o el valor 1.

Los problemas de programación lineal entera se pueden clasificar en tres tipos: problemas *directos* donde las variables de decisión son variables cuantitativas, problemas *codificados* cuyas variables de decisión son variables cualitativas y se cuantifican mediante variables binarias, y por último, modelos *transformados* donde se utilizan variables enteras facilitando así un mejor estudio del modelo.

3 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN ENTERA

Analizaremos dos métodos de resolución de Problemas Lineales Enteros: *Métodos Enumerativos* y *Métodos de Planos de Corte* y haremos algunas anotaciones sobre los procedimientos de resolución utilizados en aquellas situaciones en que dificultades de cálculo impiden la implementación de algoritmos exactos, *los Métodos Heurísticos*.

A continuación describiremos dichos métodos.

3.1 MÉTODOS DE PLANOS DE CORTE

Los métodos de planos de corte parten de la resolución del P.L.C. asociado al P.L.E. y tienen como objetivo lograr mediante la incorporación de nuevas restricciones o *planos de corte* que las variables de decisión óptimas sean enteras. Estas nuevas restricciones, restringen el conjunto factible del problema continuo sin suprimir ninguna solución posible entera. La resolución de los sucesivos P.L.C. generados conforme se van añadiendo los cortes se realiza mediante el algoritmo del Simplex. La estructura de los cortes garantiza que la solución de estos problemas converge a la solución del P.L.E..

Podemos distinguir entre, *algoritmo fraccional de Gomory* y *algoritmo todo entero de Gomory,* en función de las características del problema.

Los métodos de los planos de corte resuelven el problema de la programación lineal de la siguiente manera:

1. Resolución del problema lineal continuo asociado.
2. Si la solución óptima del problema es entera, ésta será la solución del problema entero. En caso contrario se elige una de las variables de decisión que debería ser entera y a partir de ella se construye el corte.
3. Una vez añadido el plano de corte, se resuelve nuevamente el problema. Si la solución óptima obtenida sigue sin ser entera, debemos repetir los pasos anteriores hasta que dichas variables sean enteras. Sin embargo, si las variables de decisión resultantes son enteras, se para el proceso, pues hemos conseguido nuestro objetivo.

Ilustramos el método con un sencillo ejemplo:

$$\begin{aligned} &Máx \quad x-2y \\ &s.a: \quad x-y \geq 0 \\ &\qquad\quad 2x+2y \leq 7 \\ &x, y \geq 0 \quad x, y\ enteros \end{aligned}$$

Resolvemos el problema continuo asociado por el algoritmo del Simplex:

Tabla [1]

Variables Básicas	x	y	h_1	h_2	**b**
h_1	-1	1	1	0	0
h_2	●2	2	0	1	7
	-1	2	0	0	

Aplicando el algoritmo del Simplex entra en la base la variable **x** y sale la variable de holgura $\mathbf{h_2}$.

Tabla [2]					
Variables Básicas	x	y	h_1	h_2	**b**
h_1	0	2	1	1/2	7/2
x	1	1	0	1/2	7/2
	0	3	0	1/2	

Solución óptima del problema continuo **x** = 7/2, **y** = 0 que no es entera ya que **x**=7/2= 3+1/2.

Construimos el corte utilizando la fila correspondiente a **x** en la tabla del Simplex:

$1/2\mathbf{h_1} = 3 + 1/2 \rightarrow 1/2\mathbf{h_1} \geq 1/2$ y, añadiendo una nueva variable de holgura **s**, $-1/2\mathbf{h_1} + \mathbf{s} = -1/2$.

La tabla modificada:

Tabla [3]						
Variables Básicas	x	y	h_1	h_2	**s**	**b**
h_1	0	2	1	1/2	0	7/2
x	1	1	0	1/2	0	7/2
s	0	0	0	●-1/2	1	-1/2
	0	3	0	1/2	0	

Aplicando el algoritmo Dual del Simplex, sale de la base **s** y entra $\mathbf{h_2}$.

Tabla [3]						
Variables Básicas	x	y	h_1	h_2	**s**	**b**
h_1	0	2	1	0	1	3
x	1	1	0	0	1	3
h_2	0	0	0	1	-2	1
	0	3	0	0	1	

La solución óptima del problema **x**=3, **y**=0.

A continuación, resolveremos el problema gráficamente. En la Gráfica 3.1.1. se observa el conjunto inicial de soluciones factibles, mientras que, en la gráfica 3.1.2., aplicando el corte de Gomory vemos como el conjunto de soluciones se ha visto reducido.

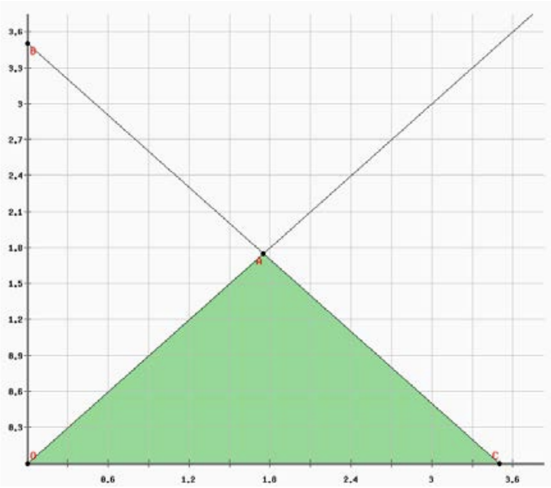


Gráfico 3.1.1.

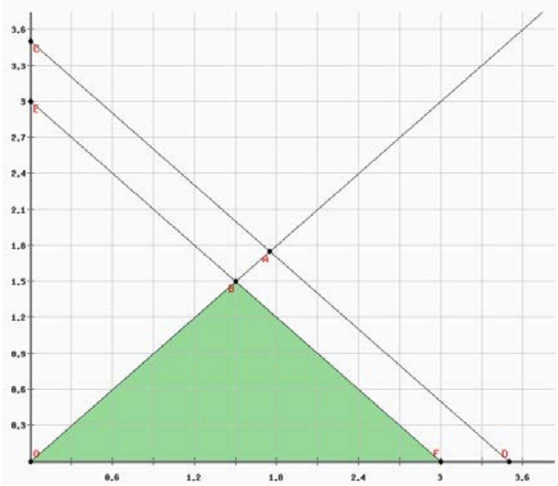


Gráfico 3.1.2.

3.2 MÉTODOS ENUMERATIVOS

Los métodos enumerativos, son aquellos que buscan la solución óptima de los problemas de programación lineal entera, a partir del conjunto de soluciones factibles enteras, de tal manera que no es necesario examinar todas las posibles soluciones factibles enteras de manera individual. Dentro de estos métodos, podemos distinguir entre los *Métodos de Branch and Bound* o de Ramificación y Acotación, y los *Métodos de Enumeración Implícita*, estos últimos ideados para problemas lineales enteros con variables binarias.
Analizamos en este trabajo los métodos Branch and Bound.

3.2.1 Métodos de Branch and Bound

Se pueden aplicar tanto a problemas de programación lineales enteros puros como mixtos.

