Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES, SOCIALES Y DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL:

ANÁLISIS DE LOS CUADERNOS DE MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS DE BACHILLERATO: PERCEPCIONES, PERFILES DE ELABORACIÓN Y UTILIZACIÓN Y RENDIMIENTO ACADÉMICO

Presentada por D. Matías Arce Sánchez para optar al grado de Doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:
Dr. D. Tomás Ortega del Rincón

-AÑO 2016-

Agradecimientos

Un trabajo de investigación como el que representa una tesis doctoral nunca puede ser considerado como un trabajo fruto del pensamiento de una única persona. En el largo camino que supone la realización de una investigación doctoral, el doctorando se nutre de los intercambios de ideas, de experiencias, de pensamientos y de conocimientos con otras muchas personas, que hacen avanzar y ampliar los pensamientos, intenciones y perspectivas iniciales. Como dice el refrán, “Es de bien nacidos ser agradecidos”, por lo que valgan estos agradecimientos para reflejar las aportaciones personales y profesionales que han permitido un mayor desarrollo del doctorando y de esta investigación que aquí se presenta.

Al Dr. Tomás Ortega, tutor y director de esta investigación. Para él debe ser el primer y principal agradecimiento. Tomás, muchas gracias por darme a conocer esta disciplina de conocimiento que es la Didáctica de la Matemática, que aúna dos de mis principales pasiones: las matemáticas y la educación. Tú eres el principal “responsable” de introducirme en este mundo de la Educación Matemática y de ofrecerme las primeras oportunidades profesionales dentro de él. Muchas gracias también por haber sido un excelente guía en este camino de investigación que hemos recorrido, por tu visión experimentada, tu sapiencia, tu apoyo, tu consejo y tu confianza durante el desarrollo de este trabajo, así como por tu bonhomía y por tu buen humor.

A todos aquellos docentes e investigadores que, en congresos, en seminarios o en conversaciones informales, han mostrado interés por este trabajo de investigación y han aportado ideas y sugerencias para su desarrollo. Me gustaría destacar y agradecer especialmente dos aportaciones:

- Al profesor Luis Rico, con el que tuve la suerte de realizar una breve estancia bajo su supervisión en la Universidad de Granada. Cada conversación con Luis fue un tesoro y una fuente de conocimiento para mí, lo que supuso un importante desarrollo de las ideas teóricas de referencia que sustentan este trabajo de investigación.

- A los profesores John Mason y Viviane Durand-Guerrier, por sus importantes aportes en aspectos metodológicos durante la presentación de mi trabajo en la escuela de verano YESS-7, en Kässel (Alemania).

A todos los compañeros de Departamento y de “pasillo”, por su apoyo constante y por sus palabras de aliento en el transcurso de la realización de esta tesis doctoral.

A mi familia, por haber estado siempre a mi lado en este largo proceso, por vuestro apoyo y por el interés hacia este trabajo y hacia mi situación profesional. En especial, a mi madre por su abnegada dedicación, nunca suficientemente recompensada ni explícitamente valorada.

A mis amigos, por ser el contrapunto necesario para poder desconectar, recuperar fuerzas y espíritu, especialmente en los momentos más duros o con mayor incertidumbre, y también por sus ánimos y por tantos buenos momentos.

A los tres docentes, Marcelino, Merche y José Félix, y a todos los alumnos que, de forma completamente desinteresada, han posibilitado el desarrollo de esta investigación. Gracias por abrirme las puertas de vuestras clases, y por permitirme la observación, la recogida de datos y la realización de entrevistas.

Por último, es necesario indicar que este trabajo de investigación se ha desarrollado bajo el amparo y el apoyo económico de una beca predoctoral FPU (Referencia FPU12/02241), concedida a este doctorando por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. La estancia de investigación en la Universidad de Granada también fue financiada por este organismo. Gracias también a la Universidad de Valladolid, al Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática y al GIR “Educación Matemática” por el apoyo económico puntual para poder asistir y participar en congresos y seminarios.

"Por la ignorancia se desciende a la servidumbre, por la educación se asciende a la libertad"

(Diego Luis Córdoba, 1907-1964)

RESUMEN

Esta investigación está centrada en un instrumento utilizado comúnmente por los alumnos en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: el cuaderno de la asignatura, entendido aquí como el “Instrumento o medio en el cual el alumno recoge y elabora sus anotaciones de las clases, realiza y corrige actividades, y recopila su trabajo matemático, con el fin de servirle en su estudio y aprendizaje de las matemáticas”. El foco se pone en sus funcionalidades y no en sus posibles formatos.

La revisión bibliográfica efectuada revela un déficit de investigaciones centradas en este instrumento, y en el diferente papel que puede jugar en el aprendizaje matemático del alumno. Así, el objetivo principal de esta tesis es detectar y caracterizar diferentes modos de elaboración y de utilización del cuaderno de matemáticas entre el alumnado participante. Ello nos permitirá tener un mejor conocimiento del instrumento, y poder avanzar hacia el planteamiento de secuencias didácticas que integren de forma adecuada diferentes instrumentos y recursos de aprendizaje.

En la investigación han participado cuatro aulas de 1º de Bachillerato (un total de 41 alumnos). En ellas, los profesores han seguido una metodología *tradicional* (basada en exposiciones teóricas de los docentes y en el planteamiento, resolución y corrección de actividades), y han dado libertad a sus alumnos para elaborar y trabajar con el cuaderno como ellos quisieran. El bloque de contenidos en el de Análisis Matemático.

Los datos principales recogidos han sido las fotocopias de la parte del cuaderno elaborada por cada alumno en este bloque, y entrevistas posteriores a ocho parejas de alumnos participantes, de tipo semiestructurado, sobre el cuaderno de matemáticas y los modos en que lo elaboran y utilizan. En el desarrollo del análisis se han utilizado técnicas propias del análisis de contenido. Se ha creado un marco de análisis *ad hoc* para analizar los cuadernos, que integra varias ideas teóricas (análisis de contenido matemático, análisis cognitivo, sistemas de representación, escritura matemática) y los aspectos más relevantes emergidos en el propio análisis. El marco se compone de cinco dimensiones de análisis, cada una de ellas con varias variables y una serie de indicadores que marcan el desarrollo de cada variable, a través de escalas 1-5 y una leyenda explicativa de codificación.

Las valoraciones numéricas de los indicadores han sido la base para desarrollar un análisis de tipo cuantitativo (análisis clúster, precedido de un análisis de componentes

principales). Dicho análisis ha permitido detectar seis modos de recogida y elaboración de los aspectos teóricos, siendo mayoritarios dos: un modo de recogida “exhaustivo” y otro modo en el que prepondera la recogida de ejemplos y de gráficas frente a la escasa escritura de texto verbal. Además, se han encontrado dos grandes modos para la resolución y corrección de actividades, según la cantidad de trabajo plasmada por el alumno en su cuaderno, con varios subgrupos dentro de ellos. El cruzamiento de los aspectos teóricos y prácticos ha dado lugar a siete perfiles de elaboración del cuaderno más comunes entre el alumnado. El desarrollo de unidades teóricas completas y con bastantes observaciones y comentarios ha aparecido ligado a un mejor rendimiento académico, así como la presencia de un alto número de actividades resueltas y explicadas, o una presencia más selectiva de tareas pero en la que se enfatiza el carácter correcto de las mismas.

El análisis de las entrevistas a varias parejas de alumnos participantes ha evidenciado diferentes roles del cuaderno entre los alumnos. Se han detectado cinco perfiles de utilización del mismo, según la mayor o menor dependencia del alumno con respecto al cuaderno en su estudio y aprendizaje de la asignatura. Para un número importante de alumnos el contenido del cuaderno supone el “contenido de referencia” para su estudio, tanto la teoría como las actividades que contiene, sean éstas intentadas o no. Para otros, el cuaderno es el lugar donde hacen actividades y desarrollan su trabajo, sin valorar la importancia de que este trabajo quede registrado y sin que su contenido sea una referencia para el estudio de la asignatura.

Por último, se han desarrollado algunos análisis específicos en aspectos que se han considerado como más relevantes: la toma de apuntes en la presentación de dos contenidos importantes (la introducción intuitiva del concepto de límite y el foco de las reglas y técnicas de derivación), y el tipo de comentarios que los alumnos escriben en sus cuadernos. Estos análisis específicos han permitido refinar los resultados anteriores y volver a constatar la amplia diversidad existente en el alumnado participante en relación con los aspectos que deciden anotar en su cuaderno.

ABSTRACT

This research is focused on an instrument that is commonly used by students in the teaching and learning of mathematics: the notebook of the subject. Here, the notebook is understood as the "Resource in which students take their class notes, carry out and correct different tasks, and collect their mathematical work, in order to help them in their study and their learning of mathematics." The spotlight is not on the different formats of a notebook, but in their functionalities.

The review of the literature revealed that there is a lack of research focused on the notebook, and on the different role which it can play in the mathematical learning of the student. The main objective of this doctoral thesis is to detect and characterize different ways of elaboration and use of the mathematics notebook among the participating students. This will allow having a better knowledge about this instrument and progressing towards the design of didactical sequences that integrate different learning resources in a suitable way.

A total of 41 eleventh-grade students of four classrooms were participated in this research. The math teachers of these classrooms developed a traditional methodology (based on theoretical explanations given by the teachers, and the solving and correction of tasks), in which the students are free to elaborate and use their notebook as they want. The selected topic was the part of mathematical analysis of the course.

The main data collected were the photocopies of the part of the notebook made by each student associated to the topics of mathematical analysis and, later, structured interviews with some pairs of participating students. The interviews had different parts about the mathematics notebook, their elaboration and use. Content analysis techniques were used during the analysis. We have created an *ad hoc* framework to analyse the notebooks. This framework combines diverse theoretical ideas (analysis of mathematical content, cognitive analysis, systems of representation, and mathematical writing of the students) and other relevant issues that have emerged during the analysis of the notebooks. The framework has five dimensions of analysis. Each dimension has several variables and different indicators, understood as elements or features that show the degree of development of the variable. Each indicator has a 1-5 scale and an explanatory text to make the assessment objectively.

The numerical assessments of the indicators were the basis for developing a quantitative analysis (a cluster analysis, preceded by a principal component analysis). As a result of it, six different ways to collect and elaborate the theoretical aspects were detected. Two of them have been more frequent: an “exhaustive” way of collect information and a manner in which the annotation of examples and graphics have prevailed. Besides, there were two broad modes to solve and correct the tasks in the notebook, depending on the amount of work done by the student, with various subgroups of behaviour within these two modes. The intersection of theoretical and practical aspects has led to seven different profiles of elaboration of the mathematics notebook more frequent among the participants. Three characteristics have been linked here with greater academic success in the subject: the development of complete theoretical units (with many observations and comments), a high number of tasks solved by the students (with many explanations), and the resolution of tasks in a correct way and the correction of possible mistakes.

Thanks to the interviews, it has become evident that there were different roles of the mathematics notebook among the students. Five profiles of utilization of this resource have been detected, according to the greater or smaller dependency of the students on the tool in their study and their learning of mathematics. The content of the notebook, either theoretical or practical, is used by many students as the baseline to study the subject. For other students, the notebook is the place to solve tasks and develop the mathematical work. These students do not appreciate the registration of that work in the notebook and do not use the notebook as an important tool to prepare an exam.

Finally, specific analyses linked to some relevant aspects were developed. Concretely, we analysed the notetaking of the students in the presentation of two important contents: the intuitive introduction of the concept of limit and the presentation of the derivative rules and techniques. Besides, the type of comments written by the students in their notebooks was also studied. These analyses have allowed us to refine the previous results and to confirm the great diversity among the students on the elements that they had decided to write down in their notebooks.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

SIGLAS, ACRÓNIMOS Y ABREVIATURAS

ACD	Actividad creada por el docente
ACP	Análisis de componentes principales
AELT	Actividad extraída del libro de texto
Anº	Código para los alumnos en el desarrollo de la investigación propia de la tesis doctoral
ARLT	Actividad reformulada del libro de texto
AT	Ausencia de transcripción (Apartado VII.1)
Au1	Abreviatura de los indicadores asociados a la cualidad “Ausencia”, y de Tipo 1
Au2	Abreviatura de los indicadores asociados a la cualidad “Ausencia”, y de Tipo 2
Au3	Abreviatura de los indicadores asociados a la cualidad “Ausencia”, y de Tipo 3
Ca	Abreviatura de los indicadores asociados a la cualidad “Calidad”
C-T	Modalidad Científico-Tecnológica (Bachillerato)
CCSS	Modalidad Ciencias Sociales (Bachillerato)
CM	Cuaderno de Matemáticas (en las entrevistas)
Com	Abreviatura de “Completado”
D1V2Ind5	Indicador número 5 de la segunda variable de la Dimensión 1 (ejemplo para ilustrar el significado)
Dcha.	Abreviatura de “Derecha”
DEA	Diploma de Estudios Avanzados
DG	Descomposiciones genéticas (Apartado VII.2)
DT	Desviación Típica (en las tablas con información estadística)

Enº	Código para los estudiantes en el trabajo exploratorio (Capítulo II)
EAEM	Escala Afectivo-Emocional hacia las Matemáticas
EEUU	Estados Unidos de América
EI	Equipo investigador
Ej.	Ejercicio
ESO	Enseñanza Secundaria Obligatoria
Est. / Estud.	Abreviaturas de "Estudiante"
et al.	et alii (y otros)
ev.	Evaluación
Fr1	Abreviatura de los indicadores asociados a la cualidad "Frecuencia", y de Tipo 1
Fr1*	Abreviatura asociada a un indicador especial de entre los de Frecuencia de Tipo 1: "Información y referencia de los ejercicios"
Fr2	Abreviatura de los indicadores asociados a la cualidad "Frecuencia", y de Tipo 2
GCSE	General Certificate of Secondary Education (Reino Unido)
GGP	Gran Grupo Práctico (en el desarrollo del análisis clúster)
GGPnº	Gran Grupo Práctico (1 ó 2, en el desarrollo del análisis clúster)
GGP1S3	Subgrupo 3 del Gran Grupo Práctico 1 (ejemplo para ilustrar los subgrupos de los GGP, en el desarrollo del análisis clúster)
GGT	Gran Grupo Teórico (en el desarrollo del análisis clúster)
GGTnº	Gran Grupo Teórico número (1, 2 ó 3, en el desarrollo del análisis clúster)
GGT1S2	Subgrupo 2 del Gran Grupo Teórico 1 (ejemplo para ilustrar los subgrupos de los GGT, en el desarrollo del análisis clúster, aunque luego fueron reformulados como GT)
GIDAM	Grupo De Investigación en Didáctica del Análisis Matemático
gl	Grados de libertad
Gr	Abreviatura de los indicadores asociados a la cualidad "Gravedad"
Gr*	Abreviatura de un indicador especial de los asociados a la cualidad "Gravedad", sobre el nivel de gravedad de los errores derivados de la transcripción.
GT	Grupo Teórico (en el desarrollo del análisis clúster)

GTnº	Grupo Teórico número (1, 2, 3, 4, 5 ó 6, en el desarrollo del análisis clúster)
IEA	International association for the evaluation of Educational Achievement
Imp	Abreviatura de Importante
INECSE	Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo
Int	Abreviatura de “Intentado”
Inv.	Abreviatura de Investigador
Izda.	Abreviatura de izquierda
KMO	Medida de Adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin
KOM	“Competencias y el aprendizaje de las matemáticas” (en danés: *Kompetencer og matematiklæring*)
LOE	Ley Orgánica de Educación
M	Media aritmética (en las tablas con información estadística)
MATHDI	Mathematics Education Database
MEC	Ministerio de Educación y Ciencia
N	Número de elementos (en las tablas con información estadística)
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
NP	Alumno No Participante en el análisis de los cuadernos
Num	Abreviatura de los indicadores asociados a la cualidad “Conteo numérico”
OCDE	Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico
OP	Objetivo Principal
OS	Objetivo Secundario
p.	Página
Pág.	Página (cuando se hace referencia a ejercicios del libro de texto)
PAU	Pruebas de Acceso a la Universidad
PISA	Program for International Student Assessment
PMA	Pensamiento Matemático Avanzado
Por	Abreviatura de los indicadores asociados a la cualidad “Medición de un porcentaje”
Por*	Abreviatura de un indicador especial de los asociados a la cualidad “Medición de un porcentaje”: “Grado de completitud de las actividades registradas que fueron corregidas en el aula”.

pp.	Páginas
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
RAE	Real Academia Española
Reg	Abreviatura de “Registrado/a”
Reh	Abreviatura de “Rehecho”
RS1/RS2/RS3	Referencia a diferentes métodos simbólicos de representar la derivada de una función (Apartado VII.1)
S.	Siglo
SEIEM	Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Signif.	Significatividad
TC	Trancripción completa (Apartado VII.1)
TFM	Trabajo Fin de Máster
TI	Transcripción incompleta (Apartado VII.1)
TIC	Tecnologías de la Información y de la Comunicación
TIMSS	Trends in International Mathematics and Science Study
UP	Unidad Práctica
UPnº	Unidad Práctica número (1, 2 ó 3 según el tema al que pertenezca)
UT	Unidad Teórica
UTnº	Unidad Teórica número (1, 2 ó 3 según el tema al que pertenezca)

CAPÍTULO 0

INTRODUCCIÓN

La tesis doctoral que aquí se desarrolla se centra en un instrumento cuya presencia y utilización ha sido y sigue siendo muy común en las aulas de matemáticas de muchos niveles educativos: el cuaderno del alumno.

El cuaderno suele ser un elemento tanto transversal como longitudinal en el desarrollo del trabajo escolar de un estudiante, puesto que puede encontrarse en diferentes asignaturas y a lo largo de sus años de escolaridad. Puede afirmarse que, junto con el libro de texto, han sido y siguen siendo los dos medios más comunes en las aulas para el desarrollo del estudio y del aprendizaje del estudiante. No puede obviarse que, en la actualidad, los avances tecnológicos y la introducción progresiva de TIC y los recursos digitales en las aulas hacen que estos medios puedan comenzar a tener diferentes formatos físicos en un futuro próximo. Sin embargo, consideramos y afirmamos que la tenencia de un manual de consulta y apoyo para el estudio y el aprendizaje de un estudiante (libro de texto), y la disposición de un lugar donde el alumno desarrolle y recoja su trabajo en una asignatura (cuaderno del alumno) seguirán presentes en el futuro con funciones similares.

Nuestro estudio se centra en el cuaderno de una asignatura concreta: matemáticas. Como indican Fried y Amit (2003), aunque la presencia del cuaderno sea común en muchas asignaturas (con mayor o menor incidencia según la tradición escolar del país), en la asignatura de matemáticas su presencia e incidencia es mayor.

En esta introducción vamos a presentar el planteamiento general y los objetivos de la investigación que aquí se describe, así como la estructura de esta memoria de tesis doctoral. En el primer apartado vamos a especificar qué vamos a entender por “cuaderno” en el desarrollo de esta investigación. En el segundo apartado indicaremos la situación origen de esta investigación, así como su objetivo principal y los objetivos derivados del mismo y la metodología utilizada. En el tercer apartado se explicará la estructura de la memoria, indicando qué es lo que contiene cada uno de los capítulos de la misma.

0.1. CONCEPTUALIZACIÓN DEL TÉRMINO “CUADERNO” EN ESTA INVESTIGACIÓN

La palabra cuaderno, según podemos ver en la última versión del Diccionario de la Lengua Española (RAE, 2014), proviene de la palabra latina *quaterni*, cuyo significado era “de cuatro en cuatro”, y que representaba el número de veces en las que los romanos, generalmente, doblaban un pliego de papel, que posteriormente cosían con otros para componer una especie de “libro”. Ya desde su origen, el cuaderno tuvo una finalidad escolar, y significaba una agrupación de hojas de papel cosidas y protegidas por una capa. Aunque ya se utilizaba con anterioridad, el aumento de la producción y el abaratamiento del papel (materia prima del cuaderno) provocaron la popularización de este instrumento en las aulas, en sustitución de los pizarrines de mano, lo que supuso una revolución pedagógica (Hébrard, 2001; Villarreal & Borba, 2010; Neubert y Schlindwein, 2014). Esta revolución tuvo lugar durante la segunda mitad del S. XIX y la primera mitad del S. XX.

¿Qué vamos a entender en nuestra investigación por “cuaderno”? Como puede verse en el párrafo anterior, el origen etimológico de la palabra está muy ligado a sus componentes físicos y al modo en que éstos eran dispuestos. Ese origen etimológico se conserva en varias de las cinco acepciones de la palabra *cuaderno* que pueden encontrarse en los dos últimos Diccionarios de la Lengua Española (RAE, 2001, 2014), y que transcribimos a continuación:

1. Conjunto o agregado de algunos pliegos de papel, doblados y cosidos en forma de libro.
2. Libro pequeño o conjunto de papel en que se lleva la cuenta y razón, o en que se escriben algunas noticias, ordenanzas o instrucciones.

3. Castigo que se imponía a los colegiales por faltas leves.

4. (Coloquial) Baraja de naipes.

5. (Imprenta) Compuesto de cuatro pliegos metidos uno dentro de otro.

Las acepciones tercera y cuarta son ajenas a nuestro propósito. De las tres acepciones restantes, las acepciones primera y quinta son las más ligadas al significado de la palabra latina de origen, y hacen mención únicamente a la composición del mismo, sin que se haga ninguna alusión a su funcionalidad. Por el contrario, la acepción segunda sí que hace mención a los posibles usos del cuaderno, de una forma muy general (“en que se lleva cuenta y razón”, “en que se escriben algunas noticias, ordenanzas o instrucciones”).

En nuestro trabajo sobre el cuaderno de matemáticas, nuestro foco de interés no está en sus componentes físicas sino en la funcionalidad del mismo para los estudiantes. Es decir, en el modo en que los estudiantes elaboran y utilizan su cuaderno de matemáticas, independientemente de que este cuaderno pueda tomar la forma de un bloc de anillas, una archivadora o un conjunto de hojas agrupadas y numeradas, de tamaño A4 o tamaño cuartilla, por decir algunos formatos posibles.

Partiendo de esta idea, vamos a proponer una conceptualización concreta para el término “cuaderno” en el marco de esta investigación. Un primer aspecto a tratar es cómo va a sustantivarse dicho término: qué sustantivo clave se va a utilizar en dicha conceptualización. Un conjunto de sustantivos posibles que, a priori, nos resultaron adecuados fueron: recurso, material, documento, instrumento, medio o herramienta. Estas palabras pueden tener un significado muy similar en diferentes contextos. Para decidir qué término es el que más se adecúa a la conceptualización de cuaderno aquí pretendida, recurrimos a buscar y analizar las distintas acepciones de estas palabras en las últimas ediciones del Diccionario de la Lengua Española (RAE, 2001, 2014).

Recurso: Hay dos acepciones de la palabra que tienen cierta relación con lo que aquí estamos buscando y que coinciden en ambos diccionarios. Son la segunda: “Medio de cualquier clase que, en caso de necesidad, sirve para conseguir lo que se pretende”, y la séptima: “Conjunto de elementos disponibles para resolver una necesidad o llevar a cabo una empresa”.

Material: Hay una acepción de esta palabra que es más próxima a nuestros intereses. Dicha acepción es la séptima en la última versión del diccionario (RAE, 2014) y la octava en la penúltima versión (RAE, 2001). En ambos casos tiene el mismo enunciado: "Documentación que sirve de base para un trabajo intelectual".

Documento: En la última versión del diccionario (RAE, 2014) encontramos dos acepciones de mayor interés para nosotros. Una de esas acepciones es la primera: "Diploma, carta, relación u otro escrito que ilustra acerca de algún hecho, principalmente de los históricos", que es común a la versión anterior (RAE, 2001). La otra acepción, añadida en la última versión, es la tercera: "Cosa que sirve para testimoniar un hecho o informar de él, especialmente del pasado".

Instrumento: Una de las acepciones de esta palabra en cada uno de los diccionarios está muy relacionada con nuestros intereses. En la última versión (RAE, 2014) es la segunda acepción: "Cosa o persona de que alguien se sirve para hacer algo o conseguir un fin". En la versión anterior (RAE, 2001) es la tercera: "Aquello que sirve de medio para hacer algo o conseguir un fin" y en la 5ª actual "Escritura, papel o documento con que se justifica o prueba algo".

Medio: Dentro de las múltiples acepciones que tiene esta palabra, la que más se acerca a nuestros intereses es la undécima, enunciada en ambos diccionarios como "Cosa que puede servir para un determinado fin".

Herramienta: De entre todas las acepciones en ambos diccionarios, la que podría considerarse más próxima a nuestro estudio es la primera: "Instrumento, por lo común de hierro o acero, con que trabajan los artesanos".

Analizamos a continuación la información encontrada tomando como base las definiciones de los diccionarios de la Lengua Española (RAE, 2001, 2014). De los seis sustantivos que hemos propuesto, las palabras *material* y *documento* parecen privilegiar el proceso de utilización y análisis de un escrito anterior, ya creado, sin hacer mención al proceso de elaboración y creación del mismo. Por esa razón, y dado que el cuaderno de matemáticas es un elemento, usualmente, creado y desarrollado por el propio alumno, hemos descartado estos dos términos. No obstante, para nosotros, como investigadores, los cuadernos sí que han jugado el papel de *materiales* o de *documentos* de análisis en esta tesis doctoral.

En relación a la palabra *herramienta*, las acepciones que se encuentran en los diccionarios de la Lengua Española (RAE, 2001, 2014) tienen un ámbito de aplicación restringido, el de la artesanía y la fabricación. Sin embargo, es común la extensión en la utilización de esta palabra para referirse a los artefactos utilizados en una profesión cualquiera, por lo que ampliaremos esa acepción al ámbito educativo.

La RAE comienza la acepción señalada de herramienta con la palabra *instrumento*, otro de los sustantivos propuestos. Teniendo en cuenta la ampliación de la acepción de la palabra herramienta a cualquier ámbito profesional, una herramienta sería considerada como un “instrumento de trabajo”. No obstante, la RAE no hace ninguna mención explícita en la definición a los modos o la finalidad con la que es utilizada. En este sentido, autores como Rabardel (1995) consideran que un instrumento es una herramienta junto con unas funciones y unos esquemas de uso asociados o añadidos a la misma, que no tienen por qué ser iguales en todos los individuos (génesis instrumental). Dado que nuestro interés está en los modos en que los estudiantes elaboran y utilizan su cuaderno, nos decantamos por la palabra instrumento frente a herramienta, aunque puede ser que utilicemos esta última cuando nos referimos al propio artefacto de trabajo.

En relación con la palabra *recurso*, una de sus acepciones comienza con la palabra *medio*, añadiéndose en la acepción un matiz de necesidad que restringe innecesariamente la conceptualización de cuaderno que pretendemos.

Por tanto, nos vamos a quedar con los términos *instrumento* o *medio*, cuyas acepciones seleccionadas son muy similares, como sustantivos clave con los que iniciar la conceptualización del término “cuaderno” en esta investigación. Nuestra visión del cuaderno de matemáticas será la de un instrumento o un medio que sirve, en mayor o menor medida, para un fin muy determinado: el estudio y el aprendizaje de las matemáticas por parte del alumno. No obstante, pudiera ser que algún momento del texto se utilice alguna de las otras palabras para referirse al cuaderno, por considerarse pertinente y por evitar repeticiones.

Para completar la conceptualización tendremos en cuenta cuáles son las actividades que, de forma general, realiza usualmente un estudiante en su cuaderno de matemáticas para ayudarse en el fin anterior. Es decir, cuáles son los esquemas de uso generales que habitualmente se asocian al cuaderno. Así, en nuestro estudio entenderemos cuaderno de matemáticas de la siguiente forma:

Instrumento o medio en el cual el alumno recoge y elabora sus anotaciones de las clases, realiza y corrige actividades, y recopila su trabajo matemático, con el fin de servirle en su estudio y aprendizaje de las matemáticas.

Así, y como ya anticipábamos anteriormente, el foco de nuestro estudio de los cuadernos de matemáticas no está en el tipo de formato físico utilizado, sino en los procesos y acciones que habitualmente pueden tener lugar en él, y que tienen por objetivo servir al alumno en su proceso de estudio y de aprendizaje de esta asignatura. Siguiendo a Villarreal y Borba (2010), el conocimiento es producido por colectivos de hombres y medios (*humans-with-media*), jugando estos últimos un papel en la transformación y reorganización de las prácticas y los modos en que se produce el conocimiento. Desde esta perspectiva, uno de esos medios utilizados habitualmente por el alumnado en el aprendizaje de las matemáticas es el cuaderno, y sobre él pivota esta investigación.

0.2. ORIGEN, PLANTAMIENTO GENERAL Y OBJETIVOS DE ESTA INVESTIGACIÓN

Es indudable que el cuaderno escolar tiene un enorme potencial como instrumento y como documento para la investigación en educación. El cuaderno, inicialmente, suele ser un soporte vacío de contenidos cuya elaboración y uso por parte del alumno lo va transformando en un material rico tanto en conocimientos trabajados por los estudiantes como en información sobre la docencia que se ha desarrollado (Badanelli y Mahamud, 2007). Esta afirmación es común al cuaderno en cualquier asignatura. Además, si nos centramos en la asignatura de matemáticas, el cuaderno supone una importante fuente de información sobre el trabajo y el pensamiento matemático de los estudiantes, un medio para que los alumnos comuniquen y organicen sus conocimientos matemáticos, y un instrumento para que el docente tenga una visión de conjunto del trabajo matemático del alumno, y de los procesos de reflexión que éste ha seguido (Masingila, Nigam y Domínguez, 1997; Fried & Amit, 2003).

A pesar de esa importancia potencial, existe la sensación de que el cuaderno forma parte intrínseca de la clase de matemáticas, junto a otros elementos comunes como los libros de texto, las pizarras o los útiles de escritura, lo que hace que se haya desarrollado una “ilusión de transparencia” en torno a él (Villarreal & Borba, 2010). Este hecho puede justificar una de las causas principales que han incitado el desarrollo de esta tesis doctoral: la existencia, hasta donde conoce el equipo investigador (de ahora en adelante, EI), de un número muy reducido de investigaciones que tengan por objetivo el análisis o la discusión del papel que juega el cuaderno en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este hecho, como indican Villarreal y Borba (2010) es contrario a lo que sucede con otros medios, instrumentos o recursos utilizados en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, como las calculadoras o el uso de las TIC.

Sin embargo, las pocas investigaciones centradas en el papel del cuaderno de matemáticas confirman el interés de un estudio de este tipo. Blochs (2012) encuentra visiones muy opuestas en el profesorado sobre el cuaderno de matemáticas, concibiéndose entre los profesores como un instrumento en el que meramente se recoge la obra desarrollada por el maestro en la clase o como un instrumento para el aprendizaje del alumno. Además, diversos autores (Grilles, Llorens, Madalena, Martínez y Souto, 1996; Fried & Amit, 2003; Badanelli y Mahamud, 2007) indican la flexibilidad del cuaderno para adaptarse a situaciones muy distintas, según sea la práctica pedagógica y el modo en que dicho cuaderno sea visto por el docente o por los estudiantes.

En la actualidad, la evolución progresiva hacia metodologías con un enfoque constructivista (Piaget e Inhelder, 1982; Vygotsky, 1995; Bruner, Goodnow y Austin, 2001), y la transición hacia instrumentos que sirvan de apoyo y asesoramiento al alumnado hacen que el cuaderno tienda a situarse cada vez más dentro de un *dominio privado* (en el sentido de Fried y Amit, 2003), es decir, en un lugar en el que el alumno es libre de explorar, dar marcha atrás y reflexionar, ya que no existe una responsabilidad formal ante profesor y compañeros de lo que se realiza en él, ni las ataduras que de ello se derivan. Esto sucede especialmente en Enseñanza Secundaria, donde el cuaderno suele ser un instrumento personal para el aprendizaje de los estudiantes. En estos niveles, los docentes suelen dar a los alumnos libertad y autonomía (total o parcial) para trabajar con el cuaderno, presuponiendo en ellos cierta madurez para haber desarrollado hábitos de trabajo y de estudio ligados a este instrumento, o para ser capaz de complementar este instrumento con otros instrumentos posibles.

Así, en un entorno de este tipo, el modo en que los estudiantes conciban este instrumento en su estudio y aprendizaje de las matemáticas tiene una influencia importante en su éxito escolar en la asignatura. Esta tesis doctoral surge a partir de un interés y una preocupación investigadora conjunta, del tutor de la tesis y del doctorando, por conocer más acerca del papel del cuaderno de matemáticas en la enseñanza-aprendizaje de la materia, un medio que ambos recordábamos como especialmente útil en nuestro aprendizaje y desarrollo matemático. El desarrollo de un estudio exploratorio llevado a cabo en el Trabajo Fin de Máster (de ahora en adelante, TFM) por parte del doctorando, bajo la dirección del tutor de tesis, y la diversidad de modos de trabajo con el cuaderno que se detectaron en el mismo, nos reafirmaron en la pertinencia de planificar y desarrollar una investigación doctoral centrada en el cuaderno de matemáticas.

Esta investigación que aquí se presenta ha sido llevada a cabo en varias aulas de 1º de Bachillerato, tanto de la modalidad Científico-Tecnológica como de la modalidad de Ciencias Sociales. En esas aulas, escogidas por disponibilidad, los docentes han implementado la docencia que tenían planificada, sin ningún tipo de sugerencia ni injerencia del EI, con una metodología de tipo tradicional (exposición del contenido por parte del docente, propuesta y resolución de actividades), y dando libertad al alumnado en la elaboración y utilización del cuaderno de matemáticas.

El bloque de contenidos de este curso en el que se centra el análisis es el de Análisis Matemático. Hemos seleccionado este bloque por tres razones. La primera es que es un bloque común a las dos modalidades de bachillerato antes indicadas. La segunda es que en este curso se produce la introducción a los estudiantes de conceptos muy importantes, como son los de límite y derivada de una función, lo que nos puede mostrar de una mejor manera cómo los alumnos elaboran y utilizan su cuaderno para comenzar el estudio y el aprendizaje de estos conceptos. La tercera razón es la larga tradición investigadora asociada a este bloque de contenidos en el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid, comentándose algunas de esas investigaciones en el capítulo de antecedentes (apartado I.4).

Nuestra hipótesis principal es que existen diferencias importantes en el modo en que los estudiantes conciben, elaboran y utilizan su cuaderno en el estudio y aprendizaje de las matemáticas, incluso dentro de una misma aula. Así, el objetivo general y principal de esta tesis doctoral es el siguiente:

- Detectar y caracterizar diferentes perfiles de elaboración y modos de uso del cuaderno como instrumento para el estudio y el aprendizaje de las matemáticas entre el alumnado de 1º de Bachillerato.

Asociado a este objetivo principal, se derivan otros objetivos secundarios de la investigación que aquí se presenta:

- Desarrollar un marco de análisis de los cuadernos de matemáticas específico para la situación de esta investigación.

- Encontrar “prácticas de éxito” con el cuaderno de matemáticas, que aparezcan asociadas a un mayor rendimiento académico en la asignatura.

- Averiguar qué concepciones de las matemáticas subyacen en los modos de trabajo con el cuaderno que muestran los alumnos, a partir de la manera en que justifican los mismos.

- Detectar relaciones entre los perfiles encontrados y las diferencias metodológicas y de contenido existentes en la docencia de los profesores de las aulas participantes.
- Examinar qué aspectos son considerados por los alumnos como “dignos de anotar” o de escribir en su cuaderno en un contexto de clase determinado (Pimm, 1999).

En relación a este último objetivo, se presentarán varios estudios específicos en situaciones de especial interés, estudios que se presentan y desarrollan en el Capítulo VII de la tesis doctoral, y en los cuales se concretará este objetivo general en objetivos específicos más cercanos a cada uno de esos estudios.

Los datos principales de los que disponemos para el desarrollo de este análisis son las fotocopias de los cuadernos de los alumnos participantes, correspondientes a este bloque de contenidos. Estos datos se complementan con información contextual sobre el desarrollo de las clases: diarios escritos por los propios docentes sobre dicho desarrollo, notas de campo tomadas en la observación por el EI de algunas de las sesiones; así como con la realización posterior de entrevistas al alumnado participante, sobre la concepción que tienen del cuaderno, y los hábitos de trabajo y de utilización del mismo que tienen en su estudio y aprendizaje de las matemáticas.

El marco metodológico principal que se utiliza en esta investigación son las técnicas de *análisis de contenido* (Bardin, 1996; Krippendorff, 1990), para analizar tanto los documentos (fotocopias de los cuadernos) como las entrevistas con los alumnos.

Dado que no hemos encontrado ningún instrumento específico para analizar en profundidad cuadernos de matemáticas, una de las labores principales que se han tenido que llevar a cabo en este estudio ha sido la construcción de un instrumento de análisis adaptado a la situación. La reducida existencia de literatura relacionada con el propósito principal del trabajo hace que éste haya tenido una importante componente inductiva. En el proceso de creación de ese instrumento de análisis hemos seguido una metodología similar a la que plantean Monterrubio y Ortega en su proceso de creación de un instrumento para analizar y valorar libros de texto de matemáticas (Monterrubio, 2007; Monterrubio y Ortega, 2011, 2012).

Se ha partido de un esqueleto inicial de marco de análisis, creado y utilizado en el TFM (que puede verse en el segundo capítulo de esta tesis doctoral, y cuya síntesis está publicada en Arce, 2013). Este marco está compuesto por cinco dimensiones de análisis, con varias variables dentro de cada dimensión, y diferentes indicadores de cada una de las variables, entendiendo los indicadores como señales que marcan un mayor o menor desarrollo de la variable en un cuaderno.

Dicho marco ha sido reformulado y completado progresivamente, interviniendo tres factores distintos en esa evolución:

- Lectura de un mayor número de antecedentes relacionados directa o indirectamente con el cuaderno de matemáticas.
- Lectura y adopción de varios marcos teóricos de interés relacionados con diferentes procesos que pueden tener lugar en un cuaderno de matemáticas: marcos específicos para el análisis de contenido matemático (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Picado y Rico, 2011; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), para el análisis de la escritura matemática de los alumnos (Britton, Burgess, Martin, McLeod, & Rosen, 1975; Shepard, 1993; Shield & Galbraith, 1998), sobre los sistemas de representación de los objetos matemáticos (Duval, 1999; Rico, 2009; Pecharromán, 2013) o sobre las diferentes tipologías de errores y dificultades en matemáticas (recogidas en Ortega, 2010).
- Detección, en el propio progreso del análisis de los documentos, de aspectos de interés que no habían sido recogidos previamente.

La saturación del proceso anterior ha dado lugar a la versión final del marco para analizar los cuadernos de matemáticas que ha sido utilizado en esta investigación. Este marco de análisis es algo distinto según que lo que se analice sea contenido teórico (registros de explicaciones o comentarios teóricos) o contenido práctico (intentos de resolución de actividades y corrección de las mismas).

En todas las aulas, el bloque analizado se corresponde con tres temas de análisis matemático: funciones elementales, límite de una función y derivada de una función. Así, para cada tema tendremos dos unidades de análisis: una unidad teórica (con el contenido teórico, y a las que nos referiremos como UT) y una unidad práctica (con el contenido práctico, y a las que nos referiremos como UP). Si en un aula se han desarrollado los tres temas, tendremos un máximo de seis unidades de análisis por cuaderno.

En cada unidad, cada uno de los indicadores se ha medido a través de una escala Likert de 1 a 5, en base a una leyenda de codificación que ha sido igual para todas las unidades, para asegurar la objetividad y reproducibilidad del proceso. Así, para cada cuaderno tenemos tanto información cuantitativa (vector con las valoraciones de todos los indicadores) como cualitativa (explicaciones de las valoraciones de los indicadores en función del contenido y las características del cuaderno analizado).

La información numérica derivada del instrumento ha sido utilizada para realizar un análisis de tipo cuantitativo, en el que se ha desarrollado primero un análisis de componentes principales y, posteriormente, un análisis clúster. Este análisis ha permitido agrupar cuadernos con valoraciones parecidas, lo que proporciona diferentes perfiles de elaboración del cuaderno entre el alumnado participante. Estos perfiles han sido completados con las entrevistas al alumnado, sobre su utilización del cuaderno en el estudio y aprendizaje de las matemáticas, que nos han permitido detectar varias concepciones y modos de uso del cuaderno. Todos esos perfiles han sido comparados con el rendimiento académico en la asignatura y con las características de la docencia de los profesores participantes.

Por otra parte, se han llevado a cabo varios análisis específicos de tópicos concretos considerados de especial interés (toma de apuntes en determinadas situaciones y uso de la escritura y comentarios registrados en los cuadernos). Estos análisis nos han permitido un mejor conocimiento de los mismos en particular, y en relación con el estudio global de los cuadernos de matemáticas.

0.3. ESTRUCTURA DE LA MEMORIA DE TESIS DOCTORAL

La memoria de tesis doctoral se estructura en un total de ocho capítulos, además de este capítulo 0 (Introducción) y las referencias bibliográficas. Además, la tesis se acompaña de un CD en el que recogen una serie de Anexos con información diversa sobre los datos recogidos (diarios de clase, transcripciones de debates y entrevistas) y varias muestras del análisis desarrollado.

A continuación indicamos brevemente cuáles son los propósitos y los contenidos de cada uno de los ocho capítulos. En cada uno de los capítulos, se han establecido dos niveles para el desarrollo de la información: los apartados del capítulo y dentro de estos, si ha lugar, los subapartados del mismo.

El *capítulo I* se titula “Antecedentes y estado de la cuestión”. En este capítulo se presenta una revisión bibliográfica completa de aquellos aspectos que se consideran relevantes para nuestra investigación. El capítulo se compone de cuatro apartados, de acuerdo con la división de antecedentes que hemos realizado. En un primer apartado se expone una revisión de investigaciones cuyo foco principal es el cuaderno del alumno, con especial atención hacia aquellas que están centradas en el cuaderno de matemáticas. No obstante, como el número de antecedentes específicos es reducido, hemos añadido dos apartados, el segundo y el tercero, donde se presentan investigaciones sobre dos procesos concretos que suelen estar asociados al cuaderno: la toma de apuntes y la escritura matemática del alumno. Por último, en el cuarto de los apartados se realiza una revisión curricular y de investigaciones didácticas sobre la enseñanza y el aprendizaje del bloque de contenidos en el que se centra este estudio, el análisis matemático, y con especial atención en el nivel educativo de 1º de Bachillerato.

El *capítulo II* se titula "Trabajo de exploración". En este capítulo se explica la investigación sobre los cuadernos de matemáticas llevada a cabo como Trabajo Fin de Máster durante el curso 2009/2010, y cuyos aspectos fundamentales están publicados en Arce (2013, 2014). Esta investigación ha sido incluida en la memoria, dado que hizo las veces de trabajo de exploración, sirviendo de precursor para el desarrollo posterior de la tesis doctoral. Este trabajo exploratorio nos convenció sobre la relevancia y las posibilidades que tenía el desarrollo de un estudio más amplio centrado en los cuadernos de matemáticas de los alumnos. Además, sus resultados y los instrumentos utilizados fueron el punto de partida para la planificación de la investigación realizada y presentada en esta memoria. Este capítulo comprende seis apartados, que responden a una estructura clásica de presentación de una investigación. En el primer apartado se realiza el planteamiento general de este estudio exploratorio y sus objetivos. El segundo apartado contiene información sobre el contexto en el que se desarrolló este estudio y su puesta en práctica. En el tercer apartado se detallan la metodología y el marco teórico del trabajo exploratorio. Los apartados cuarto y quinto albergan los resultados obtenidos en el análisis de los cuadernos y en el debate posterior con los alumnos, respectivamente. Por último, en el sexto apartado se establecen las conclusiones derivadas de este estudio, así como el papel del mismo como punto de partida para el desarrollo de la investigación propia de la tesis doctoral.

El *capítulo III* se titula "Metodología, contexto y marco teórico de referencia". En este capítulo se detalla la metodología utilizada en el desarrollo de la investigación: las técnicas de análisis de contenido, y el modo en que las mismas han sido aplicadas en este trabajo. Dado que dos de los pilares fundamentales en el desarrollo de un estudio utilizando esta metodología son el conocimiento detallado del contexto y de las condiciones en las que el contenido a analizar ha sido producido y la fijación de un marco teórico para analizar los documentos, estos dos aspectos fundamentales se consideran incluidos dentro de este capítulo. Así, el capítulo III está formado por tres apartados. En el primero se explican los rudimentos teóricos y conceptuales de la metodología de análisis de contenido, las fases o etapas que deben llevarse a cabo en un estudio de este tipo, así como la concreción de las mismas en el desarrollo de esta investigación. En el apartado segundo se describe detalladamente el contexto dentro del cual se ha desarrollado la investigación: las aulas de 1º de Bachillerato junto con sus docentes de matemáticas, la metodología docente y los alumnos participantes. El apartado tercero está dedicado a la explicitación de las ideas teóricas de referencia utilizadas como base para el desarrollo del estudio. Estas ideas han servido como inspiración para la creación del marco para analizar los cuadernos de matemáticas y, en algunos casos, se han integrado en él.

El *capítulo IV* se titula “Marco para analizar cuadernos de matemáticas de los alumnos”. El objeto principal de este capítulo es el de presentar el marco *ad hoc* de análisis de los cuadernos que hemos creado en esta investigación. Este marco supone uno de los aportes de esta tesis doctoral. El capítulo IV se compone de ocho apartados. En el primero de ellos se explican varios cambios globales que se han producido en la plantilla de análisis a partir del esqueleto inicial de marco creado en el estudio exploratorio (y presentado en el Capítulo II). Los apartados segundo a sexto recogen cada una de las cinco dimensiones consideradas en el marco de análisis, junto con sus variables, indicadores, así como las plantillas de análisis resultantes y los hitos fundamentales asociados a la evolución del marco desde el esqueleto inicial (Capítulo II). En el apartado séptimo se presentan dos tablas resumen del marco de análisis, una tabla con el marco para las UT y otra con el marco para las UP. Por último, en el apartado octavo se explican algunas consideraciones relativas al desarrollo y la puesta en práctica del análisis de los cuadernos aplicando este marco de análisis y las plantillas asociadas al mismo.

El *capítulo V* se titula “Análisis cuantitativo de las valoraciones: propuesta de perfiles de elaboración”. Este capítulo se dedica a exponer el desarrollo y los resultados obtenidos al realizar un análisis de tipo cuantitativo, distinguiendo entre las UT y las UP. Los datos para desarrollar el análisis han sido las valoraciones de todos los indicadores de cada una de las unidades analizadas, por lo que los datos son considerados de forma global. Primeramente se han tratado las UT y las UP por separado y en paralelo, cruzando finalmente el análisis de ambos tipos de unidades. Este capítulo se compone de seis apartados. En los dos primeros apartados se tratan aspectos encaminados a preparar el análisis clúster o de conglomerados que se ha desarrollado. En concreto, en el primero se explica el tratamiento dado a aquellos indicadores que, en algunas unidades, no habían recibido valoración numérica debido a la inexistencia de información para ello, un tratamiento que tiene por objetivo evitar que estos indicadores obstruyan el desarrollo del análisis. En el segundo apartado se describe detalladamente los dos análisis de componentes principales que se ha llevado a cabo, paralelamente en las UT y en las UP, para reducir el número de indicadores, agrupando en una misma componente a aquellos grupos de indicadores que tenían una alta correlación entre sí. Estos dos análisis han dado lugar a componentes que son interpretadas en términos de nuestra investigación. El tercer apartado detalla el desarrollo de los análisis clúster (también paralelamente en las UT y las UP) a partir de las componentes anteriores. Este análisis nos ha permitido encontrar una serie de modos de elaboración del cuaderno tanto para los aspectos teóricos como para los aspectos prácticos, analizando qué diferencias significativas entre las componentes existen entre unos modos de elaboración y otros. En el cuarto apartado se entrecruzan esos modos de elaboración de UT y UP correspondientes a un mismo tema y alumno, lo que ha dado lugar a una propuesta de perfiles de elaboración del cuaderno de matemáticas entre el alumnado participante, relacionando estos perfiles con aspectos contextuales. En el quinto apartado se contrastan los modos de elaboración y perfiles encontrados con el rendimiento académico de los alumnos, para detectar qué elaboraciones se han asociado con mejores y peores resultados académicos en el bloque de contenidos, al menos en esta investigación. Por último, y dado que es un capítulo extenso, se recoge un sexto apartado en el que se realiza una síntesis del mismo y de los resultados obtenidos.

El *capítulo VI* se titula "Análisis de las entrevistas: resultados y discusión". Este capítulo está dedicado a describir la planificación, el desarrollo y el análisis de las entrevistas sobre el cuaderno de matemáticas desarrolladas a algunos de los alumnos participantes, así como a explicar y a discutir los resultados obtenidos de dicho análisis. El objetivo fundamental de las entrevistas fue el de profundizar en las razones que subyacen a los modos de elaborar el cuaderno, en relación a los usos que hacen del mismo en su estudio y aprendizaje de las matemáticas, y el rol que juega el cuaderno para los alumnos. El capítulo está estructurado en cuatro apartados. En el primer apartado se han comentado algunos aspectos metodológicos básicos y se presenta el guion que ha servido de base para el desarrollo de las entrevistas, por parejas, a parte del alumnado participante. En el segundo apartado se describe brevemente el desarrollo y el proceso de transcripción de las entrevistas. El apartado tercero presenta los resultados obtenidos al analizar por separado las respuestas dadas por el alumnado participante en cada uno de los bloques de que constó la entrevista. Por último, en el cuarto apartado se explican los cinco perfiles que se han detectado en el alumnado en relación al rol que juega el cuaderno para el alumno en matemáticas y al uso que habitualmente realizan del mismo. La presentación de los perfiles se acompaña de una discusión de los mismos en relación a los modos de elaboración detectados en los alumnos, el contexto y el rendimiento académico (Capítulo V).

El *capítulo VII* tiene por título "Análisis específico de algunos aspectos de interés. Resultados y discusión". El análisis pormenorizado de los cuadernos utilizando el marco *ad hoc* elaborado nos ha permitido obtener una gran cantidad de información sobre aspectos muy diversos asociados al cuaderno. Este capítulo tiene por objetivo recoger algunos análisis específicos relacionados con el último objetivo de la tesis doctoral que anteriormente indicábamos: qué aspectos han sido los considerados por los alumnos como "dignos de anotar" (Pimm, 1999) y cuál es el producto resultante de la toma de apuntes en las presentaciones expositivas de algunos tópicos de especial interés, así como qué deciden escribir en sus cuadernos. Así, el capítulo se compone de tres análisis específicos, presentando cada uno en un apartado, junto con un apartado de reflexión final. El apartado primero recoge un estudio pormenorizado de las notas tomadas por los alumnos en la presentación de las reglas y técnicas de derivación, el tópico del bloque en el que los docentes hicieron una exposición con un mayor número de relaciones entre los elementos matemáticos presentados, debido a los procesos de justificación y de aplicación de las reglas. En el apartado segundo se desarrolla un estudio específico de las notas tomadas por los estudiantes en la presentación intuitiva del concepto de límite que realizaron los docentes en las cuatro aulas participantes, un concepto clave para el desarrollo del análisis matemático y que se introduce por primera vez en este curso. El tercer apartado se centra en el estudio de los comentarios escritos por los alumnos en sus cuadernos, detectando una tipología muy variada entre ellos, y relacionándolos con el rol y la utilización del cuaderno, y con el contexto de las aulas. Por último, en el cuarto apartado se realiza una reflexión conjunta sobre estos tres estudios específicos en el marco de la investigación global sobre los cuadernos de matemáticas.

El *capítulo VIII* tiene por título "Conclusiones de la tesis doctoral, aportaciones, fortalezas, dificultades y perspectivas de futuro". Este capítulo de cierre tiene por objeto recoger los principales resultados de la investigación en relación a los objetivos planteados, así como las aportaciones de la misma, los problemas abiertos y el planteamiento de futuras líneas de investigación. El capítulo está compuesto por cuatro apartados. En el primero se detallan las conclusiones de la investigación presentada, teniendo presentes los objetivos planteados en la misma. El segundo apartado muestra las principales aportaciones de esta tesis doctoral (instrumentos desarrollados y aportación al área de conocimiento de Didáctica de la Matemática). El tercer apartado recoge un análisis de las fortalezas y dificultades que han existido en la planificación y el desarrollo de este trabajo de investigación. Por último, el cuarto capítulo presenta una serie de problemas abiertos así como un planteamiento de posibles vías de investigación sobre el cuaderno de matemáticas surgidas a raíz de este trabajo y de los resultados obtenidos.

La memoria de tesis doctoral se completa con un CD que contiene un conjunto de Anexos de esta tesis doctoral. Dichos Anexos reúnen una serie de datos recogidos en el desarrollo de la investigación (transcripción de entrevistas, diarios con el desarrollo de las clases del bloque de Análisis Matemático en las cuatro aulas participantes), de instrumentos diseñados y/o utilizados, y algunos aspectos del desarrollo del análisis cuantitativo que se presenta en el Capítulo V, y que sirven para complementar y entender mejor la investigación desarrollada. Este tomo de Anexos se estructura en cinco grandes bloques, según el capítulo al que pertenezcan los anexos. El bloque A de anexos recoge los anexos del Capítulo II, correspondiente al trabajo de exploración. En el bloque B se presentan los anexos asociados al Capítulo III, en concreto, se recogen los diarios de clase con la información sobre el desarrollo de las clases en las cuatro aulas participantes. El bloque C recoge los anexos del Capítulo IV, que muestran algunos ejemplos del material recogido asociado a los cuadernos, el análisis realizado y varios ejemplos de plantillas de análisis rellenadas por el EI a partir de la aplicación del marco presentado en este capítulo. El bloque D contiene los anexos sobre el Capítulo V, con algunos aspectos concretos sobre el desarrollo del análisis cuantitativo de las valoraciones de los indicadores, tanto de las UT como de las UP. Por último, el bloque E de anexos, correspondiente al Capítulo VI, recoge las transcripciones de las entrevistas sobre el cuaderno de matemáticas que han sido realizadas a ocho parejas de estudiantes participantes.

En el siguiente esquema, Figura 0.1, puede visualizarse la estructura de esta memoria de tesis doctoral.

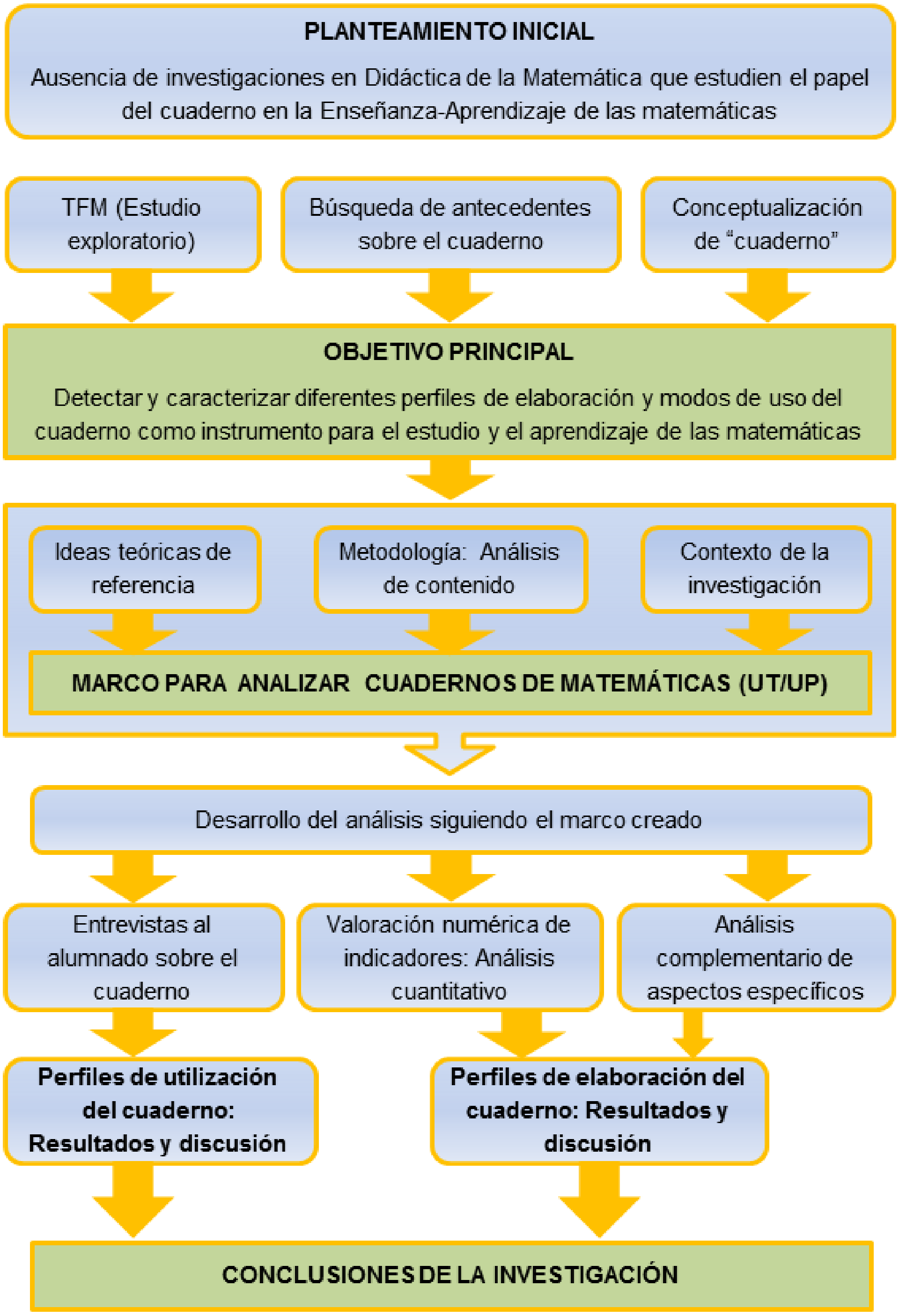


Figura 0.1. Esquema para visualizar la estructura de esta tesis doctoral

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES Y ESTADO DE LA CUESTIÓN

En este capítulo de la tesis pretendemos hacer una revisión lo más completa posible de investigaciones relacionadas con el cuaderno de matemáticas, el medio en torno al cual gira todo nuestro trabajo. Esta revisión nos ha proporcionado una idea clara de cuál es el estado de la cuestión (*state-of-the-art*) en relación a las investigaciones que tratan el cuaderno de matemáticas y, también, algunos aspectos de importancia que pueden asociarse al mismo. Se ha detectado la práctica ausencia de investigaciones similares a la que aquí estamos desarrollando, entre otras cosas. Para realizar la revisión bibliográfica nos hemos ayudado de varias bases de datos, principalmente Dialnet, MathEduc Database (MATHDI) y Scopus, así como de la Biblioteca de la Universidad de Valladolid.

El desarrollo de la revisión puso de manifiesto el escaso número de investigaciones realizadas cuyo foco esté en el modo en que los estudiantes elaboran y utilizan su cuaderno de matemáticas y, en general, investigaciones centradas en el papel que ocupa el cuaderno en la vida matemática del alumno (Fried & Amit, 2003). Sin embargo, sí que hay líneas de investigación fructíferas y ampliamente desarrolladas sobre algunas actividades que pueden tener cabida en el cuaderno de matemáticas (dependiendo de cómo éste sea utilizado), como son la toma de apuntes y la escritura de los alumnos en matemáticas.

Es por ello que el capítulo ha sido estructurado en cuatro apartados diferentes, que se presentan en la Figura I.1 y que son explicados a continuación.

En un primer apartado presentaremos de forma discursiva las investigaciones que hemos hallado sobre el cuaderno escolar, estando un número importante de ellas asociadas a investigaciones en Historia de la Educación. Como es lógico, haremos un énfasis particular en aquellas que se centran en el cuaderno de matemáticas. En el segundo apartado haremos lo propio con investigaciones sobre la toma de apuntes de los alumnos. El tercer apartado versará sobre investigaciones relacionadas con la escritura de los alumnos en matemáticas.

El bloque de contenidos en el que hemos ubicado nuestra investigación es el de Análisis Matemático. En particular, se han considerado cuadernos de 1º de Bachillerato en los que se trataban los siguientes temas: funciones y funciones elementales, límite de una función y derivada de una función. Así, para completar el capítulo, haremos un estudio curricular sobre este bloque de contenidos y un breve recorrido por investigaciones desarrolladas en el campo de la Didáctica del Análisis Matemático que se han centrado en la enseñanza y aprendizaje de estos tópicos. En ningún caso pretendemos realizar una revisión exhaustiva, puesto que todos estos tópicos han sido ampliamente estudiados e investigados desde diferentes perspectivas teóricas. No obstante, sí que queremos presentar una panorámica general de investigaciones sobre estos contenidos, especialmente aquellas que, según nuestro criterio, nos sean de mayor interés para nuestro análisis de los cuadernos escolares de matemáticas.

Figura I.1. Ilustración gráfica de los apartados que componen el capítulo I

I.1. ANTECEDENTES SOBRE EL CUADERNO ESCOLAR

Aunque la incidencia de su presencia depende de la diferente tradición escolar de cada país, pocos elementos son tan ubicuos y universales en un aula como el cuaderno escolar del alumno, entendido éste en el sentido amplio en que lo concebimos[1], y especialmente en la asignatura de matemáticas (Fried & Amit, 2003). La presencia del cuaderno del alumno, en gran parte de las ocasiones, se ha convertido en algo natural, exento de reflexión y de cuestionamiento (Santos, 2002, citado en Neubert y Schlindwein, 2014). Incluso, en muchos casos existe la sensación de que el cuaderno, junto con otros medios como los libros de texto, las pizarras y las tizas o los útiles de escritura, forma parte intrínseca de la clase o que éste siempre ha existido en las aulas (Villarreal & Borba, 2010).

El cuaderno escolar tiene un enorme potencial como herramienta para la investigación en educación. Gvirtz y Larrondo (2010), en un trabajo teórico sobre el cuaderno, argumentan por qué el cuaderno del alumno es una fuente privilegiada para la investigación educativa, aportando dos razones para ello:

> En primer lugar, porque los alumnos los usan diariamente tanto para registrar mensajes como para desarrollar actividades y así permiten conservar lo registrado, distinguiendo al cuaderno escolar de otros espacios de escrituración. En segundo lugar, el cuaderno escolar es un espacio de interacción entre maestros y alumnos, y permite ver los efectos de esta interacción, es decir, la tarea escolar. En síntesis, el cuaderno es una huella privilegiada de la enseñanza y nos permite conocer tanto el pasado como el presente de los sistemas educativos (p. 11).

La mayoría de investigaciones sobre el cuaderno escolar hacen referencia a él como una fuente que nos proporciona información sobre los diferentes actores que intervienen en el sistema educativo (principalmente profesor y alumno), así como sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje seguidos en el día a día escolar. No obstante, sí que existen diferencias en los aspectos concretos que más enfatizan los distintos investigadores.

Por ejemplo, Badanelli y Mahamud (2007) destacan los procesos de construcción y de utilización del cuaderno por parte de los alumnos, al indicar que es un “material curricular constituido inicialmente como soporte físico vacío de contenidos, pero cuyo

[1] La conceptualización del cuaderno que hemos adoptado en esta tesis doctoral se presenta en el capítulo 0 de la memoria.

uso lo va conformando en un material rico en conocimientos trabajados por el alumnado, delatando así el qué y el cómo se enseña” (sección III, párrafo 2). Tanto Chartier (2007) como Pozo y Ramos (2001) subrayan su papel como testimonio de aspectos relacionados con el desarrollo de la clase, como los ejercicios escolares propuestos y realizados, las prácticas pedagógicas del profesor, el desempeño de los alumnos o los recursos utilizados, sirviendo como herramienta para estudiar el posible distanciamiento entre el currículo educativo prescrito y el currículo implementado realmente en las aulas, así como para examinar cómo evalúan los docentes los logros conseguidos por sus alumnos (Chartier, 2009). En relación con lo anterior, Santos (2002, citado en Neubert y Schlindwein, 2014) enfatiza cómo el cuaderno hace visible el trabajo tanto de los alumnos como de los docentes. Por último, Viñao (2006), además de destacar el cuaderno como fuente de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje, también señala su papel para investigar tanto la propagación de la cultura escrita como de la cultura escolar propia del nivel y de la etapa de enseñanza en que el cuaderno es utilizado.

Las afirmaciones anteriores son válidas tanto para estudios actuales como para estudios históricos en educación. En este segundo sentido, varias investigaciones ensalzan especialmente el papel del cuaderno para permitir un mayor conocimiento y progreso de la rama de Historia de la Educación (Hébrard, 2001; Pozo y Ramos, 2001; Leme & Rodrigues, 2009; Castillo, 2010; Sanchidrián y Arias, 2013). Aunque son pocos los cuadernos que han escapado de su destrucción, los archivos de cuadernos escolares conservados están entre las pocas fuentes que tenemos para poder acceder a la actividad real que se producía en las aulas en épocas pretéritas, en contraposición con el estudio de los documentos curriculares oficiales, que sí tienden a ser conservados (Lacerda, Alves, Magalhães y Mendes, 2014) y en los que, quizá, la Historia de la Educación ha puesto un énfasis excesivo (Clements & Ellerton, 2012).

Si focalizamos nuestra atención en investigaciones sobre el cuaderno de matemáticas, los aspectos anteriormente comentados adquieren una mayor concreción. Fried y Amit (2003) señalan que el cuaderno es una fuente de información sobre el trabajo y el pensamiento matemático de los estudiantes que no debe ser olvidada. En una línea similar, Masingila *et al.* (1997) justifican que el cuaderno proporciona información muy valiosa tanto a docentes como a los propios alumnos. En el caso de los profesores, estos autores indican que, “a través del cuaderno, el profesor recibe importante información de los conocimientos de cada alumno sobre los conceptos y métodos matemáticos trabajados durante el curso” (p. 38), lo que le permite “tener una visión de conjunto de todo el trabajo del alumno” (p. 38) y “adentrarse en los conocimientos matemáticos y en el proceso de reflexión de los estudiantes" (p. 38). En relación a los estudiantes, estos mismos autores destacan su papel como fuente de información para el alumno sobre su propio aprendizaje, y como medio para mejorar la comunicación sistemática y organizada de sus conocimientos matemáticos.

Una vez reflejado el gran potencial que tiene el cuaderno como fuente para investigaciones en el ámbito educativo, es necesario poner de manifiesto varias limitaciones asociadas a esta herramienta. Por una parte, el cuaderno no suele ni puede reflejar todo lo que ha ocurrido en un aula. Hay actividades que no suelen tener cabida en el cuaderno (Badanelli y Mahamud, 2007), además de no existir generalmente huellas del trabajo y diálogos orales que han tenido lugar en el aula, así como de la gestualidad desarrollada por los diferentes actores participantes o del tiempo que se ha dedicado a cada una de las actividades (Chartier, 2009; Neubert y Schlindwein, 2014). Además, el cuaderno tampoco muestra si ha existido una interiorización real de los contenidos trabajados por parte del alumno, puesto que puede existir transcripción sin que exista comprensión o asimilación de lo copiado (Grilles, Llorens, Madalena, Martínez y Souto, 1996; Badanelli y Mahamud, 2007).

Además, varios autores alertan sobre las interpretaciones que pueden realizarse al utilizar el cuaderno como fuente en una investigación. Gvirtz y Larrondo (2010) advierten especialmente de aquellos casos en que se busca conocer información sobre el autor del cuaderno a través del mismo, obviando la posible influencia que provoca la propia herramienta. Es necesario ligar la investigación a las condiciones de producción del cuaderno (Grilles *et al.*, 1996; Lacerda *et al.*, 2014), así como conocer la interacción entre los sujetos participantes y la relación de la escuela con la sociedad y con las políticas educativas vigentes en el momento del estudio (Sanchidrián y Arias, 2013). En el caso de los estudios históricos, el conocimiento de las normas escolares, sociales y culturales propias del tiempo en que fueron producidos los cuadernos es especialmente importante, para evitar el fenómeno del anacronismo (Chartier, 2009).

I.1.1. ORÍGENES DEL CUADERNO ESCOLAR

Según podemos leer en Neubert y Schlindwein (2014) y en la última versión del Diccionario de la Lengua Española (RAE, 2014), la palabra cuaderno tiene su origen en la palabra latina *quaterni*, que proviene de *quattour* (cuatro), y que representaba el número de veces en las que, habitualmente, los romanos doblaban un pliego de papel, que posteriormente cosían con otros para crear una especie de "libros". Es decir, cuaderno significa, desde su origen, una agrupación de hojas de papel cosidas y protegidas por una capa.

Ya desde su origen, el cuaderno tuvo una finalidad escolar (Neubert y Schlindwein, 2014). No obstante, su introducción y popularización en las aulas fue diferente según los diferentes países y tradiciones escolares. Hébrard (2001) indica que el cuaderno es un instrumento común en el colegio desde el siglo XVI para desarrollar el aprendizaje de la escritura, pero que este aprendizaje empezaba en niveles avanzados de escolaridad (Gvirtz, 1997), a los que generalmente llegaban sólo las clases acomodadas. Los primeros años de escolaridad se reducían al aprendizaje de la lectura. En Norteamérica, entre los años 1607 y 1861, uno de los pilares utilizados para el aprendizaje de las matemáticas fue el llamado "*cyphering book*". Esta herramienta estaba inspirada en los manuscritos medievales de aritmética, y consistía en un manual elaborado individualmente por cada alumno, donde escribía entradas exponiendo los tópicos tratados, sus reglas y casuísticas y, además, resolvía problemas asociados a los tópicos, que sólo eran incluidos en el *cyphering book* cuando el profesor daba el visto bueno a su realización (Clements & Ellerton, 2012). Así, estos *cyphering books* pueden considerarse una herramienta intermedia entre un libro de texto y un cuaderno de ejercitación del alumno (pero donde únicamente se reflejan resoluciones correctas).

Hasta el S. XIX, el papel era un medio escaso y bastante caro, lo que provocaba que su uso se redujera a los niveles avanzados de escolarización. Sin embargo, a lo largo de este siglo el papel se convierte en un elemento más accesible, dado que su producción aumenta y su precio se reduce de manera considerable (Gvirtz, 1997; Neubert y Schlindwein, 2014). Además, la popularización del uso del papel en la escuela y las posibilidades que éste ofrecía estuvo unida al desarrollo de una revolución pedagógica en las aulas. Con esta revolución se buscaba una mayor alfabetización de la sociedad, pasando de la enseñanza sólo de la lectura, y de una cultura mayoritariamente oral, a una enseñanza que complementara la lectura y la escritura, y que introdujera la enseñanza del cálculo y de las operaciones básicas, dentro de una cultura escolar mayoritariamente escrita (Hébrard, 2001; Castillo, 2010), y ligada a la adquisición de conocimientos científicos (Chartier, 2009). En este entorno, los medios del aula cambiaron: se pasó del pizarrín de mano de los alumnos a la presencia de grandes pizarras en las aulas y de un cuaderno para cada alumno ya desde la enseñanza elemental, lo que hizo que se transformaran las tareas de alumnos y docentes (Villarreal & Borba, 2010). Así, la metodología profesor-alumno ya no fue tan individualizada, ganando importancia el papel del docente como actor central de la clase, apareciendo actividades nuevas para los alumnos como el hecho de copiar las lecciones (Villarreal & Borba, 2010), y haciendo viable una organización de las clases en grupos escolares de mayor tamaño, lo que posibilitó que la alfabetización llegara a un mayor número de personas racionalizando los costes (Neubert y Schlindwein, 2014). Paradójicamente a lo que sucedió en estos países con la popularización del cuaderno, estos cambios metodológicos provocaron la rápida desaparición en Norteamérica de los *cyphering books*, anteriormente explicados, en la parte central del S. XIX (Clements & Ellerton, 2012).

La generalización del cuaderno en las aulas no fue homogénea ni simultánea en todos los países, puesto que no todos tenían el mismo acceso al papel. Mientras que Hébrard (2001) indica que la popularización de su uso en la escuela primaria francesa data de mediados del S. XIX, en España y Brasil se data a finales del S. XIX (Pozo y Ramos, 2001; Neubert y Schlindwein, 2014) y en Argentina se produce en 1920, en el contexto de la reforma del movimiento "Escuela Nueva" (Gvirtz, 1997).

Esta última reforma promovió la utilización del llamado *cuaderno único* en el que el alumno se ejercitaba y recogía todo su trabajo realizado en el aula, sin distinción por disciplinas (Gvirtz, 1997). Sin embargo, y según recogen Hébrard (2001), Pozo y Ramos (2001), y Castillo (2010), lo habitual es que existieran diferentes tipos de cuaderno en el aula, para diferentes propósitos: un cuaderno individual del alumno para cada disciplina, cuaderno de deberes y cuaderno para su corrección, cuaderno de rotación (donde cada día un alumno distinto del aula recoge lo que en ella se ha realizado), cuaderno-agenda (donde cada alumno se recoge lo hecho diariamente en clase), cuaderno de honor (donde se recopilan las mejores producciones de los alumnos) o cuadernos de "pruebas mensuales" para la evaluación continua de los alumnos. En este sentido, Hébrard (2001) también indica la existencia de "cuadernos borrador" de trabajo del alumno, pero que no han sido considerados como dignos de ser conservados (no existen registros en archivos), lo que puede deberse a la querencia por la conservación de trabajos terminados debido a la influencia que ejercía la presencia de la inspección educativa.

El cuaderno se ha mantenido desde entonces como una herramienta muy habitual en las aulas, también en la asignatura de matemáticas, lo que ha provocado que exista una "ilusión de transparencia" en torno a la herramienta (Villarreal & Borba, 2010). Esa naturalidad e ilusión de transparencia es la que puede justificar la ausencia de estudios de investigación en didáctica de la matemática que discutan o analicen cuál es el papel del cuaderno en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de qué formas utilizan los alumnos esta herramienta (Fried & Amit, 2003; Neubert y Schlindwein, 2014). No sucede lo mismo con otras herramientas o medios de más reciente implantación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como pueden los diferentes tipos de calculadoras o, en general, el uso de las TIC; para los que existen un gran número de discusiones en congresos y estudios sobre su utilización en el aula (Villarreal & Borba, 2010).

Chartier (2009) se pregunta en qué se convertirán los cuadernos escolares, ahora que la influencia de los teclados y las pantallas en las escuelas es cada vez mayor. Sin embargo, coincidimos con Villarreal y Borba (2010) en que el conocimiento es producido por un colectivo de hombres y medios, y que los medios, herramientas o artefactos utilizados transforman y reorganizan las prácticas y los modos en que se produce el conocimiento. Así, consideramos necesario el desarrollo de investigaciones que estudien el modo en que los alumnos elaboran y utilizan su cuaderno en su aprendizaje de las matemáticas, como medio usualmente utilizado en ese proceso. Estas investigaciones serán complementarias a otras investigaciones, de naturaleza similar, para otros medios posibles, como las TIC; así como estudios donde se interrelacionen los diferentes medios. Consideramos que esto es muy pertinente dado que cada medio tiende a privilegiar actividades de distinto tipo: por ejemplo, las TIC favorecen el desarrollo de actividades de visualización y de exploración, mientras que los cuadernos ayudan a llevar a cabo actividades de expresión y de escritura en matemáticas.

I.1.2. INVESTIGACIONES SOBRE EL CUADERNO ESCOLAR

Como ya se ha comentado, el cuaderno de clase es un instrumento que recoge gran cantidad de información, tanto sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje seguido en el aula como del trabajo desempeñado por los diferentes actores del sistema educativo, principalmente profesores y alumnos. Por lo tanto, el cuaderno es un instrumento con un enorme potencial como fuente para la investigación en educación. Viñao (2006) señala un gran número de investigaciones posibles que pueden llevarse a cabo con él: el cuaderno como fuente para el conocimiento de imágenes y representaciones sociales de la infancia, la escuela o la familia; como instrumento de aculturación escrita; como vehículo de transmisión de valores y actitudes (y, de una forma extrema, de adoctrinamiento); como medio para estudiar el trabajo de los alumnos; como medio para estudiar el currículo, las disciplinas y las actividades escolares y como instrumento de expresión personal y subjetiva del alumno. Sin embargo, existe un reducido número de investigaciones centradas en él (Neubert y Schlindwein, 2014).

Gvirtz y Larrondo (2010) distinguen dos grandes líneas de investigación utilizando como fuente el cuaderno. La primera línea es la que lo usa como fuente primaria a través de la cual pueden visualizarse ciertos rasgos como el espíritu de la época en que fue creado, la ideología o las políticas educativas: en estas investigaciones el cuaderno es considerado como un soporte neutral que refleja estos aspectos, obviando el papel del cuaderno en sí mismo como generador de efectos (lo que supone una limitación de estos estudios). La segunda línea es la que analiza el cuaderno como un dispositivo o un producto de la cultura escolar, que es fruto de una determinada organización, contexto y ambiente escolar; es decir, recurriendo a las palabras utilizadas por estos autores, el cuaderno se estudia como un monumento de todo lo que se realiza en la escuela (más que como un mero documento).

Castillo (2010, p. 6) también propone una clasificación de las investigaciones realizadas sobre cuadernos, pero distinguiendo cuatro bloques. De ellos, los tres primeros bloques presentan ciertas similitudes con la clasificación anterior, destacando además un cuarto tipo de trabajos. Los cuatro bloques son:

- Cuadernos como dispositivos escolares para indagar en las disciplinas, el discurso escolar, el currículo y la organización del conocimiento aprendido.
- Cuadernos como fuente para analizar la instrumentación política de la escuela y las relaciones de poder.
- Cuadernos como testimonios de la cultura escolar y de los agentes que intervienen en ella.
- Cuadernos como instrumentos para indagar en la Historia de la cultura escrita y los modos en los que los alumnos se apropian de la escritura.

En nuestra búsqueda de antecedentes hemos encontrado varios trabajos actuales que utilizan archivos de cuadernos conservados como fuentes para investigar en historia de la educación, una perspectiva investigadora de interés reciente y creciente en las últimas dos décadas (Castillo, 2010). Estos cuadernos nos permiten conocer más de cerca la actividad real que se desarrollaba en las aulas, frente al currículo oficial. No obstante, la escasez de estas fuentes conservadas hace que los estudios, que en muchos casos se restringen a estudios de caso, tengan que ser cautelosos en sus conclusiones. Esto, como indica Chartier (2009), es debido a que los cuadernos que se conservan suelen ser aquellos que se han considerado como más valiosos, y suelen coincidir con los de los alumnos considerados como “mejores”. Explicamos a continuación algunos trabajos sobre cuadernos e Historia de la Educación:

Hemos localizado varios trabajos que se centran en la evolución de las tareas que se hacen en el cuaderno durante los siglos XIX y XX, aunque con un mayor énfasis en las tareas de escritura. Esos trabajos son los de Hébrard (2001), Chartier (2009) y Castillo (2010). Las tres investigaciones ponen de manifiesto la predominancia, en el S. XIX y parte del S. XX, de tareas de escritura basadas en la copia, el dictado o la reproducción memorística de textos de tipo científico, instructivo o moral, con los que se buscaba no sólo la transmisión de conocimientos a través de la escritura, sino también el desarrollo de una buena caligrafía en el estudiante. Los dos últimos autores destacan la evolución progresiva durante el S. XX hacia tareas de escritura basadas en el uso de la lengua por parte del alumno como instrumento de expresión y de comunicación de narraciones, experiencias, deseos o sentimientos. Es decir, aumenta el interés por el aprendizaje y uso de la lengua en conexión con sus contextos de aplicación para el alumno. Además, el estudio de Hébrard (2001), que no sólo hace énfasis en las tareas de escritura, muestra la repetición de una estructura concreta en los cuadernos franceses al resolver problemas de aritmética: el enunciado en la parte superior de la página, las operaciones en una columna a la izquierda y la explicación verbal de las operaciones y de la solución obtenida en una columna a la derecha.

También hemos encontrado algunos estudios en España que se encuadran en el segundo bloque de investigaciones indicado por Castillo (2010): el cuaderno como fuente para analizar la instrumentación política de la escuela y la transmisión de la ideología dominante en un determinado momento histórico. Estos trabajos son los de Badanelli y Mahamud (2007) y Sanchidrián y Arias (2013). Ambos están basados en estudios de caso de cuadernos de alumnos desarrollados en escuelas durante la época de la dictadura franquista (en concreto, en las décadas de los 40 y 50). Ambas investigaciones muestran el uso del cuaderno como un vehículo de aculturación y de adoctrinamiento ideológico a través de la escritura, predominando las tareas de copia, dictado o reproducción de textos que contienen los conocimientos, las ideas y los sentimientos propios del nacionalcatolicismo franquista. Además, se detecta un férreo control de lo que hacían los alumnos en el cuaderno, derivado de la utilización del mismo como dispositivo de control e inspección del docente por parte del Estado. Así, en el cuaderno no hay muestras ni de espontaneidad ni de libertad de expresión en el alumnado (Badanelli y Mahamud, 2007), siendo la única muestra de individualidad y de diferenciación entre alumnos el mayor desarrollo de valores procedimentales y actitudinales como la limpieza y pulcritud en sus producciones, el orden, la caligrafía, el grado de calidad en sus ilustraciones y su sentido estético.

Si nos centramos en el ámbito de las matemáticas, hemos encontrado dos trabajos interesantes en Brasil, en los que se utiliza el cuaderno como instrumento para contrastar la implementación real que tuvieron algunas reformas curriculares en matemáticas promulgadas en ese país a lo largo del siglo XX. De nuevo son estudios de caso centrados en el análisis de colecciones particulares de cuadernos.

Uno de ellos es la investigación de Leme y Rodrigues (2009), en la que se utilizan varios cuadernos de alumnos de Secundaria para analizar qué huellas pueden hallarse en ellos de la implantación de dos movimientos de reforma curricular introducidos en Brasil durante el S. XX: el movimiento internacional basado en las ideas de Felix Klein (primera parte del S. XX) y el movimiento de la llamada *matemática moderna* (años 50-60). En ambos casos, los cuadernos delatan una falta de adopción real de las ideas propias de ambos movimientos reformistas, junto con un cambio en el papel del cuaderno en la clase de matemáticas: pasa de ser un mediador entre el profesor y el alumno en una enseñanza individualizada (primera parte del S. XX) a una guía de referencia para el estudio del alumno (años 60).

El estudio de Lacerda *et al.* (2014) se basa en el análisis de un cuaderno datado en 1932. Ese cuaderno perteneció a una alumna de Alda Lodi, una profesora de una escuela de formación de maestros en el estado brasileño de Minas Gerais. Esta docente fue enviada por el estado a Nueva York para que conociera mejor nuevos métodos y prácticas educativas, con el objetivo de hacer efectiva la reforma educativa planteada en dicho estado en la tercera década del S. XX. En este caso, a diferencia del estudio anterior, el cuaderno sí que refleja el desarrollo real en el aula de las ideas reformistas, basadas en la defensa del papel central del alumno en la acción pedagógica y en el desarrollo de unas matemáticas basadas en la comprensión y el trabajo en contextos prácticos y motivadores. Además, el cuaderno muestra la implicación de la alumna en su elaboración, complementando y enfatizando diferentes aspectos, hecho por el cual quizá haya sido conservado hasta la actualidad en el archivo de la profesora Alda Lodi.

Dejando ya de lado los estudios sobre historia de la educación, existen también estudios recientes en didáctica de la matemática que utilizan el cuaderno como una de sus fuentes para analizar las diferencias entre el currículo oficial y el currículo realmente implementado en las aulas. Este es uno de los aspectos destacados también por Grilles *et al.* (1996): el cuaderno nos permite saber *lo que realmente pasa* en la clase. Estos estudios son más frecuentes en países con malos resultados en estudios de evaluación internacional (como PISA o TIMSS), buscando complementar la información obtenida por los cuestionarios de contexto de estos estudios, así como profundizar en posibles razones que ayuden a explicar los malos resultados. Ejemplos de estudios de este tipo son el de Cueto, Ramírez y León (2006) en Perú, y el de Reeves y Major (2012) en Botswana y Sudáfrica. Ambos estudios se han realizado con estudiantes de Grado 6 (último año de escuela elemental) y utilizando marcos basados en las oportunidades de aprendizaje de los alumnos (*opportunities to learn*, término acuñado por la IEA, McDonnell, 1995). El análisis del trabajo de los alumnos con sus cuadernos manifestó una baja presencia de oportunidades de aprendizaje para los alumnos. Se detectó una sobreabundancia de actividades de baja demanda cognitiva, con un énfasis excesivo en tareas aritméticas, frente a la práctica ausencia de ejercicios de otras ramas (como el estudio de relaciones o de estadística) o de resolución de problemas que requieran una mayor demanda cognitiva disciplinar. Estos estudios también han revelado una formación muy pobre del profesorado participante, que opta por impartir únicamente los tópicos que domina (que no siempre son los curriculares), junto con un alto absentismo laboral (sobre todo en Sudáfrica) y que suele proporcionar a los alumnos un feedback inadecuado y con errores al revisar sus resoluciones de las actividades (detectado en el estudio peruano).

En su tesis doctoral, Opsal (2013) también busca estudiar el grado de adopción en las aulas de una reforma educativa introducida en Noruega en la última década del S. XX. La peculiaridad de esta reforma es que la herramienta fundamental que introducía en el aprendizaje de las matemáticas era el llamado *elevbøker* o libro del alumno, una especie de cuaderno donde el estudiante debía escribir y organizar con sus propias palabras los elementos tratados, incluyendo reflexiones. Esta autora detecta en su estudio que, mayoritariamente, la herramienta no está teniendo el uso en el aula que se le pretendía dar, sino que se utiliza para copiar las presentaciones de los temas, sin que se convierta realmente en una herramienta para la reflexión del alumno sobre su aprendizaje. No obstante, el estudio se basa en la cumplimentación de cuestionarios y la realización de entrevistas a profesores y alumnos, sin analizar propiamente esos *elevbøker* y su contenido, lo que pensamos que supone una limitación del estudio.

I.1.3. USO, AUTORÍA Y EVALUACIÓN DEL CUADERNO DEL ALUMNO EN MATEMÁTICAS

El problema del uso que se da en el aula y el que desarrollan los alumnos de su cuaderno de matemáticas es uno de los asuntos fundamentales de nuestra investigación. Coincidimos con Badanelli y Mahamud (2007) en que el potencial pedagógico que puede tener el cuaderno en la enseñanza y el aprendizaje está en el uso que se hace del mismo, puesto que es una herramienta que termina siendo lo que tanto el maestro como el alumno hacen de él. Un hecho que confirma esta afirmación es el resultado obtenido por Opsal (2013) en su trabajo de investigación, que ha sido comentado al final del subapartado anterior. El posicionamiento del cuaderno dentro de la metodología seguida en el aula es clave para poder estudiar y entender el uso que se hace del mismo. Tanto Fried y Amit (2003) como Badanelli y Mahamud (2007) destacan la posibilidad del cuaderno de adoptarse a situaciones muy dispares según la práctica metodológica desarrollada. De hecho, Grilles *et al.* (1996) indican que el cuaderno ha de entenderse como un instrumento de trabajo con diferente función según sea el contexto metodológico concreto.

