



---

**Universidad de Valladolid**

**Facultad de Ciencias**

# TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster de Investigación en Matemáticas.

## Funciones Zeta en los grafos

**Autor: Andrés Sanz Torres**

**Tutor: Antonio Campillo López**



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Función zeta de Ihara</b>	<b>7</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	7
1.2. Función zeta de Ihara . . . . .	10
1.3. Formula de inversión de Möbius . . . . .	14
1.4. Teorema del número primo para grafos. . . . .	16
<b>2. Otras funciones Zeta</b>	<b>21</b>
2.1. Funcion zeta de Aristas . . . . .	21
2.2. Prueba de Bass de la fórmula determinantal de Ihara . . . . .	23
2.3. Función zeta de caminos . . . . .	25
<b>3. Grafos de Ramanujan</b>	<b>29</b>
3.1. Algunas desigualdades . . . . .	33
3.2. Recubrimientos de grafos . . . . .	34
3.3. 2-recubrimientos y el polinomio indicador de emparejamientos . .	35
3.4. Familias entrelazadas . . . . .	36
3.5. Grafos de Ramanujan de orden par . . . . .	39



# Introducción

Las funciones zeta son el objeto de atención en numerosas áreas de las matemáticas, como objetos de referencia para formular y eventualmente resolver los problemas principales de dichas áreas. Ello se debe a la información y a las propiedades que aportan dichas funciones.

La función zeta de Riemann en relación con la distribución con los números primos, así como funciones zeta de Dedekind para cuerpos para fines análogos, las funciones zeta de Weil y de Igusa en relación con el cómputo de soluciones de ecuaciones algebraicas sobre cuerpos finitos o sobre enteros  $p$ -ádicos, o la función zeta de la monodromía en relación con la geometría y topología de variedades, son algunos de notables ejemplos importantes en análisis, álgebra o geometría.

Las funciones zeta son normalmente funciones meromorfas de una variable compleja asociadas con determinadas funciones generatrices de secuencias de enteros que codifican información relevante de problemas de interés en el área que se considera. Los ceros y los polos de dichas funciones suelen encerrar una información fundamental sobre los problemas, y frecuentemente para formularlos en forma clara y enunciar los resultados y las conjeturas. Como ejemplo, la validez de la hipótesis de Riemann implicaría una distribución más armoniosa de los números primos. Para las principales funciones zeta se han formulado también sus hipótesis de Riemann con resultados o conjeturas significativas.

En ocasiones se utilizan adicionalmente análogos de las funciones zeta en varias variables, como es el caso de la teoría de nudos, en topología, para cuyo problema de clasificación se utiliza el polinomio de Alexander en tantas variables como nudos hay en los entrelazamientos. En algunos casos geométricos, la especialización de las variables del polinomio de Alexander, o análogos en varias variables de la función zeta [2], da lugar a una función zeta de la monodromía.

Este también es el caso de la teoría de grafos, en combinatoria, a las que se dedica este trabajo. Se trata de la función zeta de Ihara en una variable, para la que la validez de la hipótesis de Riemann caracteriza los grafos regulares de Ramanujan, y también a las funciones zeta en varias variables de Hashimoto y Stark respectivamente [11]. Por su respectiva construcción las funciones de Ihara, Hashimoto y Stark asociadas a un grafo se denominan también “de vértices”, “de aristas” y “de caminos” y cada una de ellas determina también la anterior por medio de una especialización asociada de sus variables.

La función zeta de Ihara está vinculada con el cómputo de caminos cerrados sin retrocesos ni colas (es decir circuitos formados por aristas consecutivas sin

dar pasos hacia atrás) de longitud arbitraria que se pueden trazar en el grafo. El logaritmo de la función zeta de Ihara tiene directamente esta información como coeficientes de su serie de Taylor en el origen. También tiene una fórmula como producto de Euler de tantos términos como circuitos primos (o simplemente primos) pueden trazarse en el grafo, definidos por la noción natural de irreducibilidad.

La fórmula de Ihara para la función zeta muestra ésta como la inversa de un polinomio calculable por una fórmula determinantal cuya matriz de polinomios se construye a partir de la matriz de adyacencia del grafo y de la matriz diagonal de grados de los vértices. Ello permite encontrar, como raíces de un polinomio, los polos de la función zeta. La demostración, por parte de Bass [3], de la fórmula de Ihara es, en sí misma, un resultado de interés matemático general.

En analogía con el teorema del número primo, que afirma que el infinito dado por el número de primos menores o iguales que una cantidad  $x$ , cuando  $x$  tiende a infinito, es equivalente al infinito  $x/\log x$ . Se tiene también un “teorema del número primo para grafos”, debido al trabajo de Kotani y Sunada [11], que afirma que el infinito secuencial dado por el número de circuitos de longitud  $m$ , cuando  $m$  tiende a infinito, es equivalente al infinito  $\Delta R^{-m}/m$  siendo  $R$  el radio de convergencia de la función zeta de Ihara y  $\Delta$  el máximo común divisor de las longitudes de los circuitos cerrados del grafo sin retrocesos ni colas.

A todo lo anterior, sobre la función zeta de Ihara, está dedicado el primer capítulo de este trabajo. El segundo capítulo se dedica a las funciones zeta de varias variables asociadas a un grafo. Para la construcción de dichas funciones, se considera una variable  $w_{a,b}$  o  $z_{a,b}$  para cada par de aristas orientadas siempre y cuando el extremo final de  $a$  coincida con el inicial de  $b$  y se tenga  $b \neq a^{-1}$ . En el caso de la función zeta de aristas, se consideran la totalidad de los pares de aristas con esta propiedad, en el caso de que la función zeta de caminos, se consideran solamente los pares de aristas fuera de un árbol de expansión (o generador) del grafo que son, en concreto, las aristas que generan el grupo fundamental del grafo. Si especializamos la función zeta de aristas, haciendo que todas las variables sean iguales a una, se obtiene la función zeta de Ihara.

Una especialización precisa de las variables de la función zeta de caminos, teniendo en cuenta la noción de árbol de expansión, da lugar a la función zeta de aristas. En ambos casos, se tienen fórmulas determinantaes que muestran respectivamente que dichas funciones zeta son los inversos de polinomios del tipo  $\det(I - W)$  y  $\det(I - Z)$ , siendo  $I$  la matriz identidad y  $W, Z$  respectivamente matrices cuyas entradas son las variables  $w_{a,b}, z_{a,b}$  consideradas o bien cero. Se deduce, en particular, por especialización la celebrada fórmula de Ihara-Hashimoto que muestra que la función zeta de Ihara es el inverso de un polinomio característico de una matriz cuadrada con número de filas igual al doble de número de aristas.

El capítulo 3 está dedicado a los grafos de Ramanujan. Para un entero positivo  $q$ , los grafos regulares de grado  $d = q + 1$  son aquellos en los que todos sus vértices tienen grado  $d$ . Los valores propios de la matriz de adyacencia de un grafo regular

de grado  $d$  están en el intervalo  $[-d, d]$  siendo siempre  $d$  uno de dichos autovalores. El grafo regular es bipartito exactamente si  $-d$  es un valor propio también y, de hecho, el espectro (conjunto de autovalores con su multiplicidad) es simétrico respecto de 0 en ese caso.

Tiene especial interés para un grafo regular de grado  $d$ , el máximo valor absoluto  $\lambda$  de los valores propios diferentes de  $d$  y  $-d$  (éstos son los llamados triviales). La razón es que, asintóticamente, hay autovalores de valor absoluto relativamente grande, en concreto se tiene, como probó Alon [1] que si dejamos fijo  $d$  y consideramos una sucesión de grafos regulares de grado  $d$  cuyo número de vértices tienda a infinito, entonces para cada  $\varepsilon > 0$  a partir de un cierto término de la sucesión el grafo tiene al menos un valor propio no trivial de módulo mayor que  $2\sqrt{q} - \varepsilon$ .

Los grafos regulares de Ramanujan se definen como aquellos de grado  $d$  cuyos valores propios no triviales son todos, en módulo, menores que  $\sqrt{q}$ . Estos grafos con competitivos en las aplicaciones como son las de los problemas de distribución, al encontrarse todos sus vértices proporcionalmente bien ubicados con respecto de sus vértices vecinos para esta finalidad. La fórmula de Ihara permite probar que los grafos de Ramanujan son, como ya se ha dicho, exactamente aquellos para los que la función zeta de vértices satisface la hipótesis de Riemann en su contexto.

Existen grafos de Ramanujan para todo valor de  $d$ , de hecho el grafo completo  $K_{d+1}$  o los grafos bipartitos  $K_{d,d}$  son Ramanujan entre muchos otros. Sin embargo, si se fija  $d$  y el número de vértices tiende a infinito, el problema asintótico de encontrar sucesiones de grafos de Ramanujan regulares de grado  $d$  y número de vértices arbitrariamente grande es difícil. Hasta 2013, utilizando técnicas sofisticadas sobre cuaterniones, grupos, grafos de Cayley y otros, solo se había encontrado tales sucesiones de grafos de Ramanujan para casos en los que  $q$  era una potencia de un número primo. Fueron trabajos hace tres décadas de matemáticos como Lubotzky, Phillips, Sarnak [5] o Margulis [8], que no hemos descrito en este trabajo.

Recientemente, utilizando técnicas de gran sencillez como son recubrimientos dobles, polinomios en una variable y cálculo matricial, Marcus, Spielman y Srivastava [6], [7] han construido sucesiones de grafos bipartitos de Ramanujan de grado arbitrario  $d$ . Esta construcción, que describimos conceptualmente (ya que los detalles están claros en las referencias) en este trabajo. La prueba consiste en comenzar con un grafo regular bipartito de grado  $d$ , y estudiar los  $2^m$  recubrimientos posibles del mismo siendo  $m$  el número de aristas (se obtienen con una simple signación  $+1, -1$  a las aristas del grafo original) y entonces se prueba que algunos de estos recubrimientos dobles tienen que ser de nuevo Ramanujan y, naturalmente, conserva la regularidad y el grado. Iterando el proceso se encuentra la sucesión.

Los resultados se extienden a grafos bipartitos birregulares, pero aún no hay avances significativos para grafos regulares no bipartitos ni para otros tipos de grafos irregulares, La condición de bipartito se ha utilizado para despreocuparse de los valores propios próximos a  $-d$  al ser el espectro simétrico en este caso. La

noción de ser Ramanujan se puede formular en general. La referencia a Ramanujan no se debe al trabajo del gran matemático indio, sino al hecho de que las primeras construcciones de sucesiones de tales grafos regulares (para  $q$  primo) requirieron la prueba previa de la conocida conjetura de Ramanujan.

La exposición del trabajo es técnica y pretende describir los conceptos y resultados que consideramos principales de las funciones zeta en general. También nos hemos procurado motivar el uso de pensamiento topológico para los razonamientos en teoría de grafos, como son el grupo fundamental o los recubrimientos. Ello se debe a la posibilidad de relacionar estas funciones con otras de la aritmética y de la geometría en las que también el pensamiento topológico juega un papel.



# Capítulo 1

## Función zeta de Ihara

### 1.1. Conceptos básicos

Comencemos dando unas definiciones básicas, las cuales facilitarán la expresión a lo largo del trabajo.