Los métodos de Branch and Bound (Ramificación y Acotación) se fundamentan en dos procesos, el de acotar y el de ramificar, ambos diseñados con el fin de hallar la solución entera óptima dentro del conjunto de soluciones factibles del problema de programación lineal continúo asociado.
En el proceso de Ramificación, se incluyen restricciones diseñadas para eliminar una parte de la región factible que no incluya soluciones enteras,

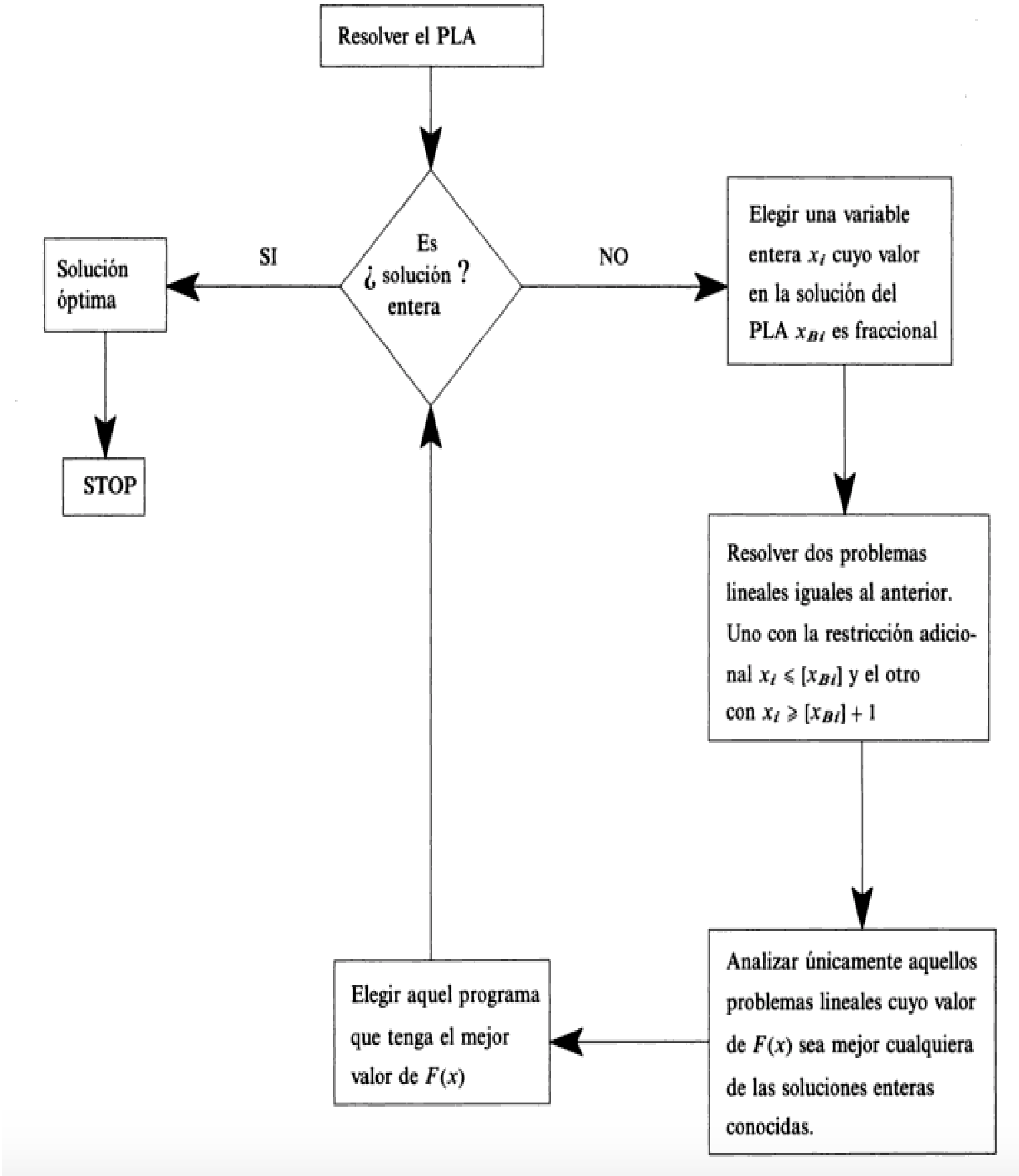
generando subproblemas del problema dado, de tal forma que todas las soluciones enteras del problema inicial, estén incluidas en la unión de las regiones factibles de los subproblemas generados. Repitiendo este proceso, un subproblema dejará de ramificarse, cuando la solución óptima es entera; no es factible; o bien no se pueden ramificar más problemas.
La Acotación reduce enormemente la generación de subproblemas. El proceso de Acotación consiste en fijar como cota superior (en problemas de mínimos) o inferior (en problemas de máximos), el mejor valor de la función objetivo en las soluciones enteras, obtenidas en la resolución de los subproblemas generados hasta el momento, y a partir de la cota se eliminan todos aquellos subproblemas, para los cuáles el valor de la función es mayor o menor que la cota dada en problemas de minimización o maximización, respectivamente. En caso contrario se fija en ese mejor valor una nueva cota.

Los métodos Branch and Bound (Ramificación y Acotación) se basan en las siguientes ideas:

1. Resolución del P.L.C. asociado.
2. Si la solución cumple con las condiciones de integridad, esa es la solución del problema entero.
3. Si la solución no cumple las condiciones de integridad, se elige una variable no entera x_i y a partir de ella se divide el problema en dos nuevos subproblemas con restricciones excluyentes, el primero con la restricción $x_i \geq [x_i] +1$ y el segundo con $x_i \geq [x_i]$.
4. Si al resolver alguno de estos problemas obtenemos una solución entera, ésta será un candidato al óptimo del problema lineal y el valor de la función objetivo en esta solución, una cota. La obtención de dicha solución entera, interrumpe además los procesos de Ramificación, en los que el valor de la función objetivo en el óptimo del correspondiente subproblema, sea o no entera, no supere el valor de la cota en problemas de máximos o no lo disminuya en problemas de mínimos.
5. El proceso de Ramificación se detiene por el criterio de Acotación establecido o por ser un problema no factible.

Podemos resumir este método de resolución de problemas de programación lineal así:

Cuadro 3.2.1.1.



[2]

Fuente: Sala Garrido, R. (1993): *Programación lineal: metodología y problemas.* Editorial Tébar Flores, S.L. Madrid, p.176.