Así, Badanelli y Mahamud (2007) señalan que el cuaderno, “según su destino, puede encontrarse en un continuum que abarcaría desde la libertad total de expresión escrita e icónica del alumno […] hasta el más férreo control de sus contenidos” (sección I, párrafo 4). Una diferenciación parecida, aunque utilizando otra nomenclatura, realizan Fried y Amit (2003, p. 101) al hablar del cuaderno de matemáticas. Estos autores distinguen dos tipos de actividades:

- Actividades de *dominio público*: Aquellas actividades en las que un alumno es responsable de las mismas ante profesor y compañeros, existen obligaciones y ataduras derivadas de prácticas comunes y la necesidad de una comunicación formal de las mismas.

- Actividades de *dominio privado*: Son aquellas en las que no existe esa responsabilidad ante profesores y compañeros, liberándose el alumno de las expectativas y restricciones de la práctica común y pudiendo explorar, dar marcha atrás y reflexionar libremente.

Además, los autores remarcan que tanto el cuaderno como la escritura en matemáticas pueden ser susceptibles de situarse en ambos dominios según las actividades y la práctica pedagógica asociada al mismo.

Las investigaciones en historia de la educación que hemos detallado en el subapartado anterior nos muestran cómo, durante el S. XIX y gran parte del S. XX, existía un control muy estricto sobre lo que los alumnos realizaban en su cuaderno, debido a su utilización como medio para el control y la inspección del docente por parte de las autoridades educativas (Hébrard, 2001; Badanelli y Mahamud, 2007;

Sanchidrián y Arias, 2013). A esto se unía el uso del cuaderno como herramienta para transmitir los conocimientos a través de la escritura, con tareas basadas en la copia y la reproducción de textos. En estos entornos, el cuaderno es usado, de manera mayoritaria, como una herramienta de *revisión*, perteneciente a un *dominio público* (Fried & Amit, 2003), donde se enfatiza el resultado final obtenido (y no el proceso seguido) y donde las posibilidades de los alumnos de trabajar libremente con su cuaderno son prácticamente inexistentes. Es decir, el uso del cuaderno que tenía que hacer cada alumno, en gran medida, estaba predeterminado por el docente y por las instancias educativas superiores. Como antes hemos anticipado al hablar de los tipos de cuaderno existentes en aquellas épocas, los posibles *cuadernos borrador* o cuadernos de trabajo personal del alumno eran rápidamente destruidos, puesto que no se daba ningún valor a los mismos (Hébrard, 2001).

Sin embargo, durante el S. XX y hasta la actualidad se ha producido una evolución en las concepciones sobre el aprendizaje del alumno, debida a la aparición y popularización de nuevas teorías como el constructivismo (Piaget e Inhelder, 1982; Vygotsky, 1995), el aprendizaje por descubrimiento (Bruner *et al.*, 2001), el aprendizaje significativo (Ausubel, Novak y Hanesian, 1989), o el aprendizaje con un enfoque basado en competencias (Niss, 2003, OCDE, 2004). Un ejemplo de esa evolución es la evolución de las tareas de escritura predominantes en los cuadernos, ya comentada anteriormente (Castillo, 2010; Chartier, 2009). A esto se une una progresiva democratización de los instrumentos de control e inspección educativa que pasan de tener un carácter fiscalizador a un carácter de apoyo y asesoramiento (Cáceres, Hinojo y Aznar, 2007). Según Grilles *et al.* (1996, p. 28), dentro de una perspectiva constructivista, el cuaderno ha de ser:

- Un lugar donde el alumno pueda explicitar y contrastar sus ideas, tanto de forma individual como colectiva.
- Un espacio de reflexión y síntesis que sirva de base para reconstruir y estudiar los contenidos aprendidos.
- Un espacio donde se recojan las distintas etapas en el desarrollo de una actividad: primeras tentativas, aportaciones progresivas, puestas en común, discrepancias… Es decir, en el que se aprecie la riqueza y complejidad de la construcción de conocimientos.
- Una ocasión para que el alumno refleje sus impresiones sobre el trabajo en la clase y su reflexión sobre su propio aprendizaje (dudas, aclaraciones…)

- Un lugar para buscar información, relacionar contenidos, conectar con otros campos, preparar informes…

Todo ello está provocando una tendencia a que el alumno tenga una mayor libertad y autonomía al desarrollar y utilizar su cuaderno de matemáticas, sobre todo a partir de la escuela secundaria. Es decir, gana peso el cuaderno como herramienta posicionada dentro del *dominio privado* del estudiante (Fried & Amit, 2003). Las metodologías activas y con un peso mayor de la resolución de problemas hacen que no se concentre toda la importancia en el resultado final, sino también en el proceso de aprendizaje seguido por el alumno (Grilles *et al*., 1996). Además, este papel del cuaderno ayuda a que los estudiantes entiendan que la exploración y la reflexión es algo legítimo en matemáticas, y no malinterpreten la naturaleza de la asignatura (Fried & Amit, 2003).

La implantación y el seguimiento desigual de estas renovaciones metodológicas provocan que sea fácil encontrar clases en las que se utiliza el cuaderno como herramienta posicionada dentro de uno u otro dominio, público o privado. Sin embargo, existe una ausencia casi absoluta de trabajos de investigación centrados en los diferentes usos que pueden hacer los alumnos del cuaderno (Neubert y Schlindwein, 2014), especialmente en metodologías donde el cuaderno se sitúa en un dominio mayoritariamente privado, en el que el estudiante debe tomar decisiones importantes sobre cómo elaborar y utilizar esa herramienta en su proceso de aprendizaje.

Nuestro trabajo de investigación tiene como uno de sus principales objetivos el intentar superar esta carencia de investigaciones, buscando no sólo conocer cuáles son los modos en que los estudiantes elaboran y usan su cuaderno de matemáticas en el aprendizaje de las matemáticas, sino también conocer cuáles son las razones que justifican sus formas de proceder. No hemos encontrado ningún trabajo de investigación en matemáticas con este objetivo. El trabajo más cercano que hemos localizado es el de Mohr, Raisor y Thomas (2014), que estudian las diferentes maneras en que los alumnos, en este caso futuros maestros, desarrollan un cuaderno de observación científica como vehículo de aprendizaje en contextos de indagación. Estos autores hacen un análisis de tipo inductivo de los cuadernos, que les lleva a establecer tres tipos de alumnos según su contenido:

- Los *reflectores* (en inglés *reflectors*): aquellos que reflejan lo observado e intentan darle sentido y significatividad a través de su relación con experiencias previas y recuerdos del alumno.

- Los *preguntadores/pensadores* (en inglés *wonderers*): alumnos a los que la observación les inspira el planteamiento de listas de preguntas.

- Los *planificadores* (en inglés *planners*): aquellos que buscan la conexión de lo observado con el planteamiento de potenciales tareas futuras para el aula.

No obstante, estos autores señalan como una limitación de su trabajo el que no se haya preguntado a los alumnos por qué eligen desarrollar así sus cuadernos y cómo los conectan con su aprendizaje, algo sobre lo que nosotros sí que buscamos obtener información en nuestra investigación.

La posibilidad de que existan diferentes formas de elaborar y utilizar su cuaderno de matemáticas por los alumnos está íntimamente ligada a que los profesores así lo permitan y éstos no impongan una manera determinada de desarrollar y trabajar con el cuaderno en su metodología de aula. En este sentido, encontramos algunos trabajos de investigación, como el de Porras (1994) y et de Price *et al.* (1997), en los que se proponen formas concretas de organización y de trabajo en matemáticas que involucran al cuaderno. Estos métodos propuestos son seguidos por todo el alumnado en sus implementaciones. Este hecho limita que el cuaderno, como herramienta para el aprendizaje del alumno, pueda tener en cuenta la diversidad de los estilos de aprendizaje y de las necesidades existente en el alumnado, por lo que no nos parece la mejor manera de optimizar el aprovechamiento de dicha herramienta.

Otro aspecto polémico y que influye en la elaboración y el uso que hacen los alumnos del cuaderno es el de su consideración o no como un elemento a considerar en la evaluación del alumno y, en caso afirmativo, qué tipo de evaluación y cómo integrarlo en la misma. En el trabajo de Masingila *et al.* (1997) se describe un ejemplo de evaluación donde sí interviene el cuaderno, que es utilizado como herramienta de trabajo del alumno, después de los periodos de trabajo grupal, para contestar preguntas, realizar actividades y reflexionar sobre el proceso seguido. Estos tres autores utilizan tres criterios para evaluar los cuadernos de los alumnos: la compleción de las tareas requeridas, la precisión y justificación de las soluciones aportadas, y la profundidad y originalidad de las reflexiones realizadas.

Esa evaluación es de tipo sumativo. Fried y Amit (2003) señalan que la utilización del cuaderno como herramienta que forme parte de una evaluación sumativa del alumno hace que exista una presuposición del profesor sobre qué deben contener los cuadernos, lo que limita la libertad del alumnado y suele ir en detrimento del cuaderno como herramienta enmarcada dentro del *dominio privado.* Estos autores defienden el cuaderno como una herramienta para una autoevaluación del alumno compartida por el docente. Es decir, abogan por su utilización para una evaluación continua del alumno, donde se dé más importancia a los procesos seguidos en el aprendizaje y donde el profesor pueda apoyar o guiar al alumno en ese proceso de forma adecuada. Un uso del cuaderno en esos términos nos acerca a la idea de *portafolio reflexivo*, propuesta por Dias y Santos (2013) o, en términos más generales, a la idea de portafolio de aprendizaje en matemáticas (Sole, 2014), en el que el alumno muestra total o parcialmente el trabajo desarrollado en una asignatura. En este sentido, Dias y Santos (2013) hablan de la *evaluación regulada* que posibilitan estas herramientas, a través de tareas con amplios tiempos de entrega y posibilidad de reflexionar y rehacer los productos con la guía y monitorización del profesor. Éste puede detectar los puntos débiles o deficiencias y ofrecer un feedback adecuado a cada estudiante antes de la presentación final de la actividad. En este entorno, el profesor logra tener una idea más dinámica y completa del nivel de comprensión y del desarrollo matemático del estudiante que la que le ofrece una evaluación sumativa tradicional, convirtiéndose en un complemento para ésta (Burks, 2010; Sole, 2014). No obstante, el desarrollo de instrumentos de evaluación en estos entornos de evaluación regulada se convierte en un nuevo desafío para los docentes, así como el tiempo de trabajo mayor que, generalmente, estos exigen (Sole, 2014).

Nuestra amplia idea de cuaderno escolar como lugar en el que los estudiantes recogen el trabajo desarrollado en la asignatura confluye con esta idea de portafolio reflexivo si se implementa con una metodología docente en consecuencia, donde se requiera a los estudiantes la escritura, la reflexión y el ser conscientes del desarrollo de sus aprendizajes (Burks, 2010). En el caso de nuestra investigación, ninguno de los docentes participantes ha proporcionado pautas para la elaboración del cuaderno a sus alumnos ni ha considerado el cuaderno como una herramienta para la evaluación de sus alumnos. Es decir, los alumnos han tenido libertad para desarrollar el trabajo con sus cuadernos de matemáticas. Esto nos permitirá descubrir diferentes formas de elaborar y utilizar esta herramienta en el aprendizaje de las matemáticas, que pueden reflejar diferentes ideas y perspectivas de entre las que acabamos de reflejar, como puede ser un énfasis del alumno en el papel del cuaderno dentro un dominio público o privado, la mayor importancia al proceso de aprendizaje o a los resultados obtenidos, qué elementos del cuaderno consideran de mayor importancia y qué uso hacen de él para superar la asignatura. Además, el corpus de investigación es más numeroso que en investigaciones basadas en estudios de caso, un hecho que Gvirtz y Larrondo (2010) señalan como necesario en las investigaciones sobre cuadernos, puesto que facilita la detección de fenómenos significativos, la construcción de regularidades y el establecimiento de relaciones.

Relacionado tanto con el uso del cuaderno como con su papel para la evaluación de los alumnos aparece un tercer tema polémico, como es la autoría del cuaderno. Son frecuentes las discusiones en artículos de investigación sobre quiénes son los verdaderos autores de los cuadernos (Neubert y Schlindwein, 2014). No obstante, la idea de autoría, como bien indica Castillo (2010), depende de las circunstancias o condiciones que gobiernen la producción del mismo. En entornos en los que el cuaderno sea utilizado como una herramienta de control y de inspección, el cuaderno ofrece pocas posibilidades para la expresión de los alumnos (Faria, 1988, citado en Neubert y Schlindwein, 2014). Esto es lo que sucedía habitualmente durante los S. XIX y gran parte del S. XX, en el que el papel del cuaderno se reducía al de vehículo de transmisión y la autoría intelectual del mismo recaía en el profesor, en muchos casos representante de la ideología que se pretendía transmitir (Mahamud y Badanelli, 2007; Sanchidrián y Arias, 2013).

La desigual transición hacia entornos más constructivos de aprendizaje provoca que, en la actualidad, la respuesta a la pregunta sobre la autoría del cuaderno sea discrepante entre los investigadores. La investigación de Blochs (2009, 2012) es un exhaustivo trabajo en este sentido, en el que se estudia la dicotomía entre la concepción del cuaderno de matemáticas como una obra que refleja el trabajo desarrollado por el profesor en el aula o como un instrumento del que se apropia el estudiante para su aprendizaje a través de unos esquemas de uso personales asociados al mismo. Este autor centra su estudio en el análisis de varias aulas y en el llamado *cahier de cours*, el cuaderno en el que los alumnos suelen reflejar los contenidos teóricos en la escuela francesa. Debido a la restricción del estudio a este tipo de cuadernos, Blochs (2012, pp. 188-190) encuentra un estilo muy marcado de cada docente reflejado en los cuadernos de su aula, así como una baja personalización del cuaderno por parte de los alumnos. Estos hechos llevan al autor a plantear una clasificación de los cuadernos en tres categorías distintas según la participación de profesores y alumnos en su elaboración:

- Cuaderno como una *obra maestra del profesor*, que controla su forma y sus contenidos, que deben ser aprendidos memorísticamente por los alumnos.
- Cuaderno como una *obra efímera o instantánea del profesor*: la responsabilidad depende ampliamente del profesor, siendo el cuaderno y su

elaboración un fin en sí mismo, sin que el docente les incite ni oriente sobre cómo usarlo en su aprendizaje.

- Cuaderno *co-construido entre profesor y alumnos*, con una producción colectiva, en la que el alumno tiene una responsabilidad real, lo que ayuda a que el cuaderno se convierta en una herramienta para su aprendizaje.

Es posible que la restricción del estudio anterior a cuadernos de contenidos teóricos haya influido en las conclusiones obtenidas, aunque, incluso en esos casos, se descubren marcas de singularidad de cada alumno que evidencian posibles diferencias en el uso de los mismos (Oliveira, 2008, citado en Neubert y Schlindwein, 2014), y que se convierten en marcas de autoría de los alumnos. Un ejemplo de esas marcas de singularidad lo encontramos en el cuaderno de uno de los estudiantes participantes en la investigación de Blochs (2009, 2012), y se muestra en la Figura I.2:

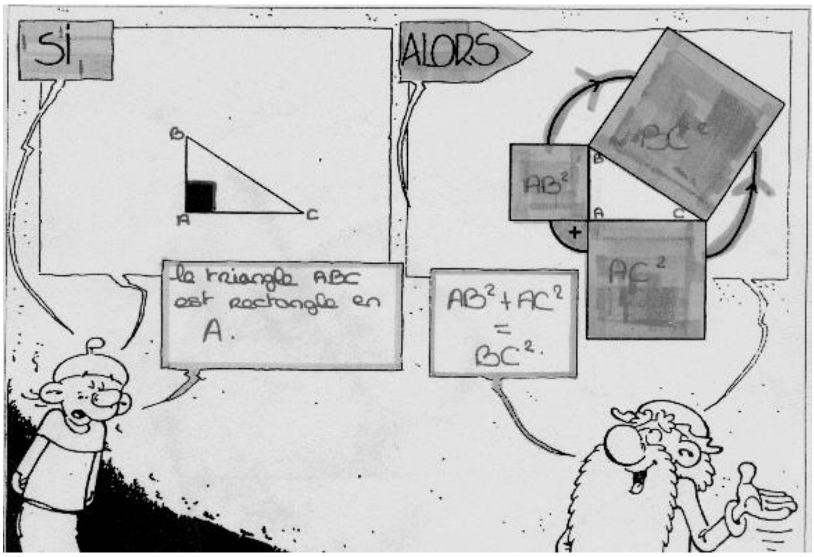


Figura I.2. Detalle del cuaderno de un estudiante con una marca de singularidad usual en el mismo (reproducido de Blochs, 2009, p. 136)

En esta figura, se observa el escaneo de un estudiante que embellece su registro sobre el teorema de Pitágoras a partir de los personajes utilizados en el libro de texto. Estos dibujos, que se encuentran usualmente durante todo el cuaderno de este estudiante en concreto, no sólo tienen una mera componente estética, sino que le ayudan a clarificar la estructura de los teoremas.

Gvirtz (1997) considera el cuaderno de clase como un material didáctico de autoría múltiple. Esta autora indica que es cierto que los elementos y actividades son registrados por los alumnos pero que, en muchos casos, y sobre todo en las referencias a los contenidos teóricos, el estilo de redacción que suele encontrarse revela la proveniencia de una autoría adulta (profesor, manuales). Por el contrario, la gran cantidad de elementos y de actores que influyen en el cuaderno llevan a Chartier (2002) a considerar el cuaderno como un "dispositivo sin autor".

En nuestro estudio tendremos presente estas ideas diversas sobre las diferentes autorías que pueden considerarse en el cuaderno de un alumno. Las marcas de autoría del alumno pueden diferir mucho de unos estudiantes a otros según la forma en que éstos elaboren y posteriormente utilicen su cuaderno. Tanto la idea sobre quién es el autor de este instrumento como la elaboración y uso que de él se hace están condicionados por las diferentes concepciones del cuaderno que tienen tanto profesores como alumnos. Santos (2002) realiza un estudio para intentar conocer cuáles son esas concepciones entre profesores y alumnos de la enseñanza primaria, a través de las funciones que cada grupo le atribuye. Las funciones más importantes que los docentes atribuyen al cuaderno son su papel como soporte para el desarrollo y registro de actividades, así como ser una herramienta de control y de comunicación entre el docente, el alumno y la familia. Con respecto a los alumnos, éstos creen que el cuaderno es un lugar destinado a la copia de saberes que deben aprender y a su ejercitación, siempre manteniendo una buena presentación en el mismo. Específicamente en matemáticas, el trabajo de Blochs (2009, 2012) aporta ideas interesantes como la dicotomía entre la concepción del cuaderno como una obra que recoge el trabajo del profesor o como un instrumento para el aprendizaje del alumno.

En nuestro trabajo, la realización de entrevistas a varios de los alumnos participantes nos permitirá conocer mejor cuáles son las concepciones del cuaderno de matemáticas que pueden encontrarse en estos alumnos, y la influencia que tienen las mismas tanto en la elaboración como en la utilización que hacen del instrumento.

I.2. ANTECEDENTES SOBRE LA TOMA DE APUNTES

Por las características de nuestra investigación y los contextos en los que la misma se ha desarrollado, consideramos de relevancia añadir un apartado en los antecedentes centrado en la toma de apuntes de los alumnos, al haber sido un proceso que se ha desarrollado y ha quedado plasmado en los cuadernos de los alumnos participantes[2].

[2] En el capítulo VII de esta memoria pueden encontrarse dos estudios particulares sobre toma de apuntes que han sido desarrollados en el marco de nuestra investigación.

En los niveles superiores de la enseñanza (bachillerato o nivel universitario) son aún persistentes y relativamente frecuentes las metodologías docentes basadas en clases de tipo expositivo para la presentación de la teoría (Godino, Contreras y Font, 2006). En estas metodologías, las clases se basan en una exposición oral del docente, que cuenta con la ayuda, generalmente, de la pizarra, de diapositivas de apoyo, material extraído de Internet o de otros posibles recursos específicos. La metodología docente en las clases teóricas de las aulas participantes en nuestra investigación ha sido precisamente de este tipo: exposiciones orales de los docentes de matemáticas, apoyadas en la utilización de una pizarra de tiza para la escritura de ciertos elementos.

Con estas metodologías, en los alumnos surge la necesidad de tomar apuntes cimentados en el desarrollo y en los contenidos de la sesión (Saint-Onge, 1997), un procedimiento de registro e instrumento de estudio que es más frecuente en niveles como la universidad (Monereo y Pérez Cabaní, 1996; Barberà, Castelló y Monereo, 2003; Espino, 2012). Esta actividad no suele gozar de una alta consideración por parte de profesores y alumnos (Barberà *et al.*, 2003). Sin embargo, para los alumnos significa la manera de crear un registro con la información presentada en la clase (Van Meter, Yokoi & Pressley, 1994), por lo que se convierte en una herramienta fundamental que sirve de base para su estudio (Rensaa, 2014).

No obstante, es evidente que este proceso no puede verse hoy en día con los mismos ojos con los que era visto hace unas pocas décadas. En la actualidad, el fenómeno de la globalización y la mayor facilidad de acceso a una diversidad de fuentes de comunicación y de conocimiento, gracias a Internet, hacen que cambie en parte la visión sobre este proceso (Gil, Ávila y Ferrer, 2011; Espino, 2012; Salgado-Horta y Maz-Machado, 2013), como explicaremos al final de este apartado.

En la literatura de investigación encontramos diferentes maneras de definir qué se entiende por "apuntes" y el proceso de toma de los mismos. En Espino (2012, p. 58) se hace una interesante revisión al respecto, indicando que "tradicionalmente, la mayoría de ellos han definido la toma de notas escritas como un instrumento de recogida de información que los estudiantes utilizan durante una exposición oral (o escrita)", añadiendo en otras ocasiones aspectos como el carácter personal y/o funcional. Encontramos otras definiciones de apuntes de clase como la de Hoffbeck y Walter (1987, citado en Saint-Onge, 1997), que indican que los apuntes de clase son una estructura que sirve de intermediario entre un producto sobre el que se trabaja (una conferencia, una exposición oral,…) y una producción que debe obtenerse a partir de él (examen, trabajo, informe,…). Nogueira (2005, p. 374) destaca otra definición: “género discursivo que somete a su productor a la tensión entre la fidelidad y la reducción de una fuente, oral o escrita”. Nuestra perspectiva sobre los apuntes coincide con la que manifiesta Espino (2012, p. 59), considerando el proceso de toma de apuntes como una *tarea híbrida*, donde se articulan simultáneamente no sólo capacidades asociadas a la escritura, sino también asociadas a la comprensión del discurso y a la lectura; residiendo la dificultad de esta compleja tarea en la necesidad de tener presentes y de articular todas estas capacidades. Bajo esta perspectiva, se entiende la toma de apuntes como una actividad compleja, relacionada con la comprensión de la información presentada y con un proceso de análisis y síntesis de la misma de alto nivel cognitivo (Hartley & Davies, 1978; Saint-Onge, 1997; Espino, 2012).

Monereo, Carretero, Castelló, Gómez y Pérez Cabaní (1999, p. 220-222) clasifican las investigaciones sobre toma de apuntes en tres grupos, según su foco de interés:

- Estudios centrados en la enseñanza de habilidades para la toma de apuntes de los alumnos.
- Estudios centrados en la toma de apuntes desarrollada en función de los diferentes contextos y de las estrategias de enseñanza-aprendizaje seguidas por profesor y alumnos.
- Estudios centrados en las percepciones que tienen los estudiantes sobre la toma de apuntes y el modo en que estas percepciones condicionan la toma de decisiones al respecto.

Utilizaremos como base esta clasificación para el desarrollo del apartado, pero modificaremos el orden de presentación de los tres grupos, adaptando un orden que consideramos más adecuado para el desarrollo del estudio de antecedentes que hemos realizado y las ideas principales que hemos encontrado en él.

En un primer subapartado comentaremos varios estudios del tercer grupo de investigaciones: percepciones de los alumnos, y también de los docentes, sobre la toma de apuntes y el modo en que éstas condicionan las decisiones adoptadas. Seguidamente, en el subapartado segundo, resumiremos las ideas extraídas de varios estudios sobre el proceso de toma de apuntes en diferentes contextos de enseñanza y aprendizaje. En el tercer subapartado estará centrado en estudios sobre la enseñanza de habilidades de toma de apuntes a los alumnos y varias consideraciones al respecto. Finalizaremos con un cuarto subapartado en el que se reflexiona sobre el proceso de toma de apuntes en el contexto actual.

I.2.1. CONCEPCIONES SOBRE LA TOMA DE APUNTES

En este primer apartado explicaremos los resultados e ideas extraídas de varias investigaciones cuyo objetivo era un mejor conocimiento sobre las concepciones que tienen los estudiantes acerca de la toma de notas, cómo se describen a sí mismos los estudiantes ante la realización de esta tarea y de qué manera afectan esas concepciones a la toma de decisiones del alumno asociadas a este proceso.

Dado que los estudiantes utilizan estos procesos de toma de apuntes a lo largo de diferentes cursos, es razonable que los estudiantes desarrollen teorías sobre la toma de notas (Van Meter *et al.*, 1994), para ser capaces de decidir cómo, cuándo y por qué tomar notas, y cómo usar estas notas (Diaper, 1989; Meyer & Booker, 1991; Scott, Clayton & Gibson, 1991; todos ellos citados en Van Meter *et al.,* 1994). No obstante, otros autores como Monereo *et al.* (1999) tienen dudas de que esas decisiones respondan a criterios conscientes e intencionales. De una forma u otra, es indudable que estas teorías o percepciones que tienen los estudiantes influyen en los objetivos que ellos establecen para este proceso y en las estrategias que utilizan, por lo que es importante el estudio de las mismas (Castelló, 1999). En este apartado se presenta un resumen discursivo de antecedentes en ese sentido.

Hemos encontrado dos tipos de estudios en relación a la percepción que tienen los alumnos de la toma de notas y el modo en que se describen a sí mismos al realizar esta tarea. Por una parte, existen estudios que únicamente recurren a cuestionarios y/o entrevistas para obtener esa información (Van Meter *et al.*, 1994; Castelló, 1999; Badger, White, Sutherland & Haggis, 2001; Teng, 2011). Por otra parte, hay estudios que combinan lo anterior con el estudio empírico del propio proceso de toma de apuntes llevado a cabo por los estudiantes en situaciones concretas de enseñanza-aprendizaje (Monereo *et al.*, 1999; Guasch y Castelló, 2002; Espino, 2012).

Al preguntar a los estudiantes sobre cuáles son las razones que les llevan a tomar notas, las investigaciones muestran la presencia de dos bloques de respuestas claramente diferenciados: las razones asociadas al propio proceso de toma de notas y las razones ligadas al producto resultante de esa toma (Hartley & Davies, 1978; Badger *et al.*, 2001). Estos dos bloques de razones coinciden con las dos funciones generales que los investigadores han atribuido a la toma de apuntes: la de codificación de la información y la de almacenamiento externo de la misma (Teng, 2011), por lo que los estudiantes parecen entender las dos principales funciones de la toma de apuntes (Kiewra, 1987). Según cuál sea la función que un investigador considere preponderante, existen dos hipótesis sobre la toma de apuntes: la hipótesis de codificación, que da más importancia al proceso de elaboración de las notas, y la hipótesis de almacenamiento, que da mayor trascendencia a la revisión posterior de las notas recogidas. Una revisión de investigaciones en ambos sentidos es recogida en Monereo y Pérez Cabaní (1996, p. 67-70). Entre los estudiantes suele preponderar la hipótesis de almacenamiento, puesto que habitualmente conceden más importancia o señalan más razones asociadas al producto resultante de la toma de apuntes que al propio proceso (Badger *et al*., 2001; Guasch y Castelló, 2002), al contrario de lo que sucede al preguntar entre los docentes (Guasch y Castelló, 2002). La Tabla I.1 presenta varias razones de los estudiantes que se centran en el propio proceso.

RAZONES ASOCIADAS AL PROPIO PROCESO DE TOMA DE APUNTES
Ayuda a mantener la concentración y la atención en la clase
Facilita organizar el contenido presentado, discernir su estructura subyacente, y detectar y comprender mejor los aspectos más importantes o difíciles
Es una oportunidad para parafrasear y elaborar la información presentada, lo que facilita su comprensión y recuerdo

Tabla I.1. Razones de los alumnos para tomar apuntes asociadas al propio proceso[3]

La última razón de la Tabla I.1 también es muy enfatizada por los docentes en sus concepciones sobre la toma de apuntes (Guasch y Castelló, 2002), viendo la toma de apuntes como una herramienta para sintetizar, estructurar y elaborar de modo personal la información, y servir para desarrollar un aprendizaje más significativo. No obstante, este proceso no tiene por qué producirse durante el propio proceso de toma de apuntes, sino también posteriormente (Carter & Van Matre, 1975, citados en Monereo y Pérez Cabaní, 1996).

La Tabla I.2 muestra las razones de los alumnos para tomar notas que están relacionados con el producto resultante de dicha toma.

[3] Obtenido de los trabajos de Hartley y Davies (1978), Van Meter *et al*. (1994), Castelló (1999), Badger *et al.* (2001) y Teng (2011).

RAZONES ASOCIADAS AL PRODUCTO RESULTANTE DE LA TOMA DE APUNTES
"Memoria externa" para poder recordar la clase y la información recogida durante la misma, y poder revisar dicha información
Documento que sirve de ayuda para el estudio y la preparación de exámenes y tareas
Los apuntes generados son una muestra que evidencia ante el profesor el esfuerzo de los estudiantes

Tabla I.2. Razones de los alumnos para tomar apuntes asociadas al producto resultante de dicha toma[4]

Además de los dos bloques de razones anteriores, la investigación de Teng (2011) detecta una razón novedosa: la toma de apuntes permite a los alumnos aumentar su seguridad y confianza. Puede que esta razón sea más propicia en el contexto específico del estudio (toma de notas en una lengua no materna para los estudiantes) y responda a ese aspecto idiomático.

Una vez reseñadas cuáles son las razones que argumentan los estudiantes para justificar la toma de apuntes, pasamos a explicar qué resultados muestran las investigaciones sobre las percepciones y el modo en que los alumnos se describen a sí mismos como tomadores de apuntes, en relación a qué anotan, cómo, qué variables influyen en ellos en el momento de realizar esa anotación, y qué tratamiento y uso posterior de las notas tomadas realizan.

Al preguntar a los estudiantes sobre qué deciden anotar al tomar apuntes, Badger *et al.* (2001) muestran la existencia de dos tipos de respuestas: un grupo de alumnos dice anotar todo aquello que puede, mientras que otra parte indica que anota aquello que considera como "clave" o de mayor importancia. Sin embargo, los estudiantes que ofrecen respuestas similares a esta segunda opción tienen dificultades para concretar qué es lo que consideran importante o más relevante (Guasch y Castelló, 2002). Generalmente, la marca de importancia más habitual que explicitan es el mayor énfasis del docente o el modo de exposición utilizado, siendo preponderantes los elementos escritos en la pizarra, en diapositivas o en el plan de estudios de la asignatura (Van Meter *et al*., 1994; Guasch y Castelló, 2002). Los alumnos también agradecen la ayuda que supone el conocimiento del esqueleto organizador de la

[4] Obtenido de los trabajos de Hartley y Davies (1978), Van Meter *et al*. (1994), Castelló (1999), Badger *et al.* (2001) y Teng (2011).

sesión de clase para poder detectar cuáles van a ser los elementos más relevantes (Badger *et al.,* 2001).

Además, existe otra diferenciación importante. Hay alumnos que reconocen tomar notas de manera literal, mientras que otros dicen hacerlo de manera personalizada, a través del parafraseo (es decir, la explicación e interpretación de un modo más claro o inteligible del discurso del profesor) y la elaboración de la información presentada (Van Meter et al., 1994; Guasch y Castelló, 2002).

Las dicotomías anteriores también se aprecian en los estudios que analizan cómo son los apuntes tomados por los alumnos, que se detallan en el subapartado siguiente, I.2.2. Un ejemplo es el de Monereo *et al.* (1999), distingue dos perfiles de estudiantes: los estudiantes *copistas* (que se correspondería con los que intentan tomar todo lo que pueden de forma literal) y los *estratégicos* (aquellos que son selectivos en su anotación, con decisiones que dependen de las variables contextuales que se presenten). Las entrevistas posteriores que estos autores hicieron a los alumnos participantes mostraron que los estudiantes *estratégicos* dicen estar mucho más influidos por variables externas (o “factores de contexto”, como los denominan Van Meter *et al*., 1994), mientras que los alumnos *copistas* intentan imponer siempre su estilo automático de anotación.

A continuación desglosamos cuáles son esos “factores de contexto” o esas variables propias del contexto de enseñanza-aprendizaje que los alumnos dicen tener más en cuenta para tomar decisiones acerca de su procedimiento de anotación, y que se toman de Monereo *et al.* (1999, p. 232) y de Van Meter *et al.* (1994, pp. 328-330):

- El tipo de evaluación o de demandas de la asignatura: Se registra más información si la evaluación es una prueba escrita que si se hace a través de un trabajo o un proyecto. Además, la anotación desarrollada es más literal si el profesor manifiesta su preferencia por la reproducción en las pruebas de evaluación de la información presentada en las clases, lo cual es coherente con la menor transformación necesaria entre el producto suministrado por el profesor y el pedido en la evaluación (Saint-Onge, 1997).

- Existencia de libros o de otro tipo de documentación de referencia diferente de los apuntes: esta situación provoca una menor anotación y más selectiva.

- Estilo de exposición docente: Los alumnos indican la existencia de unas “condiciones fáciles” de anotación frente a unas “condiciones difíciles”, según las características de la exposición docente. Las "condiciones fáciles" se caracterizan por la explicitación de la estructuración, los puntos principales de la sesión y pistas sobre la información relevante, una alta organización y claridad, y un ritmo adaptado a la dificultad. En estas condiciones, los alumnos pueden seguir sus métodos de anotación preferidos, aumentando generalmente la literalidad del contenido. En presencia de "condiciones difíciles", como son la ausencia de información sobre la estructura de la sesión, la falta de organización, la combinación de diferentes fuentes de información en la exposición y un ritmo rápido, los alumnos tienden a realizar una mayor personalización, parafraseo y elaboración de la información que toman, al resultar más complicada la anotación literal.

- La naturaleza del contenido: En las clases de tipo práctico, la anotación es mucho menor y más selectiva que en las de tipo teórico. Además, ante contenidos basados en hechos, la anotación tiene un carácter mucho más literal (los alumnos ponen ejemplos como matemáticas, biología o historia). Cuando los contenidos se basan en la presentación de ideas y conceptos (filosofía, ciencias humanísticas o sociales) aumenta la utilización del parafraseo y de la elaboración de la información durante su anotación.

- La importancia de la asignatura, siendo mayor la anotación en asignaturas troncales u obligatorias, y menor en las optativas.

- Los conocimientos e interés de los alumnos sobre el tema tratado: En aquellos casos en los que los conocimientos previos del alumno sobre el tema tratado son altos, la anotación tiende a ser más selectiva, centrándose en "lo nuevo". Cuando los temas son menos conocidos o más difíciles para el alumno, la anotación tiende a ser más literal y lo más exhaustiva posible. Este último comportamiento también se repite ante temas que despiertan un mayor interés o curiosidad en el alumno.

Como podemos observar, dentro de estas variables los alumnos destacan la diferente naturaleza del contenido como una variable que tienen en cuenta al desarrollar la toma de apuntes. Sin embargo, no hemos encontrado apenas estudios sobre toma de apuntes en los que la materia impartida se considere realmente como una variable de investigación. La mayoría de estudios se circunscriben a ámbitos psicológicos y pedagógicos, sin que parezca considerarse la naturaleza del contenido presentado como algo relevante. En particular, tan sólo hemos encontrado dos estudios que buscan analizar cómo son las notas tomadas por los estudiantes en clases de matemáticas (Mercado, 2003; Rensaa, 2014), que se comentan en el subapartado I.2.2

La tesis doctoral de Espino (2012), además de preguntar a los estudiantes universitarios sobre qué y cómo toman apuntes, relaciona sus respuestas con los enfoques de aprendizaje que manifiestan los alumnos en un cuestionario. La autora considera dos enfoques principales de aprendizaje: profundo (alumno que manifiesta querer comprender los contenidos, que los reflexiona, cuestiona, intenta conectarlos con otros y busca ir más allá en su conocimiento) frente a superficial (alumno que busca memorizar los contenidos y cumplir con los mínimos que se le requieren en cada tarea). Esta investigadora obtiene que la mayoría de alumnos se describen a sí mismos como anotadores selectivos en relación a la información que recogen, y que lo hacen de forma personalizada. Esto sucede especialmente en los alumnos que muestran un enfoque de aprendizaje profundo. En los alumnos con un enfoque de aprendizaje superficial se combinan los estudiantes que dicen tomar apuntes de forma selectiva y personalizada, con los que se dicen recoger todo y de forma literal.

Es esperable que estas concepciones sobre la toma de apuntes puedan evolucionar y se modifiquen a lo largo de los años de escolarización del alumno. Así lo indican los alumnos participantes en el estudio de Van Meter *et al.* (1994), que mayoritariamente indican un aumento en la responsabilidad al realizar la toma de notas, siendo ésta cada vez más organizada, selectiva y precisa. Esto encaja con los resultados obtenidos por Guasch y Castelló (2002) con alumnos de 3º de ESO, de poca experiencia en esta tarea, donde la mayoría de los alumnos se describen a sí mismos como literales y buscando simplemente recoger información para su posterior estudio. Sin embargo, esa evolución choca con el resultado obtenido por Castelló (1999) en su estudio con alumnos de 1º ESO, 4º ESO y alumnos universitarios. Mientras que los alumnos de 1º ESO ven la toma de notas como un instrumento para generar y transformar su conocimiento y para mejorar su comprensión, los alumnos universitarios lo ven como una mera actividad para fijar y almacenar información y mejorar su recuerdo. Puede que esta visión esté influenciada por la metodología universitaria, mayoritariamente expositiva, por una mayor rutina, habituación o estrés por la realización de esta tarea, o por la presencia de sistemas de evaluación con pruebas basadas, en muchos casos, en la reproducción de la información.

En relación con el tratamiento que los alumnos dicen realizar de las notas que toman, se ponen de manifiesto diferentes acciones. Existen alumnos que no realizan ninguna revisión ni tratamiento de las notas tomadas hasta su utilización en las pruebas de evaluación, a través de su relectura (acción más usual) o mero "recopiado" de los apuntes (Van Meter *et al.*, 1994; Badger *et al.*, 2001; Guasch y Castelló, 2002; Espino, 2012). Otros estudiantes reescriben sus apuntes con acciones que conllevan una elaboración simple, como el subrayado o el parafraseo de algunas partes que entienden peor o, incluso, la supresión de estas partes más confusas (Van Meter *et al.*, 1994). Por último, hay alumnos que explicitan labores asociadas a una transformación y elaboración más compleja del material anotado, recurriendo a la ampliación de los apuntes, añadiendo e integrando información nueva o que aclare aquellos aspectos que juzgan como más débiles en la exposición o en sus notas, o a la realización de resúmenes, esquemas o mapas conceptuales a partir de la información tomada (Espino, 2012). Todos estos tratamientos, de diferente profundidad, tienen como objetivo fundamental la utilización de los apuntes en la preparación de tareas o de pruebas de evaluación (Van Meter *et al.*, 1994), especialmente en el estudio de exámenes frente a la realización de trabajos o informes (Espino, 2012), y sobre todo cuando las notas se han tomado en lo que Van Meter *et al.* (1994) llamaban "condiciones fáciles"[5] de anotación. Estos mismos autores detectan que, cuando las notas han sido tomadas en "condiciones difíciles"[5], los alumnos dicen apoyarse mucho más en otros medios que las complementen, como los libros de texto, el apoyo de profesores particulares o, sobre todo, las discusiones entre compañeros.

I.2.2. LA TOMA DE APUNTES EN DIFERENTES SITUACIONES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

En este subapartado vamos a hacer una revisión de estudios que han analizado cómo son realmente las notas tomadas por los alumnos en diferentes situaciones de enseñanza-aprendizaje. Gil *et al.* (2011) indican que la toma de notas, más allá de su consideración habitual como actividad reproductiva, "implica la puesta en marcha de procesos de comprensión y composición escrita que hacen de ella una fuente importante de diferencias individuales" (p. 451). Por tanto, este tipo de investigaciones, en palabras de Monereo y Pérez Cabaní (1996), permiten "la comprobación empírica de las diferencias individuales en el proceso de elaboración y estructuración de la información durante la toma y/o la revisión de los apuntes" (p. 70) y conocer "la influencia de las estrategias de enseñanza del profesor en la toma de apuntes de sus estudiantes y, en definitiva, la calidad del aprendizaje que se obtiene" (p. 70). Los resultados nos muestran que los alumnos no siempre hacen en la realidad lo que dicen hacer cuando se les pregunta sobre ello (Espino, 2012), evidenciándose una

[5] Esas condiciones se han expuesto previamente en este mismo subapartado.

influencia importante de la situación concreta. Recogemos en este subapartado varias investigaciones, en diferentes contextos, que pretenden mostrar una visión global sobre los comportamientos reales de los estudiantes al tomar apuntes.

En su revisión sobre investigaciones acerca de la toma de apuntes, Hartley y Davies (1978) alertaron de la falta de estudios con esta intención. Sin embargo, sí que son abundantes las investigaciones de este tipo realizadas en las últimas dos décadas. Las más usuales son las desarrolladas con alumnado universitario, en las que el foco está en el comportamiento de los alumnos, aunque se tengan en cuenta las características de la docencia como ayuda para interpretar los resultados. Estudios de este tipo son los de Espino (2012), Monereo *et al.* (1999) y Nogueira (2005). Otros dos estudios, en niveles inferiores, son los de Guasch y Castelló (2002, en 3º ESO) y Mercado (2003). Este último se desarrolla en 4º de ESO y en la asignatura de matemáticas, por lo que es más próximo a nuestro trabajo.

Además, existen otros estudios en los que el foco también está centrado en cómo son las notas tomadas por los estudiantes, pero con importantes diferencias contextuales o en el tipo de estudio desarrollado. Rensaa (2014) lleva a cabo un estudio de caso en el que se relacionan las notas tomadas por una alumna en clases universitarias de matemáticas con el tipo de aprendizaje que muestra en las pruebas de evaluación. Por otro lado, el trabajo de Gil *et al.* (2011) hace un análisis de las notas tomadas por los alumnos en una lectura múltiple de documentos online sobre un tema (en este caso, resistencia bacteriana) antes de tener que escribir un ensayo sobre ese tema para el que sólo cuentan con el apoyo de esas notas tomadas en la lectura múltiple. Por último, existen investigaciones situadas a medio camino entre el análisis de las notas tomadas y la mejora de los procedimientos de toma de notas. Una de ellas es la de Monereo y Pérez Cabaní (1996), que contrastan el seguimiento de diferentes estrategias expositivas, y estrategias de toma de apuntes en docentes y alumnos, respectivamente, en comparación con el nivel de aprendizaje desarrollado por cada binomio de estrategias docente-alumno. Otra investigación es la de Barberà *et al.* (2003), en la que se introduce un sistema de orientación y retroalimentación del aprendizaje de cada alumno a través del análisis de las notas que elabora.

Generalmente, el análisis de los apuntes recogidos por cada alumno se hace fijando una unidad base de análisis, que puede ser una frase, una *unidad de información* o una *unidad temática*. En este sentido, las categorías utilizadas por Monereo *et al.* (1999, p. 225) han sido de utilidad en estudios posteriores (Guasch y Castelló, 2002;

Espino, 2012). Estos autores clasifican los apuntes en tres tipos, según sea el porcentaje de unidades de información y de unidades temáticas registradas:

- *Exhaustivos*: Aquellos alumnos que recogen al menos un 65% de las unidades de información de las que consta la clase.
- *Selectivos*: Estudiantes que recogen menos del 65% de las unidades de información de la clase pero sí registran todas sus unidades temáticas.
- *Incompletos*: Alumnos que recogen menos del 65% de las unidades de información y, además, no registran alguna de las unidades temáticas.

Además, Monereo *et al.* (1999) realizan una distinción entre apuntes *literales* (si hay un porcentaje mayor del 65% de unidades informativas que son recogidas con las mismas palabras o frases utilizadas por el docente) y apuntes *personalizados* (si más del 35% de las unidades informativas contiene expresiones y recursos personales).

El estudio de Gil *et al.* (2011, p. 455-456) contiene otro método diferente de análisis de las notas. Algunas partes del mismo son similares a las de Monereo *et al.* (1999), como es la consideración de notas literales y transformadas dentro de la dimensión “transformación de las notas”. Pero también contiene otras ideas interesantes, como la distinción entre notas añadidas o notas insertadas (según éstas se agreguen de forma lineal o, por el contrario, la inclusión de una nota provoque la reestructuración de lo anteriormente registrado) y la consideración de la presencia o no de relaciones entre los diferentes elementos presentes o con los conocimientos previos del estudiante.

Monereo *et al.* (1999), utilizando las categorías antes comentadas, llegan al establecimiento de dos grandes perfiles en el alumnado universitario, según cómo sean las notas que éstos tomen. Estos dos perfiles, ya comentados brevemente en el subapartado I.2.1, son los de *copistas* y *estratégicos*:

- Alumnos *copistas*: Son aquellos que buscan reproducir y “grabar” fielmente la información, a modo de “memoria externa”, anotando todo lo posible para su estudio posterior. La anotación de estos alumnos es literal y exhaustiva o incompleta.
- Alumnos *estratégicos*: Estudiantes que tratan de identificar y de seleccionar las ideas que constituyen la estructura del tema desde el punto de vista del docente. Estas anotaciones suelen ser de tipo personalizado y selectivo o incompleto, sirviendo de guía para el recuerdo de la clase.

Como ya se indicó en el anterior subapartado, las entrevistas realizadas a alumnos de ambos grupos pusieron de manifiesto la diferente influencia que tienen las variables externas en los alumnos de ambos perfiles. Los alumnos *copistas* suelen imponer su estilo de anotación sin verse influidos por las variables contextuales. Por el contrario, los alumnos *estratégicos* sí que tienen muy presentes dichas variables, tomando decisiones sobre cómo realizar la anotación en función de las mismas[6].

Una clasificación similar a la anterior es establecida por Saint-Onge (1997), que diferencia entre una toma de apuntes *literal* o *modular*. En la primera, el alumno tiende a reflejar lo presentado por el docente con fidelidad y semejanza, y de una forma lineal; en la segunda la toma es más dinámica, existiendo una organización y un tratamiento de las ideas presentadas. Así, la existencia de esta dicotomía es indicada por varias investigaciones, aunque no se profundice en la búsqueda de diferentes matices dentro de cada gran grupo o en la influencia que pueda tener el contenido presentado para que el alumno, con su comportamiento, se sitúe en uno u otro lugar.

Nos basaremos en las categorías y perfiles utilizados por Monereo *et al.* (1999) para presentar los principales resultados obtenidos en investigaciones que analizan las notas tomadas por los alumnos. Un número importante de estudios (Guasch y Castelló, 2002; Nogueira, 2005; Espino, 2012) muestra que gran parte de los alumnos opta por realizar una toma de apuntes mayoritariamente *literal*, intentando recoger los contenidos presentados en la clase tal y como son expuestos. Es decir, existe un número apreciable de estudiantes que, en la práctica, conciben este tipo de clases expositivas como un “dictado”. Sin embargo, la imposibilidad de copiar todo lo presentado (salvo si, efectivamente, el profesor está realizando un dictando con un ritmo adecuado para su transcripción) lleva a los alumnos a cometer muchos errores de transcripción (Nogueira, 2005), y unos registros que resultan incompletos, especialmente si no se está desarrollando una comprensión suficiente acerca de los elementos registrados (Rensaa, 2014). El estudio de Gil *et al.* (2011) ha mostrado cómo estas anotaciones con un carácter esencialmente literal son también mayoritarias en tareas donde los alumnos tienen que construir ensayos a partir de las anotaciones tomadas durante la lectura múltiple de documentos de una misma temática. En todos estos casos, el procesamiento y la elaboración que realiza el alumno de la información recibida es muy reducido o inexistente.

Además, la mayoría de alumnos también suelen tomar apuntes que son catalogados como *selectivos* o *incompletos*. Este hecho, en gran medida, está motivado por los

[6] Las variables y decisiones están recogidas en el subapartado anterior, I.2.1.

problemas para identificar y discernir las ideas de mayor importancia en una sesión o en un pasaje de clase, o sus objetivos (Kiewra, 1987; Guasch y Castelló, 2002). Otro motivo es la gran dificultad que muestran los alumnos para integrar diferentes fuentes de información que son presentadas de forma simultánea en un aula (Hartley & Davies, 1978; Nogueira, 2005; Espino, 2012). Esas fuentes simultáneas suelen ser el discurso oral del docente combinado con el uso de la pizarra, de diapositivas, o de otros recursos (digitales o en línea). El estudio de Guasch y Castelló (2002), con estudiantes de 3º de ESO, ha evidenciado que la mayoría de alumnos omite anotar los objetivos de las sesiones, y sus apuntes se reducen a la copia de los esquemas que el docente ha realizado en la pizarra durante su exposición oral. Algo parecido sucede en varias de las clases universitarias examinadas por Nogueira (2005), en las que existe una integración prácticamente nula del discurso oral del docente en los apuntes tomados por los alumnos. En ambos casos, los alumnos han considerado a la pizarra como medio que recoge la información más relevante sobre el contenido, algo que también indica Rensaa (2014). La investigación de Espino (2012) muestra un efecto similar con las diapositivas frente al discurso oral del docente, un hecho ya detectado por Stefanou, Hoffman y Vielee (2008, citado en Espino, 2012).

Aunque muchas de estas investigaciones no tienen en cuenta la variable asociada al tipo de contenido tratado, este hecho puede tener influencia. El trabajo de Rensaa (2014) se basa en un estudio de caso en el que se analizan los apuntes de una alumna y su aprendizaje en la asignatura de matemáticas, por lo que su contenido es más próximo a nuestro trabajo. Esta autora encontró que, en el tema en el que los conceptos teóricos fueron presentados a través de diapositivas (que fueron después proporcionadas a los alumnos) y los ejemplos fueron desarrollados en la pizarra, las notas de la alumna se redujeron a la toma de los ejemplos tratados en la clase, sin que éstos se integren en sus apuntes con la teoría de las diapositivas. En las tareas de evaluación, la alumna recurría a reproducir los ejemplos recogidos en sus notas (quizá porque era el instrumento que utilizaba para su estudio, o porque tenía un mejor recuerdo de las mismas al ser elaboradas personalmente, como defiende Kiewra, 1987), mostrando una *concepción operacional* de las matemáticas[7] (Sfard, 1991), al intentar conectar todos los conceptos con procedimientos prácticos o con la solución de tareas asociadas a él.

Nogueira (2005) ha mostrado un uso de la pizarra que ha provocado una mayor integración del discurso oral del docente en los apuntes de los estudiantes: su

[7] En el apartado I.4.2 de esta memoria se explica esta concepción.

utilización para registrar, al inicio de la sesión, la estructura y la organización de la misma y sus ideas principales. Este uso como organizador de la sesión, que evita además la simultaneidad de la misma con el discurso oral, ha conseguido una mayor integración de las fuentes, y el desarrollo de unos apuntes más elaborados y personalizados en la mayoría de los estudiantes. Esto concuerda con las percepciones de los estudiantes, que agradecían disponer del esqueleto u organizador de la sesión con anterioridad a su desarrollo como ayuda al proceso de toma de apuntes (Badger *et al*., 2001), y que se muestra en Nogueira (2005) como un hecho real.

Sin embargo, esta última autora también alerta de la dificultad que tienen muchos estudiantes para relacionar y conectar de manera adecuada las diferentes unidades de las que constan sus notas. Generalmente se registran las notas de modo aditivo (una tras otra, por orden cronológico), y se recurre a la yuxtaposición de frases o a su unión a través de conjunciones copulativas. Así, existen problemas para reflejar la jerarquía entre las diferentes frases o significados condicionales, adversativos, negativos o potenciales. La autora justifica esta problemática en la dificultad de los alumnos para desarrollar una comprensión de textos, especialmente si son de tipo explicativo o argumentativo. Quizá por ello los alumnos manifiestan la utilidad, incluso la necesidad, de información sobre la estructuración y organización de la sesión y la presencia de "marcas de importancia" para enfatizar los elementos fundamentales (Van Meter *et al.*, 1994; Badger *et al.*, 2001), ante su dificultad para detectarlos (Kiewra, 1987).

El único estudio que hemos encontrado en el que se analizan cómo son los apuntes tomados por un grupo de alumnos en matemáticas es la experiencia llevada a cabo por Mercado (2003). Este se llevó a cabo en un contexto de resolución de problemas (diferente a los contextos expositivos habituales), en particular, durante la corrección en el aula por un alumno de un problema planteado como tarea para casa. Aunque la investigación se produce en un contexto a pequeña escala, en una clase de 4º de ESO, la experiencia muestra una amplia diversidad en las anotaciones:

- Alumnos que sólo copian el sistema de ecuaciones obtenido en el problema y su resolución.
- Estudiantes que mezclan su intento de resolución del problema con la copia de la solución de pizarra, sin señalar los errores cometidos y de una forma desordenada.

- Alumnos que se apoyan en gráficos o explicaciones personales para aclarar sus dudas, explicar sus dificultades o intentar que el problema sea más significativo para ellos.

El contexto de este estudio es el más próximo a nuestra investigación.

Habitualmente, el objetivo de los estudios que analizan cómo son las notas tomadas por los estudiantes no es el propio análisis en sí mismo, sino también contrastar éstas con el aprendizaje posteriormente logrado. En general, existe un amplio consenso en las investigaciones de que el desarrollo de unas notas de tipo personalizado, elaboradas o transformadas por el propio alumno, dan lugar a un aprendizaje más profundo, de mayor calidad y que reporta un mejor rendimiento académico al existir un mayor procesamiento de la información recibida (Kiewra, 1987; Kiewra, Dubois, Christian, McShane, Meyerhoffer & Roskelley, 1991; Saint-Onge, 1997; Gil *et al*., 2011). Además, tanto el proceso seguido como el tipo de aprendizaje logrado les supondrán una mejor preparación para la vida laboral y para la sociedad de la información actual (Monereo *et al.,* 1999). No obstante, Saint-Onge (1997) alerta de que ese procesamiento es eficaz siempre y cuando exista cierto conocimiento y comprensión de la información con la que se está tratando.

Por tanto, el tipo de notas desarrollado tiene una influencia importante en el aprendizaje del estudiante y en su desempeño académico. Pero también los modos en que los estudiantes utilizan sus notas. Espino (2012) pone también el énfasis en esta utilización, detectando dos tipos diferentes de uso entre el alumnado participante:

- Un uso *constructivo/estratégico* de las notas, en las que el estudiante lleva a cabo procesos de conformidad del contenido de los apuntes y de reelaboración de los mismos una vez recogidos (parafraseo, subrayado, elaboración de resúmenes o esquemas). Este uso suele estar asociado a alumnos con un enfoque de aprendizaje profundo[8], y con altos resultados académicos.

- Un uso *reproductivo/mecánico* de las notas, basado en procesos automáticos de lectura de los apuntes tomados, generalmente de tipo literal. Este uso suele asociarse a estudiantes con un enfoque de aprendizaje superficial[8], memorístico, y que suelen obtener bajos resultados académicos.

Así, se pone de manifiesto la influencia de las dos funciones principales de la toma de apuntes en el aprendizaje conseguido: tanto el grado de personalización y de

---

[8] Término utilizado por la autora que se explica en el subapartado anterior, I.2.1.

transformación seguido por el alumno al realizar las anotaciones (es decir, durante el proceso de codificación) como la utilización que se haga de esas notas tomadas, que contienen información necesaria para el estudio o para el desarrollo de tareas de evaluación. La variable asociada al tipo de utilización y el tratamiento posterior de las notas es especialmente importante si el lapso de tiempo entre el momento en que se produce la toma de apuntes y el momento en que se recurre a ellas para el desarrollo de tareas de evaluación es grande (Kiewra, 1987).

Para finalizar este subapartado, nos referiremos a dos estudios que consideramos a medio camino entre estudios en los que se analiza el modo en que los alumnos toman apuntes y el desarrollo de estrategias encaminadas a mejorar este proceso en los alumnos (aspecto que ampliaremos en el siguiente subapartado). Son los estudios de Monereo y Pérez Cabaní (1996) y de Barberà *et al.* (2003).

El estudio de Monereo y Pérez Cabaní (1996) pone el foco en el binomio enseñanza-aprendizaje en relación a la toma de apuntes en un ámbito universitario. Los autores plantean un estudio muy completo en el que se busca conocer qué asociaciones de estrategias docentes utilizadas en la exposición en clases teóricas y de estrategias de toma de apuntes utilizadas por los alumnos dan lugar a aprendizajes más significativos y de mayor calidad.

En este estudio participan cuatro clases donde cada docente utiliza una estrategia de enseñanza distinta: presentación del contenido a través de mapas conceptuales, uso de pausas expositivas durante la exposición para desarrollar la toma de notas, planteamiento de preguntas previas a la exposición que se van respondiendo durante la misma y clase magistral tradicional. Dentro de cada clase, se instruyó a los alumnos en diferentes estrategias de notas: realización de mapas conceptuales al anotar el contenido, uso de una hoja-modelo pautada para anotar de forma más sistemática y personal, suministro a los estudiantes de preguntas clave sobre la sesión con anterioridad a ésta y un grupo control, en el que los alumnos se comportaban libremente al tomar apuntes.

Los resultados pusieron de manifiesto mejoras significativas en el aprendizaje cuando los docentes utilizaban mapas conceptuales y pausas expositivas, y que estas mejoras eran aún mayores si se combinaban con el uso de hojas-modelo y el suministro de preguntas a los alumnos con anterioridad a la sesión. Estas combinaciones han dado lugar a una amplia elaboración y reorganización de las ideas por parte de los estudiantes. Además, se observó la inexistencia de beneficios en el aprendizaje cuando los alumnos usaban mapas conceptuales o cuando se les suministraban preguntas previas a la sesión en contextos donde la docencia se desarrolló utilizando clases magistrales, dada la mayor complicación para generar los mapas o para elaborar las ideas en este entorno. Así, Monereo y Pérez Cabaní (1996) demuestran la importancia de combinar ambos aspectos (estrategias de enseñanza del docente y de toma de notas del alumno) en las investigaciones, así como el papel determinante del profesor como mediador en la construcción de las notas por parte de los alumnos.

El estudio de Barberà *et al.* (2003) busca el desarrollo de un sistema de orientación y retroalimentación del docente al alumno que favorezca el desarrollo de un perfil estratégico del alumno ante la toma de apuntes y un uso estratégico de los mismos (Monereo *et al*., 1999; Espino, 2012). El objetivo es conseguir que los apuntes sean un instrumento para la reflexión y para la autorregulación del aprendizaje por parte del propio estudiante. En este sistema, los docentes revisan periódicamente los apuntes de los alumnos y les aportan retroalimentación y sugerencias de mejora teniendo en cuenta cuatro dimensiones: la organización personal de los apuntes, la integración adecuada de otras fuentes de información y la ampliación del contenido, el nivel de reflexión mostrado en los apuntes, y su calidad (utilizando las categorías de Monereo *et al.*, 1999). Los resultados del estudio fueron muy positivos, consiguiendo en todos los alumnos una personalización, organización y una fuerte reflexión personal en sus apuntes. Además, los estudiantes valoraron muy positivamente estas orientaciones, indicando que les sirvieron para mejorar su aprendizaje, convertir los apuntes en un verdadero instrumento para ello e, incluso, modificar sus hábitos de estudio para apreciar un aprendizaje de tipo significativo frente a uno memorístico.

I.2.3. ENSEÑANZA DE ESTRATEGIAS PARA TOMAR APUNTES

En este subapartado vamos a detallar qué aportan las investigaciones que hemos revisado en relación a la enseñanza a los alumnos de estrategias para tomar apuntes.

Según señalan Salgado-Horta y Maz-Machado (2013), la toma de apuntes es una técnica de aprendizaje en sí misma, que debe ser enseñada al alumno como parte de su formación y proceso de aprendizaje, y que le ayudará a mejorar su competencia académica y profesional. Sin embargo, son muchas las investigaciones que indican que estas técnicas casi nunca son enseñadas de forma explícita en las aulas (Kiewra, 1987; Monereo y Pérez Cabaní, 1996), quizá por el bajo conocimiento sobre diferentes estrategias de toma de apuntes entre el profesorado (Kiewra, 1987). En ocasiones, como muestra el estudio de Guasch y Castelló (2002), los docentes confunden la enseñanza de estrategias sobre toma de notas con la provisión de ayudas puntuales en situaciones concretas encaminadas a indicar a los alumnos qué y cuándo anotar, y que no buscan promover la reflexión sobre el propio proceso, lo que sería útil para mejorar el análisis, la organización y la crítica de la información a registrar.

Así, existe un amplio número de investigadores que defienden la necesidad de introducir diferentes métodos de toma de apuntes dentro de la enseñanza. Este hecho también es demandado por los propios alumnos, que solicitan conocer un número mayor de estrategias asociadas a la toma de apuntes (Guasch y Castelló, 2002; Barberà *et al.*, 2003; Teng, 2011).

Existen algunas investigaciones donde se prueban propuestas concretas relacionadas con la enseñanza de la toma de apuntes, buscando promover mejores habilidades en los estudiantes que repercutan en un mejor aprendizaje. Stahl, King y Henk (1991, citado en Monereo *et al.*, 1999), para intentar mejorar las habilidades de anotación en los estudiantes, desarrollan una secuencia instruccional de cuatro niveles (modelado, práctica, evaluación y refuerzo). Shambaugh (1994, citado en Monereo *et al.*, 1999) hace otra propuesta planteando una toma de notas en la que el uso de esquemas gráficos y de elementos visuales favorezca la integración del conocimiento y una mayor significatividad del mismo. Un ejemplo más reciente es la investigación de Salgado-Horta y Maz-Machado (2013), en clases universitarias de estadística, en las que se hace un estudio de contraste entre un grupo de alumnos al que se le instruye en el desarrollo de cuadros sinópticos, otro grupo en el que se utilizan hojas-modelo para anotar la información y, además, un grupo control que realiza las anotaciones libremente. La investigación muestra la presencia de una mejora significativa en el aprendizaje desarrollado en cada uno de los dos grupos donde se instruyó en una estrategia de toma de apuntes en relación al grupo control.

Sin embargo, a lo largo de los dos subapartados anteriores hemos puesto de manifiesto la presencia de una amplia diversidad en relación a las percepciones que tienen los estudiantes sobre el proceso de toma de apuntes, las formas en las que los estudiantes lo realizan y su diferente tratamiento y utilización para la realización de actividades o el estudio de una asignatura. Incluso esos procesos y usos, en ocasiones, están asociados a diferentes percepciones sobre las materias y sobre su propio aprendizaje (Espino, 2012; Rensaa, 2014). Estas diferencias dificultan que pueda hablarse del desarrollo de patrones únicos en la enseñanza de la toma de apuntes (Hartley & Davies, 1978). Consideramos que el intento de que todos los estudiantes desarrollen las mismas estrategias, aunque sean consideradas como "óptimas", puede llegar a ser contraproducentes. Este hecho es incluso argumentado por los propios estudiantes, que en algunos casos no ven adecuada la existencia de posibles cursos sobre “cómo tomar notas”, al considerar que las necesidades de cada estudiante en relación a este proceso son distintas (Badger et al., 2001).

No obstante, es cierto que muchas investigaciones han puesto de manifiesto qué tipos de apuntes suelen estar asociados con mejores aprendizajes: notas personalizadas, con cierto grado de transformación y de elaboración de los contenidos, y que tienen en cuenta las variables contextuales en que son producidas. También se han detectado comportamientos del docente que favorecen ese tipo de notas. Estos resultados aportan una serie de sugerencias o de líneas maestras, tanto para el profesorado como para el alumnado, que facilitarían el desarrollo por el estudiante de unas notas que promovieran un aprendizaje más significativo y de mayor calidad. Comentaremos a continuación cuáles son esas sugerencias o líneas maestras que, por otra parte, son coincidentes en bastantes estudios.

Hay autores que sólo realizan consideraciones genéricas a los docentes, indicando la necesidad de fomentar o favorecer climas de reelaboración de la información, de un mayor establecimiento de conexiones entre los contenidos y un aprendizaje más relacional (Monereo *et al.*, 1999; Gil *et al.*, 2011; Rensaa, 2014). Sin embargo, otros autores sí que aportan sugerencias más concretas:

- Informar a los alumnos de cuál va a ser el tipo de evaluación que va a desarrollarse o el “producto” que se les va a requerir (Kiewra, 1987; Saint-Onge, 1997), para que puedan adaptar la toma de apuntes.

- Fomentar el repaso de las clases previas y de su relación con la sesión actual, tanto fuera del aula como al comienzo de la sesión, para que los alumnos desarrollen una mejor comprensión de los contenidos y la selección de las ideas nuevas o complementarias desarrolladas en la sesión (Hartley & Davies, 1978; Saint-Onge, 1997).

- Comenzar la sesión explicitando el plan de exposición que se va a seguir: la estructuración y organización de la sesión y sus ideas principales (Hartley & Davies, 1978; Saint-Onge, 1997; Nogueira, 2005). En este sentido, es útil que este esqueleto de la sesión esté presente y a la vista para los alumnos durante la exposición, en la pizarra (Nogueira, 2005) o en hoja (Hartley & Davies, 1978; Kiewra, 1987).

- Presentación organizada de acuerdo a un plan previo y al uso de señales que enfaticen y faciliten la distinción de los elementos principales: verbales, visuales, reformulación y repetición de ideas, uso de medios como la pizarra o diapositivas (Hartley & Davies, 1978; Kiewra, 1987; Saint-Onge, 1999). En relación con la organización de la presentación, la investigación de Monereo y Pérez Cabaní (1996) ha mostrado la efectividad de exposiciones de docentes basadas en mapas conceptuales para mejorar el aprendizaje desarrollado por los alumnos.

- Evitar la utilización simultánea de diferentes fuentes de información o, en ese caso, realizar pausas expositivas periódicas encaminadas a que los alumnos puedan elaborar e integrar la información presentada (Hartley & Davies, 1978; Kiewra, 1987; Nogueira, 2005). No obstante, el uso de pausas expositivas se muestra efectivo para mejorar la calidad de las notas y el aprendizaje de los alumnos en un amplio abanico de situaciones (Monereo y Pérez Cabaní, 1996).

- Fomentar estrategias que obliguen a los alumnos a una toma de notas más personalizada y elaborada: además de las pausas expositivas, es útil la introducción de preguntas, sobre el contenido de la sesión o la propia anotación, que vayan contestándose durante la sesión, o proveer hojas-modelo a los alumnos para que reelaboren sus apuntes de acuerdo a las mismas o a través de la adopción de diferentes marcos alternativos de toma de apuntes (Hartley & Davies, 1978; Kiewra, 1987; Monereo y Pérez Cabaní, 1996).

Como puede observarse, muchas de esas sugerencias destinadas a los docentes también han sido aportadas por los propios alumnos cuando se les pregunta sobre qué aspectos les ayudarían en su toma de apuntes ("condiciones fáciles" de anotación[9]).

Las sugerencias anteriores están encaminadas a facilitar el desarrollo de unos apuntes de mejor calidad, más personalizados y con una mayor elaboración por parte del alumno, tomando como base la propia exposición grupal del docente. No obstante, otra de las opciones posibles está basada en el establecimiento de procesos de tutela del alumnado asociados a la toma de apuntes, de tipo similar a los desarrollados por Barberà *et al.* (2003) que ya han sido comentados anteriormente. Los apuntes son un instrumento y una fuente de información valiosa (aunque parcial) para el profesor, puesto que a través de ellos puede conocer el estado del aprendizaje de cada alumno y cómo entiende los conceptos e ideas tratadas, detectar posibles deficiencias o puntos débiles y posibilitar el desarrollo de una mayor autonomía intelectual del estudiante (Saint-Onge, 1997; Rensaa, 2014). Los procesos de tutela pretenden

[9] Expuestas en el subapartado I.2.1 de esta memoria de tesis doctoral.

aprovechar toda esa información para poder desarrollar una respuesta individualizada a las necesidades de cada estudiante, aportándole sugerencias encaminadas a un mayor desarrollo paulatino de apuntes más organizados, personales, elaborados y reflexivos. En ese caso, los apuntes se convierten en un instrumento de autorregulación del propio aprendizaje para el alumno. No obstante, también hay que tener presente la mayor carga de trabajo que supone para el docente la tutela continuada de un amplio grupo de estudiantes.

Algunos trabajos, como el de Hartley y Davies (1978), también proporcionan una serie de líneas maestras para los alumnos asociadas a la toma de notas. Estos autores señalan la enfatización de los elementos más importantes, el uso de técnicas de presentación o de estructuración de la información, el registro de ideas que sean realmente significativas para ellos, la escritura de aquellas preguntas que le vayan surgiendo al alumno durante el proceso de anotación o de revisión y un marco de estudio que realmente integre una revisión de las notas recogidas. Sin embargo, algunas de estas sugerencias son de difícil puesta en práctica. El estudio de Monereo y Pérez Cabaní (1996) detecta la falta de beneficio para el aprendizaje del alumno que supone el seguimiento de estrategias como los mapas conceptuales para registrar la información cuando el docente utiliza estrategias que no facilitan su creación (por ejemplo, el entorno de una clase magistral). Es decir, al existir una alta interdependencia que puede reforzar u obstaculizar sus propósitos individuales, no pueden tratarse por separado las sugerencias y estrategias para docentes y alumnos.

El estudio de Barberà *et al.* (2003) ha evidenciado una evolución muy clara de los apuntes de los alumnos durante un proceso de tutela y retroalimentación (apuntes más personales, organizados, con una alta reflexión y ampliación de la información, conexiones y relaciones entre los elementos). Sin embargo, en los contextos habituales no suele existir un seguimiento por el docente de los apuntes tomados por los alumnos ni hay una preocupación del docente por la enseñanza de diferentes técnicas de toma de apuntes. En estos casos, la evolución en el proceso de toma de apuntes por el alumno se produce cuando las estrategias seguidas han sido poco exitosas académicamente, o en entornos en lo que la toma de apuntes se desarrolla en "condiciones difíciles" y los alumnos son más conscientes de las carencias de sus estrategias (Van Meter *et al*., 1994). Las estrategias exitosas académicamente suelen ser mantenidas por los alumnos o refinadas en función de las variables que vayan cambiando (Van Meter et al., 1994; Guasch y Castelló, 2002). Así, puede decirse que la evolución natural en la toma de apuntes por parte de los alumnos se basa en procesos de refinamiento y de ensayo-error de técnicas (Guasch y Castelló, 2002).

I.2.4. LA TOMA DE APUNTES EN LA ACTUALIDAD: PROSPECTIVA DE FUTURO

Muchas de las investigaciones que se han reflejado en los subapartados anteriores se desarrollaron en unas condiciones y con unos medios que no son los mismos con los que se cuenta usualmente en la actualidad. Hace tan sólo unos años, el profesor con sus exposiciones en las clases y el libro de texto eran, generalmente, las fuentes a través de las cuales los alumnos obtenían la información necesaria que servía de base para su evaluación posterior. La dificultad de acceder a otras fuentes y, también, de comunicarse con sus compañeros por medios no presenciales aumentaban esa necesidad de recopilar o de recoger la información expuesta en la clase.

Sin embargo, hoy en día vivimos un imparable fenómeno de globalización y de avance científico, y de las tecnologías de la información y la comunicación que hace que actualmente exista una ampliación y una diversificación muy grande de las fuentes de acceso al conocimiento (Gil *et al*., 2011; Salgado-Horta y Maz-Machado, 2013). La popularización de Internet hace que sea posible el acceso sencillo e instantáneo a diferentes fuentes de información relacionadas con el contenido que pretende aprenderse, y que también pueden servir para complementar otras fuentes tradicionales. Además, también hace más sencilla la posibilidad de compartir y discutir sobre las mismas con otros compañeros. Estos fenómenos provocan que, actualmente, la necesidad de recoger todo el contenido presentado en las clases sea menor que hace unos años o décadas (Espino, 2012), y que pueda ser más interesante el completar o reelaborar esas notas con otras fuentes de información a disposición del alumno. Además, este cambio es simultáneo al desarrollo de cambios de paradigmas en la educación, que cada vez presentan un énfasis mayor en el aprendizaje desarrollado por los propios estudiantes, y en el que el papel del docente se mueve de ser el poseedor y transmisor de los contenidos a ser la persona que guíe y articule ese desarrollo hacia un aprendizaje significativo y una mejor preparación social y profesional del individuo.

Espino (2012), en las cuestiones abiertas de su tesis doctoral, se pregunta cuál es el uso que pueden hacer los estudiantes de la toma de apuntes en estos contextos y qué procedimientos llevarían a cabo. Parece claro que, en estos entornos, una de las dos funciones principales que los investigadores han dado a la toma de apuntes, la de servir de almacenaje o de “memoria externa”, pierde en parte su relevancia y queda un poco desvirtuada. Para las demandas de la sociedad actual no tiene sentido que ese proceso de almacenaje se siga produciendo a partir de la copia literal de otro medio, como la exposición del docente. En esos casos, el alumno no conseguirá desarrollar competencias cada vez más comunes y demandadas como son la comprensión de diferentes fuentes documentales y su integración e interrelación para elaborar informes o trabajos sobre un tópico o desarrollar un aprendizaje significativo (Gil *et al*., 2011).

Sin embargo, los procesos de codificación de la información asociados a la actividad de tomar notas sí que ganan una mayor relevancia en los entornos actuales, a través de la selección de la información relevante de las diferentes fuentes, y la transformación y elaboración de dicha información para conseguir integrarla, y llegar a crear textos explicativos completos (como informes o ensayos). Es difícil encontrar aún investigaciones asociadas a la toma de apuntes en entornos de este tipo. Dos ejemplos son las investigaciones de Gil, Vidal-Abarca y Martínez (2008, citado en Gil *et al*., 2011) y la de Gil *et al.* (2011). Ambos estudios ponen de manifiesto cómo, en el manejo de recursos en red, sigue predominando una recogida literal de la información y un procesamiento muy superficial de la misma, añadiéndose de forma lineal, por lo que se mantienen las características mayoritarias de la toma de apuntes en entornos tradicionales. Esos comportamientos dan lugar a una realización posterior de ensayos o composiciones escritas que son muy semejantes a esas notas recogidas, con un bajo número de elementos personales (es decir, no literales de alguna de las fuentes) y de conexiones entre la información de diferentes textos (Gil *et al*., 2011). Estos resultados coinciden con los que, como docentes, observamos cuando solicitamos a nuestros estudiantes tareas de este tipo.

Por lo tanto, se pone de manifiesto una falta de preparación en los estudiantes para llevar a cabo este tipo de tareas, quizá condicionado por una visión prevalente en los alumnos de la toma de apuntes como proceso de recogida de la información, en lugar de como proceso en el que ésta se elabora, transforma e integra. En este sentido, y para conseguir una evolución en el modo de abordar estas tareas, pensamos que es muy interesante el papel del docente como guía y como persona que tutele estos procesos en el estudiante, aportándole retroalimentación sobre lo realizado, sugerencias de mejora y tareas o preguntas para fomentar una mejor integración, reflexión y conexión entre sí de las fuentes de información utilizadas, así como con los conocimientos previos de los alumnos. Es decir, la base sería similar a la propuesta por Barberà *et al.* (2003), o la investigación sobre el desarrollo de un portafolio reflexivo de Dias y Santos (2013) en un contexto de resolución de problemas.

No obstante, consideramos necesario llevar a cabo más investigaciones que analicen la selección y el tratamiento de la información que realizan los estudiantes ante tareas como la elaboración de ensayos o de informes, o en contextos de resolución de situaciones problemáticas en matemáticas que conlleven la elaboración de productos similares. Esto facilitará el desarrollo de estrategias docentes (entre ellos, los procesos de tutela) que fomenten un tratamiento más elaborado y conectado de la información por parte de los estudiantes, que den lugar a la elaboración de productos de mayor calidad, aprendizajes más significativos y profundos, y un mayor desarrollo de competencias profesionales necesarias en el mundo actual.

En nuestra investigación, dado el contexto en el que los datos han sido recogidos y la metodología docente desarrollada por los profesores participantes (exposición oral de la teoría combinada con el uso de la pizarra de tiza, y sin apenas referencias al libro de texto ni utilización de otro tipo de recursos manipulativos o en red), las fuentes de información para los estudiantes en el aula se han reducido al discurso oral del docente y a la utilización de la pizarra como complemento. No obstante, haremos un estudio de cómo son los apuntes tomados por los estudiantes en los temas de análisis matemático que abarca el estudio, con especial atención a los diferentes tipos de elementos que distinguiremos entre el contenido expuesto[10]. El objetivo es detectar diferentes comportamientos en los estudiantes al tomar apuntes de matemáticas en este contexto (similar en todas las aulas), unidas a las posibles reelaboraciones o compleciones de los mismos utilizando otras fuentes de información, y los diferentes usos que de esas notas pueden realizar los alumnos para su estudio y aprendizaje de las matemáticas. Creemos que esto servirá para poner de manifiesto la importante presencia de diferencias individuales entre estudiantes (como bien indica la frase de Gil *et al*., 2011, indicada en el inicio del subapartado I.2.2), a pesar de la poca presencia de múltiples fuentes de información en nuestro contexto de investigación.

I.3. ANTECEDENTES SOBRE ESCRITURA DE LOS ALUMNOS EN MATEMÁTICAS

Dado que el cuaderno de matemáticas es uno de los lugares en los que el alumno puede utilizar para comunicarse en matemáticas, a través de la escritura, hemos decidido dedicar un apartado al tratamiento de antecedentes sobre comunicación y, sobre todo, escritura de los alumnos en matemáticas.

Como ya hemos comentado en la parte final del apartado anterior, el desarrollo, expansión y popularización de las TIC en la sociedad actual provocan no sólo la

[10] Esos aspectos se muestran en el apartado III.3 de la tesis doctoral.

posibilidad de acceder a una gran cantidad de información de manera instantánea, sino que también sea posible comunicarse de manera no presencial, inmediata y simultánea con diferentes personas. Este hecho provoca un aumento de la necesidad, en un ciudadano, de ser hábil y claro en la comunicación de ideas, ya sea oralmente o por escrito, tanto en el mundo académico como en el laboral y en el social (NCTM, 2003). Especialmente en matemáticas, esa comunicación de ideas constituye un hecho fundamental, a la par de ser algo que no siempre ha sido reconocido como parte importante de esta ciencia (NCTM, 2003). No obstante, la trascendencia que tienen los procesos comunicativos en matemáticas ha sido recogida por un gran número de documentos curriculares de referencia, y también ha sido objeto de gran variedad de estudios en Didáctica de la Matemática. Así, este apartado se compone de cinco subapartados. En el primero de ellos, se mostrará la forma en que son recogidos los aspectos comunicativos y de lenguaje en matemáticas en varios documentos de referencia en Educación Matemática y en el currículo español. En el segundo subapartado se expone la contribución de la comunicación y sus procesos asociados al aprendizaje matemático de un estudiante, a través de un breve recorrido por diversas investigaciones en Didáctica de la Matemáticas. El tercer subapartado se dedica a una forma posible de comunicación en matemáticas, exponiendo la diversidad de estudios sobre escritura que se han llevado a cabo en Didáctica de la Matemática. Debido a la presencia mayoritaria de dos tipos distintos de tareas de escritura matemática en las investigaciones revisadas, se han dedicado los dos últimos subapartados al tratamiento particular de las mismas: las actividades de escritura de un diario en matemáticas en el cuarto subapartado y las actividades de escritura matemática expositiva de los estudiantes en el quinto y último subapartado.

I.3.1. LA COMUNICACIÓN MATEMÁTICA EN DOCUMENTOS CURRICULARES DE REFERENCIA

Por una parte, hemos analizado el papel de la comunicación en los principios y estándares para la educación matemática que establece el *National Council of Teachers of Mathematics* norteamericano (NCTM, 1992, 2003). En estos documentos, la palabra *estándar* se define como una “afirmación-declaración que puede ser utilizada para juzgar la calidad de un currículo matemático o de métodos de evaluación”, indicando “qué tiene valor y qué no lo tiene” (NCTM, 1992, p. 2) en la práctica docente matemática. En todos ellos, la inclusión de oportunidades para la comunicación en matemáticas aparece como estándar.

En la edición de 1989, se fija "las matemáticas como comunicación" como estándar en todos los niveles educativos, señalando que las destrezas comunicativas básicas (hablar, escuchar, escribir, leer) deben verse como elementos integrantes del currículo de matemáticas (NCTM, 1992). En la edición del 2000, la comunicación es uno de los cinco estándares asociados a procesos que se fijan, junto con los procesos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexión y representación (NCTM, 2003). En particular, el estándar de comunicación se enuncia, textualmente, en los siguientes términos:

> Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:
>
> - Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación;
> - Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas;
> - Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás;
> - Usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas. (p. 64).

Otro de los documentos que ha tenido gran relevancia curricular en los últimos años, por su influencia en muchos currículos a lo largo del mundo, ha sido la idea de *competencia matemática* planteada por Niss (2003) en el marco del proyecto KOM (iniciales en danés de "Competencias y el Aprendizaje de las Matemáticas"), y que también aparece en el marco teórico de PISA (OCDE, 2004), por ser Niss uno de los miembros más relevantes dentro del proyecto PISA. No obstante, en este último se utiliza la alfabetización matemática (*mathematical literacy*) como noción central. Niss propone la siguiente definición de competencia matemática: "la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra-matemáticos y en situaciones en las cuales las matemáticas juegan o podrían jugar un rol" (traducción de Niss, 2003, p. 7). La definición de *alfabetización matemática* que encontramos en el marco PISA es bastante similar a la anterior:

> La capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se

> presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (INECSE, 2005, p. 15).

Tanto el marco propuesto por Niss como el marco teórico de PISA 2003 distinguen ocho dimensiones o constituyentes de la competencia matemática, que se formulan de un modo muy similar en ambos casos. Esas dimensiones son presentadas y comparadas en la Tabla I.3. La comunicación en, con y sobre las matemáticas aparece como una de las dimensiones que, específicamente, constituyen la competencia matemática; sin menoscabo de que el proceso de comunicar también esté ligado a otras competencias, como la formulación y resolución de problemas, la argumentación, la representación de objetos matemáticos o el uso de lenguaje matemático. Así, la comunicación supone una de las dimensiones fundamentales y transversales de la competencia matemática.

Proyecto KOM (Niss, 2003, p. 7-9)	**Proyecto PISA 2003 (OCDE, 2004, p. 41-42)**
Pensar matemáticamente	Pensar y razonar
Razonar matemáticamente	Argumentación
Comunicarse en, con y sobre las matemáticas	Comunicación
Modelizar matemáticamente	Construcción de modelos
Plantear y resolver problemas matemáticos	Formulación y resolución de problemas
Representar entidades matemáticas	Representación
Manejar símbolos y sistemas formales matemáticos	Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico
Hacer uso de ayudas y herramientas	Empleo de soportes y herramientas

Tabla I.3. Dimensiones de la competencia matemática en Niss (2003) y PISA 2003

PISA 2012 volvió a tener las matemáticas como área de estudio principal. El marco teórico en matemáticas de PISA 2012 es una evolución del de 2003 en el que, como indican Caraballo, Rico y Lupiáñez (2013), el marco tiene una estructura más integral y coherente, y existe una mayor precisión conceptual y terminológica de las nociones y categorías presentes que se deriva de la necesidad de una interpretación más precisa y rigurosa de los resultados del estudio. La alfabetización matemática sigue siendo la noción central en PISA 2012, enfatizándose en su definición varios procesos clave

(Caraballo, Rico y Lupiáñez, 2013), entre ellos una mención a la descripción y explicación de fenómenos. La definición es la siguiente:

> La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan. (OCDE, 2013, p. 9).

En el marco de 2012 se renombran las ocho competencias matemáticas de 2003 como *capacidades matemáticas fundamentales*, y pasan de ser ocho a siete. El mayor cambio es la reformulación y síntesis de las competencias de "pensar y razonar" y "argumentar" de PISA 2003 en una sola capacidad fundamental, "Razonamiento y argumentación". La Tabla I.4 compara las *competencias matemáticas* de 2003 y las *capacidades matemáticas fundamentales* de 2012.

Proyecto PISA 2003 (OCDE, 2004, pp. 41-42)	**Proyecto PISA 2012 (OCDE, 2013, pp. 15-16)**
Pensar y razonar	Razonamiento y argumentación
Argumentación	
Comunicación	Comunicación
Construcción de modelos	Matematización
Formulación y resolución de problemas	Diseño de estrategias para resolver problemas
Representación	Representación
Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico	Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico
Empleo de soportes y herramientas	Utilización de herramientas matemáticas

Tabla I.4. Comparativa de las competencias matemáticas de PISA 2003 y las capacidades matemáticas fundamentales de PISA 2012

Como podemos observar, la comunicación en matemáticas sigue siendo considerada como una de las capacidades matemáticas fundamentales. Además, la descripción que se realiza de esta capacidad en el marco de PISA 2012 es mucho más concreta que en 2003, con un número mayor de descriptores (Caraballo, Rico y Lupiáñez, 2013, p. 237). En concreto, se describe de la siguiente manera:

> Comunicación: la competencia matemática implica comunicación. El sujeto percibe la existencia de algún desafío y está estimulado para reconocer y comprender la situación del problema. La lectura, decodificación e interpretación de enunciados, preguntas, tareas u objetos le permite formar un modelo mental de la situación, que es un paso importante para la comprensión, clarificación y formulación de un problema. Durante el proceso de solución puede ser necesario resumir y presentar los resultados intermedios. Posteriormente, una vez que se ha encontrado una solución, el individuo que resuelve el problema puede tener que presentarla a otros y tal vez una explicación o justificación. (OCDE, 2013, pp. 15-16).