**Definición 1.1** Un **grafo**  $X$  es un par ordenado de conjuntos finitos  $X = (V, E)$ , donde:

- $V$  es el conjunto de **vértices**, siendo este no vacío.
- $E$  es el conjunto de **aristas** cada una de las cuales está representada por dos vértices a los que enlaza que se llaman extremos. Dos vértices dados pueden ser los extremos de una o más aristas.

Diremos que un grafo es **no dirigido** si las aristas de  $E$  no están orientadas, es decir no se distingue un vértice de otro. En cambio diremos que el grafo es **dirigido** cuando las aristas están orientadas, es decir se tiene un sentido de recorrido de un vértice a otro. Cuando una arista está orientada, uno de sus extremos será el vértice inicial y el otro el final.

Normalmente se pueden considerar grafos infinitos, es decir aquellos en los que  $V$  y  $E$  pueden ser conjuntos infinitos, pero este trabajo solo afecta a los grafos finitos definidos anteriormente. Diremos que  $n$  es el **orden** de  $X$  si es su número de vértices, es decir  $n = |V|$ .

Un **lazo** es una arista de un grafo no dirigido que relaciona al mismo vértice, es decir, una arista donde los extremos coinciden.

El **grado** de un vértice  $v \in V$  es igual al número de aristas que lo tienen como extremo, contando dos veces los lazos, pues lo contiene dos veces como extremo.

Un **camino**  $c$  es una concatenación de aristas sucesivas tales que cada una de ellas lleva un sentido de forma que el vértice final de una es el inicial de la siguiente. Si el vértice inicial y el final de un camino coinciden diremos que es un

**camino cerrado.** Si el camino cerrado no pasa dos veces por ningún vértice, (es decir ninguno es el inicial de dos caminos) entonces diremos que  $c$  es un **ciclo**.

Llamaremos grafo cíclico de orden  $n$  al grafo conexo no dirigido de  $n$  vértices y todos ellos de grado 2, es decir  $X$  esta compuesto por un ciclo de orden  $n$ .

Un grafo no dirigido  $X$  es **conexo** si para cada par de vértices  $a, b \in V$  existe un camino cuyos vértices inicial y final son  $a$  y  $b$  respectivamente.

Un grafo se dice que es **simple**, si no tiene lazos ni aristas múltiples, es decir si no hay lazos ni más de una arista con los mismos extremos.

A lo largo del trabajo, salvo que se mencione expresamente, consideraremos grafos no dirigidos, de orden finito, conexos, sin vértices de grado 1. Generalmente los consideraremos no cíclicos, ya que éstos casos serán triviales.

**Definición 1.2** Sea  $V$  el conjunto de vértices de un grafo  $X$  con  $n = |V|$ . La **matriz de adyacencia**  $\mathbf{A}$  de  $X$  es una matriz  $n \times n$  donde

$$a_{i,j} = \begin{cases} \text{número de aristas entre los vértices } i \text{ y } j & \text{si } i \neq j, \\ 2 \text{ veces el número de lazos en } i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Al igual que con la función zeta de Riemann, en los grafos podemos definir una función zeta, la función zeta de Ihara, pero para ello debemos dar un concepto de primo en un grafo.

**Definición 1.3** Sea  $X$  un grafo y  $E$  su conjunto de aristas con  $|E| = m$ . Consideremos una orientación arbitraria de las aristas de  $X$  y definamos un nuevo conjunto de aristas orientadas

$$E^e = \{e_1, e_2, \dots, e_{2m}\},$$

donde  $e_i$  con  $i = 1, \dots, m$  es la  $i$ -ésima arista de  $E$  con la orientación antes dada, y  $e_{i+m} = e_i^{-1}$  es la misma arista con la orientación opuesta.

**Definición 1.4** Dado un grafo  $X$ , un árbol de expansión de  $X$  es un subgrafo conexo y sin ciclos que contiene a todos los vértices.

**Definición 1.5** Sea  $c = a_1 a_2 \cdots a_s$  un camino en  $X$  donde  $a_i \in E^e$  se dice que:

- a)  $c$  tiene un **retroceso**, si  $a_{j+1} = a_j^{-1}$  para algún  $j = 1, \dots, s-1$ .
- b)  $c$  tiene una **cola** si  $a_s = a_1^{-1}$ .
- c) La **longitud** de  $c$  es  $s$  y se denota por  $\nu(c)$ .
- d) El producto de dos caminos cerrados  $c$  y  $d$  con el mismo vértice inicial es el camino cerrado denotado por  $c \cdot d$  que consiste en recorrer primero las aristas de  $c$  y a continuación las de  $d$ .

- e) Un camino cerrado  $c$  es **primitivo**, si  $c \neq d^f$  para todo  $f \geq 2$  y todo camino  $d$  de  $X$ , donde  $d^f$  denota recorrer el camino cerrado  $d$ ,  $f$  veces en el mismo sentido.
- f) Un camino cerrado  $c$  es **primo** si no tiene retrocesos ni colas y es primitivo.

De la definición de primo en  $X$  es inmediato que los caminos sin retrocesos ni cola de  $X$  son primos, o potencias de un primo.

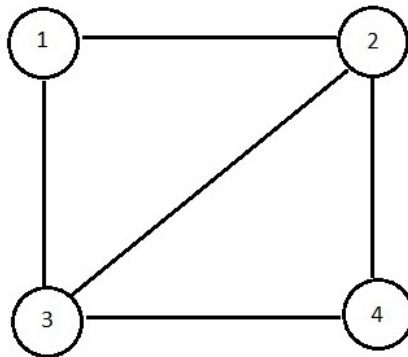
Si  $c = a_1a_2 \dots a_s$  es un primo de  $X$ , cualquier camino cerrado de la forma  $a_ja_{j+1} \dots a_1a_s \dots a_{j-1}$  con  $j = 1, \dots, s$  también serán primos, por lo que vamos a definir una relación de equivalencia en la que la clase de  $c$  es:

$$C = \{a_1a_2 \dots a_s, a_2a_3 \dots a_sa_1, \dots, a_sa_1 \dots a_{s-1}\}.$$

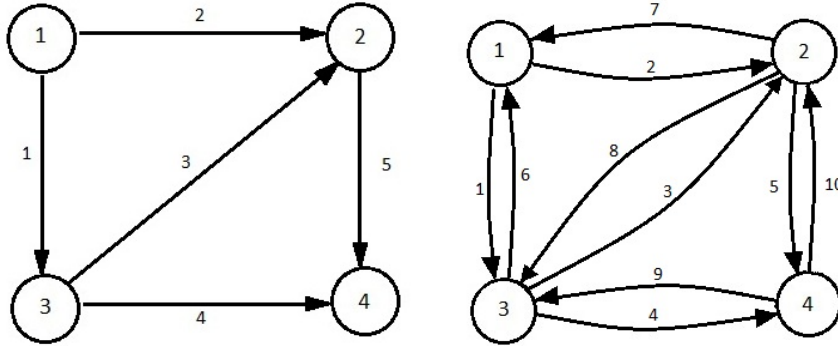
A la clase de equivalencia del camino cerrado  $a_s, \dots, a_2, a_1$  la denotamos por  $C^{-1}$ . Si  $C$  es la clase de equivalencia de un primo, también lo será  $C^{-1}$  y viceversa, y a dichas clases denotaremos habitualmente por  $P, Q, \dots$

Dadas dos clases de equivalencia  $C$  y  $D$  de respectivos caminos cerrados  $c$  y  $d$ , denotaremos por  $C \cdot D$  a la clase de equivalencia del camino obtenido a partir de  $cd$  eliminando los retrocesos y las colas. Los grafos cíclicos solo tienen dos primos  $P$  y  $P^{-1}$ , siendo  $P$  el primo dado por el ciclo del grafo recorrido en uno de los dos sentidos posibles.

**Ejemplo 1.6** Consideremos  $X = K_4 - e$  el siguiente grafo obtenido de suprimir una arista  $e$  del grafo completo  $K_4$ , y sea  $E$  su conjunto de aristas. Veamos cual es  $E^e$  y demos algunos ejemplos y contraejemplos de primos en él.



Dando una orientación arbitraria a sus aristas, tendríamos los dos grafos con  $E$  y  $E^e$  como conjuntos de aristas respectivamente



Si denotamos por  $a_j$  la arista etiquetada por  $j$  en el grafo de la figura anterior, el camino  $a_1a_3a_5a_9a_6$  tiene cola y el  $a_3a_7a_2a_5a_9$  un retroceso, luego no son primos. Los caminos  $a_1a_4a_{10}a_7$  y  $a_1a_3a_5a_9a_3a_7$  son primos, así como lo son todos los de la forma  $a_3a_7a_1(a_3a_5a_9)^n$ .

Como podemos observar este grafo tiene infinitos primos, de hecho esto sucede en todos los grafos salvo los cíclicos, que solo tienen los primos  $P$  y  $P^{-1}$ .

## 1.2. Función zeta de Ihara

En teoría de números se nos presenta la función zeta de Riemann dada por el producto infinito

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{P \text{ primo}} \frac{1}{1 - P^{-s}}$$

La importancia de esta función reside en su relación con la distribución con los números primos. De hecho, uno de los problemas del milenio es probar la hipótesis de Riemann, que conjetura que los ceros no triviales de la función zeta de Riemann, que es la extensión analítica al plano complejo de la función definida por el producto infinito, están en la recta  $\text{Re}(s) = 1/2$ .

En teoría de grafos también se define una función zeta, donde el papel de los números primos pasan a ser el de los caminos primos en  $X$ .

**Definición 1.7** La **función zeta de Ihara** para un grafo  $X$  conexo, finito y sin vértices de grado 1 viene dada por la siguiente función compleja de  $u$  para  $|u|$  suficientemente pequeño,

$$\zeta_X(u) = \zeta(u, X) = \prod_P (1 - u^{\nu(P)})^{-1}, \quad (1.1)$$

Dónde  $P$  recorre todas las clases de los primos del grafo  $X$ .

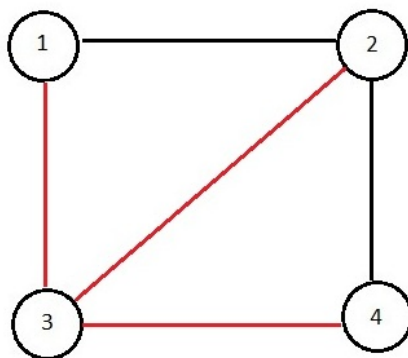
Esta función también se la llama función zeta de los vértices. El producto que define la función zeta de Ihara es infinito salvo para los grafos cíclicos, en cuyo caso, si  $X$  es cíclico con  $m$  aristas,

$$\zeta(u, X) = \frac{1}{(1 - u^m)^2}$$

**Definición 1.8** Al radio de convergencia del producto con el que se define la función zeta de Ihara se le denota por  $R_X$ .