---

[2] P.L.A.: Problema Lineal Continuo

Siguiendo con el ejemplo del punto 2.1. planteado ahora en términos de mínimo, para una mejor comprensión del método, obtenemos la solución aplicando el método de Branch and Bound:

$$Min \quad x - 2y$$
$$s.a: \ x - y \geq 0$$
$$2x + 2y \leq 7$$
$$x, y \ \geq 0 \quad x, y \ enteros$$

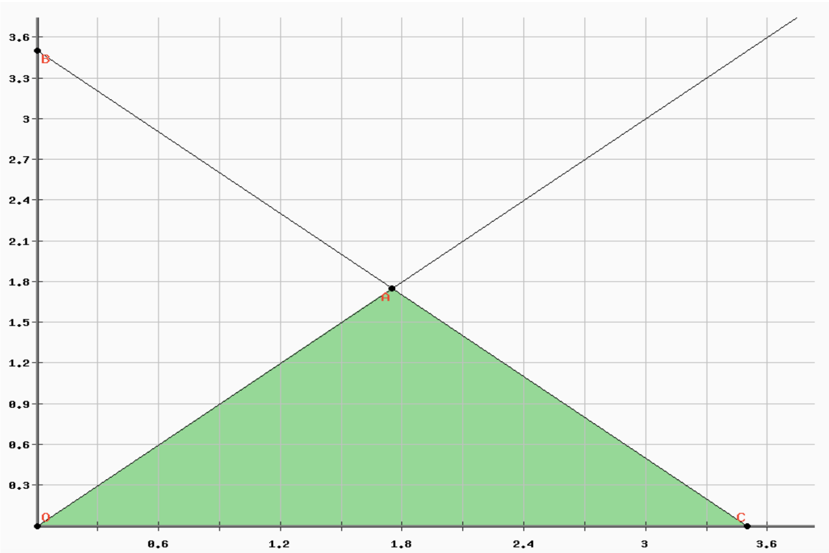


Gráfico 3.2.1.1.

Resolvemos el problema continuo asociado por el algoritmo del Simplex:

Tabla [1]					
Variables Básicas	x	y	h_1	h_2	**b**
h_1	-1	●1	1	0	0
h_2	2	2	0	1	7
	-1	2	0	0	

Aplicando el algoritmo del Simplex entra en la base la variable **y,** y sale la variable de holgura $\mathbf{h_1}$.

Tabla [2]					
Variables Básicas	x	y	h_1	h_2	**b**
y	-1	1	1	0	0
h_2	●4	0	-2	1	7
	-1	0	2	0	

Volviendo a aplicar el algoritmo del Simplex entra en la base la variable **x,** y sale la variable de holgura **h_2**.

Tabla [3]					
Variables Básicas	x	y	h_1	h_2	**b**
y	0	1	1/2	1/4	7/4
x	1	0	1/2	1/4	7/4
	0	0	3/2	1/4	

La solución óptima para dicho problema es $x = 7/4\,, y = 7/4\,, z = -7/4$. Seleccionaremos, por ejemplo, la variable $x = 1{,}75$.

Consideramos dos problemas (Fase de Ramificación) :

1. $x \leq 1$

   Problema:

$$\begin{gathered} Min \quad x - 2y \\ s.a{:}\ \ x - y \geq 0 \\ 2x + 2y \leq 7 \\ x \leq 1 \\ x, y \ \geq 0 \quad x, y\ enteros \end{gathered}$$

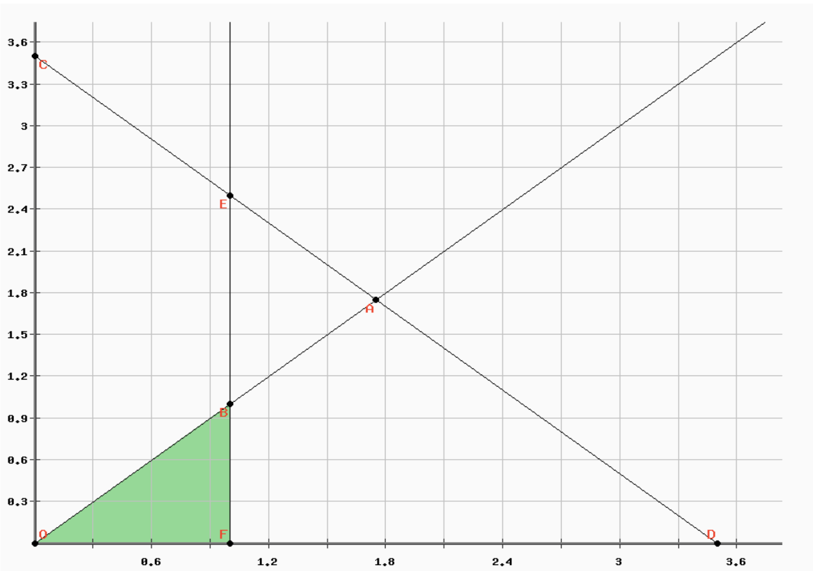


Gráfico 3.2.1.2.

Solución óptima: $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$. Solución entera, por tanto, paramos. Cota Superior $z = -1$.

2. $x \geq 2$

Problema:

$$\begin{aligned} &Min \quad x - 2y \\ &s.a: \quad x - y \geq 0 \\ &\qquad 2x + 2y \leq 7 \\ &\qquad x \geq 2 \\ &x, y \ \geq 0 \quad x, y \ enteros \end{aligned}$$

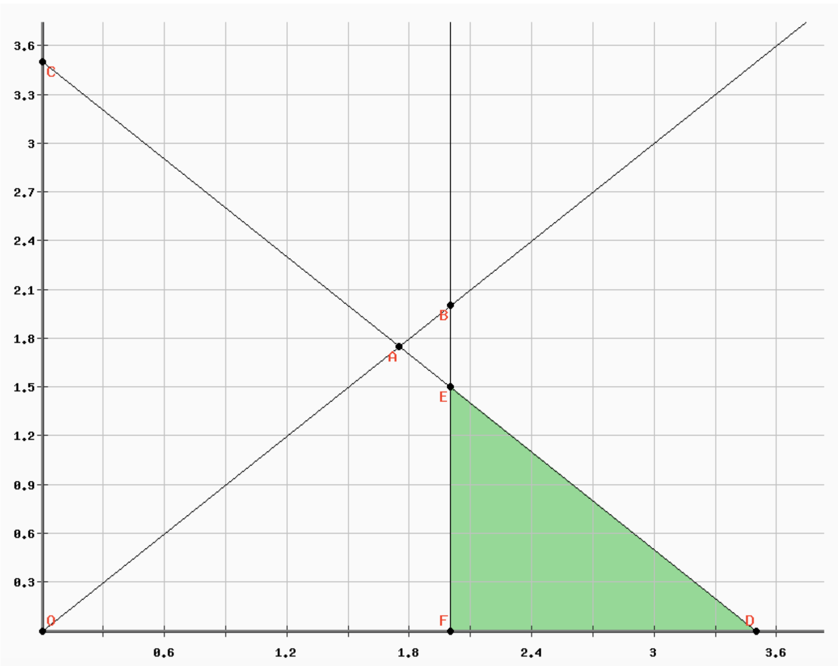


Gráfico 3.2.1.3.

Resolviendo el problema mediante el método del Simplex obtenemos la solución óptima: $x = 2$, $y = 1.5$, $z = -1$.

Ramificamos en y, al ser una variable no entera.

2.1. $y \leq 1$

Problema:

$$\begin{aligned} &Min \quad x - 2y \\ &s.a{:}\ \ x - y \geq 0 \\ &\qquad 2x + 2y \leq 7 \\ &\qquad x \geq 2 \\ &\qquad y \leq 1 \\ &x, y \ \geq 0 \quad x, y \ enteros \end{aligned}$$

El método simplex nos proporciona la solución óptima: $x = 2\,, y = 1\,, z = 0$. Solución entera, por tanto, paramos.