Como podemos observar, la capacidad de comunicación se presenta asociada a la resolución de un problema planteado, en tres etapas diferenciadas: la lectura, interpretación y comprensión de la situación problemática; el resumen y presentación de diferentes resultados intermedios que se van obteniendo durante el proceso de resolución y, por último, la presentación de la solución encontrada y su explicación o justificación a otras personas.

Pasamos a fijarnos en las menciones a la comunicación que pueden encontrarse en el currículo español de matemáticas. En particular, y dado que la recogida de datos se realizó mientras estaba vigente la Ley Orgánica de Educación (LOE), promulgada el 2 de mayo de 2006 (Jefatura del Estado, 2006), se ha analizado el papel que asigna esta ley a la comunicación en el currículo de matemáticas. Además, y dado que nuestra investigación se ha desarrollado en clases de 1º de Bachillerato de la ciudad de Valladolid, el análisis se ha centrado en el nivel de Bachillerato, tanto en el currículo estatal de mínimos como su concreción en Castilla y León, y tanto en la asignatura de Matemáticas de la rama científico-técnica como en las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.

La LOE es la primera ley educativa española en la que se incluye y se intenta integrar la idea de competencia, emanada de estudios como PISA, y de las propuestas realizadas por la Unión Europea (Valle y Manso, 2013). En su desarrollo normativo se recogen ocho competencias básicas que toda persona debe haber desarrollado al finalizar su escolarización obligatoria (MEC, 2007a): competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico, tratamiento de la información y competencia digital, competencia social y ciudadana, competencia cultural y artística, competencia para aprender a aprender y, por último, autonomía e iniciativa personal.

Sin embargo, es necesario comentar dos aspectos clave en relación a la inclusión de competencias en la LOE. Por una parte, únicamente hay referencias a las competencias básicas en la etapa de escolarización obligatoria, despareciendo esta idea en el desarrollo curricular de Bachillerato, tanto estatal (MEC, 2007b) como autonómico (Consejería de Educación de Castilla y León, 2008). Por otra parte, la inclusión de las ocho competencias básicas en Primaria y Secundaria Obligatoria no ha llevado realmente aparejada la integración real de las mismas en los desarrollos curriculares de las distintas asignaturas (Valle y Manso, 2013). El desarrollo curricular se centra en objetivos, contenidos y criterios de evaluación, dedicándose el Anexo I a desarrollar aspectos asociados a cada una de las competencias básicas y un apartado asociado al desarrollo curricular titulado “Contribución de la materia a la adquisición de las competencias básicas” (MEC, 2006, 2007a). Así, da la sensación de que el papel de las competencias es más el de un complemento que el de ser un elemento vertebrador del currículo.

En el currículo de la LOE aparece la competencia matemática como una de las competencias consideradas como básicas. Si atendemos a las menciones explícitas que se realizan a la comunicación en la explicación curricular de dicha competencia, únicamente se hacen de forma implícita, haciendo referencia a la habilidad para expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, o una mención más directa pero enfatizando el hecho de hacerlo utilizando lenguaje matemático (MEC, 2007a). Es decir, una mención que parece hacer referencia sólo a lo que Nesher (2000) denomina *hablar matemáticamente* (usar, manipular y aplicar ideas matemáticas utilizando la sintaxis del lenguaje matemático formal), sin considerar el *hablar de matemáticas* (usar el lenguaje natural como metalenguaje para expresar pensamientos sobre las matemáticas).

Pasamos ahora a analizar qué referencias a la comunicación en matemáticas pueden encontrarse en los decretos que desarrollan el currículo de Matemáticas en la LOE, tanto en el currículo básico estatal (MEC, 2007b) como el autonómico (Consejería de Educación de Castilla y León, 2008).

Entre los objetivos que marca la LOE para la enseñanza de las matemáticas en Bachillerato hay uno de ellos relacionado directamente con la comunicación en matemáticas, tanto a nivel estatal (octavo objetivo) como autonómico (noveno objetivo): "expresarse verbalmente y por escrito en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, comprendiendo y manejando términos, notaciones y representaciones matemáticas" (MEC, 2007b, p. 45449; Consejería de Educación de Castilla y León, 2008, p. 11358).

En general, existen varios aspectos que se enfatizan en el desarrollo curricular en relación a la comunicación en matemáticas. Por una parte, se concede una alta importancia a los procesos de comunicación, tanto verbalmente como por escrito, de resultados asociados a actividades basadas en la modelización matemática de situaciones, la interpretación de lo obtenido y la explicación de fenómenos. Estos aspectos se remarcan especialmente en las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, aunque aparece en ambos bachilleratos. Por otra parte, se hace mención a la introducción y la utilización progresivamente mayor del lenguaje matemático formal, aunque de una manera gradual (en consonancia con Pimm, 1999, evitando introducciones demasiado prematuras o rápidas), y especialmente en las Matemáticas de la rama científico-tecnológica. El currículo aboga por poner de manifiesto la necesidad y las ventajas de este lenguaje (expresión universal, exacta y concisa de pensamiento matemático, libre de las ambigüedades o los dobles significados del lenguaje natural, Nesher, 2000), así como por desarrollar un manejo progresivo del vocabulario y la notación asociada a diferentes lenguajes específicos dentro del lenguaje matemático (algebraico, gráfico, matricial, vectorial, estadístico), y la capacidad de elegir el más adecuado para resolver un problema.

Como reflexión final del análisis de la documentación legislativa española, hemos encontrado que sí que se reflejan aspectos asociados a la comunicación en matemáticas, pero el énfasis se pone más en la presentación de productos elaborados (informes científicos, interpretación y explicación de un problema resuelto) que en el propio proceso de comunicación (de un alumno consigo mismo, entre iguales o con el docente) como herramienta de reflexión y para el desarrollo del aprendizaje matemático. Esto, además, lleva asociada una preponderancia de lo que Nesher (2000) denomina *hablar matemáticamente* (utilizando el lenguaje matemático formal) o de un discurso *mixto* (en el que el lenguaje matemático se combina con una verbalización asociada al lenguaje formal y a la terminología matemática), sin mencionarse aspectos propios del *hablar de matemáticas*, en los que se utilice el lenguaje natural como medio para expresar pensamientos sobre las matemáticas.

I.3.2. LA CONTRIBUCIÓN DE LA COMUNICACIÓN MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DEL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

El NCTM (2003) indica la tradicional presencia mayoritaria en las aulas de una enseñanza de las matemáticas centrada, especialmente, en el docente y en sus exposiciones de la materia. Tanto esas exposiciones del docente, como el desarrollo que habitualmente puede encontrarse en los libros de texto, sigue un esquema del tipo "contar-mostrar-hacer" (Shield & Galbraith, 1998), comenzando con el enunciado de conceptos o resultados, su ejemplificación y una serie de ejercicios prácticos de aplicación. Conjuntamente con lo anterior, el NCTM (1992), en Estados Unidos, apunta la presencia de un currículo de matemáticas repetitivo a lo largo de los diferentes cursos, y con un énfasis excesivo en los algoritmos y en el desarrollo de una fluidez procedimental (Baxter, Woodward & Olson, 2005). Este planteamiento, en buena medida, también es trasladable a la situación española. En este tipo de entornos, las actividades en las que los alumnos pueden desarrollar aspectos propios de la comunicación matemática, bien sea oralmente o por escrito, son esporádicas o prácticamente inexistentes. La comunicación en el aula, básicamente, es unidireccional (del profesor hacia los alumnos), donde los estudiantes se limitan a reproducir o a responder a estímulos planteados por el docente.

Los modelos de presentación de las matemáticas vividos por los estudiantes tienen una importante influencia en la visión de las matemáticas que éstos desarrollan (Shield & Galbraith, 1998). Así, muchos alumnos ven las matemáticas como una colección de reglas, hechos, números, símbolos, fórmulas y procedimientos (Countryman, 1992). Además, asumen la existencia de una respuesta correcta única en los problemas, lo que les hace ver la actividad de "hacer matemáticas" como la de elegir el procedimiento o la regla adecuada para resolver una situación y aplicarla de manera satisfactoria (Schoenfeld, 1989; Countryman, 1992). Los roles más habituales desarrollados por los alumnos al aprender matemáticas son los siguientes: el de memorizar hechos y algoritmos sin plantearse su significado (Borasi & Rose, 1989; Schoenfeld, 1989; Porter & Masingila, 2002), el de ser capaz de seguir procedimientos transmitidos por el docente (Countryman, 1992; Kemper, 2003) y el de aplicar algoritmos y procedimientos de forma rutinaria en ejercicios (Borasi & Rose, 1989).

Según alerta el NCTM (2003), la situación anterior da lugar a un abuso de "aprendizaje sin comprensión" de las matemáticas por parte de los alumnos, de una calidad muy pobre, basado en la memorización y sin significatividad para ellos. Para intentar evolucionar y mejorar el aprendizaje de las matemáticas, muchas teorías de tipo constructivista (como las de, por ejemplo, Piaget o Dienes) plantean la necesidad de mostrar el aprendizaje de las matemáticas como algo activo, en la que los alumnos vayan construyendo y descubriendo las matemáticas. Con ello, se pretende desarrollar una mayor comprensión conceptual y relacional de las matemáticas y un aprendizaje más significativo para el alumno (conectado con lo que ya conoce) y que facilite su aplicación en contextos y situaciones (NCTM, 2003). Para ello es necesario cambiar los modos y la estructura en que la asignatura de matemáticas es presentada a los alumnos (Shield & Galbraith, 1998), lo cual es probable que implique un cambio en la visión de lo que los alumnos mayoritariamente entienden por “hacer matemáticas” (Countryman, 1992) y en los hábitos que asocian a la misma, en contraposición con la visión anteriormente comentada.

En esa evolución juega un papel importante el planteamiento de tareas que den posibilidades al alumno para explorar, relacionar, profundizar en sus conocimientos, así como relacionarlos con sus experiencias vividas (NCTM, 1992, 2003). En este tipo de tareas, la comunicación y el lenguaje, ya sea hablado o escrito, juegan un papel fundamental como catalizadores de este desarrollo y para estimular, facilitar y compartir el aprendizaje de las matemáticas (Clarke, Waywood & Stephens, 1993). En estos últimos años, como expresa Radford (2014), se ha observado un interés creciente en el ámbito de la educación matemática por entender la enseñanza aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva sociocultural, como un fenómeno social, cultural e histórico, y con un papel fundamental de la comunicación.

El principio de partida de muchos de estos autores son las ideas de Vygotsky (1995), que defiende que el desarrollo de un individuo no puede entenderse sino como producto de la interacción social. Ese desarrollo se produce a partir de fenómenos de *internalización* provocados por la interrelación social y la mediación cultural de la sociedad, que inducen una transformación y reconstrucción interna del sujeto, provocando en él la evolución y el desarrollo de procesos psicológicos superiores como el pensamiento, la argumentación, la reflexión o la abstracción; y que vuelven a revertir posteriormente a la sociedad a través de la interacción del sujeto, lo que representa una evolución de la propia sociedad. En todo este proceso son esenciales los *instrumentos de mediación* existentes en el medio sociocultural, siendo el lenguaje uno de los instrumentos fundamentales. Así, Vygotsky (1995) establece una interrelación y conexión entre el pensamiento (y el desarrollo cognitivo) y el lenguaje, sirviendo el lenguaje como medio tanto para internalizar la cognición y las ideas como para articular éstas. Esta tesis es la base que fundamenta la apelación a la comunicación en matemáticas como uno de los aspectos fundamentales que contribuyen a desarrollar su aprendizaje (Nesher, 2000).

No obstante, dentro de esta tesis, Morgan (2013) distingue la presencia de dos concepciones teóricas muy distintas. Por un lado, existe una concepción más próxima a una visión platónica de las matemáticas, donde los objetos matemáticos sólo son accesibles al ser humano a través del lenguaje (diferentes representaciones del mismo), y el desarrollo de la comprensión se asocia a la capacidad de coordinar, al menos, dos representaciones diferentes de un concepto matemático (Duval, 1999). Pero también existe otra concepción, más próxima a una idea de las matemáticas como algo construido social y culturalmente, en la que las matemáticas son vistas como una actividad discursiva, y el aprendizaje de las matemáticas es entendido y caracterizado a través de los cambios y transformaciones producidas en el discurso matemático de una persona o grupo (perspectiva *comognitiva* del aprendizaje, Sfard, 2008).

Los documentos sobre principios y estándares del NCTM (1992, 2003) indican los beneficios que tiene el desarrollo de actividades de comunicación en matemáticas para los alumnos. El NCTM (2003, p. 64) expresa el beneficio doble que desarrollan los alumnos con incentivos, oportunidades y apoyo para comunicarse de forma matemática en el aula, ya sea de forma oral (hablar y escuchar) o escrita (escribir y leer). Añadimos también el papel de apoyo que puede tener la comunicación gestual. A través de la comunicación los alumnos evolucionan en su aprendizaje de las matemáticas, y también aprenden a comunicar matemáticamente las experiencias, razonamientos o argumentaciones que han desarrollado. Este doble enfoque será ampliamente tratado en el subapartado siguiente sobre escritura.

La reflexión y la comunicación son procesos entrelazados en matemáticas. Procesos como la formulación de explicaciones sobre los métodos seguidos y su justificación, el planteamiento de preguntas o el análisis y la discusión de diferentes puntos de vista al resolver un problema matemático promueven la interacción, la reflexión, el perfeccionamiento, la discusión y la rectificación de las ideas (NCTM, 1992, 2003). Esto apoya un aprendizaje de conceptos con mayor sentido y significación, y la opción de hacerlo de un modo público y permanente (sobre todo, si la comunicación es escrita). El propio desarrollo de la comunicación aparejado a estos procesos también contribuye a que los alumnos se conviertan, progresivamente, en mejores pensadores matemáticos y puedan profundizar en su comprensión de las matemáticas (NCTM, 1992, 2003), a la par que desarrollan una mayor seguridad en sus propios procesos de pensamiento (Powell & López, 1989; citado en Shepard, 1993).

Además, las actividades de comunicación también promueven un mayor compromiso académico y una mayor implicación y responsabilidad de los alumnos con su propio aprendizaje (NCTM, 1992, 2003; Kemper, 2003). Para ello, es necesario que exista regularidad en su realización (sin que tampoco exista una sobresaturación que sería contraproducente, Davison & Pearce, 1990) y la presencia de un ambiente donde los alumnos se sientan libres de comunicar sus ideas y “correr riesgos intelectuales” (NCTM, 2003, p. 201). El docente también tiene un papel clave, tanto al planificar y plantear tareas que puedan dar lugar a una rica discusión asociada a contenidos matemáticos relevantes, como al reforzar su puesta en práctica con acciones como el planteamiento de preguntas, la enfatización de aspectos emergentes de importancia, y la admisión y conexión de diferentes respuestas (NCTM, 2003).

A pesar del auge de las investigaciones en educación matemática que adoptan un enfoque sociocultural y de interacción social en el aprendizaje de las matemáticas en el aula, y que dan un mayor peso a las actividades y experiencias basadas en la comunicación entre iguales y con el docente, este cambio de paradigma está lejos de llegar a todas las aulas. Esto puede ser explicado por la lentitud tanto de la transferencia de la investigación al aula común como de los cambios en educación. A ello se une la amplitud temporal y la continuidad necesaria para poder implementar de modo efectivo experiencias de este tipo, de tal forma que llegue a producirse un cambio de mentalidad en los alumnos sobre lo que significa “hacer matemáticas” (Clarke *et al*., 1993) y desarrollar su adaptación a este tipo de metodologías.

En el caso de las cuatro aulas participantes en esta investigación, elegidas por disponibilidad, la metodología docente (que los profesores colaboradores han desarrollado sin que hubiera ninguna directriz ni intervención del EI) ha sido próxima a una metodología *tradicional* como la remarcada al inicio de este subapartado, basada en exposiciones docentes y con un esquema del tipo “contar-mostrar-hacer”. En este entorno, las posibilidades de comunicación matemática de los alumnos se han reducido a contestar estímulos docentes en el aula (como preguntas al hilo de la exposición) o al papel de la escritura hecha por los alumnos en sus propios cuadernos.

En el siguiente subapartado se realiza una revisión de investigaciones sobre diversas formas de actividades asociadas a la escritura matemática que pueden plantearse en un aula de matemáticas, y los beneficios principales asociados a las mismas. En nuestro estudio no han sido planteadas por los docentes tareas de escritura como tales a los alumnos. Pero sí que puede haber diferencias entre los alumnos participantes al desarrollar y utilizar, en mayor o menor medida y con diferentes propósitos, la escritura en sus cuadernos de matemáticas, de un modo personal y asociado a su concepción de las matemáticas, y de su estudio y aprendizaje. El estudio de estos comentarios escritos forma parte de este proyecto de tesis doctoral.

I.3.3. LA ESCRITURA COMO FORMA PARTICULAR DE COMUNICACIÓN MATEMÁTICA

Existe un número muy amplio de investigaciones relacionadas con el uso de la escritura y de tareas de escritura en clases de matemáticas, como un tipo particular de comunicación desarrollada por el alumno. En este subapartado se recogen un número importante de ellas, realizando una revisión tanto de los tipos de actividades planteados como de los efectos beneficiosos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que ha evidenciado su desarrollo. No obstante, debe alertarse sobre la problemática existente para concretar y cuantificar cuáles son esos efectos, una dificultad puesta de manifiesto por varios investigadores (Davison & Pearce, 1990; Shield & Galbraith, 1998; Porter & Masingila, 2002). De hecho, estos últimos autores, en su investigación, intentan hacer ver que los beneficios están más ligados al tipo de tarea planteada (es decir, que sea una tarea de discusión y reflexión de ideas matemáticas, aunque sea de forma oral) que al hecho de que la tarea involucre escribir. No obstante, el criterio de comparación que utilizan es algo controvertido, ya que únicamente se fijan en los errores de tipo conceptual o procedimental cometidos en el desarrollo de las tareas. Esta problemática lleva a Shield y colaboradores a plantearse el desarrollo de modelos de análisis de la escritura matemática de los alumnos (Shield & Swinson, 1994; Shield, 1996; Shield & Galbraith, 1998), que se comentarán en el subapartado I.3.5.

Existe un consenso generalizado en las investigaciones y escritos de referencia consultados sobre los efectos positivos que tiene el desarrollo de actividades de escritura en matemáticas, tanto para el desarrollo cognitivo como del aprendizaje de la materia en el alumnado. Al ser la escritura una forma de comunicación, algunos de ellos ya se han comentado en el subapartado anterior; pero la comunicación escrita tiene una serie de características especiales que refuerzan algunos aspectos.

Como indican Countryman (1992), el NCTM (1992, 2003), Burns (1995, citado en McCormick, 2010) o Pimm (1999), la escritura en matemáticas contribuye de forma especial a que el alumno pueda explorar, reunir, organizar, estructurar, aclarar, consolidar y reflexionar acerca de su propio pensamiento; permitiendo una participación activa del estudiante tanto en la construcción de conocimientos como de significados (Emig, 1977, citado en Borasi & Rose, 1989; Countryman, 1992). El NCTM (2003, p. 358) resume esas ideas en la siguiente frase: “Escribir es una valiosa manera de reflexionar sobre lo que uno sabe y de solidificarlo”. Esto sucede en el propio momento en que se está produciendo la escritura (Countryman, 1992), al necesitar una mayor planificación para su desarrollo que la comunicación oral, más espontánea y con una mayor ritmo de producción (Pimm, 1999; Baxter *et al.*, 2005). Pero, además, su carácter permanente hace que esto también suceda con posterioridad al momento de la escritura. La escritura ofrece al estudiante la posibilidad de obtener una retroalimentación inmediata de su propio pensamiento escrito, además de la utilidad de posibles relecturas posteriores (NCTM, 2003), que pueden ayudar a su consolidación, pero también a una nueva reflexión y a su posible modificación o evolución.

Esa mayor planificación y posibilidad de retroalimentación ofrece a los alumnos más posibilidades para estimular las conexiones y relaciones entre los conocimientos nuevos para el alumno, entre éstos y los conocimientos y experiencias previas, lo que supone favorecer el desarrollo de mejores aprendizajes por ser más significativos (Countryman, 1992; Shield & Swinson, 1994). Además, convierte a la escritura en una herramienta importante para que el alumno pueda “aprender a pensar” (*learning to think*, Forsman, 1985), no sólo de forma general, sino también en procesos matemáticos como la resolución de problemas, algo puesto de manifiesto por Bell y Bell (1985) en las conclusiones de su artículo:

> By encouraging students to explain themselves in clear coherent prose, exposition allows them to become more aware of their thinking process and more conscious of the choices they are making as they carry out the computation and analysis involved in solving math problems (Bell & Bell, 1985, p. 220).

Tanto Conolly (1989; citado en Baxter *et al.*, 2005) como Santos y Semana (2015) también indican la contribución de la escritura a desarrollar otros procesos útiles al hacer matemáticas que son de alto nivel cognitivo, como definir, clasificar, resumir, expresar ideas, razonar o pensar de modo crítico y consciente.

Pero los beneficios van más allá del dominio cognitivo. Las tareas de escritura también son útiles para que todos los alumnos puedan expresarse de una manera más cómoda que a través de la comunicación oral (NCTM, 1992), especialmente los más tímidos.

La escritura es un medio para que los alumnos ganen confianza y tomen un mayor riesgo en la expresión, no sólo de sus ideas matemáticas, sino también de aspectos propios del dominio afectivo, como sus ansiedades, sentimientos y sus problemas como aprendices en matemáticas (Schmidt, 1985; Countryman, 1992; Salinas, 2004). Además, las tareas de escritura contribuyen a mejorar la propia expresión lingüística de cada estudiante (Davison & Pearce, 1992).

A través de estas tareas, el docente también obtiene información valiosa sobre el desarrollo del trabajo y del pensamiento del estudiante (Countryman, 1992), y le puede servir para identificar posibles errores de comprensión (Shield & Swinson, 1994; NCTM, 2003), así como sus actitudes hacia las matemáticas (Borasi & Rose, 1989). Además, la utilización regular de este tipo de tareas durante un curso posibilita el desarrollo de una evaluación de tipo formativo del estudiante, estableciéndose una comunicación bidireccional profesor-alumno que proporciona una retroalimentación crítica y constructiva al alumno (Forsman, 1985; Santos & Semana, 2015), que promueve su aprendizaje (Countryman, 1992) y que le permite su propia autoevaluación y la autorregulación de su aprendizaje (Salinas, 2004; Santos & Semana, 2015). Esto superaría una mera evaluación sumativa, a través de trabajos o pruebas que, generalmente, también tienen una naturaleza escrita.

Sin embargo, a pesar de todos estos beneficios relacionados con la realización de actividades de escritura en matemáticas, este tipo de actividades son poco frecuentes en las aulas (Borasi & Rose, 1989; Davison & Pearce, 1990; NCTM, 1992, 2003; Ntenza, 2006). Los profesores tienen dificultades para relacionar e integrar escritura y matemáticas y suelen existir resistencias para incorporar este tipo de actividades (Countryman, 1992). Los investigadores expertos en la temática enuncian diferentes motivos que pueden explicar lo anterior:

- La falta de formación de los docentes sobre las diferentes posibilidades que ofrecen las tareas de escritura (Davison & Pearce, 1990).

- La falta de experiencia de muchos profesores en el planteamiento de tareas de escritura, en parte debido a que tampoco han experimentado tareas de este tipo cuando fueron alumnos (Salinas, 2004; McCormick, 2010).

- La influencia del tipo de actividades planteadas por los libros de texto, donde este tipo de tareas son prácticamente inexistentes (Ntenza, 2006)

- La falta de convencimiento del papel que juega la escritura como proceso central y transversal en el aprendizaje matemático (Kemper, 2003).

Britton, Burgess, Martin, McLeod y Rosen (1975) detectaron que la gran mayoría de la escritura que realizaban los alumnos de Secundaria en las aulas estaba ligada a tareas de transcripción, registro y reproducción de la información. Es decir, tareas de baja demanda cognitiva, más ligadas a actividades como la toma de apuntes (tratada en el apartado I.2), o la evaluación de un alumno a través de la reproducción escrita de un tema. Estos autores proponen una distinción de tres tipos de escritura, que ha sido bastante utilizada en la literatura, y que explicamos a continuación:

- **Escritura hecha para el intercambio** (en inglés, *transactional writing*): Es una escritura cuyo objetivo es el de comunicar. Está elaborada por el bien de un lector diferente del escritor, y busca informar, persuadir e instruir a dicho lector. Se caracteriza por su claridad y concisión, derivada de la tradición que asocia la aceptabilidad de un trabajo con su carácter limpio, legible y sin tachas (Pimm, 1999). Es una escritura preferentemente pública (Fried & Amit, 2003).

- **Escritura poética** (en inglés, *poetic writing*): Es una escritura elaborada por el bien de un lector diferente del escritor, pero con un propósito más creativo que comunicador.

- **Escritura expresiva** (en inglés, *expressive writing*): Es una escritura hecha por el bien del propio escritor, a través de la cual busca externalizar y clarificar sus propios pensamientos. Se caracteriza por ser una escritura perteneciente al dominio privado del escritor (Fried & Amit, 2003).

Los tipos de escritura principales, desde el punto de vista docente, son el primero y el tercero. Utilizando esta distinción y el rechazo al predominio de actividades de tipo transcriptivo, Britton fue el precursor y acuñador de un movimiento curricular transformador que floreció en los años 80 y 90 entre muchos docentes, especialmente en el mundo angloparlante, denominado *Escribir a través del Currículo* (en inglés, *Writing Across the Curriculum*, McLeod & Soven, 1992). Este movimiento partía de una posición constructivista y activa del aprendizaje del alumno, y de una visión de la escritura y el pensamiento como estrechos aliados (McLeod & Soven, 1992). Se pretendía involucrar al estudiante en la construcción activa de significados, conexiones y relaciones que configuraran su propio conocimiento, y la comunicación del mismo a docente y compañeros a través del planteamiento de actividades de escritura en todas las asignaturas (Borasi & Rose, 1989; Davison & Pearce, 1990; Countryman, 1992;

Kemper, 2003). Dentro de esta corriente, y de forma paralela a los dos tipos de escritura principales de Britton et al. (1975), se distinguieron dos movimientos que deben ser vistos como enfoques complementarios entre sí y no mutuamente excluyentes (McLeod & Soven, 1992): los movimientos *Escribir para Aprender* (en inglés, *Writing to Learn*) y *Escribir en las Disciplinas* (*Writing in the Disciplines*).

El movimiento *Escribir para Aprender*, asociado a una escritura de tipo expresivo, se basa en un enfoque cognitivo de la escritura: como medio y herramienta para la construcción y el desarrollo del aprendizaje del propio alumno, que le permite construir y cambiar sus estructuras de pensamiento (Countryman, 1992; McLeod & Soven, 1992), explorar sus percepciones, descubrir su conocimiento, clarificar su comprensión (Kemper, 2003) o facilitar el desarrollo de sus habilidades de pensamiento (Forsman, 1985).

Mientras tanto, el movimiento *Escribir en las Disciplinas* está ligado a una *escritura hecha para el intercambio* y tiene un enfoque más retórico de la escritura, ligado a la forma que debe tener la comunicación final según cuál sea la disciplina y los lectores a quien vaya dirigida. Este enfoque pretende concienciar al alumno de la existencia de diferentes modos y convenciones de escritura asociados a cada disciplina, que han sido construidos socialmente y que deben ser tenidos en cuenta al elaborar un texto (McLeod & Soven, 1992; Kemper, 2003), siendo necesario decidir qué ideas son las que se van a transmitir y cómo, y cuáles se van a descartar (Forsman, 1985).

En muchos casos, también en matemáticas y en asignaturas de ámbito científico, existe una preponderancia en la escuela de la *escritura hecha para el intercambio* y actividades de tipo *Escribir en las Disciplinas*, con una escasa visibilidad y valoración de la *escritura expresiva* y la *escritura para aprender*. Esto puede llevar a que los alumnos disocien el proceso de escritura de un informe con los resultados de una investigación o de una experimentación, donde buscan cubrir los requisitos mínimos pedidos, de los procesos de pensamiento, reflexión o resolución de problemáticas surgidas en la investigación o la experimentación (Hawkins, Coney & Bystrom, 1996). La sobreenfatización de la *escritura hecha para el intercambio*, especialmente en la asignatura de matemáticas, puede debilitar el desarrollo y el fomento del pensamiento reflexivo, creativo e independiente en los alumnos (Fulwiler, 1982; citado en Fried & Amit, 2003), que les puede llevar a rechazar la reflexión como algo natural y legítimo en matemáticas e influir en sus concepciones sobre las matemáticas (Countryman, 1992; Fried & Amit, 2003).

Por tanto, consideramos que en las clases de matemáticas debiera fomentarse y concederse una importancia especial a la *escritura expresiva*, con más tareas de tipo *Escribir para Aprender*. Según comentan Fried y Amit (2003), este tipo de escritura es la ideal cuando se está comenzando a reflexionar o a pensar en la resolución de un problema, y es un primer paso para la comunicación de conocimiento (Kemper, 2003), evolucionando progresivamente hacia una *escritura para el intercambio*, a medida que el problema o la situación se entiende mejor y se quiere comunicar (Fried & Amit, 2003). Esa evolución puede realizarse a través del seguimiento de diversas fases: preescritura, borrador, revisión, edición y publicación final (Countryman, 1992). La fase de preescritura, y las actividades asociadas a ella, destacan como variable cardinal en la calidad del desarrollo posterior (Davison & Pearce, 1990; NCTM, 2003).

Existen un gran número de estudios e investigaciones, en los 80 y 90, relacionadas con la corriente *Escribir a través del Currículo* en matemáticas y el análisis de los efectos de su introducción. En la actualidad, esta corriente parece haberse diluido sin que, en muchos casos, haya existido una transferencia real en las aulas. Consideramos que el cuaderno del alumno representa un lugar ideal para el planteamiento y desarrollo de tareas de este tipo aunque, como indican Fried y Amit (2003), el docente juega un papel determinante en que eso realmente suceda, bien porque no se propongan tareas para desarrollar una *escritura expresiva* o del tipo *Escribir para Aprender*, o bien porque el cuaderno se sitúe dentro de un *dominio público*, que coarte o limite las posibilidades de que los alumnos puedan contemplar de forma personal este tipo de escritura en sus cuadernos.

Existen varias clasificaciones de diferentes tipos de escritura matemática que pueden desarrollarse. Por ejemplo, Davison y Pearce (1990) distinguen las siguientes: transcripción de información, traducción de símbolos en palabras, actividades de tipo diario, resúmenes de información, actividades de creación de problemas con texto y escritura de informes sobre el trabajo desarrollado. No obstante, utilizaremos como referencia la clasificación de Shield y Galbraith (1998), que realizan una clasificación general de tareas de escritura en el aula en dos grandes tipos:

- Actividades de tipo “escritura en un diario” (en inglés, *journal writing*), consistentes en la escritura regular de entradas o episodios en los que el estudiante reflexiona sobre su aprendizaje y/o expresa sus pensamientos y sentimientos hacia las matemáticas y hacia su enseñanza-aprendizaje.

- Actividades de tipo “escritura expositiva” (en inglés, *expository writing*), en las que se incita a los estudiantes a describir y a explicar por escrito conocimiento matemático. Por ejemplo, explicar diversos aspectos de un determinado contenido, cómo funciona un procedimiento matemático, el porqué de su validez o explicar un resultado obtenido.

En los subapartados cuarto y quinto de este apartado se tratan los dos tipos de actividades, relacionándolas, en último término, con este trabajo de tesis doctoral. No obstante, y como indican los propios Shield & Galbraith (1998) los dos tipos de tareas no son mutuamente excluyentes, puesto que, por ejemplo, dentro de la escritura de un diario se puede desarrollar escritura de tipo expositivo en determinados momentos.

I.3.4. ACTIVIDADES DE TIPO "ESCRITURA DE UN DIARIO" (JOURNAL WRITING)

Como es obvio, dentro de este tipo de tareas se considera el planteamiento a los alumnos de la escritura regular de un diario (por ejemplo, a lo largo de un curso de matemáticas). En ese diario se espera que los alumnos reflexionen, escriban y compartan periódicamente sus pensamientos, opiniones, sentimientos, emociones, miedos, conocimientos, preguntas, experiencias o indagaciones tanto con las matemáticas como con el desarrollo de su aprendizaje a lo largo del curso (Forsman, 1985; Kemper, 2003). En definitiva, puede ser una herramienta posible para desarrollar en los alumnos la habilidad de "aprender a pensar" (Forsman, 1985). No obstante, dentro de esta tarea general existe un amplio número de variantes, que presentaremos a lo largo de este subapartado.

La propuesta a los alumnos de la escritura regular de un diario de matemáticas no es algo trivial. Es una tarea que, inicialmente, suele despertar escepticismo entre los alumnos (Countryman, 1992) que no están acostumbrados a tareas asociadas a una escritura expresiva, por lo que es necesaria la existencia de un tiempo de adaptación (Pimm, 1999). En este sentido, Countryman (1992) propone el desarrollo de algunas tareas "preparatorias". Por ejemplo, comenzar dejando unos minutos al final de cada clase para que los alumnos escriban libremente sobre ideas, sentimientos, cuestiones o pensamientos sobre las matemáticas o sobre la clase vivida, promoviendo una mayor activación e implicación progresiva de los estudiantes. O también proponer la realización de una "autobiografía matemática", donde escriban su relación y recorrido académico con las matemáticas durante su escolaridad (recuerdos, triunfos, "desastres", gustos, miedos), que además aporta información muy valiosa al docente sobre el alumnado y sus necesidades. Tras tareas como estas, la autora también indica la necesidad de explicar claramente a los alumnos qué es lo que se les pide en un diario, además de tener un control especial de su desarrollo en los primeros días, con una retroalimentación no sólo individual, sino también grupal, para valorar el enfoque que están dando a la tarea.

Además, los estudios evidencian que para que se maximice la efectividad de una actividad de "tipo diario" es necesaria una implementación en un amplio periodo temporal (por ejemplo, durante un curso académico completo), y de manera periódica y regular durante el mismo.

Según han detectado numerosas investigaciones sobre diarios en matemáticas, es común, y también es conveniente, que el enfoque y las temáticas sobre las que los estudiantes escriben de manera predominante en sus diarios evolucionen durante la implementación (Forsman, 1985; Baxter et al., 2005). En las primeras semanas los estudiantes tienden a centrarse en aspectos afectivos y emocionales hacia las matemáticas, y poco en aspectos asociados a tópicos o a pensamiento matemático. Las entradas de tipo afectivo son útiles en los momentos iniciales, puesto que, como indican Borasi y Rose (1989), la verbalización de sentimientos negativos, ansiedades, miedos o frustraciones ayuda a los alumnos a reconocerlos y a ser conscientes de su influencia y de su papel como obstáculo para el desarrollo de su aprendizaje en matemáticas, pudiendo así contribuir a su evolución.

Tras esta primera etapa, las investigaciones consultadas constatan una evolución del tipo de escritura y las temáticas predominantes en los diarios (Forsman, 1985; Borasi & Rose, 1989; Waywood, 1992; Clarke *et al*., 1993; Salinas, 2004; Baxter *et al*., 2005). Los alumnos tienden a escribir más en sus entradas, con una escritura más basada en tópicos y en contenidos matemáticos, una mayor personalización y reflejo de la actividad del estudiante con el contenido matemático y un mayor diálogo consigo mismo, una mayor aparición de asociaciones, conexiones y relaciones entre los elementos matemáticos y con conocimientos o experiencias previas, y una mayor carga de escritura reflexiva y de pensamiento divergente. También se refleja la aparición de más preguntas y con mayor concreción, por lo que éstas sirven mejor como herramientas para focalizar y dirigir el pensamiento y el aprendizaje del alumno, y para liderar el desarrollo, y la construcción de ideas y nuevos conocimientos (Waywood, 1994). No obstante, estas evoluciones no son uniformes, siendo clave el papel del docente en esta evolución (Clarke *et al.*, 1993), a través de la retroalimentación ofrecida y la incitación a los estudiantes a escribir sobre algunos temas concretos acerca de los cuales los estudiantes no suelen hablar espontáneamente (Borasi & Rose, 1989), como la naturaleza de las matemáticas o escribir sobre algún tópico en concreto. En este sentido, es útil el planteamiento de preguntas o de frases abiertas para desarrollar, por ejemplo: "Las matemáticas son…", o "En matemáticas, lo que me resulta más difícil/fácil es…" (Countryman, 1992).

El carácter permanente del diario hace que esa evolución del alumno quede registrada a lo largo de la lectura de las entradas y que pueda ser contrastada no únicamente por el docente, sino también por el propio estudiante. En este sentido, varios autores, como Countryman (1992) o Salinas (2004) proponen una actividad de "cierre" con ese fin. La tarea, con un espíritu cercano a una actividad de tipo portafolio, consiste en la selección por parte del alumno de varias entradas de su diario en las que se pueda percibir y contrastar una evolución a lo largo de la implementación, y a través de las cuales el estudiante realice una composición escrita sobre lo que ha supuesto para él la implementación del diario, evidencie su evolución, y realice una conclusión o una evaluación global de la experiencia.

El estudio paradigmático, por su extensión y alcance, de la implementación de un diario en clase de matemáticas es el estudio de Waywood y colaboradores (Waywood, 1992, 1994; Clarke *et al.*, 1993). En esta investigación, la actividad se integró longitudinalmente en un colegio femenino australiano, en los Grados 7 a 11 (Educación Secundaria) y en todas las clases de matemáticas. En este estudio, a diferencia de otros donde se deja libertad a los estudiantes, los profesores uniformizaron qué cuatro tareas se esperaba que los estudiantes desarrollaran en sus diarios: resumir (buscando incitar el desarrollo de conocimiento integrativo), recolectar ejemplos (por el papel de éstos en el desarrollo del pensamiento matemático), hacer preguntas y discutir temas o ideas (buscando una mayor implicación del estudiante).

En esta investigación, Waywood y sus colaboradores detectaron la existencia de tres grandes grupos de estudiantes según su forma de enfocar estas tareas y los procesos que involucran (Clarke *et al.*, 1993; Waywood, 1992):

- Alumnos de tipo **recuento** (en inglés, *recount*): Aquellos que describen y reportan objetivamente, y de forma pasiva, lo sucedido en la clase, apoyándose en la lección, las tareas y su cronología. Los comentarios que realizan son muy generales, sin involucrarse o reflejarse en ellos, y sin que intente progresar en su aprendizaje o generar conocimientos a través de su escritura. Estos alumnos ven el conocimiento matemático como *algo a ser descrito*.

- Alumnos de tipo **resumen/sumario** (en inglés, summary): Aquellos que intentan codificar e integrar el contenido de las sesiones en su sistema de conocimientos, pero con una perspectiva utilitaria (por ejemplo, para la evaluación). Entre estos alumnos se aprecia una transición desde aspectos descriptivos y de mero resumen hacia la inclusión de comentarios y de "problemas" del alumno con respecto al contenido tratado. No obstante, en este tipo de alumnos la discusión sobre su pensamiento matemático o los porqués que hay detrás de lo realizado es escasa. Estos alumnos ven el conocimiento matemático como un *conjunto de conocimientos a recolectar y conectar*.

- Alumnos de tipo **diálogo** (en inglés, *dialogue*): Aquellos alumnos que entienden el diario como un requerimiento para generar y construir matemáticas. El foco está en las ideas presentadas y su relación y discusión con ideas ya conocidas, cuestionándose y explicando lo sucedido, así como planteando nuevos interrogantes, que no siempre pueden llegar a responder. También identifican y analizan sus dificultades con las matemáticas y los contenidos. Estos alumnos ven el conocimiento matemático como *algo a crear y configurar*.

Además, el carácter longitudinal de este estudio, permitió detectar una evolución paulatina y progresiva del modo en que enfocaban la escritura de un diario y su calidad. Gradualmente, los alumnos van configurándose como agentes en la construcción del conocimiento matemático (avanzando hacia el tipo "diálogo"). Los que alcanzan este último nivel son los que hacen una mejor valoración de esta actividad y los que la ven como más provechosa (Clarke *et al.*, 1993). Por tanto, debe intentar favorecerse una implementación extensa y con una retroalimentación adecuada para facilitar esa evolución.

Son muchos los beneficios que las diferentes investigaciones han asociado al planteamiento y desarrollo de actividades de "tipo diario". Borasi y Rose (1989) distinguen beneficios de tres tipos, que son refrendados por otros trabajos, y que se remarcan brevemente a continuación (puesto que ya se ha ido haciendo mención implícita a algunos en el desarrollo del subapartado).

Por una parte, indican que la tarea reporta diferentes beneficios al alumno. Se destaca su *valor terapéutico* para que los alumnos puedan reconocer y superar posibles ansiedades y miedos hacia las matemáticas. También mejora su capacidad para explicar los conceptos matemáticos, su significado y su articulación; existe un progreso en sus habilidades cognitivas y de resolución de problemas, y en sus concepciones hacia las matemáticas y lo que significa *hacer matemáticas*. Por último, Salinas (2004) también señala que ayuda a los estudiantes a ser más responsables en su propio proceso de desarrollo y evolución de su aprendizaje matemático.

Por otra parte, esta tarea también reporta beneficios al profesor, que son importantes tanto para su labor docente como para su desarrollo profesional (Baxter *et al.*, 2005) aunque hayan sido menos destacados por la literatura de investigación. Los diarios posibilitan ofrecer una retroalimentación y una monitorización individualizada a cada estudiante, según sus necesidades, y ver su evolución. También les permiten conocer información sobre el desarrollo e impacto del propio curso y su metodología. Por último, a largo plazo, le permitirá detectar y reconocer algunas asunciones que adopta inconscientemente en su docencia, y así poder proponer cambios instruccionales.

Un tercer grupo de beneficios hacen referencia al diario como medio para la comunicación y el diálogo profesor-alumno. Así, el diario permite diálogos para intercambiar y discutir ideas, dar sugerencias o resolver dudas concretas. Además, el diario también genera una atmósfera de apoyo, compenetración y respeto mutuo entre los alumnos y de éstos con el docente, que mejora la motivación, seguridad, confianza y desempeño de los estudiantes.

En muchas de las investigaciones comentadas, la elaboración de un diario es planteada por su propia importancia intrínseca. Sin embargo, el diario también puede servir como tarea activadora o de apoyo para desarrollar otras. Un ejemplo es el trabajo de Hawkins *et al.* (1996) en el que se pide a los alumnos recoger la escritura *incidental* (como la llaman estos autores), de tipo expresivo (Britton *et al.*, 1975), con las diferentes ideas, procesos y problemáticas ocurridas durante un proyecto grupal de ingeniería y el modo en que las han resuelto para enriquecer los informes finales sobre el proyecto. Con la ayuda de estos diarios, se consiguió que los informes estuvieran más enfocados en los procesos seguidos y la toma de decisiones y no únicamente en meros aspectos formales, mostrándose además una evolución progresiva desde la escritura expresiva hacia una hecha para el intercambio (Britton *et al.*, 1975), sirviendo el primer tipo de escritura como base y enriquecimiento del segundo (Forsman, 1985; Fried & Amit, 2003).

En nuestro trabajo de tesis doctoral ningún docente planteó la escritura de un diario ni actividades similares a los estudiantes durante el curso académico en que se recogieron los datos. Pero sí que pudiera suceder que los estudiantes utilizaran su cuaderno *motu proprio* para llevar a cabo acciones similares o comentarios con una tipología o temática similar (reflexión sobre su aprendizaje y desarrollo matemático, expresión de pensamientos, sentimientos o dificultades hacia las matemáticas). O, más en general, la aparición de escritura de tipo expresivo en los cuadernos (Britton *et al.*, 1975), que pudiera ser de utilidad para el propio alumno. La aparición de escritura de este tipo y de su utilidad para los alumnos puede suponer una diferencia entre estudiantes, por lo que será uno de las variables en las que nos fijaremos en nuestro análisis de los cuadernos.

I.3.5. ACTIVIDADES DE TIPO "ESCRITURA EXPOSITIVA" (EXPOSITORY WRITING)

Las actividades de tipo "escritura expositiva" (*expository writing*) tienen por objetivo que el estudiante describa, explique o presente un determinado contenido matemático, componga un texto asociado a un concepto o contenido matemático o bien explique y justifique su resolución a una determinada tarea o problema matemático. Así, como ya hemos comentado, estas tareas se caracterizan por la predominancia de una escritura hecha para el intercambio (Britton *et al*., 1975), donde el objetivo es el de comunicar algo a un lector diferente del propio escritor. Las tareas de este tipo encajan en la vertiente de *Escribir en las Disciplinas* (McLeod & Soven, 1992), puesto que el foco está puesto tanto en el contenido que se pretende comunicar como en la forma en que se hace y en el respeto o seguimiento de los modos y las convenciones socialmente adoptadas en las escrituras propias de una disciplina (en nuestro caso, las matemáticas).

Este tipo de tareas suelen proponerse más habitualmente que las de "tipo diario", pero existen varias problemáticas que suponen un obstáculo para que estas tareas tengan un beneficio máximo para el alumno. Un problema es que las tareas de tipo expositivo propuestas suelen demandar un bajo nivel de comprensión e implicación del alumno, como las tareas de transcripción, registro, resumen de la información o la realización de un informe descriptivo y no inferencial (Shepard, 1993). Davison y Pearce (1990) muestran cómo los estudiantes valoran la combinación y el equilibrio de tareas como las anteriores con otras que sí requieran una mayor comprensión, desarrollo del aprendizaje y creatividad. Otro problema es la falta de conocimiento, en muchos docentes, de los procesos asociados a la composición escrita (Countryman, 1992), lo que les provoca dificultad para poder guiar y retroalimentar adecuadamente a los estudiantes, en pro de un avance de la calidad de su escritura. Y por último, y asociado a los dos anteriores, la falta de concreción y/o de argumentación existente en muchos docentes para determinar y valorar qué características hacen que un "texto matemático" sea considerado como adecuado (Morgan, 1996, 2001). De este último aspecto hablaremos con mayor profundidad más adelante.

De forma general, hay dos grandes tipos de tareas de “escritura expositiva” que han sido más mencionadas y utilizadas en las investigaciones en educación matemática:

- Escritura asociada a los problemas matemáticos: invención de problemas verbales por los alumnos, escritura y explicación de su resolución, escritura de un informe (individual o grupal) explicando los avances realizados al resolver, modelizar o “investigar” sobre un problema.

- Escritura de cartas dirigidas a un amigo o a un alumno ausente en el que se pide explica un determinado tópico ya tratado en la clase para que el destinatario lo pueda comprender.

También, de forma menos frecuente, se han planteado tareas de tipo expositivo asociadas al uso de vocabulario matemático (Davison & Pearce, 1992), la construcción de preguntas de diferente nivel sobre tópicos (Forsman, 1985) o la elaboración de una posible prueba de evaluación sobre algún tópico (Countryman, 1992).

En relación al primer gran grupo de tareas, en el caso de que se pida a los alumnos inventar y escribir problemas matemáticos verbales, es interesante que éstos sean planteados a sus compañeros para tratar su posible (o no) resolución y reformulación (Schmidt, 1985; Davison & Pearce, 1990, 1992). Este proceso les ayuda a darse cuenta de que no sólo deben comprender las diferentes palabras que aparecen en el problema, sino que también juega un papel fundamental comprender la estructura lógica del problema (Nesher, 2000). En este sentido, existen muchas investigaciones que alertan de la problemática provocada por la presencia de “indicios” verbales que puedan actuar como distractores de la estructura del problema (Nesher, 2000) o de la falta de atención hacia algunas palabras clave (conjunciones, preposiciones) en la determinación de la estructura de un problema (Countryman, 1992).

Otras investigaciones resaltan el hecho de explicar verbalmente el proceso de resolución de un problema, tanto individualmente como en procesos grupales. Este tipo de textos explicativos ayudan a fomentar posibles diferentes resoluciones del problema y a posibilitar la detección de malentendidos o concepciones erróneas sobre los elementos involucrados, lo que mejora el aprendizaje (Schmidt, 1985; Countryman, 1992). Además, también provocarse una mejora de la propia escritura matemática de los alumnos a partir de una adecuada retroalimentación (Santos & Semana, 2015). Vamos a detenernos en varios estudios que consideramos de especial interés (Iversen, 2013; McCormick, 2010; Morgan, 1995, 1996, 2001, 2013, 2014; Santos & Semana, 2015), explicando a continuación sus ideas fundamentales.

La resolución grupal de problemas matemáticamente "ricos" o que requieren el uso de procesos matemáticos de alto nivel cognitivo, y la escritura posterior de explicaciones en las que se comuniquen, expliquen y justifiquen los resultados obtenidos es tratada en los estudios de McCormick (2010) y de Santos y Semana (2015). El estudio de McCormick (2010), con maestros en formación, trata sobre la evaluación y desarrollo de una rúbrica compartida para evaluar explicaciones escritas (un aspecto de interés también en su desarrollo profesional), y su utilización para obtener retroalimentación y hacer propuestas de mejora para evolucionar su propia escritura matemática. El estudio de Santos y Semana (2015), desarrollado en un aula de Secundaria (Grado 8), busca estudiar la evolución y el desarrollo de la escritura expositiva en la explicación de problemas haciendo uso de una rúbrica y de un guion entregado previamente a los estudiantes, y de una retroalimentación interrogativa, selectiva y orientadora del docente, para buscar mejorar una primera entrega. En ambos estudios se observa una evolución de los informes explicativos de los grupos de alumnos: una mayor concreción y concisión de los objetivos de cada tarea, una mejor estructuración de las explicaciones de los pasos seguidos, unas justificaciones más completas de dichos pasos, así como un mayor uso y evolución de las representaciones utilizadas.

Los estudios de disertación doctoral de Morgan (1995, 1996) están centrados en el análisis de un informe muy concreto que elaboran los estudiantes para explicar sus avances y resultados obtenidos en la resolución de un problema matemático: el que pertenece al examen del GCSE para obtener el certificado de Educación Secundaria en Reino Unido. Su enfoque de investigación no está tanto en el contenido expuesto por los alumnos sino en la influencia que tiene el lenguaje utilizado en el texto en el modo en que los evaluadores consideran ese informe como más o menos adecuado. Esta autora muestra la gran dificultad existente entre los profesores y evaluadores para que argumenten o concreten por qué prefieren (y evalúan mejor) unos textos frente a otros. Estas preferencias, aunque los docentes no sean siempre conscientes de ello, están influenciadas por el tipo de lenguaje utilizado.

Para buscar profundizar en estos aspectos, Morgan (1995, 1996) utiliza un enfoque basado en las tres metafunciones del lenguaje establecidas por Halliday (1973, 1985; citados en Morgan, 1996), así como las "elecciones" realizadas tanto por el autor del texto al elaborarlo como por el lector o el evaluador al interpretarlo, y que no siempre son conscientes y pueden verbalizarse. El marco de Halliday se sustenta en la idea de que el lenguaje que usamos interpreta la naturaleza de nuestras experiencias con el mundo, así como muestra nuestra identidad, relaciones y actitudes hacia él (Morgan, 2013). En este sentido, las tres metafunciones enunciadas por Halliday ayudan a la realización de interpretaciones sobre los textos, en este caso matemáticos, a partir de las “elecciones” gramaticales en su elaboración (Morgan, 1995, 1996):

- **Función ideacional**: Se refiere al modo en que aparecen las matemáticas en un texto: qué eventos, actividades u objetos son considerados como matemáticos, cómo surgen y cuál es el rol en ellos del ser humano.

En este sentido, se diferencian dos visiones contrapuestas de las matemáticas: una visión absolutista y platónica o una visión como una ciencia construida socialmente. Estas dos visiones se evidencian en los textos a través de la presencia de procesos de diferente naturaleza (mentales frente a materiales), y de los objetos y actores participantes (posible oscurecimiento de las acciones humanas: nominalización de verbos, uso de objetos matemáticos como sujetos o de la voz pasiva).

- **Función interpersonal:** Se refiere a las relaciones entre el autor y los lectores, tanto en el grado de autoridad (relación de simetría/asimetría) como en el modo en que el autor evidencia su identificación como individuo en una comunidad (en este caso, la comunidad matemática).

El uso de pronombres personales es un importante indicativo para esta función: su ausencia oscurece el agente, la consistencia en su uso denota la madurez del escritor, y el uso de la primera persona del plural (“nosotros”) es una muestra de pertenencia a la comunidad matemática. Este uso de los pronombres es utilizado por Iversen (2013) en un estudio exploratorio en el que, fundamentalmente, se pretende analizar el modo en el que los alumnos reflejan la autoría en sus tareas basadas en la escritura de textos en matemáticas (como parte de su *identidad* como escritores en matemáticas). Otros elementos que también dan información sobre la función interpersonal son el uso de imperativos y el nivel de modalidad textual (mayor o menor seguridad o certeza en lo escrito).

- **Función textual:** Se refiere al modo en que un texto matemático es construido y estructurado.

En este sentido, el texto matemático puede hilarse a través de relaciones lógicas (expresiones causales, uso de expresiones propias del razonamiento lógico) o temporales (desarrollo de una historia). En ambos casos es fundamental el uso de mecanismos cohesivos que liguen el desarrollo del texto. El abuso de la yuxtaposición y de conjunciones simples muestra una menor madurez del alumno, en contraposición con la utilización de conectores, la repetición o la mención de aspectos pasados o futuros del texto en el transcurso del mismo y el uso de vocabulario relacionado.

Morgan (2001) indica que, en estos textos elaborados en el examen del GCSE, se espera que los alumnos combinen formas matemáticas (resultados obtenidos como solución al problema) y narrativas (evolución y avances obtenidos durante su reflexión e intento de resolución del problema, decisiones tomadas). Sin embargo, muchos docentes y evaluadores, aunque no lo concreten explícitamente cuando se les pregunta, suelen mostrar una mayor preferencia por aquellos textos que, bajo su visión, son más “matemáticos”, entendiendo por esa palabra el carácter conciso del texto, el oscurecimiento de la acción humana y la ausencia de relaciones temporales. Estas características son las que, mayoritariamente, pueden encontrarse en los textos de investigación matemática (Morgan, 2001): visión platónica de las matemáticas, como un sistema lógico autoconsistente que va siendo descubierto.

Estos hechos llevan asociadas dos problemáticas distintas. Una de ellas es la falta de identificación de las características que, consciente o inconscientemente, se valoran en estos textos y las diferentes “elecciones” que pueden hacerse en el desarrollo de su escritura, unido al poco trabajo de estos textos en las aulas. Esto dificulta que los alumnos aprendan a escribir un texto matemático con un lenguaje consecuente, según lo que estén interesados en transmitir (Morgan, 2001) y según la forma en que su texto pueda ser interpretado teniendo en cuenta el contexto sociocultural matemático compartido (Morgan, 2013, 2014). La otra problemática es la identificación errónea que puede hacerse de este informe explicativo en el GCSE con un texto matemático de investigación que se comunica a la comunidad matemática. Morgan (2001), inspirándose en los tipos de escritura de Britton *et al.* (1975), recalca la existencia de dos tipos de textos bien diferenciados en el desarrollo de la actividad matemática profesional: un texto de apoyo para el investigador de tipo expresivo en el proceso de reflexión y de desarrollo de la teoría y un texto de presentación de la teoría obtenida, dirigida a la comunidad matemática, y en el que se hace emerger el sistema lógico, oscureciendo la acción humana. En los informes explicativos del GCSE, ambos tipos de textos se combinan, lo que dificulta su evaluación por los docentes (Morgan, 2001).

En resumen, la elección de qué aspectos debe contener y deben valorarse en la explicación de la resolución de un problema por parte de un alumno o un grupo de alumnos, y la diferente valoración de los mismos que puede existir según quién sea el evaluador y el contexto y la visión de las matemáticas dentro de la cual este se ubique, es una muestra clara de la gran riqueza y diversidad de planteamientos que pueden existir ante el desarrollo de esta tarea, lo que dificulta el establecimiento de unas normas únicas para su evaluación.

En relación al segundo gran grupo de tareas, las propuestas de escritura de cartas a los alumnos han sido tanto utilizadas como recomendadas con cierta frecuencia en las investigaciones, y son sugeridas también por el NCTM (1992, 2003). En algunos casos, estas cartas pueden tener como objetivo la comunicación con el docente (Schmidt, 1985), con un propósito similar al de los diarios. En este subapartado haremos referencia a la escritura de cartas donde el objetivo sea la explicación escrita de algún contenido o tópico matemático, generalmente dirigidas a un amigo o a un compañero de clase ausente, y de tal forma que el destinatario imaginario pueda entenderlo y comprenderlo.

Esta actividad es propuesta y utilizada por Davison y Pearce (1990, 1992) que indican la mayor motivación de los estudiantes cuando esas cartas reciben contestación y cuanto más real sea la retroalimentación recibida. Esta actividad también es la base de las investigaciones de Shield y colaboradores (Shield & Swinson, 1994; Shield, 1996; Shield & Galbraith, 1998). Profundizaremos más en los trabajos de estos autores, puesto que han supuesto un interesante aporte al análisis de la "escritura expositiva" producida por los alumnos. Estos autores advierten de la falta de un marco de análisis para poder analizar y valorar la escritura producida por los estudiantes, que además permita evidenciar los progresos en escritura realizados por los alumnos y contribuir a las investigaciones de este tipo. Detallamos sus propuestas a continuación, cuyas ideas también utilizaremos en algunos aspectos de la tesis doctoral.

El marco de análisis que proponen está inspirado en el modelo de Van Dormolen (1985, citado en Shield & Galbraith, 1998) para el análisis del contenido de libros de texto de matemáticas. El marco distingue tres aspectos (Shield & Swinson, 1994; Shield & Galbraith, 1998):

- La presencia de **núcleos**, entendidos como aquellas definiciones, reglas, procedimientos o expresiones generales que se considera que deben ser aprendidas por el estudiante.

- Los **aspectos matemáticos** presentes en el texto, según el modo en que se reflejen las ideas y procedimientos matemáticos. Se distinguen entre aspectos **teóricos** (definiciones, teoremas o axiomas que configuran la estructura de un tópico), **algorítmicos** (explicitación de un método o cómo llevar a cabo una operación o un procedimiento matemático), **lógicos** (enunciados sobre cómo actuar utilizando la teoría), **metodológicos** (heurísticas o reglas generales de actuación) y **convencionales** (convenios o reglas de nomenclatura).

- Los **niveles de lenguaje** utilizados. Según el estilo de lenguaje empleado, se distingue entre lenguaje **particular** (lenguaje usado al desarrollar ejemplos o casos específicos) y lenguaje **generalizado** (lenguaje que expresa aspectos generales sobre un concepto o proceso, no ligados a ejemplos concretos). Dentro de cada uno de estos dos estilos, se distingue entre un lenguaje **procedimental** (enunciado de instrucciones "paso a paso") y un lenguaje **descriptivo** (establecimiento del significado de una idea, objeto o diagrama). Cruzando ambas dicotomías se obtienen cuatro niveles de lenguaje diferentes.

Además, estos autores también adoptan el término "elaboraciones" de Hamilton (1990, citado en Shield & Swinson, 1994), entendidas como aquellos aspectos que clarifican o aumentan la información presentada en un texto escrito y que permiten su relación con otras informaciones, conocimientos o experiencias, una mayor generación de nuevas ideas o un enriquecimiento de conocimientos. En este sentido, estos autores (Shield, 1996; Shield & Galbraith, 1998) determinan varios tipos de "elaboraciones" que pueden servir para apoyar el o los núcleos sobre los que gira el texto escrito por un estudiante:

- Enunciado de un objetivo del texto.
- **Ejemplificación** del concepto o procedimiento principal (núcleo) a través de un ejemplo práctico.
- **Justificación** del procedimiento seguido, legitimándolo como algo correcto a través de principios conocidos.
- Conexión o enlace tanto con conocimientos previos como con ejemplos cotidianos asociados al núcleo presentado.
- Planteamiento de **ejercicios prácticos o preguntas** destinadas al hipotético lector del texto.

Además, Shield (1996) también realizó una primera exploración para intentar caracterizar los niveles de pensamiento y de comprensión desplegados por los estudiantes en estas tareas de "escritura expositiva". Para ello, se apoya tanto en las ideas de Waywood (1992), ya comentadas previamente, sobre las diferentes formas de enfocar la escritura de un diario en los estudiantes, como en la caracterización de diferentes tipos de tareas realizada por Shepard (1993), según el tipo de implicación y el nivel de comprensión que requieren al estudiante para su realización. Partiendo de estas ideas y de un modo inductivo a partir de los textos desarrollados por los estudiantes, se plantea una caracterización con cinco niveles encontrados. No obstante, el propio autor alerta de la menor profundización en la caracterización de los niveles superiores debido a una presencia más reducida de textos de esos niveles.

- **Acercamiento**: Simple descripción algorítmica de un método, con un ejemplo que no llega a desarrollarse (es decir, sin un verdadero núcleo).
- **Recuento**: Reproducción de un ejemplo que muestra completamente un concepto o procedimiento, utilizando un lenguaje particular.
- **Generalización**: Muestra de un concepto o procedimiento, pero haciendo uso de un lenguaje generalizado y con un núcleo claramente definido.
- **Conexión**: Además de lo anterior, se añaden conexiones con conocimientos previos o con aplicaciones cotidianas, por lo que empieza a verse una comprensión de la naturaleza relacional de las matemáticas.
- **Integración**: Se realiza una integración elaborada y con una organización lógica de diferentes ideas relevantes, utilizando un lenguaje generalizado, con aspectos teóricos y metodológicos, y haciendo referencia a conocimientos previos.

Gracias a la aplicación de este marco con diferentes componentes que acabamos de presentar, Shield y Galbraith (1998) obtienen importantes resultados sobre la escritura de tipo expositivo que elaboran los estudiantes. Estos autores detectan que la mayoría de textos desarrollados por los alumnos están basados en la presentación de un ejemplo (asociado al tópico establecido) como esqueleto principal del texto, utilizando un lenguaje verbal en el que se describen los pasos seguidos (lenguaje procedimental). En ocasiones, además, los alumnos escriben o establecen el núcleo, usando un lenguaje generalizado, y estableciendo el objetivo del texto escrito. Así, se revela una prevalencia de los aspectos algorítmicos en los textos de los alumnos, junto con la utilización de un lenguaje de tipo procedimental. Esta elección puede estar relacionada con la visión mayoritaria en los alumnos, ya anteriormente comentada, de la actividad de “hacer matemáticas” como la tarea de elegir la regla o el procedimiento adecuado para resolver una actividad y hacerlo de forma satisfactoria (Countryman, 1992; Schoenfeld, 1989). También influyen en esta elección los modelos de presentación de la asignatura que los alumnos usualmente han vivido, tanto exposiciones de docentes como formas de presentar el contenido en libros de texto (Shield & Galbraith, 1998). Todo ello afecta al pensamiento de los alumnos sobre qué aspectos deben considerarse de mayor importancia, para decidir comunicar éstos a otra persona a través de una carta, frente a otros aspectos posibles.

Así, muchos de los elementos que pudieran ser indicadores de una comprensión más profunda y significativa de un tópico por parte del alumno aparecen con una frecuencia mucho menor, de un modo mucho más esporádico. Entre estos elementos y aspectos, Shield y Galbraith (1998) destacan la relación del tópico o contenidos con sus conocimientos previos, la presencia de los procesos de justificación de reglas o métodos, de las explicaciones sobre las condiciones de uso o no uso de las reglas y de los procedimientos presentados, o la utilización de un lenguaje generalizado, desligado de ejemplos concretos. Además, consideramos que la presencia mayor de todos estos aspectos en el texto elaborado por un estudiante haría que el propio desarrollo de estas tareas de escritura contribuyera mucho más a la reflexión y a la evolución de la comprensión del tópico por parte del propio estudiante. Esto es lo que, en buena parte, se busca con el planteamiento de las mismas.

Para finalizar este subapartado, y volviendo a nuestro proyecto de tesis doctoral, las tareas de tipo “escritura expositiva” planteadas por los docentes a los alumnos participantes han sido prácticamente inexistentes, más allá del planteamiento de alguna actividad, generalmente extraída del libro de texto, en la que se pidiera a los alumnos explicar algo en particular. Sin embargo, en nuestro estudio consideramos dos aspectos de interés asociados a la posible presencia de escritura de tipo expositivo en sus cuadernos.

Por una parte, analizaremos los modos en que los estudiantes registran la teoría presentada por los docentes, lo cual entronca también con el apartado anterior sobre toma de apuntes. En este sentido, Pimm (1999) indica el interés que tiene analizar qué es lo que a los estudiantes les parece digno de anotar en un contexto o situación determinada, incidiendo además en la práctica ausencia de investigaciones que fijen sus objetivos en este aspecto. En nuestro estudio, dicha situación será la presentación de la teoría por parte del docente en las aulas, fijando nuestro interés no sólo en el hecho de qué es lo que deciden registrar. También analizaremos cómo realizan ese registro, en relación al tipo de escritura matemática y representaciones utilizadas (predominio de representaciones de tipo verbal, simbólico o gráfico para representar los diferentes elementos y contenidos). Además, también nos interesa el para qué, cuál es el objetivo que tienen registros como estos en el cuaderno según el modo en que los alumnos lo utilicen en su estudio y aprendizaje de la asignatura. Por otra parte, también haremos un estudio similar relacionado con las actividades planteadas por el docente y/o actividades que el estudiante decida realizar en su cuaderno de matemáticas, en relación con la escritura, representaciones… También en la posible combinación de una escritura de tipo expositivo con una escritura con una mayor carga expresiva, dado que, a fin de cuentas, la persona que va a ser el destinatario de esa escritura es el propio alumno.

Las diferentes comportamientos encontrados entre el alumnado en estos aspectos serán aspectos de interés a tener en cuenta en nuestro camino hacia la detección de diferentes perfiles de elaboración y utilización del cuaderno de matemáticas entre el alumnado participante en la investigación.

I.4. APUNTE CURRICULAR Y PANORÁMICA DE INVESTIGACIONES EN DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Este cuarto y último apartado se estructura en torno a un análisis curricular de los contenidos del bloque de Análisis Matemático en el curso en que va a desarrollarse la investigación, 1º de Bachillerato, y en cursos precedentes; así como en un breve repaso de antecedentes destacados de investigación sobre la enseñanza-aprendizaje de los tópicos propios del Análisis Matemático, con una mayor atención en los que están más cercanos al nivel educativo de 1º de Bachillerato.

Estructuremos este apartado en tres subapartados. El primero de ellos está destinado al análisis de los contenidos que presenta el bloque de Análisis Matemático en 1º de Bachillerato, tanto el currículo de mínimos estatal como el currículo autonómico de Castilla y León. En el segundo subapartado expondremos una panorámica general de investigaciones en Didáctica del Análisis Matemático, con especial hincapié en los modelos cognitivos que explican cómo se produce el desarrollo del aprendizaje de estos conceptos en los alumnos. El tercer subapartado se centra en los tópicos que sobre los cuales ha girado el desarrollo del bloque en las aulas participantes: los conceptos de función, límite y derivada de una función. En ese sentido, se muestran algunos antecedentes de investigación sobre estos conceptos, con especial atención a aquellos más centrados en el nivel educativo de 1º de Bachillerato.

I.4.1. APUNTE CURRICULAR SOBRE EL BLOQUE DE CONTENIDOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO EN 1º DE BACHILLERATO

En este subapartado exponemos la información obtenida en un análisis del currículo de contenidos asociado al bloque de Análisis Matemático, tanto en Bachillerato (sobre todo en 1º), como en los cursos previos de ESO. Dado que la recogida de datos se llevó a cabo durante el curso 2011/2012 en la ciudad de Valladolid, se ha tomado como referencia el currículo de la LOE (ley en vigor en ese momento), tanto el currículo estatal de mínimos como el de la Comunidad de Castilla y León. Además, en el caso del currículo de 1º de Bachillerato, se ha analizado el contenido correspondiente a las matemáticas de ambas modalidades (Científico-Tecnológica y Ciencias Sociales), puesto que se recogieron datos en aulas de las dos modalidades.

En relación al currículo de 1º de Bachillerato, tanto en el currículo de mínimos estatal como en el desarrollado autonómico, hay un bloque de contenidos sobre Análisis Matemático, que recibe el nombre de “Análisis” (MEC, 2007b; Consejería de Educación de Castilla y León, 2008). A continuación transcribimos los contenidos que se indican para este curso y bloque en el currículo autonómico para las matemáticas de las dos modalidades. Remarcaremos utilizando la negrita aquellos contenidos que son introducidos y/o concretados en el desarrollo autonómico del currículo pero que no se explicitan en el currículo estatal de mínimos.

En relación a la asignatura de Matemáticas I (Modalidad Científico-Tecnológica), el bloque de “Análisis” es el tercero de los cuatro, y sus contenidos son:

- Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
- Dominio, recorrido y extremos de una función.
- Operaciones y composición de funciones.
- Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad. **Técnicas elementales de cálculo de límites. Límites y comportamiento asintótico de una función.**
- Aproximación al concepto de derivada. **Reglas de derivación. Aplicaciones geométricas: recta tangente**, extremos relativos,

monotonía, puntos de inflexión y curvatura. Aplicaciones físicas: velocidad y aceleración.

- Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.
- **Utilización de herramientas informáticas para el estudio de funciones y sus gráficas.**

(Consejería de Educación de Castilla y León, 2008, p. 11358; señalado en negrita aquello que se añade con respecto al currículo estatal, MEC, 2007b).

Como podemos observar, se recoge entre los contenidos el tratamiento de aspectos asociados al concepto de función, los diferentes tipos de funciones que aparecen más comúnmente en los modelos matemáticos, y algunas de sus características. Además, se indica una aproximación a dos conceptos clave del bloque de Análisis, como son el concepto de límite de una función (junto a las ideas de tendencia y continuidad) y el concepto de derivada. Esta aproximación apenas se concreta en el currículo estatal de mínimos (MEC, 2007b), pero sí es completada en el currículo castellano y leonés, añadiendo matices tanto asociados al cálculo (técnicas elementales de cálculo de límites, reglas de derivación) como a la aplicación de los conceptos, especialmente en el caso de la derivada. También se añade un apunte en los contenidos en relación al uso de herramientas y programas informáticos para apoyar el estudio de los aspectos señalados en el bloque.

Si nos fijamos ahora en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (Modalidad Ciencias Sociales), el bloque de “Análisis es el segundo de los tres bloques de contenidos de la asignatura. Sus contenidos son:

- Funciones reales de variable real. Tablas y gráficas. Expresión analítica. Estudio gráfico y analítico de las funciones polinómicas de primer y segundo grado y de las funciones de proporcionalidad inversa.
- Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos.

- **Determinación de valores de una función**. Interpolación y extrapolación lineal. Aplicación a problemas reales.
- Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos.
- Conceptos intuitivos de límite y continuidad. Técnicas elementales de cálculo de límites. Aplicación al estudio de asíntotas.
- Tasa de variación media y tasa de variación instantánea. Tendencias. **Derivada de una función. Reglas de derivación.**

(Consejería de Educación de Castilla y León, 2008, p. 11379; señalado en negrita aquello que se añade con respecto al currículo estatal, MEC, 2007b).

Como podemos observar, se recogen en el currículo algunos aspectos asociados al estudio de diferentes tipos de funciones y su aplicación al estudio de fenómenos, así como la interpolación y extrapolación lineal (aspecto que no se recoge en el currículo de la modalidad Científico-Tecnológica). Además, el currículo estatal no recoge expresamente entre sus contenidos el tratamiento de conceptos como el de límite o el de derivada de una función (únicamente se indica “Tasa de variación. Tendencias”, aspectos preliminares). Sin embargo, el currículo autonómico sí que concreta la introducción de estos dos conceptos, desde un punto de vista intuitivo (al menos en el caso del límite y la continuidad). Se añaden, al igual que en el currículo de la asignatura Matemáticas I, aspectos relacionados con el cálculo y la aplicación de los conceptos, aunque estos últimos aparecen de forma más escueta.

Para completar nuestra perspectiva sobre el bloque, hemos analizado cuáles son los contenidos marcados por el currículo tanto en los cursos de la ESO (cursos previos a 1º de Bachillerato) como en el curso posterior, 2º de Bachillerato.

El análisis curricular de los contenidos relacionados con el Análisis Matemático en la ESO (MEC, 2007a; Consejería de Educación de Castilla y León, 2007) evidencia la existencia de un bloque de contenidos llamado “Funciones y gráficas” en todos los cursos (quinto de los seis bloques). A lo largo de los cursos, se van introduciendo y trabajando las situaciones de dependencia funcional y su aplicación al estudio de fenómenos o en situaciones reales y cotidianas, comenzando con situaciones de proporcionalidad en los primeros cursos y llegando a modelos cuadráticos, exponenciales, logarítmicos, de proporcionalidad inversa o con funciones a trozos en 4º de ESO. Además, también se va avanzando en las diferentes formas de expresar y representar una función, aunque se enfatiza la representación tabular para recoger datos y la representación gráfica para la detección y el estudio de propiedades, sobre todo globales, de la función a partir de su gráfica.

Por tanto, los alumnos, cuando cursan bachillerato, ya han trabajado bastante con las funciones, sus aplicaciones y representaciones a lo largo de todos los cursos de la ESO, por lo que este concepto no les es desconocido al comenzar el Bachillerato. Es especialmente remarcable la vinculación que se hace en el título del bloque entre funciones y gráficas, destacándose la representación gráfica de funciones como la representación que se considera predominante para el estudio de las funciones y sus propiedades. Así, los contenidos del bloque en 1º de Bachillerato que también tratan las funciones, las funciones elementales y sus propiedades fundamentales pueden ser considerados como un refuerzo y una ampliación, en algún aspecto, de los contenidos de la ESO.

En ningún caso se recogen aspectos asociados a los conceptos de límite y derivada durante la ESO. Estos conceptos son introducidos en 1º de Bachillerato, donde los alumnos tienen un primer contacto con estos conceptos clave del Análisis Matemático. Únicamente se presenta, en las matemáticas de 4º de ESO y tanto en el currículo estatal como el autonómico, la tasa de variación media para medir la variación de la función en un intervalo.

En 2º de Bachillerato el bloque de "Análisis" vuelve a ser uno de los bloques de contenido fijados (MEC, 2007b; Consejería de Educación de Castilla y León, 2008). Los contenidos que aparecen están ligados, en el caso del Bachillerato de Ciencias Sociales, al límite, a la continuidad y a la derivada de una función. De nuevo, se habla de una *aproximación* al concepto de límite y al de continuidad, y se trata el concepto de la derivada de una función en un punto y el cálculo de derivadas, ampliando sus aplicaciones al estudio de las propiedades locales de una función y a la resolución de problemas de optimización.

En el caso del Bachillerato Científico-Tecnológico, se hace mención directamente a los conceptos de límite, continuidad, derivada de una función en un punto y función derivada (este último aspecto no aparecía en el Bachillerato de Ciencias Sociales). Además de los aspectos indicados para la otra modalidad de Bachillerato, el currículo autonómico añade una mención explícita entre los contenidos a varios teoremas

(Teorema de Rolle, teorema de valor medio y regla de L'Hôpital). Por último, en esta modalidad de 2º de Bachillerato se introducen aspectos relacionados con el cálculo integral (primitiva de una función y técnicas de cálculo, integral definida, área bajo la curva y regla de Barrow).

Por tanto, algunos de los conceptos clave del bloque de Análisis Matemático, como son el de límite y derivada de una función, a los que se hacía una aproximación a través de su introducción en el primer curso de Bachillerato, son tratados de una forma más amplia en este segundo curso.

I.4.2. PANORÁMICA GENERAL DE INVESTIGACIONES EN DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO: MODELOS COGNITIVOS

Existen un gran número de investigaciones que muestran las grandes dificultades que tienen los estudiantes para poder llegar a comprender los conceptos propios del análisis matemático y los métodos de pensamiento asociados al tratamiento de esos conceptos (Artigue, 1995). Muchas de las investigaciones centradas en la enseñanza-aprendizaje de estos conceptos están englobadas dentro de lo que se llama el Pensamiento Matemático Avanzado (de ahora en adelante, PMA, en inglés, *Advanced Mathematical Thinking*).

El PMA surgió en los años 80, en contraposición con el Pensamiento Matemático Elemental, y entiende el término "avanzado" tanto en el sentido de las matemáticas en que se centran estos investigadores como de los modos de pensamiento matemático que éstas involucran (Harel, Selden & Selden, 2006). En el artículo de Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) se muestra una evolución de la concepción de lo que se entiende por PMA, junto con una propuesta de definición del mismo, basada en dos características fundamentales: investiga sobre conceptos matemáticos que no son completamente accesibles a través de los sentidos y sobre modos de pensamiento que requieren de un razonamiento deductivo y riguroso (Edwards *et al*., 2005, pp. 17-18). Así, el PMA centra su atención en conceptos propios del currículo del bachillerato y primeros cursos universitarios, dentro de los cuales están los tópicos relacionados con el Análisis Matemático, y en procesos matemáticos como la abstracción, la definición, la demostración y la formalización (Azcárate y Camacho, 2003). No obstante, como indican Edwards *et al.* (2005), aunque el PMA va más allá de la intuición y de las experiencias, no debe ignorar estos aspectos.

La insatisfacción ante los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos y modos de pensamiento propios del análisis matemático ha dado lugar a un gran número de trabajos de investigación en Didáctica de la Matemática, desde diferentes perspectivas teóricas. Un libro clásico que recopila algunas investigaciones en este sentido es el de Tall (1991). Más recientemente, el grupo GIDAM[11] de la SEIEM[12] ha editado un libro que recoge una revisión de investigaciones en Didáctica del Análisis Matemático a nivel nacional como internacional (Azcárate, Camacho-Machín, González y Moreno, 2015).

Los trabajos de investigación han evolucionado desde el mero estudio de los errores y dificultades detectadas en los estudiantes hacia investigaciones desde un punto de vista cognitivo, en las que se busca conocer cómo se desarrolla la comprensión y cuáles son las concepciones de los estudiantes sobre los conceptos propios del Análisis Matemático (Azcárate, 1995, Azcárate y Camacho, 2003). En ese sentido, son muchos los modelos teóricos cognitivos que han intentado describir cómo se produce el aprendizaje de estos conceptos y los modos de pensamiento asociados a los mismos. A continuación describimos brevemente los modelos utilizados más habitualmente en las investigaciones y que, por tanto, pueden considerarse como modelos de referencia (Harel *et al*., 2006; Azcárate *et al.*, 2015).

Una de las ideas que ha sido más ampliamente utilizada ha sido la distinción formulada por Tall y Vinner (1981) entre el *concepto definición* de un concepto (en inglés, *concept definition*) y el *concepto imagen* o *esquema conceptual* de un concepto (en inglés, *concept image*). Para estos autores, el concepto definición es una secuencia de palabras utilizada para especificar un concepto, pudiendo ser *personal* (propia de una persona, por ejemplo de un estudiante) o *formal* (secuencia de palabras aceptada por la comunidad matemática para especificar ese concepto). Por otra parte, el concepto imagen o esquema conceptual de un concepto es toda la estructura cognitiva que un individuo asocia a un concepto, incluyendo todas las imágenes mentales, diferentes representaciones, propiedades que lo caracterizan o procesos que asocia al mismo.

Como indican Vinner (1991) y Azcárate (1995), para adquirir un concepto no basta con conocer su definición. Una definición puede ser aprendida de memoria, pero no tener ninguna significación para el estudiante. Para conocer un concepto es necesario desarrollar un esquema conceptual rico y variado del mismo, en el que se integre la definición de forma operativa y no conflictiva con las diferentes partes que estructuran el esquema conceptual (Harel *et al*., 2006).

---

[11] Iniciales de "Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático".
[12] Iniciales de "Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática".

Un gran número de investigaciones han puesto de manifiesto la brecha existente entre las definiciones de los conceptos que enuncian los estudiantes (incluso las definiciones personales) y los criterios o argumentos que utilizan al resolver tareas en las que esos conceptos están involucrados. En esa resolución los estudiantes tienden a evocar y a confiar en aspectos parciales de sus esquemas cognitivos (Harel *et al.*, 2006), en ocasiones conflictivos entre sí o conflictivos con el significado del concepto (Tall & Vinner, 1981). Además, estos aspectos evocados pueden estar muy condicionados por el contexto en que se desarrolle la tarea o en el que ésta sea planteada (Pecharromán, 2013), pudiendo dar lugar a respuestas generadas *ad hoc* y con un alto grado de incoherencia (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2015).

Todo ello ha generado muchos trabajos de investigación con el propósito de estudiar cuáles son las *concepciones* que los estudiantes tienen de algún concepto, buscando entender mejor cuál es la estructura cognitiva o el significado que un individuo le asocia, a través de las respuestas dadas a diferentes tareas en las que dicho concepto está presente. Se presentan algunos ejemplos en el siguiente subapartado. Como comenta Artigue (1995), los trabajos de este tipo son muy interesantes puesto que aportan información necesaria para poder plantear estrategias y diseños didácticos de enseñanza encaminados a mejorar esas concepciones, romper con ideas erróneas o que limitan el desarrollo de la comprensión o introducir aspectos clave que no aparezcan entre las concepciones detectadas.

Según indican Azcárate y Camacho (2003, p. 138) una de las razones fundamentales de la complejidad asociada al conocimiento matemático superior es el doble papel que pueden jugar los conceptos como proceso y como objeto, según la situación planteada o el nivel de conceptualización. En ese sentido, son destacables las contribuciones de Sfard (1991) y de Gray y Tall (1992). Sfard (1991) distingue dos tipos de concepciones sobre una noción matemática: *operacionales y estructurales*. Las concepciones operacionales están basadas en el tratamiento de procesos, algoritmos y acciones asociados a una noción matemática, por lo que la noción se trata de un modo dinámico; mientras que las concepciones estructurales están basadas en el tratamiento de la noción como un objeto abstracto, con un carácter estático. Esta autora destaca la complementariedad de ambos tipos de concepciones, aunque también indica que la concepción operacional siempre tiende a preceder a la estructural y que, de hecho, la historia de la formación de muchos conceptos matemáticos, como el concepto de función, ha seguido ese camino antes del establecimiento formal de los mismos (Sfard, 1991, pp. 14-16). Por último, indicamos que esta autora señala tres etapas en el aprendizaje y la evolución de esas concepciones: *interiorización*, *condensación* y *reificación*.

Gray y Tall (1992) también indican la dualidad entre los procesos y los conceptos en matemáticas, e indican cómo, en muchas ocasiones, se utilizan los mismos símbolos para representar tanto a un proceso como al resultado de ese proceso. Por ejemplo, la expresión $f(x)=x^3-1$ representa simultáneamente el proceso de cálculo del valor de la función en un punto particular, *x,* como el objeto función para un valor general de la *x*. O la expresión $\text{lím}_{x\to a} f(x)$ representa tanto el proceso de tender a un límite como el resultado obtenido de ese proceso. Estos autores acuñaron el término *procepto* (en inglés, *procept*) para reflejar esta dualidad, definiendo *procepto* como un objeto que es combinación o amalgama de tres componentes: un proceso, el objeto matemático al que da lugar ese proceso y un símbolo que sirve para representar al proceso, al objeto o a ambos. Además, acuñan el término de *pensamiento proceptual* (en inglés, *proceptual thinking*) para referirse a la habilidad de pensamiento caracterizada por la flexibilidad cognitiva en el tratamiento adecuado de los *proceptos*, en los que el símbolo actúa como pivote en la dualidad proceso-objeto.

Al hilo de esta distinción operacional-estructural o proceso-objeto, tanto Artigue (1995) como Contreras (2001), recogiendo resultados de numerosas investigaciones, alertan de un posible riesgo en la enseñanza de los conceptos propios del Análisis Matemático, especialmente en las primeras fases. Ese riesgo es una enfatización exagerada de los aspectos operacionales y basados en reglas de cálculos, esquivando completamente aspectos asociados al significado de los conceptos y los métodos de pensamiento propios del Análisis Matemático. Una enseñanza centrada en la práctica algebraica y algorítmica del cálculo infinitesimal (realización de cálculos más o menos mecánicos, resolución de problemas tipo), y una evaluación en consecuencia, tiene un efecto pernicioso en la visión y la comprensión que los estudiantes desarrollan sobre estos conceptos y sobre su comprensión (que, en palabras de Skemp, 1976, sería una *comprensión instrumental*, centrada en el aprendizaje y aplicación de una serie de algoritmos y pasos asociados, aunque pueda no entenderse su propósito ni su relación con los conceptos). Esta tipo de enseñanza también enfatizaría la importancia que los alumnos concederían a las concepciones operacionales de los conceptos que indica Sfard (1991). Según vimos en el análisis curricular (subapartado I.4.1), el currículo de 1º de Bachillerato en Castilla y León tendía a concretar y enfatizar algunos aspectos operacionales que no aparecían en el currículo estatal (técnicas elementales de cálculo de límites, reglas de derivación), por lo que puede subyacer también en los legisladores esta enfatización de los aspectos algorítmicos y operacionales.

Otro grupo muy importante de investigaciones en Didáctica del Análisis Matemático han tenido por objetivo principal estudiar cuáles son los pasos o las construcciones mentales que constituyen el desarrollo de la comprensión de un concepto. En ese sentido, vamos a destacar dos marcos de referencia utilizados en muchos trabajos: los actos de comprensión de Sierpinska (1990) y la teoría APOE (Arnon *et al.*, 2014).

Sierpinska (1985, 1990), en sus estudios sobre el concepto de límite, presenta la comprensión y los obstáculos epistemológicos como dos caras de la misma moneda, la primera positiva y la segunda negativa. Así, propone cuatro categorías progresivas de actos de comprensión, que emergen en la superación de diferentes obstáculos. Esos actos son: actos de *identificación*, en los que se reconoce o percibe un objeto de comprensión que permanecía oculto; actos de *discriminación*, en los que identifican como distintos dos objetos, propiedades o ideas; actos de *generalización*, en los que se reconoce una situación como "caso particular" de otra o en la que se percibe la posibilidad de eliminar algunas condiciones no esenciales o extender el rango de aplicación; y, por último, actos de *síntesis*, en los que se construyen y adquieren relaciones entre propiedades, hechos y objetos que permiten organizarlos como un todo consistente. Un ejemplo de investigación en el que se ha utilizado este marco de referencia es la investigación de Blázquez (1999) sobre el concepto de límite en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.