**Observación 1.9** Otro aspecto a tener en cuenta de los grafos, es su grupo fundamental  $\Pi_1(X, v)$ , cuyos elementos son los caminos de aristas orientadas que empiezan y terminan en el vértice  $v$ . El producto de dos caminos  $C$  y  $D$ , consiste en recorrer primero  $C$  y después  $D$ . Puesto que el árbol de expansión es contráctil por no contener ciclos, se puede probar que el grupo fundamental de  $X$  es el grupo libre de  $r$  generadores, donde el **rango**  $r$  es el número de aristas fuera del árbol de expansión.

**Ejemplo 1.10** El árbol de expansión de  $K_4 - e$  es:



Podemos ver que entonces su grupo fundamental  $\Pi_1(K_4 - e, 1)$  es el grupo libre de dos generadores.

En general se puede calcular el rango del grupo fundamental de un grafo conexo con solo saber el número de vértices y de aristas como muestra el siguiente resultado.

**Proposición 1.11** Sea  $X$  un grafo,  $E$  su conjunto de aristas y  $V$  el de vértices. Entonces

$$r - 1 = |E| - |V|$$

siendo  $r$  el rango del grupo fundamental de  $X$ .

**Demostración:** Sabemos que  $r$  es el número de aristas fuera de un árbol de expansión. Puesto que éste es conexo, sin ciclos y contiene todos los vértices, veamos que debe tener  $|V| - 1$  aristas.

Podemos construir el árbol generador partiendo de un vértice  $v$  de  $X$ . Partiendo de un vértice  $v$ , por cada nuevo vértice que queramos conectar al árbol, tendremos que añadir una arista, lo que hacen un total de  $|V| - 1$  aristas, de modo que  $r = |E| - (|V| - 1)$  de donde se obtiene el resultado. ■

Más adelante trabajaremos nuevamente con los árboles de expansión y el grupo fundamental de un grafo, cuando veamos la función zeta de caminos. Ahora

daremos una fórmula muy eficaz para calcular la función zeta de Ihara de un grafo.

**Teorema 1.12 Fórmula determinantal de Ihara.** Dado  $X$  un grafo,  $r$  el rango de su grupo fundamental,  $A$  su matriz de adyacencia y  $Q$  la matriz diagonal cuya entrada  $i$ -ésima es grado del vértice  $i$ -ésimo menos 1, entonces

$$\zeta(u, X)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - Au + Qu^2) \quad (1.2)$$

Más adelante daremos una demostración de esta fórmula, basada en la prueba de Bass (Teorema 2.8). Pero por ahora veamos cual sería el resultado para nuestro grafo antes mencionado, donde  $r = 2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De modo que la fórmula determinantal de Ihara sería:

$$\zeta(u, x)^{-1} = (1 - u^2) \begin{vmatrix} 1 + u^2 & -u & -u & 0 \\ -u & 1 + 2u^2 & -u & -u \\ -u & -u & 1 + 2u^2 & -u \\ 0 & -u & -u & 1 + u^2 \end{vmatrix}$$

Llegando tras las cuentas a

$$\zeta(u, X)^{-1} = (1 - u^2)(1 + u^2)(1 - u)(1 + u + 2u^2)(1 - u^2 - 2u^3).$$

**Definición 1.13** Dado un grafo  $X$ , consideremos  $E^e$  el conjunto de aristas definido en 1.3 se define la **matriz 0,1 de adyacencia de aristas**  $W_1$ , a la matriz  $2m \times 2m$  cuyo elemento  $i, j$  es 1 si  $e_i$  acaba donde empieza  $e_j$  siendo  $e_i \neq e_j^{-1}$ , y es 0 en otro caso.

**Lema 1.14** Dada  $A$ , matriz  $n \times n$  con coeficientes complejos se tiene que  $\exp \operatorname{Tr} A = \det \exp A$  siendo

$$\exp A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

**Demostración:** Dada  $A$ , sabemos que existe otra matriz invertible  $U$  con  $U^{-1}AU = T$  siendo  $T$  una matriz triangular superior. Además el operador traza cumple que  $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$  para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ . De modo que

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr}(UU^{-1}A) = \operatorname{Tr}(U^{-1}AU) = \operatorname{Tr} T = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Donde los  $\lambda_i$  son los autovalores de la matriz  $A$ , luego

$$\exp \operatorname{Tr} A = \exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n).$$

Por otro lado tenemos definida

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

De donde se deduce que  $B \exp(A)B^{-1} = \exp(BAB^{-1})$  para cualquier matriz invertible  $B$ . En concreto para  $U$  se tiene que  $U \exp(A)U^{-1} = \exp(T)$ , cuyo  $i$ -ésimo elemento de la diagonal, atendiendo a la definición de la exponencial será  $\exp(\lambda_i)$ . De modo que

$$\begin{aligned} \det \exp A &= \det(U \exp(A)U^{-1}) = \det \exp T = \exp(\lambda_1) \exp(\lambda_2) \dots \exp(\lambda_n) \\ &= \exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \end{aligned}$$

teniendo así el resultado. ■

**Definición 1.15** Se denota por  $N_k$  al número de caminos cerrados sin retrocesos ni colas de longitud  $k$  en  $X$ .

**Lema 1.16** Dado un grafo  $X$ , se tiene que:

$$\log \zeta(u, X) = \sum_{k \geq 1} \frac{N_k}{k} u^k. \quad (1.3)$$

**Demostración:** Tomando logaritmos en (1.1) se tiene que

$$\log \zeta(u, X) = \log \prod_P (1 - u^{\nu(P)})^{-1} = - \sum_P \log(1 - u^{\nu(P)}).$$

Tomemos ahora el desarrollo en serie de la función logaritmo,

$$\log \zeta(u, X) = - \sum_P \log(1 - u^{\nu(P)}) = \sum_P \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} u^{\nu(P)j}$$

Dado que todo camino cerrado sin retrocesos ni cola es un primo o una potencia de él, podemos interpretar la suma anterior como la suma en todos estos caminos, sean primos o no, de longitud  $k$ . Teniendo en cuenta que hay  $N_k$  caminos con  $\nu(C) = k$  la fórmula anterior nos queda:

$$\log \zeta(u, X) = \sum_{k \geq 1} \frac{N_k}{k} u^k. \quad (1.4) \quad \blacksquare$$

**Teorema 1.17** Dado un grafo  $X$  y  $W_1$  su matriz de adyacencia de aristas, se tiene la siguiente formula:

$$\zeta(u, X)^{-1} = \det(I - W_1 u) \quad (1.5)$$

Este teorema lo daremos por supuesto por el momento, pues su demostración se dará más adelante como corolario de un resultado más general.

### 1.3. Formula de inversión de Möbius

Uno de los principales resultados en teoría de números es el llamado teorema de los números primos, demostrado por Jacques Hadamard y Vallee Poussin en 1896. Este resultado nos dice como se distribuyen los números primos asintóticamente, dando a entender que, aun siendo infinitos, son “menos comunes” cuanto más grandes son.

**Teorema 1.18** Sea  $\pi(x)$  la función cuenta cuantos número primos menores o iguales que  $x$ . Entonces

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \text{ Donde } \ln(x) \text{ denota el logaritmo natural de } x.$$

Decir que el límite cuando  $x$  tiende a infinito del cociente entre las dos funciones  $\pi(x)$  y  $x/\log(x)$  es 1. El infinito dado por la diferencia de estas funciones puede ser estimado y dicha estimación se haría más ajustada si la hipótesis de Riemann fuese probada.

En la teoría de grafos nos encontramos su análogo, al igual que lo hacíamos con la función zeta de Riemann y la de Ihara. El propósito de este capítulo es entender y demostrar este teorema, para ello vayamos antes con unos resultados y definiciones previas.

**Definición 1.19** Se define la **función de Möbius**  $\mu(n)$  como

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \dots p_r \text{ con } p_i \text{ primos distintos,} \\ 0 & \text{en otro caso (} n \text{ no es libre de cadrados).} \end{cases}$$

**Definición 1.20** Se define la convolución de Dirichlet entre dos funciones aritméticas  $f$  y  $g$  como:

$$(f * g)(n) = \sum_{a \cdot b = n} f(a)g(b)$$

**Proposición 1.21** La convolución de Dirichlet es asociativa, conmutativa y con elemento unidad.

**Demostración:** La conmutatividad es casi inmediata de la definición,

$$(f * g)(n) = \sum_{a \cdot b = n} f(a)g(b) = \sum_{a \cdot b = n} g(b)f(a) = (g * f)(n).$$



La asociatividad se deduce de que

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(n) &= \sum_{a \cdot b = n} (f * g)(a)h(b) = \sum_{a \cdot b = n} \sum_{c \cdot d = a} f(c)g(d)h(b) \\ &= \sum_{c \cdot d \cdot b = n} f(c)g(d)h(b). \\ (f * (g * h))(n) &= \sum_{a \cdot b = n} f(a)(g * h)(b) = \sum_{a \cdot b = n} \sum_{c \cdot d = b} f(a)g(c)h(d) \\ &= \sum_{a \cdot c \cdot d = n} f(a)g(c)h(d). \end{aligned}$$

Por último consideremos  $\varepsilon(n)$  definido por  $\varepsilon(n) = 1$  si  $n = 1$ ,  $\varepsilon(n) = 0$  si  $n > 1$ . Entonces para cualquier función aritmética,

$$(\varepsilon * f)(n) = \sum_{a \cdot b = n} \varepsilon(a)f(b) = \varepsilon(1)f(n) = f(n).$$

■

**Teorema 1.22 Fórmula de inversión de Möbius** Sean  $f$  y  $g$  son funciones aritméticas cumpliendo que

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Entonces:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d) \quad \text{para todo } n \geq 1, \quad (1.6)$$

dónde  $\mu(n)$  es la función de Möbius.

**Demostración:** Vamos a considerar la convolución de Dirichlet entre  $f$  y  $g$ , dos funciones aritméticas cualesquiera, dada por

$$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Vamos a considerar la función  $I(n) = 1$  para todo  $n$  de tal modo que  $(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d)$ , y veamos que  $(\mu * I)(n) = \varepsilon(n)$ , es decir

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

El caso  $n = 1$  es trivial, si  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$  con  $r \geq 1$ , puesto que  $\mu(n) = 0$  si  $n$  no es libre de cuadrados obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \sum_{k=1}^r \sum_{1 \leq p_{i_1} < \dots < p_{i_k} \leq r} \mu(p_{i_1} \cdots p_{i_k}) \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k = (1 - 1)^r = 0 \end{aligned}$$

Y el resultado se da de las siguientes igualdades

$$\mu * g = \mu * (I * f) = (\mu * I) * f = \varepsilon * f = f$$

■

## 1.4. Teorema del número primo para grafos.

En teoría de números contamos los primos que son menores o iguales a un número dado, en cambio en teoría de grafos lo que vamos a contar son los primos de  $X$  de longitud fija.

**Definición 1.23** La función que cuenta primos en un grafo  $X$  viene dada por

$$\pi(n) = \#\{P \text{ primos en } X \text{ de longitud } n\}.$$

Observemos que contamos la clase de los caminos primos y no los primos.

**Definición 1.24** El máximo común divisor de los caminos primos en  $X$  es

$$\Delta_X = m.c.d.\{\nu(P) \text{ tal que } P \text{ es primo en } X\}$$

**Teorema 1.25 Teorema de Kotani-Sunada.** Sea un grafo  $X$  tal que el máximo grado de los vértices es  $p_{max} + 1$  y el mínimo  $p_{min} + 1$ .