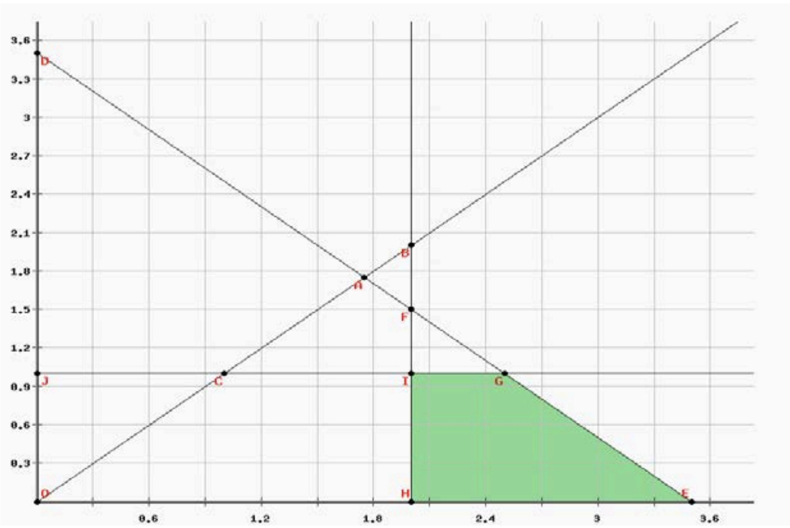


Gráfico 3.2.1.4.

2.2. $y \geq 2$

Problema:

$$\begin{aligned} &Min \quad x - 2y \\ &s.a{:}\ \ x - y \geq 0 \\ &\qquad 2x + 2y \leq 7 \\ &\qquad x \geq 2 \\ &\qquad y \geq 2 \\ &x, y \ \geq 0 \quad x, y \ enteros \end{aligned}$$

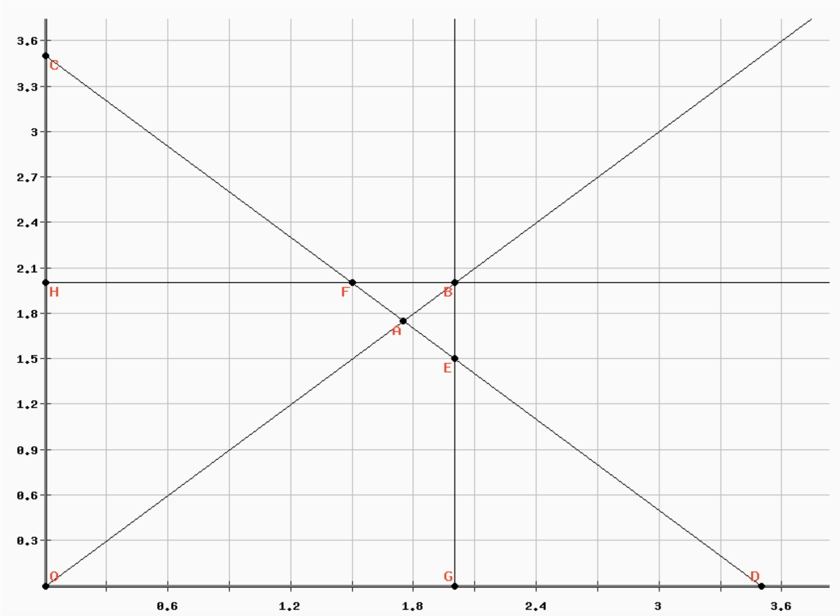


Gráfico 3.2.1.5.

No hay región factible, por lo tanto, paramos.

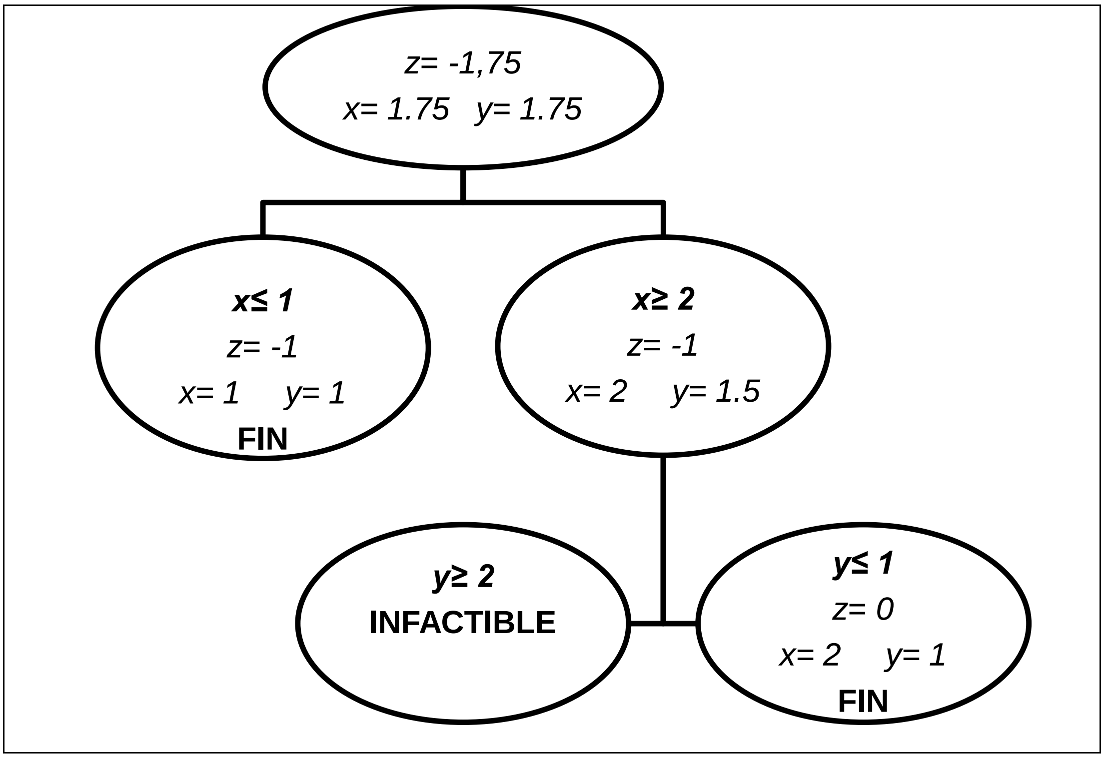


Gráfico 3.2.1.6.

3.2.2 Métodos de Enumeración Implícita

Los métodos de enumeración implícita, están basados en la lógica, y es por ello, que son considerados como métodos heurísticos. Mediante dichos métodos se logra la resolución de problemas lineales enteros, prescindiendo de analizar todas las soluciones posibles. Se aplica a problemas de programación lineal entera, donde las variables de decisión son variables binarias, es decir, sólo pueden tomar el valor 0 o el valor 1.

El algoritmo que se ha utilizado para la resolución de estos métodos, es el algoritmo adictivo de Balas, el cuál tuvo su origen en 1965.

Al centrar nuestro trabajo en el estudio de variables de decisión no binarias, no realizaremos un estudio más exhaustivo de los métodos de enumeración implícita.

3.3 MÉTODOS HEURÍSTICOS

Los métodos heurísticos surgen como respuesta a la complejidad para la resolución de problemas, los cuáles requieren soluciones en un tiempo limitado, sin necesidad de ser soluciones óptimas, basta con que se aproximen al valor óptimo.