La teoría APOE (Dubinsky, 1991; Arnon *et al.*, 2014, Badillo, Trigueros y Font, 2015) se deriva de las ideas de Piaget, y considera la abstracción reflexiva como parte fundamental en la construcción y desarrollo del conocimiento matemático. APOE son las iniciales de las cuatro estructuras mentales que un individuo realiza o puede realizar al enfrentarse a una demanda cognitiva: Acción-Proceso-Objeto-Esquema, considerando diferentes tipos de abstracciones reflexivas que permiten pasar de unos a otros. Las *acciones* son transformaciones de un objeto que el sujeto percibe como externo, y que realiza a partir de un estímulo externo. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, se produce una *interiorización* de la acción en un proceso. Los *procesos* son transformaciones de objetos basados en una construcción interna, pudiendo describir y coordinar los pasos seguidos. Cuando se reflexiona sobre un proceso, y se tiene necesidad de hacer operaciones o transformaciones sobre el proceso como un todo, se produce una *encapsulación* del proceso en un *objeto*. Una vez que se han construido diferentes objetos y procesos, estos pueden coordinarse u organizarse de un modo estructurado, dando lugar a un *esquema*. Estos esquemas pueden evolucionar de un modo diferente según las relaciones que se establezcan entre sus componentes, distinguiéndose tres niveles (*Inter*, *Intra* y *Trans*). Por último, cuando un individuo tiene que efectuar operaciones o transformaciones sobre un esquema, se produce una *tematización*. Además, la aplicación del marco APOE da lugar a modelos hipotéticos de aprendizaje de los conceptos matemáticos, conocidos como *descomposiciones genéticas*. Ejemplos de investigaciones que usan este marco son las de Sánchez-Matamoros (2010) y Pons (2014).

En nuestra investigación hemos utilizado unos marcos teóricos distintos de los aquí presentados, puesto que el hecho de que un estudiante escriba algo en su cuaderno no implica que lo haya comprendido (por ejemplo, puede transcribirlo directamente de algún medio). Los marcos que utilizaremos para analizar el contenido del cuaderno se presentan en los capítulos III y IV, donde sí tenemos en cuenta aspectos importantes que también han recibido una atención importante en las investigaciones en Didáctica del Análisis Matemático, como la influencia de las representaciones[13] de los conceptos matemáticos y su papel en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos propios del análisis matemático (Sierra, González y López, 1998; Blázquez y Ortega, 2001).

I.4.3. ALGUNOS ANTECEDENTES DE INVESTIGACIONES SOBRE FUNCIONES, LÍMITES Y DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Sin ánimo de ser exhaustivos, en este subapartado se presentan algunos antecedentes de investigaciones relacionadas con los tres conceptos principales sobre los cuales gira el currículo del bloque de Análisis en 1º de Bachillerato (Consejería de Educación de Castilla y León, 2008) y ha girado la docencia en las aulas participantes. Esos tres conceptos son los de función, límite y derivada de una función. Se presta especial atención a las investigaciones centradas en un nivel educativo equivalente al de 1º de Bachillerato y las relacionadas con la introducción de los conceptos de límite y de derivada, que aparecen por primera vez en el currículo de este curso.

Los tres conceptos, función, límite y derivada, tienen en común que fue necesario un periodo histórico muy amplio y las contribuciones de un gran número de matemáticos ilustres para llegar a su formulación definitiva. En Sierra *et al.* (1998) se resume la evolución histórica del concepto de función y los periodos clave en la misma. Tanto Blázquez y Ortega (2002) como Job y Schneider (2014) hacen lo propio en relación al concepto de límite. Ortega y Sierra (1998) realizan un recorrido similar asociado a la evolución histórica del concepto de derivada hasta llegar a su formalización. En la evolución de todos ellos se observa la característica indicada por Sfard (1991): surgieron primero concepciones operacionales ligadas a la idea, a través de la

[13] En el subapartado III.3.2 de esta memoria se trata la representación de objetos matemáticos y la influencia de los sistemas de representación en su enseñanza y aprendizaje.

realización de cálculos en objetos concretos cuya validez estaba ligada a la validez de los resultados obtenidos, que van evolucionando progresivamente hacia un objeto estático, buscando una definición formal del mismo que permita el desarrollo de una teoría axiomática propia asociada al concepto.

Sin embargo, y como comenta Artigue (1995), se acepta la imposibilidad de introducir directamente los contenidos de análisis matemático bajo su forma definitiva. Pueden darse tres razones principales que apoyan esta idea:

- Las dificultades derivadas de los procesos matemáticos, propios del PMA, ligados a un desarrollo formal-axiomático.
- La dificultad inherente a los propios conceptos, puesta de manifiesto por el prolongado periodo de su evolución histórica hasta constituirse en objetos matemáticos y por los obstáculos asociados a ese desarrollo, que emergen y se replican en el aprendizaje de los estudiantes (ejemplos de Cornu, 1991, y Juter, 2006, en el caso del límite de una función).
- La formulación final del concepto suele oscurecer la verdadera naturaleza del mismo, además de estar alejada, generalmente, de las ideas y situaciones que dieron origen al concepto y de las ideas previas de los estudiantes que puedan contribuir a hacer significativo el aprendizaje (Vinner, 1983; Artigue, 1995).

En ese sentido, se busca introducir los conceptos a través de aproximaciones intuitivas a los mismos, por medio de una selección adecuada de problemas y situaciones en las que aparece (Artigue, 1995), en diferentes contextos, a través de ejemplos adecuados (Figueiredo, Contreras y Blanco, 2015), y utilizando diferentes sistemas de representación (Sierra *et al.*, 1998, Blázquez *et al.*, 2001). Todo ello contribuirá a generar esquemas conceptuales ricos en los estudiantes (Azcárate, 1995), que faciliten y den sentido a un desarrollo axiomático posterior. No obstante, Artigue (1995, p. 106) se cuestiona cuál es el aprendizaje real de los estudiantes en esas situaciones, qué concepciones pueden forjar de las nociones sin poder recurrir a las definiciones precisas y cómo se produce esa transición entre una introducción de este tipo y una práctica formal-axiomática posterior.

Como ya hemos comentado, 1º de Bachillerato supone un curso clave en ese sentido, puesto que en él se introducen los conceptos de límite y derivada de una función por primera vez. No así con el concepto de función, que ya han tratado durante la Enseñanza Secundaria. A continuación comentamos algunos antecedentes específicos sobre la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de función, límite y derivada.

Antecedentes sobre el concepto de función

Según comenta Artigue (1995), desde los trabajos de Euler se considera al concepto de función como organizador del campo del Análisis Matemático. Aunque sea un concepto previo a los de límite y derivada, el desarrollo del cálculo infinitesimal también contribuirá a la evolución del propio concepto de función en los estudiantes y de la imagen conceptual que asocian a él.

En el trabajo de Figueiredo *et al.* (2015) se recogen tres formulaciones distintas del concepto de función que están muy presentes en la enseñanza-aprendizaje del concepto en las aulas: la función como covariación entre cantidades o entre magnitudes variables (formulaciones de Euler, Lacroix y Lobachevski), la función como expresión analítica (Bernoulli) o la función como correspondencia unívoca entre conjuntos (Dirichlet, Matemática Moderna). Figueiredo *et al.* (2015) indican la existencia de muchas investigaciones que detectan la dificultad que supone para los alumnos la comprensión de esta última formulación, existiendo una mayor brecha entre la definición y la imagen conceptual desarrollada por los estudiantes cuando se utiliza la definición conjuntista (Vinner & Dreyfus, 1989). Además, esta definición oscurece la idea fundamental de función como relación entre magnitudes variables (Sierpinska, 1988; citado en Sierra *et al.*, 1998).

La concepción sobre las funciones que mejor suelen interiorizar los estudiantes y que es más extendida entre ellos es la idea de función como un proceso en el que a un valor de partida se le ejecuta algún tipo de procedimiento para obtener un valor de llegada (Tall & Bakar, 1992). Los estudios sobre concepciones también destacan cómo bastantes alumnos, en grados equivalentes a los últimos años de Secundaria Obligatoria y 1º de Bachillerato, utilizan propiedades irrelevantes o incorrectas para determinar si un objeto presentado verbal, simbólica o gráficamente es una función o no. Por ejemplo, ligan la existencia de una función a la existencia de una regla de correspondencia, una fórmula, una ecuación o a la realización de una operación aritmética (Vinner, 1983). También relacionan con cierta frecuencia que para que un objeto sea una función deba responder a uno de los prototipos usuales de gráficas o ecuaciones, y además de una forma completa (sin admitir su restricción en el dominio), lo que hace que no acepten algunos elementos que sí son funciones y admitan otros que no lo son (Tall & Bakar, 1992). Por tanto, a pesar de que el concepto de función se haya trabajado durante la Secundaria, es necesario tener presentes estas limitaciones y dificultades cuando se retoma el tratamiento del concepto en 1º de Bachillerato, para intentar su superación y enriquecer el esquema conceptual del concepto de función, sobre el cual se organiza el desarrollo posterior.

Son numerosas las investigaciones que muestran la importancia e influencia que tienen los diferentes sistemas de representación del concepto de función en el desarrollo del aprendizaje del concepto, así como los procesos de conversión de uno a otro (Janvier, 1987). Entre los sistemas de representación, varios autores destacan la importancia que tiene el sistema de representación gráfico de una función como medio adecuado para la introducción y el desarrollo de los aprendizajes sobre funciones y sus propiedades, especialmente en las fases iniciales del mismo (Deulofeu, 1995; Dolores, 2004; Pecharromán, 2008). En concreto, Pecharromán (2008) diseña un modelo de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a partir de sus gráficas.

El análisis curricular presentado en el subapartado I.4.1 muestra cómo el currículo, en gran medida, también adopta este criterio, dando mucha importancia al registro gráfico. Sin embargo, Artigue (1995) señala el salto que se produce en años posteriores, en los que existe un gran predominio del registro algebraico y simbólico frente al gráfico. Así, los modos de razonamiento sobre representaciones gráficas de funciones pueden ser vistas como un razonamiento “inferior” a ojos de los estudiantes (Harel *et al.*, 2006), que muestran un predominio de los modos de pensamiento asociados a las representaciones algebraicas y simbólicas aunque se introduzcan metodologías que den peso a las representaciones gráficas (Habre & Abboud, 2006) en el desarrollo de tópicos del análisis matemático.

La utilización de representaciones gráficas también acarrea una serie de dificultades. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) realizan una revisión exhaustiva de investigaciones relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de las funciones y sus gráficas hasta esa fecha. Estos autores estructuran la revisión en tres partes fundamentales: las tareas sobre funciones y gráficas que se plantean, el aprendizaje desarrollado por el estudiante y consideraciones sobre la enseñanza de estos aspectos. Otros estudios posteriores sobre la interpretación, comparación y construcción de gráficas, tanto en situaciones contextualizadas como no, son los de Deulofeu (1995), Mevarech y Kramarsky (1997), Fabra y Deulofeu (2000) y Dolores (2004). En general, todos estos estudios destacan una serie de tendencias significativas en el comportamiento de los alumnos, que muestran algunas dificultades en relación a las funciones y su representación gráfica. Se resumen a continuación:

- Tendencia a discretizar situaciones o gráficas, destacando sólo ciertos puntos relevantes de las mismas. Reducción de las propiedades de comportamiento (como la monotonía) a propiedades de ubicación de puntos.

- Tendencia a realizar gráficas continuas, dificultad para aceptar gráficas no continuas (por ejemplo, unión mediante segmentos verticales de los diferentes segmentos de una función escalonada).

- Unión de puntos de una gráfica utilizando los prototipos usuales de curva: segmento, parábola, hipérbola.

- Dificultad para aceptar la variación simultánea de las dos variables. Falta de percepción de la noción de covariación o de dependencia entre las variables, es decir, de la idea fundamental que da sentido al concepto de función.

Al igual que comentábamos anteriormente, es necesario tener presentes todas estas posibles dificultades, que pueden formar parte de las imágenes conceptuales de los estudiantes asociadas al concepto de función, y que pueden suponer un obstáculo para el desarrollo de la comprensión del concepto, y su papel como organizador de los tópicos posteriores de análisis matemático introducidos en 1º de Bachillerato.

Destacamos dos estudios más sobre funciones y sus gráficas, por su carácter novedoso. Uno es el de Font y Acevedo (2003) que analizan las metáforas, muchas veces inconscientes, que se utilizan en los procesos de instrucción sobre la representación gráfica de funciones, y su influencia en los aprendizajes y en el significado desarrollado por los estudiantes. El otro es el de Berciano, Ortega y Puerta (2015), en el que se compara el aprendizaje desarrollado por los estudiantes en una instrucción sobre la interpolación basada en plantillas gráficas de funciones frente a una instrucción basada en la interpolación de funciones dadas de forma algebraica.

Antecedentes sobre el concepto de límite de una función

El concepto de límite y los procesos de paso al límite tienen una importancia central en matemáticas, puesto que a partir de él se definen números relevantes, como π y e, y pueden establecerse conceptos posteriores del Análisis Matemático, como los de continuidad, derivada e integral (Courant y Robbins, 1964). Así, el concepto de límite es uno de los conceptos centrales para el desarrollo del PMA.

Como puede leerse en Blázquez y Ortega (2002), los artífices fundamentales de la evolución que posibilitó establecer una definición formal del concepto de límite fueron

D'Alembert, Cauchy y Weierstrass. Este último, a mediados del S. XIX, fue el primero en formular una definición de tipo ε-δ, que es muy similar a las definiciones que pueden encontrarse hoy en día en los manuales de análisis matemático, entre las cuales cabe reseñar la existencia, no obstante, de una variabilidad importante (Blázquez y Ortega, 2002; Blázquez, Gatica y Ortega, 2009). En el curso de 1º de Bachillerato se marca la introducción del concepto por primera vez y, como indica el currículo (subapartado I.4.1) y hemos señalado al comienzo de este subapartado, debe hacerse a través de una aproximación intuitiva al mismo, buscando desarrollar esquemas conceptuales ricos que posibiliten y ayuden a la conceptualización posterior.

Existen un gran número de estudios en Didáctica de la Matemática centrados en el concepto de límite funcional. Puede encontrarse una revisión de antecedentes sobre este concepto en el trabajo de Blázquez (1999) y en Contreras y García (2015). Para hacer un breve recorrido de los antecedentes, adoptaremos los cuatro apartados que distingue Blázquez (1999): investigaciones sobre las concepciones y las imágenes conceptuales asociadas al límite que tienen los estudiantes, investigaciones sobre los errores, dificultades y obstáculos en torno al concepto de límite y el desarrollo de su comprensión, investigaciones sobre el tratamiento del concepto de límite en los manuales e investigaciones sobre la enseñanza del concepto de límite funcional y el diseño y desarrollo de secuencias didácticas para mejorar su enseñanza-aprendizaje.

En relación a los trabajos sobre las concepciones y la imagen conceptual que los estudiantes asocian al concepto de límite, el trabajo pionero fue el de Tall y Vinner (1981), quienes señalan algunas imágenes que los alumnos tienen sobre el límite de una función y la posible influencia en ellas de la instrucción recibida. La investigación realizada por Cornu (1991) pone el foco en las "concepciones espontáneas", basadas en intuiciones y experiencias previas a la instrucción que los alumnos pueden tener sobre el límites. En ese sentido, tanto este autor como Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo (2013) señalan la diversidad de significados que los estudiantes asocian a los términos clave, términos de uso cotidiano como "límite", "aproximar" o "tender". El término "tender" resulta ser especialmente problemático, puesto que se identifica con aproximar o bien se le añaden matices imprecisos, como aproximar sin alcanzar. Estos aspectos asociados al modo en que se usan los términos clave son muy importantes en las presentaciones de tipo intuitivo, que suelen basarse en descripciones de los procesos, generalmente basados en aproximaciones dinámicas de las variables (Valls, Pons y Llinares, 2011; Job & Schneider, 2014). Además, esas descripciones pueden añadirse expresiones subjetivas, como “aproximarse tanto como se quiera”, que alejan al estudiante de una conceptualización matemática adecuada del concepto de límite.

Las investigaciones de Sierra *et al.* (2000) y de Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro (2013) se centran en estudiar las concepciones del concepto de límite puestas de manifiesto por estudiantes de 1º de Bachillerato, en el primer caso a través del planteamiento de diversas tareas asociadas al concepto y en el segundo al solicitarles, con posterioridad a la instrucción, una definición personal del concepto. Sierra *et al.* (2000) destacan la diversidad de concepciones encontradas y la relación de algunas de ellas con concepciones que han existido a lo largo de su desarrollo histórico. Fernández-Plaza *et al.* (2013) destacan que en muchas definiciones personales subyacen propiedades como la alcanzabilidad y la rebasabilidad del límite, que pueden venir enfatizadas por los ejemplos de funciones representadas gráficamente que son utilizados habitualmente en la enseñanza. El trabajo de Przenioslo (2004) tiene un objetivo similar, pero en estudiantes universitarios de matemáticas, que ya llevan varios años trabajando con el concepto. En él se revelan una gran cantidad de concepciones asociadas al concepto de límite de una función en un punto, muchas de ellas incompletas o erróneas, y sólo una minoría basadas en entornos. La mayoría presentan concepciones basadas en aproximaciones de puntos de una gráfica, o en aproximaciones de valores numéricos. Otro grupo liga el concepto de límite a que la función esté definida en el punto (asociando la existencia de límite a la continuidad de la función y el valor del límite al de la función en el punto, un hecho también detectado por Fernández-Plaza *et al*., 2013), y un último grupo tiene una concepción meramente instrumental, basada en la aplicación de algoritmos o reglas de cálculo para resolver problemas tipo. Además, tanto el estudio de Przenioslo (2004) como el de Fernández-Plaza *et al.* (2015) ponen de manifiesto la presencia de incoherencias en esas imágenes conceptuales, según la parte que se evoque para resolver una determinada tarea. Przenioslo (2004) detecta cómo la introducción de la teoría formal-axiomática sobre el concepto de límite no hace variar las concepciones en muchos alumnos, manifestándose la brecha entre la definición y la imagen conceptual señalada por Artigue (1995), generalmente porque no se muestra la necesidad de la conceptualización formal ni se dota a ésta de significado.

Otros estudios tratan también las concepciones de los estudiantes con respecto a conceptos muy relacionados con el de límite, como el de infinito (Garbín y Azcárate, 2002), continuidad (El Bouazzaoui, 1988) o el de asíntota (Kidron, 2011).

Un segundo grupo muy amplio de investigaciones son las relacionadas con dificultades, errores u obstáculos asociados al concepto de límite, y con el desarrollo de su comprensión. Sierpinska (1985, 1990), en sus investigaciones sobre los actos de comprensión y obstáculos epistemológicos en el concepto de límite, encuentra cinco grupos de obstáculos que dificultan la comprensión del concepto de límite en los estudiantes: el horror al infinito y al paso al límite, los obstáculos asociados a la noción de función, obstáculos de tipo geométrico, de tipo lógico y de tipo simbólico. Cornu (1991) también detecta algunos de los obstáculos anteriores, y Blázquez (1999), utilizando el marco de Sierpinska, profundiza sobre las dificultades del concepto de límite en alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

A las dificultades asociadas a los obstáculos epistemológicos, Artigue (1995) añade las asociadas a la formalización de la noción. En esa formalización se produce el paso de una concepción dinámica del límite, basada en definiciones descriptivas que marcan los procesos de aproximación de las dos variables[14], a una concepción estática, con definiciones de tipo ε-δ, en las que también resulta una dificultad el simbolismo y el uso de cuantificadores (Artigue, 1995). Otros autores, como Blázquez y Ortega (2001) y Valls *et al.* (2011), indican también la influencia que tienen los sistemas de representación utilizados en el desarrollo de la comprensión del concepto.

Las investigaciones de Cottrill *et al.* (1996) y de Pons (Pons, 2014; Valls *et al*., 2011) utilizan el marco APOE para profundizar en el desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto. En ese sentido, obtienen descomposiciones genéticas que hipotéticamente explican cómo se produce la construcción del concepto de límite en el estudiante. Dado que estas descomposiciones serán utilizaremos posteriormente en una parte de la tesis doctoral (Capítulo VII), las incluimos en la Tabla I.5, comparando ambas.

[14] Un ejemplo de *definición* basada en una conceptualización dinámica: "Sea *f* una función y *a* un número real, el número *L* es el límite de la función *f* en el punto *a*, y se escribe $\lim_{x\to a} f(x)$, si cuando *x* se acerca al número *a*, sus imágenes *f(x)* se acercan a *L"* (Valls et al., 2011, p. 326).

<table>
<tr><th>DG de Cottrill et al. (1996)</th><th>DG de Valls et al. (2011)</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Acción de evaluar f en un punto</td></tr>
<tr><td>2. Acción de evaluar f en varios puntos que se aproximan a a
3. Construcción del esquema de coordinación:
a. Proceso en el que x se aproxima a a
b. Proceso en el que y se aproxima a L
c. Coordinación de 3ª. y 3b. vía f</td><td>2. Idea de aproximación en el dominio y en el rango:
a. Proceso en el que x se aproxima a a
b. Proceso en el que f(x) se aproxima a L
3. Coordinación en la concepción dinámica vía f: cuando x se aproxima a a, sus imágenes f(x) se aproximan a L</td></tr>
<tr><td>4. Encapsulación de 3.: objeto límite
5. Reconstrucción de 3c. en términos de intervalos y desigualdades</td><td>4. Coordinación en la concepción métrica: encontrar en cada caso un x suficientemente cerca de a tal que el valor de f(x) sea lo suficientemente próximo a L</td></tr>
<tr><td>6. Cuantificación de 5.: obtención de definición ε-δ
7. Aplicación de la definición ε-δ</td><td>5. Consciencia sobre la existencia del límite L: escritura simbólica</td></tr>
</table>

Tabla I.5. Descomposiciones genéticas para el concepto de límite de una función *f* en un punto x=*a.*

La investigación de Cottrill *et al.* (1996) muestra que parte de las dificultades para desarrollar una concepción estática del concepto de límite provienen de un desarrollo insuficiente de la concepción dinámica, y, particularmente, de la coordinación de los dos procesos de aproximación en dominio y rango. Valls *et al.* (2011) estudian cómo se producen esas coordinaciones, y detectan que las representaciones numéricas de las funciones facilitan la relación entre las variables y la coordinación de las aproximaciones, un hecho también descubierto por Blázquez y Ortega (2001) y por Arce, Conejo, Ortega y Pecharromán (2016).

El tercer grupo de investigaciones hacen referencia a estudios basados en el concepto de límite en libros de texto o en manuales, instrumentos que suelen ser un apoyo importante para la docencia y un instrumento de referencia para docentes y alumnos. Destacamos el trabajo de Sánchez (1997), sobre el tratamiento didáctico de la noción de límite de una función en manuales del S. XIX y el S. XX; el de Blázquez *et al.* (2009), que comparan diferentes formas de conceptualizar el límite funcional en varios manuales de análisis matemático; el de Sánchez-Compaña (2012), que realiza un análisis fenomenológico de las definiciones del concepto de límite de una función en un punto que pueden encontrarse en una muestra de libros de texto; y los trabajos de Conejo y colaboradores (Conejo y Ortega, 2014; Conejo, 2015; Conejo, Arce y Ortega, 2015) sobre el tratamiento en los libros de texto de la demostración matemática de los teoremas sobre límites y continuidad de una función.

El cuarto grupo de investigaciones está relacionado con la enseñanza del concepto de límite funcional y con el diseño y el desarrollo de secuencias didácticas para ello. En este sentido, y como indica Artigue (1995), las conclusiones obtenidas en los estudios anteriores deben servir para hacer propuestas de enseñanza encaminadas a mejorar el aprendizaje y la comprensión del concepto, y existir una transferencia al aula (Contreras y García, 2015). En dicho artículo de Artigue (1995) y en Blázquez (1999) se recogen algunas propuestas de secuencias de enseñanza, en muchos casos desarrolladas a través de la utilización de la ingeniería didáctica.

Son muchas las investigaciones que indican cómo, en una introducción intuitiva del concepto de límite, y ante las dificultades derivadas de la presencia de una conceptualización débil del concepto, el foco de la docencia suele trasladarse hacia el cálculo de límites, y al desarrollo de una *comprensión instrumental* (en términos de Skemp, 1976). Existe una tendencia a realizar un número excesivo de actividades centradas en métodos algebraicos y en la manipulación de expresiones algebraicas derivadas de esos cálculos (Cornu, 1991; Blázquez y Ortega, 2002; Lacasta y Wilhelmi, 2010). Como indican Job y Schneider (2014) pareciera que la utilización del simbolismo y el planteamiento de cálculos complejos fuera lo que aportara rigor matemático al desarrollo de la docencia sobre el límite de una función, ante la falta de planteamiento de situaciones asociadas al concepto (Artigue, 1995), o la imposibilidad de desarrollar algún razonamiento lógico ante la ausencia de una definición operativa. Evitar las dificultades y obstáculos derivados de la conceptualización del concepto no hace sino reforzar los mismos (Artigue, 1995). Contreras, García y Font (2012) analizan la introducción del concepto de límite de forma intuitiva en un aula, haciendo uso del enfoque ontosemiótico, y detectan una baja idoneidad cognitiva de la sesión y la presencia de conflictos semióticos en el discurso del docente que se reproducen en las imágenes mentales desarrolladas por los estudiantes.

Como indican Harel *et al.* (2006) esa brecha entre las presentaciones intuitivas del concepto de límite y el desarrollo de una conceptualización formal sigue necesitando ser estudiada con mayor profundidad. En este sentido, hay trabajos que proponen otras conceptualizaciones del concepto de límite que pretenden facilitar su aprehensión por los estudiantes. Blázquez y Ortega (2002) crearon una definición del concepto de límite (y otra similar para sucesiones) que mantiene el rigor de las definiciones de tipo ε-δ, pero que evita su excesivo formalismo. Esta definición fue matizada en Blázquez *et al.* (2009), y es la siguiente: "El límite de la función *f* en x=a es *L* si para cualquier aproximación *K* de *L*, *K*≠*L*, existe un entorno reducido de *a* tal que las imágenes de todos sus puntos están más próximas a *L* que *K*" (p. 161). El trabajo de Blázquez, Gatica, Ortega y Benegas (2006), donde se compara la utilización de esta conceptualización propuesta con respecto a la definición ε-δ, muestra cómo la nueva conceptualización resulta menos dificultosa para los estudiantes, al reducir su carga simbólica y el formalismo del lenguaje matemático utilizado. Así, la utilización de esta conceptualización parece mejorar el paso de lo que Claros, Sánchez y Coriat (2014) llaman *fenómenos del ámbito intuitivo* (conjeturar el valor de un límite de función) a los *fenómenos del ámbito formal* (validar la conjetura con la construcción de entornos), y mejora la integración de la definición rigurosa con el concepto imagen que tiene el alumno del concepto. Además, en Ortega (2016) se aprecia la mayor facilidad con la que esta nueva conceptualización permite el desarrollo de la teoría axiomática y la demostración de los teoremas relacionados con el concepto de límite.

Antecedentes sobre el concepto de derivada de una función

La derivada de una función es otro de los conceptos fundamentales del análisis matemático y, como indica Cornu (1983, citado en Ortega y Sierra, 1998), es el desarrollo de las ideas relacionadas con el cálculo de derivadas (tangentes, máximos, mínimos) el que ha conducido a los matemáticos al concepto de límite. En Ortega y Sierra (1998, p. 88-92) puede verse un resumen de la evolución histórica que ha dado lugar al concepto de derivada, destacando las contribuciones iniciales de Apolonio y Arquímedes, las posteriores de Newton y Leibniz, y la formulación del concepto de derivada por parte de Cauchy, tal como lo conocemos hoy en día, y apoyándose en el concepto de límite propuesto por D'Alembert.

El desarrollo histórico del concepto de derivada muestra la relación de éste con el de recta tangente, otro concepto de difícil comprensión y cuya conceptualización en aulas y libros de texto no suele ser clara (Ortega y Sierra, 1998; Orts, Llinares y Boigues, 2015). Como indican Orts *et al.* (2015), en muchas ocasiones los alumnos han desarrollado una concepción euclídea de la recta tangente, como recta que únicamente corta en un punto a la curva, una concepción errónea que es problemática más allá de las curvas cónicas, incluso en la parábola. Esta concepción supone un obstáculo para construir la concepción cartesiana de la recta tangente, es decir, la recta tangente como límite de las rectas secantes, que es la concepción que suele utilizarse para ligar la derivada con la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto. Para poder superar ese obstáculo, se señala la adecuación de trabajar previamente la recta tangente desde una concepción leibniziana, es decir, la recta tangente como recta que mejor aproxima a la función en un entorno (Ortega y Sierra, 1998; Orts *et al.*, 2015).

Como se ha indicado, usualmente se suele presentar el concepto de derivada una vez que se ha realizado la instrucción sobre el concepto de límite, aunque también hay propuestas didácticas en sentido contrario. En la tesis doctoral de Azcárate (1990) se analizan las concepciones sobre la derivada desarrolladas por un conjunto de estudiantes que siguen un material didáctico basado en las ideas de pendiente de una recta, velocidad media e instantánea y tasa de variación media. En el proceso se introduce de un modo informal el paso al límite para interpretar la derivada como la velocidad instantánea, la tasa de variación instantánea o la pendiente de la recta tangente. En este mismo trabajo, Azcárate (1990, 1995) detectó tres perfiles de estudiantes según la imagen conceptual que desarrollaran en relación a la velocidad instantánea o la tasa de variación instantánea a partir de las velocidades o tasas medias de variación: perfil *primitivo* (no admiten la noción de instantáneo), perfil *aproximación* (uso de puntos próximos para aproximar los valores instantáneos) y perfil *límite* (que sí admiten la noción y resuelven situaciones asociadas a ella).

En los trabajos de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) y de Sánchez-Matamoros y García (2015) se presentan dos revisiones de investigaciones asociadas a la comprensión del concepto de derivada desde diferentes perspectivas teóricas y a la enseñanza-aprendizaje del mismo, que vuelven a evidenciar la dificultad de este concepto para los estudiantes.

En relación a la comprensión de la razón de cambio, el cociente incremental y la tasa de variación media, el trabajo de Orton (1983) puso de manifiesto bastantes dificultades de los estudiantes, con errores al confundir la razón de cambio con el valor de la abscisa o la derivada con la tasa de variación media entre dos puntos, la realización de cálculos erróneos o la no interpretación adecuada de los resultados de las tasas de variación. La investigación de Azcárate (1990), anteriormente comentada, también está centrada en estos conceptos. Zandieh (1997, 2000), además de volver a poner de manifiesto la importancia que tiene en la comprensión de la derivada una relación adecuada entre la razón de cambio y el cociente incremental, también señala la influencia e importancia que tienen los sistemas de representación y los contextos utilizados en el desarrollo de esa comprensión.

La influencia de los sistemas de representación de las funciones en el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada también ha sido un aspecto muy estudiado. De forma global, Sánchez-Matamoros *et al.* (2008) indican que las investigaciones han enfatizado la vinculación que existe entre los significados construidos por los alumnos y los sistemas de representación utilizados, y la falta de conexión y coordinación entre esos significados. Así, el desempeño de los alumnos y el modo en que resuelven una tarea puede ser muy diferente según cuál sea el modo en que se represente la información. En ese sentido, Habre y Abboud (2006) detectan un predominio de los modos de pensamiento ligados a representaciones algebraicas o simbólicas de funciones, que supone una dificultad para razonar sobre la derivada en registros gráficos. Estos autores ligan este hecho a que las definiciones matemáticas, generalmente, se presenten de forma analítica, y a la posible consideración del razonamiento sobre una representación gráfica como algo "menos matemático". La comprensión de la relación existente entre las gráficas de una función y de su derivada también ha sido un aspecto enfatizado en las investigaciones. Entre ellas destaca la de Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf (1997) que, utilizando el marco APOE, estudian cómo se desarrolla la construcción de significados sobre esa relación, detectando como aspectos clave la enfatización de la coordinación entre los modos de representación gráfico y analítico y la relación explícita de los significados gráficos de función y su derivada.

Algunos estudios en concreto se han centrado en cómo se construye el *esquema* de derivada (utilizando la terminología propia de Piaget y del marco APOE) en los alumnos de Bachillerato y primeros cursos universitarios (Baker, Cooley & Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; Sánchez-Matamoros, 2010). En esos estudios se detecta un desarrollo progresivo del esquema de derivada en los estudiantes y la influencia que tienen los modos de representación en la constitución de mecanismos de transición de un nivel de desarrollo del esquema al siguiente (en la tríada *Inter-Intra-Trans*). También se constata cómo el desarrollo del esquema no está vinculado al conocimiento de muchos elementos constitutivos del concepto de derivada, sino a la capacidad para coordinarlos en la resolución de problemas.

Un aspecto importante asociado a la comprensión de la derivada, y que en ocasiones suele pasar desapercibido en la docencia, es la relación entre la derivada en un punto y la función derivada, un aspecto importante puesto que permite pasar de una perspectiva local a una global y viceversa. Como indican Sánchez-Matamoros y García (2015), existen pocas investigaciones que analicen esta relación. Entre todas ellas, destacan los trabajos de Badillo (Badillo, 2003; Badillo, Azcárate y Font, 2011), que detectan varias inconsistencias frecuentes (incluso entre docentes de matemáticas en ejercicio), y señalan cómo la comprensión global de la idea de función derivada sí parece implicar la comprensión de la idea de derivada en un punto, pero no al revés.

El análisis curricular realizado en el subapartado I.4.1 puso de manifiesto que, además de la introducción del concepto de derivada en 1º de Bachillerato y alguna de sus aplicaciones, el currículo de Castilla y León también reflejaba las reglas de derivación como contenido a tratar. Para cerrar este subapartado, recogemos algunas investigaciones cuyo foco principal está en el cálculo de derivadas y en las reglas de derivación.

La dificultad del cálculo de la derivada a partir del cálculo del límite del cociente incremental plantea la necesidad de mecanizar y facilitar ese cálculo de alguna manera, lo cual se consigue con las reglas de derivación. Godino, Contreras y Font (2006) realizan un análisis de una sesión de clase centrada en las reglas de derivación utilizando nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico. Fonseca y Gascón (2002) indican que, generalmente, el desarrollo en las aulas de Bachillerato de las reglas de derivación adolece de un carácter integrador. Estos autores construyen una *organización matemática local* (en términos de Chevallard, 1999, citado en Fonseca y Gascón) que busca integrar estas reglas y técnicas y dar respuesta a cuestiones problemáticas que no pueden responderse por separado. No obstante, el papel esencial que tiene en su enfoque la aplicación de logaritmos neperianos y la técnica de derivación logarítmica, hace que exista un problema añadido a tratar en la derivación cuando la función es negativa o en los cambios de signo.

Font (2000, 2005) interpreta el cálculo de la derivada de una función como una práctica en la que intervienen tres subprocesos: las traducciones y conversiones entre diferentes representaciones, tanto de f(x) como de f'(x), y el paso de una representación de f a una de f'. Debido a la complicación que supone en muchas funciones el cálculo de la derivada a partir del límite de la tasa de variación media, este autor propone, aunque se pierda rigor en el cálculo, la utilización de una mayor variedad de representaciones (simbólica, gráfica, tablas de valores, incluso verbal) para f y f' en la realización de estos cálculos con los alumnos, con ayuda de la tecnología.

La regla de la cadena ha sido la regla investigada con mayor profundidad. Destacamos el trabajo de Clark *et al.* (1997), que pone de manifiesto la existencia de varios niveles en la comprensión de la regla: desde la existencia de una “colección de casos especiales” (incluso de la propia regla) sin establecer relaciones ni conexiones entre ellas, hasta la construcción de la estructura subyacente a todas ellas, pasando de una “lista” de reglas a una única, válida para cualquier composición.

Con los resultados obtenidos en las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada, y en consonancia con la idea de Harel *et al.* (2006) sobre lo que significa la comprensión de un concepto (ser capaz de conectar éste con otros conceptos, comparar diferentes definiciones del mismo, utilizar diversos sistemas de representación y conocer sus propiedades y proceso), Sánchez-Matamoros *et al.* (2008) indican que en el tratamiento del concepto de derivada deben integrarse tanto una perspectiva analítica (límite del cociente incremental) como gráfica (pendiente de la recta tangente a una curva), su carácter puntual (derivada en un punto) o global (derivada en un intervalo, función derivada), el operador derivada (cálculo de derivadas sucesivas) y la regla de la cadena.

CAPÍTULO II

TRABAJO DE EXPLORACIÓN

Este capítulo de la tesis se dedica a explicar el trabajo de investigación que sirvió como precursor de la tesis doctoral sobre los cuadernos de matemáticas que aquí se presenta. Por una parte, el desarrollo de este trabajo nos convenció de la pertinencia, la relevancia y las posibilidades que podría tener un análisis en profundidad del cuaderno de matemáticas como herramienta para el alumno en esta asignatura, y de las diferentes maneras en que los estudiantes pueden elaborar y utilizar dicho cuaderno. Además, nos aportó varias claves iniciales y unas herramientas de investigación que han servido de base y de punto de partida para el desarrollo posterior del trabajo de tesis. Todo ello hace que consideremos el trabajo que presentamos en este capítulo como un trabajo exploratorio dentro del desarrollo global de la tesis doctoral.

Este trabajo exploratorio supuso la primera experiencia investigadora en Didáctica de la Matemática del doctorando. El trabajo fue desarrollado durante el curso académico 2009/2010, en el marco del Máster en profesor de Enseñanza Secundaria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (especialidad de Matemáticas), en la Universidad de Valladolid. En particular, el área de Didáctica de la Matemática propuso el "Análisis de los cuadernos de matemáticas de los alumnos" como uno de los temas posibles para el desarrollo del Trabajo Fin de Máster (de ahora en adelante, TFM). Este tema me pareció especialmente interesante ya en esos momentos, por lo que me decidí a escogerlo para llevar a cabo el TFM sobre ello, bajo la tutela del Dr. Ortega.

En los diferentes apartados de este capítulo se van a exponer y explicar los diferentes apartados propios del TFM, que además ha dado lugar a dos publicaciones (Arce, 2013, 2014), en las que se recogen las principales aportaciones y resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo.

Así, en el primer apartado de este capítulo se explica el planteamiento del TFM, así como sus objetivos. En el segundo apartado se aporta la información necesaria sobre el contexto de desarrollo del trabajo y su puesta en práctica, mientras que en el tercero se expone el marco teórico utilizado para analizar los cuadernos de matemáticas. Los apartados cuarto y quinto contienen los resultados obtenidos del análisis de los cuadernos de los alumnos participantes y de un debate posterior desarrollado con los alumnos sobre diferentes aspectos detectados en el análisis, respectivamente. Finalmente, en el sexto apartado se exponen las conclusiones obtenidas en este estudio, así como el valor del mismo como punto de partida para el planteamiento y el desarrollo posterior, hasta completar la tesis doctoral basada en el análisis de los cuadernos de matemáticas de los alumnos.

II.1. PLANTEAMIENTO DEL TRABAJO DE EXPLORACIÓN. OBJETIVOS

Este trabajo exploratorio surge de un interés conjunto del tutor de la tesis y del doctorando por la figura del cuaderno de matemáticas como herramienta usual de estudio y aprendizaje para el alumno. Este interés queda corroborado por el planteamiento, entre los posibles trabajos de Fin de Máster, de una línea de investigación centrada en el “análisis de los cuadernos de matemáticas de los alumnos”. Este trabajo planteado también despertó un interés especial en mí, para poder conocer y analizar más de cerca una herramienta que a mí me había resultado especialmente útil en mi aprendizaje de las matemáticas durante la enseñanza secundaria, por lo que no dudé en escoger esta línea de trabajo para desarrollar el TFM.

Así, y como ya se ha anticipado, el TFM fue enfocado como una posibilidad para profundizar en nuestro conocimiento sobre el cuaderno de matemáticas y sobre el papel que juega en el aprendizaje de las mismas. El cuaderno es una herramienta de trabajo para el alumno que es muy usual en las aulas tanto de Educación Primaria como de Educación Secundaria. Quizá, junto con el libro de texto, suelen ser los instrumentos más comúnmente utilizados en el aprendizaje de las matemáticas, instrumentos cuya presencia se suele dar por sobreentendida (Villarreal & Borba, 2010). Partimos de la idea inicial de cuaderno como una herramienta básica para el desarrollo del aprendizaje del alumno: el cuaderno proporciona al alumno un espacio ideal en el que poder trabajar con los conceptos y los elementos matemáticos, así como para poder pensar y reflexionar sobre ellos. Este trabajo autónomo y particular del estudiante le ayudará a convencerse (o no) sobre el entendimiento y la comprensión de un concepto, y a poder consolidar el mismo en su bagaje matemático.

En las primeras conversaciones con el tutor del TFM sobre posibles líneas de desarrollo del trabajo, se pusieron de manifiesto muchos posibles temas diferentes que podrían ser investigados: estudio sobre cómo los estudiantes toman apuntes de matemáticas, si desarrollan en él o no las tareas planteadas y cómo, cuál es el lenguaje que utilizan en el cuaderno o de qué maneras utilizan el cuaderno en su aprendizaje de las matemáticas. Todo ello nos dio una primera idea acerca de la potencialidad de la herramienta sobre la cual iba a desarrollarse el trabajo. No obstante, de entre las posibles líneas surgidas, se decidió fijar el siguiente objetivo principal para el TFM:

- Determinar diferentes perfiles en el alumnado participante, en función de las características relacionadas con la elaboración del cuaderno de matemáticas y sus modos de trabajo con el mismo.

Este objetivo principal llevó asociados varios objetivos complementarios, también relacionados con el objetivo principal. Dichos objetivos son:

- Diseñar y crear una serie de indicadores *ad hoc* que nos sirvan para desarrollar el análisis de los cuadernos de los alumnos participantes

- Caracterizar las relaciones que pueden encontrarse entre los diferentes perfiles encontrados y el rendimiento escolar en la asignatura de matemáticas.

- Estudiar la existencia de posibles relaciones entre los diferentes perfiles encontrados y el perfil afectivo-emocional de sus componentes hacia las matemáticas.

- Detectar y describir aquellos errores o dificultades que se encuentren con mayor frecuencia en los cuadernos de los alumnos o que consideremos de mayor gravedad.

- Identificar correspondencias entre los modos de elaboración del cuaderno de matemáticas encontrados en los alumnos y los modos de uso del cuaderno puesto de manifiesto por los estudiantes.

Un primer estudio y rastreo de posibles antecedentes de estudios centrados en el cuaderno de matemáticas nos mostró que el cuaderno de matemáticas había sido una herramienta muy poco tratada y estudiada en Didáctica de la Matemática, algo que posteriormente ratificamos con la búsqueda más amplia y detallada de antecedentes para el trabajo de tesis doctoral, que se recoge en el capítulo I. En particular, en el desarrollo del TFM sólo encontramos tres artículos relacionados con diversos aspectos del cuaderno de matemáticas: Fried y Amit (2003), Porras (1994) y Price *et al*. (1997).

Como ya se ha comentado en capítulo I, los dos últimos artículos referenciados están más encaminados a la realización de propuestas concretas para mejorar el estudio y el aprendizaje de las matemáticas utilizando los cuadernos de matemáticas. Nuestro interés, tal como refleja el objetivo principal, era estudiar la manera natural y habitual en que los estudiantes elaboraban su cuaderno, cómo trabajaban con él, y cómo lo utilizaban en su estudio y aprendizaje de la materia, por lo que no se propuso la introducción de ningún cambio metodológico asociado a la forma de elaborar o trabajar con el cuaderno. De esta forma, el primero de los artículos, el de Fried y Amit (2003), fue el que nos resultó de mayor utilidad para nuestro trabajo, tomando como referencia varias de las ideas del mismo, ya comentadas en el capítulo I sobre las que se incidirá en el apartado dedicado al marco teórico de este trabajo de exploración.

La planificación del desarrollo del estudio y de la recogida de datos se realizó teniendo como principio básico el aprovechamiento del periodo de prácticas de que consta dicho Máster. En ese curso 2009/2010, el periodo de prácticas se extendió durante un mes y medio (abril-mayo de 2010). Así, se pensó en centrar el estudio en uno de los grupos de alumnos del centro en el que iba a realizar el *Practicum*. Por una parte, se realizarían fotocopias periódicas de los cuadernos de los alumnos para poder analizar su contenido, aunque intentando que este hecho no incidiera en la forma en que los alumnos elaboraban y trabajaban con su cuaderno. La idea era que los estudiantes trabajaran con sus cuadernos de forma natural, del modo en que habitualmente solían hacerlo, por lo que no se les indicaría cuál iba a ser el propósito de las fotocopias ni se realizarían las fotocopias con una periodicidad demasiado corta. Por otra parte, se desarrollaría un debate en el aula para profundizar en aquellos aspectos más relevantes obtenidos durante el análisis de los cuadernos, así como en los modos de trabajo y de utilización del cuaderno que declaran los alumnos en su estudio y aprendizaje de las matemáticas.

No obstante, la planificación y fijación de detalles más concretos fue realizada una vez comenzado ya el periodo de prácticas, con la ayuda de mi tutor de prácticas en el centro, y una vez analizado tanto el contexto como las posibilidades con que en él se contaba. Se comenta todo ello en el siguiente apartado.

II.2. CONTEXTO DE DESARROLLO DEL TRABAJO Y PUESTA EN PRÁCTICA

El centro de realización de las prácticas que me fue asignado fue un instituto público de Medina del Campo (Valladolid). Se dio la peculiaridad de que el profesor del Instituto que fue designado como tutor de prácticas, además, era el director del centro. Como tutor en la Universidad de estas prácticas fue designado el mismo tutor del TFM, el Dr. Ortega.

Debido a su cargo como director del Instituto, y a la liberación horaria para la docencia que tal cargo le suponía, este profesor del centro sólo impartía docencia de Matemáticas en un aula durante el curso 2009/2010. El aula era el de **1º de Bachillerato** del bloque de Ciencias e Ingeniería, dentro de la modalidad de **Ciencias y Tecnología**. Así pues, decidimos que este grupo de alumnos iba a ser el grupo en el que se llevara a cabo el análisis de los cuadernos de matemáticas. El hecho de que sea un curso de 1º de Bachillerato hace que los alumnos participantes sean estudiantes que ya tienen cierto recorrido académico y de estudio de las matemáticas durante la enseñanza primaria y la enseñanza secundaria obligatoria. Así, son alumnos a los que se les presupone cierta madurez y ciertos hábitos desarrollados y adquiridos tanto para la elaboración del cuaderno como para su estudio de las matemáticas. Conjuntamente con lo anterior, el desarrollo del estudio en Bachillerato hace que exista un sesgo con respecto al alumnado total, puesto que ya no son unos estudios obligatorios y, además, los alumnos se matriculan en la vía que más les interesa. Por tanto, se conjetura la presencia en los alumnos de cierto aliciente hacia el estudio y el aprendizaje de las matemáticas.

Describimos a continuación, y con mayor profundidad, el contexto en el que se desarrolló el estudio: el aula y el grupo de alumnos participante y la metodología seguida en el aula por el profesor, así como el uso “esperado” del cuaderno.

El grupo de alumnos del aula de 1º de Bachillerato Científico-Tecnológico, inicialmente en la lista de clase, estaba compuesto por 22 alumnos. Para referirnos a cada uno de los estudiantes durante este estudio utilizaremos la siguiente notación: una "E" seguida de su número en la lista de clase.

El *Practicum* se realizó durante el tercer trimestre del curso 2009/2010. En esos momentos, dos de los alumnos ya habían abandonado el curso, y no asistieron a clase ninguno de los días durante el periodo en el que se desarrolló este periodo de prácticas. Esos alumnos son E8 y E11. Así, partíamos de un grupo de 20 estudiantes que asistían con regularidad a las clases. No obstante, finalmente no todos participaron en este análisis de los cuadernos, puesto que hubo tres estudiantes que no entregaron sus cuadernos (para la realización de las fotocopias) en ninguna de las tandas realizadas, haciendo caso omiso a las indicaciones que les hicimos. Esto sucedió con los estudiantes E4, E13 y E22. Es decir, definitivamente fueron 17 los alumnos de la clase que participaron en el análisis de sus cuadernos de matemáticas. No obstante, los otros tres alumnos que no aportaron sus cuadernos para analizarlos sí que participaron en el debate posterior sobre los cuadernos de matemáticas que se organizó y desarrolló en el aula.

La gran mayoría de los estudiantes pertenecientes a la presente aula fueron de sexo masculino, proporción que se traslada a los estudiantes participantes. De los 17 estudiantes que participaron en el análisis, once de ellos son chicos y seis son chicas:

- Chicos: E1, E2, E3, E7, E9, E10, E15, E16, E17, E18 y E21.
- Chicas: E5, E6, E12, E14, E19 y E20.

Los alumnos estaban distribuidos en el aula por parejas, cada pareja formada por dos mesas individuales agrupadas: había cuatro parejas de chicos, dos parejas de chicas, dos parejas mixtas y un alumno sentado en solitario. Las parejas estaban situadas en la clase con tendencia a estar agrupados por sexos: las chicas se agrupaban en la parte izquierda de la clase, según la visión del profesor de la clase desde la pizarra; y los chicos se agrupaban en la parte central y en la parte derecha, atendiendo a esa misma visión. Además, es interesante resaltar que la mayoría de los participantes fueron estudiantes de nueva incorporación en el centro para estudiar Bachillerato (a excepción de la alumna E19) y que cinco de los chicos participantes son alumnos que están repitiendo 1º de Bachillerato. Estos estudiantes son E1, E7, E15, E16 y E21; existiendo uno de ellos que está cursando este nivel de 1º de Bachillerato por tercer año (E1), y que es el estudiante que se sienta en solitario. En general, estos alumnos repetidores tienden a ocupar las primeras filas del aula.

El centro educativo en el que se desarrollaron las prácticas está situado en un edificio histórico de Medina del Campo, el Palacio de Dueñas, palacio señorial del S. XVI en el cual se han habilitado bastantes dependencias como aulas para su uso como centro educativo. En particular, el aula de este grupo tenía los techos muy altos, la acústica era deficiente y sólo estaba equipada con un proyector de transparencias y una clásica pizarra de tiza.

Explicamos ahora las características fundamentales de la metodología desarrollada por el profesor de matemáticas en sus clases, así como el uso del cuaderno que puede "esperarse" en los estudiantes participantes. El profesor dio total libertad a sus alumnos para el desarrollo y la elaboración del cuaderno a lo largo del curso, sin señalarles ninguna directriz ni mandato específico para esa elaboración, y tampoco en la utilización. Este aspecto resultó de gran interés para nuestro trabajo, puesto que, como se indica en el objetivo principal de este estudio, lo que se buscaba era determinar diferentes perfiles en el alumnado según la manera en la que, de forma natural, elaboran y utilizan su cuaderno de matemáticas en el estudio y el aprendizaje de las matemáticas. Así, durante el periodo de prácticas los alumnos tampoco recibieron ninguna directriz ni sugerencia directa en relación al cuaderno en la clase.

En la metodología de este docente pudieron detectarse dos tipos de momentos totalmente diferenciados: uno de ellos está asociado a la presentación y la explicación de la teoría, y el otro está relacionado con la realización de ejemplos sobre la teoría presentada y la corrección de ejercicios.

En relación a la presentación y explicación de la teoría, el profesor de matemáticas proporcionó la teoría a los alumnos por medio de fotocopias con anterioridad al comienzo de un determinado tema, a modo de apuntes del mismo. Estos apuntes fueron creados por el propio docente a partir de diversos libros de texto, conteniendo las definiciones, los resultados fundamentales y abundantes ejemplos seleccionados para ilustrar los diferentes conceptos. En la presentación y exposición de la teoría en la clase, el docente utilizó una versión con transparencias de dichos apuntes, usando la proyección de estas transparencias como apoyo sobre el cual giraron las exposiciones. En el mes y medio que duró el *Practicum*, el docente desarrolló dos temas de teoría: el de funciones, características y operaciones con funciones, por una parte, y el de límites y continuidad de una función, por otra. Además, durante el *Practicum*, mi intervención como docente en prácticas estuvo ligada al tema de funciones elementales, desarrollando una metodología similar a la del docente, aunque esta parte ya no ha sido incluida en el análisis, puesto que era necesario dejar cierto margen temporal para que pudiéramos analizar los cuadernos y obtener información para la preparación del debate y su realización con anterioridad a la finalización de este periodo de prácticas.

Debido a la metodología seguida para la presentación y la exposición del contenido teórico, se esperaba que los estudiantes no realizaran demasiadas anotaciones asociadas a la teoría en sus cuadernos de matemáticas, puesto que ya tienen los apuntes sobre los cuales gira la explicación del docente y, además, si quieren tomar alguna nota a mayores pueden optar por hacerlo sobre las propias fotocopias de los apuntes, en los espacios en blanco existentes. La única excepción a este comportamiento del profesor se dio un día en el que el docente dictó varias definiciones que no estaban en los apuntes proporcionados: los conceptos de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva, a través de definiciones y de varios ejemplos y contraejemplos, tanto orales como haciendo uso de la pizarra.

Complementando los apuntes de teoría, en ocasiones el docente desarrolló en la pizarra un mayor número de ejemplos de los existentes en los apuntes suministrados. El objetivo de estos ejemplos, generalmente, era el de contribuir a ilustrar o a asentar técnicas en el alumnado que se consideran de mayor interés, como puede ser el cálculo de dominios de funciones, de la composición de dos o más funciones o el cálculo de límites con alguna indeterminación. Dichos ejemplos fueron realizados por parte del profesor en la pizarra y comentados verbalmente, jugando el papel de ejercicios resueltos. En el desarrollo de los mismos, el docente fue pidiendo la colaboración de los alumnos, realizando diferentes preguntas a la clase o a algunos alumnos en concreto buscando comprobar si éstos mostraban una comprensión y dominio de los conceptos tratados o, por el contrario, existía algún error en su comprensión o algún aspecto que se evidenciara como especialmente dificultoso para los estudiantes. Bajo el prisma de nuestro análisis de los cuadernos de los alumnos, es esperable que los estudiantes copiaran dichos ejemplos en sus cuadernos.

Además de estos ejemplos que juegan el papel de ejercicios resueltos, también existieron clases destinadas a la corrección de problemas que habían sido propuestos con anterioridad a los estudiantes. Normalmente, su profesor dejaba pendiente la resolución de los ejercicios y problemas propuestos sobre un tema varios días, para que los alumnos dispusieran de un tiempo prudencial para intentar la resolución de esos ejercicios y problemas. En esos días, el docente aprovechaba para ir introduciendo y desarrollando la teoría del tema siguiente. Por tanto, en esta metodología seguida, y atendiendo al desarrollo cronológico de los temas, éstos no fueron compartimentos estancos separados entre sí, puesto que en el desarrollo cronológico de las clases se mezclaron la teoría de determinado tema con los ejercicios y los problemas del tema anterior. La corrección de actividades fue realizada en ocasiones por parte del propio docente con la ayuda de los alumnos, o directamente por parte de alumnos que salieron voluntariamente a la pizarra para exponer y explicar su propuesta de resolución. Además, tampoco fueron corregidas todas las actividades que se plantearon a los estudiantes.

En nuestro caso, cuando empezó el periodo de *Practicum* el docente acababa de concluir el tema de números complejos, y había dejado propuestos y pendientes de corregir varios ejercicios sobre este tema, a los que posteriormente se dedicó varios días de clase, una vez comenzada ya la exposición de la teoría sobre el primer tema de funciones. Además, en este periodo analizado también se propusieron y corrigieron actividades de los temas de funciones y de límites y continuidad.

Es esperable que los alumnos desarrollaran en sus cuadernos los intentos de resolución de las actividades propuestas, corrigiendo o completando esos intentos de resolución cuando fuera necesario. No obstante, pueden existir diferencias en el comportamiento de los alumnos en estos aspectos, por lo que serán tenidas en cuenta las características de la metodología que acabamos de comentar para la elaboración de un marco teórico *ad hoc* para el análisis de los cuadernos, que nos permita detectar diferentes comportamientos en esta situación concreta.

Centramos nuestro análisis de los cuadernos en la parte elaborada por cada uno de los alumnos durante gran parte del periodo en que se desarrolló el *Practicum*, sin tener en cuenta, como ya hemos explicado y justificado antes, la parte correspondiente a mi intervención en el aula. Así, la parte analizada correspondió a un mes de clase, aproximadamente. En resumen, y en vista de todo lo que acabamos de comentar, era previsible que el contenido de los cuadernos fuera, mayoritariamente, un contenido práctico (ejemplos a modo de ejercicio resuelto, ejercicios del tema anterior corregidos o no), por lo que el mayor peso del análisis y del marco de análisis creado estuvo centrado en este tipo de contenido.

Durante el periodo de prácticas se realizaron dos tandas de fotocopias de los cuadernos de matemáticas de los alumnos participantes, aproximadamente una cada quince días. Las fotocopias fueron realizadas en la conserjería del centro, para intentar devolver el cuaderno a los estudiantes lo antes posible. Se consideró que una periodicidad de quince días era la más adecuada para el desarrollo del estudio. Las razones para no fijar una periodicidad menor fueron dos. Una de ellas fue que era previsible que hubiera días en que los estudiantes no anotaran nada o casi nada en sus cuadernos (por ejemplo, los días en que se presentaba y explicaba la teoría utilizando los apuntes suministrados). La segunda razón es que no queríamos provocar cambios bruscos con respecto al *contrato didáctico* que había fijado el profesor durante el curso, que en ocasiones les había recogido periódicamente el cuaderno durante el curso para "echar un vistazo" a los mismos (sin un fin evaluador). Así, esta recogida de los cuadernos se presentó como uno de esos vistazos por parte del docente, sin comentarles el propósito concreto de la recogida, buscando que su actuación en la elaboración del cuaderno fuera lo más natural posible.

II.3. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO DEL TRABAJO EXPLORATORIO

En este apartado vamos a explicar tanto el marco metodológico como el marco teórico utilizados en el desarrollo de este estudio exploratorio. El primer subapartado se focalizará en el marco metodológico empleado, en este caso una metodología de estudio de casos (Stake, 2005). En el segundo subapartado se presenta el marco teórico creado *ad hoc*, de una forma esencialmente inductiva, para el análisis de los cuadernos de matemáticas de los alumnos participantes en esta investigación.

II.3.1. MARCO METODOLÓGICO DEL TRABAJO

Nuestro interés fundamental en este TFM era el de desarrollar el máximo conocimiento posible sobre la elaboración y la utilización del cuaderno de matemáticas, durante el periodo de *Practicum*, llevado a cabo por el grupo de alumnos participante en este estudio. Es decir, en ningún momento nos planteamos la posible generalización o la extrapolación de los resultados obtenidos a ámbitos más generales, debido a la existencia de múltiples factores diferenciadores entre unos contextos y otros que son influyentes en un estudio de este tipo.

Por ello, se decidió que la metodología más adecuada bajo la cual desarrollar este trabajo era la metodología de *estudio de casos* (Stake, 2005). En particular, un estudio de casos de tipo *múltiple* o *colectivo*, en el que cada uno de los alumnos participantes de la clase se constituyó como un caso para investigar conjuntamente sobre la elaboración y la utilización del cuaderno de matemáticas en el contexto asociado a la realidad de su aula.

Para poder desarrollar esta metodología, Stake (2005) defiende la necesidad de una absoluta concentración del investigador en el caso o los casos a estudiar, buscando siempre optimizar su entendimiento de los casos, con independencia del método seguido. Para ello, este autor establece varios requisitos fundamentales que es necesario cumplir. Dichos requisitos son comentados a continuación, junto con el modo en que éstos han sido tratados en el estudio que aquí se presenta:

- Elección y tratamiento adecuado de las cuestiones o asuntos de investigación, mediante una planificación previa.

En anteriores apartados ya se ha comentado tanto la planificación de este estudio exploratorio como sus objetivos. Para el desarrollo del objetivo fundamental, la detección de diferentes perfiles en el alumnado según sea su desarrollo y elaboración del cuaderno durante el periodo de prácticas, se elaboró un primer marco provisional de análisis, que fue progresivamente adaptado y concretado en el transcurso del análisis de los propios documentos. Esto permitió la mejor adaptación del marco a las características encontradas en los cuadernos, así como una mayor concreción de los objetivos del estudio y los asuntos de investigación detectados como relevantes.

Tras el análisis de las fotocopias de los alumnos, se planificó el desarrollo de un debate entre los alumnos participantes que nos ayudó a conocer mejor su opinión sobre el cuaderno de matemáticas, la explicación a ciertos comportamientos encontrados en sus cuadernos y la utilización del cuaderno en su estudio y aprendizaje de las matemáticas.

- Estudio y descripción de todos los contextos que influyan en el caso tratado, para poder descubrir todas las posibles relaciones existentes dentro del caso y hacer una mejor explicación causal de los eventos.

Esta información ha sido ampliamente descrita en el apartado anterior de este capítulo. Dicha información ha sido obtenida a partir de la presencia en las clases de matemáticas del grupo (bien como observador o bien como docente en prácticas), y a través de charlas continuadas con el profesor de matemáticas en las que, entre otras cosas, se profundizaba en aquellos detalles detectados que se consideraban de mayor relevancia para el estudio desarrollado.

Toda esta información nos fue de mucha utilidad para la planificación del debate, en el que los propios estudiantes, a través de sus intervenciones, nos proporcionaron pistas muy importantes para poder explicar el comportamiento de los alumnos al elaborar su cuaderno de matemáticas en relación a la utilidad del cuaderno para ellos, y al uso que hacen del mismo en su estudio y aprendizaje de las matemáticas.

- Preocupación por la claridad de las percepciones y la validez de las comunicaciones, considerando las máximas impresiones posibles sobre el caso (entrevistas a gente relacionada, otros observadores…) para triangular las descripciones e interpretaciones y poder evitar posibles malentendidos.

Aunque el análisis de los cuadernos ha sido realizado por el autor de este trabajo (bajo la supervisión y el apoyo del tutor del TFM), las entrevistas casi diarias con el profesor nos permitieron contrastar las impresiones obtenidas en las clases (tanto cuando él era el docente como cuando era observador en la clase, en mi intervención como profesor en prácticas), así como algunos aspectos encontrados en el análisis de los cuadernos. Todo ello nos ayudó a profundizar en las interpretaciones del análisis realizado, debido al mayor conocimiento de los alumnos que tiene su docente.

Ese mayor conocimiento también nos ayudó a planificar el debate realizado en el aula. Se optó por realizar un debate, en lugar de entrevistas, para poder escuchar a todos los participantes y para permitir el intercambio de opiniones, especialmente para explicar diferencias importantes encontradas entre unos alumnos y otros. Todo ello nos permitió conocer la opinión de los propios estudiantes explicando y justificando sus comportamientos al elaborar el cuaderno en relación al uso que hacen de los mismos, lo que nos ayudó sobremanera a poder realizar interpretaciones más precisas de lo sucedido y de los resultados encontrados en el análisis.

- Posesión de un conocimiento empírico del caso y de una atención meticulosa a sus actividades.

Como ya hemos comentado, nuestra presencia como observadores en el aula a lo largo de todos los días durante los cuales se prolongó el estudio, y el intercambio continuo de impresiones con el profesor, nos permitió un amplio conocimiento empírico del caso de estudio. Este conocimiento, junto con un análisis propio y detallado de las fotocopias de los cuadernos, siguiendo el marco teórico creado *ad hoc* de una forma sistemática y objetiva, nos permitió la detección de resultados y la propuesta de interpretaciones, que fueron compartidas, matizadas y completadas gracias al debate con los estudiantes. Todo ello con la intención de desarrollar interpretaciones y reflexiones resultantes del estudio que sean lo más entrelazadas y completas posible (en inglés, *"criss-crossed" reflections*), y que permitan a los lectores del trabajo comprender las mismas y, así, poder incorporarlas a sus experiencias sobre este tema.

Por tanto, pensamos que los cuatro requisitos que se establecen para desarrollar un estudio de caso se cumplen en nuestra situación.

El corpus fundamental de datos para el desarrollo del análisis está constituido por las dos tandas de fotocopias de los cuadernos de los alumnos realizadas. Cada tanda contiene lo que han elaborado los estudiantes en el periodo de *Practicum* correspondiente (unos quince días en cada caso). De cada estudiante tenemos dos tandas de fotocopias, a excepción del alumno E18, del cual sólo disponemos de las fotocopias de la segunda parte. El otro conjunto fundamental de datos lo obtuvimos en el debate sobre el cuaderno de matemáticas realizado en el aula, el cual fue grabado en vídeo y transcrito. Además, contamos con las notas de campo obtenidas cada día en la observación de la clase y las entrevistas informales, prácticamente diarias, con el profesor.

La secuenciación temporal de la recogida y el análisis de los datos fue la siguiente:

1. Planteamiento de un marco preliminar para analizar los cuadernos de matemáticas de los estudiantes (más información en el subapartado siguiente).

2. Análisis individualizado de cada una de las dos tandas de fotocopias, siguiendo el marco de análisis. Concreción y refinamiento del propio marco durante el desarrollo del análisis: generación de un marco inductivo *ad hoc* de análisis de los cuadernos de matemáticas.

3. Establecimiento de las propuestas de perfiles de elaboración del cuaderno y de las primeras interpretaciones y reflexiones de los resultados obtenidos. Planificación de un debate en el aula basado en lo anterior.

4. Realización del debate en el aula: conocimiento de las opiniones de los alumnos sobre el cuaderno de matemáticas, de las explicaciones y justificaciones aportadas para el perfil de elaboración en que han sido encuadrados y su posible relación con el uso que hacen del cuaderno. Reinterpretación de los resultados y refinamiento de las reflexiones obtenidas del análisis de los cuadernos. Establecimiento de las conclusiones del estudio.

II.3.2. MARCO TEÓRICO DEL TRABAJO

Una de las primeras necesidades que tuvimos para poder desarrollar el análisis de los cuadernos fue la de crear un instrumento que nos permitiera realizar un análisis sistemático y organizado de los mismos, y que nos ayudara a dar una respuesta adecuada a los objetivos fijados en el estudio.

No se encontró ningún instrumento de análisis de los cuadernos en los antecedentes revisados para el desarrollo del TFM, por lo que tuvimos que crear uno. Previamente al comienzo del análisis de las fotocopias de los cuadernos, se desarrolló un esquema inicial del marco de análisis.

Como ideas de partida para la elaboración de ese esquema inicial, debe destacarse la tesis doctoral de Monterrubio (2007) sobre modelos de valoración de manuales escolares de matemáticas y los trabajos derivados de la misma (Monterrubio y Ortega, 2009, 2011, 2012). En dicha investigación se desarrollaron instrumentos muy completos para el análisis de manuales escolares de matemáticas (generalmente, libros de texto), y que sirvieran de ayuda a la elección de los mismos por parte de los docentes. En esos instrumentos se establecieron una serie de organizadores del modelo, con varias categorías y subcategorías dentro de cada organizador. Algunos de estos organizadores, categorías y subcategorías han resultado ser una buena inspiración para comenzar a desarrollar un marco de análisis de los cuadernos de matemáticas que, al fin y al cabo, presenta ciertas características parecidas a un texto matemático. Además, también tuvimos presentes las ideas de Fried y Amit (2003) ya resaltadas en el capítulo de antecedentes, las aportaciones a partir de su experiencia docente realizadas tanto por el tutor de prácticas del centro como por el tutor del TFM, así como varias ideas teóricas sobre errores en matemáticas, que serán comentadas con más profundidad a continuación, cuando expongamos el marco de análisis utilizado.

Ese esquema inicial de marco fue estructurándose, modificándose y refinándose progresivamente a medida que avanzaba el análisis de las fotocopias de los cuadernos de los alumnos, y surgía la necesidad de añadir, modificar o adaptar las ideas existentes a la situación y al contexto de nuestro estudio, y el reanálisis progresivo de las fotocopias de acuerdo a las nuevas ideas introducidas. La intención fundamental es que el marco finalmente construido fuera el óptimo para nuestros propósitos de investigación dentro del contexto analizado. Esa intención, junto con la ausencia de modelos de análisis de los cuadernos de matemáticas, hace que el marco creado en este TFM sea de naturaleza mayoritariamente inductiva.

El marco de análisis que resultó del desarrollo de este proceso consta de cinco dimensiones diferentes de análisis. Dentro de cada dimensión, se establecieron varias variables de interés que se consideraron relacionadas o asociadas a la dimensión. Para concretar el análisis de cada una de las variables, se establecieron una serie de indicadores, entendidos como señales que ponen de manifiesto cada una de las diferentes variables.

El análisis que se realizó de cada uno de los indicadores en cada cuaderno fue de naturaleza cualitativa y descriptiva: se describen aquellos aspectos del cuaderno del alumno que están asociados o relacionados con el indicador de análisis considerado en cada momento, realizando un análisis sistemático de todos ellos en cada una de las dos tandas de fotocopias de los cuadernos que poseemos de cada alumno (a excepción, como ya hemos comentado, del alumno E18, del que sólo disponemos de una tanda de fotocopias).

Presentamos a continuación, y con mayor detalle, el marco de análisis de los cuadernos de matemáticas resultante del desarrollo del estudio, y que supone el marco teórico de este trabajo.

Dimensión 1: Estructura, orden y presentación del cuaderno

Dentro de esta dimensión se establecieron finalmente tres variables distintas: una variable relacionada con la organización del cuaderno, otra relacionada con la presentación del cuaderno y una tercera relacionada con la presencia de un estilo propio del alumno al organizar y presentar su cuaderno de matemáticas. Así, esta dimensión contiene un conjunto de variables relacionadas con los hábitos de estructuración, organización y presentación del cuaderno de matemáticas por parte del alumno. En la Tabla II.1 se indican las tres variables consideradas y los diferentes indicadores incluidos en cada una de las variables.

Debido a la metodología docente, el contenido de los cuadernos, de forma mayoritaria, ha correspondido con los ejercicios propuestos y resueltos en la clase. Ese contexto ha sido tenido en cuenta para seleccionar los indicadores considerados como más representativos en esta situación. Así, se hace mención explícita a esta naturaleza procedimental del contenido en algunos indicadores.

Dimensión 1: Estructura, orden y presentación del cuaderno	
Variables	Indicadores de cada variable
Organización del cuaderno	• Separación en el cuaderno de los ejercicios de distintos temas. En caso de que se mezclen, presencia de avisos que indiquen de alguna forma los cambios de tema producidos. • Ausencia de ejercicios cuya resolución se haya partido en varios trozos a lo largo del cuaderno. En caso de que aparezca alguno, presencia de indicaciones de esta circunstancia. • Ausencia de ejercicios inacabados o sin completar en el cuaderno.
Presentación del cuaderno	• Nivel de limpieza del cuaderno. • Número de tachones en el cuaderno y modo en que afectan los mismos a la presentación del cuaderno. • Respecto de los márgenes y adecuada utilización de los espacios. • Presencia de dibujos y esquemas correctamente presentados y bien integrados en el cuaderno. • Legibilidad de la letra y claridad en la caligrafía de números, símbolos y signos matemáticos.
Estilo propio en el cuaderno	• Nivel de personalización del alumno en la organización y la presentación de su cuaderno. • Adecuación de los rasgos personales detectados para las funciones que pretende cumplir el cuaderno para el alumno.

Tabla II.1. Variables e indicadores considerados para el análisis de la Dimensión 1.

Dimensión 2: Completitud del cuaderno

En esta segunda dimensión estudiamos la cualidad de completitud del cuaderno, tanto en relación a los contenidos teóricos registrados en el mismo (primera variable), como en relación al contenido práctico, asociado a los ejercicios. Debido al mayor peso de estos últimos contenidos en los cuadernos participantes y a la mayor variabilidad de aspectos dignos de estudio que se han considerado, hay tres variables distintas asociadas a las actividades: la propia completitud de las actividades registradas, la implicación del alumno en las actividades existentes en su cuaderno, y la revisión y corrección de las tareas intentadas. En la Tabla II.2 se reflejan las cuatro variables, con sus respectivos indicadores.

Dimensión 2: Completitud del cuaderno	
Variables	Indicadores de cada variable
Teoría en el cuaderno	• Frecuencia en la escritura en el cuaderno de definiciones, esquemas, ejemplos, notas o aclaraciones correspondientes a la teoría impartida en la clase.
Completitud de las actividades registradas en el cuaderno	• Porcentaje de ejercicios registrados en el cuaderno de entre los que se realizan o corrigen en la clase. • Número de ejercicios en el cuaderno de entre los que el profesor plantea pero deja pendiente su corrección. • Aparición de actividades ejecutadas por el alumno en su cuaderno que son distintas de las propuestas por el profesor en el aula.
Implicación del alumno en la resolución de las actividades propuestas	• Número de actividades cuya resolución registrada se detecta que ha sido literalmente copiada de su corrección en el aula. • Cantidad de ejercicios cuya resolución registrada se detecta copiada literalmente del cuaderno de otro estudiante. • Número de ejercicios en cuya resolución registrada hay indicios de que pudiera haberse desarrollado en clases particulares, academias o con la guía de otra persona. • Frecuencia de las actividades cuya resolución registrada se detecta que ha sido intentada por el propio estudiante.
Revisión en el cuaderno de las tareas que se corrigen en el aula	• Corrección de los errores cometidos en sus intentos de resolución de las tareas. • Indicación explícita y explicación de los errores cometidos. • Número de ejercicios incorrectamente resueltos que son rehechos ulteriormente de forma satisfactoria en el propio cuaderno.

Tabla II.2. Variables e indicadores considerados para el análisis de la Dimensión 2.

Como puede observarse en las dos últimas variables, los indicadores que se han considerado recogen las diferentes situaciones que se han encontrado durante el análisis de los cuadernos, tanto en la resolución de las actividades registradas como en los diversos procedimientos asociados a la corrección de sus intentos de resolución.

Dimensión 3: Intención del cuaderno como instrumento para el aprendizaje del alumno

Esta tercera dimensión, que consta de una única variable (del mismo nombre que la dimensión), intenta analizar hasta qué punto el cuaderno del alumno recoge muestras de la presencia de una intencionalidad del estudiante para que su cuaderno le sirva como un instrumento de utilidad propia en su estudio y aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, tuvimos presentes las ideas de Fried y Amit (2003), ya comentadas en el capítulo I. Estos autores plantean una dicotomía interesante en la visión de las actividades matemáticas como actividades situadas dentro de un *dominio público* o *dominio privado*, e indican la susceptibilidad del cuaderno de situarse en ambos dominios. Estos autores también se apoyan en la distinción de diferentes tipos de escritura planteada por Britton *et al*. (1975), y también explicada en los antecedentes, particularmente en la distinción entre escritura hecha para el intercambio (en inglés, *transactional writing*) y escritura expresiva (en inglés, *expressive writing*).

En este contexto en el que se centra el estudio exploratorio, el profesor da libertad a los alumnos para elaborar y utilizar el cuaderno como consideren oportuno, por lo que no hay ninguna restricción metodológica del aula que sitúe el cuaderno como una actividad de dominio público (en el sentido de Fried y Amit, 2003). Es decir, el alumno no es responsable de lo que realiza en su cuaderno ante el docente o sus compañeros, ni tiene necesidad de comunicar formalmente lo realizado en él.

Sin embargo, consideramos que pueden existir diferencias entre la implicación real de los alumnos para que su cuaderno sea una herramienta que, efectivamente, se sitúe dentro del dominio privado, y en ella puedan explorar, dar marcha atrás o reflexionar sobre los conceptos matemáticos tratados. Es decir, si realmente utilizan el cuaderno como una herramienta que les permita trabajar y reflexionar de forma personal y autónoma con los conceptos y técnicas tratadas o, por el contrario, no lo hacen así.

Además, en relación a la escritura, consideramos muy interesante y relevante la distinción realizada por Britton *et al*. (1975) y anteriormente comentada. En este entorno, como ya hemos comentado, la metodología del docente sitúa al cuaderno como una herramienta a desarrollar dentro del domino privado de cada estudiante. Así, lo escrito en el cuaderno por cada estudiante tiene por destinatario principal al propio estudiante, pero pueden existir diferencias en el carácter de esa escritura. Pudiera ser que su escritura en el cuaderno fuera una mera transcripción básica de lo realizado en el aula o de lo escrito en la pizarra. Pero también pudiera ser que en esa escritura, además, se añadieran aspectos que el alumno considere útiles para su propio estudio y aprendizaje (como pudiera ser la explicitación de los pasos y procesos seguidos, comentarios de interés o aclaraciones indicadas por el docente o propias del estudiante). Además, esa escritura también puede ser desarrollada por el propio estudiante en sus intentos de resolución de las actividades, o reflejar sus avances, momentos de bloqueo, dudas… Todos esos aspectos hacen que la escritura sea potencialmente más útil para el propio estudiante, y, por tanto, los consideraremos como rasgos propios del desarrollo de una escritura expresiva en el cuaderno, hecha por el bien del propio escritor. Además, pensamos que son reflejo de una mayor intención del alumno en que su cuaderno sea un instrumento para ellos en su estudio y aprendizaje de las matemáticas

Los diferentes indicadores que se han establecido plasman estos aspectos que hemos comentado. Debido a que esta dimensión únicamente consta de una variable, en lugar de utilizar una tabla vamos a escribir a continuación una lista con los indicadores que hemos considerado en la misma:

- Escritura explícita de los procesos mentales seguidos en la resolución de los ejercicios.
- Frecuencia en el registro de comentarios o aclaraciones que el profesor ha realizado durante la realización de actividades en el aula.
- Número de anotaciones propias del alumno con la intención de servir de ayuda para la resolución satisfactoria de las actividades.
- Uso del cuaderno de modo personal para constatar y contrastar si el estudiante ha asimilado los conceptos o técnicas presentadas en la clase.

Dimensión 4: Riqueza del lenguaje verbal utilizado en el cuaderno

A pesar de que el contenido mayoritario encontrado en los cuadernos han sido los ejercicios y que el nivel de lenguaje verbal registrado ha sido escaso, se ha considerado una dimensión propia para analizar la riqueza y corrección del léxico y del lenguaje verbal utilizado por cada alumno en su cuaderno de matemáticas. Al igual que la dimensión 3, esta dimensión consta de una única variable (del mismo nombre que la dimensión). Para medir el nivel de desarrollo de esta variable se han considerado una serie de indicadores, que se relacionan a continuación:

- Presencia de un vocabulario variado, adecuado y comprensible en el cuaderno del alumno.
- Sintaxis correcta de las oraciones registradas.
- Uso adecuado de los signos de puntuación.
- Ausencia de faltas de ortografía y presencia de una acentuación adecuada.

Dimensión 5: Corrección matemática y presencia de errores en el cuaderno

En toda actividad humana debe admitirse la posibilidad de cometer errores. En particular, en el proceso de adquisición y desarrollo de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes pueden aparecer errores que, siguiendo a Rico (1995), entenderemos como la presencia de conocimientos deficientes o incompletos sobre la materia tratada. En esta dimensión pretendemos realizar una pequeña caracterización de los errores encontrados en los cuadernos de matemáticas de los alumnos. La detección de los errores en los cuadernos supone un primer paso para intentar la superación de los mismos en el transcurso de la docencia a través de su integración, especialmente aquellos que se muestren de modo más generalizado o se les considere más graves. Es decir, el cuaderno nos ofrece una fuente de datos muy importante para el análisis y el tratamiento de los errores.

Según Ortega (2010), existen varias características que muchos investigadores indican como comunes a los errores cometidos por los alumnos:

- Los errores surgen de manera sorprendente, manteniéndose, por lo general, ocultos para el profesor durante cierto tiempo.
- Los errores suelen ser persistentes, puesto que reflejan un conocimiento del alumno.
- Los errores pueden ser sistemáticos, es decir, reflejar la presencia de una comprensión equivocada sobre determinado concepto (y por ello más importantes); o debidos al azar, a descuidos o despistes (menos importantes).
- Los errores ignoran el significado: no se cuestiona la veracidad de respuestas incorrectas, manifestándose un desconocimiento de los conceptos o de los símbolos utilizados.

Como referencia e inspiración para la determinación de variables e indicadores dentro de esta dimensión, hemos utilizado la noción de *obstáculo epistemológico* (Brousseau,

1983) y varias clasificaciones de errores que consideramos relevantes (Astolfi, 1999; Radatz, 1979; Socas, 1997), y que explicamos brevemente a continuación.

Brousseau (1983) retoma el concepto de obstáculo epistemológico, ya creado por Bachelard en el campo de las ciencias experimentales, y lo aplica en el ámbito de la Didáctica de la Matemática. Para este autor, un obstáculo epistemológico se caracteriza por la presencia de un conocimiento que posee el alumno y que tiene un cierto dominio de validez, pero que deja de ser válido en otras situaciones, lo que hace que se manifieste el obstáculo por medio de errores. Estos obstáculos suelen ser muy persistentes en el alumno, por lo que es necesario provocar conflictos cognitivos al estudiante que pongan de manifiesto la incompletitud de su concepción y hagan evolucionar la misma.

La clasificación de Radatz (1979) fue muy influyente para autores posteriores. Este autor parte del diferente procesamiento de la información para establecer cinco categorías de errores:

- Errores debidos a las dificultades del lenguaje, es decir, a la falta de comprensión semántica de los textos de matemáticas o del discurso del profesor.
- Errores debidos a las dificultades para obtener información a partir de imágenes espaciales o visuales.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conocimientos previos.
- Errores debidos a la realización de asociaciones incorrectas o a la rigidez de pensamiento, es decir, a la aplicación errónea de procedimientos u operaciones cognitivas ya aprendidas a otras situaciones nuevas o modificadas.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o de estrategias irrelevantes, debidas a la aplicación de reglas o estrategias similares en áreas diferentes de contenidos.

Astolfi (1999, pp. 49-83) realiza una clasificación más rica de los errores, al partir de una perspectiva más general. Establece ocho tipos diferentes de errores en su clasificación:

- Errores asociados a las dificultades en la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas.
- Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas (de lo que se espera).
- Errores como resultado de la presencia de concepciones alternativas en los alumnos.
- Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas en la resolución de una situación problemática.
- Errores relacionados con la diversidad de procedimientos alejados de un procedimiento estándar adoptados por un alumno.
- Errores debidos a la sobrecarga cognitiva durante la actividad, dado que la capacidad de la memoria de trabajo es limitada.
- Errores debidos a un déficit en conocimientos ligados a otras disciplinas o a las dificultades para transferir conocimiento de unas disciplinas a otras.
- Errores derivados de la complejidad propia de un contenido.

La clasificación propuesta por Socas (1997), a diferencia de las anteriores, fija y clasifica las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, que son las que provocan los errores. Este autor establece cinco categorías de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, que pueden ser de tipo conceptual (ligadas a la naturaleza abstracta de los contenidos matemáticos que representan) o de tipo operacional (ligadas a la sintaxis de la manipulación simbólica).
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, relacionados con la naturaleza lógica de las matemáticas y con la presencia de rupturas relacionadas con los modos de pensamiento matemático avanzado.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, relacionados con la institución escolar, la organización curricular y los métodos de enseñanza seguidos.
- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.

- Dificultades asociadas a las actitudes afectivo-emocionales hacia las matemáticas y a la presencia de factores de este tipo que dificultan y bloquean el aprendizaje de las matemáticas.

Partiendo del conocimiento de estas clasificaciones y de los errores que hemos encontrado en nuestro análisis de los cuadernos de los alumnos participantes, hemos realizado una pequeña tipología de errores que se traduce en varias variables en esta dimensión, con una serie de indicadores en cada una de ellas. La Tabla II.3 recoge dichas variables e indicadores.

Dimensión 5: Corrección matemática y presencia de errores en el cuaderno	
Variables	Indicadores de cada variable
Lenguaje matemático utilizado en el cuaderno	• Frecuencia en el uso del lenguaje matemático introducido a lo largo de las clases. • Utilización adecuada de los símbolos matemáticos. • Uso correcto de la terminología matemática y nivel de precisión del lenguaje matemático de tipo verbal registrado.
Errores asociados a la transcripción de elementos	• Frecuencia de aparición de errores asociados a una transcripción errónea. • Nivel de gravedad de los errores de transcripción (se muestran como un descuido o parecen indicar una falta de comprensión de lo que se está copiando).
Errores de cálculo	• Frecuencia de aparición de errores de cálculo en el cuaderno. • Nivel de gravedad de los errores de cálculo encontrados (se muestran como un descuido o parecen indicar un déficit en conocimientos matemáticos de tipo operacional que deberían dominarse en este nivel educativo).
Errores de tipo conceptual	• Aparición de errores asociados a un conocimiento deficiente o incompleto de algún concepto matemático: descripción de todos los errores de esta índole que se detecten.

Tabla II.3. Variables e indicadores considerados para el análisis de la Dimensión 5.

En el transcurso del análisis se hará un especial énfasis en aquellos errores detectados que se encuentren de una forma más generalizada (en un mayor número de alumnos o con mayor frecuencia de aparición y repetición) o que se consideren de mayor gravedad porque se interprete que están asociados a una comprensión errónea, deficiente o incompleto de conceptos matemáticos o a un déficit en conocimientos o técnicas de tipo operacional que debieran ser dominadas en el nivel educativo de 1º de Bachillerato. Estos errores han sido descritos con mayor detalle en el análisis de los cuadernos realizado, y han sido comunicados a su profesor de matemáticas para realizar una integración de dichos errores en la docencia que conduzca a la superación de los mismos.

II.4. RESULTADOS OBTENIDOS EN EL ANÁLISIS DE LOS CUADERNOS DE LOS ALUMNOS. PRIMERAS REFLEXIONES

Las dos tandas de fotocopias de los cuadernos de cada alumno (a excepción del alumno E18 del que, como hemos comentado, sólo dispusimos de la segunda tanda de fotocopias) fueron analizadas usando como referencia las cinco dimensiones de análisis presentadas en el marco teórico, con las variables y sus indicadores fijados. El Anexo A.1 (en el CD) recoge el análisis conjunto pormenorizado de las fotocopias de los cuadernos de cada uno de los alumnos participantes.

Ese análisis nos proporcionó gran cantidad de información sobre el modo en que cada alumno participante ha elaborado su cuaderno de matemáticas. Esta información fue la base para el establecimiento de diferentes perfiles en los estudiantes, según las características de la elaboración y el trabajo realizado con sus cuadernos. Además, nuestro conocimiento del contexto de la clase y la observación de la actividad docente durante el periodo analizado nos permitieron plantear algunas reflexiones iniciales sobre el trabajo de los alumnos con su cuaderno, así como su relación tanto con el rendimiento académico en matemáticas como con su perfil afectivo-emocional hacia esta materia, con los datos recogidos asociados a esos dos aspectos. Todos estos resultados derivados del análisis fueron la base del debate posterior sobre el cuaderno de matemáticas que se mantuvo con estos estudiantes, y que será descrito en el apartado II.5.