1. Todo polo  $u$  de  $\zeta(u, X)$  satisface que  $R_X \leq |u| \leq 1$ , y además

$$p_{max}^{-1} \leq R_X \leq p_{min}^{-1}.$$

2. Todo polo no real  $u$  de  $\zeta(u, X)$  verifica la desigualdad

$$p_{max}^{-1/2} \leq |u| \leq p_{min}^{-1/2}.$$

3. Los polos de  $\zeta(u, X)$ , tales que  $|u| = R_X$  son de la forma

$$R_X e^{2\pi ia/\Delta_X} \text{ con } a = 1, \dots, \Delta_X.$$

**Demostración:** La demostración usa la fórmula determinantal de Ihara, que para su prueba utiliza las funciones zeta de aristas que se tratan en el próximo capítulo. ■

**Lema 1.26** Dados  $b, n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\sum_{a=1}^b e^{\frac{2\pi i a n}{b}} = \begin{cases} 0, & \text{si } b \nmid n, \\ b, & \text{si } b \mid n. \end{cases}$$

**Demostración:** Si  $b \mid n$ , entonces  $n = kb$  de modo que

$$\sum_{a=1}^b e^{\frac{2\pi i a n}{b}} = \sum_{a=1}^b e^{2\pi i k a} = \sum_{a=1}^b (\cos(2\pi k a) + i \sin(2\pi k a)) = b.$$

Por otro lado, si  $b > 1$  y  $\text{mcd}(b, n) = 1$ ,  $e^{\frac{2\pi i a}{b}}$  recorre las raíces  $b$ -ésimas de la unidad y, por ser  $\text{mcd}(b, n) = 1$ , entonces  $e^{\frac{2\pi i a n}{b}}$  también. Como además  $b > 1$  entonces

$$\sum_{a=1}^b e^{\frac{2\pi i a n}{b}} = 0 \quad \text{si } b > 1, \text{mcd}(b, n) = 1.$$

Si  $b \nmid n$ , sea  $d = \text{mcd}(b, n)$ , de tal forma que  $n = n_0 d$ ,  $b = b_0 d$  con  $b_0 > 1$ , entonces podemos reescribir

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^b e^{\frac{2\pi i a n}{b}} &= \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{a=kb_0+1}^{(k+1)b_0} e^{\frac{2\pi i a n_0}{b_0}} = \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{j=1}^{b_0} e^{\frac{2\pi i j n_0}{b_0}} e^{2\pi i n_0 k} \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{j=1}^{b_0} e^{\frac{2\pi i j n_0}{b_0}} = 0. \end{aligned}$$

■

Para terminar este capítulo concluiremos con el enunciado y prueba del teorema de los números primos para grafos, la demostración esta inspirada en el artículo de Horton y Terras [4].

### **Teorema 1.27 Teorema de los números primos para grafos**

Sea  $X$  un grafo conexo,  $R_X$  el radio de convergencia de su función zeta de Ihara. Entonces:

Si  $\Delta_X = 1$  se tiene que

$$\pi(m) \sim \frac{R_X^{-m}}{m}, \text{ cuando } m \rightarrow \infty.$$

Si  $\Delta_X > 1$ , entonces  $\pi(m) = 0$  si  $\Delta_X$  no divide a  $m$  y si  $\Delta_X$  si lo divide entonces

$$\pi(m) \sim \Delta_X \frac{R_X^{-m}}{m}, \text{ cuando } m \rightarrow \infty.$$

### **Demostración:**

Observemos que podemos reescribir la función zeta de Ihara como

$$\zeta(u, X) = \prod_{n \geq 1} (1 - u^n)^{-\pi(n)},$$

pues hay  $\pi(n)$  primos con  $\nu(P) = n$ .

Entonces, aplicando de nuevo nuestro operador diferencial  $u \frac{d}{du}$  se tiene que

$$\begin{aligned} u \frac{d}{du} \log \zeta(u, X) &= u \frac{d}{du} \log \prod_{n \geq 1} (1 - u^n)^{-\pi(n)} = u \frac{d}{du} \sum_{n \geq 1} -\pi(n) \log(1 - u^n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{n\pi(n)u^n}{1 - u^n} = \sum_{n \geq 1} n\pi(n)u^n \sum_{j \geq 0} u^{nj} = \sum_{n \geq 1} \sum_{j \geq 0} n\pi(n)u^{n(j+1)} \end{aligned}$$

Puesto que  $n(j+1)$  recorre todos los múltiplos naturales de  $n$  podemos reescribir la fórmula anterior de la siguiente manera

$$u \frac{d}{du} \log \zeta(u, X) = \sum_{m \geq 1} \sum_{d|m} d\pi(d)u^m = \sum_{m \geq 1} \left( \sum_{d|m} d\pi(d) \right) u^m$$

Aplicando también el operador diferencial  $u \frac{d}{du}$  a la fórmula obtenida en el lema 1.3, obtenemos que

$$u \frac{d}{du} \log \zeta(u, X) = \sum_{m \geq 1} N_m u^m, \quad (1.7)$$

de donde deducimos que  $N_m = \sum_{d|m} d\pi(d)$ . Por la fórmula de inversión de Möbius (1.6) llegamos a que

$$\pi(m) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) N_d \quad (1.8)$$

Por otro lado sabemos que existe  $B$  matriz invertible con  $BW_1B^{-1} = T$  siendo  $T$  una matriz triangular superior, de modo que

$$\det(I - W_1u) = \det(B(I - W_1u)B^{-1}) = \det(I - Tu) = \prod_{\lambda \in \text{Spec}(W_1)} (1 - \lambda u).$$

Aplicando nuestro operador diferencial a la fórmula (1.5) se tiene que

$$\begin{aligned} u \frac{d}{du} \log \zeta(u, X) &= -u \frac{d}{du} \log \det(I - W_1u) = -u \frac{d}{du} \log \prod_{\lambda \in \text{Spec}(W_1)} (1 - \lambda u) \\ &= -u \frac{d}{du} \sum_{\lambda \in \text{Spec}(W_1)} \log(1 - \lambda u) = u \frac{d}{du} \sum_{\lambda \in \text{Spec}(W_1)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (\lambda u)^n \\ &= \sum_{\lambda \in \text{Spec}(W_1)} \sum_{n \geq 1} (\lambda u)^n \end{aligned}$$

De modo que

$$N_m = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(W_1)} \lambda^m \quad (1.9)$$

Conviene tener en cuenta que cada autovalor aparece tantas veces como sea su multiplicidad. Los términos dominantes en esta suma corresponden a los autovalores de  $W_1$  de máximo valor absoluto, y puesto que

$$\zeta(u, X) = \det(I - W_1 u)^{-1},$$

al ser  $R_X$  el radio de convergencia significa que  $\prod_{\lambda \in \text{Spec}(W_1)} (1 - \lambda u)$  ha de tener un cero para algún  $x$  con  $|x| = R_X$ . De aquí se deduce que los autovalores de mayor valor absoluto de la matriz  $W_1$  son aquellos tal que  $|\lambda| = R_X^{-1}$ , por lo que en (1.9) los términos dominantes de la suma serán aquellos que correspondan a dichos autovalores.

El teorema de Kotani-Sunada (1.25) nos dice que hay un total de  $\Delta_X$  autovalores  $\lambda$  de valor absoluto máximo, de la forma

$$R_x^{-1} \exp\left(\frac{2\pi i a}{\Delta_X}\right) \quad \text{donde } a = 1, \dots, \Delta_X.$$

De modo que por el lema 1.26

$$\sum_{|\lambda| \text{ maximal}} \lambda^n = R_X^{-n} \sum_{a=1}^{\Delta_X} e^{\frac{2\pi i a n}{\Delta_X}} = \begin{cases} 0, & \text{si } \Delta_X \nmid n, \\ R_X^{-n} \Delta_X, & \text{si } \Delta_X \mid n. \end{cases} \quad (1.10)$$

Con esta igualdad, podemos deducir que si  $\Delta_X \mid d$  y  $d \mid m$  entonces

$$\frac{\sum_{|\lambda| \text{ maximal}} \lambda^m}{\sum_{|\lambda| \text{ maximal}} \lambda^d} = R_X^{d-m} \Delta_X$$

Ese cociente tiende a infinito cuando  $m \rightarrow \infty$  pues  $R_X < 1$ . Con esto, y reuniendo la información de (1.8), (1.9) y (1.10), y para valores de  $m$  grandes se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(m) &= \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) N_d = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{\lambda \in \text{Spec} W_1} \lambda^m \\ &\sim \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{|\lambda| \text{ maximal}} \lambda^m \sim \frac{1}{m} \sum_{|\lambda| \text{ maximal}} \lambda^m \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } \Delta_X \nmid m, \\ \frac{R_X^{-m}}{m} \Delta_X, & \text{si } \Delta_X \mid m. \end{cases} \end{aligned}$$

■



# Capítulo 2

## Otras funciones Zeta

En este capítulo presentaremos dos funciones zeta relacionadas con la función zeta de Ihara, estas son la función zeta de aristas, y la de caminos. También veremos la prueba de Bass de la fórmula determinantal de Ihara, teorema 1.12. Esta prueba la ubicamos aquí pues, aunque tiene que ver directamente con el teorema 1.5, esta matriz  $W_1$  está relacionada con la función zeta de aristas.

### 2.1. Funcion zeta de Aristas

En esta sección usaremos el subíndice  $E$ , de *edge*, para resaltar la dependencia de estas funciones de el conjunto de aristas.

**Definición 2.1** Dado un grafo  $X$  se define su **matriz de aristas**  $W$  a la matriz  $2m \times 2m$  siendo  $m = |E|$ , cuya entrada  $a, b$  es una nueva variable  $w_{a,b}$  si el vértice final de  $a$  es el inicial de  $b$  con  $a \neq b^{-1}$  y es 0 en otro caso.

Las variables  $w_{a,b}$ , pueden evaluarse a su vez como números complejos concretos, y en expresiones polinómicas concretas. Observemos que  $W_1$ , definido en 1.13, es la matriz  $W$  dónde todos los números complejos no nulos son iguales a 1.

**Definición 2.2** Dada una clase de equivalencia de caminos cerrados  $C$  de  $X$  escrito como producto de aristas orientadas  $C = a_1 a_2 \cdots a_s$  se define la norma de aristas como

$$N_E(C) = w_{a_1, a_2} w_{a_2, a_3} \cdots w_{a_{s-1}, a_s} w_{a_s, a_1}$$

**Definición 2.3** La función zeta de aristas de un grafo  $X$  es

$$\zeta_E(W, X) = \prod_P (1 - N_E(P))^{-1},$$

donde el producto es sobre las clases de los primos en  $X$ . La función zeta de aristas fue introducida por Hashimoto en 1989.