La resolución de este tipo de problemas se lleva a cabo a través de algoritmos heurísticos o algoritmos aproximados , los cuáles, al contrario que el resto de algoritmos analizados (algoritmos exactos), proporcionan siempre una solución factible al problema. Estos algoritmos estuvieron expuestos a numerosas críticas debido a su escasa rigidez matemática. Sin embargo, gracias a su gran aportación a problemas cotidianos, fueron poco a poco admitidos entre los métodos de resolución de P.L.E.

Al igual que ocurría con los métodos de enumeración implícita, y a pesar de la gran utilidad de los métodos heurísticos a la hora de la resolución de problemas enteros, no los desarrollaremos con mayor profundidad a lo largo de nuestro trabajo.

4 UN PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE PLANTILLA

Mediante un ejemplo de planificación de plantilla, donde la función objetivo y las restricciones son lineales, y las variables de decisión deben ser enteras, al tratarse de los trabajadores necesarios para cada día de la semana, para que un determinado restaurante minimice sus costes, analizando para ello, posibles casos que se le podría presentar al restaurante, veremos desde el punto de vista práctico la resolución de problemas lineales enteros. Siendo el problema: Considere la posibilidad de un restaurante abierto los siete días de la semana. Un estudio basado en la experiencia pasada, revela el número de trabajadores necesarios cada día en el siguiente cuadro[3]:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Número	14	13	15	16	19	18	11

Cada trabajador trabaja cinco días consecutivos, y después toma dos días de descanso, repitiéndose este patrón indefinidamente.
¿Cómo podríamos reducir al mínimo el número de trabajadores del restaurante?

i. Número total actual de trabajadores en plantilla.
ii. Sin una oferta prevista para los jueves aumenta de 16 a 18 el número de trabajadores necesarios para este día. ¿Cómo afecta esto al número de trabajadores en plantilla?.
iii. Supongamos que le lunes la demanda disminuye y se necesitan 11 trabajadores, en lugar de 14. ¿Cuál es el efecto sobre el número de trabajadores de la plantilla?.
iv. Cualquier trabajador del restaurante cobra 1000 euros al mes.

[3] Cornuejols. G. y Tütüncü, R. (2007): *Optimization Methods in Finance*. University Presss, Cambridge, p. 56.

Los trabajadores se han quejado del turno 4 (pasando a ser el menos deseado). La administración está considerando incentivar este turno incrementando en 100 euros el salario de los trabajadores que lo integran. ¿Cambia esto la solución óptima? ¿Cuál seria el efecto sobre los gastos salariales?.

v. El turno 2 es considerado el mejor, ya que tiene los domingos libres y se trabaja viernes y sábados, que son los mejores días para propinas. La administración está considerando reducir los salarios de los trabajadores de este turno a 900 euros. ¿Cambia esto la solución óptima?.

vi. Se considera la posibilidad de introducir un nuevo turno con descanso en martes y domingos, sin ser éstos días consecutivos. El salario será de 1200 euros. ¿Los gastos salariales totales aumentarán o disminuirán?.

Planteamiento del problema:

- Llamamos x_i al número de trabajadores que inician su turno de 5 días en el día i. Siendo:
  - x_1, los trabajadores que empezaron el turno el lunes, descansado sábados y domingos.
  - x_2 , los trabajadores que empezaron el turno el martes, descansado domingos y lunes.
  - x_3 , los trabajadores que empezaron el turno el miércoles, descansando lunes y martes.
  - x_4 , los trabajadores que empezaron el turno el jueves, descansado martes y miércoles.
  - x_5 , los trabajadores que empezaron el turno el viernes, descansado miércoles y jueves.
  - x_6 , los trabajadores que empezaron el turno el sábado, descansado jueves y viernes.
  - x_7 , los trabajadores que empezaron el turno el domingo, descansado viernes y sábado.

- La función objetivo, está formada por el número de trabajadores que empezaron el turno los diferentes días de la semana, con el fin de reducir al mínimo el número de trabajadores necesarios:

$$Min \;\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

- Las restricciones vienen impuestas, por el número de trabajadores necesarios cada día de la semana, y la condición de que cada trabajador deberá trabajar 5 días de la semana consecutivos y después descansar dos. Por ejemplo, la restricción correspondiente al lunes estará formada por la suma de trabajadores que empezaron su turno el lunes, el jueves, el viernes ,el sábado y el domingo, siendo ésta mayor e igual que 14, correspondiente al número de trabajadores necesarios para dicho día:

$$L: x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 14$$

  El resto de restricciones se plantearán de manera análoga.

- Al tratarse de personas, las variables de decisión deben ser enteras y es por ello, que en el problema incorporaremos dicha condición:

$$x_i \in Z^+$$

- Aplicando todo lo anteriormente planteado, obtenemos el siguiente problema lineal entero:

$$\begin{array}{ll} Min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\ \text{s.a:} & L: x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 14 \\ & M: x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\ & X: x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 \\ & J: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 16 \\ & V: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19 \\ & S: x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 18 \\ & D: x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 \\ & x_i \in Z^+ \qquad i = 1, \ldots, 7 \end{array}$$

La resolución del problema, la vamos a llevar a cabo con el programa informático Gams.

Comenzamos resolviendo el primer apartado. Para ello utilizaremos la función objetivo y las restricciones anteriormente descritas, pues nos piden calcular el número de trabajadores total de la plantilla.

Una vez introducidas en Gams, obtenemos el siguiente resultado (Cuadro 5.1). Donde: $x_1 = 4, x_2 = 7, x_3 = 1, x_4 = 7, x_5 = 0, x_6 = 3, x_7 = 0, z = 22$
Por lo tanto, la plantilla del restaurante estará formada por 22 trabajadores, de los cuáles 4 empezarán el turno el lunes, 7 el martes, 1 el miércoles, 7 el jueves, 3 el sábado, y ningún trabajador empezará su turno en los días viernes y domingos.

En el segundo apartado, aparece una nueva modificación de la cuarta restricción, pasando a ser el número de trabajadores necesarios para este día de 18, en lugar de 16. La función objetivo no se ve influenciada, y por tanto, será la misma:

$$J: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 18$$

Fijándonos en el Cuadro 5.1., observamos que la ecuación 4, la cuál se ha visto modificada, esta comprendida entre los valores 16 y 19. Al estar el nuevo valor númerico,18, dentro de estos valores, no es necesario resolver nuevamente el problema, pues la solución óptima del problema será la misma que la obtenida en el apartado 1. Estando formada la plantilla del restaurante por la plantilla del restaurante por 22 trabajadores, de los cuáles 4 empezarán el turno el lunes, 7 el martes, 1 el miércoles, 7 el jueves, 3 el sábado, y ningún trabajador empezará su turno en los días viernes y domingos.

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   personal            OBJECTIVE  F
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  25

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              22.0000



                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ              .         .         .        1.000
---- EQU E1             14.000    14.000     +INF        .
---- EQU E2             13.000    14.000     +INF        .
---- EQU E3             15.000    15.000     +INF        .
---- EQU E4             16.000    19.000     +INF        .
---- EQU E5             19.000    19.000     +INF        .
---- EQU E6             18.000    18.000     +INF        .
---- EQU E7             11.000    11.000     +INF        .