II.4.1. DETERMINACIÓN DE PERFILES EN LOS ESTUDIANTES

Como ya se comentó en el apartado II.1, uno de los objetivos principales de este trabajo exploratorio era determinar diferentes perfiles de los estudiantes al elaborar y trabajar con su cuaderno de matemáticas. Este fue el primer aspecto que se trató una vez completado y revisado el análisis que se muestra en el Anexo A.1.

Dentro de toda la información que engloba el análisis realizado, que era muy diversa, fue necesario determinar qué aspectos íbamos a considerar como prioritarios para articular el establecimiento de los perfiles. En ese sentido, y debido al interés que nos suscitaron durante todo el estudio las ideas de Fried y Amit (2003) sobre el cuaderno como un instrumento situado dentro de un domino público o privado, y la clasificación de Britton *et al*. (1975) distinguiendo entre una escritura hecha para el intercambio (*transactional writing*) y una escritura expresiva (*expressive writing*), una de las dimensiones consideradas clave para esta articulación fue la Dimensión 3, "Intención del cuaderno como instrumento para el aprendizaje del alumno". No obstante, también nos apoyamos en otras dimensiones, sobre todo en la segunda; con la consideración puntual de las dimensiones, variables e indicadores restantes en los que se observaran diferencias importantes.

Los estudiantes cuyos cuadernos presentaban altas similitudes en los aspectos clave que articularon el análisis fueron agrupados en un mismo perfil. Así, encontramos ocho perfiles diferentes de estudiantes según la elaboración y el trabajo plasmado en su cuaderno de matemáticas. Además, algunos de estos perfiles presentaban ciertos rasgos importantes de afinidad, por lo que los perfiles fueron clasificados en tres grandes grupos. Detallamos a continuación cada uno de los tres grandes grupos, junto con las características de cada uno y los alumnos situados en ellos (con la notación utilizada en el estudio), así como de los perfiles situados dentro de cada gran grupo. Esta clasificación de perfiles se encuentra publicada en Arce (2014).

Primer grupo: Cuaderno como mero registro

En este primer grupo hemos incluido a aquellos alumnos cuyo comportamiento mayoritario en el cuaderno ha sido el de copiar literalmente aquello que se escribía en la pizarra, sin que prácticamente exista en el cuaderno ningún intento propio de resolución de las actividades planteadas, ni ninguna actividad a mayores. Es decir, los alumnos en su cuaderno se limitan a registrar aquello que se escribía en la pizarra, característica que da nombre a los alumnos de este primer grupo.

Así, estos alumnos no hacen un uso real del cuaderno como un instrumento dentro del dominio privado, puesto que no se detectan momentos de exploración, trabajo o reflexión de estos alumnos con los conceptos tratados, al no existir intentos de resolución de actividades. Además, la escritura que predomina tiene características más propias de una escritura hecha para el intercambio que de una escritura expresiva, dado que los alumnos de estos grupos no escriben ni pasos y procesos de resolución de actividades, ni comentarios ni notas aclaratorias, ya sean propias del docente o sean personales del propio estudiante.

Dentro de este grupo distinguimos dos perfiles distintos de estudiantes, según el grado de completitud de la transcripción realizada:

- **Perfil P11**: Alumnos que en sus cuadernos copian textualmente sólo algunos de los ejercicios que se han realizado en la clase (1 estudiante: E15).

Como se indica en el nombre del perfil, el alumno que ha sido ubicado en este perfil se caracteriza por registrar textualmente en la clase la corrección de algunos de los ejercicios allí realizados (pero no de todos) y por no realizar intentos de resolución de las actividades planteadas. La Figura II.1, escaneada del cuaderno del alumno E15, evidencia esa transcripción parcial de los ejercicios planteados y corregidos en la propia aula.

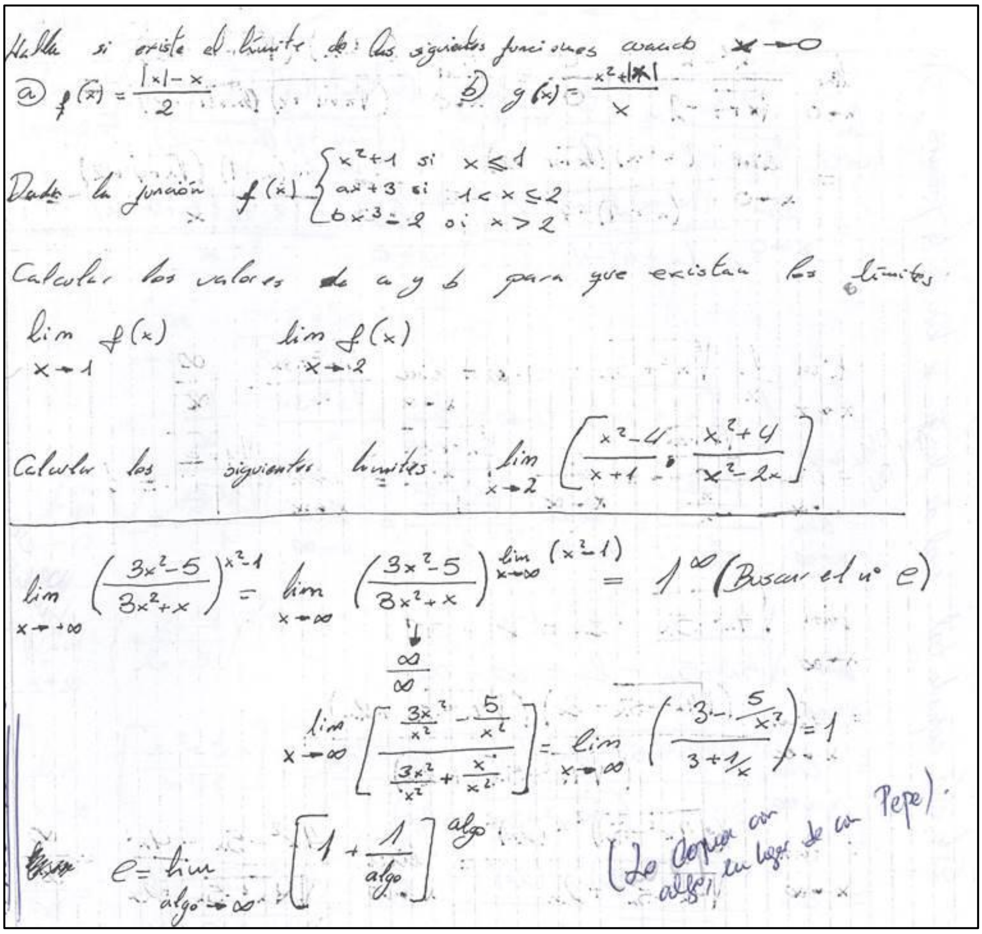
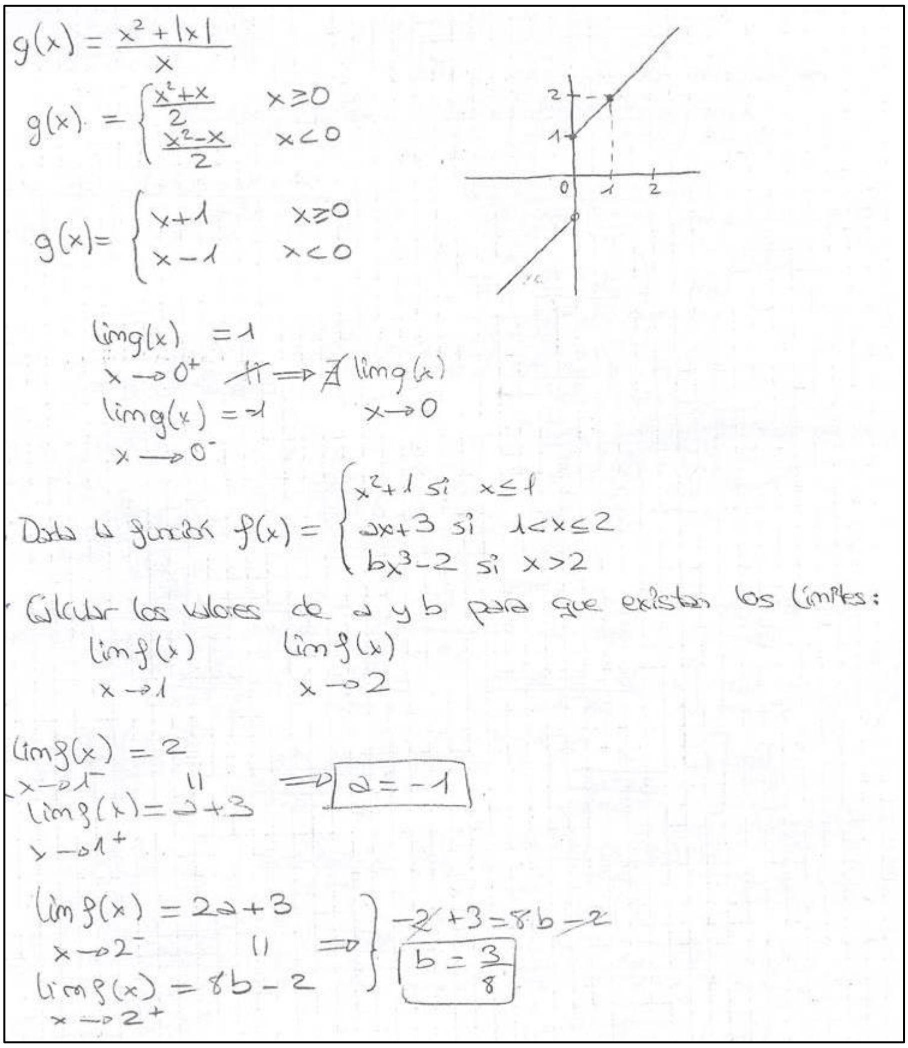


Figura II.1. Escaneo del cuaderno del alumno E15, perteneciente al perfil P11.

En la figura anterior se observa la presencia del enunciado de varios ejercicios propuestos por el profesor (los que están por encima de la raya horizontal que dibuja) en los que no se intenta la resolución ni ésta se transcribe. Sin embargo, en el texto que puede observarse por debajo de la raya horizontal sí que se transcribe la corrección de la actividad realizada en el aula por su docente.

- **Perfil P12**: Alumnos que en sus cuadernos copian textualmente todos o la inmensa mayoría de los ejercicios que se han realizado en el aula (4 estudiantes: E16, E18, E19 y E21).

De los dos perfiles englobados dentro de este grupo, el Perfil P12 es más completo que el P11, dado que, al menos, se realiza la transcripción de gran parte de las actividades realizadas en el aula. No obstante, dicho registro es literal, sin que prácticamente existan intentos de resolución y sin que se añadan comentarios o anotaciones que ayuden en una posible utilización posterior del cuaderno. La Figura II.2, escaneada del cuaderno de la alumna E19, muestra un fragmento con dos actividades cuyo registro de la resolución es idéntico a lo escrito por el docente en la pizarra durante la corrección desarrollada.



$g(x) = \frac{x^2+|x|}{x}$

$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{2} & x \geq 0 \\ \frac{x^2-x}{2} & x < 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1$

$\nexists \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} g(x)$

$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax+3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ bx^3-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Calcular los valores de a y b para que existan los límites: $\lim_{x \to 1} f(x)$ $\lim_{x \to 2} f(x)$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$\parallel \Rightarrow \boxed{a = -1}$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = a+3$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2a+3$

$\parallel \Rightarrow \left\} \begin{array}{l} \cancel{-2}+3 = 8b \cancel{-2} \\ \boxed{b = \frac{3}{8}} \end{array} \right.$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 8b-2$

Figura II.2. Escaneo del cuaderno de la alumna E19, perteneciente al perfil P12.

Como ya se ha comentado, y es característica fundamental de los alumnos de este perfil, la transcripción es literal de la corrección hecha en el aula.

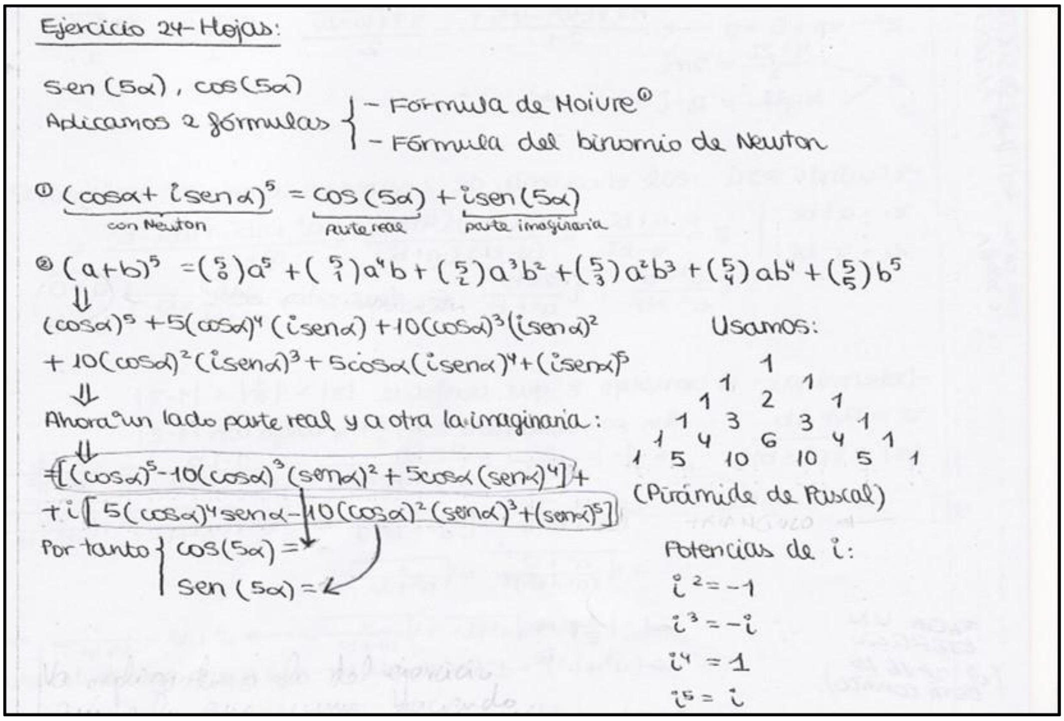
Segundo grupo: Perfiles intermedios

En este segundo grupo están los estudiantes que no se han limitado a transcribir en su cuaderno actividades resueltas en el aula. Estos alumnos han añadido algún aspecto que muestre cierto desarrollo del cuaderno como herramienta dentro del domino privado, para el propio estudiante; pero que no han llegado a desarrollar de forma completa el cuaderno como instrumento personal del alumno para la indagación, el trabajo, la reflexión y la consolidación de los conceptos y técnicas presentadas en la clase. En consecuencia, el nombre que se ha dado a este segundo grupo ha sido el de perfiles intermedios. Dentro de este grupo se distinguen cuatro perfiles diferentes de estudiantes, según qué aspectos se añadan a la transcripción que caracterizaba a los alumnos del primer gran grupo. Los cuatro perfiles detectados son:

- **Perfil P21**: Alumnos que al registro de los ejercicios resueltos en la clase han añadido la escritura de comentarios, aclaraciones, notas de ayuda y de los procesos de resolución seguidos en las actividades que se copian, pero sin que existan intentos propios de resolución (un estudiante: E10).

Estos alumnos no utilizan el cuaderno como herramienta para indagar, trabajar y reflexionar de forma personal y autónoma sobre los conceptos, pero sí que complementan la transcripción con la escritura de otros elementos que consideran útiles para sí mismos, por lo que la escritura tiene un carácter más expresivo, en el sentido de Britton *et al*. (1975). Hay un estudiante en este perfil, el alumno E10. La Figura II.3 muestra un escaneo del cuaderno de este estudiante.

En dicha figura podemos observar las características anteriormente comentadas en la transcripción de un ejercicio del tema de números complejos: escritura de pasos y procesos seguidos, así como aclaraciones, indicaciones y el recuerdo de los elementos de los que se hace uso en el ejercicio, como el triángulo de Pascal para la obtención de los coeficientes que acompañan a las potencias en el desarrollo de la potencia de un binomio.


Ejercicio 24- Hojas:

sen (5α), cos(5α)

Aplicamos 2 fórmulas { - Fórmula de Moivre® / - Fórmula del binomio de Newton

① $\underbrace{(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^5}_{\text{con Newton}} = \underbrace{\cos(5\alpha)}_{\text{parte real}} + \underbrace{i\,\text{sen}(5\alpha)}_{\text{parte imaginaria}}$

② $(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$

$\Downarrow$

$(\cos\alpha)^5 + 5(\cos\alpha)^4(i\,\text{sen}\alpha) + 10(\cos\alpha)^3(i\,\text{sen}\alpha)^2 + 10(\cos\alpha)^2(i\,\text{sen}\alpha)^3 + 5\cos\alpha(i\,\text{sen}\alpha)^4 + (i\,\text{sen}\alpha)^5$

$\Downarrow$

Ahora a un lado parte real y a otra la imaginaria:

$\Downarrow$

$= [(\cos\alpha)^5 - 10(\cos\alpha)^3(\text{sen}\alpha)^2 + 5\cos\alpha(\text{sen}\alpha)^4] + i[5(\cos\alpha)^4\text{sen}\alpha - 10(\cos\alpha)^2(\text{sen}\alpha)^3 + (\text{sen}\alpha)^5]$

Por tanto { $\cos(5\alpha) =$ / $\text{sen}(5\alpha) =$

Usamos:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

(Pirámide de Pascal)

Potencias de i:

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

Figura II.3. Escaneo del cuaderno del alumno E10, perteneciente al perfil P21.

- **Perfil P22**: Alumnos que consideramos que han mostrado una visión deficiente del cuaderno como un instrumento dentro del dominio privado del estudiante (dos estudiantes: E1 y E7).

Los alumnos pertenecientes a este perfil sí que utilizan su cuaderno como herramienta para intentar la resolución de las actividades planteadas. Pero esa actividad no se realiza en los periodos estipulados para ello en el aula o fuera de la misma, sino que existen evidencias (tanto en el propio cuaderno como en la observación de lo sucedido en las aulas) de que esos intentos de resolución, en bastantes casos, son simultáneos a los momentos en que estas actividades son corregidas en el aula. Este comportamiento provoca que en el cuaderno quede registrada una combinación de sus intentos propios de resolución con la propia corrección realizada en el aula, lo que provoca un registro de los ejercicios generalmente incompleto, deslavazado o con procesos inconexos, además de no complementarse con la escritura de explicaciones, notas o aclaraciones. Así, consideramos que estos alumnos no hacen una utilización adecuada del cuaderno como herramienta dentro del dominio privado, debido al momento utilizado para llevar a cabo ese trabajo y reflexión autónoma, que se muestra condicionada por la propia corrección realizada en el aula, tanto desde una perspectiva temporal (tiempo necesario para poder planificar y desarrollar la resolución del ejercicio) como cognitiva (influencia de los procesos y métodos utilizados por el docente, así como sus comentarios).

En este perfil hemos ubicado a dos estudiantes en los que se evidencia este comportamiento de manera frecuente: los alumnos E1 y E17. La Figura II.4 muestra un escaneo del cuaderno del alumno E1.

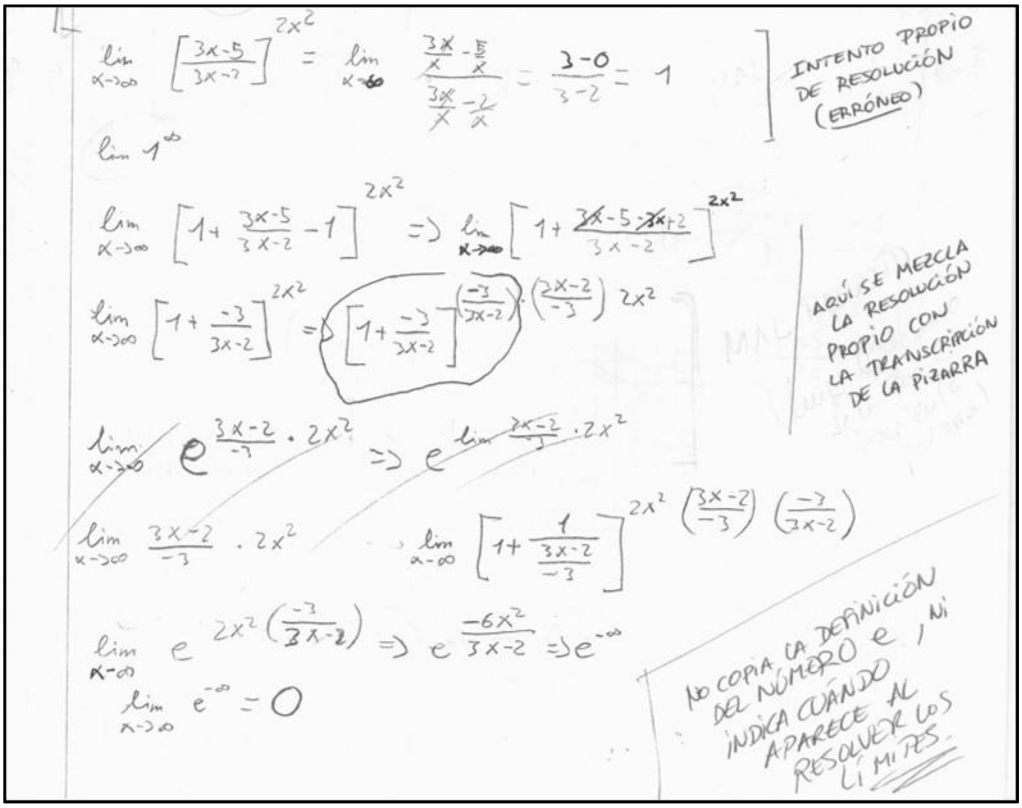


Figura II.4. Escaneo del cuaderno del alumno E1, perteneciente al perfil P22.

En el escaneo de la Figura II.4 se muestra la resolución de un límite con una indeterminación del tipo $(-1)^{\to\infty}$ en la que se combinan un primer intento de resolución del alumno con la transcripción de la resolución propia de la pizarra, pareciendo que intenta anticiparse a los pasos y los cálculos que el docente va realizado en la corrección de la tarea en el aula, apareciendo algunos errores y rectificaciones.

- **Perfil P23:** Alumnos en los que se evidencia la presencia de un comportamiento dispar a lo largo del periodo analizado (dos estudiantes: E3 y E9).

Este perfil está compuesto por los estudiantes en los que se ha observado la presencia de una evolución y de una diferencia importante en su comportamiento al elaborar el cuaderno en la parte inicial del periodo analizado y en la parte final. Los dos estudiantes incluidos en este perfil han mostrado una evolución con características similares: se ha reducido el uso que hacen los estudiantes del cuaderno dentro de un dominio privado, como una herramienta para el trabajo y la reflexión propia de los estudiantes sobre los conceptos trabajados en el aula. En la primera parte del periodo analizado los estudiantes sí que han intentado resolver los ejercicios planteados por el docente y posteriormente no corregidos en el aula, mientras que en la segunda parte el comportamiento se ha caracterizado por la transcripción literal, desapareciendo los intentos de resolución de las actividades planteadas.

En las Figuras II.5 y II.6 se muestran escaneos del cuaderno del alumno E9, de dos momentos distintos del periodo analizado: durante la primera parte del periodo (Figura II.5) y durante la última parte (Figura II.6), que evidencian la evolución detectada durante el estudio en el cuaderno del estudiante E9. En la Figura II.5 se escanean los intentos de resolución, propios del estudiante, de actividades sobre cálculo de dominios propuestas por el docente y que, posteriormente, no fueron corregidas en el aula. Sin embargo, en la Figura II.6 se escanea el registro literal de la pizarra (además con errores) de un límite cuyo cálculo fue propuesto por el docente unos días antes. Además, en esta misma figura se observa la copia de la expresión analítica del límite de una función propuesto por el docente y que no fue intentado por el propio estudiante (a pesar de dejar un espacio en blanco que parece destinado para ello).

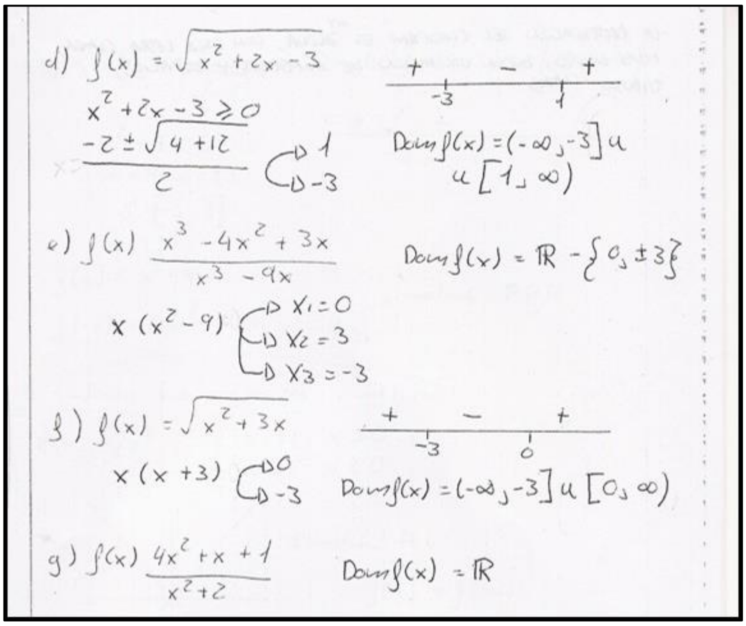


Figura II.5. Escaneo del cuaderno del alumno E9, perteneciente al perfil P23, correspondiente a los primeros días del periodo analizado.

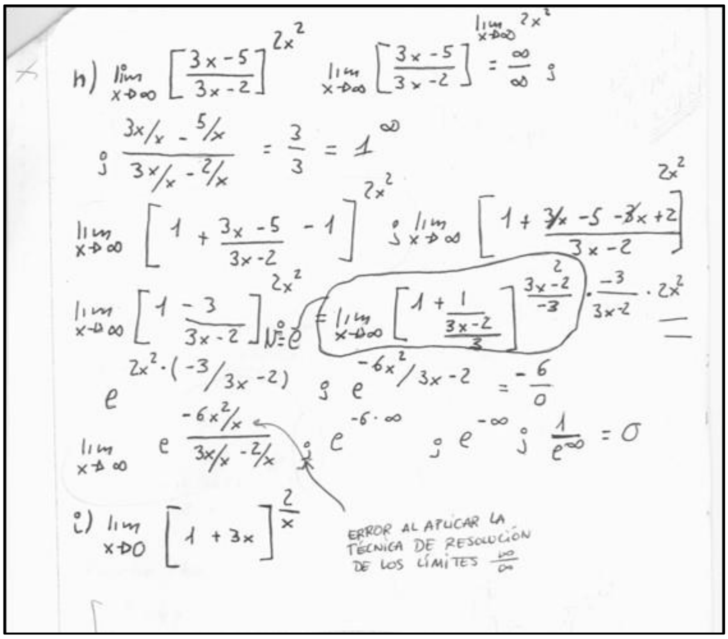


Figura II.6. Escaneo del cuaderno del alumno E9, perteneciente al perfil P23, correspondiente a los últimos días del periodo analizado.

- **Perfil P24**: Alumnos que combinan una escritura muy expresiva, con gran cantidad de comentarios del docente y notas personales de ayuda, con intentos de resolución muy pobres de algunas actividades (cuatro alumnas: E5, E6, E14 y E20).

Los estudiantes que han sido incluidos en este perfil se caracterizan, fundamentalmente, por añadir un gran número de anotaciones y de comentarios, tanto propios del docente como personales del alumno, en el registro de las actividades corregidas en el aula. Así, el registro de estas actividades se complementa con la escritura de aspectos que los estudiantes consideran útiles para sí mismos, por lo que la escritura recogida en sus cuadernos tiene una gran carga expresiva, por el bien del propio estudiante.

Además, los alumnos de este perfil también intentan resolver bastantes de las actividades planteadas por su docente pero no corregidas en el aula. Sin embargo, estos intentos de resolución se caracterizan, en general, por ser poco prósperos, atascándose frecuentemente y abandonando rápidamente dichos intentos de resolución. Dentro de este perfil hemos incluidos a cuatro estudiantes, todas ellas chicas: alumnas E5, E6, E14 y E20.

En la Figura II.7, que muestra un escaneo del cuaderno de la alumna E6, se puede observar la gran cantidad de anotaciones diversas escritas por la estudiante al transcribir la resolución de un límite en el que existía una indeterminación del tipo $(-1)^{\rightarrow\infty}$.

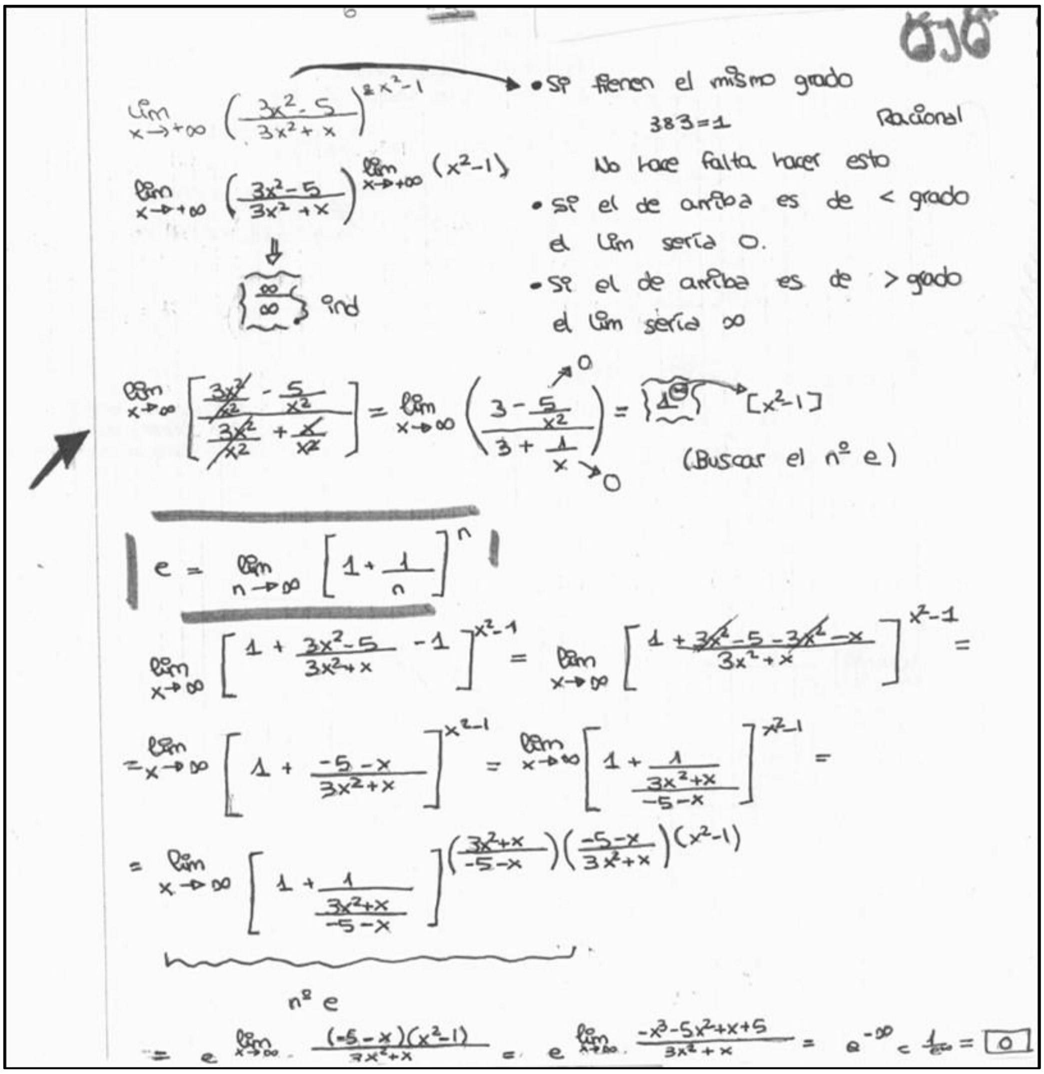


Figura II.7. Escaneo del cuaderno de la alumna E6, perteneciente al perfil P24.

En particular, en esta Figura II.7 se observa la presencia de una anotación de recuerdo sobre la resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\rightarrow\infty}{\rightarrow\infty}$ y una regla rápida para resolver estas indeterminaciones y el recuerdo sobre cómo se define el número e como límite de una sucesión numérica. También se observa que esta alumna remarca con rotulador algunas de estas notas y aclaraciones, un comportamiento que parece destinado a facilitar la atención a las mismas en una posible revisión del cuaderno. Incluso se observa la escritura de una llamada explícita de atención: “OJO”, en la parte superior de la hoja.

La Figura II.8 refleja otra de las características que definen a las alumnas incluidas en este perfil: la presencia de intentos de resolución muy pobres de las actividades. En particular, la figura es un escaneo extraído del cuaderno de la alumna E20.

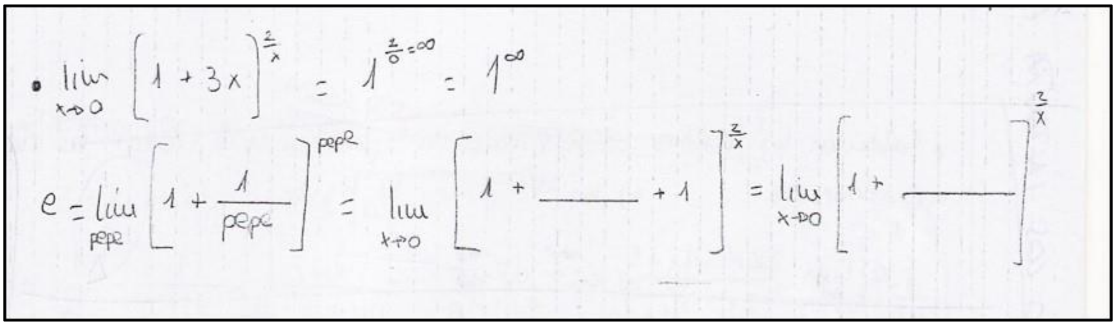


Figura II.8. Escaneo del cuaderno de la alumna E20, perteneciente al perfil P24.

En la figura anterior se muestra un vano intento de resolución para resolver un límite propuesto en el que existía una indeterminación del tipo $(-1)^{\to\infty}$. Como puede apreciarse, la alumna hace poco más que reconocer la indeterminación existente e intentar recordar un recurso utilizado por su profesor para definir el número e. La alumna no realiza ningún avance significativo en la resolución del límite planteado.

Tercer grupo: Cuaderno como instrumento privado para el repaso, reflexión y la consolidación de contenidos

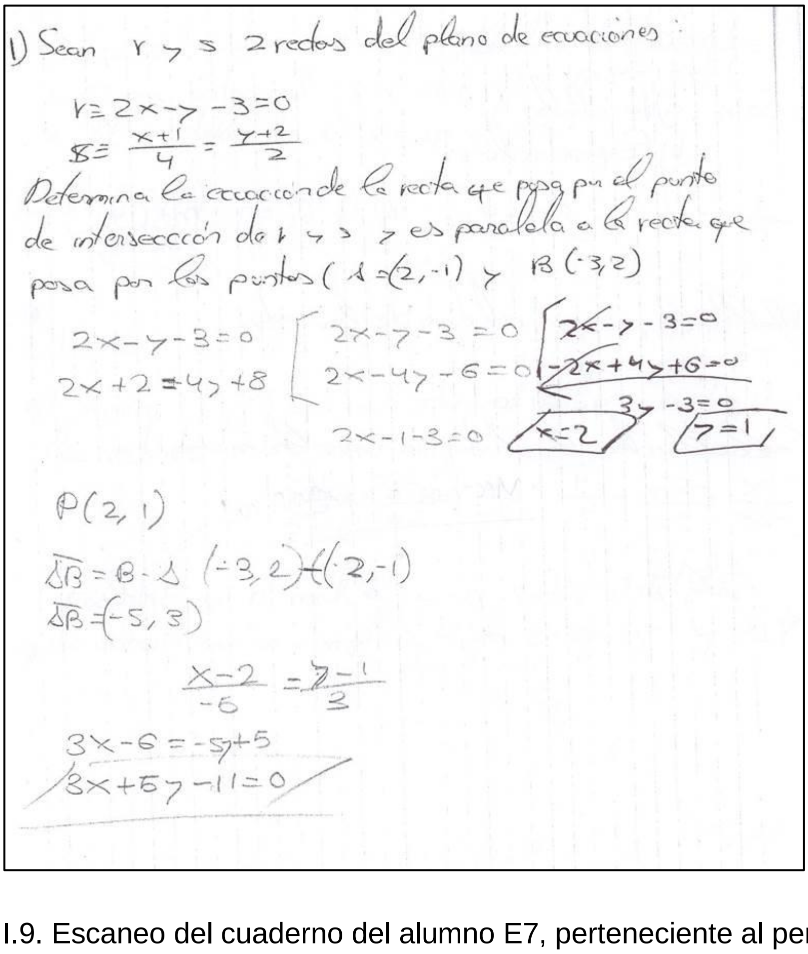
En el tercer grupo se ha ubicado a aquellos alumnos que, por decisión propia, han utilizado su cuaderno para la realización de ejercicios distintos de los propuestos por el profesor en el aula. A pesar de las posibles diferencias en otros aspectos, consideramos que este hecho diferencial, cuando se produce de una forma no aislada, muestra una alta implicación de los estudiantes para utilizar su cuaderno de matemáticas como un instrumento dentro del dominio privado (en el sentido de Fried y Amit, 2003). Los propios estudiantes, de forma autónoma y por iniciativa propia, deciden repasar, trabajar, indagar o reflexionar sobre algunos de los conceptos o técnicas trabajados en el aula. Estos pueden corresponder o no con los conceptos o técnicas más recientes, como veremos en los dos perfiles que hemos determinado.

Dentro de este gran grupo se han encontrado dos perfiles distintos, según cómo sea la temporalización en el aula de los contenidos en los que se centra este estudio autónomo y por iniciativa propia. A continuación se describen ambos perfiles, indicando sus características y los estudiantes que pertenecen a cada uno de ellos.

- **Perfil P31**: Alumnos que utilizan el cuaderno como un instrumento privado para el repaso de contenidos pertenecientes a temas propios de anteriores evaluaciones (un estudiante: E7).

En este perfil se ha integrado a aquellos estudiantes en los que las actividades a mayores que se han encontrado pertenecen a contenidos propios de las dos primeras evaluaciones del curso, en particular sobre trigonometría y sobre geometría analítica en el plano. Es decir, las actividades a mayores no se corresponden con actividades de los temas que se están tratando en clase en esos momentos, sino de temas bastante anteriores.

El alumno E7 es el único representante de este perfil. Debido a la cercanía del examen de recuperación de la segunda evaluación al periodo analizado y a que el alumno tenía suspensa dicha evaluación, inferimos que el alumno pudiera estar usando su cuaderno como un instrumento privado para el estudio, el repaso y el recuerdo de dichos temas, a través de la resolución propia de actividades centradas en los mismos. La Figura II.9, escaneada de su cuaderno, muestra un intento de resolución de una actividad de temas anteriores.


1) Sean r y s 2 rectas del plano de ecuaciones:

$r \equiv 2x-y-3=0$

$s \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{2}$

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de r y s y es paralela a la recta que pasa por los puntos (A=(2,-1) y B(-3,2)

$2x-y-3=0$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} 2x-y-3=0 \\ 2x-4y-6=0 \end{array} \right.$ $\quad \begin{array}{l} 2x-y-3=0 \\ -2x+4y+6=0 \end{array}$

$2x+2=4y+8$

$3y-3=0$

$2x-1-3=0$ $\quad \boxed{x=2}$ $\quad \boxed{y=1}$

$P(2,1)$

$\vec{AB} = B-A \; (-3,2)-(2,-1)$

$\vec{AB} = (-5,3)$

$\frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{3}$

$3x-6=-5y+5$

$\boxed{3x+5y-11=0}$

Figura II.9. Escaneo del cuaderno del alumno E7, perteneciente al perfil P31.

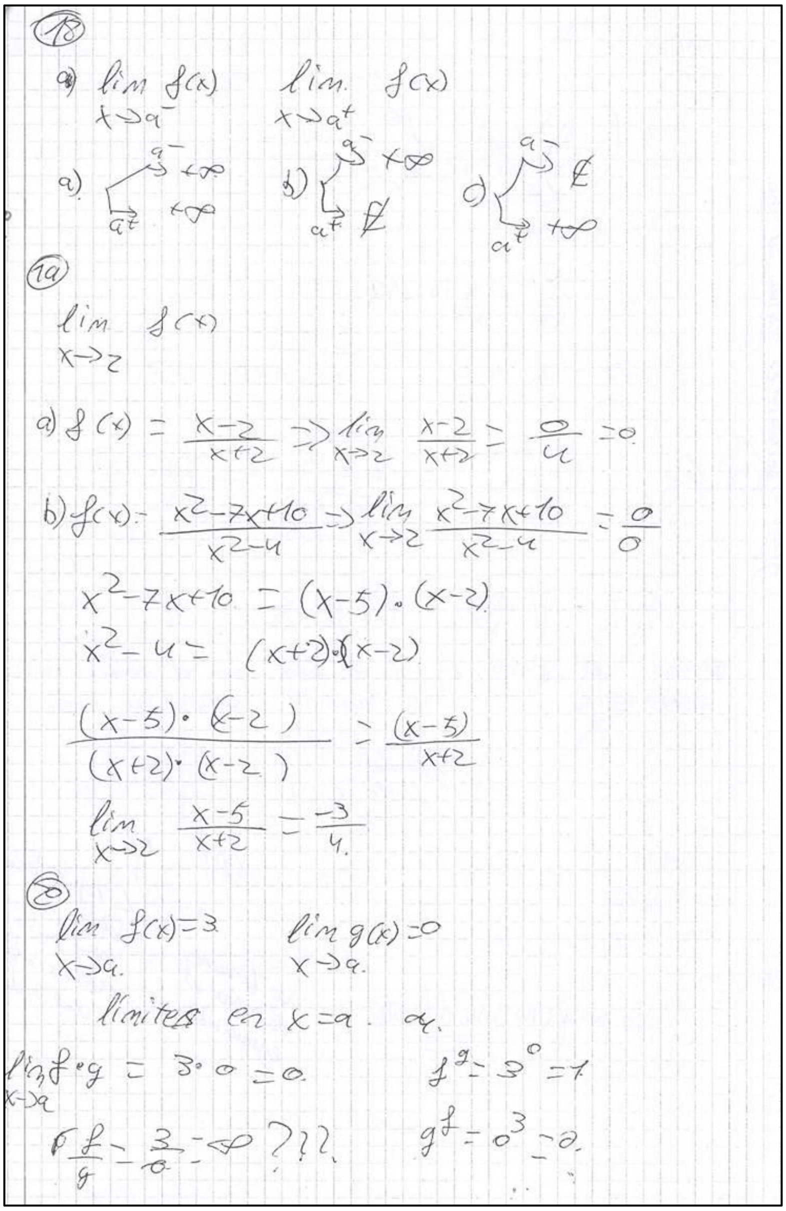
En la figura anterior se observa la presencia de un intento de resolución propio del estudiante de una tarea sobre geometría analítica del plano, un tópico tratado en el segundo trimestre del curso.

- **Perfil P32**: Alumnos que utilizan el cuaderno como un instrumento para el estudio, la consolidación y la reflexión de los contenidos (dos estudiantes: E2 y E12).

En este perfil están aquellos alumnos que realizan en su cuaderno un número elevado de actividades a mayores de las planteadas por el propio docente sobre los temas que se estén tratando actualmente en las clases. En ese sentido, estos alumnos realizan por propia iniciativa actividades sobre conceptos explicados recientemente (buscando la consolidación de los mismos en su bagaje matemático y la reflexión sobre ellos), sobre conceptos del tema que han sido tratados con menos profundidad en la teoría o en otros ejercicios propuestos (con ese mismo fin) e, incluso, sobre conceptos que aún no han sido vistos en el aula (tratando de anticiparse y buscando un primer entendimiento propio de los mismos).

Dentro de este perfil hemos situado a dos alumnos de la clase: el alumno E2 y la alumna E12. No obstante, no se aprecian estas características con el mismo desarrollo e intensidad en los dos estudiantes: el alumno E2 realiza un número muy elevado de actividades a mayores que las propuestas, mientras que E12 también realiza bastantes actividades a mayores, pero en un número menor.

La siguiente figura, Figura II.10, muestra un escaneo del cuaderno del alumno E2 en el que se intentan resolver tres actividades sobre límites de funciones extraídas del libro de texto. Las tres actividades que en dicha figura aparecen resueltas no están entre las que su docente propuso para ser resueltas. Son actividades sobre el tema tratado en ese momento en la clase, que el alumno extrae del libro de texto usado como apoyo, y que intenta resolver en su cuaderno. Además, puede observarse cómo el alumno no copia el enunciado de estas actividades, sino que se referencian únicamente a través del número de la actividad en el libro de texto, sin indicar el número de página. Así, la referencia de las mismas no es completa.



18

a) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ $\lim_{x \to a^+} f(x)$

a) $a^- \to +\infty$, $a^+ \to +\infty$

b) $a^- \to +\infty$, $a^+ \to \nexists$

c) $a^- \to \nexists$, $a^+ \to +\infty$

19a

$\lim_{x \to 2} f(x)$

a) $f(x) = \frac{x-2}{x+2} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{0}{4} = 0$

b) $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x^2-4} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4} = \frac{0}{0}$

$x^2-7x+10 = (x-5) \cdot (x-2)$

$x^2-4 = (x+2) \cdot (x-2)$

$\frac{(x-5) \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{(x-5)}{x+2}$

$\lim_{x \to 2} \frac{x-5}{x+2} = \frac{-3}{4}$

20

$\lim_{x \to a} f(x) = 3$ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

límites en $x = a$ de

$\lim_{x \to a} f \cdot g = 3 \cdot 0 = 0$ $f^g = 3^0 = 1$

$\frac{f}{g} = \frac{3}{0} = \infty$??? $g^f = 0^3 = 0$

Figura II.10. Escaneo del cuaderno del alumno E2, perteneciente al perfil P32.

En la Tabla II.4 se resumen los tres grandes grupos de perfiles, los ocho perfiles encontrados y los alumnos que se han ubicado en cada perfil.

Grupo	Perfil	Estudiantes
Cuaderno como mero registro	P11: Registro sólo de algunos ejercicios realizados en el aula	E15
	P12: Registro de todos/la mayoría de los ejercicios realizados en el aula	E16, E18, E19, E21
Perfiles intermedios	P21: Registro de ejercicios realizados en el aula más la escritura de comentarios y procesos de resolución de estas actividades, sin intentos propios de resolución	E10
	P22: Alumnos con una visión deficiente del cuaderno como un instrumento dentro del dominio privado del estudiante (resolución de actividades mientras se corrigen en clase)	E1, E17
	P23: Alumnos con un comportamiento dispar durante el periodo analizado	E3, E9
	P24: Alumnos que combinan una escritura muy expresiva, con gran cantidad de comentarios del docente y notas personales de ayuda, con intentos de resolución muy pobres de algunas actividades	E5, E6, E14, E20
Cuaderno como instrumento privado	P31: Alumnos que utilizan el cuaderno como un instrumento privado para el repaso de contenidos pertenecientes a temas previos	E7
	P32: Alumnos que utilizan el cuaderno como un instrumento para el estudio, la consolidación y la reflexión de los contenidos	E2, E12

Tabla II.4. Tabla resumen con los perfiles encontrados y los estudiantes ubicados en cada uno de esos perfiles.

II.4.2. RELACIONES ENTRE LOS PERFILES ENCONTRADOS Y EL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN MATEMÁTICAS

En este subapartado vamos a exponer los resultados que hemos obtenido al comparar el rendimiento académico en matemáticas de los alumnos participantes con el perfil de elaboración y trabajo con el cuaderno en el que han sido ubicados. Para esa comparación vamos a utilizar las notas obtenidas en Matemáticas por cada uno de los alumnos participantes en las tres evaluaciones del curso de 1º de Bachillerato, puesto que fue la información que nos fue facilitada por su tutor. En cada uno de los tres trimestres, la nota asignada al estudiante era una nota numérica entera entre 1 y 10. En la Tabla II.5 se recoge la información sobre la evaluación numérica de los alumnos participantes, agrupados por perfiles.

Grupo	Perfil	Estudiantes	Nota 1ª ev.	Nota 2ª ev.	Nota 3ª ev.
Cuaderno como mero registro	P11	E15	2	2	1
	P12	E16	4	4	5
		E18	2	1	1
		E19	3	1	2
		E21	2	1	3
Perfiles intermedios	P21	E10	10	4	5
	P22	E1	5	4	5
		E17	4	3	6
	P23	E3	5	6	6
		E9	2	4	5
	P24	E5	5	5	5
		E6	5	4	5
		E14	3	3	3
		E20	5	5	5
Cuaderno como instrumento privado	P31	E7	4	3	5
	P32	E2	7	10	10
		E12	8	8	8

Tabla II.5. Tabla con las notas en las evaluaciones en matemáticas de los estudiantes, agrupados según el perfil en el que han sido ubicados.

El análisis comparando las notas de los alumnos con los perfiles en que éstos están situados permite extraer algunas relaciones obtenidas en este estudio entre el perfil de elaboración del cuaderno que tienen los alumnos y su rendimiento académico en matemáticas. Esas relaciones son explicadas a continuación.

La mayoría de notas bajas se concentra en el primer grupo de perfiles, llamado "Cuaderno como mero registro". En este grupo, tan sólo el alumno E16 consigue aprobar una de las evaluaciones, la tercera; mientras que el resto de alumnos de este grupo obtiene notas muy bajas. Es decir, la elaboración del cuaderno que conllevaba una menor implicación del alumno (registro literal y despersonalizado de la corrección de ejercicios realizada en el aula) se presenta asociada, en este estudio, a los alumnos con un peor rendimiento en matemáticas (a excepción, quizá, del alumno E16).

En el segundo grupo de perfiles, denominado "Perfiles intermedios", encontramos una gran mayoría de calificaciones intermedias, entre el 4 y el 6, con una mayoría amplia de aprobados muy justos en la tercera y última evaluación, a excepción de la alumna E14. Dentro de este grupo, es interesante destacar lo que sucede específicamente en alguno de sus perfiles:

- En el alumno E10, único representante del perfil P21, se observa un gran descenso en su calificación de la primera evaluación (10, la máxima) con respecto a la nota de las evaluaciones segunda (un 4) y tercera (un 5). Este alumno se caracterizaba por registrar las actividades de su corrección en el aula, añadiendo la escritura de comentarios y procesos de resolución de estas actividades, pero sin intentos propios de resolución de las tareas propuestas. En la diferencia de calificación puede haber tenido una influencia importante el hecho de que los contenidos de la primera evaluación fueran un repaso de temas ya trabajados en cursos anteriores (números reales, polinomios, ecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones), frente a las dos evaluaciones restantes, en las que el contenido impartido sí eran temas nuevos para los alumnos. Ante nuevos contenidos, esta forma de trabajar con el cuaderno se puede mostrar menos efectiva por no existir intentos propios de resolución, al menos en su cuaderno, que le permitan adquirir un dominio propio, una reflexión y una consolidación de los contenidos tratados.

- El grupo de cuatro alumnas que componen el perfil P24 durante todo el curso ha tenido calificaciones rondando el aprobado, entre el 3 y el 5. Este perfil se caracterizaba por la combinación de una gran cantidad de comentarios y aclaraciones en la transcripción de los ejercicios junto con la presencia de intentos de resolución muy pobres de algunas actividades. Al revisar sus notas en otras asignaturas, observamos que son estudiantes con muy buen rendimiento, pero que tienen muchos problemas con la asignatura de matemáticas. La presencia de intentos de resolución muy poco desarrollados y de bastantes errores, muchos de ellos asociados a contenidos que ya deberían dominar, parece mostrar la presencia de poca seguridad y de déficits de base matemática que dificultan su estudio y aprendizaje de la materia. Quizá intenten contrarrestar este aspecto con la gran presencia de anotaciones y de aclaraciones en las actividades registradas.

Dentro del tercer grupo de perfiles, denominado “Cuaderno como instrumento privado para el repaso, reflexión y la consolidación de contenidos”, los alumnos del perfil P32 son los que mejor rendimiento han tenido en las distintas evaluaciones de esta materia, con notas altas o muy altas, que se mantienen estables en todo el curso (alumna E12) o que mejoran hasta llegar y mantener la máxima calificación (alumno E2). Por tanto, la utilización del cuaderno como una herramienta privada para el estudio autónomo, la consolidación y la reflexión sobre los contenidos que se están tratando en el aula (a partir de los intentos de resolución de actividades, tanto de las propuestas por el docente como de actividades a mayores de éstas) se muestra asociada en este estudio a un alto rendimiento académico en matemáticas.

II.4.3. RELACIONES ENTRE LOS PERFILES ENCONTRADOS Y EL PERFIL AFECTIVO-EMOCIONAL DE LOS ALUMNOS HACIA LAS MATEMÁTICAS

En este subapartado se hace referencia a los resultados obtenidos al comparar el perfil de elaboración y trabajo con el cuaderno en el que los alumnos han sido ubicados con su perfil afectivo-emocional hacia las matemáticas. Para obtener información sobre ese perfil afectivo-emocional de los alumnos participantes, hemos utilizado la escala EAEM (Escala Afectivo-Emocional hacia las Matemáticas). Esta escala ha sido construida, validada y utilizada por investigadores de la Universidad de Valladolid, y su versión final puede encontrarse en Hidalgo, Maroto, Ortega y Palacios (2013). La escala consta de 40 ítems de tipo Likert, con cinco puntos (valores de 0 a 4, desde el "desacuerdo total" con la afirmación hasta el "acuerdo total" con la misma), existiendo preguntas sobre el perfil afectivo-emocional hacia las matemáticas enunciadas tanto en positivo como en negativo. Además, existen dos preguntas abiertas al final de la escala: ¿Con qué asocias la palabra "matemáticas"? y ¿Qué son las matemáticas para ti? En el Anexo A.2 (en el CD) se muestra esta escala.

La puntuación de los estudiantes en esta escala se obtiene asignando una puntuación a cada una de las 40 preguntas, de acuerdo al valor seleccionado por el estudiante, y sumando la puntuación de las 40 preguntas para obtener el valor final. Como ya se ha comentado, existen preguntas formuladas en positivo y en negativo, lo cual hay que tener en cuenta para asignar la puntuación de cada pregunta. En las preguntas formuladas en positivo (un ejemplo posible es la pregunta 1: "Me gustan las matemáticas"), la puntuación coincide con la valoración marcada; mientras que en las preguntas en negativo (un ejemplo es la pregunta 5: "Cuando estudio matemáticas estoy más incómodo que cuando lo hago con otras asignaturas"), la puntuación sería la diferencia entre 4 y el valor marcado por el alumno. Así, la puntuación máxima de un alumno en la escala EAEM es de 160 y la mínima es 0, por lo que 80 puede considerarse como una puntuación intermedia de referencia. Además, las dos preguntas en abierto nos aportan algo más de información concreta sobre qué significan las matemáticas para el alumno y con qué asocian la palabra "matemáticas", lo que sirve para complementar la información numérica obtenida.

Esta escala fue cumplimentada por los estudiantes presentes en un descanso del debate sobre el cuaderno de matemáticas mantenido con ellos en el aula, del cual se hablará en el siguiente apartado. Debido a que tres de los estudiantes participantes no pudieron asistir este día al debate, no disponemos de datos sobre ellos. La Tabla II.6 recoge los resultados obtenidos por los alumnos participantes al rellenar la escala EAEM, presentándose la información con los alumnos agrupados por perfiles.

Además, en el debate estuvieron presentes, y participaron en el mismo, tres alumnos que no participaron con sus cuadernos en este análisis. A título informativo, sus resultados al cumplimentar la escala EAEM han sido: el alumno E4 obtuvo una puntuación de 90, el alumno E13 tuvo una puntuación de 102, y el alumno E22 consiguió una puntuación de 96.

La visualización y el análisis de la Tabla II.6 nos proporcionan algunos resultados que ligan el perfil encontrado en el análisis de los cuadernos con el perfil afectivo-emocional de los alumnos, en los que se atisba la presencia de ciertas relaciones, aunque con alguna excepción.

Tres de los cuatro alumnos que obtuvieron un resultado por debajo del valor medio de referencia (aunque muy cercanos a dicho valor) están en el grupo de alumnos denominado “Cuaderno como mero registro”. Por tanto, los alumnos con un perfil afectivo-emocional más bajo hacia las matemáticas se concentran más en este grupo de perfiles, que mostraban una implicación menor en el desarrollo y la personalización de su cuaderno. Varias de las respuestas de estos alumnos en las preguntas abiertas ratifican una visión de las matemáticas como una asignatura impuesta y hacia la que no existe un agrado especial: “Una asignatura más que tengo que aprobar (alumno E16) o “Algo que hay que estudiar porque te obligan” (alumna E19). Sin embargo, dentro de este primer grupo de perfiles también hay algunos que tienen un resultado más alto en el test (especialmente E18), y con respuestas que indican un mayor agrado hacia las matemáticas (“Asignatura práctica que ejercita la mente y hace que sea más ágil”). Por tanto, la relación entre el grupo de perfiles “Cuaderno como mero registro” y un bajo perfil afectivo-emocional hacia las matemáticas no es unánime.

Grupo	Perfil	Estudiantes	Puntuación en EAEM
Cuaderno como mero registro	P11	E15	96
	P12	E16	75
		E18	109
		E19	78
		E21	79
Perfiles intermedios	P21	E10	Sin datos
	P22	E1	113
		E17	106
	P23	E3	129
		E9	Sin datos
	P24	E5	87
		E6	98
		E14	89
		E20	97
Cuaderno como instrumento privado	P31	E7	77
	P32	E2	Sin datos
		E12	120

Tabla II.6. Tabla con las puntuaciones de los estudiantes en la escala EAEM, agrupados según el perfil en el que han sido ubicados.

Además, en la Tabla II.6 se observa cierta correspondencia entre un valor alto en la escala EAEM y la ubicación del alumno en un perfil que muestra cierto desarrollo del cuaderno dentro de un dominio privado del estudiante, aunque de nuevo la relación no puede extenderse a todos los casos.

Por una parte, los dos alumnos que fueron ubicados dentro del perfil P22, y que se caracterizaban por la resolución de las actividades planteadas mientras éstas se corregían en la clase, obtienen un valor alto en la escala EAEM. Estos dos alumnos demuestran tener gusto y agrado hacia las matemáticas, algo también reafirmado por sus respuestas sobre qué representan para ellos las matemáticas (ejemplo elocuente de E1: “las matemáticas es resolución de problemas, pero de los que hay que razonarles” y “son entretenidas, incluso sólo para matar el rato”). Así, para estos dos alumnos las actividades en matemáticas suponen un reto, por lo que necesitan abordarlas por su cuenta; aunque, como ya hemos comentado, en lugar de hacerlo fuera del aula o en los momentos que el docente establece para ello, lo hacen de forma simultánea a la corrección de la actividad en la clase.

La alumna E12, que utilizaba el cuaderno como un instrumento privado para el estudio, consolidación y reflexión de contenidos (a través de la realización de abundantes tareas del tema a mayores de las propuestas por el docente), tiene un alto resultado en la escala EAEM. Así, se atisba la presencia de una relación entre un alto gusto por las matemáticas y el comportamiento detectado al intentar resolver actividades a mayores de las propuestas, aunque la relación es poco concluyente dado que estamos hablando de un solo estudiante. Hubiera sido muy interesante haber podido contar con el dato en la escala EAEM del alumno E2, el otro integrante de este perfil, alumno que también mostraba en las clases un alto interés y gusto por esta asignatura.

Sin embargo, el alumno que ha obtenido el resultado más alto en la escala EAEM, el alumno E3, ha sido incluido en el perfil P23, asociado a los alumnos con un comportamiento dispar en su cuaderno a lo largo del periodo analizado. Este alumno sí que muestra en la primera parte una ubicación y aprovechamiento del cuaderno dentro del dominio privado del estudiante (se intentan resolver las actividades propuestas); sin embargo, en la segunda parte se va diluyendo este comportamiento, pasando a predominar un comportamiento de tipo transcriptivo.

II.4.4. RESULTADOS DE INTERÉS OBTENIDOS EN EL ANÁLISIS DE OTRAS VARIABLES E INDICADORES

Como ya hemos comentado previamente, la determinación de perfiles llevada a cabo se ha centrado sobre todo en las variables e indicadores considerados en las Dimensiones 2 y 3. Sin embargo, en este análisis, que se encuentra detallado en el Anexo A.1, hemos obtenido mucha más información asociada a las diferentes dimensiones, y a las variables e indicadores considerados en cada una de ellas. El análisis de la Dimensión 5, sobre la corrección matemática del cuaderno, nos proporciona un estudio detallado de los errores encontrados, que será desarrollado en el subapartado siguiente. Sin embargo, existen otros resultados de interés asociados a las restantes variables e indicadores que se comentan brevemente a lo largo de este subapartado.

Aspectos generales importantes

En el análisis de los cuadernos no hemos encontrado cambios apreciables en el comportamiento de los alumnos una vez que conocieron que íbamos a recogerlos para realizar unas fotocopias de los mismos. Así, entendemos que la manera de elaborar y de trabajar con el cuaderno que han mostrado los alumnos durante este periodo es su manera natural de trabajar con él, sin que nuestra presencia y la influencia de esa recogida de los cuadernos hayan provocado alteraciones en ese comportamiento.

Los tres grandes grupos de perfiles y los diferentes perfiles dentro de éstos ponen de manifiesto la presencia de una gran diversidad en el alumnado al elaborar su cuaderno y trabajar con él. La libertad que han tenido los alumnos en este estudio para elaborar su cuaderno ha permitido detectar comportamientos y estilos muy diferentes en los estudiantes en relación a su cuaderno de matemáticas, que parecen mostrar diferentes formar de ver y de utilizar este instrumento en su estudio y aprendizaje de las matemáticas. Uno de los propósitos del debate desarrollado con los alumnos fue el de profundizar en este tema, preguntándoles sobre la necesidad de un cuaderno de matemáticas, su utilidad y el modo de uso del mismo para aprender matemáticas y superar la evaluación de la asignatura (en este caso, básicamente, a través de pruebas escritas de los contenidos tratados).

Organización del cuaderno

En el desarrollo del docente se mezclaba la propuesta y corrección de los ejercicios de un tema con la teoría del tema siguiente. En ese sentido, hemos encontrado tres alumnos que sí que han intentado separar los temas en su cuaderno, dejando unas hojas al final de la teoría de un tema destinadas a la realización de los ejercicios de ese tema. De esos tres, únicamente uno de ellos (E10) logra hacerlo completamente, puesto que los otros dos no dejan espacio suficiente para ello. El resto de alumnos optan por un orden cronológico en su cuaderno, sin importar que en su desarrollo se mezclen los temas, y sin indicar en muchos casos los cambios de tema producidos. Incluso hay cinco alumnos que no indican de ningún modo el comienzo del tema de funciones. Así, pareciera que en muchos alumnos no existe una preocupación excesiva por tener bien organizados los contenidos en su cuaderno, lo que les pudiera causar problemas en una posible revisión posterior del mismo.

Otro aspecto que puede ser de ayuda para el alumno en una hipotética revisión posterior de su cuaderno es la escritura de los enunciados de las actividades. Las programaciones de matemáticas del Instituto en que se llevó a cabo el estudio destacan la importancia del enunciado y su escritura como medio para mejorar y desarrollar la utilización del lenguaje matemático por parte de los alumnos. Este aspecto también ha sido bastante enfatizado en las clases por su docente. La inmensa mayoría de los alumnos sí que copian los enunciados de aquellos ejercicios que son dictados directamente por su docente. Sin embargo, y a pesar de esa insistencia, únicamente hay seis alumnos (un 35% del total) que han copiado con regularidad los enunciados de los ejercicios en sus cuadernos. El resto de alumnos se limitan a escribir un número, un símbolo o la referencia para poder encontrar el ejercicio y su enunciado. Esta diferencia de comportamientos encontrada fue considerada como un punto a tratar en el debate con los alumnos sobre el cuaderno de matemáticas.

Teoría en el cuaderno

Salvo algún elemento de teoría aislado copiado por algún alumno en su cuaderno, la teoría que encontramos de forma más generalizada en los cuadernos de los alumnos participantes se corresponde con el contenido sobre funciones que el docente impartió a mayores del contenido existente en los apuntes fotocopiados. Esa teoría son las definiciones de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva, y los ejemplos y contraejemplos ilustrando estos conceptos. En este sentido, hay doce alumnos (el 71% del total) que sí que han tomado nota en su cuaderno de esta teoría a mayores, mientras que los otros cinco no lo han hecho (pudiera ser que decidieran registrarlo en los propios apuntes fotocopiados del tema de funciones).

No obstante, los doce alumnos que tomaron nota de este contenido teórico en sus cuadernos no lo registraron de la misma manera. Sí que copiaron todas o la mayoría de las definiciones presentadas, pero el comportamiento al registrar los ejemplos y contraejemplos fue mucho más variable. Únicamente el alumno E10 registró todos los ejemplos y contraejemplos. Otros cuatro alumnos, E5, E14, E19 y E21, registraron algunos de ellos, teniendo tendencia por los ejemplos frente a los contraejemplos. Los siete alumnos restantes no copiaron ningún ejemplo ni contraejemplo. Este hecho, que nos causó cierta sorpresa (puesto que un ejemplo supone una ayuda para comprender y asimilar la definición presentada), fue planteado en el debate. En él, intentaremos conocer qué importancia dan los alumnos al papel de los ejemplos y los contraejemplos en la presentación de un concepto matemático, así como a su registro en el cuaderno de matemáticas.

Corrección de las actividades

En el análisis de los cuadernos se detectó que muchos de los estudiantes no corregían de manera clara los errores o las incorrecciones existentes en sus intentos previos de resolución de las tareas. Varios alumnos optaron por rehacer a continuación el ejercicio, copiando su corrección en el aula, pero sin hacer ninguna indicación sobre su intento de resolución. Otros ni lo rehicieron ni corrigieron sus errores. Esta ausencia de corrección de los errores puede provocar confusiones o la persistencia de algunos errores en una eventual revisión posterior de las actividades de su cuaderno.

Presencia de comentarios y aclaraciones en el cuaderno

Existe un contraste importante entre estudiantes en la escritura o no de comentarios del docente, aclaraciones, notas propias de ayuda o de los pasos y procesos necesarios en la resolución de las actividades. De los 17 alumnos participantes, únicamente seis (un 35%) han escrito con cierta regularidad este tipo de comentarios y anotaciones, siendo muy esporádicas o inexistentes en el resto de estudiantes.

Además, entre los que sí deciden escribir elementos de este tipo en sus cuadernos, se han detectado dos comportamientos diferentes. Cuatro de los alumnos realizaron estas anotaciones de forma discreta, con un tamaño pequeño y con lápiz. Por el contrario, los otros dos estudiantes las realizaron en gran tamaño y las remarcaron con rotuladores, intentando que las mismas destacaran entre el contenido de su cuaderno.

Tanto la decisión de escribir o no anotaciones de estos tipos en los cuadernos como la forma de hacerlo fueron temas tratados en el debate, donde se ha intentado que cada grupo explicara el porqué de sus comportamientos de acuerdo a la utilidad que pueden tener para ellos este tipo de anotaciones en su estudio y aprendizaje de la materia.

Lenguaje verbal en los cuadernos

Debido a la metodología del docente, y a que el contenido de los cuadernos se ha basado en actividades intentadas o transcritas, la presencia de lenguaje verbal en los cuadernos ha sido reducida. Así, el estudio de este lenguaje verbal no ha podido ser profundo. Sin embargo, sí que se observan algunas problemáticas que es interesante resaltar. La primera de ellas es la presencia de una deficiencia muy importante en muchos alumnos en la acentuación de las palabras, un aspecto que ya debería ser dominado por estudiantes de 1º de Bachillerato. El segundo aspecto a destacar es la presencia frecuente en tres alumnas (E6, E14 y E20) de una escritura apocopada, típica de mensajes SMS o de escritura en redes sociales, que utilizaron con cierta asiduidad. Creemos que este tipo de escritura no debería aparecer en el cuaderno de matemáticas, además en un momento en que están aprendiendo otro lenguaje, el lenguaje matemático, que no admite coloquialismos o abreviaturas, sino que es un lenguaje preciso y riguroso.

Diferencias en los cuadernos según el sexo de los alumnos

Encontramos algunas diferencias en los cuadernos de matemáticas según el sexo del alumno. Una de las diferencias principales que se ha detectado está relacionada con la presentación general de los cuadernos. Las seis chicas participantes tienen un cuaderno con una buena o muy buena presentación, mientras que más de la mitad de los chicos (6 de 11) presenta un cuaderno con una presentación que se ha valorado de forma negativa, detectándose en ellos una falta de atención hacia este aspecto.

También se ha detectado la presencia de una diferencia importante entre sexos en la escritura de notas aclaratorias y comentarios de ayuda, tanto del profesor como propios. La escritura de esos elementos ha sido más frecuente en las chicas que en los chicos participantes, puesto que cinco de las seis alumnas hacían anotaciones de este tipo regularmente, frente a sólo uno de los once alumnos participantes.

Otros aspectos

En el análisis de los cuadernos se ha observado la presencia de tres cuadernos, los de las alumnas E6, E14 y E20, que tienen muchos elementos, comportamientos y características parecidas, apareciendo además algunos elementos comunes (mismas aclaraciones y comentarios, ejercicios transcritos de forma idéntica). Estas tres estudiantes se sentaban muy próximas en el aula y, durante las clases, se observó que estaban continuamente contrastando entre ellas lo que se realizaba en el aula y enseñándose lo anotado. Es decir, las alumnas parecían actuar bastante coordinadas en lo que se refiere a la elaboración de su cuaderno. Su docente nos comentó la inseguridad que mostraban estas alumnas al hacer matemáticas, unido a la presencia de algunas carencias de base matemática, por lo que se apoyaban entre ellas para intentar superar estas dificultades. Además, estas tres estudiantes son las únicas que han registrado explícitamente algunas dudas en sus cuadernos (generalmente marcadas con interrogaciones), pero que luego no intentaban superar explícitamente en el aula, por ejemplo, a través de preguntas a su docente.

En algunos de los cuadernos hemos detectado métodos extraños de resolución o escritura correspondiente a una persona distinta del propio alumno, que nos hace sospechar que algunos alumnos acudían a clases particulares de matemáticas. Para confirmar este hecho, se preguntó en el debate a los alumnos sobre ello, preguntándoles en tal caso qué papel juega el cuaderno en esas clases particulares.

Por último, también se observa que los alumnos que faltaron algún día a clase no tomaron nota con posterioridad de lo realizado ese día. Así, se observaron algunos saltos en los cuadernos de algunos alumnos, con temas que quedaron cojos o sin completar. También se preguntó a los alumnos sobre esta circunstancia en el debate programado.

II.4.5. ESTUDIO DE LOS ERRORES ENCONTRADOS EN LOS CUADERNOS DE LOS ALUMNOS

En este subapartado se describe el estudio realizado de los errores, de diferentes tipos, que se han encontrado en el transcurso del análisis de los cuadernos de los alumnos. Los errores serán presentados siguiendo la tipología de los mismos que hemos considerado en las diferentes variables fijadas en la Dimensión 5 de análisis[15].

El análisis de los cuadernos de los alumnos ha mostrado el interés que tiene el cuaderno para poder detectar y estudiar los errores cometidos por sus alumnos. A través del cuaderno, pueden conocer qué errores se encuentran con mayor frecuencia o la presencia de conocimientos deficientes, incompletos o mal asimilados por un número importante de alumnos. Esa situación puede estar influenciada por la presentación del concepto que haya llevado a cabo el docente, o por la especial dificultad del concepto; y muestra la necesidad de retomar e integrar esos errores en la docencia, para intentar su superación. Un tratamiento similar merecen aquellos errores que, aunque no sean generalizados, sean considerados por el docente como especialmente graves, o que muestran la presencia de carencias de base matemática en conceptos que ya deberían ser dominados por los estudiantes del nivel educativo en el que se desarrolla el estudio (en este caso, 1º de Bachillerato).

A continuación se presentan aquellos errores encontrados en el análisis que han sido más generalizados o que se han considerado de mayor gravedad. Además, también se comenta brevemente la integración de los mismos que se realizó en la docencia, en el caso de que haya podido hacerse durante el periodo de *Practicum* (debido al corto espacio de tiempo existente entre la recogida de las fotocopias, el análisis de las mismas y el hecho de compartir estos errores encontrados con su docente). El estudio se presenta teniendo en cuenta las variables fijadas en el marco teórico.

Errores asociados al lenguaje matemático utilizado en el cuaderno

Consideramos que, en este curso de 1º de Bachillerato en el que se ha desarrollado el estudio, los alumnos van poco a poco conociendo e intentando integrar el lenguaje matemático más formal en su cuaderno. En este sentido, hemos encontrado un gran número de deficiencias y de errores, tanto derivados de una mala transcripción de lo tomado de la pizarra como de un mal uso de este lenguaje formal, que en muchos casos pone de manifiesto el desconocimiento, la falta de significado o la atribución de un significado inadecuado a algunos signos matemáticos por parte de los estudiantes.

[15] Esa tipología se detalla en el subapartado II.3.2 de este mismo capítulo (Tabla II.3).

Los problemas encontrados de un modo más repetido están asociados al uso del signo igual. Se han detectado problemas generalizados, en bastantes estudiantes, asociados a uno de los significados de este signo: el signo igual para indicar la equivalencia entre dos expresiones que coinciden (Molina, 2006). El error ha aparecido asociado a las cadenas de igualdades generadas en la manipulación de expresiones algebraicas o en la resolución de límites de funciones con una indeterminación. La asimilación de este significado, con el que los alumnos ya llevan varios años trabajando en su estudio del álgebra, es algo que ya debería haberse conseguido en 1º de Bachillerato. Pero la presencia de errores bastante generalizados, que a continuación se describen, nos indica que aquí no ha sido así:

- Hay once alumnos (un 65% del total de participantes) que no hacen uso del signo igual para definir funciones a trozos o durante la manipulación y transformación de sus expresiones algebraicas por otras equivalentes. En la mayoría de casos dicho signo igual es omitido (encadenando llaves), en otros casos se sustituye el igual por el signo de implicación (⟹).

- Siete alumnos (un 41% del total) sustituyen asiduamente el signo igual por otro signo en las cadenas de igualdades. Uno de los alumnos, E9, sustituye sistemáticamente el signo igual por un punto y coma (;). Los otros seis sustituyen, de nuevo, el signo igual por el de implicación (⟹).

- Seis alumnos igualan erróneamente el número *e* y/o su definición con la resolución de límites en los que existe una indeterminación del tipo $(\to 1)^{\to\infty}$, o directamente con la expresión formal de la indeterminación (es decir, igualan el número *e* a $(\to 1)^{\to\infty}$), lo que supone un uso indebido del signo igual al igualar elementos que no lo son.

Debido a la alta presencia de errores asociados a este uso del signo igual como equivalencia entre expresiones, se preguntó en el debate a los estudiantes sobre sus concepciones del signo igual, junto con el tratamiento de algunos de los errores, con el fin de superar los mismos a través de su comentario conjunto con la clase, que condujera hacia una asimilación más completa del significado del signo igual.

Otro error que ha sido bastante generalizado (encontrado en siete alumnos) ha sido la omisión en muchas ocasiones del signo del límite, $\lim_{x\to}$, en las cadenas de igualdades, mientras se está manipulando la expresión para intentar eliminar la indeterminación. Además, en algunos casos se vuelve a escribir el signo cuando ya no es necesario, es decir, cuando ya se ha eliminado la indeterminación y, generalmente, se sustituye para hallar el valor del límite. Este problema fue remarcado por el docente en sus clases, lo que provocó que se redujera la incidencia y frecuencia del error en algunos estudiantes, pero no así en otros.

Además de estos errores más generalizados, han aparecido bastantes deficiencias de notación o de lenguaje matemático formal de un modo más individual, que pueden encontrarse en el análisis detallado de cada alumno (Anexo A.1). Esto demuestra la necesidad de seguir insistiendo en la integración progresiva del lenguaje matemático en la escritura matemática de los alumnos, y en su utilización en los cuadernos.

Errores asociados a la transcripción de elementos

En prácticamente todos los cuadernos puede encontrarse algún error derivado de la transcripción errónea de algún elemento al copiar la resolución de ejercicios realizados en el aula. Algunos de estos errores se muestran como ocasionales, o pensamos que son debidos a despistes. Pero hay varios alumnos donde este tipo de errores se han manifestado de forma reiterada durante toda la parte del cuaderno analizada. Pensamos que pueden deberse, por una parte, a un bajo nivel de atención al transcribir de la pizarra lo que se está realizando en la clase. Pero también pueden indicar una falta de comprensión de aquello que se está copiando o de lo que se está haciendo en ese momento. Los errores de transcripción más comunes están asociados a la presencia de cambios de signo al escribir expresiones algebraicas, a la indicación errónea de las operaciones realizadas o a alargar o acortar las raíces en expresiones, modificando los términos que se ven afectados por las mismas.

Errores de cálculo

Los errores de cálculo también pueden mostrarse como ocasionales, debidos a descuidos, o mostrar una deficiencia en el conocimiento de aspectos matemáticos que, en muchos casos, ya debieran ser dominados en 1º de Bachillerato. Describimos a continuación los errores que hemos encontrado que pueden ser considerados de este último tipo y que se presentan de forma más frecuente y generalizada.

Hay un grupo de cuatro alumnas (E5, E14, E19 y E20) en el que se detecta la presencia de un número importante de errores de tipo algebraico, asociados a operar, simplificar y manipular fracciones algebraicas, y al cálculo de cuadrados de binomios. Este tipo de errores, frecuentes, muestra una carencia de estas estudiantes en el dominio de operaciones algebraicas básicas, lo que les provoca una alta inseguridad en su trabajo (ya comentada previamente) y un bajo número de cálculos completamente correctos.

Además, hay tres alumnos en los que existen deficiencias asociadas a la manipulación de desigualdades y a la resolución de inecuaciones, técnicas que ya fueron vistas en el primer trimestre del curso. Curiosamente, dos de los alumnos con errores de este tipo han sido E2 y E12, que están entre los que han tenido un mejor rendimiento académico y que conforman el perfil P32, es decir, que utilizan el cuaderno como un instrumento para el estudio, la consolidación y la reflexión de los contenidos tratados en la clase.

Errores de tipo conceptual

Hemos encontrado varios errores repetidos en un número importante de estudiantes que pensamos que muestran un conocimiento deficiente o incompleto de alguno de los conceptos propios del tema que se está tratando en esos momentos en la clase. Describimos a continuación los errores encontrados que consideramos de este tipo.

Hay un error, detectado en cinco alumnos, al escribir los números reales negativos como números complejos en la notación módulo-argumental, escribiendo como módulo el propio número real negativo. El error más repetido es la escritura del número -1 como $-1_{180^{o}}$, en lugar de $1_{180^{o}}$. Consideramos que este error puede ser visto como un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1983), puesto que es un conocimiento del alumno que tiene un dominio de validez (en los números reales positivos sí coincide el módulo con el propio número) y que aparece con frecuencia en los cuadernos de estos cinco alumnos (especialmente en el de la alumna E6). Se intentó integrar este error en la docencia, insistiendo en la idea gráfica de que el módulo de un número complejo, en realidad, es el módulo de un vector en el plano complejo y representa una distancia, por lo que nunca puede ser negativo.

Hay cuatro alumnos que, de forma frecuente, han asociado la existencia de simetría par en una función con la existencia de simetría con respecto a un eje vertical cualquiera (no únicamente el eje de abscisas). Puede que el error esté provocado por la asociación de esta característica a la forma global de la gráfica, especialmente en funciones cuadráticas (gráfica parabólica), sin fijarse en cuál es el eje de simetría vertical. Este error también ha sido tratado de forma específica durante mi intervención como docente en el periodo de *Practicum*, al trabajar con las funciones cuadráticas y sus propiedades. Además, existen dos alumnos que no han interiorizado el vocabulario de simetría par o impar asociado a la presencia de simetría en una función, puesto que no utilizan el vocabulario específico pero sí que describen la característica de una manera correcta (por ejemplo, escriben “simetría respecto de x=0” en lugar de simetría par).

Se han detectado errores frecuentes en la interpretación del simbolismo algebraico, tanto al definir (en 4 alumnos) como al representar gráficamente (en 5 alumnos) funciones con valor absoluto de la forma f(x)=|x±a| o del tipo f(x)=|x|±a (siendo *a* un número real cualquiera). Se ha mostrado especialmente difícil para estos alumnos entender qué parte de la expresión algebraica de la función está afectada por el valor absoluto y qué es lo que eso supone. Este aspecto también fue detectado por su docente, que integró en la docencia estos errores en la corrección de los ejercicios, recurriendo al recurso de llamar "Pepe" a la variable independiente para clarificar el efecto del valor absoluto en la expresión de una función:

$$|Pepe| = \begin{cases} Pepe, & si\ Pepe \geq 0 \\ -Pepe, & si\ Pepe < 0 \end{cases}$$

Hay seis alumnos que cometen un error en la representación gráfica de funciones cuadráticas, cuya gráfica es una parábola. Estos alumnos han dibujado las ramas de las parábolas como rectas totalmente verticales, de una manera muy marcada. Esto hace que pensemos que no puede atribuirse este problema a un trazado deficiente, sino que el error tiene una componente conceptual. En estos casos, la representación realizada es incompatible con que lo representado sea una función.

Por último, hemos encontrado algunos errores asociados a la aplicación incorrecta de las técnicas de resolución de indeterminaciones en el cálculo de límites. Las más frecuentes están asociadas a la resolución de indeterminaciones del tipo $(\rightarrow 1)^{\rightarrow\infty}$ en las que está involucrado el número *e*, generalmente asociadas a la igualación errónea con el número *e* de expresiones cuyo límite no es dicho número. Se aprecia la presencia de dificultades importantes en la resolución de este tipo de indeterminaciones. Además, hay dos estudiantes en las que se detecta un error al resolver indeterminaciones del tipo $(\rightarrow \infty) - (\rightarrow \infty)$, puesto que se divide la expresión algebraica de la función por x, sin ser consciente de que esa división supone un cambio en la función de la cual se está calculando el límite.

II.5. RESULTADOS OBTENIDOS DEL DEBATE MANTENIDO CON LOS ALUMNOS EN EL AULA

El análisis de las fotocopias de los cuadernos de los alumnos participantes nos proporcionó resultados diversos e interesantes, comentados en el apartado II.4. Sin embargo, se consideró que era necesario profundizar en las razones que hay detrás de los comportamientos detectados. En muchos casos, se piensa que estos comportamientos pueden estar ligados al modo en que cada estudiante utiliza su cuaderno para beneficio propio, en su estudio y aprendizaje de las matemáticas.

Para conocer más información sobre cuál es la visión que tienen los alumnos acerca del cuaderno de matemáticas, las explicaciones sobre los modos de trabajo detectados y el uso que hacen del cuaderno, organizamos un debate en el aula con los alumnos participantes. Se decidió realizar un debate, en lugar de entrevistas, para que todos los estudiantes pudieran participar y contrastar sus visiones sin que eso supusiera un gran gasto de tiempo ni causara grandes trastornos a los estudiantes. El debate fue desarrollado durante dos horas de clase (se juntó una hora de clase de Matemáticas con la hora siguiente, con el consentimiento de todos los profesores implicados), y fue grabado tanto en audio como en vídeo. El debate fue moderado por el propio doctorando, y estuvo dividido en dos partes, con un descanso en medio. Además, se realizó un receso durante el debate debido a la necesidad de cambiar la cinta de la cámara de vídeo, en el cual se aprovechó para que los estudiantes cumplimentaran la escala EAEM (Anexo A.2).

Los alumnos no fueron avisados previamente de la celebración de este debate, para evitar las posibles influencias de este hecho. El día del debate participaron 14 de los 17 alumnos participantes, puesto que hubo tres alumnos que no pudieron asistir ese día a clase (los alumnos E2, E9 y E10). Este fue un hecho a lamentar, puesto que se esperaba una participación activa de estos estudiantes, especialmente de E2 (alumno del perfil P32, con un mayor desarrollo del cuaderno como instrumento dentro del dominio privado para reflexionar y consolidar los conceptos tratados en clase, a través de la realización de un gran número de actividades a mayores de las propuestas) y de E10 (único representante del perfil P21).

Antes de comenzar el debate, se les explicó a los estudiantes que habíamos revisado sus cuadernos de matemáticas, y que el debate versaría sobre su visión acerca del cuaderno, su utilización del mismo y sobre algunos aspectos importantes que habíamos observado. Los alumnos fueron ubicados en la clase según el perfil en el que habían sido incluidos, aunque se les animó a participar tanto como quisieran y de forma individual, sin que tuvieran temores a que atribuyéramos ningún carácter bueno o malo a sus respuestas o a que sus intervenciones tuvieran repercusión o influencia en la evaluación de la asignatura. Además, a este debate asistieron tres alumnos que no habían participado en el análisis de los cuadernos (los alumnos E4, E13 y E22), a los que se dejó participar si consideraban que tenían algo interesante que aportar.

El debate se prolongó durante una hora y cuarenta y cinco minutos. La transcripción íntegra del debate (tanto de los comentarios como de la gestualidad y el ambiente de la clase) puede encontrarse en el Anexo A.3, en el CD adjunto a la tesis. Previamente, habíamos planificado el debate y las preguntas a plantear, habiendo estructurado el desarrollo del mismo en los siguientes bloques:

- Dualidad del cuaderno como un instrumento dentro de un dominio público o un dominio privado
- Limpieza y orden en el cuaderno
- Utilidad del cuaderno de matemáticas
- Presencia de comentarios, aclaraciones y notas de ayuda
- Cuaderno de matemáticas y clases particulares
- Teoría en el cuaderno de matemáticas
- Otros temas
- Preguntas más individualizadas (sobre aspectos extraños, o errores)

Antes de desgranar los resultados que hemos extraído del debate, hay que reconocer que la inexperiencia en el desarrollo de este tipo de formatos, tanto del moderador como de los estudiantes, provocó un exceso de pregunta-respuesta en muchas partes, intentando evitar intervenciones simultáneas. Además, los estudiantes empezaron el debate de modo frío y distante, centrándose la participación en unos pocos alumnos. No obstante, se intentó que todos los estudiantes participaran, a través de la interpelación directa, en algunas ocasiones, a los estudiantes menos activos. Se exponen a continuación los resultados obtenidos al analizar el debate desarrollado y su transcripción, en relación con los resultados expuestos en el apartado anterior.