**Teorema 2.4 Fórmula determinantal de aristas.** Si  $W$  es la matriz de aristas de un grafo  $X$  entonces

$$\zeta_E(W, X) = \det(I - W)^{-1}$$

**Demostración:** Tomando logaritmos en la definición de  $\zeta_E$  se tiene que

$$\begin{aligned} \log \zeta_E(W, X) &= \log \prod_P (1 - N_E(P))^{-1} = - \sum_P \log(1 - N_E(P)) \\ &= \sum_P \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} N_E(P)^j \end{aligned}$$

Puesto que hay  $\nu(P)$  elementos en la clase  $P$  entonces

$$\log \zeta_E(W, X) = \sum_{\substack{j \geq 1 \\ k \geq 1}} \sum_{\nu(P)=k} N_E(P)^j$$

puesto que  $(P^j)$  es un camino sin retrocesos ni colas, cuya longitud es  $j\nu(P)$  la fórmula anterior la podemos reescribir como

$$\log \zeta_E(W, X) = \sum_C \frac{1}{\nu(C)} N_E(C),$$

donde la suma es tomada en todos los caminos sin retrocesos ni colas, sean primos o no.

Por otro lado, debido a que

$$\text{Tr} W^k = \sum_{b_1, \dots, b_k \in E^e} w_{b_1, b_2} w_{b_2, b_3} \cdots w_{b_k, b_1} = \sum_{\nu(C)=k} N_E(C) \quad (2.1)$$

Donde la suma es sobre las  $2m$  aristas orientadas  $E^e$ . Los  $w_{e,f}$  son 0 salvo que  $e$  acabe donde empieza  $f$  sin retrocesos, es decir  $e \neq f^{-1}$ . Entonces  $w_{b_1, b_2} w_{b_2, b_3} \cdots w_{b_k, b_1} \neq 0$  significa que el camino  $C = b_1 b_2 \cdots b_k$  es cerrado, sin retrocesos ni cola, y de longitud  $k$ , de ahí la última igualdad.

De (2.1) se deduce que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \text{Tr} W^k = \sum_{k \geq 1} \sum_{\nu(C)=k} \frac{1}{k} N_E(C) = \sum_C \frac{1}{\nu(C)} N_E(C),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \log \zeta_E(W, X) &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \text{Tr} W^k = \text{Tr} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} W^k \right) \\ &= -\text{Tr} \log(I - W) = \log \det(I - W)^{-1}. \end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia del lema 1.14 aplicado a  $\log(I - W)$ . Finalmente se concluye el teorema tomando exponenciales en

$$\log \zeta_E(W, X) = \log \det(I - W)^{-1}. \quad \blacksquare$$



**Observación 2.5** El teorema de Ihara-Hashimoto, que es el teorema que da la fórmula determinantal 1.5 para la función zeta de Ihara, es una consecuencia del teorema 2.4. En efecto, como ya hemos comentado, la función zeta de Ihara se obtiene a partir de la función zeta de aristas de Hashimoto sustituyendo cada variable  $w_{a,b}$  por la variable  $u$ . Por tanto, la fórmula determinantal 1.5 se obtiene a partir de la fórmula determinantal 2.4 sustituyendo la matriz  $W$  por  $W_1u$ .

## 2.2. Prueba de Bass de la fórmula determinantal de Ihara

Veremos ahora la prueba de la fórmula determinantal de Ihara hecha por Bass, para ello consideraremos  $X$  un grafo,  $n$  su número de vértices y  $m$  el de aristas no orientadas.

**Definición 2.6** En las condiciones descritas anteriormente, se definen las siguientes matrices:

- $J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$

- La matriz  $n \times 2m$  de elementos iniciales  $S$  dada por

$$s_{v,a} = \begin{cases} 1, & \text{si } v \text{ es el vértice inicial de la arista } a, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- La matriz  $n \times 2m$  de elementos finales  $T$  dada por

$$t_{v,a} = \begin{cases} 1, & \text{si } v \text{ es el vértice final de la arista } a, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Proposición 2.7** Consideremos las matrices  $S, T, A, Q, J$ , y  $W_1$  definidas anteriormente, entonces se tienen las siguientes propiedades

1.  $SJ = T, \quad TJ = S.$
2.  $A = S^tT.$
3.  $Q + I_n = S^tS = T^tT.$
4.  $W_1 + J = {}^tTS.$

**Demostración:**

1. Por como hemos llamado a las aristas,  $a_j = a_{j+m}^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, m$  luego, el elemento  $(v, a)$  de  $SJ$  es precisamente el  $(v, a^{-1})$  de  $T$ , pues  $v$  es el vértice inicial de  $a$  si, y sólo si, es el final de  $a^{-1}$ .

2. Basta con considerar el elemento  $(u, v)$  del producto que es

$$({}^tTS)_{u,v} = \sum_{a \in E^e} s_{u,a} t_{v,a}$$

El lado derecho precisamente nos cuenta el número de aristas cuyo vértice inicial es  $u$  y final es  $v$ , que es precisamente lo que hace el elemento  $u, v$  de  $A$ .

3. De forma similar a lo anterior

$$(S {}^tS)_{u,v} = \sum_{a \in E^e} s_{u,a} s_{v,a}$$

Como no puede haber dos vértices iniciales de una misma arista, entonces  $(S {}^tS)_{u,v} = 0$  si  $u \neq v$ , además si  $u = v$  lo que estamos es contando todas las aristas que comienzan en  $v$ , es decir, su grado. Para la matriz  $T$  el razonamiento es exactamente el mismo.

4. Se tiene que

$$({}^tTS)_{a,b} = \sum_{v \in V} t_{v,a} s_{v,b}$$

Y puesto que  $t_{v,a} s_{v,b} \neq 1$  si, y sólo si, el final de  $a$  coincide con el inicio de  $b$ , aunque  $a = b^{-1}$ , lo que se solventa sumando  $J$ . ■

### Teorema 2.8 Prueba de Bass de la fórmula determinantal de Ihara

$$\zeta(u, X)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - Au + Qu^2)$$

**Demostración:** Esta es la demostración del teorema 1.12

Veamos que es cierta la siguiente igualdad de matrices  $(n + 2m) \times (n + 2m)$ .

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ {}^tT & I_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n(1 - u^2) & Su \\ 0 & I_{2m} - W_1u \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} I_n - Au + Qu^2 & Su \\ 0 & I_{2m} + Ju \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ {}^tT - {}^tSu & I_{2m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vayamos por componentes:

$$\begin{aligned} (I_n - Au + Qu^2)I_n + Su({}^tT - {}^tSu) &= I_n - Au + Qu^2 + S {}^tTu - S {}^tSu^2 \\ &= I_n - Au + Qu^2 + Au - (Q + I_n)u^2 \\ &= I_n(1 - u^2) = I_n I_n(1 - u^2). \end{aligned}$$

$$SuI_{2m} = I_n Su.$$

$$\begin{aligned} (I_{2m} + Ju)({}^tT - {}^tSu) &= {}^tT - {}^tSu + J {}^tTu - J {}^tSu^2 \\ &= {}^tT - {}^tSu + {}^tSu - {}^tTu^2 \\ &= {}^tT(1 - u^2) = {}^tT I_n(1 - u^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^tTSu + I_{2m}(I_{2m} - W_1u) &= (W_1 + J)u + I_{2m} - W_1u \\ &= I_{2m} + Ju = (I_{2m} + Ju)I_{2m}. \end{aligned}$$

Luego tomando determinantes obtenemos que

$$(1 - u^2)^n \det(I_{2m} - W_1 u) = \det(I_n - Au + Qu^2) \det(I_{2m} + Ju). \quad (2.2)$$

Como se tiene que

$$I_{2m} + Ju = \begin{pmatrix} I_m & I_m u \\ I_m u & I_m \end{pmatrix}$$

debido a la siguiente igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -Iu & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Iu \\ Iu & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & Iu \\ 0 & I(1 - u^2) \end{pmatrix},$$

se tiene que  $\det(I_{2m} + Ju) = (1 - u^2)^m$ . Por (2.2) y el teorema 1.5 deducimos que

$$\zeta(u, X) = \det(I - W_1 u)^{-1} = (1 - u^2)^{n-m} \det(I - A + Qu^2),$$

y puesto que  $r - 1 = m - n$  por la proposición 1.11,

$$\zeta(u, X) = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - A + Qu^2).$$

■

## 2.3. Función zeta de caminos

En esta sección estudiaremos la función zeta de caminos, la cual se puede usar para calcular la función zeta de aristas con determinantes más pequeños. Para ello debemos recordar el grupo fundamental de un grafo así como su árbol de expansión.

Puesto que podemos identificar  $\Pi_1(X, v)$  con el grupo libre de  $r$  generadores siendo  $r$  el número de aristas fuera del árbol de expansión, llamemos a estas aristas no orientadas  $e_1, \dots, e_r$  con una orientación arbitraria, de modo que las aristas orientadas fuera del árbol de expansión serán:

$$e_1, \dots, e_r, e_1^{-1}, \dots, e_r^{-1}.$$

De igual manera llamaremos a las aristas del árbol de expansión una vez orientadas

$$t_1, \dots, t_u, t_1^{-1}, \dots, t_u^{-1}.$$

**Definición 2.9** La **matriz de caminos** de un grafo  $X$  es la matriz  $2r \times 2r$  cuya entrada  $i, j$  es una variable  $z_{i,j}$  si  $e_i \neq e_j^{-1}$  y es 0 si  $e_i = e_j^{-1}$ . Las variables  $z_{i,j}$  pueden ser evaluadas como números complejos concretos o en expresiones polinómicas concretas.

Observemos que la matriz de caminos  $Z$  tiene tan solo un cero en cada fila, en cambio, la matriz  $W$  de la definición 2.1 que era mas dispersa.

La observación 1.9 y la proposición 1.11 muestran que la clase de homotopía en el grupo fundamental de cualquier clase de equivalencia de caminos cerrados  $C$  esta determinada por las aristas  $e_k$  por las que pasa fuera del árbol de expansión, de este modo podemos escribir  $C = a_1 \cdots a_s$  con  $a_i \in \{e_1^{\pm 1}, \dots, e_r^{\pm 1}\}$ , esta se llamará la forma reducida de  $C$ , y  $C_r$  será la clase de esta representación reducida, es decir

$$C_r = \{a_1 a_2 \cdots a_s, a_2 \cdots a_s a_1, \dots, a_s a_1 \cdots a_{s-1}\}$$

**Definición 2.10** Se define la **norma de caminos** para un camino  $C = a_1 \cdots a_s$ , escrito de tal modo que  $a_i \in \{e_1^{\pm 1}, \dots, e_r^{\pm 1}\}$  como:

$$N_F(C) = z_{a_1 a_2} \cdots z_{a_{s-1} a_s} z_{a_s a_1}.$$

Asimismo se define la **función zeta de caminos** por

$$\zeta_F(Z, X) = \prod_{P_r} (1 - N_F(P_r))^{-1},$$

donde el producto se realiza sobre las clases reducidas de los primos del grafo. La función zeta de caminos se debe a Stark, y fue introducida por Stark y Terras en 1996.