                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X1               .        4.000     +INF      1.000
---- VAR X2               .        7.000     +INF      1.000
---- VAR X3               .        1.000     +INF      1.000
---- VAR X4               .        7.000     +INF      1.000
---- VAR X5               .         .        +INF      1.000
---- VAR X6               .        3.000     +INF      1.000
---- VAR X7               .         .        +INF      1.000
---- VAR F              -INF      22.000     +INF        .


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```
Cuadro 5.1.

La modificación del número de trabajadores necesarios para el lunes, pasando de 14 a 11 (tercer apartado), obliga a variar la restricción correspondiente a dicho día, o lo que es lo mismo, la primera restricción. Sin embargo, la función objetivo no varía:

$$L: x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$$

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   personal            OBJECTIVE  F
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  24

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE               21.0000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ             .         .         .        1.000
---- EQU E1            11.000    11.000     +INF       .
---- EQU E2            13.000    13.000     +INF       .
---- EQU E3            15.000    15.000     +INF       .
---- EQU E4            16.000    18.000     +INF       .
---- EQU E5            19.000    19.000     +INF       .
---- EQU E6            18.000    18.000     +INF       .
---- EQU E7            11.000    11.000     +INF       .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X1              .        3.000     +INF      1.000
---- VAR X2              .        7.000     +INF      1.000
---- VAR X3              .        3.000     +INF      1.000
---- VAR X4              .        5.000     +INF      1.000
---- VAR X5              .        1.000     +INF      1.000
---- VAR X6              .        2.000     +INF      1.000
---- VAR X7              .         .        +INF      1.000
---- VAR F             -INF      21.000     +INF       .


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

Cuadro 5.2.

Siendo: $x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 1, x_6 = 2, x_7 = 0, z = 21$

Como consecuencia de la alteración de la restricción correspondiente al número de trabajadores que deberán empezar su turno el lunes, descansando sábados y domingos, el número de trabajadores en plantilla se ve reducido en una persona, pasando de 22 a 21 trabajadores, de los cuáles 3 empezarán el turno el lunes, 7 el martes, 3 el miércoles, 5 el jueves, 1 el viernes, 2 el sábado, y ningún trabajador empezará su turno el domingo.
Dicha modificación provoca una disminución de los trabajadores que empiezan su turno los lunes, jueves y sábados. Sin embargo, el número de empleados que lo empiezan en miércoles y viernes aumentan. Manteniéndose igual, el número de trabajadores que empiezan su turno los domingos.

Cada trabajador recibe un sueldo de 1000 euros al mes, sin embargo, al observar que el turno cuatro es el menos deseado, se decide incrementar el salario de los trabajadores de dicho turno en 100 euros (apartado 4). La función objetivo debe expresarse en términos de coste, manteniéndose el conjunto de restricciones del problema initial:

$$Min \qquad x_1 + x_2 + x_3 + 1.1x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   personal            OBJECTIVE  F
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  24

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE               22.4000
```

Cuadro 5.3.

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- EQU OBJ	.	.	.	1.000
---- EQU E1	14.000	14.000	+INF	.
---- EQU E2	13.000	17.000	+INF	.
---- EQU E3	15.000	15.000	+INF	.
---- EQU E4	16.000	16.000	+INF	.
---- EQU E5	19.000	19.000	+INF	.
---- EQU E6	18.000	18.000	+INF	.
---- EQU E7	11.000	11.000	+INF	.

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR X1	.	4.000	+INF	1.000
---- VAR X2	.	7.000	+INF	1.000
---- VAR X3	.	1.000	+INF	1.000
---- VAR X4	.	4.000	+INF	1.100
---- VAR X5	.	3.000	+INF	1.000
---- VAR X6	.	3.000	+INF	1.000
---- VAR X7	.	.	+INF	1.000
---- VAR F	-INF	22.400	+INF	.

```
**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

Cuadro 5.4.

En el cuadro 5.4. observamos los valores correspondientes a las variables de decisión y a la función objetivo: $x_1 = 4, x_2 = 7, x_3 = 1, x_4 = 4, x_5 = 3, x_6 = 3$, $x_7 = 0, z = 22400$

Los gastos salariales totales a los que debe hacer frente el restaurante son de 22400 euros. La plantilla del restaurante estará formada por 22 trabajadores, de los cuáles 4 empezarán el turno el lunes, 7 el martes, 1 el miércoles, 4 el

jueves, 3 el viernes, 3 el sábado, y ningún trabajador empezará su turno el domingo.
Como resultado del incremento salarial a los trabajadores que empezaron su turno el jueves, el número de trabajadores que formarán la plantilla será el mismo, 22. Sin embargo, el número de trabajadores que empiezan su turno los jueves disminuye, mientras que los que lo empezaron el viernes aumenta. Manteniéndose igual el número de trabajadores que empezaron su turno los lunes, martes, miércoles, sábados y domingos. Los gastos salariales se ven incrementados.

En el quinto apartado, aparece una modificación del salario que reciben los trabajadores que empiezan su turno el martes, disminuyendo su salario en 100 euros, lo que hace que varíe la función objetivo. El conjunto de restricciones no se ven influenciadas con respecto al apartado 1, y por tanto, será el mismo:

$$Min \qquad x_1 + 0.9x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   personal            OBJECTIVE  F
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  24

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE               21.3000
```

Cuadro 5.5.

```
                     LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- EQU OBJ            .          .          .         1.000
---- EQU E1          14.000     14.000      +INF          .
---- EQU E2          13.000     14.000      +INF          .
---- EQU E3          15.000     15.000      +INF          .
---- EQU E4          16.000     19.000      +INF          .
---- EQU E5          19.000     19.000      +INF          .
---- EQU E6          18.000     18.000      +INF          .
---- EQU E7          11.000     11.000      +INF          .

                     LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- VAR X1             .         4.000      +INF        1.000
---- VAR X2             .         7.000      +INF        0.900
---- VAR X3             .         1.000      +INF        1.000
---- VAR X4             .         7.000      +INF        1.000
---- VAR X5             .          .         +INF        1.000
---- VAR X6             .         3.000      +INF        1.000
---- VAR X7             .          .         +INF        1.000
---- VAR F            -INF       21.300      +INF          .


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

Cuadro 5.6.

En esta ocasión los gastos salariales corresponden a 21300 euros, 1100 euros inferior a los gastos que debería pagar el restaurante cuando incrementa el sueldo a los trabajadores del turno 4. Siendo esto totalmente lógico, pues en esta ocasión, lo que se está produciendo es una reducción en 100 euros el salario de los trabajadores que empezaron su turno el martes. Sin embargo, la plantilla estará formada por el mismo número de trabajadores, 22, de los cuáles 4 empezarán el turno el lunes, 7 el martes, 1 el miércoles, 7 el jueves, 3 el sábado, y ningún trabajador empezará su turno en los días viernes y domingos.
A pesar, de la disminución salarial a los trabajadores que empezaron su turno el martes, la solución óptima obtenida, es idéntica a la que obteníamos cuando

no se producía dicha reducción, esto puede deberse a las propinas. Sin embargo, los gastos salariales si se ven reducidos.