El debate puso de manifiesto que todos los alumnos hablaban de su cuaderno de matemáticas como un bien propio, indicando que no les afecta que el profesor les revisara el cuaderno, sin que cambien las características de su trabajo con el mismo. Es decir, deducimos de las contestaciones de los alumnos que éstos tienen una visión del cuaderno como un instrumento situado en un dominio privado, para ellos mismos. Esto reafirma lo que anteriormente habíamos comentado, al no haber observado diferencias apreciables en los cuadernos de los alumnos entre la primera y la segunda tanda de fotocopias.

El análisis de los cuadernos ya había puesto de manifiesto una gran diversidad y variedad de comportamientos en su elaboración, lo que nos permitió establecer tres grandes grupos de perfiles en el alumnado, con varios perfiles dentro de cada grupo. El debate evidenció la presencia de dos grandes bloques en los alumnos, que presentan una visión distinta del cuaderno como bien propio para su estudio y aprendizaje de las matemáticas.

Existió un primer bloque de alumnos, mayoritario en la clase, que defendió el uso del cuaderno como un **lugar donde registrar los ejercicios que se hacen en clase**. En este bloque situamos a los alumnos de los perfiles del Grupo 1, las cuatro chicas del perfil P24 y el alumno del perfil P31. No todos los alumnos de este bloque realizan una transcripción de las mismas características, puesto que algunos estudiantes completan el registro con la escritura de notas, comentarios y observaciones (como las alumnas del perfil P24), algo que no hacen el resto de alumnos de este bloque.

Este uso del cuaderno tiene su razón de ser en el modo en que estos estudiantes estudian y preparan un examen de matemáticas. En esa preparación, los alumnos intentaban resolver, en hojas fuera del cuaderno, aquellos ejercicios que se habían registrado en el cuaderno y, a continuación, se compara y se coteja su resolución con la existente en su cuaderno, que es utilizada como referencia. En ese sentido, la limpieza y la organización son aspectos importantes para estos alumnos, puesto que facilitan ese papel del cuaderno como documento de referencia en su estudio de la asignatura. Este bloque de alumnos aparentó tener un estilo de aprendizaje demasiado dependiente y guiado (García Hoz, 1988), dejando entrever un insuficiente desarrollo de la capacidad de reflexión y de dedicación del tiempo necesario para enfrentarse a la resolución de los ejercicios puesto que, ante la presencia de alguna dificultad para resolver estos ejercicios, confesaban mirar su cuaderno para observar la solución registrada. Esto ya lo habíamos detectado en los cuadernos de las cuatro alumnas del perfil P24, donde observábamos la presencia de intentos de resolución muy poco desarrollados (puede verse un ejemplo en la Figura II.8.).

Si analizamos el rendimiento académico de los estudiantes de este bloque, observamos cómo sus notas en las evaluaciones en matemáticas son, en general, poco satisfactorias, asociadas a suspensos o a aprobados con un 5.

Además, en relación con las cuatro alumnas del Perfil P24, que toman nota de abundantes comentarios y notas de ayuda, ninguna de ellas manifiesta ir a clases particulares de matemáticas, lo que pudiera estar relacionado con una mayor necesidad de registrar esos comentarios y aclaraciones indicadas en el aula. Sí que se observó una diferencia entre estas alumnas en el modo en que tomaban las anotaciones. Las alumnas E6 y E14 se decantaban por tomar notas con un tamaño apreciable y remarcándolas de alguna forma, buscando que destacaran entre el contenido del cuaderno y, así, minimizar el riesgo de pasarlas por alto, según reconocieron en el debate. Sin embargo, las otras dos alumnas del perfil, E5 y E20, toman las notas de forma discreta, precisamente buscando lo contrario: que no sobresalgan frente a los contenidos y ejercicios registrados en el cuaderno.

Por otra parte, el debate evidenció la presencia de un segundo bloque de alumnos, menos numeroso, que defendió el uso del cuaderno como un **lugar donde hacer ejercicios**. En este bloque están los alumnos del perfil P22 y el alumno presente del perfil P23 (alumno E3). Posiblemente, y por el análisis de su cuaderno, el alumno E2 (del perfil P32) también hubiera podido situarse en este bloque, pero no pudo asistir al debate. Para estos alumnos, lo más importante es el hecho de intentar la resolución de los ejercicios y es ese aspecto el que más valoran, no dando valor al hecho de que esos intentos de resolución queden registrados. Así, estos alumnos no expresan la necesidad de tener un cuaderno exclusivo de matemáticas, puesto que los ejercicios pueden realizarse en cualquier otro lugar. Incluso el alumno E4 indicó que no es necesario tener cuaderno de matemáticas y que, de hecho, él no lo tiene (y por eso no participó en el análisis, pero por su respuesta encajaría en este bloque de alumnos): “Para mí no es necesario. Es necesario hacer ejercicios, pero para eso no hace falta un cuaderno” (bloque “Utilidad del cuaderno de matemáticas”, intervención número 86). Al preguntar a los alumnos de este bloque dónde realizaban las actividades, hubo contestaciones de E3 como “En cualquier lado” o “En la hoja más cercana”.

Para preparar un examen de matemáticas, estos alumnos realizan más ejercicios, sin revisar aquellos que ya hayan hecho o que tengan registrados en su cuaderno. Se aprecia que no dan ningún valor al cuaderno como posible instrumento para su revisión posterior, por lo que no se cuida la organización, la limpieza o la escritura de posibles comentarios o elementos de ayuda. Así, este bloque manifestó tener un estilo de aprendizaje más independiente y más desorganizado. Si nos fijamos en el rendimiento académico de los estudiantes de este bloque (exceptuando al alumno E2), los otros tres alumnos terminan aprobando la asignatura en la evaluación final, aunque han estado todo el año entre el suspenso y el aprobado. Sus intentos de resolución de las actividades parecen proporcionarles la suficiente habilidad para poder superar la asignatura, aunque sin destacar (salvo el caso de E2, que realizaba un gran número de actividades, también a mayores de las propuestas por el docente e intentando cubrir todos los contenidos presentes en los temas).

En varias partes del debate se observó la presencia de características y respuestas antagónicas entre los estudiantes de un bloque y otro. Únicamente una de las estudiantes que participó en el debate, la alumna E12, dio muestras de combinar las visiones de estos dos bloques presentados. Esta alumna tiene un muy buen rendimiento académico, estable a lo largo de todo el curso. Así, en esta alumna se aprecia un equilibrio entre las posiciones defendidas por ambos bloques, explicitando una valoración tanto del hecho de realizar ejercicios en el cuaderno como de la importancia que puede tener el hecho de que éstos queden registrados, añadiendo además comentarios o notas de interés. Ese equilibrio se ha mostrado, al menos en este estudio exploratorio, como una visión muy adecuada del cuaderno como instrumento para el estudio y aprendizaje de las matemáticas.

Con respecto a la organización de sus cuadernos, ya habíamos detectado en el análisis que muchos alumnos preferían seguir un orden cronológico de las actividades realizadas y las notas tomadas, aunque esto conllevara que se mezclaran ejercicios de diferentes temas. En el debate, todos los alumnos expresaron el beneficio que supone separar los diferentes temas en el cuaderno, algo que sólo se había detectado en tres de los alumnos participantes. Sin embargo, no seguían ese método en sus cuadernos porque consideraban que les era más difícil o demasiado lioso para llevarlo a cabo. En decir, se detectó una falta de implicación real de los alumnos para mejorar la organización de sus cuadernos (orden cronológico, mezcla de temas sin indicar los cambios de tema), que se confirmó por sus respuestas en el debate. En este sentido, pensamos que los alumnos, quizás, hubieran necesitado algunas pautas para conseguir una mejor organización del cuaderno teniendo en cuenta la metodología seguida por su docente. Por ejemplo, haberles indicado la conveniencia de dejar unas hojas en blanco al final de la teoría de un tema, que posteriormente se completaran con la realización de los ejercicios propuestos de dicho tema, que serían corregidos a lo largo de la explicación del tema siguiente.

Relacionado también con la organización del cuaderno, en el debate se trató la decisión de copiar o no los enunciados de los ejercicios. Como ya se ha comentado en el apartado II.4, este aspecto había sido muy remarcado por su docente y por las programaciones de matemáticas del centro, pero sólo un número reducido de alumnos copiaban con regularidad los enunciados. En el debate, únicamente una alumna, E14, se expresó claramente a favor de registrar los enunciados de los ejercicios en el cuaderno, aunque buscando que su cuaderno sea una herramienta autónoma de estudio para ella (bloque “Otros temas”, intervenciones número 55 y 85). Otros alumnos, como E5, E12 y E16, expresaron que sólo lo copiaban en algunas ocasiones. Por ejemplo, al tomar un ejercicio del libro de texto optan por tomar una referencia (número de página y número del ejercicio), en lugar de copiar el enunciado. Por último, dos alumnos (E3 y E17) manifestaron su opinión contraria al registro del enunciado en sus cuadernos, afirmando que éste nunca debía copiarse, incluso los que el profesor dictaba, y que sólo debían tomarse los datos imprescindibles para la resolución del ejercicio. Estos alumnos evidenciaron en sus argumentaciones que mantenían una concepción del enunciado muy simplista: una visión del enunciado como un “cuento” o una contextualización prescindible, que no aportaba nada al problema, lo que puede derivar en un déficit en estos alumnos asociado a la aplicabilidad de las matemáticas en situaciones y contextos reales concretos.

En el análisis de los cuadernos habíamos detectado seis estudiantes (cinco de las chicas –todas salvo E19- y el alumno E10) que escribían frecuentemente comentarios, notas y aclaraciones en sus cuadernos de matemáticas. En el debate, estos alumnos aportaron dos razones a favor de esta toma de notas y aclaraciones, indicando que las notas les facilitaban su trabajo y les servían para recordar conocimientos que pudieran ser importantes en potenciales revisiones posteriores de los ejercicios de su cuaderno. Esta última razón está relacionada con el primer modo de usar el cuaderno para estudiar la asignatura que ha sido anteriormente comentado.

Sin embargo, en el debate varios alumnos se posicionaron en contra de la necesidad de tomar este tipo de notas y de comentarios. Estos alumnos son los que hemos ubicado en el segundo bloque, que tenían una visión del cuaderno como lugar donde hacer ejercicios, y que no consideraban útil la revisión del mismo. Un ejemplo es la intervención del alumno E3, que en el debate comentó que “a mí no me hace falta poner notas… Te sale de la cabeza… o de hacer mucho pues ya sabes cómo se hace” (bloque “Presencia de comentarios, aclaraciones y notas de ayuda”, intervención número 14). Otra de las razones que estos alumnos esgrimieron para no tomar estos comentarios y aclaraciones es que para ello se necesitaba prestar una mayor atención en clase que la que exigía reproducir lo que se escribía en la pizarra.

En relación a la teoría registrada en los apuntes, en el análisis de los cuadernos detectamos cinco estudiantes que no habían tomado la teoría presentada por su docente a mayores de los apuntes fotocopiados. En el debate, estos alumnos expresaron que habían registrado esta teoría en las propias fotocopias, buscando tener toda la teoría en el mismo lugar. Los doce alumnos restantes tomaron nota de esta teoría suplementaria en su cuaderno, indicando algunos de ellos que asociaban la palabra “copiar” con su cuaderno. Además, en el análisis de los cuadernos se había detectado una baja transcripción de los ejemplos y de los contraejemplos de funciones inyectivas y suprayectivas que su docente expuso en esta teoría a mayores de los apuntes. Esto nos hizo sospechar que muchos alumnos veían poco útiles estos ejemplos y contraejemplos. El debate confirmó nuestras sospechas, puesto que muchos alumnos indicaron la falta de necesidad de registrar estos elementos en el caso de que hubieran entendido bien los conceptos que pretendían ilustrar (bloque "Teoría en el cuaderno de matemáticas", intervención 36). Incluso, el alumno E17 indicó explícitamente que tanto los ejemplos como los contraejemplos no sirven para nada (mismo bloque, intervención 34 para los ejemplos y 50 para los contraejemplos).

En el análisis de los cuadernos habíamos detectado que en los alumnos que faltaron a clase algún día, no existía registro de lo realizado ese día en el aula. Sin embargo, en el debate hubo un grupo numeroso que indicó que sí que tomaría medidas para poder tener en sus cuadernos lo trabajado ese día en clase; por ejemplo, pidiendo a algún compañero su cuaderno para reproducirlo. Un ejemplo de intervención en ese sentido es la de E14: "Porque te pierdes la explicación y si te has perdido toda la explicación luego cuando te pongas a estudiar no te vas a enterar de nada. Sin embargo, lo pides, lo copias y ya lo tienes ahí." (bloque "Otros temas", intervención número 34). Las intervenciones en este sentido de gran parte de los estudiantes contrastaron con la realidad mostrada en el análisis. Sin duda, puede que los alumnos hayan confundido el deseo de hacerlo con su comportamiento real en esa situación. Por el contrario, hay un alumno, E17, que mantuvo que, si un alumno falta a clase, primero debe intentar revisar por su cuenta lo que se ha dado ese día en la clase y, en el caso de que le surja algún problema, preguntar a sus compañeros sobre ello para resolver sus posibles dudas.

El último bloque del debate fue dedicado a aspectos más individuales y, también, a comentar algunos de los errores más frecuentes detectados en los cuadernos y que no habían sido tratados ya a través de su integración explícita en la docencia. Parte del debate en este bloque estuvo centrado en el lenguaje matemático utilizado, con especial atención a las deficiencias asociadas al uso del signo igual, ya comentadas en el subapartado II.4.5. La alumna que más inseguridad mostró con respecto a la utilización del signo igual fue E14. Sus intervenciones evidenciaron que no sabía distinguir, en la mayoría de ocasiones, cuándo debe utilizarse un signo igual (especialmente en las situaciones para indicar una equivalencia) y cuándo no. La siguiente intervención pone de manifiesto lo anterior: "Yo es que muchas veces no sé si es igual o es una cosa aparte… Voy con flechas y cuando sea el resultado pongo el igual y ya está" (último bloque, intervención número 30).

II.6. CONCLUSIONES DEL TRABAJO EXPLORATORIO. PUNTO DE PARTIDA PARA EL DESARROLLO DE UNA TESIS DOCTORAL SOBRE LOS CUADERNOS DE MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS

La escasez de antecedentes sobre el cuaderno de matemáticas encontrados en el marco de este trabajo exploratorio (apenas los trabajos de Porras, 1994; Price *et al.*, 1997 y Fried & Amit, 2003) ha supuesto un primer desafío para el equipo investigador, ante la falta de referentes de investigación en los que basarse para el desarrollo de este estudio exploratorio. Sin embargo, y a pesar de esa dificultad, este estudio nos ha supuesto un gran acercamiento a esta herramienta de estudio y de trabajo de los estudiantes, que es usual en muchas aulas españolas.

El desarrollo de este estudio en un grupo concreto de alumnos nos ha convencido más sobre el potencial que tiene el cuaderno, en dos sentidos:

- Por una parte, como herramienta para los alumnos en su estudio y aprendizaje de las matemáticas. Desde este punto de vista, este estudio exploratorio nos ha servido para detectar una gran heterogeneidad y diversidad en el alumnado tanto en sus visiones sobre el cuaderno de matemáticas como en las características de su elaboración y trabajo con el mismo.

- Por otra parte, el análisis de los cuadernos desarrollado nos ha permitido concienciarnos del potencial del cuaderno, también, como una herramienta de investigación en Didáctica de la Matemática, existiendo un gran número de aspectos asociados a un cuaderno de matemáticas que pueden ser dignos de ser estudiados en profundidad. Por ende, y derivado de lo anterior, el cuaderno también se ha mostrado como una herramienta de la que el docente puede extraer gran cantidad de información útil sobre sus alumnos y sobre el desarrollo de las clases.

Es por ello que se considera muy conveniente y justificada la continuación, el desarrollo y la profundización de un trabajo de investigación centrado en el cuaderno de matemáticas de los alumnos, que es objeto de esta tesis doctoral.

Ante la escasez de investigaciones centradas en el cuaderno de matemáticas de los alumnos, uno de los primeros problemas que ha sido tratado es el desarrollo de un instrumento que nos permitiera llevar a cabo un análisis de los cuadernos de matemáticas, y del cual pudiéramos extraer información útil para el estudio. El planteamiento inicial de la elaboración de un instrumento de este tipo ya supuso la aparición de un gran número de aspectos de estudio que podían ser interesantes y que se han mostrado como insuficientemente tratados en la literatura de investigación (algo que ya percibimos en este estudio exploratorio, pero que ha sido contrastado con la búsqueda posterior de antecedentes, reflejada en el capítulo I).

El instrumento de análisis que se ha elaborado y utilizado en este estudio exploratorio (con diferentes dimensiones de análisis, variables e indicadores) va a suponer un punto de partida para el trabajo de tesis doctoral. No obstante, este estudio se ha basado en un estudio de caso colectivo desarrollado en un aula, por lo que el instrumento desarrollado está influenciado por esta situación y las peculiaridades del contexto en que se ha llevado a cabo el estudio. Así, por ejemplo, la cantidad de elementos teóricos registrados en los cuadernos de los alumnos ha sido muy reducida, debido a la metodología docente, lo que ha impedido refinar las variables asociadas a la teoría. Asimismo, pensamos que el análisis de cuadernos pertenecientes a otras clases y con otras metodologías docentes nos ayudará a completar o refinar otras dimensiones, variables e indicadores; que hagan más completo el instrumento de análisis, y nos permitan profundizar en las formas de elaboración del cuaderno.

No obstante, el instrumento de análisis utilizado y las dimensiones consideradas se han mostrado útiles para este estudio, puesto que nos han permitido detectar varios grupos de perfiles en el alumnado, según las características de lo plasmado en sus cuadernos. Como hemos tenido muy presentes las ideas sobre los tipos de escritura de Britton *et al*. (1975) y la distinción entre actividades de dominio público o privado de Fried y Amit (2003), la distinción de perfiles se ha realizado teniendo en cuenta, prioritariamente, las dimensiones segunda y tercera, sobre la completitud del cuaderno y sobre la intención del cuaderno como instrumento para el aprendizaje del alumno, respectivamente. En el trabajo de tesis doctoral, continuación de este estudio, se buscará realizar una detección de perfiles que intente tener en cuenta todos los aspectos considerados en el instrumento de análisis, utilizando herramientas de análisis que nos permitan manejar ese volumen de información.

Este estudio exploratorio (análisis de los cuadernos y debate posterior) ha puesto de manifiesto la presencia de un gran número de factores que pueden influir en la elección del alumno sobre el modo en que elabora, trabaja y utiliza su cuaderno de matemáticas. Algunos de estos factores pueden estar asociados a la naturaleza del contenido matemático tratado (en este estudio, los tópicos han sido los números complejos y varios temas de análisis matemático) y los conocimientos y experiencias previas de los alumnos con esos contenidos. También influyen factores relacionados con los contextos de trabajo del alumno (por ejemplo, si acuden o no a clases particulares de matemáticas fuera del aula) o sus experiencias anteriores relacionadas con el uso del cuaderno en matemáticas. Por último, la metodología que habitualmente sigue el docente parece suponer una importante influencia en los modos en los que los estudiantes elaboran y utilizan su cuaderno de matemáticas. No obstante, como en este estudio sólo hemos analizado los cuadernos de un aula, con una metodología concreta, no podemos ir más allá en nuestra afirmación. La continuación del estudio, con datos recogidos en varias aulas distintas, nos podrá ofrecer algunas pistas más concretas con respecto a esta influencia.

El debate mantenido con los alumnos participantes nos ha permitido detectar la presencia de dos modos distintos de entender el cuaderno de matemáticas como un bien propio para el estudio y aprendizaje del estudiante. Hay alumnos que tienen una visión del cuaderno como lugar donde registrar ejercicios, mientras que otros alumnos ven el cuaderno como un lugar en el que hacer ejercicios. Así, los alumnos ponen en valor una cualidad distinta asociada a los ejercicios: la cualidad de intentar su resolución o la cualidad de que dicha resolución quede registrada de forma permanente, y pueda ser revisada posteriormente.

En cada una de estas dos visiones encajaban algunos de los perfiles detectados en el análisis de los cuadernos, existiendo bastante correspondencia entre lo dicho por los alumnos durante el debate mantenido con ellos y las características que se habían encontrado en sus cuadernos. Comparando estos perfiles y las dos visiones sobre el cuaderno de matemáticas con el rendimiento académico en esta asignatura de este grupo de estudiantes, se ha constatado el buen resultado de la alumna que poseía una visión equilibrada entre ambas visiones (es decir, que ponía en valor las dos cualidades anteriormente comentadas) y los alumnos situados dentro del perfil P32, llamado “Alumnos que utilizan el cuaderno como un instrumento para el estudio, la consolidación y la reflexión de los contenidos”. Por el contrario, los resultados más bajos han estado asociados a los alumnos pertenecientes al primer grupo de perfiles, titulado “Cuaderno como mero registro”, que tenían una visión del cuaderno como lugar en el que registrar ejercicios.

La continuación del estudio, en diferentes clases de 1º de Bachillerato y con contenidos similares (los contenidos de Análisis Matemático propios de este curso), nos permitirá profundizar en los modos de elaborar el cuaderno de matemáticas que se detecten en los alumnos. Esto nos brindará la posibilidad de dar el salto de posibles comportamientos individuales a perfiles que se presenten de un modo más generalizado, algo que aquí es difícil de detectar debido al reducido número de estudiantes participantes. Lo mismo sucede con los diferentes modos de utilizar ese cuaderno en su estudio y aprendizaje de las matemáticas. Además, en la tesis doctoral también está previsto el estudio más pormenorizado de aquellos elementos de análisis que se muestren como más interesantes en una revisión teórica de antecedentes y trabajos de investigación o en el propio desarrollo del análisis. Un ejemplo podría ser el estudio de cómo son los apuntes que construyen los estudiantes en sus cuadernos a partir de las exposiciones de los docentes.

Para finalizar, este trabajo exploratorio ha evidenciado que el cuaderno de matemáticas es una herramienta más que refleja la diversidad del alumnado existente. Existen diferencias entre los alumnos al estudiar la asignatura y en sus estrategias para desarrollar su aprendizaje de las matemáticas. Por eso, es posible que una forma de utilizar el cuaderno que sea provechosa para un alumno pueda no ser fructífera para otro. Esto contrasta con las propuestas unitarias para la organización, estructuración y desarrollo del cuaderno que planteaban algunos artículos de los antecedentes leídos, como el de Porras (1994) o el de Price *et al*. (1997).

El desarrollo de este trabajo exploratorio y la diversidad de perfiles de elaboración y de visiones detectadas, nos lleva a desaconsejar la imposición de una manera única de trabajar con el cuaderno para todos los estudiantes. Es cierto que sí que son útiles algunas pautas generales sobre buena organización o limpieza en un cuaderno, pero consideramos que lo óptimo sería reflexionar sobre las posibles carencias asociadas a cada uno de los perfiles. Esto nos permitiría elaborar un plan de acción que permitiera incorporar aquellas rutinas e ideas en las prácticas con el cuaderno de los alumnos de cada uno de los perfiles, para conseguir una evolución en su elaboración, utilización y visión del cuaderno como instrumento que les ayude en su estudio y aprendizaje de las matemáticas. No obstante, debido a que los perfiles aquí detectados son, en algunos casos, formados por un único alumno; es necesario realizar previamente el estudio más pormenorizado y a mayor escala de los perfiles de elaboración y utilización del cuaderno, uno de los objetivos fundamentales del trabajo de tesis doctoral que se plantea como continuación del trabajo exploratorio aquí presentado.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA, CONTEXTO Y MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

Este capítulo, tercero de la tesis doctoral, está destinado a la descripción del marco metodológico principal que se utiliza en la misma: el análisis de contenido. A lo largo de este capítulo se exponen los rudimentos teóricos y conceptuales fundamentales sobre esta metodología, así como sus fases, el modo en que esas fases se han ido cubriendo durante el desarrollo de la investigación y las decisiones adoptadas al respecto. Todo esto formará parte del primer apartado de este capítulo.

Además, como se explica en dicho apartado, dos de los pilares fundamentales para poder aplicar la metodología del análisis de contenido son el conocimiento del contexto o de las condiciones en las que se producen los documentos que van a ser analizados y la fijación de un marco teórico con las ideas consideradas como relevantes para el análisis. Así, el segundo apartado se dedica a explicar la información contextual de interés sobre el estudio y los participantes en el mismo; mientras que en el tercero se recogen las ideas que conforman el marco teórico de referencia. Estas ideas, junto con el desarrollo del propio análisis de los cuadernos, son las que han servido para configurar el marco finalmente utilizado para analizar los cuadernos de matemáticas de los alumnos, que se explica en el capítulo IV de esta tesis doctoral.

III.1. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE CONTENIDO

En este apartado del capítulo se presenta la información teórica fundamental sobre la metodología de análisis de contenido. En el primero de los subapartados se realiza una conceptualización de la metodología de análisis de contenido, partiendo de un análisis etimológico y de significado de los términos clave y de un recorrido histórico sobre la evolución de la propia metodología. En el segundo de los subapartados se detallan las fases o etapas que, de forma general, componen un estudio en el que se adopta esta metodología como referencia.

III.1.1. EVOLUCIÓN HISTÓRICA Y CONCEPTUALIZACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE CONTENIDO

Este subapartado tiene por objetivo presentar una conceptualización de la metodología de análisis de contenido, tal y como se entiende actualmente esta metodología. Para ello, primeramente se escribe un breve apunte sobre el origen etimológico y el significado de las palabras clave que dan nombre a este método. A continuación, se hace un recorrido por la evolución histórica de la metodología desde sus inicios, puesto que ese avance también pone de manifiesto una importante evolución en la propia metodología. Esa evolución progresiva ha evidenciado y explicitado varias variables y conceptos clave en torno a los cuales gira esta metodología, cuya explicación será objeto del resto de este apartado.

Como puede observarse, el nombre de la metodología, “análisis de contenido”, está compuesto por tres palabras, dos de ellas con un carácter y un significado fundamental para entender la misma: “análisis” y “contenido”. El significado del término “contenido” ha evolucionado a lo largo de la historia de la metodología, por lo que será tratado posteriormente, cuando se haga mención a dicha evolución histórica.

La palabra “análisis” es una palabra de origen griego (“*analusis*”), que proviene del verbo “*analuein*”. Algunos de los significados de este verbo, como puede verse en López (2002) y en el diccionario etimológico de Monlau (1856), son descomponer, disolver, desatar o soltar.

Si se consultan las últimas ediciones de los diccionarios de la Lengua Española de la Real Academia Española, se puede observar cómo el significado de la acepción principal de la palabra *análisis* y la idea subyacente al resto de acepciones están plenamente asociados a ese origen etimológico de la palabra. Así, la 22ª edición del Diccionario de la Lengua Española (RAE, 2001) ofrece la siguiente definición como primera acepción: “Distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos”. Además, la segunda acepción, con un trasfondo similar a la primera, se redacta en términos más próximos a un contexto científico de investigación: “Examen que se hace de una obra, de un escrito o de cualquier realidad susceptible de estudio intelectual” (RAE, 2001). La 23ª y última versión hasta la fecha del Diccionario de la Lengua Española (RAE, 2014) recoge también las dos acepciones anteriores como principales, aunque sustituye algunos términos de las mismas por otros, interpretamos que con el objetivo de evitar restricciones y hacer más generalizable la definición y la aplicación de la palabra a un mayor número de contextos y situaciones. Así, la primera acepción de “análisis” que se recoge es: “Distinción y separación de las partes de algo para conocer su composición” (RAE, 2014) y la segunda es: “Estudio detallado de algo, especialmente de una obra o de un escrito” (RAE, 2014).

Por tanto, en términos generales, se denomina análisis a la descomposición o a la separación de algo complejo en sus partes o componentes. En este sentido, el análisis tiene un significado opuesto a la “síntesis”, cuya acepción principal es la “composición de un todo por la reunión de sus partes” (RAE, 2001, 2014).

No obstante, y como señala López (2002), es interesante tener presente la existencia de dos tipos de descomposición de distinta naturaleza. Por una parte, la descomposición puede ser material, en la cual el objeto analizado se descompone realmente en sus partes (por ejemplo, en un análisis químico); por otro lado, la descomposición puede ser ideal, donde la separación y descomposición ocurre en la mente de un analista (lo que, por ejemplo, sucede en un análisis conceptual). Esta segunda vertiente de la descomposición es la propia de la metodología de análisis de contenido.

Rico (2013, p. 12) indica la presencia de tres concepciones distintas de los métodos de análisis:

- Una concepción *regresiva* o *escrutadora*: indagación de los primeros principios a través de los cuales algo puede ser probado, pudiendo existir diferentes caminos (diferentes *análisis*) para recuperar esos principios básicos.

- Una concepción *disgregadora* o *reductiva*: descomposición, casi siempre en un sentido lógico o mental, de algo dado en sus partes constituyentes, la reducción a sus condiciones o la investigación de sus consecuencias.

- Una concepción *transformativa* o *interpretativa*: transformación de algo dado, utilizando un lenguaje específico, en enunciados que puedan transcribirse de forma lógicamente correcta, previamente a su descomposición en partes.

Así, de acuerdo con este autor, en los métodos de análisis se reflejan y complementan estas tres concepciones, en diferente grado y modo según el tipo de análisis que se lleve a cabo:

> Para analizar algo, en primer lugar hay que interpretarlo de algún modo, traducirlo desde un enunciado inicial a algún lenguaje especializado lógico o científico, antes de articular sus elementos y estructuras relevantes, para así contribuir a la identificación de los principios mediante los cuales explicarlo. El análisis de un objeto se realiza a partir de la relación que existe entre los elementos que lo constituyen como un todo junto con el marco para su interpretación. (Rico, 2013, p. 12-13).

A continuación, se presentan algunos apuntes históricos sobre el análisis de contenido y la evolución progresiva que ha sufrido esta metodología hasta la actualidad. La información histórica que aquí se redacta e interpreta ha sido extraída tanto de los manuales de Krippendorff (1990) y Bardin (1996) como del documento de Andréu (2001) sobre las técnicas de análisis de contenido.

Se cree que el análisis y la interpretación de textos sagrados y misteriosos ha sido una práctica común desde hace mucho tiempo. Las primeras muestras documentales que dan fe de ello, y que son consideradas como primeros antecedentes de esta metodología, son diversos análisis de tipo cuantitativo que se realizaron a una serie de himnos religiosos, titulados “Los cantos de Sion”, en Suecia en el S. XVIII (descripción detallada en Dorvring, 1955; citado en Andréu, 2001). La discusión sobre los resultados obtenidos supuso el primer debate metodológico acerca de un análisis de este tipo.

Hacia finales del S. XIX y principios del S. XX, y especialmente en Estados Unidos, se generalizaron los análisis cuantitativos de la prensa escrita. En ellos, el espacio ocupado por los textos y columnas sobre los diferentes temas era tomado como la medida a considerar para el desarrollo del análisis. Estos análisis, generalmente, intentaban probar la existencia de una transición progresiva en los contenidos, desde unos temas trascendentes hacia otros más cotidianos (análisis citados en Krippendorff, 1990). La adopción de esa medida como única variable de objetividad científica mostraba todavía una concepción algo simplista del análisis.

No obstante, estos análisis aportaron ideas que sirvieron para aplicar esta herramienta a nuevos y poderosos medios de comunicación, junto con la aplicación de nuevos métodos empíricos en ciencias sociales, como son las investigaciones a través de encuestas y la aparición y consideración de dimensiones evaluativas (por ejemplo, actitudes favorables o desfavorables). En los años 30 y 40 del S. XX, y en el contexto de la situación previa y del desarrollo de la II Guerra Mundial, las técnicas de análisis de contenido tuvieron un gran auge dentro de la investigación política: el análisis de la propaganda política fue la primera aplicación de envergadura de estas técnicas. Se desarrolló un gran interés por el estudio de los símbolos políticos y la referencia que se hacía a los mismos en los mensajes. Uno de los grandes nombres de analistas de este tipo es el de Lasswell, en Estados Unidos.

El auge de los estudios de análisis de contenido hizo que surgiera tanto el afán como la necesidad de realizar una sistematización objetiva de estas técnicas de análisis, y una clarificación de sus reglas. En ese sentido, destacó el trabajo realizado por Berelson y Lazarsfeld (1948, citado en Bardin, 1996). No obstante, en esta época las preocupaciones principales se centraban en el muestreo y en los aspectos de medición, fiabilidad y validez del procedimiento y de los resultados obtenidos, manteniéndose el carácter cuantitativo del análisis para que éste fuera irrefutable. Una muestra de ello es la definición de la técnica enunciada por Berelson (1952, p. 18; citado en Andréu, 2001): “El análisis de contenido es una técnica de investigación para la descripción objetiva, sistemática y cuantitativa del contenido manifiesto de la comunicación”. Esta definición, además de reflejar y ratificar la necesidad del uso de métodos cuantitativos, también restringe su aplicación a un contenido manifiesto, excluyéndose la posibilidad de analizar el contenido latente, oculto e indirecto, por no considerarlo intersubjetivamente verificable y fiable.

Cada vez un número mayor de investigadores y de ramas de conocimiento (como la antropología, la historia, la lingüística o la educación) se mostraban interesadas en las técnicas de análisis de contenido, pero las restricciones marcadas por Berelson impedían que la aplicación de esta metodología permitiera cumplir los objetivos que con ella se perseguían. Este interés se hizo patente en una conferencia, con el nombre de “Allerton House Conference”, que tuvo lugar en Illinois (EEUU) en 1955, y que resultó clave para el “desbloqueo”, el resurgimiento y la popularización de las técnicas de análisis de contenido en un mayor número de disciplinas. Tres circunstancias tuvieron un papel importante en ese “desbloqueo”, resurgimiento y popularización:

- Una de ellas es la atenuación de la asociación imperativa entre el carácter científico y objetivo de un estudio y la minuciosidad frecuencial, aceptándose una combinación de la comprensión clínica con la aproximación estadística. Esta visión más flexible de la objetividad hace que comiencen a aceptarse los análisis de contenido de naturaleza cualitativa, con una mayor sensibilidad para poder realizar una interpretación profunda de los datos. Así, surge la distinción de dos corrientes: análisis de contenido de tipo cuantitativo y de tipo cualitativo.

- Otra característica, de gran importancia, es el abandono de la consideración del análisis de contenido como técnica que tuviera un alcance meramente descriptivo. Se aceptó que su objetivo principal era la realización de inferencias: de los resultados del análisis pueden trascender las causas y efectos de los fenómenos detectados o de las características de las comunicaciones analizadas. Esto permitía la realización o formulación de predicciones o de inferencias sobre los fenómenos sin necesidad de tener un acceso directo a ellos.

- Además, se hizo palpable la existencia de dos concepciones epistemológicas contrapuestas sobre el análisis de contenido (Pool, 1959; citado en Bardin, 1996). Por una parte, una concepción "representacional", que defendía que lo fundamental es el análisis del contenido en sí mismo. Por otra parte, surgió una concepción "instrumental", que consideraba que lo importante no es tanto el contenido o el mensaje en sí mismo, sino lo que dicho contenido o mensaje vehicula a través del contexto y de sus circunstancias de producción.

La concepción "instrumental", defendida y utilizada con éxito por George (1959ª, 1959b; citados en Krippendorff, 1990), tuvo importantes implicaciones, puesto que añadió nuevas ideas y variables de interés para el desarrollo de esta metodología:

- La necesidad de poseer un modelo sobre el sistema en el cual tiene lugar la producción del contenido o de las comunicaciones analizadas, que dejan de considerarse como elementos aislados.

- El contenido no constituye una cualidad absoluta u objetiva de las comunicaciones, sino que está sujeto a una interpretación, que puede diferir según sean el emisor y el receptor de las mismas.

Las propuestas posteriores de definición de la técnica de análisis de contenido que han realizado diversos estudiosos y expertos en la metodología han ido recogiendo estos avances en sus planteamientos. Así, se han eliminado algunas de las restricciones de la definición de Berelson y se han añadido algunas variables o componentes que hoy en día se consideran como componentes clave de la técnica.

Una de las primeras definiciones que recoge la importancia de la formulación de inferencias como aspecto clave de esta metodología es la de Stone, Dunphy, Smith y Ogilvie (1966, p. 5; citado en Krippendorff, 1990): "El análisis de contenido es una técnica de investigación para formular inferencias identificando de manera sistemática y objetiva ciertas características especificadas dentro de un texto". Esta definición es muy similar a la propuesta por Holsti (1969, citado en Krippendorff, 1990) poco después. Desde entonces, la formulación de inferencias es considerada como uno de los pilares y objetivos fundamentales de esta metodología, estando presente en cualquier conceptualización de la misma. Posteriormente, la definición propuesta por Krippendorff (1990, p. 28) es una de las primeras que explicita la importancia del contexto en el que es producido el contenido para la realización de esas inferencias (concepción "instrumental"): "El análisis de contenido es una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse en su contexto".

Continuando con la evolución histórica de la metodología, otro de los hitos fundamentales para el avance de la misma en los últimos cincuenta años ha sido la introducción del ordenador como un aliado natural en el proceso de análisis de un volumen elevado de documentos. En la década de los 60, los propios investigadores que utilizaban estas técnicas comenzaron a crear programas de ordenador, de naturaleza cuantitativa, encaminados a cubrir sus necesidades para el desarrollo del análisis y facilitar su labor investigadora. Un ejemplo de programa que se popularizó rápidamente fue el *General Inquirer*, desarrollado por Stone *et al*. (1966, citado en Bardin, 1996). No obstante, el uso del ordenador en estos análisis planteó algunos debates como la dificultad para registrar comunicaciones no verbales, la necesidad de establecer categorías estandarizadas de análisis, el problema de la obtención de inferencias a partir de un análisis con ordenador y el rol de las teorías y de las construcciones analíticas o del contexto de producción del contenido.

En los últimos años se ha producido un auge de los análisis de contenido de tipo cualitativo, con una mejor capacidad para captar significados más profundos e interpretar mejor la intencionalidad de un mensaje; o de análisis de contenido mixtos, en los que se triangulan varios métodos. En ese auge de las investigaciones que hacen uso de técnicas de análisis de contenido de naturaleza cualitativa ha tenido una influencia directa la creación, en los años 80, de los primeros programas específicos de ordenador para el desarrollo de análisis de contenido de tipo cualitativo, que desde entonces han evolucionado y se han perfeccionado enormemente. Un ejemplo de programa de este tipo es ATLAS.ti, que ha sido utilizado con éxito en investigaciones recientes en Didáctica de la Matemática como la de Goizueta (2015) o Méndez (2015).

La evolución histórica de la metodología también pone de manifiesto la evolución en lo que se han considerado como "contenidos" a los que puede aplicarse. A comienzos del S. XX su aplicación se restringía al análisis de prensa escrita. Posteriormente, se fue progresivamente ampliando la posibilidad de su aplicación a cualquier comunicación verbal, ya fuera de tipo oral o escrito. Una muestra es la siguiente frase de Henry y Moscovici (1968, p. 23; citado en López, 2002): "Todo lo que se dice y escribe es susceptible de ser sometido a un análisis de contenido". Hoy en día se ha aceptado la posible extensión de la aplicación de la metodología a las comunicaciones no lingüísticas, de tipo visual, gestual o musical.

En este sentido, Bardin (1996) reconoce que el campo de aplicación del análisis de contenido es extremadamente vasto, indicando que toda comunicación, es decir, todo transporte de informaciones y de significaciones de un emisor a un receptor, controlado o no, debería poder ser descrito y descifrado por las técnicas de análisis de contenido. Es decir, cualquier comunicación podría jugar el papel de "contenido", siempre y cuando esa comunicación sea capaz de albergar un contenido que, leído e interpretado de una manera adecuada, permita conocer mejor diversos aspectos y fenómenos (Andréu, 2001). La definición de análisis de contenido de Bardin (1996) recoge este hecho, siendo una definición muy detallada, puesto que engloba todas las características fundamentales de la metodología:

> Un conjunto de técnicas de análisis de comunicaciones tendente a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes, permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción (variables inferidas) de estos mensajes. (Bardin, 1996, p. 32).

Debido a su vasto campo de aplicación, el análisis de contenido es un método muy empírico, siendo necesario adecuar el análisis tanto al campo concreto de estudio en el que se desarrolla la investigación, como a los objetivos de la misma y al problema investigado (Bardin, 1996; López, 2002). Esa orientación empírica, vinculada a fenómenos y a comunicaciones reales, y con una finalidad predictiva, hace que sea un método de investigación que contribuye al conocimiento (Krippendorff, 1990). En ese sentido, Bardin (1996, p. 22) indica la existencia de dos funciones distintas posibles que son propias de este método, y que pueden complementarse o no en un estudio de investigación:

- Una *función heurística* (análisis de contenido "para ver"): Cuando el análisis de contenido tiene la función de enriquecer la exploración de una comunicación, lo que aumenta las posibilidades de que se produzcan descubrimientos y hallazgos de interés.
- Una *función de "administración de la prueba"* (análisis de contenido "para probar"): Cuando el análisis de contenido se utiliza como medio para llegar a confirmar, verificar o invalidar hipótesis previas o afirmaciones provisionales.

En lo que resta de este subapartado, se van a clarificar algunos pilares esenciales sobre los cuales se asienta esta metodología, es decir, sus constituyentes fundamentales. Algunos de estos elementos ya han sido puestos de manifiesto en el análisis de la evolución histórica de este método de investigación, debido a su especial importancia en el desarrollo del mismo.

Un primer pilar fundamental en el que se asienta la metodología, de acuerdo con Krippendorff (1990), es la fijación de una posición o una perspectiva ante la situación, el fenómeno o la comunicación que va a analizarse. Es decir, fijar un marco teórico sobre el cual va a pivotar el desarrollo y la interpretación del análisis. En este sentido, Lester (2010) realiza una comparación muy gráfica al hablar del marco teórico como el andamio de un edificio en construcción. Para este autor, un marco teórico es una estructura de ideas (abstracciones, relaciones) que sirve como base para investigar un fenómeno, y que nos determina cuáles son las características del fenómeno que se consideran como relevantes bajo esa perspectiva (Lester, 2010, p. 69).

El marco teórico tiene influencia en la escritura de los objetivos y de las preguntas de investigación, y en la determinación y elaboración de los instrumentos de análisis que van a utilizarse (Piñuel, 2002). Además, la significatividad y la adecuación de las ideas teóricas que se consideran como base para el desarrollo del análisis son dos aspectos fundamentales para poder hacer relevantes las posibles interpretaciones que del mismo puedan extraerse (Krippendorff, 1990; Piñuel, 2002).

Una vez que se hayan decidido los instrumentos que van a utilizarse para analizar una determinada comunicación, otro de los pilares fundamentales de este método es lo que Bardin (1996) llama la *descripción analítica* del contenido. Esto va mucho más allá de una mera descripción del mismo. El contenido es analizado a través de procedimientos de lectura, textual, visual o de otro tipo, en los que se siguen cuatro requisitos fundamentales y característicos del método científico: la sistematicidad, la objetividad, la replicabilidad y la validez (Andréu, 2001). Explicamos brevemente el significado de estas cuatro características básicas:

<u>Sistematicidad</u>: El análisis debe realizarse siguiendo unas pautas ordenadas e iguales para todas las unidades en que va a dividirse el contenido, de tal forma que con ellas se abarque todo el contenido a analizar (Andréu, 2001; Krippendorff, 1990).

<u>Objetividad</u>: El análisis debe realizarse explicitando los procedimientos y las reglas de análisis utilizadas, de tal forma que esto permita la verificación de los resultados obtenidos en el análisis (Andréu, 2001; Krippendorff, 1990).

<u>Replicabilidad</u>: Las dos características anteriores, la sistematicidad y la objetividad, son agrupadas por Krippendorff (1990) bajo el nombre de *reproductividad* del análisis, con un significado similar a lo que supone la replicabilidad. El análisis debe poder ser llevado a cabo o replicado por otros investigadores, para poder, por ejemplo, evaluar el mismo y eliminar la sospecha de tendenciosidad o subjetividad (Krippendorff, 1990).

<u>Validez</u>: En su manual sobre el análisis de contenido, Krippendorff (1990) distingue diferentes tipos de validez. Aquí se está haciendo referencia a una validez orientada a los datos y de los instrumentos de análisis utilizados. El análisis debe utilizar instrumentos que realmente nos sirvan para medir aquello para lo que están destinados, y con un método que sea representativo de la información inherente a los datos disponibles. En ese sentido, Krippendorff (1990) indica la necesidad de que exista una validez del muestreo (representatividad de los datos de los que se dispone para realizar el análisis pretendido) y una validez semántica (sensibilidad de los métodos e instrumentos para detectar los significados simbólicos que han sido considerados como relevantes para el estudio).

Según señala Krippendorff (1990), una condición previa necesaria para que el análisis sea válido (en el sentido anteriormente comentado) es que éste sea fiable, es decir, que se obtengan los mismos resultados para los mismos conjuntos de fenómenos analizados, independientemente de las circunstancias de aplicación del análisis (por ejemplo, variaciones en las circunstancias de medición, autoría de la medición o variaciones asociadas a tendenciosidades derivadas del propio desarrollo del procedimiento). Es necesario verificar la fiabilidad del análisis llevado a cabo para poder apoyar los hechos o formular las inferencias que se deriven del proceso de descripción analítica. Por una parte, deben realizarse pruebas de diagnóstico de la fiabilidad de los instrumentos de análisis que van a aplicarse (redefinición y clarificación de instrucciones, adaptación a unidades del contenido más difíciles de describir y analizar). Por otra parte, debe perseguirse el máximo nivel posible de fiabilidad durante el desarrollo de la propia descripción analítica. Krippendorff (1990, p. 194-195) indica la existencia de tres niveles posibles de fiabilidad:

- *Estabilidad* (también denominada "congruencia", "consistencia" o "fiabilidad del observador): Mide el grado en que un proceso permanece invariante o sin modificaciones a lo largo del tiempo, a través de un test-retest por parte del mismo codificador de un mismo conjunto de datos en momentos distintos. Este procedimiento refleja las discrepancias o cambios en el analista a lo largo del tiempo, o sus posibles dificultades para interpretar las instrucciones del análisis. La estabilidad supone el primer nivel de fiabilidad posible.

- *Reproducibilidad* (también denominada "consenso", "acuerdo intersubjetivo" o "fiabilidad entre los codificadores"): Mide el grado en que un proceso puede ser recreado en circunstancias y lugares diferentes, y con la intervención de codificadores distintos. Se realiza a través del testeo de un mismo conjunto de datos y con las mismas instrucciones por parte de varios codificadores diferentes. Este procedimiento refleja las discrepancias o desacuerdos entre los codificadores al interpretar las instrucciones. Supone un nivel de fiabilidad superior a la estabilidad.

- *Exactitud*: Mide el grado en que un proceso se ajusta a un criterio o patrón ya conocido, a través de un test-norma, donde se compara lo obtenido por el codificador con la norma que, según se sabe, debería haberse obtenido. Este procedimiento refleja discrepancias o incongruencias entre el/los observador/es y la norma, es decir, desviaciones con respecto a ésta. Siempre que tenga sentido la existencia de dicha norma o patrón de referencia, la exactitud supone el máximo grado de fiabilidad posible.

El tercer pilar fundamental de este método y que, según Bardin (1996) supone el objetivo fundamental y el denominador común de las técnicas de análisis de contenido (al menos a partir de la segunda mitad del S. XX) es la inferencia. Bardin (1996) señala que inferir es deducir y extraer conocimientos relativos a las "condiciones de producción" del contenido analizado con la ayuda de la descripción analítica llevada a cabo. Así, la inferencia es el procedimiento intermedio que permite el paso explícito y controlado de la descripción analítica a la interpretación del contenido analizado, es decir, a la obtención de significación para el mismo a partir de las características obtenidas en la descripción analítica, el marco teórico adoptado y todas esas "condiciones de producción" anteriormente comentadas. Tal y como señalan Krippendorff (1990) y Bardin (1996), generalmente esa interpretación está destinada a inducir las causas del mensaje o sus consecuencias, y a poder investigar sobre unas u otras a partir de los efectos que se han detectado en la descripción analítica del contenido analizado.

En el párrafo anterior, al escribir qué entiende Bardin (1996) por inferencia, hemos entrecomillado una de las expresiones que utiliza: la de "condiciones de producción". El término pretende hacer referencia al cuarto de los pilares fundamentales de este método de investigación, y que podríamos denominar de forma amplia como las variables asociadas al contexto: variables asociadas al emisor y al receptor del mensaje, al contexto social y cultural, a la situación dentro de la cual se produce la comunicación… Como ya se ha comentado en la evolución histórica, la importancia de estos aspectos fue puesta de manifiesto y destacada por la concepción "instrumental" del análisis surgida en la década de los 50, una concepción mayoritaria hoy en día.

Krippendorff (1990), en su manual, destaca y enfatiza especialmente este pilar del método, indicando la necesidad de que las inferencias e interpretaciones realizadas estén justificadas en función del contexto, que actúa como un marco en el que se desarrollan los mensajes y en el que éstos adquieren significado. Es decir, en palabras de Andréu (2001), el contexto es clave para que el contenido o la comunicación analizada cobre y adquiera sentido. Teniendo en cuenta los procesos y contextos implicados en él, una comunicación adquiere un determinado significado simbólico, que nos ayuda a conocer mejor cuál es la realidad que dio origen a la misma (Krippendorff, 1990). Así, como destaca Piñuel (2002), la interpretación del contenido analizado se realiza fuera del propio contenido (lo que Piñuel llama un "análisis externo", para diferenciarlo de un "análisis interno", un análisis únicamente del contenido en sí mismo), en el marco de unas determinadas prácticas sociales y cognitivas entre las personas implicadas, lo que puede llevar a la activación de determinados esquemas o la regulación de posibles conductas entre estas personas. En este sentido, y como señalan Bardin (1996) y Andréu (2001), la interpretación de la comunicación analizada no se limita al contenido manifiesto, sino que también se analiza el contenido oculto, latente o no manifiesto, aunque con precaución y siempre dentro de un determinado marco o perspectiva teórica dentro de la cual dicho contenido adquiera sentido (Piñuel, 2002).

En la Figura III.1, de elaboración propia utilizando el programa CmapTools, se resume gráficamente en un esquema la información fundamental sobre la metodología de análisis de contenido, a partir de los manuales y documentos de referencia que se han utilizado. En la parte superior de la Figura III.1 se hace referencia a los significados, en el marco de esta metodología, de las dos palabras claves que conforman su nombre: análisis y contenido. En la parte inferior se recogen las ideas básicas sobre los cuatro pilares fundamentales sobre los cuales se asienta esta metodología, mientras que en la parte derecha se hace referencia a las dos funciones principales que Bardin (1996) asigna a la utilización de una metodología de este tipo.

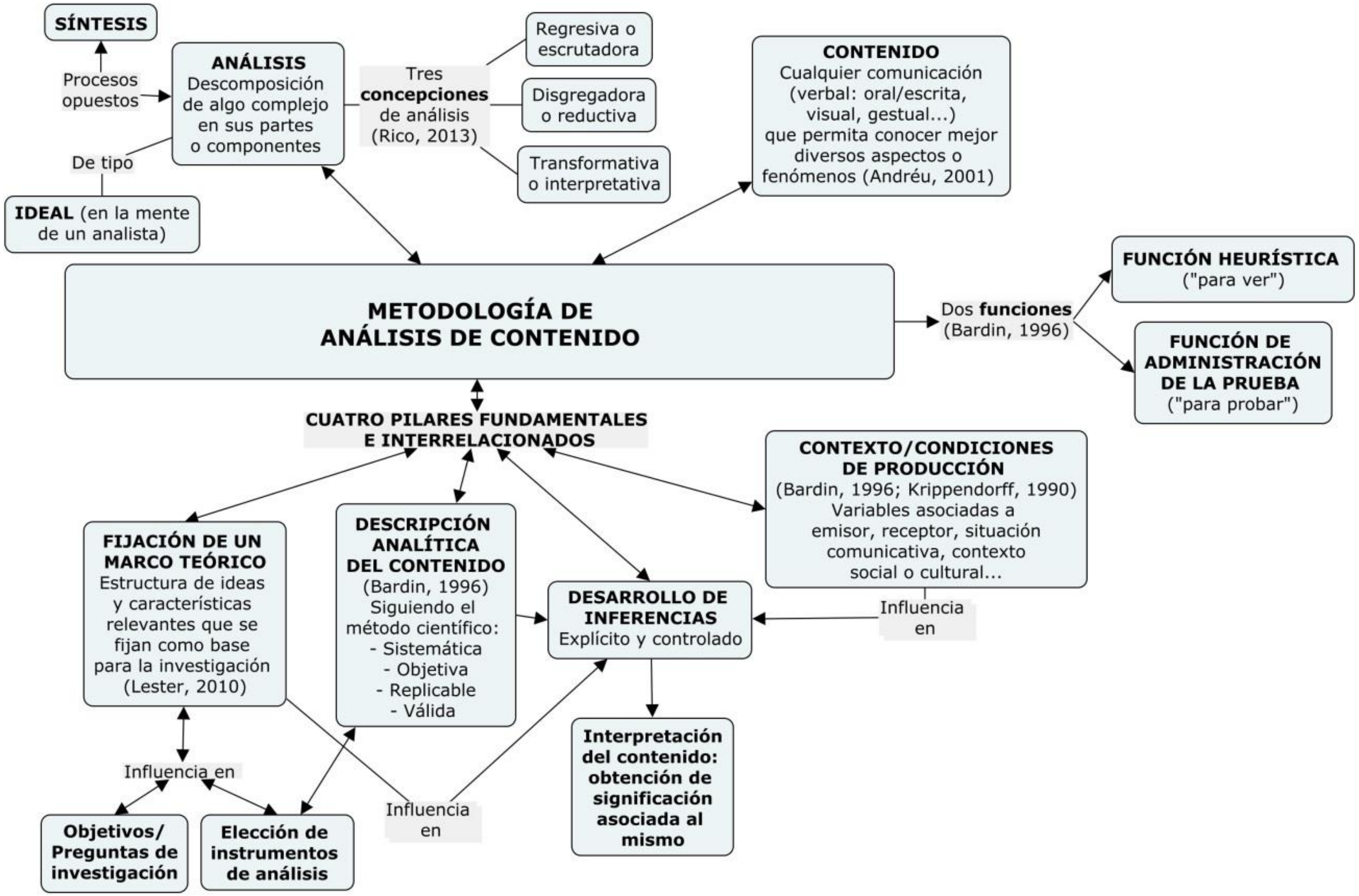


Figura III.1. Esquema que recoge la información fundamental sobre la conceptualización de la metodología de análisis de contenido.

El campo de la educación es uno de los campos en los que esta metodología de análisis de contenido es aplicada con frecuencia en las investigaciones, para poder estudiar los diversos aspectos o procesos que constituyen un determinado hecho educativo (Stone *et al.*, 1966; citado en Krippendorff, 1990; López, 2002). Este último autor indica que esta metodología ayuda a formular de modo preciso problemas y proposiciones científicas en educación, así como a ser capaz de distinguir aspectos y sectores científicos, descriptivos o normativos frente a aquellos que se quedan en el ámbito ideológico o en la mera opinión. Pero el análisis de contenido no es sólo aplicado en entornos de investigación educativa. Coincidimos con Bardin (1996) en que, en muchas ocasiones y con mayor o menor detalle, los docentes desarrollan de forma implícita análisis de contenido; por ejemplo, al evaluar una prueba escrita o al elegir un libro de texto.

En nuestro estudio, el análisis de contenido ha sido la metodología fundamental utilizada. Nos hemos decantado por ella puesto que en esta investigación se reflejan claramente las cuatro consideraciones indicadas por Krippendorff (1990, pp. 40-44) bajo las cuales se maximiza el beneficio de aplicar la metodología de análisis de contenido frente a otras posibles, como explicamos a continuación:

- El análisis de contenido no es una técnica intromisiva, ya que permite que los datos a analizar no sean susceptibles de estar contaminados por el sondeo del observador.

Ese hecho ha sido aquí especialmente importante para el equipo investigador, puesto que se pretendía analizar los cuadernos de los alumnos producidos en un entorno que no estuviera influenciado por el propio desarrollo del análisis. Para ello, no se ha dado ninguna directriz ni a docentes ni a alumnos, realizando una observación no participativa en los días que acudíamos a los centros. Los docentes tampoco han dado ninguna directriz nueva sobre el cuaderno a sus alumnos. Además, los alumnos desconocieron que íbamos a analizar sus cuadernos hasta el momento en el que los recogimos para la realización de las fotocopias de los mismos.

- El análisis de contenido acepta material no estructurado elaborado por una fuente, que es analizado tal y como le llega al analista.

Esto es lo que sucede en el caso de los cuadernos, que han sido analizados por el equipo investigador tal y como son, con el producto de la elaboración desarrollada por cada alumno. Este hecho ha provocado que “el investigador quizá no pueda anticipar todas las categorías de análisis y las formas de expresión antes de haber obtenido y examinado el material" (Krippendorff, 1990, p. 42). Así, la detección de hechos relevantes no previstos o no anticipados y la necesidad de refinar o discriminar correctamente diferencias relevantes entre documentos han posibilitado la evolución de los instrumentos de análisis en el transcurso de la investigación, así como el reanálisis progresivo del contenido.

- El análisis de contenido es sensible al contexto, siendo capaz de analizar y procesar los datos como fenómenos con carga simbólica asociados al contexto en que se han producido.

En nuestro caso, conocer el contexto y las condiciones de aula bajo las cuales cada alumno elabora su cuaderno son fundamentales para ayudarnos a obtener información e interpretar adecuadamente los hechos y características observadas. Para ello, hemos recogido información a través de varias vías, como se indicará en el apartado siguiente, III.2.

- El análisis de contenido permite el análisis de una gran cantidad de información, en procesos prolongados que deben estar bien organizados, definidos y controlados, con la posibilidad de participación de varias personas o de la ayuda de máquinas.

El volumen de información en esta investigación es muy alto, puesto que se ha analizado la parte de análisis matemático correspondiente a los cuadernos de 41 alumnos de 1º de Bachillerato, obtenida a través de la fotocopia de los mismos. Este tipo de datos, además, permiten volver a ser analizados en momentos distintos o por personas distintas, lo que permitió avanzar en la información, obteniendo inferencias e interpretaciones a partir de los datos a medida que también avanzaban o se concretaban los instrumentos de análisis establecidos.

III.1.2. FASES EN EL DESARROLLO DE UN ANÁLISIS DE CONTENIDO

Tanto Bardin (1996) como Krippendorff (1990) plantean un modelo de tres fases para el desarrollo de una investigación utilizando la metodología de análisis de contenido. Esas tres fases son:

- El preanálisis o diseño del proyecto de investigación.
- El desarrollo del análisis del material que alberga el contenido.
- El tratamiento, la interpretación y la presentación de los resultados obtenidos.

Dedicaremos el resto de este subapartado a indicar en qué consiste cada fase[16], cuáles son los aspectos fundamentales a realizar en cada una (especialmente en la primera que, como se comenta a continuación, es la fase más determinante) y cómo se han abordado en la investigación que aquí se presenta.

Preanálisis o diseño del proyecto de investigación

En esta primera fase se planifica y organiza el análisis de contenido que va a llevarse a cabo. Los objetivos son la operacionalización y la sistematización de las ideas de partida para poder llegar a establecer un plan de análisis preciso, pero también flexible. Esta, posiblemente, es la fase más importante del análisis, siendo también la fase más apasionante para los investigadores desde un punto de vista intelectual y creativo. Dentro de esta fase existen varias acciones importantes que es necesario realizar. A continuación se explican dichas acciones, entendiendo que no se presentan las mismas en orden cronológico, puesto que las acciones, por regla general, están entrelazadas entre sí.

<u>Búsqueda y elección de los documentos que van a ser analizados</u>: Como es obvio, es necesario que los documentos elegidos tengan conexión con lo que el investigador quiere analizar o inferir, es decir, que tengan interés para los objetivos del análisis. Estos documentos pueden estar determinados a priori o elegirse según determinados criterios (muestreo estadístico, interés por la información que pueden proporcionarnos, disponibilidad para el analista…). Dentro del "universo" compuesto por todo el género de documentos sobre los cuales podría efectuarse el análisis, el "corpus" estará constituido por aquellos documentos que son sometidos al análisis. Ese "corpus" debe ser exhaustivo (no debe desecharse injustificadamente ningún elemento del mismo), representativo (si ha lugar a hablar de ello), homogéneo (documentos con cierta homogeneidad y elegidos de un modo preciso) y pertinente (selección de documentos adecuada como fuente de información para el objetivo del análisis).

En nuestra investigación, el "universo" potencial estaría formado por todos los cuadernos de matemáticas, algo inabarcable. Así, el estudio se ha focalizado en un curso y en un tópico concreto. El curso seleccionado ha sido el de 1º de Bachillerato, primer curso de estudios no obligatorios y en el que los estudiantes pueden elegir la modalidad que más les interesa. Es por ello que presuponemos la presencia de cierto interés en el alumnado hacia el estudio y el aprendizaje de las matemáticas, así como

---

[16] En la explicación de las diferentes fases y acciones constitutivas de cada fase, se expone e interpreta la información extraída de los manuales de Bardin (1996) y Krippendorff (1990), por lo que omitimos la realización continua de citas a estos autores.

cierta madurez y ciertos hábitos adquiridos en su trabajo con los cuadernos, derivados de su experiencia previa. Por otra parte, el contenido en el que se centra el estudio es el bloque de Análisis Matemático, un bloque común a las dos modalidades de 1º de bachillerato con asignatura de matemáticas (modalidad Científico-Tecnológica y de Ciencias Sociales). Además de por tratarse de un bloque común, hemos seleccionado este bloque por iniciarse en este curso el estudio de importantes conceptos nuevos para los alumnos, como los asociados al límite y la derivada de una función, lo que nos puede mostrar de una mejor manera cómo elaboran y utilizan su cuaderno para estudiar y aprender estos conceptos que se introducen. Una razón más es la amplia tradición investigadora asociada a este bloque de contenidos desarrollada en el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

En un estudio de este tipo no tendría sentido plantear el desarrollo de un muestreo estadístico de cuadernos, debido al elevado número de variables que tienen influencia en el desarrollo de un cuaderno y a las limitaciones de acceso a la información. Por ello, aquí se ha seleccionado una muestra por conveniencia, con cuatro aulas de 1º de Bachillerato elegidas por disponibilidad en las que nos han dado su permiso para llevar a cabo el estudio y la recogida de datos. Dentro de esas clases hemos intentado que participaran todos los alumnos (sin realizar "automuestreos" en las aulas) con su cuaderno de matemáticas. No obstante, existió una minoría de alumnos que decían no tener cuaderno (generalmente alumnos que tenían abandonada la asignatura y no hacían nada en las clases de matemáticas) o que nos dieron excusas reiteradas en el momento de recoger sus cuadernos para fotocopiar, por lo que desistimos de la participación de este pequeño grupo de estudiantes. En el apartado III.2 se recoge más información sobre los participantes en el análisis.

<u>Elección de un marco conceptual o teórico de referencia para el desarrollo del análisis y elaboración de instrumentos para el análisis y la codificación de los datos</u>: Como ya se ha comentado, uno de los pilares fundamentales para el desarrollo de un estudio utilizando la metodología de análisis de contenido es la fijación de un marco teórico, es decir, una estructura de ideas y de características que se establecen como base para el desarrollo de la investigación al ser consideradas como relevantes bajo la perspectiva de los investigadores (Lester, 2010). En una investigación donde se use esta metodología, debe encontrarse el modo en el que los datos son considerados como indicadores o como manifestaciones simbólicas de los fenómenos que interesa conocer a los investigadores.

Además, es necesario elegir un instrumento adecuado que nos ayude a que el texto "hable" del mejor modo posible sobre esos aspectos considerados como relevantes de aquello que vamos a investigar. Para ello, en caso de que existan, es mejor partir de instrumentos que ya hayan sido utilizados en investigaciones en contextos y con propósitos similares, lo que también ayuda a la comparabilidad posterior de los resultados con los obtenidos por otros investigadores.

En el caso de nuestra investigación, el marco teórico no estaba prefijado de forma completa antes del desarrollo del estudio, ni existía en la literatura, hasta donde conoce el equipo investigador, ningún instrumento de investigación para analizar los cuadernos de matemáticas de los alumnos.

Como punto de partida se ha utilizado el marco teórico bajo el cual se realizó el primer estudio exploratorio, precursor de esta tesis doctoral, y la plantilla de análisis derivada de dicho marco (Capítulo II, apartado 3). Una primera lectura "superficial" de las fotocopias de los cuadernos de los alumnos participantes, acompañada de la lectura de un mayor número de antecedentes y documentos teóricos, provocaron una evolución del marco teórico de referencia (ideas que se recogen en el apartado III.3), así como una reformulación de la plantilla de análisis anterior. En particular, la distinción realizada entre unidades de registro teóricas y prácticas, y las diferencias importantes en su contenido, evidenciaron la necesidad de crear una plantilla específica para cada tipo de unidad de registro: teórica y práctica. Además, se introdujeron escalas de medidas y textos destinados a una codificación de los datos donde se intentaran evitar las ambigüedades y las posibles subjetividades.

El transcurso del análisis pormenorizado ha evidenciado la presencia de algunos aspectos de interés en los cuadernos que no habían sido considerados en la plantilla o se consideraban de forma insuficiente, así como algunas ambigüedades en la codificación que ha sido necesario clarificar. Esto ha sucedido especialmente en la primera parte de este análisis, a modo de pilotaje o de testado de los instrumentos creados. Además, la presentación de algunas partes del marco en congresos y en seminarios de investigación ha permitido también refinar o modificar algunos aspectos que la comunidad investigadora nos sugirió como menos claros o más problemáticos.

La versión final se ha obtenido tras una saturación de este refinamiento, cuando se ha completado la aplicación completa del marco a todas las unidades sin que se detectara ningún aspecto no recogido, problemático o que hubiera que cambiar.

Así, el producto final son dos plantillas para el análisis del contenido de los cuadernos (una para los contenidos teóricos y otra para los aspectos prácticos) que mantienen la misma estructura de cinco dimensiones, variables e indicadores de la plantilla del estudio exploratorio, pero que es mucho más completa y adaptada al contexto de esta investigación, al recoger todos los aspectos de interés detectados en los cuadernos participantes. Estas dos plantillas se presentan en el capítulo IV de esta tesis doctoral, junto con los hitos fundamentales que provocaron su progresiva evolución. La Figura III.2 resume de un modo gráfico las tres etapas principales de evolución de los instrumentos de análisis de los cuadernos que han sido creados y de las ideas teóricas que subyacen a los mismos.

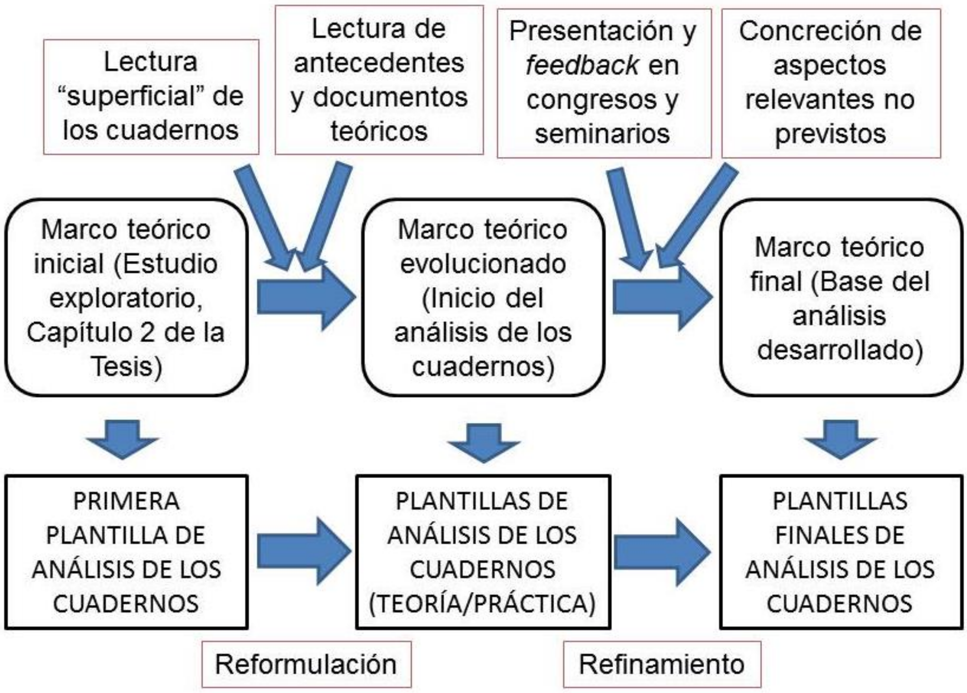


Figura III.2. Esquema de las tres etapas fundamentales en la evolución del marco teórico y la plantilla de análisis de los documentos.

<u>Formulación de los objetivos o hipótesis de la investigación</u>: Según el tipo de estudio que vaya a desarrollarse (si es un estudio con un procedimiento totalmente cerrado o este admite modificaciones), los objetivos o las hipótesis de la investigación pueden estar más o menos concretadas en el momento del preanálisis y del diseño de la investigación.

En nuestro estudio, inicialmente planteamos una serie de objetivos generales, que pueden leerse en el Capítulo 0 de la Tesis. El objetivo principal del estudio, en todo momento, ha sido la detección y el establecimiento de diferentes perfiles de elaboración y utilización del cuaderno de matemáticas en el alumnado, a partir tanto de las fotocopias de los cuadernos de los alumnos participantes como de entrevistas a algunos de ellos sobre el cuaderno de matemáticas. No obstante, las escasas referencias de investigaciones centradas en el cuaderno de matemáticas y el carácter abierto y flexible de la investigación que dicha circunstancia nos incita han hecho que surgieran otros objetivos más específicos, derivados de aspectos que se han revelado como interesantes en el análisis pormenorizado de los documentos. Esos objetivos específicos serán detallados en el capítulo centrado en los estudios concretos de naturaleza cualitativa que hemos desarrollado (capítulo VII).

Búsqueda de información contextual: Otro de los pilares fundamentales en los que se asienta el desarrollo de un análisis de contenido es un conocimiento contextual adecuado, que nos indique cuáles son las circunstancias de interés que han rodeado la producción de los documentos analizados. Este conocimiento es necesario para poder interpretar los resultados obtenidos en el análisis de los datos y proporcionar un puente lógico para la realización de inferencias e interpretaciones.

En el apartado III.2 y en los Anexos B.2 a B.5 se recoge la información contextual de interés asociada a las condiciones en las que se han producido los cuadernos (documentos base de la investigación). En concreto, en el apartado III.2 se explica tanto el entorno de cada una de las aulas como la información fundamental de interés sobre los participantes, así como las características generales de la metodología docente que son relevantes. En los Anexos B.2 a B.5 se detalla el desarrollo de las sesiones del bloque de análisis matemático en cada una de las cuatro aulas.

Elección de las unidades en que va a descomponerse o dividirse cada uno de los documentos: Es necesario fijar con precisión cuáles van a ser las partes en que van a dividirse los documentos, de tal forma que se garantice una comparación de las mismas que permita avanzar hacia la obtención de información relevante. Esta decisión debe ser pertinente, teniendo en cuenta las características del material analizado y los objetivos perseguidos con el análisis. Krippendorff (1990) distingue tres tipos de unidades que deben establecerse en el desarrollo de un análisis de contenido: la *unidad de muestreo*, la *unidad de registro* y la *unidad de contexto*.

La *unidad de muestreo* es cada una de las porciones de realidad observada que son consideradas por el analista como independientes entre sí. En nuestro caso, el cuaderno de cada estudiante participante es una unidad de muestreo.

La *unidad de registro* es cada una de las partes de la unidad de muestreo que se toma como segmento de contenido o como unidad base para el desarrollo del análisis. Cada una de esas unidades base se analiza de forma individual. En nuestro estudio, y para poder establecer comparaciones entre diferentes unidades, se ha considerado una unidad de registro con cierto tamaño, que explicamos a continuación.

Todos los docentes de matemáticas participantes planificaron un desarrollo del bloque de análisis matemático en tres temas similares: un primer tema sobre funciones y funciones elementales, un segundo tema sobre límites y continuidad de una función, y un tercer tema sobre la derivada de una función. Así, para la parte correspondiente a cada uno de estos temas hemos considerado pertinente la consideración de dos unidades de registro distintas:

- Una unidad teórica, de la que forman parte todos aquellos aspectos asociados al registro de los contenidos teóricos propios del tema.

- Una unidad práctica, conformada por todos aquellos aspectos asociados a la realización, corrección o registro de actividades propias del tema.

Así, en el cuaderno de cada alumno (es decir, en cada unidad de muestreo) tendremos seis unidades de registro (como norma general). Para identificar estas unidades a lo largo de la investigación utilizaremos un código que refleja tanto el tipo de unidad como el tema al que corresponde: las iniciales UT o UP (según sea una unidad teórica o práctica) seguida del número al que corresponde el tema. Así, por ejemplo, UT1 hará referencia a la unidad teórica del primer tema (el tema de funciones y funciones elementales), mientras que UP3 hará referencia a la unidad práctica del tercer tema (el tema de derivadas).

Por último, la *unidad de contexto* está constituida por la unidad de registro junto con aquella información que sirva para poder describir, reconocer, explicar hechos o captar la significación de dicha unidad. En nuestro caso, una unidad de contexto sería el resultado de unir a la unidad de registro toda la información contextual obtenida que está asociada a la unidad concreta (y que se recoge, fundamentalmente, en el apartado III.2 y en los Anexos B.2 a B.5 sobre el desarrollo de las sesiones).

<u>Preparación del material reunido para proceder al análisis</u>: Los documentos que van a analizarse deben prepararse o “editarse” (desde un punto de vista formal) para facilitar el desarrollo posterior del análisis.

En nuestro caso, se han realizado fotocopias de los cuadernos de los alumnos participantes, de la parte correspondiente al bloque de análisis matemático. Esas fotocopias han sido separadas por temas y por alumnos, identificándose el código de la unidad de registro y señalándose dentro de cada tema, y de forma inicial, las partes correspondientes a la UT y las partes correspondientes a la UP.

El desarrollo del análisis del material que alberga el contenido

Si todas las acciones correspondientes a la fase anterior se han realizado de forma adecuada, esta fase sería rutinaria, y se reduciría a la aplicación de los instrumentos de análisis a todos los documentos (y las unidades de registro que los conforman). Esto puede hacerse manualmente o utilizando algún programa informático. En esta fase se produce una *codificación* de los documentos, es decir, una transformación de los datos brutos del texto, siguiendo reglas precisas y por operaciones de descomposición, agregación y enumeración, que permite desembocar en una representación del contenido que ilustra al analista sobre sus características (Porta y Silva, 2003). Posteriormente, se produce una *categorización*, reuniéndose en un mismo grupo o clase a aquellas unidades de registro que, una vez codificadas, posean ciertas características comunes. El sistema de categorías puede estar establecido de antemano (con grupos basados en ciertos fundamentos teóricos o hipotéticos) o puede desarrollarse de manera inductiva, resultando de la clasificación analógica y progresiva de las diferentes unidades analizadas.

En nuestro caso, y dado que hemos tenido que generar la plantilla de análisis de los cuadernos de una forma esencialmente inductiva, esta plantilla ha ido evolucionando y perfeccionándose durante el desarrollo del análisis, como ya se ha comentado en las acciones de la fase anterior. Una vez obtenidas las plantillas finales, se realizó el análisis pormenorizado de todas las unidades de registro, de forma manual y rutinaria.

En la fase de codificación, se transformaron los datos brutos que contenía la unidad de registro en dos tipos de información (“datos de segundo orden”, utilizando el lenguaje de Piñuel, 2002), unificada, y que permitiera su tratamiento o procesamiento posterior:

- Un vector con las valoraciones numéricas (en escalas de 1 a 5) que indicaba el desarrollo de cada uno de los indicadores considerados en las distintas variables de análisis.

- Textos en los que se explica y justifica la valoración numérica asignada a cada indicador, en función de la leyenda de codificación establecida y de las características de la unidad analizada.

En el capítulo IV de esta tesis doctoral explicaremos con más detalle y ejemplificaremos esta fase de codificación en el desarrollo del análisis.

Posteriormente, hemos desarrollado dos procesos inductivos de categorización de las unidades de registro, separando el proceso asociado a las UT y las UP. Se han utilizado los vectores de valoraciones numéricas como datos, con los que se ha desarrollado un análisis clúster (precedido de un análisis de componentes principales) para cada tipo de unidades. El desarrollo de este proceso de categorización y los resultados obtenidos son presentados y explicados en el capítulo V de esta tesis doctoral.

Además, se han realizado análisis más concretos y específicos de diversos aspectos y fenómenos que, tras el análisis pormenorizado de los documentos y el proceso de codificación, se han considerado como más relevantes o de mayor importancia para su conocimiento por la comunidad científica. Estos análisis, de tipo cualitativo, junto con los resultados obtenidos en los mismos, conforman el capítulo VII de esta tesis.

El tratamiento, la interpretación y la presentación de los resultados obtenidos

En esta última fase se organizan los resultados obtenidos en la fase anterior para su mejor presentación, así como se realizan inferencias e interpretaciones de los mismos en relación con la información contextual o con los antecedentes teóricos existentes.

En nuestro caso, además de la interpretación de los resultados obtenidos en función del contexto de producción de los documentos, y en relación con otros estudios relacionados, hemos desarrollado ocho entrevistas a parejas de alumnos participantes para profundizar sobre los modos de utilización del cuaderno y relacionar los resultados sobre elaboración del cuaderno con el uso que hacen de los mismos. El desarrollo y análisis de estas entrevistas se ubicará en el Capítulo VI de la tesis.

III.2. INFORMACIÓN CONTEXTUAL DE INTERÉS Y PARTICIPANTES EN EL ANÁLISIS

Como ya hemos comentado, uno de los pilares fundamentales para el desarrollo de un estudio utilizando la metodología de análisis de contenido es el contexto dentro del cual se produce el contenido que va a analizarse. Dicho contexto lleva asociadas unas condiciones de producción del contenido que ayudan a dotar de sentido al mismo y a las posibles interpretaciones que puedan realizarse a partir de él. El objetivo de este apartado es el de proporcionar la información fundamental acerca del contexto en el que se desarrolla el estudio y de los participantes en el mismo.

El contenido fundamental en nuestro estudio son los cuadernos de matemáticas desarrollados por los estudiantes de varias aulas de 1º de Bachillerato. Durante dicho curso, el currículo LOE (ley vigente durante la recogida de información) marca varios bloques de contenidos para la asignatura de matemáticas, tanto de la rama científica como de la rama aplicada a las ciencias sociales (MEC, 2007b; Conserjería de Educación de Castilla y León, 2008). En particular, nuestro análisis se ha centrado en el contenido propio del bloque titulado "Análisis", con contenidos de análisis matemático y presente en ambas ramas.

El curso en el que hemos desarrollado la recogida de datos es el de 1º de Bachillerato. En nuestro análisis han participado cuatro aulas, elegidas por disponibilidad (muestreo por conveniencia), en las que los docentes nos dieron su permiso para poder desarrollar el estudio. Los datos fueron recogidos durante el curso 2011/2012.

Dos de las aulas pertenecen a un instituto público de un barrio situado en la ciudad de Valladolid. En dicho centro participa tanto una clase de 1º de Bachillerato de la modalidad científico-tecnológica como otra clase de la modalidad de ciencias sociales. Ambas clases tienen un profesor de matemáticas distinto. Durante todo el estudio nos referiremos al docente de la clase de la modalidad científico-tecnológica como Docente 1 y al de la clase de la modalidad de ciencias sociales como Docente 2.

Las dos aulas restantes pertenecen a un colegio privado-concertado situado en las afueras de la ciudad de Valladolid. Al igual que sucedía en el anterior centro, en este colegio participan tanto una clase de la modalidad científico-tecnológica como otra de la modalidad de ciencias sociales. Sin embargo, ambas aulas tenían una misma profesora de matemáticas, a la que nos referiremos en este estudio como Docente 3.

Los tres profesores son licenciados en Matemáticas y tienen bastante experiencia como docentes de matemáticas en enseñanza secundaria. En el caso del Docente 1, en el momento de realizar el estudio tenía una experiencia docente de alrededor de 25 años, además de una amplia asistencia y participación en jornadas regionales de innovación e intercambio de experiencias entre profesores de matemáticas. El Docente 2, actualmente ya jubilado, contaba también con una amplia experiencia como profesor de secundaria en el momento de desarrollar el estudio y la recogida de datos, además de ser doctor en Didáctica de la Matemática. Por último, la Docente 3 es la más joven de los tres, aunque ya contaba en el momento de realizar el estudio con una experiencia de varios años como docente de matemáticas en secundaria, además de poseer la suficiencia investigadora (DEA) en Didáctica de la Matemática.

Las cuatro aulas contaban con el mobiliario habitual y los recursos estándar propios de las aulas de Bachillerato. Todas las aulas tenían una o dos pizarras clásicas de tiza. Además, en las dos aulas del colegio privado-concertado también había un ordenador, una pantalla y un cañón para proyectar en la pantalla. No obstante, según nos cuenta la profesora, y según pudimos comprobar en nuestra observación directa de algunas clases, el proyector no fue utilizado por la Docente 3 durante la docencia de este bloque de análisis matemático en ninguna de las dos aulas.

III.2.1. ALUMNOS PARTICIPANTES EN EL ANÁLISIS

En este subapartado detallamos la información fundamental sobre los alumnos participantes en el análisis: el modo en que se distribuyeron en el aula, su comportamiento general en las clases de matemáticas y otra posible información de interés que nos proporcionó su docente de matemáticas en una entrevista previa al comienzo del periodo analizado en cada aula.

Las cuatro aulas se caracterizaron por tener un número de alumnos reducido. Esta fue una característica sobrevenida, no buscada por los investigadores, dado que la elección de las aulas fue por disposición. En cada aula, se intentó que todos los estudiantes participaran en el análisis, sin que se realizaran “automuestreos” internos o elecciones de estudiantes dentro de las aulas, puesto que lo que buscamos principalmente es detectar diferentes perfiles de elaboración y utilización del cuaderno de matemáticas en el alumnado. No obstante, como ahora detallaremos aula por aula, algún estudiante declinó proporcionarnos su cuaderno para poder realizar fotocopias del mismo o se excusaron repetidamente argumentando que no tenían nada en él, por lo que desistimos de solicitar su participación.

Para identificar a los alumnos participantes en este estudio utilizaremos el siguiente código: una “A” (inicial de alumno) seguida de un número.

Aula del Docente 1 (Bachillerato Científico-Tecnológico)

El aula del Docente 1, aula del bachillerato científico-tecnológico, estaba compuesta por 14 estudiantes, de los hemos conseguido la participación de diez en este análisis.

Entre los cuatro alumnos restantes, hay un alumno repetidor que no seguía la asignatura y que no hacía nada en las clases (por lo que entendimos que no tenía cuaderno). Los otros tres alumnos, que sí manifestaban cierto seguimiento de la asignatura, nos dieron múltiples excusas los días en los que tanto su docente como el doctorando les requerimos sus cuadernos, por lo que optamos por renunciar a su participación. Algunos de ellos nos decían que "no tenían nada", y en las observaciones de las clases habíamos detectado que eran alumnos que no anotaban nada o casi nada, por lo que pudieran no tener un cuaderno de matemáticas como tal o pudieran tener un cuaderno muy incompleto que no querían que fuera analizado.

Hemos numerado a los diez alumnos participantes de esta aula según el orden que ocupaban en la lista de clase, siendo en nuestro análisis los alumnos A1 a A10. De esos 10 alumnos, hay seis chicos (A1 a A4, A9 y A10) y cuatro chicas (A5 a A8). Según su docente, el rendimiento de los alumnos en matemáticas era mejorable, aunque habían ido progresando desde el comienzo de este curso de bachillerato, puesto que la mayoría se esforzaba y mostraba interés por la asignatura. El docente nos comentó algunas características particulares de interés de algunos estudiantes en concreto. La alumna A8 era repetidora, mientras que los alumnos A2, A3, A4 y A7 eran nuevos en el centro ese año, habiendo estudiado la ESO en otro colegio o instituto. Además, el docente nos destacó el caso del alumno A10, un alumno con mucha facilidad para las matemáticas, y de la alumna A7, una alumna que terminó la ESO con un programa de diversificación curricular y que mostraba un nivel de conocimientos previos muy bajo en matemáticas.

La colocación de los alumnos en el aula fue fija durante el desarrollo del estudio, salvo algún posible cambio puntual debido a que algún estudiante se ausentara y alguien se trasladara a su sitio. La Figura III.3 representa un plano cenital de la clase, con la posición del mobiliario y la colocación de los alumnos (con su código, y el código "NP" para los alumnos que no accedieron a participar).

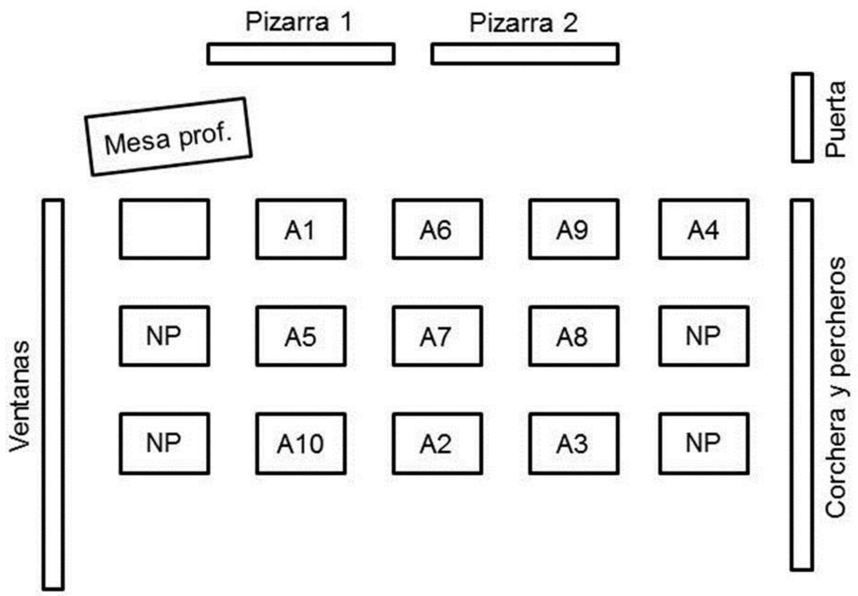


Figura III.3. Plano cenital con la colocación de alumnos y los recursos del aula del Docente 1 (NP: alumno no participante).