### Teorema 2.11 Fórmula determinantal de caminos

Para todo grafo  $X$  se tiene que

$$\zeta_F(Z, X) = \det(I - Z)^{-1}.$$

**Demostración:** La demostración es igual a la del teorema 2.4, pues es un caso particular de éste. En concreto para grafos de un solo vértice, y  $r$  lazos, pues este es el resultado de contraer el árbol de expansión de un grafo a un punto. ■

**Observación 2.12** Para terminar este capítulo veremos como la función zeta de caminos generaliza la de aristas. Si consideramos un primo  $P$ , primero tomamos para él el camino cerrado en el grupo fundamental (del grafo obtenido al contraer el árbol de expansión) que será una secuencia de aristas orientadas fuera del árbol, es decir una sucesión de  $f_j$ 's donde cada  $f_j$  es  $e_h$  o  $e_h^{-1}$  para algún  $h$ . Ahora, si el extremo final de  $f_i$  coincide con el inicial de  $f_j$  existe un único camino sin retrocesos en el árbol de expansión,  $t_{k_1} \cdots t_{k_s}$ , que conecta el vértice final de  $f_i$  con el inicial de  $f_j$  siendo  $f_i \neq f_j^{-1}$ , para que el camino no tenga cola. Si consideramos la sustitución

$$z_{i,j} = w_{e_i t_{k_1}} w_{t_{k_1} t_{k_2}} \cdots w_{t_{k_{s-1}} t_{k_s}} w_{t_{k_s} e_j},$$

entonces la función zeta de caminos generaliza a la de aristas, ya que para cualquier clase de equivalencia de caminos cerrados  $C$  sin retrocesos ni colas,  $N_F(C) = N_E(C)$ , y en particular esto ocurre para las clases de los primos  $P$ .

En otras palabras, si se considera la sustitución anterior, se tiene una sustitución global de variables  $Z = Z(W)$  y se tiene que

$$\zeta_F(Z(W), X) = \zeta_E(W, X)$$



# Capítulo 3

## Grafos de Ramanujan

Finalizaremos este trabajo describiendo algunos resultados recientes sobre la construcción de grafos de Ramanujan. También mostraremos que los grafos regulares de Ramanujan son precisamente aquellos en los que la función zeta de Ihara satisface la hipótesis de Riemann.

**Definición 3.1** Decimos que un grafo  $X$  es regular o  $d$ -regular, si todos sus vértices tienen el mismo grado igual a  $d$ .

**Proposición 3.2** Sea  $X$  un grafo  $d$ -regular y  $A$  su matriz de adyacencia. Entonces:

1. Todo  $\lambda \in \text{Spec}(A)$  cumple que  $|\lambda| \leq d$ .
2.  $d \in \text{Spec}(A)$  con multiplicidad 1.
3.  $-d \in \text{Spec}(A)$  si, y sólo si,  $X$  es bipartito.

**Demostración:**

1. Observemos que  $d$  es autovalor correspondiente al vector de todo unos. Si  $Av = v$ , con  $v = {}^t(v_1, \dots, v_n)$ , sea  $a$  el vértice donde  $|v_i|$  toma su valor máximo. Utilizando la notación  $a \sim b$  para denotar que los vértices  $a$  y  $b$  son adyacentes, entonces

$$|\lambda||v_a| = |(Av)_a| = \left| \sum_{b \sim a} v_b \right| \leq d|v_a|.$$

2. Ya hemos visto que  $d \in \text{Spec}(A)$ , veamos que su multiplicidad es 1, de un modo similar al anterior suponiendo que  $v_a > 0$ , pues sino podemos multiplicar a  $v$  por  $-1$ . Entonces

$$dv_a = (Av)_a = \sum_{b \sim a} v_b \leq dv_a.$$

Para que se de la igualdad no se debe haber ninguna cancelación, luego  $v_b = v_a$  para cada vértice  $b$  adyacente al  $a$ , puesto que el grafo es conexo se sigue el resultado.

3. Si el grafo es bipartito y ordenamos los vértices de tal modo que los  $l$  primeros estén en el mismo lado de la partición y los  $n - l$  últimos en el otro lado, entonces el vector cuyas  $l$  primeras componentes son 1 y el resto -1 es un autovector asociado al autovalor  $-d$ .

Recíprocamente si  $-d$  es un autovalor asociado al autovector  $v$  entonces fijado  $a$  tal que  $|v_i|$  toma su valor máximo en  $i = a$

$$dv_a = (Av)_a = \sum_{b \sim a} v_b = -dv_a.$$

Por lo que necesariamente  $v_b = -v_a$  si  $b \sim a$ , como el grafo es conexo podemos calcular cual sería  $v_b$  para todo  $b \in V$ . Si llegásemos a que  $v_a = -v_a$  sería una contradicción pues  $v_a$  no puede ser 0. Por lo tanto podemos distinguir el conjunto de vértices en dos subconjuntos:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{b \in V : v_b = v_a\} \text{ y} \\ V_2 &= \{b \in V : v_b = -v_a\}. \end{aligned}$$

Puesto que no hay vértices de un mismo  $V_i$  adyacentes entre si, el grafo es bipartito. ■

Como la matriz de adyacencia de los grafos no orientados es simétrica, todos los autovalores son reales, y por tanto podemos ordenarlos. Los denotaremos por

$$\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X) \geq \dots \geq \lambda_n(X).$$

En el caso de que el grafo sera  $d$ -regular se tendrá que  $\lambda_1 = d$ , y si además es bipartito  $\lambda_n = -d$ .

**Definición 3.3** Para un grafo  $d$ -regular  $X$  con matriz de adyacencia  $A$  se define  $\lambda(X)$  como el mayor de los valores absolutos de los autovalores no triviales.

Acorde a la definición, también se tiene que

$$\lambda(X) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(A), |\lambda| \neq d\}$$

**Definición 3.4** Un grafo  $X$  es Ramanujan si, y solo si, es  $d$ -regular y

$$\lambda(X) \leq 2\sqrt{d-1}.$$

Del mismo modo que en la teoría de número que para la función zeta de Riemann, está la hipótesis de Riemann la cual conjetura donde están los ceros de la función zeta de Riemann, en teoría de grafos tenemos su análogo, pero en este caso nos preguntamos donde están los polos de la función zeta de Ihara.



**Definición 3.5** Sea  $X$  un grafo  $d$ -regular. Se dice que la función zeta de Ihara  $\zeta((d-1)^{-s}, X)$  satisface la hipótesis de Riemann si, y sólo si, para  $0 < \text{Re}(s) < 1$ ,

$$\zeta((d-1)^{-s}, X)^{-1} = 0 \implies \text{Re}(s) = \frac{1}{2}.$$

Si  $u = (d-1)^{-s}$ , el hecho de que  $\text{Re}(s) = 1/2$  implica que  $|u| = 1/\sqrt{d-1}$ .

**Teorema 3.6** Sea  $X$  un grafo  $d$ -regular. La función zeta  $\zeta(u, X)$  satisface la hipótesis de Riemann si, y sólo si,  $X$  es Ramanujan.

**Demostración:** Utilizando la fórmula determinantal de Ihara del teorema 1.12, se tiene que

$$\zeta((d-1)^{-s}, X)^{-1} = (1-u^2)^{r-1} \prod_{\lambda \in \text{Spec} A} (1 - \lambda u + (d-1)u^2)$$

Si escribimos  $(1 - \lambda u + (d-1)u^2) = (1 - \alpha u)(1 - \beta u)$ , donde  $\alpha\beta = d-1$  y  $\alpha + \beta = \lambda$ , si tratamos de despejar en este sistema, puesto que al ser  $d \geq 3$  entonces  $\beta \neq 0$  de modo que

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d-1}{\beta} \\ \beta &= \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4(d-1)}}{2} \end{aligned}$$

En virtud de la proposición 3.2 distinguimos 3 casos

1.  $\lambda = \pm d$ , lo que implica que  $\alpha = \pm(d-1)$  y  $\beta = \pm 1$ .
2.  $|\lambda| \leq 2\sqrt{d-1}$ , por lo que  $\beta$  y  $\alpha$  serán complejos conjugados de modo que  $|d-1| = |\alpha||\beta|$  por lo tanto  $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{d-1}$ .
3.  $2\sqrt{d-1} < |\lambda| < d$ , de modo que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son reales y

$$1 < |\alpha|, |\beta| < d-1,$$

con  $|\alpha|, |\beta| \neq \sqrt{d-1}$ . ■

Es fácil construir grafos de Ramanujan con un número pequeño de vértices, de hecho los grafos completos y los bipartitos completos son Ramanujan.

**Ejemplo 3.7** La matriz de Adyacencia de  $K_5$ , el grafo completo de 5 vértices es

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y  $\det(A_5 - \lambda I) = (\lambda - 4)(\lambda + 1)^4$ , como  $1 \leq 2\sqrt{3}$  entonces , efectivamente,  $K_5$  es Ramanujan.

La matriz de adyacencia de  $K_{3,3}$ , el grafo bipartito completo de 6 vértices es:

$$A_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que  $\det(A_{3,3} - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda + 3)\lambda^4$ , entonces al ser  $0 \leq 2\sqrt{2}$  es un grafo Ramanujan.

Generalizando, cualquier grafo completo a a ser Ramanujan, consideremos el grafo completo  $K_n$ , entonces su matriz de adyacencia es la matriz  $n \times n$  cuyos elementos diagonales son 0 y el resto 1, es decir

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto simplemente se puede ver que

1. La matriz de adyacencia tiene como autovalor a  $n$  de multiplicidad 1, y su autovector asociado es  $(1, 1, \dots, 1)$ .
2. La matriz también tiene como autovalor el  $-1$  de multiplicidad  $n - 1$  y una base de autovectores puede ser  $e_1 - e_i$  con  $i = 2, \dots, n$ .

**Definición 3.8** También diremos que un grafo bipartito es **(c,d)-birregular** si todos los vértices de un lado de la partición tienen grado  $c$  y los del otro lado, grado  $d$ . La matriz de adyacencia de un grafo  $(c, d)$ -birregular siempre tiene como autovectores  $\pm\sqrt{cd}$ , veámoslo.

Si hay  $r$  vértices de grado  $c$  y  $s$  de grado  $d$ , entonces  $rc = sd = n$  el numero de aristas. Si ordenamos la matriz de tal forma que los  $r$  primeros elementos sean los correspondientes a los vértices de grado  $c$  y los  $s$  últimos a la de  $d$ , es sencillo comprobar que el vector  $v = (v_1, \dots, v_n)$  con  $v_1 = \dots = v_r = \sqrt{d}$  y las  $v_{r+1} = \dots = v_n = \sqrt{c}$  entonces

$$\begin{aligned} (Av)_i &= c\sqrt{d} = \sqrt{cd}\sqrt{c} = \sqrt{cd}v_i & \text{para } i = 1, \dots, r, \\ (Av)_i &= d\sqrt{c} = \sqrt{cd}\sqrt{d} = \sqrt{cd}v_i & \text{para } i = r + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

luego efectivamente  $\sqrt{cd}$  es autovalor. Para el caso negativo se obtiene el resultado cambiando de signo a las  $r$  primeras coordenadas y siguiendo el mismo razonamiento. Estos dos son los que llamaremos autovalores triviales.

Con esta definición, también diremos que un grafo  $X$   $(c, d)$ -birregular es Ramanujan si todos sus autovalores no triviales de su matriz de adyacencia, podemos denotarlo nuevamente por  $\lambda(X)$ .