La posibilidad de incorporar un nuevo turno, con descanso en martes y domingos, con un sueldo de 1200 euros al mes para los trabajadores de éste (apartado 6), siendo 200 euros superior al que reciben los trabajadores del resto de turnos, hace que varíe la función objetivo y el conjunto de restricciones. Siendo el problema:

$$
\begin{aligned}
Min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 1.2x_8 \\
\text{s.a:} \quad & L: x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 14 \\
& M: x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\
& X: x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 15 \\
& J: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_8 \geq 16 \\
& V: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_8 \geq 19 \\
& S: x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 \geq 18 \\
& D: x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 \\
& x_i \in Z^+ \qquad i = 1, \dots, 7
\end{aligned}
$$

```
              S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   personal           OBJECTIVE  F
     TYPE    MIP                DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX              FROM LINE  24

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      8 Integer Solution
**** OBJECTIVE VALUE              22.0000
```

Cuadro 5.7.

```
                         LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ               .          .          .        1.000
---- EQU E1              14.000     14.000     +INF        .
---- EQU E2              13.000     16.000     +INF        .
---- EQU E3              15.000     15.000     +INF        .
---- EQU E4              16.000     16.000     +INF        .
---- EQU E5              19.000     19.000     +INF        .
---- EQU E6              18.000     18.000     +INF        .
---- EQU E7              11.000     12.000     +INF        .

                         LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR X1                .         4.000     +INF       1.000
---- VAR X2                .         6.000     +INF       1.000
---- VAR X3                .         2.000     +INF       1.000
---- VAR X4                .         4.000     +INF       1.000
---- VAR X5                .         3.000     +INF       1.000
---- VAR X6                .         3.000     +INF       1.000
---- VAR X7                .          .        +INF       1.000
---- VAR X8                .          .        +INF       1.200
---- VAR F               -INF       22.000     +INF        .


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

Cuadro 5.8.

Los gastos salariales son de 22000 euros. La plantilla del restaurante estará formada por 22 trabajadores, de los cuáles 4 empezarán el turno el lunes, 6 el martes, 2 el miércoles, 4 el jueves, 3 el viernes, 3 el sábado, ningún trabajador empezará su turno el domingo ni en el nuevo turno.

Puesto que no se contrataría a ningún trabajador del nuevo turno, ni tampoco se consiguen abaratar los gastos de personal, no merecerá la pena establecer el nuevo turno, ya que no tendría sentido.

A pesar del incremento salarial a los trabajadores del nuevo turno, el número total de trabajadores que formarán la plantilla seguirá siendo el mismo.

En conclusión, lo más beneficioso para el restaurante es, la reducción del sueldo a los trabajadores del turno 2, en 100 euros. De ésta manera, se seguirá contratando a 22 trabajadores, 4 de ellos empezarán el turno el lunes, 7 el martes, 1 el miércoles, 7 el jueves, 3 el sábado, y ningún trabajador empezará su turno en los días viernes y domingos.

5 CONCLUSIONES

- La P.L.E. surge como respuesta a problemas en los que las variables de decisión están condicionadas a tomar valores enteros.
- A pesar de los aspectos positivos que posee la P.L.E. como pueden ser que:

  1) La resolución de éstos problemas es más rápida, gracias a la gran cantidad métodos que han ido apareciendo con el paso del tiempo.
  2) Existen múltiples algoritmos para la resolución de problemas de P.L.E. ,aprovechando todos ellos las características del problema que buscan resolver.

  Cabe destacar los inconvenientes de la P.L.E.:

  1) Al ser problemas con muchas variables y muchas restricciones, en ocasiones, ni los programas informáticos son capaces de llegar a la solución óptima. Utilizando los métodos heurísticos se logra obtener una solución al problema. Aunque dichos métodos resuelvan el problema de manera local, se pueden considerar las soluciones como buenas.
  2) No existe un único algoritmo para la resolución del conjunto de tipos de problemas de programación lineal entera.

- Una característica común a la mayoría de los métodos de solución de P.L.E. es que comienzan resolviendo el P.L.C. asociado y a partir de su solución óptima, introducen técnicas específicas para alcanzar la solución óptima entera.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Calvete Fernández, H. y Mateo Collazos, P. (1994): *Programación Lineal, Entera y Meta. Problemas y Aplicaciones.* Prensas Universitarias de Zaragoza.

Cornuejols. G. y Tütüncü, R. (2007): *Optimization Methods in Finance*. University Presss, Cambridge.

Duarte Muñoz, A. …[et al.] (2007): *Metaheurísticos.* Editorial DYKINSON, S.L. Madrid.

Martín Alberdi, I: Introducción al lenguaje Gams. Disponible en: http://es.escribd.com/doc/51184827/Introduccion-al-lenguaje-GAMS#scribd, [consulta: segundo trimestre 2015]

Pardo, L. …[et al.] (1990): *Programación Lineal Entera . Aplicaciones Prácticas en la Empresa.* Ediciones Díaz de Santos S.A. Madrid.

Rosenthal, R.E.: *A GAMS tutorial.* Disponible en: http://www.gams.com/ dd/docs/gams/Tutorial.pdf, [consulta: segundo trimestre de 2015]

Sala Garrido, R. (1993): *Programación lineal: metodología y problemas.* Editorial Tébar Flores, S.L. Madrid.

7 ANEXOS

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE PLANTILLA

i y ii:

```
$TITLE personal
$ONTEXT
problema
$OFFTEXT

option optcr=0000.1;

VARIABLES
X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,F;
INTEGER VARIABLES
X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7;

EQUATIONS
OBJ,E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7;
OBJ..F=E=X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7;
E1..X1+X4+X5+X6+X7=G=14 ;
E2..X1+X2+X5+X6+X7=G=13 ;
E3..X1+X2+X3+X6+X7=G=15 ;
E4..X1+X2+X3+X4+X7=G=16 ;
E5..X1+X2+X3+X4+X5=G=19 ;
E6..X2+X3+X4+X5+X6=G=18 ;
E7..X3+X4+X5+X6+X7=G=11 ;

MODEL personal/ALL/ ;

SOLVE personal USING MIP MINIMIZING F;
```

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL    personal              OBJECTIVE  F
     TYPE     MIP                   DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER   CPLEX                 FROM LINE  25

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE               22.0000
```

```
                         LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ                .         .         .        1.000
---- EQU E1              14.000    14.000     +INF        .
---- EQU E2              13.000    14.000     +INF        .
---- EQU E3              15.000    15.000     +INF        .
---- EQU E4              16.000    19.000     +INF        .
---- EQU E5              19.000    19.000     +INF        .
---- EQU E6              18.000    18.000     +INF        .
---- EQU E7              11.000    11.000     +INF        .

                         LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X1                 .       4.000     +INF       1.000
---- VAR X2                 .       7.000     +INF       1.000
---- VAR X3                 .       1.000     +INF       1.000
---- VAR X4                 .       7.000     +INF       1.000
---- VAR X5                 .         .       +INF       1.000
---- VAR X6                 .       3.000     +INF       1.000
---- VAR X7                 .         .       +INF       1.000
---- VAR F                -INF     22.000     +INF        .


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

iii:

```
$TITLE personal
$ONTEXT
problema
$OFFTEXT

VARIABLES
X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,F;
INTEGER VARIABLES
X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7;