Como puede observarse en la Figura III.3, los alumnos se situaron en mesas individuales y separadas, distribuidas en cinco columnas. El comportamiento general del alumnado en el aula fue bueno. El grupo más disruptivo era el formado por los alumnos A2 y A10, aunque el profesor prefería que mantuvieran su posición en la clase puesto que, en algunas ocasiones, el alumno A10 ayudaba al alumno A2 a seguir la clase y a resolver sus dudas. En la mayoría de ocasiones, las intervenciones de los alumnos estaban asociadas al planteamiento de dudas, tanto asociadas al contenido como a la evaluación de la asignatura. Existen muchas preguntas de los alumnos acerca de si los diferentes contenidos entraban o no en el examen y si en el examen se preguntarían cosas parecidas a las hechas en clase. En particular, la alumna A6 parecía bastante obsesionada con este aspecto, a juzgar por la cantidad de preguntas de este tipo que realizó, al menos los días que actuamos como observadores en el aula.

Aula del Docente 2 (Bachillerato de Ciencias Sociales)

El aula del Docente 2, aula del bachillerato de Ciencias Sociales, estaba compuesta por 10 alumnos. De los diez alumnos, participaron ocho en el análisis de sus cuadernos. De los dos alumnos que no participaron, hay un alumno que no hacía nada en las clases y que no seguía la asignatura (por lo que entendemos que no tenía cuaderno de matemáticas). Además, otro alumno dio múltiples excusas tanto a su docente como al doctorando cuando se le requirió que nos prestara su cuaderno para fotocopiarlo, por lo que se desistió de su participación.

Hemos numerado a los ocho alumnos de esta aula participantes según el orden que ocupaban en la lista de clase, continuando con la numeración de la clase anteriormente considerada. Así, los alumnos participantes de esta aula tuvieron los códigos del A11 al A18 en esta investigación, entre los cuales hay cuatro chicas (A11, A12, A14 y A16) y cuatro chicos (A13, A15, A17 y A18). Según su docente, el rendimiento en matemáticas de los alumnos de esta clase era mediocre. En particular, en el desarrollo de este bloque de Análisis Matemático, y especialmente en la parte final, el docente percibió una sensación de que los alumnos no estaban siguiendo y entendiendo lo que se hacía. El docente también destacó que la mayoría de alumnos del aula tienen un carácter bastante inquieto y espontáneo, pero mostraban poca madurez y una gran facilidad para distraerse.

Además, el docente nos indicó algunas características particulares de interés de algunos estudiantes o grupos de estudiantes. El alumno A18 era repetidor y el alumno A13 era nuevo en el centro, tras haber estudiado la ESO en otro centro. Los estudiantes A11, A12, A15 y A16 tenían un rendimiento bastante irregular en matemáticas, el docente consideraba que eran alumnos inteligentes pero con una marcada tendencia a vaguear. La alumna A14, para este docente, era la alumna más responsable, atendiendo y realizando las tareas de forma regular. Además, los alumnos A13 y A17 mostraban gran interés y esfuerzo por sacar adelante la asignatura, pero evidenciaban ciertas limitaciones derivadas de la falta de conocimientos y habilidades matemáticas previas (por ejemplo, A17 provenía de un programa de diversificación curricular en la ESO).

La colocación de los alumnos en el aula fue fija durante el desarrollo del estudio, salvo algún posible cambio puntual realizado por el docente en días concretos. La Figura III.4 representa un plano cenital de la clase, con la posición del mobiliario y la colocación de los alumnos (con el código de cada uno, y el código “NP” para los alumnos del aula que no accedieron a participar).

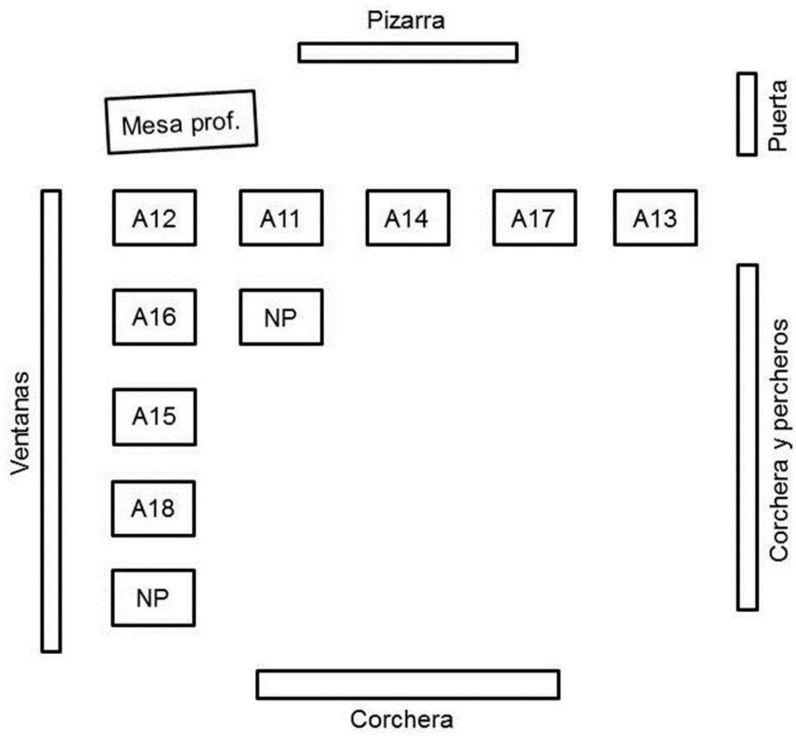


Figura III.4. Plano cenital con la colocación de alumnos y los recursos del aula del Docente 2 (NP: alumno no participante).

Como puede observarse en la Figura III.4, los alumnos estuvieron ubicados en mesas individuales, aunque su colocación en el aula fue un poco peculiar: los alumnos se concentraban en la primera fila y en la columna más próxima a las ventanas. El docente nos proporcionó dos posibles justificaciones para este hecho: esta columna era la más próxima a los radiadores y, también, la más próxima a las ventanas, una importante fuente de distracción para muchos de los que allí se ubicaban.

El carácter inquieto y espontáneo de muchos de los alumnos hizo que su comportamiento en el aula durante el desarrollo del estudio fuera bastante revoltoso y con bastante alboroto en la mayoría de los días. En la presente aula, y en relación a la ubicación de los alumnos, destacaban dos grupos. Por una parte, los alumnos A13 y A17 se situaban en primera fila y uno al lado del otro; siendo alumnos que, en ocasiones, se intentaban ayudar el uno al otro (en la resolución de dudas o de ejercicios planteados). Por otra parte, las alumnas A11, A12 y A16 mostraban una atención y un trabajo muy discontinuo en el desarrollo de las sesiones, puesto que atendían y trabajaban "a ráfagas", mostrando interés cuando el docente se situaba cerca de su posición, pero despistándose con mucha facilidad y conversando sobre temas no relacionados cuando el docente se alejaba.

Aula del Docente 3 (Bachillerato Científico-Tecnológico)

El aula del bachillerato científico-tecnológico del Docente 3 estaba compuesta por 11 estudiantes. Todos ellos participaron con sus cuadernos en este análisis. Hemos numerado a los once alumnos según el orden que ocupaban en la lista de clase, continuando la numeración anterior. Así, los once alumnos de esta aula tuvieron los códigos del A19 al A29. La mayoría de estos once estudiantes eran chicas: ocho alumnas (A19, A20, A22, A24, A25, A26, A27 y A29) y tres chicos (A21, A23 y A28).

La docente de matemáticas del aula destacó que el rendimiento general de los alumnos de esta clase era bastante bueno, siendo alumnos bastante estudiosos en su mayoría. No nos indicó ninguna circunstancia particular de los estudiantes que sea relevante reseñar. Esta docente también destaca la buena relación existente entre la profesora y los alumnos, prevaleciendo un clima de clase bastante bueno.

La colocación de los alumnos en el aula fue fija durante el desarrollo del estudio, pero sí que difería en relación a las dos aulas anteriores y al aula restante de esta docente. La Figura III.5 representa un plano cenital de la clase, con la posición del mobiliario y la colocación de los alumnos (con el código de cada uno). Como puede observarse en la figura, los alumnos no estaban colocados de forma individual en sus pupitres, sino que los pupitres estaban pegados en dos filas (una primera fila de seis y una segunda de cuatro), con un alumno, A28, sentado en una mesa separada, aunque con una posición cercana a las restantes. La mesa del profesor disponía de ordenador portátil, en el que la docente aprovechaba para registrar incidencias, faltas de asistencia o revisar el campus virtual del centro en algunos de los momentos en los que los alumnos están trabajando en alguna actividad. Las mesas de los alumnos eran un poco más pequeñas de lo que es habitual en aulas de Secundaria.

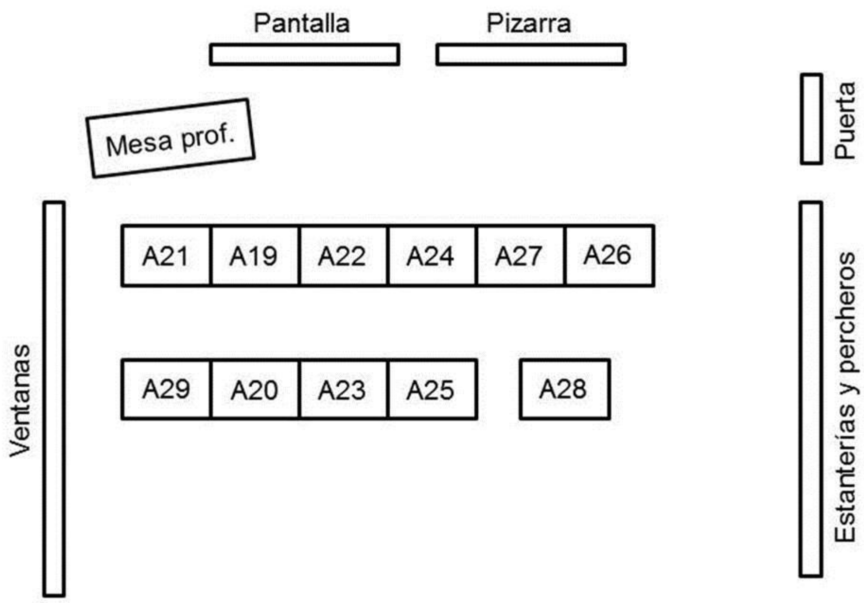


Figura III.5. Plano cenital con la colocación de alumnos y los recursos del aula del Docente 3 (Bachillerato científico-tecnológico).

El comportamiento general de los alumnos en el aula fue bueno. Los alumnos participaron bastante en el desarrollo de las clases, y tenían confianza para intervenir, existiendo un clima de aula muy bueno. No obstante, en algunas ocasiones había alumnos que se despistaban demasiado y entablaban con facilidad conversaciones de temas ajenos a la docencia.

Aula del Docente 3 (Bachillerato de Ciencias Sociales)

El aula del bachillerato de ciencias sociales del Docente 3 estaba compuesta por 14 estudiantes. De estos catorce alumnos, hubo doce que participaron en el análisis con sus cuadernos. Los dos alumnos que no participaron apenas seguían la asignatura, a pesar de los esfuerzos de la profesora por integrarlos en las dinámicas y fomentar su participación. Estos dos alumnos no nos quisieron proporcionar sus cuadernos para fotocopiarlos, a pesar de las indicaciones de la docente y el doctorando.

Como en las aulas anteriores, hemos numerado a los doce alumnos participantes según el orden que ocupaban en la lista de clase, continuando con la numeración anterior. Así, los códigos de los doce alumnos de esta aula van desde el A30 hasta el A41. Al igual que sucedía en el aula del bachillerato científico-tecnológico de esta docente, la mayoría de los alumnos eran chicas: nueve de los doce (A30 a A34, A36, A38, A40 y A41), habiendo únicamente tres chicos (A35, A37 y A39).

Según su docente, existía un alto contraste entre el rendimiento de unos alumnos y otros. Alrededor de la mitad de la clase tenía un buen rendimiento, una alta participación y el desarrollo de un trabajo continuado durante el curso; mientras que la otra mitad tenían más dificultades hacia las matemáticas y, también, un menor interés. Además, la docente nos indicó aspectos particulares de interés de dos de las alumnas. La alumna A30 tenía una importante deficiencia auditiva, pero ésta rehusaba utilizar la emisora para poder escuchar mejor a la profesora. Así, la docente tenía que hacer el esfuerzo de mirarla en las exposiciones, lo que suponía un condicionante para la docencia. Por otra parte, la alumna A34 es de origen ruso y tenía alguna dificultad idiomática, además de tener tendencia a vaguear.

La colocación de los alumnos cambió al poco de comenzar este bloque de análisis matemático, manteniéndose fija el resto del periodo estudiado. La Figura III.6 representa un plano cenital de la clase, con la posición del mobiliario y esta segunda colocación de los alumnos (con su código, y el código “NP” para los alumnos del aula que no accedieron a participar).

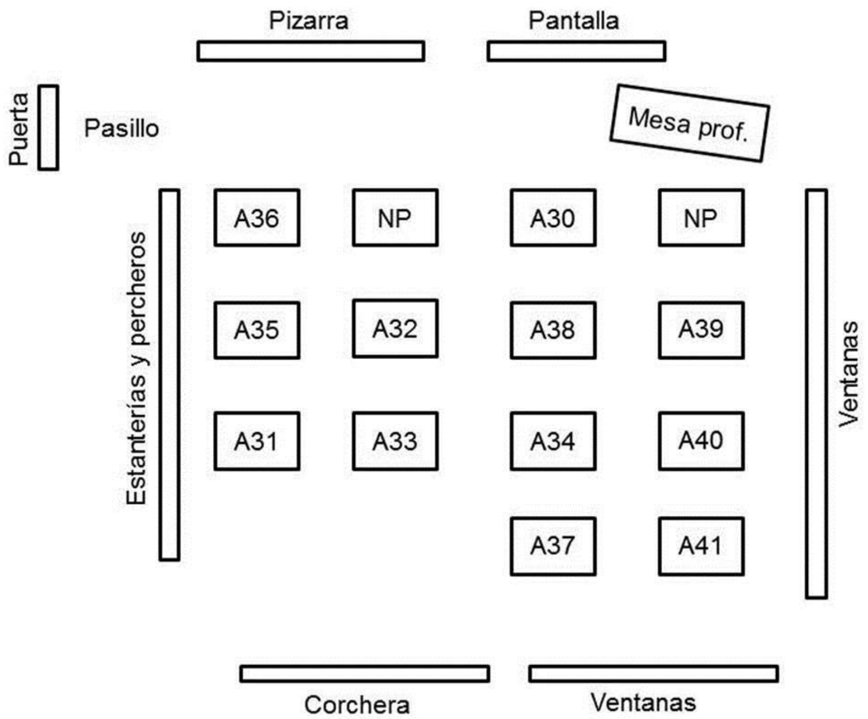


Figura III.6. Plano cenital con la colocación de alumnos y los recursos del aula del Docente 3 (Bachillerato de Ciencias Sociales, NP: alumno no participante).

Como puede observarse en la figura, los alumnos se situaron en mesas individuales y separadas, distribuidas en cuatro columnas. Al igual que en la otra aula de este mismo centro, la mesa del profesor disponía de ordenador portátil y las mesas de los alumnos eran algo más pequeñas de lo habitual en un aula de Secundaria.

A diferencia de la otra clase de esta docente, a los estudiantes de esta clase les costaba bastante participar en el desarrollo de las sesiones, no existiendo apenas disrupciones y con un ambiente muy silencioso. Además, los alumnos que participaban lo hacían con un tono de voz muy tenue. Debe resaltarse, como grupo de interés en el desarrollo de las sesiones, el grupo formado por las alumnas A31, A32 y A33, que se apoyaban bastante en el desarrollo de las clases, especialmente cuando la docente planteaba ejercicios a realizar durante las propias clases (consulta de métodos de resolución y soluciones obtenidas, resolución cruzada de dudas).

En la siguiente tabla, Tabla III.1 se resume la distribución de los alumnos participantes según el tipo de bachillerato, el aula y el sexo. En el estudio participaron un total de 41 estudiantes, alrededor de una decena en cada aula (con un mínimo de 8 y un máximo de 12), 21 de ellos pertenecientes a un bachillerato científico-tecnológico y 20 pertenecientes a un bachillerato de ciencias sociales. El mayor número de chicas en las aulas del centro privado-concertado hace que sea algo mayor el número de chicas participantes (25) en comparación con el de chicos (16).

<table>
<tr><th>Modalidad Bachillerato</th><th>Aula y docente de matemáticas</th><th>Sexo</th><th>Código de los alumnos participantes</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1º Bachillerato Científico-Tecnológico</td><td rowspan="2">Aula del Docente 1 (Instituto público)</td><td>Chicos (6)</td><td>A1, A2, A3, A4, A9 y A10</td></tr>
<tr><td>Chicas (4)</td><td>A5, A6, A7 y A8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aula del Docente 3 (centro privado-concertado)</td><td>Chicos (3)</td><td>A21, A23 y A28</td></tr>
<tr><td>Chicas (8)</td><td>A19, A20, A22, A24, A25, A26, A27 y A29</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1º Bachillerato Ciencias Sociales</td><td rowspan="2">Aula del Docente 2 (Instituto público)</td><td>Chicos (4)</td><td>A13, A15, A17 y A18</td></tr>
<tr><td>Chicas (4)</td><td>A11, A12, A14 y A16</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aula del Docente 3 (centro privado-concertado)</td><td>Chicos (3)</td><td>A35, A37 y A39</td></tr>
<tr><td>Chicas (9)</td><td>A30, A31, A32, A33, A34, A36, A38, A40 y A41</td></tr>
</table>

Tabla III.1. Tabla resumen del alumnado participante en el estudio y su código de identificación.

III.2.2. TEMPORALIZACIÓN Y METODOLOGÍA DESARROLLADA POR LOS DOCENTES EN LAS AULAS PARTICIPANTES

En cada una de las aulas participantes, los docentes planificaron y desarrollaron la docencia correspondiente al bloque de análisis matemático con total libertad, sin que existiera ninguna intervención, directriz o sugerencia por parte del equipo investigador. Así, durante el periodo correspondiente a este bloque, dicho equipo investigador únicamente ha desarrollado una labor de observación no participante en algunas de las sesiones. Esa labor se completó con la realización de una entrevista previa a cada docente sobre aspectos generales del aula, alumnos, la asignatura y la metodología habitual de trabajo en el aula, y varias conversaciones con los docentes sobre el desarrollo de las clases de este bloque.

A través de la no intervención en la docencia y en ningún aspecto asociado a la misma, buscábamos encontrar el modo natural en que los alumnos se comportaban en relación a la elaboración y utilización de sus cuadernos de matemáticas. Así, se trató de minimizar las posibles influencias derivadas del desarrollo del estudio, influencias que pudieran provocar cambios en esos modos de trabajo con el cuaderno. Ni durante este bloque de análisis matemático ni en bloques anteriores de este curso, ninguno de los docentes proporcionó estrategias a los alumnos en relación a su trabajo con el cuaderno de matemáticas, por lo que tenían libertad para elaborarlo y utilizarlo como cada alumno considerara.

Los docentes nos indicaron la mayor dificultad y complicación que tiene para los alumnos el bloque de análisis matemático, parte en la que, según afirman, los alumnos suelen tener los resultados académicos más flojos del curso. Los tres docentes en las cuatro aulas estructuraron de manera similar los temas propios de este bloque. Así, todos ellos planificaron el desarrollo de este bloque en tres temas, con nombres y contenidos muy similares, que indicamos y explicamos a continuación:

- Funciones, funciones elementales y sus características. En este tema se recuerdan algunos conceptos básicos sobre funciones (concepto de función, dominio, recorrido, monotonía, extremos, curvatura, simetría…), y se estudian los tipos de funciones más usuales (polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas...) y sus características.

- Límite de una función y continuidad. En este tema se introduce de forma intuitiva el concepto de límite de una función, se estudia el cálculo de límites y de las indeterminaciones más comunes, y se aplica el concepto de límite al estudio de la continuidad de una función y los tipos de discontinuidades.

- Derivada de una función y aplicaciones. En este tema se introduce el concepto de derivada de una función, las reglas de derivación y la derivación de las funciones más habituales; así como su aplicación al estudio y representación de funciones sencillas (polinómicas o racionales).

Este hecho hizo que dividiéramos los contenidos de los cuadernos de los alumnos en tres temas distintos, que fueron analizados por separado.

No obstante, aunque los temas fueron similares, hubo diferencias en el tiempo destinado por el docente a cada uno de ellos. En las dos clases del bachillerato de ciencias sociales, se comenzó con este bloque durante el mes de diciembre, acabándose entre marzo y abril (con un desarrollo temporal mucho más extenso en el aula de la Docente 3 que en el del Docente 2). En las dos clases del bachillerato científico-tecnológico, este bloque fue el último de los bloques del curso que se desarrolló, comenzando entre marzo y abril, y no llegando a completarse en ninguna de las dos aulas. En la clase del Docente 1 el último tema fue tratado de forma rápida, resumiendo el contenido teórico y sin tratar aspectos prácticos, mientras que en la clase de la Docente 3 el último tema impartido fue el de límites y continuidad, sin llegar a la derivación. La Tabla III.2 indica el tiempo dedicado, aproximadamente, en cada aula participante a cada uno de los tres temas del bloque de análisis matemático.

Temas	Aula Docente 1 (C-T)	Aula Docente 2 (CCSS)	Aula Docente 3 (C-T)	Aula Docente 3 (CCSS)
Funciones	4-5 semanas	3-4 semanas	4 semanas	8 semanas
Límites	2-3 semanas	2 semanas	3 semanas	4 semanas
Derivadas	1 semana	3-4 semanas	No dio tiempo	2 semanas

Tabla III.2. Tabla resumen del tiempo dedicado en cada aula participante a los tres temas del bloque.

En la tabla observamos cómo el periodo dedicado a este bloque fue de alrededor de dos meses en tres de las cuatro aulas, prolongándose durante más tiempo en el aula restante (aula del bachillerato de ciencias sociales de la Docente 3). Este docente justificó esa mayor dedicación temporal por la especial dificultad que muestran los estudiantes de ciencias sociales con este bloque.

El libro de texto tomado como referencia en las cuatro aulas fue de la misma editorial (ANAYA), tanto en las aulas del bachillerato científico-tecnológico (Colera y García, 2008a) como en las aulas del bachillerato de ciencias sociales (Colera y García, 2008b). No obstante, en ninguna clase tuvo un papel determinante en el desarrollo de la docencia. Explicamos a continuación la metodología habitual de los docentes en las sesiones de este bloque, distinguiendo entre aspectos teóricos y aspectos prácticos.

Los tres docentes de las cuatro aulas presentaron los diferentes conceptos matemáticos y contenidos teóricos de forma *expositiva* o *magistral*, a través de presentaciones de carácter personal, no basadas en el libro de texto (salvo, quizá, los títulos y el orden de los apartados en algunos temas, y la introducción del bloque para justificar su estudio por parte de la Docente 3). Los docentes tampoco proporcionaron apuntes a los alumnos, a excepción de una hoja resumen sobre derivadas proporcionada por el Docente 1 a sus alumnos.

En esas presentaciones, los docentes combinaron el discurso oral con el uso de la pizarra de tiza. En el transcurso del discurso oral se verbalizaron los enunciados, se explicaron los ejemplos y representaciones, y se realizaron otras observaciones o comentarios de interés asociados a los contenidos teóricos tratados. La pizarra de tiza, generalmente, se utilizó para la escritura simbólica de enunciados o reglas, el desarrollo de ejemplos o la realización de representaciones de tipo gráfico. En ningún caso se utilizaron otros posibles recursos, como presentaciones proyectadas digitalmente, softwares o recursos on-line (tampoco en las clases en las que existía esta posibilidad por el equipamiento existente, como en las del Docente 3).

En todas las aulas, estas presentaciones del contenido teórico se fueron intercalando con la realización de preguntas al alumnado para que participaran en el desarrollo de la sesión. Estas tenían por objeto la obtención de información sobre los conocimientos previos de los alumnos y sobre cómo estaban comprendiendo los contenidos expuestos. Los alumnos también podían participar libremente en las explicaciones para plantear las posibles dudas que les surgieran en su desarrollo.

A pesar de ser bastante similar la metodología utilizada por los docentes para presentar los contenidos teóricos, también existió alguna diferencia sustancial que debe reseñarse. Así, a diferencia de los otros dos docentes, el Docente 2 hizo uso del dictado explícito de aspectos teóricos en algunos momentos de su discurso oral. Con ello, y según nos comentó este profesor, buscaba asegurarse de que los alumnos copiaran algunos aspectos teóricos fundamentales y tuvieran unos apuntes ordenados, características a las que este docente concedía mucha importancia. Este hecho provocó que el ritmo de exposición del Docente 2 fuera inferior en algunos momentos. En contraposición a este hecho, las exposiciones del Docente 1 se caracterizaban por tener un alto ritmo, puesto que el docente remarcaba los diferentes aspectos que iban apareciendo y que le daban pie a recordar o a introducir otros nuevos, o a relacionar diferentes contenidos.

Existe un mayor número de diferencias entre los docentes en el planteamiento y la corrección de actividades prácticas. Esas diferencias están asociadas a la fuente de la que se extraen las actividades, las formas de proponer y de corregir dichas actividades y los momentos de trabajo práctico de los alumnos en el aula.

En relación a la fuente de la que se extraen las actividades, tanto el Docente 2 como el Docente 3 lo hacen del libro de texto de forma mayoritaria. Para ellos, el papel principal del libro de texto fue el de ser repositorio de actividades, tanto de actividades resueltas (que contiene el libro al final de cada tema, y que son destacadas por ambos docentes) como de actividades para plantear. No obstante, en algunos casos, las actividades también fueron creadas y propuestas por los propios docentes, sin extraerlas de ninguna fuente explícita facilitada. Sin embargo, el Docente 1 sí que entregó hojas de actividades para cada tema creadas por él mismo. Así, estas hojas supusieron la mayor parte de actividades realizadas en el aula y por los alumnos, aunque también indicó a sus estudiantes la presencia de más actividades en el libro de texto y la utilidad de su resolución.

También existieron diferencias importantes en el modo de proponer actividades por estos tres docentes. El Docente 1 no proponía explícitamente tareas a sus alumnos, a excepción de actividades concretas para trabajar en el aula en un momento determinado. Este docente hizo un planteamiento general de actividades al comienzo de cada tema, especialmente el día en que les entrega las hojas con actividades, indicándoles que las “fueran haciendo”, tanto de esa hoja como del libro de texto, y que fueran preguntando las dudas o dificultades que les surgieran. Así, este docente nos indicó que es responsabilidad de los alumnos la realización de las tareas del tema.

Por el contrario, los Docentes 2 y 3 sí que plantearon actividades concretas a los alumnos con regularidad. El Docente 3 intentaba hacerlo todos los días y generalmente como “deberes” para trabajarlos fuera del aula, mientras que el Docente 2 los solía plantear tanto para desarrollar en el propio aula como fuera de ella (a modo de “deberes”), y en periodos concretos del tema. Así, en las clases de este docente existe una distinción clara entre las clases dedicadas a la exposición de contenidos teóricos y las clases destinadas a la resolución de actividades.

Relacionado con lo anterior, el planteamiento de actividades para que fueran desarrolladas en la propia aula por parte del Docente 2 hizo que algunos días existieran amplios periodos de trabajo práctico individual de los alumnos en el aula. En esas clases, el docente intentaba vigilar y supervisar el trabajo de cada uno de los estudiantes, y proporcionarles una guía o ayuda personalizada según las dificultades que detectara. Por el contrario, el trabajo práctico de los alumnos en el aula fue muy reducido en la clase del Docente 1 y las dos aulas de la Docente 3, puesto que fue poco habitual el planteamiento de actividades para que los alumnos las trabajaran en la propia aula. Además, en esos casos, rápidamente se comenzaba con una resolución conjunta de las mismas, con la ayuda del profesor.

Los modos de corrección de las actividades también evidenciaron algunas diferencias entre docentes, tanto en qué actividades se corregían como en la forma de corregir éstas.

La falta de propuestas explícitas de actividades por parte del Docente 1 hizo que los ejercicios fueran corregidos únicamente a petición expresa de los alumnos. En la parte inicial de la mayoría de las sesiones de clase, este docente preguntaba a los alumnos si tenían alguna duda o dificultad en alguna de las actividades que hubieran intentado. Por su parte, en el aula del Docente 2 se corregían bastantes de las actividades que este docente planteaba, pero no todas. Al ser preguntado por este hecho, este profesor justificó su comportamiento atendiendo a dos razones: la primera es que la amplitud del temario del curso y la planificación temporal hacen que no tuviera tiempo suficiente para corregir todas las actividades propuestas; la segunda es que consideraba que con ese comportamiento fomentaba el desarrollo de una madurez en el alumno para discernir si una actividad intentada estaba correctamente resuelta o no. En las dos aulas de la Docente 3, esta profesora intentaba corregir todas las actividades que proponía, preguntando a los alumnos en algunas sesiones de clase si quedaban actividades propuestas pendientes de corregir, para realizar la misma.

En relación al modo de corregir las tareas, el propio Docente 2 era el que corregía siempre las actividades en su aula. Por el contrario, en las otras tres aulas se intentaba que fueran los estudiantes los que corrigieran las tareas, bajo la supervisión del docente. No obstante, en algunos casos (actividades más complejas o en sesiones con menos tiempo disponible para la corrección de tareas) son los propios docentes quienes realizan la corrección. En estas correcciones, fue relativamente frecuente el comentario de la Docente 3 a sus alumnos remarcando la importancia de que escribieran los diferentes pasos de que constaba la resolución de los ejercicios, y no únicamente la comprobación del resultado obtenido.

III.2.3. DESARROLLO DETALLADO DE LAS SESIONES DE CLASE EN CADA AULA PARTICIPANTE

En los Anexos B.2 a B.5 (todos ellos contenidos en el CD adjunto a esta memoria) se recoge un desarrollo detallado de las diferentes sesiones de este bloque en cada una de las cuatro aulas participantes. En concreto, el Anexo B.2 para el desarrollo del Docente 1, el Anexo B.3 para el del Docente 2, el Anexo B.4 para el de la Docente 3 en la clase Científico-Tecnológica y el Anexo B.5 para el de esta misma profesora en la clase de Ciencias Sociales. Dicho desarrollo se apoya en el diferente tipo de información y datos recogidos, que nos permiten conocer los detalles principales y relevantes de lo sucedido en cada sesión.

La información fundamental que nos sirve para desarrollar esa labor son los diarios desarrollados por cada docente con la información fundamental de cada sesión. Estos diarios fueron elaborados por los docentes a petición del EI. Los Docentes 1 y 2 han desarrollado esos diarios de un modo personal, tras indicarles qué aspectos eran para nosotros más importantes. En el caso de las aulas del Docente 3, esto se realizó a través de un guion[17] de la clase que fue elaborado por el EI, y que era rellenado por la docente en cada una de las sesiones. En todos los casos se remarcó a los docentes cuál era la información fundamental que debían recoger, en particular: diferentes momentos de la sesión, contenidos teóricos tratados y forma de abordarlos, procesos de corrección de actividades, propuesta de actividades, otros aspectos relevantes sobre la sesión.

Además, algunos de los días acudimos como observadores (observación no participante) a las sesiones de los docentes, en los que recogíamos la información fundamental de lo sucedido en la sesión y conversábamos de manera informal con los docentes sobre el desarrollo del estudio y el transcurso de las clases del bloque.

La información anterior, junto con la interpretación del contenido de los cuadernos de los alumnos (especialmente en aquellas sesiones en los que la información proporcionada es más escasa), nos han ayudado a completar estos desarrollos del bloque en cada una de las cuatro aulas.

[17] Ese guion de la clase elaborado por el EI puede verse en el Anexo B.1 de esta tesis doctoral (en el CD adjunto).

Además de la información sobre el desarrollo de las sesiones, en los Anexos B.2 a B.5 también se explicitan los contenidos teóricos explicados en la sesión. En la presentación de los mismos se utiliza la división en cuatro tipos de contenido que hemos utilizado, derivada del marco teórico de referencia para analizar el contenido matemático (subapartado III.3.1) y que explicamos en el capítulo IV (apartado IV.3). Asimismo, en esos Anexos también se presentan los aspectos prácticos de mayor interés: actividades propuestas (tanto posteriormente corregidas como no corregidas) y mejoras significativas en los procesos de corrección de las actividades. Esta información ha tenido una importancia vital en el proceso de análisis de los cuadernos de los alumnos, atendiendo a la plantilla de análisis desarrollada a tal efecto.

III.3. IDEAS TEÓRICAS DE REFERENCIA PARA DESARROLLAR LA PLANTILLA DE ANÁLISIS DE LOS CUADERNOS

En este apartado vamos a exponer las ideas teóricas fundamentales que han tenido un papel de referencia en el desarrollo de la plantilla de análisis de los cuadernos. Estas ideas, junto con los aspectos de interés detectados en el propio progreso del análisis de los documentos, han sido los pilares para la reformulación y la evolución de dicha plantilla, a partir de la construida inicialmente en el TFM (capítulo II), y cuya versión final se encuentra en el capítulo IV. No obstante, y dado que la plantilla está destinada para un análisis global de los cuadernos, no todas las ideas se verán reflejadas explícitamente en dicho marco; pero sí que serán objeto para la realización de algunos análisis concretos posteriores, centrados en algunos aspectos que se consideren de especial importancia o de especial interés.

Estructuraremos las ideas fundamentales por subapartados. Varios de ellos están relacionados con un conjunto de métodos de investigación del grupo “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico y Algebraico” (FQM-193) de la Universidad de Granada. Se conoce con el nombre de *método de análisis didáctico* a un conjunto de conceptos y de métodos de análisis que buscan fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y la puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos específicos (Gómez, 2007; Rico, 2013; Rico *et al*., 2013). Este análisis engloba cinco análisis específicos que se complementan entre sí y que son, por orden, el análisis conceptual, el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de la instrucción y el análisis evaluativo (Rico *et al.*, 2013, pp. 16-20). En nuestra investigación nos serán especialmente útiles dos de esos análisis: el *análisis* *de contenido* y el *análisis cognitivo*, de los que recogeremos varias ideas para nuestro marco de análisis de los cuadernos.

Así, el primer subapartado se centra en el análisis de contenido, mientras que el segundo se dedica a un aspecto específico del marco de análisis anterior que ha supuesto un pilar importante en nuestra investigación: los sistemas de representación de los objetos matemáticos. En el tercer subapartado se escriben algunas ideas sobre el análisis cognitivo y de qué modo nos han servido en nuestro estudio. Por último, en el cuarto subapartado se recuerdan algunas ideas sobre la importancia de la escritura en matemáticas (aspecto sobre el que ya se ha escrito en el apartado I.3) y varios marcos posibles para analizar la escritura de un alumno en matemáticas.

III.3.1. ANÁLISIS DE CONTENIDO EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR

En este subapartado desarrollaremos las ideas teóricas principales del marco desarrollado por Rico y colaboradores (FQM-193) para el análisis específico de contenido matemático.

El análisis de contenido matemático escolar parte de las ideas y técnicas generales de análisis de contenido que se han expuesto en el apartado III.1, junto con el análisis conceptual (Gómez, 2007). A partir de ambos aspectos, y apoyado en una larga tradición investigadora en Didáctica de la Matemática, este grupo ha desarrollado una serie de herramientas y métodos específicos de análisis que tienen en cuenta que el contenido que se está analizando no es un contenido cualquiera, sino que es un contenido matemático, y desde una perspectiva escolar. La siguiente frase, tomada de Picado y Rico (2011), muestra esa filosofía: “El análisis de contenido de un texto estará centrado en subrayar y explicar determinados aspectos de las matemáticas escolares que, desde el punto de vista didáctico, son de interés para una investigación” (Picado y Rico, 2011, p. 12).

Así, para el grupo FQM-193, el análisis de contenido es “una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las matemáticas escolares” (Rico *et al*., 2008, p. 9). En ese sentido, Rico (2013) indica lo siguiente:

> El análisis de contenido se ha venido utilizando en educación matemática como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que

> aparecen en un texto (discurso del profesor, textos escolares y producciones escolares para la detección de sesgos). (p. 18).

Por tanto, este método sirve para establecer y estudiar la especificidad de los conceptos y procedimientos que conforman un texto matemático escolar (Rico, 2013), ya sea alguno de los temas del propio currículo de matemáticas (como puede verse en Rico *et al*., 2008, encaminado a la planificación y el diseño de unidades didácticas) o libros y manuales escolares (tesis doctorales de Maz-Machado, 2005, y de Picado, 2012, y publicaciones derivadas de ellas, en trabajos desarrollados desde una perspectiva histórica). En el trabajo de tesis doctoral que aquí se presenta también se analizan textos derivados de la práctica escolar, como son los cuadernos de matemáticas de los alumnos y el tipo de producciones que componen los mismos.

Bajo la perspectiva de estos autores, el análisis de contenido matemático se realiza a través de tres grandes categorías de análisis, que se derivan de su noción de significado de un concepto en la matemática escolar. Esta noción toma como base las ideas de Frege (1998, citado en Rico, 2012), que propone un triángulo semántico diferenciando entre el *signo*, el *sentido* y la *referencia* de un término; una distinción similar al triángulo propuesto por Steinbring (1989): signo-objeto-concepto. Gómez (2007) y Rico (2012) adaptan esas ideas anteriores para proponer la distinción de tres dimensiones en el análisis del significado de un concepto matemático en educación:

- La *estructura conceptual*, sistema organizado de definiciones del concepto y de relaciones entre ellas, propiedades, proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- La *fenomenología*, compuesta por aquellas situaciones, contextos o problemas que están en el origen del concepto y que le dotan de sentido y de un carácter funcional.
- Los *sistemas de representación*, es decir, los signos y gráficos que hacen presente un concepto matemático, y que permiten pensar y comunicar sobre él, así como relacionarlo con otros conceptos.

Esas tres dimensiones de análisis se reflejan en el triángulo semántico siguiente (Figura III.7), en el que la estructura conceptual se correspondería con lo que Frege (1998, citado en Rico) llamaba referencia, la fenomenología se correspondería con el sentido y los sistemas de representación con los signos.

Figura III.7. Triángulo semántico de un concepto matemático escolar (adaptado de Rico, 2012, p. 52).

Como indican Rico *et al*. (2008), los conceptos adquieren objetividad y potencial argumentativo cuando forman parte de estructuras, que se constituyen a partir de conexiones internas en los sistemas de conceptos matemáticos. Teniendo esto en cuenta, las tres dimensiones o categorías para analizar los significados de un concepto matemático se trasladan al análisis de un contenido matemático escolar, entendido este último como una estructura formada por diferentes conceptos, relaciones entre ellos y procedimientos asociados. Así, en los trabajos de Rico y colaboradores (Gómez, 2007; Rico *et al.*, 2008; Picado y Rico, 2011; Rico, 2013; Rico *et al.*, 2013) se consideran tres grandes categorías para analizar un contenido matemático escolar, que son presentadas y explicadas a continuación.

La primera categoría es la *estructura conceptual* del contenido analizado. Esta estructura se entiende como un sistema organizado de conceptos y de procedimientos, junto con las relaciones existentes entre ellos, sus propiedades y criterios de veracidad, que dan lugar a la estructura matemática que los organiza y justifica, y que aportan las referencias necesarias para establecer sus significados.

En la estructura conceptual se distinguen dos grandes bloques de conocimientos: conceptual y procedimental. Se contemplan tres niveles de conocimientos de tipo conceptual, de complejidad creciente: los hechos (nivel básico, conformado por los términos, las notaciones, los convenios y los resultados), los conceptos y las estructuras. Asimismo, se establecen también tres niveles de conocimiento de complejidad creciente dentro del conocimiento de naturaleza procedimental: las destrezas, las formas de razonamiento y las estrategias.

En una estructura conceptual pueden existir *focos conceptuales*, que son una "agrupación específica de conceptos, estrategias y estructuras, que adquiere importancia especial ya que expresa, organiza y resume agrupamientos coherentes de los contenidos" (Rico *et al*., 2008, p. 11). En los focos es posible construir un *mapa relacional de conceptos y procedimientos*, una especie de mapas conceptuales donde se establecen los nexos entre el conocimiento conceptual y el procedimental de un mismo núcleo de conceptos básicos. Estos mapas para los diferentes focos permiten establecer una jerarquía de nociones que se conectan mediante segmentos o posiciones conectadas (a veces identificadas con etiquetas), mostrar los nodos principales (con mayores conexiones), visualizar diferentes modos coherentes de estructurar las nociones y contribuir al entendimiento e interpretación de una estructura conceptual determinada (Rico *et al*., 2008, p. 12).

La segunda categoría es la *fenomenología* del contenido que se está analizando. La fenomenología incluye aquellas situaciones, contextos o problemas que dan origen a la estructura conceptual del contenido analizado, así como aquellas situaciones en las que esta estructura se presenta o se aplica. Todas esas situaciones, contextos o problemas dotan de sentido el aprendizaje de una determinada estructura conceptual, y la hacen funcional, al servir como herramienta para modelizar, organizar y comprender dichos fenómenos.

Dentro de las situaciones en las que un concepto o una estructura conceptual puede ser utilizado, se pueden distinguir varios tipos según la referencia al medio en que se sitúen. Por ejemplo, situaciones del medio natural, cultural, científico o social; o la distinción que se realiza en PISA 2003 entre situaciones personales, educativas o profesionales, públicas y científicas (OCDE, 2004, p. 35). Asimismo, los contextos son los marcos dentro de los cuales un concepto o una estructura conceptual atienden a unas funciones y responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento. Es decir, con los contextos se hace referencia a los modos en que se usa un determinado contenido (Rico *et al*., 2008, p. 18).

La tercera categoría son los *sistemas de representación* del contenido analizado. Los sistemas de representación son todas aquellas expresiones, signos, símbolos o gráficos a través de los cuales se hace presente un contenido matemático, y que permiten el estudio y la comunicación de las ideas matemáticas. Los sistemas de representación muestran diferentes facetas de un mismo concepto u objeto, así como posibles relaciones del mismo con otros.

Debido a la especial importancia que tienen los sistemas de representación en el desarrollo del aprendizaje de los conceptos matemáticos y a la alta importancia que hemos dado a los sistemas de representación en nuestro análisis de los cuadernos de los alumnos, va a dedicarse una parte específica del marco teórico de referencia a la explicación de las ideas fundamentales sobre la representación de objetos matemáticos, las cuales son compartidas por el EI.

III.3.2. REPRESENTACIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS: SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Comenzamos este subapartado destacando el siguiente extracto de Pecharromán (2013), sobre la naturaleza y existencia de los objetos matemáticos, idea que compartimos:

> Los objetos matemáticos tienen existencia real pero no material. Su descubrimiento no es una experiencia exclusivamente física o sensitiva, sino que es necesario que intervenga la razón. Los objetos matemáticos son producto de la razón, porque son percibidos por ella, y esta percepción hace que se les pueda considerar objetos reales. (p. 123).

Es decir, como afirma Duval (1999, 2006), los objetos matemáticos no son accesibles físicamente como tales, al no tener existencia material. Esta característica supone una diferencia importante de los objetos matemáticos con respecto a otro tipo de objetos. De este hecho se deriva la necesidad de utilizar algún tipo de signo que sirva para expresar y hacer presente el objeto matemático, que nos permita “acceder” al mismo, reconocerlo y poder comunicar ideas sobre el él (Castro y Castro, 1997; Duval, 1999; Pecharromán, 2013). Estos signos, en la comunidad investigadora en Educación Matemática, han recibido mayoritariamente el nombre de *representaciones* (Rico, 2009).

Por tanto, en matemáticas, como en cualquier dominio conceptual, determinados signos convencionales y contextualizados hacen presentes los conceptos (Puig, 1999; citado en Rico, 2009). Como indica Pecharromán (2013), esa creación y adopción del signo es dirigida, fundamentalmente, por la función organizativa del objeto que quiere expresarse, la naturaleza del contexto y el conocimiento existente, y las propiedades con las que se le quiere caracterizar. Así, esos signos o representaciones se dotan de sentido dentro de un sistema de significados y relaciones (Rico, 2009). El carácter sistémico que tienen las representaciones de un determinado concepto o estructura matemática hace que, en muchos casos, se hable de *sistemas de representación*.

Existe una diferenciación común en la literatura (Hiebert & Carpenter, 1992; citado en Rico, 2009; Castro y Castro, 1997; Duval, 1999) entre dos tipos de representaciones:

- *Representaciones externas* (o *representaciones semióticas*, en términos de Duval, 1999): son representaciones que tienen un soporte físico tangible, destinadas a la expresión y a la comunicación de objetos e ideas matemáticas.

- *Representaciones internas* (o *representaciones mentales*; Duval, 1999): imágenes mentales que nos formamos sobre los objetos matemáticos y que permiten a la mente operar sobre ellas.

Existe una dificultad obvia para acceder a las representaciones internas, por su naturaleza y su carácter inobservable (Rico, 2009). Sin embargo, según indican tanto Castro y Castro (1997) como Duval (1999), existen relaciones claras entre ambos tipos de representaciones, puesto que las representaciones externas sirven de estímulo para los procesos cognitivos y de construcción de imágenes mentales, mientras que estas imágenes se exteriorizan a través de la utilización de representaciones externas. Muchas de las investigaciones centran su atención en las representaciones externas, al ser las representaciones accesibles. Por ejemplo, en nuestro estudio sobre los cuadernos serán el tipo de representaciones que podremos analizar: aquellas que quedan reflejadas en los cuadernos de los alumnos.

Castro y Castro (1997, pp. 101-102) clasifican las representaciones externas en dos grandes grupos o familias:

- *Representaciones simbólicas*: Son representaciones de carácter alfanumérico, digitales y que tienen una sintaxis sujeta a unas determinadas reglas de procedimiento.

- *Representaciones gráficas*: Son representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico y cuya sintaxis está sujeta a reglas de composición y convenios de interpretación.

Los dos grandes grupos de representaciones se reflejarán en el marco elaborado para el análisis de los cuadernos de matemáticas.

Como ya hemos recalcado anteriormente, el carácter no material de los objetos matemáticos obliga a que el trabajo y la actividad matemática se lleve a cabo utilizando algún sistema de representación del mismo (Duval, 2006). Es decir, la actividad matemática se lleva a cabo a través de las representaciones. Sin embargo, el trabajo en matemáticas no se reduce a los sistemas estructurados de codificación mediante signos; sino que también permite la manipulación y el procesamiento de estas representaciones (Rico, 2009). Esa actividad está dirigida por la naturaleza de los objetos matemáticos, sus propiedades y las relaciones del mismo con otros objetos. Así, la actividad matemática puede ser entendida como una sucesión de acciones o de transformaciones sobre los diferentes sistemas de representación de un objeto (Duval, 1999; Pecharromán, 2013). Estos mismos autores indican la presencia de dos grandes tipos de transformaciones:

- *Tratamiento* o *transformación interna*: Transformación sobre un objeto matemático que se produce dentro de un determinado sistema de representación del mismo, sin salir de él. Este tipo de transformaciones suelen dar lugar a reglas o a algoritmos que recogen procedimientos asociados a un objeto dentro de un sistema de representación concreto. Un ejemplo clásico sería la realización de transformaciones para escribir una ecuación de segundo grado en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y la aplicación de la fórmula que nos permite obtener las soluciones de la misma.

- *Conversión* o *transformación externa*: Transformación de un objeto o de sus propiedades de un sistema de representación a otro diferente. Un ejemplo sería la escritura de la expresión simbólica de una función cuadrática a partir de la representación gráfica de la misma.

El primer tipo de transformaciones pueden llegar a tener un carácter mecánico; sin embargo, el segundo tipo de transformaciones son mucho más complicadas, produciéndose, en términos de Duval (1999, 2006) un salto cognitivo con respecto a las anteriores. Pueden encontrarse dos causas que justifican la afirmación anterior:

- La dificultad para conocer y poder discriminar aquello que es específico del sistema de representación utilizado y aquello que es propio del objeto que se está representando (Duval, 2006).

- La necesidad de reconocer el objeto matemático en diferentes sistemas de representación, de identificar las diferentes “componentes elementales” del objeto en dichos sistemas y de conocer la relación existente entre ellas a partir de la naturaleza del objeto (Pecharromán, 2013).

Todo ello lleva a Duval (1999, 2006) a afirmar que la comprensión de un concepto u objeto matemático surge de la realización de este tipo de conversiones, poniendo sobre dichas conversiones el umbral de comprensión de un concepto matemático.

En este sentido, una limitación común que suele producirse en las primeras fases de aprendizaje de un concepto matemático es que se asocie o se identifique un objeto matemático con sus representaciones. Es fundamental conseguir distinguir el objeto de sus representaciones (Castro y Castro, 1997; Duval, 1999; Rico, 2009; Pecharromán, 2013), es decir, que el objeto trascienda o se independice de los medios de expresión o representación del mismo. Cada una de las diferentes representaciones de un objeto matemático destaca o enfatiza algunos aspectos, a la par que oscurece otros. Sin embargo, en palabras de Pecharromán (2013), es la invariancia entre las diferentes representaciones de un objeto la que aporta la funcionalidad al objeto matemático representado y la que da origen a éste.

Todos los autores anteriores señalan que la adquisición, el dominio y la comprensión integral de un concepto matemático se producen cuando se da la coordinación de, al menos, dos sistemas de representación del concepto de un modo espontáneo y libre de contradicciones. Por ejemplo, Castro y Castro (1997) indican que:

> Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades. (p. 103).

Pecharromán (2013, p. 132) lo expresa en los términos siguientes:

> Cuando el individuo perciba las representaciones del objeto como medios de expresión de un mismo objeto y, por tanto, independice el objeto de sus representaciones, y cuando perciba la funcionalidad que permite su uso y no los usos particulares, el alumno habrá aprendido y comprendido el objeto y será capaz de que se desarrolle este aprendizaje con nueva información sobre él. (p. 132).

Bajo estas premisas, Socas (2007) plantea un marco de aprendizaje de los conceptos matemáticos, el *Enfoque Lógico Semiótico*, considerando ese aprendizaje como un proceso de abstracción de los sistemas de representación de dichos conceptos. En este marco se distinguen cuatro acciones sobre las representaciones de los conceptos. Esas acciones son, por orden de complejidad: el reconocimiento de elementos de un sistema de representación, las transformaciones internas dentro de un sistema de representación, las conversiones o transformaciones externas entre diferentes sistemas de representación y las coordinaciones entre diferentes sistemas de representación.

El desarrollo de estas acciones se utiliza para describir tres estadios o fases de aprendizaje de un concepto: estadio *semiótico*, *estructural* y *autónomo*. Este marco ha sido utilizado con éxito para plantear diseños de enseñanza atendiendo a estos estadios. Un ejemplo es la tesis de Pecharromán (2008), donde se realiza un diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones y se analiza su implementación y puesta en práctica en base a los aprendizajes desarrollados por los alumnos a partir de sus conocimientos previos.

III.3.3. ALGUNAS IDEAS SOBRE EL ANÁLISIS COGNITIVO

En el marco de análisis didáctico desarrollado por el grupo FQM-193 de la Universidad de Granada, el *análisis cognitivo* se sitúa como un paso posterior al análisis conceptual y al análisis de contenido, dentro de un ciclo de análisis didáctico de preparación, planificación, implementación y evaluación de, por ejemplo, una unidad didáctica de un determinado contenido (Gómez, 2007).

Según leemos en Rico (2013), el análisis cognitivo se sitúa en la fase de planificación de una unidad didáctica o de una actuación docente, y “trata de organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico” (p. 23). Este análisis cognitivo viene determinado por tres aspectos o categorías fundamentales que lo estructuran (Lupiáñez, 2009, 2013; Rico, 2013):

- Las *expectativas de aprendizaje*, es decir, aquellos aspectos que el profesor espera que los alumnos aprendan en un determinado nivel educativo, según las prioridades cognitivas, los objetos específicos y las competencias que los docentes establecen para un determinado tópico, y los modos en que las organizan.

- Las *limitaciones de aprendizaje*, centrado tanto en las dificultades (bien sean hipotéticas o empíricas, conjeturadas o conocidas) como en los posibles errores que pueden surgir durante el proceso de aprendizaje del alumno, desde una perspectiva a apriorística, es decir, previamente a la implementación de la unidad asociada al tópico.

- Las *demandas cognitivas* u *oportunidades de aprendizaje* reflejadas en el conjunto de tareas escolares que un docente planifica para contribuir a mostrar el logro en los alumnos de las expectativas de aprendizaje y la superación de las dificultades asociadas al tópico o a un objetivo específico. Para el estudio de estas demandas cognitivas u oportunidades de aprendizaje juegan un papel fundamental las tareas matemáticas, sus variables, su relación con los contenidos y con las expectativas de aprendizaje establecidas.

Este grupo de investigación ha centrado el estudio de este marco de análisis cognitivo ligado a la planificación de unidades didácticas o de los planes de formación de profesorado. No obstante, en esta tesis doctoral nos inspiramos en algunas de sus ideas para nuestro marco de análisis de los cuadernos, especialmente en qué rastro podríamos encontrar en los cuadernos de los alumnos sobre alguna de las categorías.

En el desarrollo del marco teórico para el estudio exploratorio (Capítulo II de esta tesis) ya hemos tenido en cuenta una de las tres categorías: la asociada a las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas. No obstante, no desde un punto de vista apriorístico y de anticipación o prevención de lo que podría suceder en un aula, sino *a posteriori*, es decir, una vez que esas dificultades ya se han plasmado a través de diferentes errores (Socas, 1997) en los cuadernos de los alumnos. Insistimos en la visión del error como algo legítimo dentro de un proceso de aprendizaje y como algo inherente al avance del mismo (Rico, 1995). No obstante, la visión del error es diferente en distintas teorías de aprendizaje (González, Gómez y Restrepo, 2015). Mientras que el conductismo ve el error como una deficiencia del conocimiento a corregir, el constructivismo asocia el error a la aplicación de un conocimiento en un contexto inadecuado. Así, bajo este último paradigma, el avance se promueve a través del desequilibrio de las estructuras cognitivas y la creación de conflictos cognitivos que impliquen una modificación o una adaptación del conocimiento previo existente.

No todos los errores tienen la misma procedencia o naturaleza, como pone de manifiesto el siguiente extracto de Socas (1997):

> El error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste. (p. 125).

Como se indica en Lupiáñez (2009) y en González *et al*. (2015), los estudios sobre la detección de errores habituales, su categorización y la interpretación de sus posibles causas han sido muy frecuentes en la investigación en Educación Matemática; generalmente centrados en tópicos específicos o en el desarrollo de procesos o competencias concretas. En el marco teórico del estudio exploratorio[18] ya hemos reseñado algunas clasificaciones de errores como la de Radatz (1979), Astolfi (1999) o la clasificación de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas de Socas (1997). En la versión inicial del marco (Capítulo II) una de las cinco dimensiones estaba centrada en la presencia de errores en los cuadernos de los alumnos. En la versión evolucionada esto se mantiene, pero cambiando o refinando algunas variables e indicadores. Destacamos aquí algunas ideas que hemos tenido en cuenta para estructurar la dimensión.

Por una parte, tendremos en cuenta el extracto anterior de Socas (1997, p. 125), que pone de manifiesto que no todos los errores pueden ser considerados como igualmente graves, puesto que no es equiparable un despiste o una errata con un error que ponga de manifiesto un esquema cognitivo inadecuado, asociado a la estructura conceptual de un concepto.

También va a prestarse especial atención a algunos aspectos destacados por varias de estas clasificaciones. Por ejemplo, a las dificultades asociadas al lenguaje matemático, que destacan Radatz (1979) y Socas (1997), tanto en relación al lenguaje verbal (y las diferencias entre el lenguaje habitual y el de las matemáticas, las confusiones semánticas o las dificultades en la comprensión de textos matemáticos) como al lenguaje simbólico o al lenguaje gráfico, donde los signos tienen una determinada significación y están sometidos a una serie de reglas precisas. También pondremos nuestra atención en la presencia de métodos o procedimientos, generalmente asociados a antiguos saberes, que se aplican erróneamente o que son irrelevantes en situaciones nuevas (Radatz, 1979; Socas, 1997).

Los aspectos asociados a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y los errores a los que dan lugar ponen su énfasis en los aspectos negativos o en "patologías" del aprendizaje, y pueden reflejarse en las producciones desarrolladas por los alumnos en sus cuadernos. Sin embargo, el análisis cognitivo, tal y como éste es concebido, no tiene la intención de fijar su atención únicamente en estos aspectos negativos, sino también en aspectos positivos del aprendizaje, como en lo que esperamos que los alumnos sean capaces de aprender o en las fortalezas cognitivas que evidencian o se derivan de esas expectativas (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009).

[18] Este marco puede encontrarse en el subapartado II.3.2 de esta tesis doctoral, en lo relativo a la dimensión 5.

Por tanto, consideramos que nuestro marco no puede centrarse únicamente en los errores que evidencien las producciones en los cuadernos, sino que también debe focalizar su atención en aquellas fortalezas de la cognición o en aquellos aspectos asociados al aprendizaje de los que los alumnos dejen rastro explícito en sus cuadernos. Para ello, en el marco de análisis nos fijaremos en aquellas anotaciones que escriben los alumnos en sus cuadernos más allá de las explicaciones teóricas del docente o de la indicación de los pasos seguidos en las actividades. Nos referiremos a dichas anotaciones como *comentarios*. Estos, generalmente, serán de tipo verbal, pero también pueden ser de tipo simbólico, icónico…

Aunque los tipos de comentarios que se espera encontrar pueden ser muy variados, algunos de ellos sí que pueden marcar o evidenciar explícitamente fortalezas de la cognición en el estudiante. Ejemplos pueden ser la escritura de comentarios que pongan de manifiesto relaciones entre diferentes conceptos o diferentes aspectos, comentarios destacando conceptos prioritarios dentro de un tema o aspectos organizativos propios de la estructura conceptual de un concepto. También puede ser que el alumno recoja en su cuaderno las expectativas de aprendizaje que tenía un docente en una determinada clase o para un determinado tema. Del mismo modo, puede escribir anotaciones sobre el aprendizaje de un determinado tópico, bien derivadas del discurso del profesor o de índole personal, asociado a la propia comprensión que está desarrollando el alumno, o a posibles dudas. Estos últimos aspectos, además, denotarían un mayor desarrollo del cuaderno como un instrumento para el alumno dentro del dominio privado (Fried & Amit, 2003). La variedad prevista para los comentarios que los alumnos pueden registrar en sus cuadernos hace que consideremos de interés un estudio de los comentarios encontrados, su tipología y los diferentes propósitos de los mismos para los alumnos participantes. Este análisis en profundidad será recogido dentro del capítulo VII de la tesis doctoral.

Asociado a los errores que pueden encontrarse en el cuaderno de un alumno, otro aspecto que se considera de gran importancia es el reconocimiento y la identificación por cada alumno de los errores presentes en su cuaderno. Dentro de un paradigma constructivista, más importante que la presencia de un error es el tratamiento o la estrategia asociada al mismo que haga que el error sirva para el desarrollo del aprendizaje del alumno (Socas, 1997; González *et al*., 2015). Así, en nuestro análisis de los cuadernos también prestaremos atención al hecho de que los alumnos, generalmente durante la corrección de actividades, sean capaces de reconocer o de identificar posibles errores que hayan cometido en su desarrollo, y los modos de actuar asociados (diferentes niveles de indicación y de explicación del error, posible rehacimiento de la actividad…) En el caso de los cuadernos, y derivado de la metodología desarrollada por los docentes, estas acciones serán responsabilidad del propio alumno en la inmensa mayoría de las ocasiones.

III.3.4. ESCRITURA DE LOS ALUMNOS

Otro de los aspectos importantes que hemos considerado como relevantes en nuestro análisis de los cuadernos es la escritura que los alumnos realizan en el mismo, tanto la escritura en lenguaje natural como la escritura utilizando lo que Pimm (1999) y Nesher (2000) denominan *discurso mixto*, es decir, en el que se combina el lenguaje matemático con una verbalización asociada a la terminología matemática.

Por una parte, y en relación al lenguaje natural que encontremos en los cuadernos de los alumnos, vamos a adaptar las categorías propuestas por Morales (2004, p. 40) para revisar un texto escrito, teniendo en cuenta tanto la calidad de la redacción del texto como la corrección ortográfica del mismo.

En relación a la ortografía de un texto, este autor distingue cuatro aspectos a considerar: el uso adecuado de las letras (utilización de mayúsculas y utilización adecuada de grafemas homófonos, como b y v), el uso adecuado de las tildes, el uso adecuado de la puntuación y la separación adecuada de las palabras.

En relación a la calidad en la redacción del texto, nos quedamos con los dos primeros aspectos que señala: el vocabulario, por una parte, y la gramática y cohesión, por otra. No hemos tenido en cuenta el tercero de los aspectos, la estructuración del texto, dado que la metodología docente no ha fomentado la composición de textos escritos de cierta extensión por parte de los alumnos. Para analizar el vocabulario de un texto, Morales (2004) distingue dos aspectos: la propiedad del vocabulario analizado (es decir, la adecuación de las palabras y su significado al carácter del texto) y la variedad del mismo. Este mismo autor, para el estudio de la gramática y la cohesión de un texto, considera tres aspectos: el respeto de la concordancia en género, número y persona; el uso adecuado de palabras que sustituyen o hacen referencia a otras (pronombres, determinantes demostrativos o relativos, sustitutos léxicos) y el uso adecuado de elementos conectores (preposiciones, conjunciones, organizadores).

Los aspectos anteriores son aplicables al estudio de cualquier texto escrito. Sin embargo, hay que tener presente que, en este caso, la escritura de los alumnos se está generando dentro de una asignatura: matemáticas. En el capítulo I de la tesis doctoral, en el que se presentan antecedentes relacionados con este estudio, hemos dedicado un apartado completo (apartado I.3) a analizar la comunicación y la escritura en matemáticas, a través de los estudios que han tratado esta temática. Dentro de él, el subapartado I.3.2 explica los modos en los que la comunicación matemática contribuye al desarrollo del aprendizaje matemático; mientras que el subapartado I.3.3, con ese mismo propósito, centra su atención en la escritura en matemáticas como forma particular de comunicación, cuyas características especiales ayudan a potenciar algunos de los beneficios. Un gran número de investigaciones han puesto de manifiesto el potencial que tiene la escritura de un alumno en matemáticas para el progreso en el aprendizaje de esta materia. Remitimos a la lectura de estos subapartados para conocer más en detalle dicho potencial, que nos lleva a considerar el análisis de la escritura de los alumnos en sus cuadernos de matemáticas como un aspecto a tener presente en nuestro estudio.

Nesher (2000, p. 119-120) realiza una distinción interesante entre lo que denomina *hablar matemáticamente* y *hablar de matemáticas*. Por *hablar matemáticamente* esta autora se refiere al uso, la manipulación y la aplicación de ideas matemáticas de acuerdo con la sintaxis del lenguaje matemático. Por *hablar de matemáticas* entiende la utilización del lenguaje natural como un medio y un metalenguaje para expresar pensamientos sobre las matemáticas, pero en las que el vocabulario, la gramática, la sintaxis y la semántica son las propias del lenguaje natural. Entre medias de ambos se sitúa, frecuentemente, un *discurso mixto* donde, aunque se utilice el lenguaje natural, el contenido se expresa, la mayor parte del tiempo, en lenguaje matemático.

Consideramos que esta distinción es interesante. Por una parte, es obvio que el lenguaje matemático formal y el lenguaje natural juegan un diferente papel y se rigen por reglas distintas. Sin embargo, el lenguaje formal en matemáticas apenas comienza a ser introducido durante el Bachillerato. Es por ello que los alumnos deben recurrir al lenguaje natural como metalenguaje para describir, explicar, argumentar… Ese uso del lenguaje natural como medio para expresar contenidos o procesos matemáticos también es diferente del uso del lenguaje natural para expresar, por ejemplo, pensamientos, temores o miedos hacia la propia materia.

En el contexto en el que se ha desarrollado este estudio, con una metodología basada en la exposición de los contenidos teóricos por parte de los docentes y la posterior propuesta de tareas a los estudiantes para su realización[19], la presencia de actividades o tareas que demandaran la utilización de escritura por parte de los alumnos ha sido muy reducida. No obstante, los estudiantes han podido utilizar la

[19] Más información en el apartado III.2 de esta tesis doctoral.

escritura en sus cuadernos en una mayor o menor medida, para enfatizar diferentes aspectos y con diferentes propósitos. Además, esa utilización de la escritura por el alumno podría estar influenciada por lo que significan para él las matemáticas o "hacer matemáticas".

Tanto en el capítulo I como en el marco teórico del estudio exploratorio (Capítulo II) ya se recogían las ideas de Britton *et al*. (1975) sobre los diferentes tipos de escritura (una *escritura hecha para el intercambio* en contraposición con una *escritura expresiva*) y de Fried y Amit (2003) sobre la distinción entre las actividades matemáticas dentro de un *dominio público* o de un *dominio privado*. Estas distinciones seguirán siendo útiles en este contexto de investigación, en el que no ha existido ninguna restricción metodológica por los docentes participantes que haya situado el cuaderno dentro de un dominio público, pero en el que el nivel de implicación de los alumnos para que su cuaderno se sitúe como un instrumento dentro del dominio privado ha podido ser muy diferente.

Es decir, puede ser que el cuaderno, en una mayor o menor medida, refleje la utilización del mismo como instrumento para trabajar y reflexionar de forma personal y autónoma con los conceptos y técnicas tratadas en el aula y el proceso de aprendizaje de los mismos. Este aspecto lleva aparejada la utilización de una escritura de tipo mayoritariamente expresivo, es decir, por el bien del propio escritor, buscando la externalización y la clarificación de sus propios pensamientos (Britton *et al*., 1975). Por ello, en nuestro marco de análisis seguiremos teniendo en cuenta la aparición de intentos de resolución de las tareas, tanto planteadas por el docente como no planteadas por él, la escritura de comentarios de apoyo en ese trabajo de los conceptos y técnicas o la escritura explícita de comentarios asociados a la comprensión y el aprendizaje de estos conceptos y técnicas, dudas…

Pero, además, tendremos presentes las categorías establecidas por Shield y colaboradores (Shield & Swinson, 1994; Shield, 1996; Shield & Galbraith, 1998) para analizar escritura de tipo expositivo de los estudiantes (es decir, escritura en la que los estudiantes deben describir y explicar por escrito algún conocimiento matemático). Estos dos autores desarrollaron el marco para analizar un tipo particular de escritura expositiva (tareas de escritura de cartas), pero las categorías creadas son trasladables al análisis de la escritura focalizada en los contenidos matemáticos que los alumnos pueden desarrollar en sus cuadernos.

Estas categorías ya han sido reflejadas en el capítulo I de esta tesis doctoral (subapartado I.3.5). El marco de análisis creado por estos autores distinguía tres aspectos fundamentales. Recordamos a continuación esos tres aspectos, explicando y justificando el potencial de su aplicación y adaptación en esta investigación.

- La presencia o no de **núcleos**, entendiendo éstos como las definiciones, reglas, procedimientos o expresiones generales que se considera que deben ser aprendidas por el alumno.

Estos núcleos, utilizando la terminología de Lupiáñez (2009), se corresponderían con las expectativas de aprendizaje prioritarias que, para una lección o un determinado tema, establece un docente. Así, es de interés averiguar si un alumno recoge o no estos núcleos en su cuaderno; por ejemplo, al tomar sus notas sobre la presentación de algún tópico.

- Los **aspectos matemáticos** presentes en un texto matemático, según el modo en que sean reflejadas tanto las ideas como los procedimientos matemáticos.

Dentro de esta categoría se distinguen diferentes tipos de aspectos. Un primer tipo son los *aspectos teóricos*, que serían las definiciones, los teoremas o los axiomas a través de los cuales se configura la estructura conceptual de un determinado tópico (utilizando la terminología de Rico y colaboradores para analizar contenido matemático). Un segundo tipo son los *aspectos algorítmicos*, asociados a la explicación de algún método o los pasos a seguir para llevar a cabo una operación o un procedimiento matemático (propio de las destrezas dentro del conocimiento procedimental de un concepto matemático, Rico et al., 2008). Otros dos tipos, con un ámbito de significación más general que los anteriores, son los *aspectos lógicos*, relacionados con los modos de actuar en la utilización de una teoría matemática; y los *aspectos metodológicos*, que recogen heurísticas o reglas generales de actuación. Por último, se considera la presencia de *aspectos convencionales*, asociados a convenios o reglas para nombrar o referirse a elementos.

Consideramos relevante estudiar cuáles de los aspectos anteriormente indicados predominan en el registro de las notas teóricas o en la escritura de un alumno en su cuaderno, puesto que, como indica Pimm (1999), estas preferencias de registro nos pueden indicar qué es lo que los alumnos consideran de mayor importancia en relación a un determinado concepto o contenido matemático, y la posible influencia de esas preferencias en el estudio y el aprendizaje matemático del estudiante.

- Los niveles de lenguaje utilizados.

En este sentido, estos autores plantean dos dicotomías, siguiendo a Van Dormolen (1985, citado en Shield & Galbraith, 1998). Según el lenguaje empleado, distinguen entre un *lenguaje particular*, si es un lenguaje utilizado en el desarrollo de un caso o un ejemplo específico; y un *lenguaje generalizado*, si expresa aspectos generales sobre el significado de un concepto o proceso, es decir, no ligados a un ejemplo concreto. Por otra parte, dentro de cada uno de los dos tipos se distingue entre un *lenguaje procedimental*, si es propio de enunciados de instrucciones "paso a paso" o un *lenguaje descriptivo*, si establece el significado de una idea o la aparición de un objeto.

Al igual que sucedía en la categoría interior, consideramos también relevante estudiar qué tipo de lenguaje se presenta o predomina en el cuaderno de un alumno, que podría indicar una mayor importancia para el estudiante de las anotaciones con esas características.

En adición a las tres categorías anteriores, estos autores también recogen varios tipos de aspectos que clarifican o aumentan la información presentada por un texto escrito, y que permiten relacionar dicho texto con otras informaciones, conocimientos o experiencias, lo que permite dar lugar a una mayor generación de ideas y a una mayor riqueza de los conocimientos. Estos posibles aspectos que pueden servir para enriquecer los posibles núcleos en torno a los cuales gira o se desarrolla un texto matemático son:

- **Enunciar un objetivo** del texto.
- **Ejemplificar** el concepto o procedimiento principal (núcleo) a través de un ejemplo práctico.
- **Justificar** el procedimiento seguido, legitimando dicho procedimiento como correcto a través de la aplicación de principios conocidos.
- **Conectar o enlazar** el núcleo tanto **con los conocimientos previos** como con **ejemplos cotidianos** asociados al mismo.
- Plantear explícitamente al hipotético lector del texto algún **ejercicio práctico** o **pregunta** asociado al contenido del texto.

Algunos de los aspectos destacados por estos autores pueden ser más específicos de la tarea para la cual fueron generados y utilizados como categorías de análisis (la elaboración de una carta). Sin embargo, otros sí que tienen un interés que trasciende a esta tarea concreta utilizada por Shield & Galbraith (1998), y que consideramos relevantes para nuestro análisis. Es el caso de la escritura o no de ejemplos que ilustren un concepto o un procedimiento, de la justificación de un enunciado o de un procedimiento, o la conexión de un contenido con los conocimientos previos del estudiante o con ejemplos cotidianos, bien sea a través del registro de las explicaciones del docente o a iniciativa del propio estudiante, de un modo autónomo. Como hemos comentado antes, la escritura o no de estos elementos puede ser un indicativo de la diferente relevancia que tienen los mismos para los estudiantes.

CAPÍTULO IV

MARCO PARA ANALIZAR CUADERNOS DE MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS

El propósito fundamental de este capítulo es el de explicar el marco para analizar cuadernos de matemáticas que hemos creado en esta investigación y que hemos utilizado para llevar a cabo un análisis global de los mismos, junto con los principales hitos asociados a la evolución del marco a partir del marco inicial que utilizamos en el estudio exploratorio (Capítulo II de la tesis doctoral).

La plantilla de análisis asociada al marco, por sí misma, supone un objeto derivado de la tesis doctoral, y pretende servir como herramienta para poder analizar un cuaderno de matemáticas, bien de forma global o de alguna de sus dimensiones específicas. La aplicación de este marco y los datos derivados del mismo serán la base para avanzar en el cumplimiento del objetivo principal de esta tesis doctoral: el establecimiento de diferentes perfiles de elaboración del cuaderno de matemáticas entre los estudiantes, y su posterior cruzamiento con los diferentes modos de utilizar el mismo (obtenidos a través de entrevistas) y con el rendimiento académico de los alumnos participantes.

Como ya hemos indicado en capítulos anteriores, no se ha encontrado en la literatura ningún instrumento para analizar cuadernos de matemáticas en profundidad, y se ha detectado poca literatura directamente relacionada con el objetivo principal de esta investigación. Así, uno de los desafíos fundamentales ha sido la creación de un instrumento que nos permitiera analizar un cuaderno de matemáticas de forma global. En el proceso de creación del instrumento hemos adoptado una metodología similar a la planteada por Monterrubio y Ortega (Monterrubio, 2007; Monterrubio y Ortega, 2011, 2012) en su proceso de creación de un instrumento para el análisis y la valoración de libros de texto de matemáticas.

El punto de partida ha sido el marco de análisis creado y utilizado en el estudio exploratorio (Capítulo II de esta tesis doctoral). Así, y como ya hemos reflejado en la Figura III.2 del capítulo anterior, dicho marco ha sido reformulado y progresivamente refinado a partir de la lectura y adopción de algunas de las ideas teóricas de referencia explicadas en el subapartado III.3, y de la lectura progresiva de los documentos analizados (fotocopias de los cuadernos de los alumnos participantes), en la que se detectaran aspectos o fenómenos interesantes que no habían sido recogidos previamente, y la presentación de partes del marco en congresos y seminarios y las posibles sugerencias recibidas. La saturación de ese proceso (es decir, la compleción del análisis de todos los documentos sin que se detectaran más fenómenos de interés o la necesidad de realizar algún cambio o modificación en el marco) ha dado lugar a la versión final del marco o plantilla de análisis, que aquí se presenta.

Parte de la estructura de la plantilla de análisis inicialmente creada se ha mantenido a lo largo de todo este proceso. El marco final sigue estando compuesto por cinco dimensiones de análisis distintas. Dentro de cada dimensión, existen varias variables asociadas a la misma, con diferentes indicadores para cada una de las variables. Estos indicadores son entendidos como señales que marcan un mayor o menor nivel de desarrollo de la variable concreta en un cuaderno. No obstante, el planteamiento y desarrollo del análisis ha propiciado cambios importantes en dicha plantilla, tanto a nivel general (aplicados a todas las dimensiones) como específicos dentro de cada dimensión.

Así, en el primero de los apartados explicaremos los cambios a nivel general a partir de la plantilla inicial, cambios que afectan a toda la plantilla y a su estructura. En los apartados IV.2 al IV.6 explicaremos el marco de análisis final para cada una de las cinco dimensiones consideradas y la plantilla derivada del mismo, junto con la explicación de los hitos principales asociados a la evolución y el refinamiento del mismo, y de sus variables e indicadores, dentro de cada dimensión. En el apartado IV.7 presentaremos dos tablas resumen de los marcos de análisis considerados para las UT y las UP. Por último, en el apartado IV.8 se reflejan algunas consideraciones relativas al desarrollo y la puesta en práctica del análisis de los cuadernos aplicando este marco de análisis y las plantillas asociadas.

IV.1. CAMBIOS GENERALES EN LA PLANTILLA DE ANÁLISIS CON RESPECTO A LA VERSIÓN INICIAL DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

Este primer apartado tiene por objeto explicar varios cambios generales que se han llevado a cabo en la plantilla de análisis con respecto a la versión derivada del estudio exploratorio (Capítulo II). Dividiremos el apartado en dos subapartados, atendiendo al momento de la investigación en que se han llevado a cabo estos cambios.

En el primer subapartado explicaremos y justificaremos la primera reformulación de la plantilla, derivada del establecimiento de la unidad de registro (y la distinción entre aspectos teóricos y prácticos) y de la introducción de instrumentos para medir el desarrollo de los indicadores. En el segundo subapartado indicaremos un cambio posterior, asociado a la creación de una tipología de indicadores, relacionando aquellos destinados a medir una misma cualidad, con el objeto de desarrollar una formulación y una codificación más homogénea de los mismos.

IV.1.1. PRIMERA REFORMULACIÓN DE LA PLANTILLA DE ANÁLISIS

Este subapartado está destinado a explicar y a justificar la primera reformulación de la plantilla a partir del instrumento creado y utilizado en el estudio exploratorio. Esta primera reformulación ha sido planificada previamente al comienzo del análisis en profundidad de los documentos, aunque sí se había realizado una "lectura superficial" de algunos de ellos.

Algunos de estos cambios han estado provocados por las diferencias entre los contextos en los que se desarrolló el estudio exploratorio y la investigación propia de la tesis doctoral. Recordemos que en el estudio exploratorio, debido a la metodología del docente y al comportamiento mayoritario de los alumnos que se deriva de esa metodología, el contenido existente en los cuadernos se redujo principalmente a la realización, corrección y transcripción de ejercicios. Además, en ese estudio se analizaron los cuadernos como una única unidad de registro, sin diferenciar en el análisis las producciones correspondientes a diferentes temas.

Sin embargo, en la investigación propia de esta tesis doctoral, se proyectó la recogida de la parte del cuaderno de los alumnos correspondiente al bloque de Análisis Matemático. Todos los docentes planificaron la división de este bloque en tres temas distintos: funciones y funciones elementales, límites y continuidad y, por último, derivada de una función[20]. Esta circunstancia ha hecho que consideráramos

[20] Puede encontrarse más información contextual en el apartado III.2 de esta tesis doctoral.

conveniente analizar por separado la parte correspondiente a cada tema, lo que supone una primera diferencia con respecto al estudio exploratorio. Además, esta partición nos permite estudiar si los alumnos mantienen su comportamiento en la elaboración del cuaderno a lo largo de los temas o existen diferencias.

Además, la metodología de los docentes en las cuatro aulas participantes, basada en la presentación de forma expositiva o magistral de los diferentes contenidos de una forma personal (no basada en el libro de texto o en la distribución de apuntes fotocopiados al alumnado) ha propiciado que los cuadernos, generalmente, sí que contuvieran teoría explicada en esas presentaciones y tomada por los alumnos. Esta circunstancia ha evidenciado la pertinencia de separar dos unidades de registro distintas entro de un mismo tema: la unidad teórica (UT) y la unidad práctica (UP), como ya se explicó en el subapartado III.1.2. La diferente naturaleza y características propias del contenido perteneciente a las UT y a las UP nos han llevado a especializar el marco de análisis para cada una de ellas. Esto ha dado lugar a dos plantillas de análisis con algunas partes comunes, pero también aspectos específicos que las diferencian, y que permiten obtener información más especializada.

Además, el otro cambio importante que se ha introducido en ambas plantillas ha sido la introducción de una escala de valoración para medir el grado de desarrollo de los diferentes indicadores. En el estudio exploratorio, la valoración de los indicadores en el cuaderno de cada alumno se realizó a través de descripciones de aspectos relacionados con dicho indicador[21]. La presencia en el contexto de investigación de la tesis doctoral de varias aulas participantes y de varias unidades de registro asociadas a cada cuaderno hacía necesario la adopción de algún sistema de medición del grado de desarrollo de cada indicador que permitiera o hiciera posible la comparación de los mismos en diferentes aulas.

Por este motivo, hemos decidido añadir una escala numérica de valoración para cada uno de los indicadores, con cinco niveles de desarrollo del mismo: de 1 (desarrollo mínimo del indicador en la unidad de registro analizada) a 5 (desarrollo máximo). Asociado a esta escala numérica de valoración, se ha establecido una leyenda explicativa inicial de codificación, en la que se explica el grado de desarrollo o las circunstancias que se relacionan con cada uno de los cinco niveles. Durante el avance del análisis, estas leyendas explicativas de codificación han sido progresivamente refinadas y mejoradas para optimizar su propósito, resolver ambigüedades en la valoración y cubrir las diferentes posibilidades que han surgido asociadas a cada

[21] Todas esas descripciones pueden encontrarse en el Anexo A.1 (tomo de Anexos).

indicador; hasta llegar a la saturación de este proceso. La utilización de estas leyendas de codificación tiene como objetivo la eliminación de posibles subjetividades o tendenciosidades en la asignación de un valor de la escala numérica, así como permitir la comparabilidad del desarrollo del indicador en diferentes unidades de registro y la reproducibilidad de la investigación y el uso del instrumento por parte de otros investigadores o docentes.

A continuación mostramos un ejemplo de esta primera fase de reformulación de la plantilla de análisis, a través de la explicación del proceso asociado a uno de los indicadores ya existentes en la plantilla del estudio exploratorio. En particular, lo vamos a hacer con un indicador de la Dimensión 2, cuyo nombre inicial fue "Corrección de los errores cometidos en sus intentos de resolución de las tareas", y que pertenecía a la variable "Revisión en el cuaderno de las tareas que se corrigen en el aula" (ver Tabla II.2).

Dado que la variable a la que pertenece este indicador pretende analizar un aspecto relacionado con la corrección de las tareas (por lo que está asociado con aspectos prácticos), esta variable pasó a formar parte únicamente de la plantilla específica para analizar las UP. Además, se creó una leyenda explicativa para poder codificar el indicador, basada en la frecuencia con la que los alumnos realizaban en su cuaderno la corrección de posibles errores en las actividades que habían intentado y que, posteriormente, sí habían sido corregidas en el aula. Dicha leyenda puede verse en la Tabla IV.1. Posteriormente, y como explicaremos en el subapartado siguiente, se refinó el nombre del indicador añadiendo explícitamente la cualidad básica que mide (en este caso, una frecuencia), siendo un indicador de frecuencia de Tipo 1 (Fr1)[22]. La Tabla IV.1 muestra el modo final en que se enuncia el indicador en la plantilla para analizar las UP.

<table>
<tr><td>Fr1</td><td>Frecuencia en la corrección de sus errores al resolver las actividades</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Corrige todos los errores que ha cometido en sus intentos de resolución; 4: Corrige bastantes de los errores cometidos; 3: Corrige algunos de los errores (aprox. la mitad); 2: Corrige pocos de los errores cometidos; 1: No corrige sus errores nunca o casi nunca.</td></tr>
</table>

Tabla IV.1. Ejemplo de indicador perteneciente a la plantilla de análisis para las UP, con su escala numérica de valoración y la leyenda explicativa de codificación.

[22] La tipología de indicadores y su significado se explican en el siguiente subapartado, IV.1.2.

La tabla IV.1 también muestra la estructura en que se muestran los indicadores en las plantillas. Como puede observarse, la estructura se compone de dos filas. En la fila superior se incluye la abreviatura o la etiqueta asociada al tipo de indicador (según la cualidad que mide[23], indicado con un fondo verde), el nombre del indicador (en negrita) y, en la parte derecha, la escala de medición 1-5 con objeto de marcar la celda que corresponde al grado de desarrollo en una determinada unidad. En la segunda fila se detalla la leyenda explicativa para realizar la asignación del grado de desarrollo del indicador en la escala 1-5. La Figura IV.1, que toma como base el ejemplo de la Tabla IV.1, ilustra la estructura y clarifica su contenido.

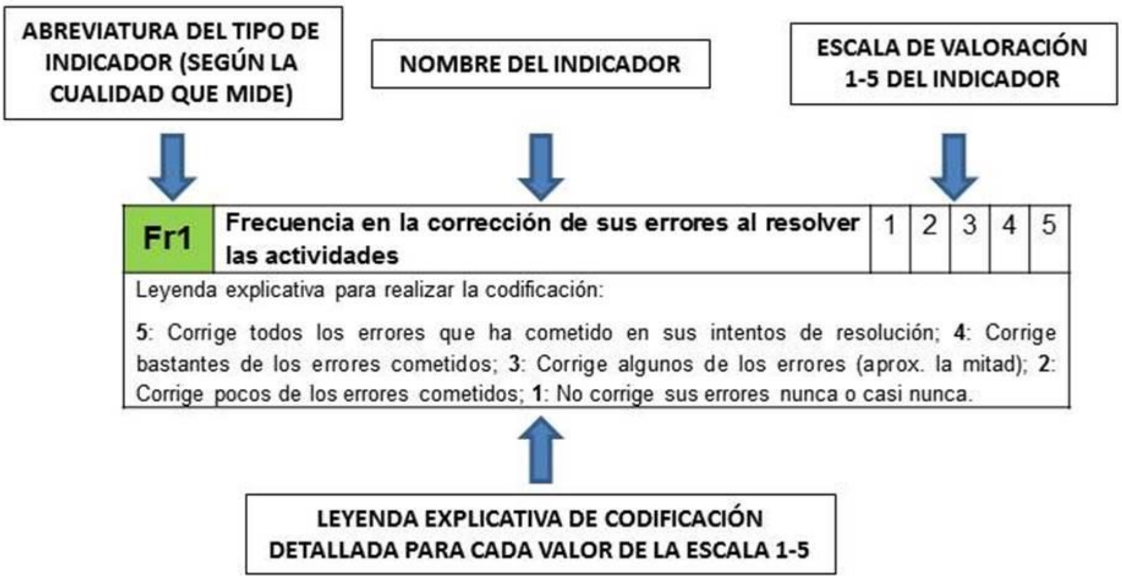


Figura IV.1. Estructura en la que se presenta cada indicador en la plantilla e información que contiene.

IV.1.2. HOMOGENEIZACIÓN DE LOS INDICADORES QUE MIDEN UNA MISMA CUALIDAD

Durante el desarrollo del análisis de los documentos, el EI detectó que existían indicadores que poseían cierta similitud entre sí, al medir una misma cualidad. Por ejemplo, había indicadores que tenían por objeto medir una frecuencia, mientras que otros estaban asociados con la ausencia de algún aspecto o con la medición de la calidad con la que se presentaba cierta característica en una unidad.