También tendremos una noción de grafo de Ramanujan  $(c, d)$ -birregular, que son aquellos tales que  $\lambda(X) \leq \sqrt{c-1} + \sqrt{d-1}$ .

### 3.1. Algunas desigualdades

En esta sección daremos algunas de las desigualdades más notorias en los grafos que tienen que ver con los grafos de Ramanujan. Estos resultados se pueden consultar en [9].

**Definición 3.9** La distancia de dos vértices  $u$  y  $v$  de un grafo es el mínimo número de aristas que hay que atravesar para llegar de uno a otro. Del mismo modo se define el diámetro  $D$  de un grafo como el máximo de las distancias entre sus vértices, siendo esta distancia la menor longitud de los caminos que conectan los vértices.

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \text{mín}\{\nu(c) : c \text{ conecta los vértices } u \text{ y } v\}. \\ D &= \text{máx}\{d(u, v) : u, v \text{ vértices de } X\}. \end{aligned}$$

El diámetro de un grafo completo se puede acotar por la siguiente expresión, dada por Chung en 1989.

**Teorema 3.10 Chung.**[9] Si  $X$  es un grafo  $d$ -regular con  $n$  vértices y diámetro  $D$ . Si  $X$  no es bipartito entonces

$$D \leq \frac{\log(n-1)}{\log(d/\lambda(X))} + 1.$$

Asimismo si  $X$  es bipartito podemos encontrar la siguiente cota

$$D \leq \frac{\log((n-2)/2)}{\log(d/\lambda(X))} + 2.$$

A fin de cuentas el teorema anterior nos dice que minimizando  $\lambda(X)$ , minimizaremos el diámetro. Entonces nos debemos preguntar, ¿Cómo de pequeño puede ser  $\mu(C)$ ? La respuesta a esta pregunta la podríamos dar en estos dos resultados, siendo el segundo más reciente.

**Teorema 3.11** Para un grafo  $d$ -regular  $X$ , se tiene que

$$\liminf \lambda(X) \geq 2\sqrt{d-1}$$

cuando el número de vértices de  $X$  tiende a infinito.

**Teorema 3.12** Nilli.[9] Sea  $X$  un grado  $d$ -regular. Si el diámetro de  $X$  es  $D$ , siendo  $D \geq 2l + 2 \geq 4$ , entonces

$$\lambda(X) \geq 2\sqrt{d-1} - \frac{2\sqrt{d-1} - 1}{l}.$$

La cota obtenida es similar a la de los grafos de Ramanujan lo que nos hace pensar que estos serán en general los que menor  $\lambda(X)$  tengan. Lo siguiente a tratar es la construcción de una familia de grafos de Ramanujan, todos ellos  $d$ -regulares, en la que vaya creciendo el número de vértices.

## 3.2. Recubrimientos de grafos

En esta sección vamos a ver la construcción dada por Marcus Spielman y Srivastava en [6], para construir grafos bipartitos  $d$ -regulares de Ramanujan por un proceso de recubrimiento, en concreto de 2-recubrimientos.

**Definición 3.13** Dado un grafo  $X$ , siendo  $V$  su conjunto de vértices y  $E$  el de aristas, un **2-recubrimiento** de  $X$  es un grafos con dos vértices por cada vértice en  $V$ . Este par de vértices son llamados **fibra** del vértice original. Toda arista de  $E$  corresponde a dos aristas en el 2-recubrimiento, es decir, si tenemos una arista  $(u, v)$  en  $X$ ,  $\{u_1, u_2\}$  es la fibra de  $u$  y  $\{v_1, v_2\}$  es la fibra de  $v$ , entonces el 2-recubrimiento contendrá el par de aristas

- (1)  $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$  o
- (2)  $\{(u_1, v_2), (u_2, v_1)\}$ .

Si el 2-recubrimiento solo contiene pares de aristas del primer tipo, entonces serán dos copias disjuntas del grafo original. Si en cambio solo contiene pares del segundo tipo entonces se tendrá el **doble recubrimiento** de  $X$ .

Para analizar los autovalores de un 2-recubrimiento, Bilu y Linial estudiaron las signaciones que son aplicaciones  $s : E \rightarrow \{\pm 1\}$  en el conjunto de aristas de  $X$ . Las signaciones están en correspondencia biunívoca con los 2-recubrimientos haciendo  $s(u, v) = 1$  si en el 2-recubrimiento hay una arista del tipo (1) asociada a esta, y  $s(u, v) = -1$  en caso de que fuera del tipo (2). También definieron la matriz signada de adyacencia  $A_s$ , que es la matriz de adyacencia de  $X$  salvo que la entrada correspondiente al eje  $(u, v)$  se sustituye por  $s(u, v)$ . Ellos prueban el siguiente resultado.

**Lema 3.14** Sea  $A$  la matriz de adyacencia asociada a un grafo  $X$  y  $A_s$  la matriz asociada a su 2-recubrimiento. Entonces la unión con multiplicidad de los autovalores de  $A$  y  $A_s$  son los autovalores de la matriz de adyacencia asociada al 2-recubrimiento.

De este modo lo que debemos hacer es preocuparnos de que los autovalores de  $A_s$  estén acotado en valor absoluto por  $2\sqrt{d-1}$ , para que sigan siendo de Ramanujan. Nosotros haremos un estudio de el caso bipartito como se hace en [6], pues en estos grafos los autovalores de la matriz de adyacencia son simétricos con respecto al 0, y por tanto vale con acotarlos superiormente por  $2\sqrt{d-1}$  para que sean Ramanujan. Además un 2-recubrimiento de un grafo bipartito sigue siendo bipartito.

**Proposición 3.15** Si  $X$  es un grafo bipartito entonces los autovalores de su matriz de adyacencia son simétricos respecto del 0.

**Demostración:** Veamos que si  $\lambda$  es autovalor, necesariamente  $-\lambda$  también lo es. Para ello supongamos que ordenamos los vértices de tal forma que los  $l$  primeros sean los de un lado y los  $n-l$  últimos del otro. Si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  asociado al autovector  $v = {}^t(v_1, \dots, v_n)$ , entonces  $(Av)_i = \lambda v_i$ . Consideremos entonces el vector  $\tilde{v} = {}^t(-v_1, \dots, -v_l, v_{l+1}, \dots, v_n)$ , entonces puesto que las  $l$  primeras coordenadas no interfieren las mismas asociadas al producto, para  $i = 1, \dots, l$  se tiene que

$$(A\tilde{v})_i = Av_i = \lambda v_i = -\lambda \tilde{v}_i,$$

mientras que para  $i = l+1, \dots, n$ , al interferir solo las  $l$  primeras coordenadas del vector obtenemos

$$(A\tilde{v})_i = -(Av)_i = -\lambda v_i = -\lambda \tilde{v}_i.$$

■

### 3.3. 2-recubrimientos y el polinomio indicador de emparejamientos

**Definición 3.16** Sea  $X$  un grafo con  $n$  vértices y sea  $m_i$  es el número de conjuntos de  $i$  aristas de  $X$  sin vértices en común, siendo  $m_0 = 1$ . Se define el polinomio indicador de emparejamientos como

$$\mu_X(x) = \sum_{i \geq 0} x^{n-2i} (-1)^i m_i. \tag{3.1}$$

**Ejemplo 3.17** Calculemos cuál sería el polinomio asociado a el grafo bipartito completo  $K_{3,3}$ . Obviamente  $m_1 = 9$  que es el número total de aristas del grafo. Fijada una arista de las restantes hay 4 que no comparten ningún vértice en común con ella,  $m_2 = 9 \cdot 4/2 = 18$ . Para calcular  $m_3$  fijémonos que 3 aristas sin vértices en común los tocarían a todos, por lo que fijada la arista que va a dar al vértice  $v_1$ , es sencillo ver que hay dos posibilidades sólo de coger las otras dos aristas, como  $v_1$  es de grado 3 entonces  $m_3 = 3 \cdot 2 = 6$ . Por tanto tendríamos que

$$\mu_{K_{3,3}}(x) = x^6 - 9x^4 + 18x^2 - 6.$$

Los dos resultados principales en relación al polinomio indicador de emparejamientos son los siguientes.

**Proposición 3.18** (teorema 3.1 de [6]) Para cualquier grafo  $X$ ,  $\mu_X(x)$  tiene solo raíces reales.

**Proposición 3.19** (teorema 3.2 de [6]) Para cualquier grafo  $X$  cuyos vértices tienen grado a lo sumo  $d$  se tiene que todas las raíces de  $\mu_X(x)$  acotadas en valor absoluto por  $2\sqrt{d-1}$ .

**Definición 3.20** Dado  $X$  con aristas  $e_1, \dots, e_m$  podemos denotar cada signación de  $X$  por  $s \in \{\pm 1\}^m$ . Si  $a_s$  es la matriz de adyacencia asociada a la signación, se denota al polinomio característico de  $A_s$  por

$$f_s(x) = \det(xI - A_s).$$

**Proposición 3.21** (teorema 3.6 de [6]) El polinomio característico esperado de la matriz de adyacencia asociada a una signación arbitraria de un grafo  $X$  es su polinomio indicador de emparejamientos, es decir

$$\frac{1}{2^m} \sum_{s \in \{\pm 1\}^m} f_s(x) = \mu_X(x).$$

Por lo que para probar que existe un recubrimiento de un grafo Ramanujan por el cual obtenemos otro, basta con ver, por los teoremas anteriores que existe una signación  $s$  tal que la mayor raíz de  $f_s(x)$  es a lo sumo la mayor raíz de  $\frac{1}{2^m} \sum_{s \in \{\pm 1\}^m} f_s(x)$ . Para ello veremos que  $\{f_s(x)\}_{s \in \{\pm 1\}^m}$  es una familia entrelazada, las cuales definiremos y daremos sus propiedades a continuación.

### 3.4. Familias entrelazadas

**Definición 3.22** Decimos que un polinomio  $g(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{n-1})$  entrelaza al polinomio  $f(x) = (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n)$  si

$$\beta_1 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} \leq \beta_n.$$

También diremos que  $f_1, \dots, f_k$  tienen un entrelazado común si existe un polinomio  $g(x)$  que entrelaza a  $f_i$   $i = 1, \dots, k$ .

Si  $\beta_{i,j}$  denota la raíz  $j$ -ésima de  $f_i$ , entonces los polinomios  $f_1, \dots, f_k$  tendrán un entrelazado común si, y sólo si, existen  $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$  tal que  $\beta_{i,j} \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$  para todo  $i, j$ , siendo  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{n-1}$  las raíces de  $g$ .

**Lema 3.23** Sean  $f_1, \dots, f_k$  polinomios del mismo grafo con coeficiente dominante positivo y con todas sus raíces reales. Definimos

$$f_\emptyset = \sum_{i=1}^k f_i.$$

Si  $f_1, \dots, f_k$  tienen un entrelazado común entonces existe un  $i$  tal que la mayor raíz de  $f_i$  es a lo sumo la mayor raíz de  $f_\emptyset$ .