EQUATIONS
OBJ,E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7;
OBJ..F=E=X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7;
E1..X1+X4+X5+X6+X7=G=11 ;
E2..X1+X2+X5+X6+X7=G=13 ;
E3..X1+X2+X3+X6+X7=G=15 ;
E4..X1+X2+X3+X4+X7=G=16 ;
E5..X1+X2+X3+X4+X5=G=19 ;
E6..X2+X3+X4+X5+X6=G=18 ;
E7..X3+X4+X5+X6+X7=G=11 ;

MODEL personal/ALL/ ;

SOLVE personal USING MIP MINIMIZING F;
```

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL    personal            OBJECTIVE  F
     TYPE     MIP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER   CPLEX               FROM LINE  24

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE               21.0000
```

```
                           LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ                 .          .          .        1.000
---- EQU E1                11.000     11.000     +INF        .
---- EQU E2                13.000     13.000     +INF        .
---- EQU E3                15.000     15.000     +INF        .
---- EQU E4                16.000     18.000     +INF        .
---- EQU E5                19.000     19.000     +INF        .
---- EQU E6                18.000     18.000     +INF        .
---- EQU E7                11.000     11.000     +INF        .

                           LOWER      LEVEL      UPPER    MARGINAL

---- VAR X1                  .         3.000     +INF       1.000
---- VAR X2                  .         7.000     +INF       1.000
---- VAR X3                  .         3.000     +INF       1.000
---- VAR X4                  .         5.000     +INF       1.000
---- VAR X5                  .         1.000     +INF       1.000
---- VAR X6                  .         2.000     +INF       1.000
---- VAR X7                  .          .        +INF       1.000
---- VAR F                  -INF      21.000     +INF        .


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

iv:

```
$TITLE personal
$ONTEXT
problema
$OFFTEXT

VARIABLES
X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,F;
INTEGER VARIABLES
X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7;

EQUATIONS
OBJ,E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7;
OBJ..F=E=X1+X2+X3+1.1*X4+X5+X6+X7;
E1..X1+X4+X5+X6+X7=G=14 ;
E2..X1+X2+X5+X6+X7=G=13 ;
E3..X1+X2+X3+X6+X7=G=15 ;
E4..X1+X2+X3+X4+X7=G=16 ;
E5..X1+X2+X3+X4+X5=G=19 ;
E6..X2+X3+X4+X5+X6=G=18 ;
E7..X3+X4+X5+X6+X7=G=11 ;

MODEL personal/ALL/ ;

SOLVE personal USING MIP MINIMIZING F;
```

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   personal              OBJECTIVE  F
     TYPE    MIP                   DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX                 FROM LINE  24

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE               22.4000
```

```
                         LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- EQU OBJ               .          .          .         1.000
---- EQU E1              14.000     14.000      +INF         .
---- EQU E2              13.000     17.000      +INF         .
---- EQU E3              15.000     15.000      +INF         .
---- EQU E4              16.000     16.000      +INF         .
---- EQU E5              19.000     19.000      +INF         .
---- EQU E6              18.000     18.000      +INF         .
---- EQU E7              11.000     11.000      +INF         .

                         LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- VAR X1                .         4.000      +INF        1.000
---- VAR X2                .         7.000      +INF        1.000
---- VAR X3                .         1.000      +INF        1.000
---- VAR X4                .         4.000      +INF        1.100
---- VAR X5                .         3.000      +INF        1.000
---- VAR X6                .         3.000      +INF        1.000
---- VAR X7                .          .         +INF        1.000
---- VAR F               -INF       22.400      +INF         .


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

V:

```
$TITLE personal
$ONTEXT
problema
$OFFTEXT

VARIABLES
X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,F;
INTEGER VARIABLES
X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7;

EQUATIONS
OBJ,E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7;
OBJ..F=E=X1+0.9*X2+X3+X4+X5+X6+X7;
E1..X1+X4+X5+X6+X7=G=14 ;
E2..X1+X2+X5+X6+X7=G=13 ;
E3..X1+X2+X3+X6+X7=G=15 ;
E4..X1+X2+X3+X4+X7=G=16 ;
E5..X1+X2+X3+X4+X5=G=19 ;
E6..X2+X3+X4+X5+X6=G=18 ;
E7..X3+X4+X5+X6+X7=G=11 ;

MODEL personal/ALL/ ;

SOLVE personal USING MIP MINIMIZING F;
```

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL    personal              OBJECTIVE  F
     TYPE     MIP                   DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER   CPLEX                 FROM LINE  24

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE               21.3000
```

```
                          LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- EQU OBJ                .          .          .         1.000
---- EQU E1              14.000     14.000      +INF         .
---- EQU E2              13.000     14.000      +INF         .
---- EQU E3              15.000     15.000      +INF         .
---- EQU E4              16.000     19.000      +INF         .
---- EQU E5              19.000     19.000      +INF         .
---- EQU E6              18.000     18.000      +INF         .
---- EQU E7              11.000     11.000      +INF         .

                          LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

---- VAR X1                 .         4.000     +INF        1.000
---- VAR X2                 .         7.000     +INF        0.900
---- VAR X3                 .         1.000     +INF        1.000
---- VAR X4                 .         7.000     +INF        1.000
---- VAR X5                 .          .        +INF        1.000
---- VAR X6                 .         3.000     +INF        1.000
---- VAR X7                 .          .        +INF        1.000
---- VAR F                 -INF      21.300     +INF         .


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

vi:

```
$TITLE personal
$ONTEXT
problema
$OFFTEXT

VARIABLES
X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8,F;
INTEGER VARIABLES
X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8;

EQUATIONS
OBJ,E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7;
OBJ..F=E=X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+1.2*X8;
E1..X1+X4+X5+X6+X7+X8=G=14 ;
E2..X1+X2+X5+X6+X7=G=13 ;
E3..X1+X2+X3+X6+X7+X8=G=15 ;
E4..X1+X2+X3+X4+X7+X8=G=16 ;
E5..X1+X2+X3+X4+X5+X8=G=19 ;
E6..X2+X3+X4+X5+X6+X8=G=18 ;
E7..X3+X4+X5+X6+X7=G=11 ;

MODEL personal/ALL/ ;

SOLVE personal USING MIP MINIMIZING F;
```

```
                 S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   personal                OBJECTIVE  F
     TYPE    MIP                     DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX                   FROM LINE  24

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      8 Integer Solution
**** OBJECTIVE VALUE               22.0000
```

```
                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ              .         .         .        1.000
---- EQU E1             14.000    14.000     +INF       .
---- EQU E2             13.000    16.000     +INF       .
---- EQU E3             15.000    15.000     +INF       .
---- EQU E4             16.000    16.000     +INF       .
---- EQU E5             19.000    19.000     +INF       .
---- EQU E6             18.000    18.000     +INF       .
---- EQU E7             11.000    12.000     +INF       .

                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR X1               .        4.000     +INF      1.000
---- VAR X2               .        6.000     +INF      1.000
---- VAR X3               .        2.000     +INF      1.000
---- VAR X4               .        4.000     +INF      1.000
---- VAR X5               .        3.000     +INF      1.000
---- VAR X6               .        3.000     +INF      1.000
---- VAR X7               .         .        +INF      1.000
---- VAR X8               .         .        +INF      1.200
---- VAR F               -INF     22.000     +INF       .


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```