**Demostración:** Puesto que todos los polinomios tienen coeficiente dominante positivo, deberán ser positivos para un  $x_0$  suficientemente grande. Además todos ellos tienen una única raíz mayor que  $\alpha_{n-1}$ , de modo que  $f_i(\alpha_{n-1}) \leq 0$  para todo  $i$ , de modo que  $f_\emptyset(\alpha_{n-1}) \leq 0$ , y al ser tener también coeficiente dominante positivo,  $f_\emptyset$  tiene una raíz  $\beta \geq \alpha_{n-1}$ , por lo tanto su mayor raíz  $\beta_n \geq \alpha_{n-1}$ .

Por ser  $f_\emptyset$  la suma de todas las  $f_j$ , debe existir algún  $i$  tal que  $f_i(\beta_n) \geq 0$ . Puesto que  $f_i(\alpha_{n-1}) \leq 0$  y solo tiene una raíz mayor o igual que  $\alpha_{n-1}$ , entonces la mayor raíz de  $f_i$  está en el intervalo  $[\alpha_{n-1}, \beta_n]$ , siendo este posiblemente un solo punto. ■

**Definición 3.24** Sean  $S_1, \dots, S_m$  conjuntos finitos y para cada  $s_1, \dots, s_m \in S_1 \times \dots \times S_m$ , sea  $f_{s_1, \dots, s_m}(x)$  un polinomio con raíces reales y coeficiente dominante positivo. Para  $s_1, \dots, s_k \in S_1 \times \dots \times S_k$  con  $k < m$  se define

$$f_{s_1, \dots, s_k} = \sum_{s_{k+1} \in S_{k+1}, \dots, s_m \in S_m} f_{s_1, \dots, s_m},$$

así como también

$$f_\emptyset = \sum_{s_1 \in S_1, \dots, s_m \in S_m} f_{s_1, \dots, s_m}.$$

Además diremos que los polinomios  $\{f_{s_1, \dots, s_m}\}_{s_1, \dots, s_m}$  son una familia entrelazada si para todo  $k = 0, \dots, m-1$  y todo  $s_1, \dots, s_k \in S_1 \times \dots \times S_k$ , los polinomios

$$\{f_{s_1, \dots, s_k, t}\}_{t \in S_{k+1}}$$

tienen un entrelazado común.

**Proposición 3.25** Sean  $S_1, \dots, S_m$  conjuntos finitos y sean  $f_{s_1, \dots, s_m}$  una familia entrelazada de polinomios. Entonces existe algún  $s_1, \dots, s_m \in S_1 \times \dots \times S_m$  tal que la mayor raíz de  $f_{s_1, \dots, s_m}$  es menor que la mayor raíz de  $f_\emptyset$ .

**Demostración:** De la definición de familia entrelazada sabemos que los polinomios  $\{f_t\}_{t \in S_1}$  tienen un entrelazado común y su suma es  $f_\emptyset$ . En virtud del lema 3.23, la mayor raíz de uno de ellos, llamémoslo  $f_{s_1}$ , es menor que la mayor raíz de  $f_\emptyset$ . Ahora recurrimos a una inducción, para cualquier  $s_1, \dots, s_k$ , sabemos que  $\{f_{s_1, \dots, s_k, t}\}_{t \in S_{k+1}}$  tienen un entrelazado común, luego existe  $t = s_{k+1}$  tal que la mayor raíz de  $f_{s_1, \dots, s_{k+1}}$  es menor que la mayor de  $f_{s_1, \dots, s_k}$ , con lo que se concluye el resultado. ■

Lo que veremos nosotros es que nuestra familia  $\{f_s\}_{s \in \{\pm 1\}^m}$  definida en 3.20 son una familia entrelazada. Los dos siguientes resultados, que exponemos sin probar son las piezas clave para ver que son una familia entrelazada.

**Lema 3.26** Sean  $f_1, \dots, f_s$  polinomios del mismo grado y con coeficiente principal positivo. Entonces  $f_1, \dots, f_s$  tienen un entrelazado común si, y sólo si,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$  tiene todas sus raíces reales para todas las combinaciones lineales convexas  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .

**Proposición 3.27** Sean  $p_1, \dots, p_m \in [0, 1]$ . Entonces el siguiente polinomio tiene raíces reales

$$\sum_{s \in \{\pm 1\}^m} \left( \prod_{i: s_i=1} p_i \right) \left( \prod_{i: s_i=-1} (1-p_i) \right) f_s(x).$$

**Teorema 3.28** La familia  $\{f_s\}_{s \in \{\pm 1\}^m}$  es una familia entrelazada.

**Demostración:** Primero veamos que para todo  $0 \leq k \leq m-1$ , cualquier  $s_1, \dots, s_k \in \{\pm 1\}^k$ , y cualquier  $\lambda \in [0, 1]$  se tiene que

$$\lambda f_{s_1, \dots, s_k, 1}(x) + (1-\lambda) f_{s_1, \dots, s_k, -1}(x)$$

es un polinomio con solo raíces reales. Para ello apliquemos el teorema anterior con  $p_{k+1} = \lambda, p_{k+2} = \dots = p_m = 1/2$  y  $p_i = (1+s_i)/2$  con  $i = 1, \dots, k$ . Si las primeras componentes de  $s \in \{\pm 1\}^m$  no son  $s_1, \dots, s_k$  por la elección del  $p_i$  dicho sumando será cero por lo que podríamos expresar el polinomio de la siguiente forma

$$\sum_{\substack{s_j = \pm 1 \\ j=k+2, \dots, n}} \frac{1}{2^{n-k-1}} \left( \lambda f_{s_1, \dots, s_k, 1, s_{k+2}, \dots, s_n}(x) + (1-\lambda) f_{s_1, \dots, s_k, -1, s_{k+2}, \dots, s_n}(x) \right).$$

Este polinomio, en virtud de la definición 3.24 es precisamente

$$\frac{1}{2^{n-k-1}} \left( \lambda f_{s_1, \dots, s_k, 1}(x) + (1-\lambda) f_{s_1, \dots, s_k, -1}(x) \right),$$

que entonces tiene raíces reales. Por el lema 3.26 se da el resultado. ■

**Teorema 3.29** Sea  $X$  un grafo con matriz de adyacencia  $A$  y recubrimiento universal  $T$ . Entonces existe una signación  $s$  de  $A$  tal que todos los autovalores de  $A_s$  son menores que  $\rho(T)$ . En particular si  $X$  es  $(q+1)$ -regular, existe una signación  $s$  tal que los autovalores de  $A_s$  son menores que  $\sqrt{q}$

**Lema 3.30** Todo autovalor no trivial de un grafo  $(c, d)$ -birregular completo es cero.

**Demostración:** Inmediato del hecho de que la matriz de adyacencia tiene rango 2 y son dos los autovalores triviales,  $\pm\sqrt{cd}$ . ■

**Teorema 3.31** (teorema 5.5 de [6]) Para cualquier  $q \geq 2$ , existe una sucesión de grafos de Ramanujan  $(q+1)$ -birregulares y bipartitos.



**Teorema 3.32** (teorema 5.6 de [6]) Para cualquier  $c, d \geq 3$ , existe una sucesión de grafos de Ramanujan  $(c, d)$ -birregulares y bipartitos.

Con estos resultados hemos encontrado una sucesión de grafos de Ramanujan todos ellos  $d$ -regulares con el número de vértices cada vez mayor, en concreto el número de vértices se va duplicando cada vez. ¿Existen grafos de Ramanujan de cualquier grado y número de vértices? La respuesta es afirmativa para el caso de  $n$  par como veremos en la siguiente sección a modo de resumen.

### 3.5. Grafos de Ramanujan de orden par

Concluiremos el trabajo con una revisión de los resultados principales del artículo de Marcus, Spielamn y Srivastava [7]. En el consideran matrices de permutación aleatorias, matrices con un solo cero en cada fila y cada columna, y esto para emparejar uno a uno los vértices de un grafo biparto.

**Teorema 3.33** Sean  $P_1, \dots, P_d$  matrices  $n \times n$  de permutación independientes con  $d \geq 3$ . Entonces con probabilidad no nula los autovalores no triviales de

$$A = \sum_{i=1}^d \begin{pmatrix} 0 & P_i \\ {}^t P_i & 0 \end{pmatrix}$$

son todos menores que  $2\sqrt{d-1}$  en valor absoluto.

Observemos que los grafos no tiene porque ser simples, pues puede que para mas de un  $i$  haya dos vértices con los mismos extremos. También destaquemos que estamos ante un resultado de existencia, pues la probabilidad es mayor estrictamente que cero, pero no nos da ninguna pista de como hallar estos grafos.

Existe una versión del teorema para grafos no bipartitos, pero con número de vértices  $n$  par. Pero para ello deberemos partir de grafo con un emparejamiento perfecto de los vértices, es decir que existan  $n/2$  aristas tales que la unión de todos sus extremos son el conjunto de vértices, luego no ha de repetirse ningún extremo.

**Teorema 3.34** Sean  $P_1, \dots, P_d$  matrices  $n \times n$  de permutación independientes con  $d \geq 3$  y  $n$  par. Sea  $A$  la matriz de adyacencia de un grafo  $X$  con  $n$  vértices y emparejamiento perfecto de éstos. Entonces con probabilidad no nula

$$\lambda_2 \left( \sum_{i=1}^d P_i M {}^t P_i \right) < 2\sqrt{d-1}.$$

Con el último resultado obtenemos una cota del segundo autovalor, en realidad esto no nos produciría grafos de Ramanujan, pues no tenemos ningún control sobre los autovalores negativos, y especialmente sobre  $\lambda_n(X)$  que es el menor de ellos.



# Bibliografía

- [1] N. Alon “Eigenvalues and expanders”, *Combinatorica* 6(32), 83-96, 1986.
- [2] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade, “The Alexander polynomial of a plane curve singularity via the ring of functions on it” *Duke Math. J.* 117(1), 115-156, 2003.
- [3] H. Bass “The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice” *International J. Math.* 3(6), 717-797, (1992).
- [4] M.D. Horton, H.M. Stark, and A.A. Terras, “What are zeta functions of graphs and what are they good for?”, *Contemporary Mathematics*, Vol 415, p 173-190.
- [5] A. Lubotzky, P. Phillips, P. Sarnak, “Ramanujan Graphs”, *Combinatorica*, 8(3), 261-277, 1988.
- [6] A. W. Marcus, D. A. Spielman, N. Srivastava, “Interlacing Families I: Bipartite Ramanujan Graphs of All Degrees”, arXiv:1304.4132v2 [math.CO], 3 de Marzo 2014.
- [7] A. W. Marcus, D. A. Spielman, N. Srivastava, “Interlacing Families IV: Bipartite Ramanujan Graphs of All Sizes”, arXiv:1505.08010v1 [math.CO], 29 de Mayo 2015.
- [8] G. A. Margulis, “Explicit group theoretical constructions of combinatorial schemes and their application to design of expanders and concentrators”, *Problems on Information and Transmissions*, 24(1), 39-46, 1988.
- [9] M. R. Murty “Ramanujan Graphs” . *Ramanujan Math. Soc.* 18(1), 33-52, 2003.
- [10] C. K. Storm “Some properties of graphs determined by edge zeta functions”.
- [11] A. A. Terras, “Zeta Functions on Graphs. A Stroll through the Garden”, *Cambridge*, 2010.