Este hecho nos llevó a crear una tipología de los diferentes indicadores existentes, estableciendo varios “grupos” de indicadores afines, asociados a la medición de una

[23] Este aspecto se desarrolla en el siguiente subapartado, IV.1.2.

misma cualidad. Así, se ha asociado un "grupo" de pertenencia a cada indicador. En la Tabla IV.1 puede verse el caso del indicador tomado como ejemplo al final del subapartado anterior, indicador asociado a la cualidad "frecuencia", y del tipo "Fr1" (ahora explicaremos qué quiere decir esto). El objetivo de esta agrupación es la de dar cierta uniformidad y homogeneidad a los indicadores, y a las leyendas de codificación asociadas a los indicadores del mismo grupo. Con ello buscamos aumentar la capacidad para poder comparar las valoraciones asignadas a indicadores que miden una misma cualidad. Además, el esfuerzo desarrollado al intentar agrupar los distintos indicadores ha permitido clarificar mejor cuál es la cualidad principal que pretende medir cada uno, lo que puso de manifiesto la necesidad de modificar o clarificar el nombre de algunos de ellos hacia un nombre mucho más informativo y explicativo.

A continuación, indicamos los diferentes "grupos" o tipos de indicadores que hemos establecido en este proceso. Dentro de alguna cualidad ha sido necesario establecer varios subgrupos, debido a la presencia de diferencias importantes en su medición entre unos indicadores y otros, asociada a diferentes propósitos.

Indicadores asociados a la cualidad "calidad"

En este grupo se han integrado todos aquellos indicadores que miden una cualidad que hace referencia al nivel de adecuación con la que se presenta una determinada característica a lo largo de una unidad de registro.

Todos los indicadores que hemos integrado en este grupo serán identificados en la plantilla de análisis con la abreviatura "Ca". La leyenda explicativa de codificación genérica asociada a la valoración (en una escala 1-5) de los indicadores pertenecientes a este grupo es la siguiente:

- **Valoración de 5**: Unidad muy adecuada/óptima en lo referente a la característica analizada.
- **Valoración de 4**: Unidad adecuada en la mayoría de ocasiones en lo referente a la característica analizada.
- **Valoración de 3**: Unidad en la que se combina la adecuación en la presentación de la característica analizada en algunos casos con otros casos donde la característica se presenta de forma mejorable.
- **Valoración de 2**: Unidad en la que la característica analizada se presenta de forma adecuada en pocos casos, siendo mejorable y poco adecuada en bastantes ocasiones.

- **Valoración de 1**: Unidad en la que la característica analizada no se presenta de forma adecuada en la mayoría o en todos los casos.

Indicadores asociados a la cualidad "frecuencia"

En este grupo se han integrado todos aquellos indicadores destinados a medir el número de ocasiones en que una característica, acción o elemento está presente en una unidad de registro. Dentro de los indicadores asociados a esta cualidad, hemos distinguido dos subtipos diferentes, que explicamos a continuación.

El primero corresponde a los indicadores que miden una frecuencia de aparición de una determinada característica, acción o elemento con respecto a un total de ocasiones existente y fijado. Es decir, aquellos casos en los que sí que hay una referencia del total posible. Este tipo de indicadores serán identificados en la plantilla de análisis con la abreviatura "Fr1". La leyenda explicativa de codificación genérica asociada a la valoración de los indicadores de este tipo es la siguiente:

- **Valoración de 5:** La característica, acción o elemento está presente en la unidad en todos los casos posibles (o en la inmensa mayoría).
- **Valoración de 4:** La característica, acción o elemento está presente en bastantes de los casos posibles.
- **Valoración de 3:** La característica, acción o elemento está presente sólo en algunos de los casos posibles (aproximadamente la mitad).
- **Valoración de 2:** La característica, acción o elemento está presente en pocos casos con respecto al total posible.
- **Valoración de 1:** La característica, acción o elemento no se presenta en ninguno de los casos posibles, o sólo en algún caso aislado dentro de una multitud de casos posibles.

Entre los indicadores de tipo "Fr1" hay un indicador especial, perteneciente a la Dimensión 1, cuyo nombre es "Información y referencia de los ejercicios", destinado a medir la frecuencia con la que un alumno escribe el enunciado o, al menos, una referencia sobre las actividades existentes en la unidad. Es precisamente esa doble posibilidad (que el alumno haya podido escribir el enunciado completo del ejercicio o que haya tomado una referencia completa del lugar donde ha extraído el mismo, en caso de que exista esta circunstancia) la que hace que su leyenda explicativa sea algo distinta. La abreviatura para este indicador será "Fr1*".

El segundo tipo de indicadores asociados a la cualidad de medir una frecuencia son aquellos en los que, a diferencia de los anteriores, no existe un total de referencia para comparar. Esto puede suceder, por ejemplo, porque el nivel de presencia dependa del propio alumno y no venga derivado del desarrollo de la clase o del contenido de la propia unidad de registro. Por ejemplo, un indicador de este tipo sería el que hace referencia a la frecuencia con la que el alumno anota comentarios, observaciones o aclaraciones a lo largo de una unidad de registro. Este tipo de indicadores serán identificados en la plantilla de análisis con la abreviatura "Fr2". La leyenda explicativa de codificación genérica para su valoración es la siguiente:

- **Valoración de 5**: La característica, acción o elemento es muy frecuente o tiene una alta presencia a lo largo de la unidad del alumno.
- **Valoración de 4**: La característica, acción o elemento es bastante frecuente o se presenta en bastantes ocasiones a lo largo de la unidad del alumno.
- **Valoración de 3**: La característica, acción o elemento se registra varias veces a lo largo de la unidad del alumno, aunque no de forma frecuente.
- **Valoración de 2**: La característica, acción o elemento se registra pocas veces a lo largo de la unidad del alumno, con un carácter más bien aislado.
- **Valoración de 1**: La característica, acción o elemento no se registra nunca o casi nunca a lo largo de la unidad del alumno.

Indicadores asociados a la cualidad "medición de un porcentaje"

Los indicadores que se han integrado dentro de este grupo son medidos a través del porcentaje de ocasiones en los que un hecho está presente o se produce en una unidad con respecto a un total existente. En este caso, estos indicadores poseen cierta similitud con los de frecuencia del tipo Fr1, aunque en este caso se haya decidido medirlos a través de un porcentaje, al estar asociados a aspectos más fáciles de delimitar y de contar (por ejemplo, el porcentaje de actividades propuestas en el aula que pueden encontrarse en una unidad de registro práctica).

También pertenecen a este grupo aquellos indicadores en los que se mide una cierta característica (a través de una escala de puntos fijada) en un conjunto de elementos de una unidad de registro, y el indicador es valorado a partir del porcentaje de puntos en la escala obtenido en la unidad con respecto al total posible.

Tanto en un caso como en otro, nos referiremos a los indicadores de este tipo con la abreviatura "Por". Para asignar la valoración de 1 a 5 de estos indicadores, hemos asociado un intervalo de porcentajes (de 0 a 100) a cada uno de los valores de la escala 1-5, buscando que la escala discriminara del mejor modo posible entre los estudiantes de acuerdo al rango de porcentajes aparecidos en la investigación. Especialmente, se ha tratado de discriminar aquellas unidades con porcentajes muy altos, que son evidencia de una característica o un hecho muy marcada en una unidad. Los intervalos para asignar valor de la escala 1-5 en la mayoría de indicadores son:

- **Valoración de 5:** Porcentaje en el intervalo [90,100].
- **Valoración de 4:** Porcentaje en el intervalo [70,90).
- **Valoración de 3:** Porcentaje en el intervalo [40,70).
- **Valoración de 2:** Porcentaje en el intervalo [20,40).
- **Valoración de 1:** Porcentaje en el intervalo [0,20).

Únicamente ha existido un indicador concreto que, durante el desarrollo del proceso de análisis de las unidades, se ha caracterizado por unos porcentajes muy altos en prácticamente todos los participantes. Dicho indicador pertenece a la Dimensión 2 (únicamente para las UP): "Grado de completitud de las actividades registradas que fueron corregidas en el aula". En este indicador, el hecho de que pueda existir un posible intento de resolución de la actividad por parte del alumno y de la existencia de una corrección posterior de la actividad en el aula, provoca que estos ejercicios estén desarrollados de modo completo en gran parte de las ocasiones, al existir más oportunidades para ello. Esto ha provocado un cambio en los intervalos para asignar valor en la escala[24]. Hemos etiquetado este indicador como "Por*".

Indicadores asociados a la cualidad "conteo numérico"

En este grupo están aquellos indicadores cuya medición está asociada a un conteo directo de la presencia de algún tipo de elemento concreto en la unidad. En estos indicadores se asocia un intervalo de números (que representa el número de veces que está presente) a cada uno de los valores de la escala 1-5. No mostramos aquí una leyenda genérica de codificación al haber diferido estos intervalos según el elemento concreto, con el fin de discriminar mejor entre alumnos a partir del rango de valores que se ha detectado como usual.

También hemos incluido dentro de este tipo un indicador correspondiente a la Dimensión 2 de las UP (apartado tercero de este capítulo). Este indicador mide el grado de satisfacción de los intentos de resolución de actividades que ha efectuado el

[24] El valor de los intervalos que se ha fijado para este indicador especial puede verse en el apartado IV.3, correspondiente a la Dimensión 2 (en concreto, en la Tabla IV.9)

alumno a lo largo de la unidad. Para ello, se ha valorado el grado de satisfacción en cada actividad que se ha interpretado como intentada (a través de una escala explicativa de 1 a 5). El indicador se ha medido a través de la media aritmética de las valoraciones realizadas.

Los indicadores asociados a esta cualidad han sido etiquetados con la abreviatura “Num”.

Indicadores asociados a la cualidad “ausencia”

En este grupo de indicadores están aquellos en los que se mide que una determinada circunstancia o elemento no esté presente en la unidad. Es decir, se considera que el desarrollo del indicador es tanto mayor cuanto menor sea la presencia de esta circunstancia o elemento, por entender la presencia de dicha circunstancia o elemento como algo negativo. Dentro de los indicadores de este tipo, hemos diferenciado tres subtipos distintos, debido a las diferencias en el estudio de esta cualidad entre unas dimensiones y otras. Explicamos los tres subtipos a continuación.

El primero corresponde a varios indicadores de la Dimensión 1. En ellos, además de que se tenga en cuenta la concurrencia o no de una determinada circunstancia o elemento, también se diferencia entre el hecho de que se indique y/o se justifique la concurrencia de la circunstancia o del elemento, o que no se produzca dicha indicación o justificación. Asociaremos a estos indicadores la abreviatura “Au1”. La leyenda explicativa de codificación genérica para su valoración es la siguiente:

- **Valoración de 5:** La circunstancia o el elemento indicado no concurren en ninguna ocasión en la unidad, o bien en todos los casos en los que sí que concurre la circunstancia se explica y se justifica su aparición.
- **Valoración de 4:** En algún caso en que concurre la circunstancia o el elemento tan sólo se indica su aparición, pero sin justificarse la misma.
- **Valoración de 3:** Hay algún caso en que la circunstancia o elemento concurren sin que haya ni indicación ni justificación de la misma, o bien hay varios casos de concurrencia en los que se indica la aparición de la circunstancia o elementos, pero sin justificarse.
- **Valoración de 2:** La circunstancia o el elemento concurren en varias ocasiones en la unidad sin que este hecho sea indicado ni justificado.
- **Valoración de 1:** La circunstancia o el elemento concurren en un número elevado de ocasiones en la unidad sin que se produzca ni una indicación ni una justificación de este hecho.

El segundo de los subtipos corresponde a varios indicadores de la Dimensión 4, en los indicadores asociados al análisis de la ortografía de la unidad. En estos indicadores, además de tener en cuenta el número de ocasiones en que se presenta una circunstancia o elemento en la unidad (una falta de ortografía de determinado tipo), también valoraremos la gravedad asociada a su concurrencia. Asociaremos a estos indicadores la abreviatura "Au2". La leyenda explicativa de codificación genérica para su valoración es la siguiente. En ella ya hacemos referencia a la circunscripción de estos indicadores al estudio de la ortografía:

- **Valoración de 5:** No se encuentra ninguna falta de ortografía de este tipo en la unidad.
- **Valoración de 4:** Únicamente se encuentra una falta de ortografía de este tipo en la unidad, que además se considera poco grave (en una palabra poco usual o poco conocida); o bien existe alguna ambigüedad relacionada con la presencia o no en la unidad de faltas de ortografía de este tipo.
- **Valoración de 3:** Se encuentra en la unidad una falta de ortografía de este tipo que se considera de gravedad; o bien algunas faltas de ortografía de este tipo, todas ellas consideradas como poco graves; o bien existen varias ambigüedades relacionadas con la presencia o no de faltas de ortografía de este tipo.
- **Valoración de 2:** Se encuentran en la unidad varias faltas de ortografía de este tipo consideradas como faltas graves.
- **Valoración de 1:** Se encuentran en la unidad abundantes faltas de ortografía de este tipo consideradas como faltas graves.

El tercer y último de los subtipos que hemos considerado está asociado a la Dimensión 5, en concreto, a la ausencia de errores en la unidad de diferentes tipos. En este tercer subtipo, la presencia de una circunstancia o un elemento que se considera negativo (en este caso, los errores) se modula teniendo en cuenta el total de oportunidades en que la circunstancia o el elemento pudiera haberse presentado en la unidad. Asociaremos a estos indicadores la abreviatura "Au3". La leyenda explicativa de codificación genérica para su valoración es la siguiente. En ella ya hacemos referencia a la circunscripción de estos indicadores al estudio de los errores:

- **Valoración de 5:** No hay ningún error de este tipo en la unidad.
- **Valoración de 4:** En la unidad se encuentra sólo algún error aislado de este tipo en la unidad.

- **Valoración de 3:** En la unidad se encuentran pocos errores de este tipo en la unidad en comparación con la cantidad de elementos y procesos existentes que podrían dar lugar a la aparición de errores de este tipo.
- **Valoración de 2:** En la unidad se encuentran varios errores de este tipo, existiendo una cierta frecuencia de aparición a lo largo de la misma.
- **Valoración de 1:** En la unidad se encuentran un número abundante de errores de este tipo a lo largo de la misma.

Indicadores asociados a la cualidad "gravedad"

Los indicadores que hemos encuadrado dentro de este tipo tienen una naturaleza parecida a los indicadores de la cualidad anterior (ausencia), pero con la diferencia de que focalizan su atención primordialmente en las ocasiones en las que se considera que la circunstancia o el elemento se presenta con una mayor gravedad. Así, en estos indicadores es la gravedad asociada a la presencia de la circunstancia o el elemento la variable clave para modular la valoración del indicador. Los indicadores asociados a esta cualidad están concentrados en la Dimensión 5, en el análisis de los errores de diferentes tipos que se han encontrado en una unidad. No mostramos aquí una leyenda genérica de codificación puesto que esta leyenda ha diferido de unos indicadores a otros, para adaptarse a sus diferentes circunstancias. Esas leyendas se muestran en el apartado IV.6, correspondiente a la Dimensión 5. Los indicadores que miden esta cualidad se identifican a través de las abreviaturas "Gr" y "Gr*", según cuál sea su leyenda de codificación.

IV.2. DIMENSIÓN 1 DE LA PLANTILLA DE ANÁLISIS: ESTRUCTURA, ORDEN Y PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD

En este apartado explicaremos la estructura de la primera de las cinco dimensiones consideradas en el marco de análisis: sus variables, los indicadores de cada variable (junto con la tipología del mismo) y la leyenda explicativa para la codificación de cada indicador. Además, también explicaremos y justificaremos la evolución de la plantilla de análisis dentro de esta dimensión, desde la plantilla del estudio exploratorio hasta su formulación final.

El nombre de esta dimensión es el de "Estructura, orden y presentación de la unidad", un nombre que se ha mantenido con respecto al estudio exploratorio. La plantilla tomada como punto de partida puede verse en la Tabla II.1. En la versión final de la plantilla correspondiente a esta dimensión se han mantenido las tres variables iniciales, con un pequeño cambio en los nombres derivado de que el análisis no se ha hecho al cuaderno completo en su globalidad, sino a las unidades de registro que lo conforman (cambio de la palabra “cuaderno” por “unidad”). Las tres variables son:

- Variable 1: Organización de la unidad
- Variable 2: Presentación de la unidad
- Variable 3: Estilo propio en la unidad

Dentro de cada variable, sí que se han producido cambios en algunos de sus indicadores con respecto a la versión inicial, otros se han suprimido o se han añadido. Explicamos ese proceso y la plantilla finalmente resultante para cada una de las tres variables en los subapartados IV.2.1 (para la variable “Organización de la unidad”), IV.2.2 (para “Presentación de la unidad”) e IV.2.3 (para “Estilo propio en la unidad”).

IV.2.1. VARIABLE 1: ORGANIZACIÓN DE LA UNIDAD

Esta variable pretende medir el grado de organización que tiene cada una de las unidades analizadas, ya sean teóricas o prácticas. Los indicadores considerados para el análisis de esta variable han sido distintos para las UT (unidades teóricas) y las UP (unidades prácticas). Debido a las características contextuales del estudio exploratorio, los tres indicadores establecidos en dicho estudio estaban relacionados con los aspectos prácticos (Tabla II.1). Esos tres indicadores se han tomado como punto de partida para establecer los indicadores de análisis de esta variable en las UP, mientras que para las UT se ha partido de la “lectura superficial” de los documentos para hacer una primera propuesta de indicadores.

Indicadores para las UT

Se han considerado finalmente tres indicadores para medir el grado de desarrollo en la organización de una UT. Los tres indicadores fueron ya concebidos durante esa “lectura superficial” de los documentos, y se han mantenido por su pertinencia. Estos indicadores hacen referencia al modo en que los alumnos indican o presentan los diferentes apartados que componen un tema, a la ausencia de partes teóricas correspondientes a temas distintos del de la propia UT y al respeto al orden cronológico dentro de los contenidos de la unidad.

Durante el desarrollo del análisis sí que se han remodelado algunas de las leyendas explicativas para realizar la codificación que se consideraron inicialmente. Esto ha sucedido especialmente con el indicador asociado al orden cronológico de la teoría y ejemplos desarrollados, debido a la detección de diferentes situaciones relacionadas con el seguimiento o no del orden cronológico en una unidad, y que no se habían contemplado, como son la ubicación confusa de algunos elementos o la presencia de unidades muy incompletas en cuanto a su contenido.

La Tabla IV.2 muestra la plantilla final de análisis de la variable "Organización de la unidad" en las UT. En la tabla se agrupan los tres indicadores. Se presenta la información siguiendo la misma estructura mostrada en la Figura IV.1.

Ca	**Claridad en la indicación de las diferentes partes que componen un tema**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Se indican todas ellas de un modo muy claro y destacado; **4**: Se indican la gran mayoría de modo claro; **3**: Muchas partes se indican de forma clara, pero otras no; **2**: No se indican de forma clara bastantes de las partes de un tema ni muchos de los cambios entre éstas; **1**: Generalmente no se indican las partes del tema ni los cambios de unas a otras.						
Au1	**Ausencia de partes de teoría correspondientes a temas distintos del actual**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: No hay partes de teoría correspondientes a otros temas o, si los hay, está indicada y justificada su aparición; **4**: Se indica la presencia de partes de teoría de otros temas, pero no se justifica; **3**: Aparece alguna parte de teoría de otros temas, sin indicarse ni justificarse; **2**: Aparecen varias partes de teoría de otros temas, sin indicarse ni justificarse; **1**: Hay muchas partes de teoría de otros temas a lo largo del tema actual, sin indicar y justificar su aparición; mezcla de temas.						
Ca	**Orden cronológico de la teoría y los ejemplos desarrollados**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Sigue el orden cronológico marcado o hay algún cambio que no altera el desarrollo teórico lógico (como juntar partes sucesivas de teoría que quedaron partidas en el desarrollo de la clase); **4**: Hay algún elemento que está desubicado, indicándolo; o bien no hay elementos desubicados, pero hay alguna confusión respecto al orden seguido, o bien la falta de algunos elementos puede hacer que el orden sea un poco ficticio en algún caso; **3**: Hay algún elemento que está desubicado sin indicarlo, o bien hay unos pocos, indicándolo; o bien no hay elementos desubicados, pero hay varias confusiones respecto al orden seguido o bien faltan varios elementos que pueden afectar a la pertinencia del orden; **2**: Hay varios elementos que no siguen el orden presentado, indicándolo en algunos casos; **1**: Presencia de varios elementos desordenados en el tema, sin indicarlo mayoritariamente.						

Tabla IV.2. Indicadores para la variable "Organización de la unidad" en las UT.

Indicadores para las UP

De los tres indicadores iniciales, hay dos que se han mantenido en la plantilla final. Uno de ellos es el que analiza si existen ejercicios cuya resolución se parte en varios trozos a lo largo de la unidad (indicador segundo de organización en la Tabla II.1). El otro es el que estudia si se separan o no los ejercicios correspondientes a temas distintos y cómo (indicador primero en esa tabla), que ha sido reformulado puesto que en el estudio correspondiente a la tesis doctoral las unidades de registro se han separado por temas. La nueva versión del indicador analiza si existen en una UP ejercicios correspondientes a temas distintos del tema de la propia unidad.

El tercer indicador que existía en la plantilla del estudio exploratorio focalizaba su atención en la ausencia de ejercicios inacabados o sin completar en el cuaderno. Dicho indicador ha sido reformulado y reubicado en la Dimensión 2, titulada "Completitud de la unidad", al considerar que estaba directamente relacionado con esta dimensión, por lo que tenía más sentido ubicarlo en la misma.

Además, el análisis pormenorizado de los cuadernos ha mostrado la pertinencia de añadir tres indicadores más asociados al grado de desarrollo de la variable "Organización de la unidad". Uno de ellos está relacionado con el modo en que los estudiantes recogen información sobre los ejercicios que realizan o registran en sus cuadernos (por ejemplo, si registran el enunciado del mismo o una referencia completa en el caso de que se haya extraído de otro documento o material, como puede ser el libro de texto). En la valoración de este indicador hemos asignado un mayor nivel de desarrollo al hecho de recoger y escribir el enunciado completo del ejercicio, puesto que este hecho facilita que el cuaderno sea una herramienta más organizada y autocontenida de estudio de la materia, al no tener que depender de la presencia del material del que se extrajo el ejercicio. Este hecho ha provocado que sea un indicador asociado a la medición de una frecuencia, pero con una leyenda de codificación algo diferente a la usual para este tipo de indicadores.

Los otros dos indicadores que se han añadido están relacionados con el respeto al seguimiento del orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase (cuya leyenda de codificación, al igual que sucedió con el indicador homólogo para las UT, también se desarrolló y concretó bastante durante el propio desarrollo del análisis) y a la claridad en la indicación del cambio de un ejercicio a otro.

Así, la variable "Organización de la unidad" para las UP, finalmente, tuvo cinco indicadores destinados a medir su desarrollo. La Tabla IV.3 muestra la plantilla final, en la que se presenta la información siguiendo la misma estructura que la tabla anterior.

		1	2	3	4	5
Fr1*	**Información y referencia de los ejercicios**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Se registra siempre el enunciado de los ejercicios; **4**: En todos aquellos ejercicios en que no aparece el enunciado completo, se hace una referencia completa del mismo (nº página y nº ejercicio, lugar donde se ha extraído); **3**: El enunciado o referencia no es completa en algunos ejercicios; **2**: El enunciado o referencia es incompleta en bastantes ocasiones; **1**: No aparece ni el enunciado ni una referencia adecuada en la mayoría de los ejercicios.						
Au1	**Ausencia en la unidad de ejercicios de otros temas distintos del actual**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Ausencia de ejercicios de otros temas; **4**: Hay algún ejercicio de un tema diferente del actual, indicándolo; **3**: Hay algún ejercicio de otro tema diferente del actual, sin indicarlo, o unos pocos, indicándolo en todos ellos; **2**: Hay varios ejercicios de otros temas, en algunos sin indicarlo; **1**: Hay varios ejercicios de otros temas, sin indicarse la circunstancia.						
Ca	**Orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Los ejercicios siguen el orden cronológico desarrollado en la clase; **4**: Algún ejercicio está desubicado, indicándolo, o bien no hay ninguno desubicado, pero falta algún bloque de ejercicios que hace que el orden sea un poco ficticio; **3**: Algún ejercicio está desubicado, sin indicarlo, o bien hay unos pocos desubicados, indicándolo en todo caso, o bien faltan varios bloques de ejercicios que hacen que el orden sea irreal; **2**: Varios ejercicios están desubicados, indicándolo sólo en algunos casos, **1**: No se sigue, de forma mayoritaria, el orden cronológico de ejercicios planteados por el profesor.						
Au1	**Ausencia de ejercicios cuya resolución esté separada en varias partes de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Ausencia de ejercicios cuya resolución aparezca partida o separada en varias partes en la unidad; **4**: Hay algún ejercicio partido, indicándose claramente la circunstancia; **3**: Hay algún ejercicio partido, sin indicarse claramente la circunstancia; o dos, indicándose en ambos casos; **2**: Hay varios (pocos) ejercicios partidos, indicándose en algunos de ellos; **1**: Hay varios ejercicios partidos, sin indicar la circunstancia en muchos de ellos.						
Ca	**Claridad en la indicación de los cambios de ejercicio cuando se producen (paso de unos a otros)**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Se indican de modo muy claro y destacado todos los cambios de ejercicio; **4**: Se indica de modo claro en todos o la inmensa mayoría de los casos; **3**: En algunos casos (pocos), la indicación o el cambio de ejercicio es confuso; **2**: En varias ocasiones la indicación es confusa o, incluso, inexistente; **1**: La indicación casi siempre es confusa o inexistente.						

Tabla IV.3. Indicadores para la variable “Organización de la unidad” en las UP.

IV.2.2. VARIABLE 2: PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD

Esta segunda variable pretende medir el grado de calidad en la presentación que tiene cada una de las unidades analizadas. Esta variable se aplica tanto a UT como a UP, utilizando además los mismos indicadores para ambos tipos de unidades. A continuación mostramos cuáles son los indicadores y su estructura, así como la evolución de los mismos desde los cinco indicadores inicialmente utilizados en la plantilla del estudio exploratorio (que son recogidos en la Tabla II.1). Esencialmente, las ideas de esos cinco indicadores se han mantenido durante el estudio, aunque algunos de los indicadores han sido reestructurados.

Los dos primeros indicadores para esta variable que se mostraban en la Tabla II.1 (el nivel de limpieza de la unidad y la ausencia de tachones) se han fusionado en uno solo, al considerarse que son dos características con una alta afinidad y correlación entre ellas. Por el contrario, las dos características a las que se hacía referencia en el indicador tercero en esa tabla han sido finalmente separadas en dos indicadores distintos, uno centrado en el respeto de los márgenes y otro en la adecuada utilización y distribución de los espacios en la unidad. Hemos adoptado este criterio debido a que, durante el desarrollo del análisis, se han detectado diferencias importantes en algunos alumnos en su comportamiento con respecto a estos dos aspectos y en la valoración realizada a cada uno de ellos por separado.

El indicador cuarto de la Tabla II.1 ha sido matizado para clarificar que la cualidad que está midiendo es la adecuación del tamaño y la integración de los dibujos, esquemas y gráficos a lo largo de la unidad, independientemente de que el número total de los mismos sea elevado o reducido.

El que inicialmente era el quinto indicador, “Legibilidad de la letra y claridad en la caligrafía de números, símbolos y signos matemáticos”, ha sufrido varios cambios durante el desarrollo del análisis. Primeramente se realizó un desdoblamiento del indicador en dos, separando el estudio de la letra, correspondiente al lenguaje natural escrito, del de los números y los signos matemáticos; y añadiendo a la legibilidad una característica de estudio más: el tamaño de estos elementos. El desarrollo del análisis puso de manifiesto que la consideración conjunta de ambas características (tamaño y legibilidad) hacía que, en algunas ocasiones, características opuestas se compensaran recibiendo una misma valoración (por ejemplo, un tamaño muy adecuado de estos elementos pero una legibilidad muy mala, o viceversa). Finalmente esto nos llevó a separar la valoración de ambas características, resultando tres indicadores: un indicador para valorar la adecuación del tamaño de todos los elementos (tanto la letra como los números y signos matemáticos) e indicadores para valorar la legibilidad tanto de la letra como de los números y signos matemáticos.

Por último, se ha considerado pertinente la inclusión de un indicador más, para valorar la "primera impresión" que causa la presentación de la unidad en una revisión general de la misma. El interés de incluir este indicador está asociado a que una mejor o peor presentación general de la unidad puede influir en la predisposición del alumno a utilizar su cuaderno como instrumento de estudio y aprendizaje de las matemáticas.

Así, la variable "Presentación de la unidad" consta finalmente de ocho indicadores para medir su mayor o menor desarrollo tanto en las UT como en las UP. La Tabla IV.4 muestra la plantilla final resultante, en la que se presenta la información siguiendo la misma estructura que las tablas anteriores. La mayoría de los indicadores pertenecen al grupo de indicadores asociados a la medición de la cualidad "calidad", a excepción del indicador situado en tercer lugar, sobre el respeto de los márgenes a lo largo de la unidad, que mide la frecuencia con la que son respetados los márgenes por parte del alumno.

Ca	**Primera impresión que causa la revisión general de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Impresión muy grata, la revisión de la unidad causa gusto y agrado; **4**: Impresión grata y agradable en casi todas las partes de la unidad; **3**: La unidad combina partes con una impresión agradable con otras menos agradables; **2**: Muchas de las partes causan una impresión poco agradable; **1**: La revisión de la unidad es muy desagradable para la vista.						
Ca	**Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: La unidad es muy limpia, sin tachones; **4**: La unidad está, en general, limpia, aunque hay algún pequeño tachón; **3**: La unidad combina partes limpias con otras menos limpias, existiendo algunos tachones; **2**: La unidad tiene varias partes con poca limpieza y los tachones son habituales, alguno de ellos grave; **1**: La unidad no es limpia, con tachones generalizados, algunos afectando gravemente a la presentación.						
Fr1	**Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Siempre se respetan los márgenes; **4**: Casi siempre se respetan los márgenes; **3**: En ocasiones se respetan los márgenes, en otras, no; **2**: En pocas ocasiones se respetan los márgenes; **1**: Nunca o casi nunca se respetan los márgenes.						

<table>
<tr><td>Ca</td><td>Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:

5: Utilización de forma óptima de los espacios, sin espacios en blanco injustificados; 4: Buena utilización de los espacios, casi sin espacios en blanco injustificados; 3: En ocasiones, la utilización de los espacios es mejorable, con algunos espacios en blanco; 2: Mala utilización de los espacios, con varios espacios en blanco o con varias hojas desigualmente utilizadas; 1: La utilización de espacios es muy mala, mezclando habitualmente partes saturadas de elementos con otras casi en blanco.</td></tr>
<tr><td>Ca</td><td>Tamaño e integración en la unidad de los dibujos, esquemas o gráficos</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:

5: Todos los dibujos, esquemas y gráficos existentes tienen un tamaño e integración óptimos; 4: El tamaño e integración es adecuado en la gran mayoría de los casos; 3: Existen algunos casos donde el tamaño o integración no es adecuado; 2: Hay pocos que tengan un tamaño adecuado y estén bien integrados; 1: No hay o, los que hay tienen, en su gran mayoría, un tamaño inadecuado o una integración deficiente en la unidad.</td></tr>
<tr><td>Ca</td><td>Tamaño de la letra, números y signos matemáticos</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:

5: Siempre muy adecuado para su propósito; 4: Adecuado casi siempre; 3: Adecuado en ocasiones; 2: Poco adecuado en muchas ocasiones; 1: Inadecuado casi siempre.</td></tr>
<tr><td>Ca</td><td>Legibilidad de la letra</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:

5: Letra claramente legible, esfuerzo de la alumna porque la letra sea claramente legible; 4: Letra legible en toda la unidad; 3: Letra legible en general, aunque en algunas partes hay que hacer un esfuerzo para ello o existen algunas (pocas) confusiones entre algunas letras; 2: La letra es de difícil lectura en muchas de las partes, con varias confusiones entre diferentes letras; 1: Letra ilegible o de difícil lectura a lo largo de toda la unidad.</td></tr>
<tr><td>Ca</td><td>Legibilidad de los números y signos matemáticos</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:

5: Números y signos muy claros, realizados con esmero por el estudiante; 4: Números y signos claros y legibles, sin confusiones; 3: Números y signos claros en general, aunque alguno puede dar lugar a confusión; 2: Varios números y signos son confusos o mal efectuados, pudiendo dar o dando lugar a errores; 1: La mayoría de los números o signos matemáticos no se entienden o están mal realizados.</td></tr>
</table>

Tabla IV.4. Indicadores para la variable “Presentación de la unidad” en UT y UP.

IV.2.3. VARIABLE 3: ESTILO PROPIO EN LA UNIDAD

Puede ser que, en alguna de las unidades de registro, encontremos aspectos que pongan en evidencia la presencia de un estilo propio en los estudiantes al elaborar su cuaderno. En la plantilla del estudio exploratorio ya se consideraba esta variable, a través del análisis de dos indicadores (que pueden verse en la Tabla II.1), asociados al nivel de personalización y a la adecuación de los rasgos personales detectados.

Durante el desarrollo del estudio de los cuadernos, hemos mantenido esa diferenciación entre la medición del nivel de personalización y la medición de la adecuación de los rasgos personales. No obstante, el propio avance del desarrollo y la naturaleza de los rasgos encontrados nos han recomendado caracterizar tres tipos de rasgos. Se han encontrado rasgos asociados a la organización de la unidad, como puede ser que los alumnos, de un modo autónomo, organicen la información presentada en una tabla, sangren más o menos la teoría tomada según ésta pertenezca a un apartado o a un subapartado del tema, o anoten en su cuaderno la referencia de los ejercicios que el docente plantea. También se han detectado rasgos asociados a la presentación de la unidad, como puede ser la utilización de colores para resaltar algunos aspectos o de diferentes estilos en la letra. Por otra parte, en algunos alumnos se ha encontrado el uso de notaciones y representaciones personales significativas para ellos sobre la información y el desarrollo de las clases (por ejemplo, el uso de asteriscos o de otros signos para informar de que algún elemento, como puede ser la resolución de un ejercicio, se retoma posteriormente).

Por tanto, aplicando la caracterización anterior, hemos distinguido tres indicadores para medir el mayor o menor nivel de personalización de una unidad por parte de un alumno (un indicador para cada tipo de rasgo). En la Tabla IV.5 se muestra la formulación final de estos tres indicadores y su leyenda de codificación, con la misma estructura que las tablas anteriores. Todos los indicadores están asociados a la cualidad “frecuencia”, siendo de tipo Fr2 al no existir un total de referencia con respecto al cual medir la frecuencia de existencia.

Fr2	**Personalización en la organización de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Unidad organizada sistemáticamente de un modo personal por el alumno; **4**: Rasgos personales de organización bastante generalizados a lo largo de la unidad; **3**: En ocasiones hay rasgos personales de organización; **2**: De manera aislada hay rasgos personales de organización; **1**: No hay rasgos personales de organización.						
Fr2	**Personalización en la presentación de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Unidad presentada sistemáticamente de un modo personal por el alumno; **4**: Rasgos personales de presentación bastante generalizados a lo largo de la unidad; **3**: En ocasiones hay rasgos personales de presentación; **2**: De manera aislada hay rasgos personales de presentación; **1**: No hay rasgos personales de presentación.						
Fr2	**Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Uso sistemático de notaciones y representaciones personales de este tipo por el alumno; **4**: Uso bastante generalizado a lo largo de la unidad; **3**: Uso en ocasiones; **2**: Uso aislado; **1**: No aparecen notaciones y representaciones personales de este tipo.						

Tabla IV.5. Primer trío de indicadores para la variable “Estilo propio en la unidad”, tanto para las UT como las UP.

Hemos ligado cada uno de esos tres indicadores con otro, destinado a medir el nivel de adecuación de los rasgos personales existentes de cada uno de los tres tipos en una unidad. No obstante, pudiera ser que en una unidad no existieran rasgos personales del alumno de un determinado tipo, o estos fueran muy aislados.

Así, para poder realizar una valoración significativa de la adecuación que nos parece que tienen los rasgos de un determinado tipo, hemos considerado que tiene que existir cierta presencia de los mismos. Por tanto, únicamente se ha valorado el indicador de adecuación de un determinado tipo de rasgos en el caso en que la valoración del indicador de presencia fuera mayor o igual que 3 en la escala 1-5. En caso contrario, el indicador de adecuación se ha dejado en blanco, sin valorar.

El segundo trío de indicadores, asociado al primero, de esta variable se presenta en la Tabla IV.6, siguiendo la misma estructura que las tablas anteriores. Al medir la adecuación de un determinado elemento, todos estos indicadores están asociados a la cualidad “calidad”.

		1	2	3	4	5
Ca	**Adecuación de los rasgos personales de organización de la unidad**					
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Consideramos que los rasgos personales de organización existentes son muy adecuados; **4**: Son adecuados; **3**: Son medianamente adecuados; **2**: Son poco adecuados; **1**: Son claramente inadecuados.						
Ca	**Adecuación de los rasgos personales de presentación de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Consideramos que los rasgos personales de presentación existentes son muy adecuados; **4**: Son adecuados; **3**: Son medianamente adecuados; **2**: Son poco adecuados; **1**: Son claramente inadecuados.						
Ca	**Adecuación de las notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Consideramos que las notaciones y representaciones personales de este tipo existentes son muy adecuados; **4**: Son adecuados; **3**: Son medianamente adecuados; **2**: Son poco adecuados; **1**: Son claramente inadecuados.						

Tabla IV.6. Segundo trío de indicadores para la variable “Estilo propio en la unidad”, tanto para las UT como las UP.

IV.3. DIMENSIÓN 2 DE LA PLANTILLA DE ANÁLISIS: COMPLETITUD DE LA UNIDAD

Este apartado se dedica a explicar la estructura de la segunda dimensión considerada en el marco de análisis, y cuyo nombre es el de “completitud de la unidad”. Este nombre se ha mantenido desde la plantilla utilizada en el estudio exploratorio, cambiando únicamente “cuaderno” por “unidad”. Como en el anterior apartado, además de explicar cuáles son las variables e indicadores que componen esta dimensión en la versión final de la plantilla, explicaremos y justificaremos la evolución de la misma hasta esa versión final, teniendo en cuenta tanto la información de interés detectada en las unidades de registro durante su análisis como las ideas teóricas de referencia que hemos desarrollado en el capítulo anterior (apartado III.3).

El contenido que conforman las unidades teóricas y las unidades prácticas tiene una naturaleza muy distinta. Mientras que la UT está principalmente compuesta por las notas escritas que los alumnos desarrollan durante la exposición de los contenidos teóricos por parte del docente, la UP contiene las actividades que el alumno ha intentado resolver, las posibles correcciones de las mismas o la transcripción de actividades durante su corrección en el aula. Este hecho ha provocado la necesidad de utilizar diferentes variables e indicadores según el tipo de unidad, por lo que la plantilla de análisis asociada a esta dimensión es distinta para UT y UP. Así, este apartado está compuesto por dos subapartados. En el primero se desarrolla y explica la plantilla de análisis correspondiente a las UT, mientras que en el segundo se hace lo propio con la plantilla para las UP.

IV.3.1. PLANTILLA DE ANÁLISIS PARA LAS UNIDADES TEÓRICAS

Como acabamos de indicar, en este subapartado vamos a describir y explicar cuál es la plantilla que se ha configurado en esta investigación para analizar las UT, así como la evolución de la misma desde la versión inicial (Tabla II.2, variables e indicadores utilizados en el estudio exploratorio para analizar la Dimensión 2) hasta la versión final.

En la plantilla utilizada en el estudio exploratorio, donde el cuaderno se analizaba globalmente, una de las variables de la Dimensión 2 estaba focalizada en la teoría, y estudiaba la frecuencia con la que existían anotaciones teóricas de cualquier tipo en el cuaderno de un alumno. La metodología del docente en dicho estudio[25], que proporcionaba fotocopias a los alumnos de los apuntes utilizados en la exposición de la teoría, propiciaba una baja presencia de contenido teórico en los cuadernos.

Sin embargo, y como ya hemos explicado anteriormente (apartado IV.1), la metodología de los docentes cuyas aulas participaron en la investigación propia de la tesis doctoral[26] hizo que gran parte de los alumnos sí tomara notas teóricas de las exposiciones de los docentes en sus cuadernos. La mayor cantidad de contenido teórico en los cuadernos, además de hacer que dividiéramos el contenido de cada tema en UT y UP, nos hizo pensar en la posibilidad de dividir el contenido teórico en varios “tipos” o “grupos” para un mejor análisis de cada uno de ellos. Así, teniendo en cuenta tanto las ideas teóricas sobre el *análisis de contenido matemático* expuestas en el subapartado III.3.1 como el contenido que era predominante en las exposiciones de los docentes, establecimos una división del contenido teórico de las exposiciones de los profesores en cuatro grandes grupos, que explicamos a continuación.

[25] La metodología que utilizó el docente cuyos alumnos participaron en el estudio exploratorio se explica detalladamente en el apartado II.2 de esta tesis doctoral.
[26] La metodología que utilizaron los docentes de matemáticas de las aulas participantes en el estudio propio de la tesis doctoral se explica detalladamente en el apartado III.2 de esta tesis doctoral.

Dentro de la *estructura conceptual*[27] hemos considerado dos grandes grupos. El grupo más abundante está conformado por *las definiciones, los resultados teóricos, las fórmulas y las justificaciones*. Incluimos aquí estas últimas aunque, en general, han sido muy escasas y, cuando se han desarrollado, han estado fuera de las expectativas de aprendizaje (Lupiáñez, 2009) fijadas por los docentes para sus alumnos. Además, hemos considerado otro grupo formado por las *observaciones o comentarios de interés realizados por el docente*, generalmente para ligar o relacionar diferentes conceptos o procedimientos, para destacar aspectos clave... Hemos separado este grupo del anterior por tener un mayor carácter explicativo y relacional que los elementos que conforman el grupo anterior, y porque, generalmente, han formado parte del discurso oral de los docentes pero no los han escrito en la pizarra (en contraposición con los elementos del grupo anterior).

Si atendemos a la *fenomenología*, hay que decir que los aspectos fenomenológicos, de forma prácticamente unánime, han sido posteriores a la explicación de un determinado concepto o contenido tratado, y su principal cometido ha sido ejemplificar e ilustrar la aplicabilidad y la utilidad del mismo. Esto se ha realizado a través de ejemplos ilustrativos de un determinado concepto, tópico o técnica. Así, otro de los grandes grupos que utilizaremos será el de los *ejemplos ilustrativos*.

Con respecto a la última categoría del marco de análisis de contenido, los *sistemas de representación*, en el contenido desarrollado por los docentes dentro de este bloque de análisis matemático han tenido una gran influencia las representaciones de tipo gráfico. En muchas ocasiones se han utilizado representaciones gráficas de funciones para presentar o ilustrar los diferentes conceptos tratados. Es por ello que se ha decidido la inclusión de un grupo específico centrado en los *dibujos, esquemas y gráficos*.

Para cada uno de los cuatro grandes grupos o tipos de contenido que se han establecido, hemos creado una variable centrada en el registro de los elementos de cada grupo en sus cuadernos por parte de los estudiantes. Así, la Dimensión 2 para las UT consta de cuatro variables de análisis:

- Variable 1: Completitud de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones
- Variable 2: Completitud de los ejemplos ilustrativos

[27] Partimos de las tres grandes categorías para analizar un contenido matemático propuestas por Rico y colaboradores (Gómez, 2007; Rico *et al.*, 2008; Picado y Rico, 2011; Rico, 2013).

- Variable 3: Completitud de los dibujos, esquemas y gráficos
- Variable 4: Completitud de las observaciones o comentarios de interés realizados por el docente

Dentro de cada una de las cuatro variables, hemos establecido los mismos cuatro indicadores para estudiar su desarrollo. Al igual que en el estudio exploratorio, una de las cualidades que va a medirse es la frecuencia con la que los alumnos registran cada uno de los grupos de elementos. El primero de los indicadores tiene, precisamente, ese propósito. Pero, además, hemos añadido dos indicadores más asociados a la medición de la frecuencia de registro en algunas circunstancias específicas.

La lectura de las ideas del marco sobre *análisis cognitivo* (subapartado III.3.3) y, en particular, la categoría de *expectativas de aprendizaje* fijadas por el docente; ha propiciado que consideremos relevante añadir un indicador para medir la frecuencia de registro de aquellos elementos que tanto el desarrollo de la clase como los diarios escritos por los profesores han evidenciado como “prioritarios” o como más importantes para los docentes (mayor enfatización en diarios, repetición en varias sesiones…).

Además, también se ha considerado relevante añadir un indicador para analizar específicamente la frecuencia de registro de aquellos elementos pertenecientes a la teoría expuesta por los docentes que es expuesta a los alumnos sin que éstos tenga acceso a un medio de referencia que la contenga (por ejemplo, teoría expuesta de forma personal por el docente, sin seguir el libro de texto y sin proporcionar apuntes con el contenido de la sesión a los alumnos). En esta circunstancia es más importante que los alumnos realicen ese registro, puesto que cuentan con menos medios para obtener o extraer esa información directamente.

En el contexto propio de este estudio de tesis doctoral, todos los contenidos estarían en la circunstancia explicada en el párrafo anterior, puesto que toda la teoría ha sido expuesta personalmente por los docentes sin seguir otros medios. Por tanto, en nuestra investigación este tercer indicador sería idéntico al primero. Sin embargo, no sucedería lo mismo en otros entornos en los que, por ejemplo, el docente alternara la explicación utilizando varios medios con teoría desarrollada de forma personal o con el planteamiento de otros ejemplos ilustrativos. De ahí que consideremos interesante y útil la presencia de un indicador de este tipo, para aumentar la transferibilidad de la herramienta de análisis creada a otras situaciones contextuales.

Además de los tres indicadores que miden frecuencias de registro en diferentes circunstancias, se ha añadido un cuarto indicador que pretende medir la calidad asociada al registro de los elementos del grupo correspondiente, es decir, la precisión con la que han quedado registrados dichos elementos en la unidad.

Como hemos comentado, los cuatro indicadores (y sus leyendas de codificación) son idénticos para las cuatro variables. La Tabla IV.7 muestra la plantilla final de análisis para una cualquiera de las cuatro variables de esta Dimensión 2 en las UT. Se presenta la información siguiendo la misma estructura que las tablas anteriores.

<table>
<tr><td>Fr1</td><td>Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Aparecen todos o la inmensa mayoría de los que se dieron en la clase; 4: Aparecen bastantes; 3: Aparecen varios, pero otros no; 2: Aparecen pocos; 1: Aparecen muy pocos o no hay ninguno.</td></tr>
<tr><td>Fr1</td><td>Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Están todos los elementos que han sido considerados como elementos de mayor importancia por el docente; 4: Están todos los elementos importantes, salvo alguno; 3: Están varios de los elementos considerados importantes, pero faltan otros; 2: Están pocos de los elementos importantes, faltan bastantes; 1: No aparece ninguno o casi ninguno de los elementos importantes de la unidad.</td></tr>
<tr><td>Fr1</td><td>Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Están todos los elementos “sin otra referencia” (entendido en el sentido anterior); 4: Están casi todos los elementos en esta situación; 3: Están varios de estos elementos, pero faltan otros; 2: Hay pocos elementos de los que están en esta situación; 1: No están en la unidad los elementos en esta situación.</td></tr>
<tr><td>Ca</td><td>Precisión de los elementos de este tipo registrados</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Todos los elementos que aparecen están expuestos de modo preciso; 4: La mayoría están expuestos de manera precisa, salvo alguna imprecisión poco relevante; 3: Hay algunas imprecisiones en los elementos; 2: Hay bastantes imprecisiones en los elementos, algunas graves; 1: Elementos muy poco precisos, imprecisiones generalizadas y graves.</td></tr>
</table>

Tabla IV.7. Indicadores para cada una de las cuatro variables de la Dimensión 2, “Completitud en la unidad”, para las UT.

IV.3.2. PLANTILLA DE ANÁLISIS PARA LAS UNIDADES PRÁCTICAS

En este segundo subapartado vamos a describir y explicar cuál ha sido la plantilla utilizada en este estudio para analizar las unidades prácticas, así como la evolución de la misma desde la versión inicial (Tabla II.2) hasta la versión final. Estas UP están compuestas por todas las actividades que existen a lo largo de un determinado tema: las actividades que el alumno ha intentado resolver, las posibles correcciones de las mismas o las anotaciones asociadas, o la transcripción de actividades durante su corrección en el aula.

En la Tabla II.2, correspondiente a la Dimensión 2 en el estudio exploratorio, se establecieron tres variables asociados al estudio del contenido práctico: una referida a la completitud de las actividades en el cuaderno, otra asociada al nivel de implicación del alumno en su resolución y una última centrada en la revisión en el cuaderno de las tareas corregidas. El desarrollo del análisis propio de la tesis doctoral puso de manifiesto la pertinencia de las ideas reflejadas por estas variables y sus indicadores, pero, también, la necesidad de evolucionar y completar las mismas.

Finalmente, se han considerado cuatro variables de análisis dentro de la Dimensión 2 para las UP. Cada una de ellas se fija en un aspecto distinto asociado al desarrollo de la tarea: primero, si la propia actividad está en la unidad o no está; segundo, si la actividad está desarrollada o no de manera completa y cuál es el nivel de desarrollo de la misma; tercero, si hay evidencias de que la actividad ha sido intentada por el propio alumno o no; y, por último, si existe una revisión de la tarea durante su proceso de corrección en el aula, en caso de que dicho proceso exista. Así, los nombres de las cuatro variables son:

- Variable 1: Cantidad de actividades registradas en la unidad
- Variable 2: Completitud en el desarrollo de las actividades registradas
- Variable 3: Ejecución por parte del alumno de las actividades registradas en la unidad
- Variable 4: Revisión de las actividades que son corregidas

A continuación, explicamos más detalladamente el objeto de cada una de las variables, los indicadores que las componen y la evolución de las mismas hasta obtener la formulación final del marco de análisis para esta dimensión en las UP.

Variable 1: Cantidad de actividades registradas en la unidad

Esta variable está destinada a medir la cantidad de tareas que aparecen en la unidad práctica del alumno. Ya en el estudio exploratorio hicimos una diferenciación de tres tipos de actividades en relación al modo en que hayan sido propuestas y corregidas por el docente en el aula (Tabla II.2, indicadores de la variable segunda). Esa diferenciación se ha mantenido a lo largo del estudio, y es la siguiente:

- *Actividades propuestas por el docente en el aula y posteriormente corregidas.*

Dentro de este grupo ubicaremos todas las tareas que han sido propuestas en clase por el docente para su resolución por parte de los alumnos (bien en la propia clase o bien fuera de la misma), y que posteriormente fueron corregidas en el aula de forma total o parcial.

- *Actividades propuestas por el docente en el aula pero no corregidas posteriormente*.

En este grupo están todas aquellas tareas que han sido propuestas por el docente para que los alumnos las resuelven (bien en la propia clase o bien fuera de la misma), pero que posteriormente no son corregidas en el aula, bien porque el profesor no lo considera necesario, toma la decisión de no corregirlas o porque no le da tiempo a ello.

- *Actividades registradas en la unidad pero no propuestas por el docente*.

Situamos en este grupo todas aquellas actividades que se encuentran en una determinada UP y que el alumno ha intentado resolver sin que hayan sido propuestas con anterioridad por el docente, ni se hayan realizado en la clase. Es decir, se corresponden con tareas que los alumnos desarrollan de manera autónoma en sus cuadernos o, también, posiblemente, asociadas a su asistencia a clases particulares o a una academia.

Los indicadores inicialmente existentes en el estudio exploratorio hacían únicamente referencia a la presencia o no de estas actividades. Sin embargo, el avance del análisis propio de la tesis doctoral evidenció la presencia de niveles de desarrollo muy distintos en las actividades. Un aspecto que no había sido considerado previamente es el siguiente: mientras que en algunas unidades el desarrollo de estas actividades era completo, en otras, por ejemplo, tan sólo quedaba registrado uno de sus apartados. En una primera reformulación se intentó recoger este aspecto dentro de la propia Variable

1, considerando tres niveles de registro de una unidad: registro total, parcial o sin registro.

Sin embargo, y a medida que avanzó el análisis, el EI se percató de que esta forma de medir no permitía discriminar entre aquellos estudiantes que únicamente registraban algunas actividades, pero lo hacían de forma completa, de aquellos otros que tenían por costumbre registrar todas las actividades, pero sin completar muchas de ellas. Buscando una mejor discriminación de los comportamientos anteriores, se tomaron dos decisiones importantes:

- Se volvió a reformular esta Variable 1, para que únicamente midiera si una actividad está o no presente en una UP.
- Se añadió una variable de análisis en esta dimensión, la que finalmente ha sido la Variable 2, destinada a medir el grado de desarrollo que tienen las actividades existentes en una UP. La inclusión de esta variable vino acompañada, además, de la eliminación de un indicador para las UP en la variable “Organización de la unidad”[28] (Dimensión 1).

Así, esta variable 1 se focaliza concretamente en medir la cantidad de ejercicios que aparecen en la UP de un estudiante, adoptándose el siguiente criterio: para contabilizar una actividad como registrada será necesario que, al menos, se haya escrito el enunciado de la misma, o bien la referencia y los datos de la misma (aunque luego, por ejemplo, no se produzca ningún avance en el intento de resolución de la misma o en su transcripción).

Se ha mantenido la división anteriormente comentada en tres grupos de actividades. Los dos primeros grupos se han valorado a partir del porcentaje de actividades existentes en la unidad con respecto al total de actividades planteadas por el docente de uno u otro tipo. Esto ha dado lugar a dos indicadores asociados a la cualidad “medición de un porcentaje”[29]. Sin embargo, en el tercer grupo, *Actividades registradas en la unidad pero no propuestas por el docente*, la medición se ha realizado a partir del número de actividades de este tipo existentes, al no existir un total de referencia. Se creó un indicador asociado a la cualidad “conteo numérico” para hacer su medición. Además, el avance del análisis ha hecho que se considerara pertinente la inclusión de

[28] Este aspecto ya fue comentado en la evolución de la variable “Organización de la unidad” para las UP (Dimensión 1, subapartado IV.2.1 de esta tesis doctoral).

[29] La asociación entre el intervalo en que se sitúa el tanto por ciento y el valor asignado en la escala 1-5 es el indicado en el subapartado IV.1.2 de esta tesis doctoral para este tipo de indicadores.

un cuarto indicador, también de tipo numérico, para medir el número de contenidos distintos del tema que son tratados en las actividades de este último tipo. La razón para su inclusión es que se detectó que algunos alumnos tenían un número muy alto de actividades desarrolladas de forma autónoma en sus cuadernos, pero mientras que en algunos casos las actividades eran variadas y trataban varios tópicos o aspectos del tema; en otros alumnos todas las actividades se centraban únicamente en un tópico o en un aspecto concreto, o eran del mismo tipo.

Por tanto, la formulación final de esta variable contiene cuatro indicadores para medir su desarrollo, que se muestran en la Tabla IV.8. Esta tabla tiene la misma estructura que las tablas anteriores.

Por	**Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente y posteriormente corregidas que se registran en la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Porcentaje en el intervalo [90,100]; **4**: Porcentaje en el intervalo [70,90); **3**: Porcentaje en el intervalo [40,70); **2**: Porcentaje en el intervalo [20,40); **1**: Porcentaje en el intervalo [0,20).						
Por	**Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente pero no corregidas posteriormente en el aula que se registran en la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Porcentaje en el intervalo [90,100]; **4**: Porcentaje en el intervalo [70,90); **3**: Porcentaje en el intervalo [40,70); **2**: Porcentaje en el intervalo [20,40); **1**: Porcentaje en el intervalo [0,20).						
Num	**Cantidad de actividades a mayores de las propuestas registradas en la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Seis o más; **4**: Cuatro o cinco; **3**: Dos o tres; **2**: Una; **1**: Ninguna.						
Num	**Contenidos abarcados por las actividades a mayores de las propuestas que se registran en la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Hay actividades correspondientes a cuatro o más contenidos distintos; **4**: Hay actividades correspondientes a tres contenidos distintos; **3**: Hay actividades correspondientes a dos contenidos distintos; **2**: Hay actividades correspondientes a un único contenido; **1**: No hay actividades a mayores.						

Tabla IV.8. Indicadores para la variable “Cantidad de actividades registradas en la unidad” para la Dimensión 2 en las UP.

Variable 2: Completitud en el desarrollo de las actividades registradas

Esta segunda variable pretende medir el grado de completitud en el desarrollo de las actividades que quedan registradas en la UP de un estudiante. El origen y la necesidad de una variable centrada en esta característica ya han sido comentadas en el texto escrito para la variable anterior, al surgir ligada a la misma.

El primer aspecto que hay que tener en cuenta es que no existen las mismas oportunidades para que todas las tareas sean o queden desarrolladas de forma completa en el cuaderno de un alumno. En ese sentido, hay una diferencia fundamental entre que la tarea haya sido corregida en el aula (en ese caso, el alumno tiene la posibilidad de revisar, completar o de transcribir la resolución de la tarea) o no lo haya sido (situación en la que no existe esa posibilidad anterior, al menos en el aula). Esta circunstancia ha hecho que se considerara relevante, dentro de esta variable, dividir las tareas en dos grupos, según haya existido o no esa corrección en el aula, y considerar un indicador asociado a cada uno de los dos grupos.

Los dos indicadores serán valorados partiendo del nivel de desarrollo existente en cada una de las actividades. Para medir el grado de desarrollo de una tarea concreta, hemos establecido cinco niveles posibles con una puntuación de 0 a 1 puntos, asignando uno de ellos a cada actividad durante el análisis:

- *Actividad desarrollada de manera completa (*1/1)
- *Actividad bastante desarrollada*, pero no completamente desarrollada (0’75/1)
- *Actividad parcialmente desarrollada*, aproximadamente la mitad (0’5/1)
- *Actividad poco desarrollada* (0’25/1)
- *Actividad registrada pero no desarrollada*, al recogerse únicamente el enunciado o una referencia de la actividad y sus datos (0/1)

Es importante destacar que el objetivo de la variable es medir la completitud en el desarrollo de la tarea, es decir, si se intentan cumplimentar y responder todos los requerimientos que la misma plantea (por ejemplo, todos los apartados o preguntas). Esto es independiente de que las respuestas otorgadas sean satisfactorias o no, lo cual se intenta medir en la siguiente variable, Variable 3.

Una vez realizado el análisis y asignación individual para cada actividad, se suman las puntuaciones otorgadas a las tareas que están dentro de cada grupo y se calcula el porcentaje de puntuación obtenida con respecto a la puntuación máxima posible, que coincide con el número de actividades pertenecientes a ese grupo. Ese porcentaje obtenido es la base para medir el grado de desarrollo de las actividades registradas en la UP de uno u otro tipo, asociando a cada porcentaje un valor en la escala 1-5. La leyenda de codificación inicial para ambos indicadores, con los intervalos para los porcentajes asociados a cada valor de la escala, ha sido la comentada en el subapartado IV.1.2. Sin embargo, en el caso de las tareas que sí fueron corregidas en el aula, los porcentajes de desarrollo obtenidos durante el avance del estudio han sido sustancialmente mayores a los obtenidos en otros porcentajes, lo que ha hecho que el EI considerara pertinente modificar la escala en este indicador, buscando una mejor discriminación entre valores altos y valores muy altos.

Por consiguiente, esta variable contiene dos indicadores para medir su desarrollo, que se muestran en la Tabla IV.9, una tabla con la misma estructura que las tablas anteriores.

<table>
<tr><td>Por*</td><td>Grado de completitud de las actividades registradas que fueron corregidas en el aula</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Porcentaje del grado de completitud en el desarrollo dentro del intervalo [95,100]; 4: Porcentaje en el intervalo [80,95); 3: Porcentaje en el intervalo [65,80); 2: Porcentaje en el intervalo [50,65); 1: Porcentaje en el intervalo [0,50).</td></tr>
<tr><td>Por</td><td>Grado de completitud de las actividades registradas que no fueron corregidas en el aula</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Porcentaje del grado de completitud en el desarrollo dentro del intervalo [90,100]; 4: Porcentaje en el intervalo [70,90); 3: Porcentaje en el intervalo [40,70); 2: Porcentaje en el intervalo [20,40); 1: Porcentaje en el intervalo [0,20).</td></tr>
</table>

Tabla IV.9. Indicadores para la variable "Completitud en el desarrollo de las actividades registradas" para la Dimensión 2 en las UP.

Variable 3: Ejecución por parte del alumno de las actividades registradas en la unidad

Esta tercera variable pretende medir qué grado de implicación, de ejecución y de desarrollo personal satisfactorio por parte del alumno ha existido en la resolución de las diferentes actividades existentes en la UP. Es decir, hasta qué punto las resoluciones de actividades que aparecen en la UP son personales, con intentos propios de resolución del alumno, o bien son transcritas de otros medios; y en caso de que sean intentadas, el grado de satisfacción de los intentos de resolución.

En la plantilla del estudio exploratorio para la Dimensión 2 (Tabla II.2) ya existía una variable, “Implicación del alumno en la resolución de las actividades propuestas”, y varios indicadores asociados, con el propósito de medir cuántas actividades se interpretaban como intentadas por el propio estudiantes y cuántas habían sido transcritas de la corrección en el aula, transcritas del cuaderno de otro estudiante, o desarrolladas en clases particulares o con la guía de otra persona distinta del docente.

En la primera reformulación de la plantilla a partir de la del estudio exploratorio, el EI consideró útil y relevante mantener una variable que midiera cuántas actividades registradas en el cuaderno se interpretaban como intentadas por los propios alumnos, pero simplificando las posibilidades (se revela intentada por el alumno o no se revela intentada por el alumno), y añadiendo un indicador más, destinado a medir el grado de satisfacción que tenían los intentos de resolución realizados por los alumnos. Esto ha dado lugar a dos indicadores dentro de esta variable, que se explican a continuación.

El primer indicador está asociado al porcentaje de actividades que se revelan intentadas por el alumno con respecto al total de actividades existente en la UP. En este sentido, se ha intentado inferir en cada actividad si ésta había sido intentada o no por el alumno, a partir de los datos existentes: notas de campo en las observaciones, diarios de los docentes y datos sobre los procedimientos de corrección de las actividades, presencia de marcas de revisión y de evaluación propias del estudiante, y un análisis comparativo entre las UP de una misma aula. Esta interpretación ha sido algo más limitada en los casos en los que contábamos con menos información contextual, pero el interés del indicador nos ha convencido de su mantenimiento. En todos los casos, el EI ha mantenido un criterio de “duda en favor del estudiante”, es decir, se ha considerado la actividad como intentada siempre que hubiera algún indicio a favor de esa circunstancia.

La razón por la que no se han introducido otro tipo de mecanismos que pudieran facilitar la identificación de esta circunstancia (como podría ser una revisión diaria de los cuadernos o la provisión a los estudiantes de un código de escritura, por ejemplo a través de diferentes colores, para diferenciar los intentos de resolución de las transcripciones o de las correcciones) es que su introducción iría en contra del tipo de estudio que aquí se ha llevado a cabo: un estudio no intervencionista, y buscando detectar el comportamiento natural y habitual de los estudiantes en el desarrollo de los cuadernos, sin influencias que pudieran afectar o alterar ese comportamiento.

En la formulación final de la plantilla, este primer indicador se ha medido a través del porcentaje de actividades que se revelan como intentadas por el estudiante de entre todas las unidades registradas en una UP. Así, en cada actividad se ha inferido si ésta se revelaba o no como intentada por el estudiante. En casos excepcionales, encontrados durante el avance del análisis, hemos considerado la opción de que una actividad fuera *parcialmente intentada.* Esto ha sucedido en casos donde se interpretó que el alumno había intentado la segunda parte de una actividad tras haber transcrito la primera, o en casos donde han existido muestras de intentos de resolución propios del alumno simultáneos a la transcripción de la corrección de la actividad realizada en el aula, mezclándose en la unidad el intento de resolución con el registro de la corrección. Estas actividades se han valorado la mitad que aquellas que sí se han inferido como intentadas por los estudiantes.

A partir de la asignación para cada tarea, se ha obtenido el porcentaje de actividades que se revelaban como intentadas, y, derivado del porcentaje, la medición del indicador en la escala 1-5 utilizando la escala de intervalos habitual.

Además, y como ya hemos comentado anteriormente, se ha considerado pertinente añadir un indicador cuyo objeto sea el de medir el grado de satisfacción que tienen los intentos de resolución desarrollados por el alumno en las actividades que se revelan como intentadas, total o parcialmente (en los casos excepcionales antes comentados). Así, se ha asignado un grado de satisfacción por actividad, valorando en una escala de 1 (nula satisfacción) a 5 (satisfacción muy alta) los intentos de resolución desarrollados. Esta escala ha sido perfeccionada y refinada en el avance del estudio, para adaptarse a las casuísticas encontradas. La escala puede encontrarse en la leyenda explicativa de codificación, en la Tabla IV.10. La valoración final del indicador se ha obtenido realizando la media aritmética de las valoraciones de todas las actividades intentadas, redondeando la media obtenida al natural más cercano. En el apartado IV.8, en el que se explican e ilustran varios aspectos asociados al propio desarrollo del análisis, explicaremos cómo hemos tratado las valoraciones intermedias (por ejemplo, al obtener una media de 3’5). En el caso de que no haya existido ningún intento de resolución en una UP, este segundo indicador se ha dejado en blanco, sin valorar.

La Tabla IV.10 muestra los dos indicadores correspondientes a esta variable y la leyenda explicativa de codificación de cada uno de ellos. La estructura es análoga a la de tablas anteriores.

<table>
<tr><td>Por</td><td>Porcentaje (respecto del total) de actividades que se revelan intentadas por el alumno</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Porcentaje en el intervalo [90,100]; 4: Porcentaje en el intervalo [70,90); 3: Porcentaje en el intervalo [40,70); 2: Porcentaje en el intervalo [20,40); 1: Porcentaje en el intervalo [0,20).</td></tr>
<tr><td>Num</td><td>Grado de satisfacción en los intentos de resolución de las actividades que ha efectuado el alumno</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación (global):
La valoración del indicador será el redondeo a los enteros de la media aritmética de los grados de satisfacción asignados a cada actividad.
Leyenda explicativa para realizar la codificación (en cada actividad intentada):
5: Resolución completamente satisfactoria de la actividad, sin ningún error; 4: Resolución satisfactoria de la actividad, pero con algún error poco relevante o con algún elemento sin desarrollar de forma completa; 3: Resolución parcial de la actividad o resolución medianamente satisfactoria, con algunos errores aunque ninguno de ellos considerado como grave; 2: Intento de resolución poco desarrollado o poco satisfactorio, con uno o varios errores graves en su desarrollo; 1: Mínimo intento de resolución, únicamente realizando un pequeño planteamiento o un intento de resolución rápidamente abortado.</td></tr>
</table>

Tabla IV.10. Indicadores para la variable “Ejecución por parte del alumno de las actividades registradas en la unidad” para la Dimensión 2 en las UP.

Variable 4: Revisión de las actividades que son corregidas

Esta tercera variable pretende estudiar cuál es del grado de revisión, de corrección, de compleción y de mejora desarrollado por los alumnos en sus UP en aquellas actividades que, habiendo sido intentadas por los alumnos, son posteriormente corregidas. En la inmensa mayoría de ocasiones, esa corrección es realizada en la propia clase (bien por el docente o por algún alumno bajo la supervisión del profesor) aunque, en algún caso excepcional, pudiera ser guiada o llevada a cabo por un profesor externo a la dinámica del centro (profesor de clases particulares, academia).

En el capítulo anterior de la tesis doctoral, dentro de las ideas teóricas de referencia (en concreto, del subapartado III.3.3), ya insistimos en la consideración del error como algo legítimo y natural en el desarrollo de un proceso de aprendizaje, y en que más importante que la presencia de un error es su identificación y su tratamiento adecuado para que el error sirva de “palanca” para el desarrollo del aprendizaje del alumno (Socas, 1997; González *et al.*, 2015).

En el contexto en que se ha desarrollado el estudio propio de la tesis doctoral, han sido los propios alumnos los que, en sus UP, han tenido que realizar de manera autónoma ese proceso de corrección de las actividades intentadas. Este hecho ha llevado asociado diferentes modos de actuación (diferentes modos de indicar la presencia de un error, posibles explicaciones de los errores cometidos…), así como de mejora de la actividad en la UP tras su corrección en el aula. Algunos de esos comportamientos han sido detectados durante el desarrollo del estudio, por lo que se han añadido en el avance del mismo, evolucionando los indicadores asociados inicialmente a esta variable. Explicamos a continuación esa evolución a partir de los indicadores en la plantilla inicial (variable cuarta en la Tabla II.2).

El primero de los indicadores trata de analizar la corrección de los errores cometidos en los intentos de resolución de las actividades y se ha mantenido durante todo el estudio, reformulándose como un indicador asociado a la cualidad “frecuencia”.

El segundo indicador establecido en el estudio exploratorio se dirigía hacia la indicación y la explicación de los errores. En una primera reformulación de la plantilla, este indicador se mantuvo así. Sin embargo, el avance del análisis de las UP puso de manifiesto la necesidad y el interés de separar las dos características (la indicación de los errores cometidos y la explicación de los mismos), para poder valorar individualmente ambas y poder hacer una mejor discriminación de los comportamientos de los estudiantes al corregir las tareas. Así, el indicador inicial dio paso, en la formulación final, a dos indicadores, uno centrado en cada característica.

El tercer y último de los indicadores en la plantilla del estudio exploratorio consideraba la posibilidad de rehacer ejercicios “incorrectamente resueltos”. La introducción del indicador sobre el grado de satisfacción en la variable anterior ha permitido concretar esa circunstancia. Se ha mantenido un indicador con ese propósito, pero considerando como ejercicio “incorrectamente resuelto” aquel que es intentado de forma pobre (con un grado de satisfacción de 1 o de 2 en la escala 1-5 de la variable anterior) o a los apartados resueltos erróneamente dentro de un ejercicio con varios apartados donde puede haber otros correctamente resueltos. El indicador está asociado a la cualidad “frecuencia”, tomando como total de referencia todos los ejercicios en esas situaciones.

Además, se han añadido otros dos indicadores más para medir el grado de desarrollo de esta variable, derivados de las situaciones encontradas durante el desarrollo del estudio. Por una parte, se detectó la presencia, en algunas ocasiones, de mejoras realizadas por los docentes durante la corrección de las actividades (por ejemplo, introducir alguna pregunta o apartado nuevo que se corrige en el momento, o explicar algún método o procedimiento asociado con el tema y derivado del ejercicio que sea distinto de los trabajados hasta entonces). Esos aspectos han sido recogidos en los

Anexos B.2 a B.5, que recogen el desarrollo de las clases en cada una de las cuatro aulas participantes. Así, se ha incluido un indicador de tipo “frecuencia”, destinado a medir cuántas de esas mejoras eran registradas por los alumnos en sus UP.

Durante el avance del estudio, y dado que se descubrieron diferencias importantes entre alumnos en este sentido, el EI consideró pertinente añadir un indicador más cuya pretensión era medir si los alumnos completan o no las actividades en sus UP durante la corrección de las mismas (recogiendo partes que no hubieran desarrollado o, en caso de que existieran, otros procedimientos de resolución distintos del suyo). Este indicador también se ha considerado asociado a la cualidad “frecuencia”, teniendo como total de referencia el número de tareas donde la resolución del alumno es incompleta o en las que se evidenciara la propuesta de resoluciones distintas de la del propio alumno (conocido a partir de la información contextual).

Por tanto, finalmente esta variable consta de seis indicadores para medir su desarrollo. Todos ellos están centrados en diferentes comportamientos asociados a la revisión y corrección de las actividades prácticas, que pueden o no producirse. El objetivo final es que la plantilla detecte y recoja la presencia de estos comportamientos, lo cual nos permita discriminar diferencias en los procesos de revisión de las actividades, y caminar hacia la identificación de diferentes perfiles de elaboración del cuaderno.

La tabla IV.11 recoge los seis indicadores de esta variable junto con sus leyendas de codificación, con la misma estructura que tablas anteriores. Debe resaltarse que existe la opción de que alguno o varios de los indicadores queden en blanco en una UP, en los casos en que no exista información para hacer la valoración. Por ejemplo, si en una UP no se detecta ningún intento de resolución del alumno, únicamente tiene sentido valorar el cuarto indicador de la tabla. Asimismo, si en las actividades de una UP no hay ningún error, no tiene sentido valorar los tres primeros indicadores. Por último, los indicadores quinto y sexto tan sólo se consideran en aquellas UP en las que ha habido alguna actividad en la circunstancia a la que hacen referencia.

Fr1	**Frecuencia en la corrección de sus errores al resolver las actividades**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Corrige todos los errores que ha cometido en sus intentos de resolución; **4**: Corrige bastantes de los errores cometidos; **3**: Corrige algunos de los errores (aprox. la mitad); **2**: Corrige pocos de los errores cometidos; **1**: No corrige sus errores nunca o casi nunca.						

Ca	**Claridad en la indicación de los errores cometidos que corrige**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Indica de forma muy clara los errores cometidos y su corrección; **4**: Los indica de forma clara en la mayoría de ocasiones; **3**: Indica de forma clara bastantes veces los errores cometidos, aunque en otras ocasiones no; **2**: Sólo indica de forma clara algunos de los errores cometidos; **1**: No indica claramente los errores que corrige en la mayoría de ocasiones.						
Fr1	**Explicación de los errores cometidos que corrige**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Explica siempre los errores que ha cometido y corregido; **4**. Explica en bastantes ocasiones los errores cometidos y corregidos; **3**. Explica algunas veces los errores cometidos y corregidos; **2**. Explica alguna vez o pocas veces los errores cometidos y corregidos; **1**. En ninguna ocasión explica los errores cometidos y corregidos.						
Fr1	**Registro de las mejoras efectuadas por el profesor durante la corrección de actividades en el aula**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Registra todas las mejoras de las actividades que ha desarrollado el profesor durante la corrección; **4**. Registra bastantes de estas mejoras; **3**. Registra algunas (aprox. la mitad); **2**. Registra pocas o muy pocas; **1**. No registra ni añade ninguna de las mejoras desarrolladas por el profesor durante la corrección.						
Fr1	**Compleción de actividades durante el proceso de corrección (registro de partes no desarrolladas o toma de resoluciones distintas de la del alumno)**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Completa todas o la gran mayoría de actividades (incompletas o toma de otras resoluciones distintas de la suya); **4**: Completa muchas de las actividades; **3**: Completa algunas de las actividades; **2**: Completa pocas actividades; **1**: Nunca o casi nunca completa las actividades durante el proceso de corrección.						
Fr1	**Rehacimiento de ejercicios con pobres intentos de resolución (con grado de satisfacción 1 ó 2) o de apartados erróneos**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Rehace siempre, bien de forma propia o bien transcribiendo de la corrección, aquellas actividades o apartados que había desarrollado pobremente o con errores graves; **4**: Los rehace generalmente; **3**: Los rehace en ocasiones; **2**: Los rehace pocas veces; **1**: Nunca o casi nunca los rehace.						

Tabla IV.11. Indicadores para la variable "Revisión de las actividades que son corregidas" para la Dimensión 2 en las UP.

IV.4. DIMENSIÓN 3 DE LA PLANTILLA DE ANÁLISIS: UTILIDAD DE LA UNIDAD COMO INSTRUMENTO PARA FACILITAR EL ESTUDIO O LA REVISIÓN POSTERIOR POR PARTE DEL ALUMNO

Esta tercera dimensión tiene por objetivo principal estudiar cuál es la intención mostrada por el alumno para conseguir que su cuaderno (y las unidades que lo componen) sean un instrumento útil para él durante su estudio de la materia, bien en el propio momento de la elaboración o bien en una revisión posterior del mismo. Mediremos el nivel de desarrollo de esa intencionalidad a través de diferentes rasgos o elementos que consideramos relacionados con la misma. Esta dimensión se compone de una única variable (a la que hemos dado el mismo nombre que la dimensión) y de varios indicadores asociados con la presencia de los rasgos y elementos antes comentados. La introducción de la variable únicamente responde al interés por mantener la misma estructura para la plantilla, con tres niveles: dimensión, variables e indicadores; aunque aquí resulte un poco ficticio al existir tan sólo una variable dentro de esta dimensión.

Consideramos que esta dimensión tiene una alta importancia en esta investigación, puesto que nos puede indicar la presencia de algunas diferencias entre estudiantes al elaborar el cuaderno, que estén asociadas a los diferentes modos en que los alumnos puedan utilizar este instrumento en su estudio de las matemáticas; aspectos en los que profundizaremos en una fase posterior a través de entrevistas a algunos de los alumnos participantes.

Existen aspectos de las unidades, derivados del propio desarrollo de la clase, entre los cuales es menos probable que existan diferencias importantes entre alumnos en su contenido (aunque sí en que los estudiantes decidan o no registrarlo). Por ejemplo, al tomar notas de la teoría expuesta por el docente, o al resolver un límite o una derivada. Sin embargo, hay otros aspectos que sí pueden evidenciar diferencias en el contenido más ligados a la utilización posterior de la herramienta. Por ejemplo, en la escritura de aspectos o comentarios más allá de los que conforman el contenido teórico, de los pasos a seguir en la resolución de un ejercicio, de aclaraciones, de aspectos personales sobre la comprensión del alumno, de aspectos didácticos sobre el desarrollo de la clase o la evaluación de la asignatura…

Tanto en el subapartado III.3.2 (marco teórico del estudio exploratorio) como en el subapartado III.3.4, ya comentamos algunas ideas teóricas importantes asociadas a la escritura de los estudiantes, diferentes tipos de escritura que pueden detectarse

(Britton *et al.*, 1975, Shield & Galbraith, 1998) y su relación con la ubicación para los alumnos del cuaderno dentro de un *dominio público* o de un *dominio privado* (Fried & Amit, 2003). Esta dimensión aquí presentada intenta detectar la presencia y la frecuencia de utilización de la escritura o de otro tipo de signos asociados a algunas situaciones de mayor interés o que han mostrado una mayor incidencia en el avance del análisis realizado.

En el estudio exploratorio ya existía una dimensión, la Dimensión 3, con una pretensión similar a esta, cuyo nombre inicial fue: "Intención del cuaderno como instrumento para el aprendizaje del alumno", y que constaba de cuatro indicadores[30]. Un primer aspecto que ha evolucionado desde la plantilla inicial ha sido el nombre de la dimensión. En una primera reformulación se sustituyó por "Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el aprendizaje del alumno". Posteriormente, y gracias a las sugerencias de varios expertos en Didáctica de la Matemática, se sustituyó la palabra "aprendizaje" (dado que el aprendizaje no se desarrolla igual en todos los alumnos, y lo que puede facilitar el aprendizaje a algunos alumnos para otros puede no significar nada) por "estudio o revisión posterior", llegando a la formulación final del nombre de la Dimensión 3.

Como hemos comentado, esta dimensión tendrá, a efectos de mantener la misma estructura que el resto de dimensiones, una variable del mismo nombre que la dimensión, y a la que nos referiremos como Variable 1. Algunos de los indicadores de esta variable serán análogos en unidades teóricas y unidades prácticas, pero otros serán específicos de alguna de las unidades. Por esa razón vamos a dividir este apartado en dos subapartados. En el primero se desarrolla y explica la plantilla de análisis correspondiente a las UT, mientras que en el segundo se hace lo propio con la plantilla para las UP. En ambos casos se explica también la evolución de la misma desde la plantilla inicial para el estudio exploratorio a la formulación final.

IV.4.1. INDICADORES DE LA VARIABLE PARA LAS UNIDADES TEÓRICAS

Inicialmente, y debido al contexto de desarrollo del estudio, la mayoría de indicadores propuestos y utilizados en el estudio exploratorio dentro de esta dimensión estaban relacionados con aspectos prácticos. No obstante, en el estudio propio de la tesis doctoral, la división entre UT y UP hizo necesario repensar y reformular los indicadores para ambos tipos de unidades.

[30] Estos indicadores están en el subapartado II.3.2 de la tesis doctoral, dentro de la parte correspondiente a la Dimensión 3.

De los indicadores iniciales, el segundo y el tercero, que hacían mención al registro y la escritura de comentarios y aclaraciones durante la resolución y la realización de actividades, podían ser trasladados sin problemas a las UT. Así se hizo en una primera reformulación, sustituyendo el hecho de que las anotaciones estuvieran ligadas a las actividades con que se ligaran al desarrollo de la teoría registrada. No obstante, en el estudio exploratorio se diferenció entre los comentarios y aclaraciones tomados del discurso del docente durante la realización de actividades y los que eran propios del estudiante (de ahí la presencia de dos indicadores). Esta distinción, aunque interesante, no ha podido mantenerse en el estudio propio de la tesis doctoral, puesto que no se contaba con información contextual suficiente para poder realizar siempre dicha distinción.

Por tanto, estos dos indicadores iniciales han evolucionado a un indicador para ambos tipos de unidades (UT y UP), de formulación análoga y asociado a la cualidad “frecuencia”, que pretende medir la frecuencia en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones (más allá del mero contenido teórico en las UT y de la mera escritura de los pasos, procesos y explicaciones asociadas a las actividades en las UP). No obstante, la casuística y características de los comentarios, observaciones y aclaraciones encontradas y su relación con aspectos muy diversos de los contenidos, de los momentos de la clase y del estudio de los alumnos nos ha llevado a desarrollar una caracterización posterior más detallada de estos elementos. Esta caracterización se expone en el capítulo VII de la tesis doctoral.

En el avance del estudio se han añadido dos indicadores más para analizar la Dimensión 3 tanto en las UT como en las UP. Por una parte, y debido a la importancia que han tenido las representaciones de tipo gráfico en las exposiciones de los docentes, y a la diferencia entre el medio utilizado para su trazado (pizarra) y su explicación (discurso oral), se ha considerado importante añadir una variable para medir la escritura de explicaciones sobre lo que representan las gráficas realizadas durante la unidad. Este indicador ha sido añadido tanto a las UT como a las UP, formulado de manera análoga, aunque en las UT se considera que la explicación esté ligada a la teoría de la unidad y en las UP que esté ligada a la actividad o actividades en que se enmarca dicha representación gráfica.

El avance en el análisis de los cuadernos también nos permitió detectar la presencia de anotaciones o signos más personales, propios de una escritura expresiva y dentro de un dominio más privado (Britton *et al.*, 1975; Fried & Amit, 2003). Así, se creó un indicador para reflejar la presencia de este tipo de anotaciones o señales, directamente vinculadas a la señalización o indicación acerca de la presencia de partes comprendidas y no comprendidas en el desarrollo de la unidad, o la presencia y la escritura de dudas. Como el apartado anterior, este indicador ha sido añadido tanto a las UT como a las UP, formulado de manera análoga, en las UT ligado a la explicación y a los aspectos teóricos y en las UP ligado al desarrollo de las actividades.

Por consiguiente, esta variable, finalmente, consta de tres indicadores para medir su desarrollo en las unidades teóricas. Estos tres indicadores y sus leyendas de codificación se muestran en la Tabla IV.12, una tabla del mismo estilo que las anteriores. Los tres indicadores son de tipo frecuencial, aunque de diferente tipo. En el caso del segundo indicador sí hay un total de referencia para medir la frecuencia (por lo que es un indicador de tipo “Fr1”, mientras que en el primer y tercer indicador no lo hay, al ser elementos que dependen directamente del alumno (indicador de tipo “Fr2”).

Fr2	**Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Registro muy frecuente a lo largo de la unidad; **4**: Registro bastante frecuente; **3**: Se registran varios/as a lo largo de la unidad; **2**: Se registran pocos/as, el registro tiene un carácter más bien aislado; **1**: No se registran comentarios, observaciones o aclaraciones.						
Fr1	**Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con la teoría de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Todos o la inmensa mayoría de los dibujos, esquemas y gráficos están explicados y se explicita su relación con la teoría de la unidad; **4**: Muchos de ellos están explicados; **3**: Algunos de ellos están explicados, otros no; **2**: Alguno de ellos está explicado, pero la mayoría no; **1**: No se explican los dibujos, esquemas y gráficos ni su relación con la teoría de la unidad.						
Fr2	**Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en la teoría de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Hay señales frecuentes que indican partes comprendidas, no entendidas o la existencia de dudas a lo largo de la unidad teórica; **4**: Algunas señales de este tipo a lo largo de la unidad; **3**: Pocas señales a lo largo de la unidad; **2**: Alguna señal aislada; **1**: No hay señales de este tipo en la unidad.						

Tabla IV.12. Indicadores para la única variable de la Dimensión 3 en las UT.

IV.4.2. INDICADORES DE LA VARIABLE PARA LAS UNIDADES PRÁCTICAS

Como ya se ha comentado a lo largo del subapartado anterior, los tres indicadores de la Tabla IV.12 también se han considerado finalmente para el estudio de las UP, aunque reescribiendo algunos de los títulos y de las leyendas de codificación para que hagan referencia a las actividades y a los aspectos prácticos.

Además, en este tipo de unidades se ha considerado pertinente la inclusión de un indicador más. Dicho indicador tiene su origen en el primero de los indicadores que se consideraban en el estudio exploratorio: "Escritura explícita de los procesos mentales seguidos en la resolución de los ejercicios". Dicho indicador se ha mantenido en la plantilla final, aunque se ha añadido la referencia a la escritura de los pasos y procesos seguidos en la resolución de tareas, es decir, lo que Van Dormolen (1985, citado en Shield & Galbraith, 1998) llamaba un lenguaje de tipo *procedimental*. Dado que el indicador pretende medir la asiduidad con la que aparece este tipo de escritura, el indicador está asociado a la cualidad "frecuencia".

Por último, existía un cuarto indicador en la plantilla del estudio exploratorio, que se centraba en valorar si el estudiante utilizaba el cuaderno de modo personal para constatar y contrastar si había asimilado los conceptos o técnicas presentadas en un determinado tema. En una primera reformulación de la plantilla se mantuvo este indicador. Sin embargo, han existido varias circunstancias que, finalmente, nos han llevado a eliminarlo:

- La dificultad para su valoración: en muchas ocasiones, la valoración de este indicador terminaba basándose en información ya recogida en otros indicadores (como que los estudiantes hicieran en su cuaderno, de modo autónomo, otras actividades distintas de las planteadas por el docente, o que rehicieran tareas resueltas de forma poco satisfactoria).
- El desconocimiento, únicamente a través del análisis de los cuadernos, de información real sobre cuál era el uso que hacían los estudiantes del cuaderno en su estudio de la materia (un aspecto sobre el que, posteriormente, hemos realizado entrevistas a varios alumnos participantes).

Así, finalmente son cuatro los indicadores de los que consta esta variable para medir el grado de desarrollo de la misma. Los cuatro indicadores son recogidos en la Tabla IV.13, junto con las leyendas explicativas de codificación de cada uno de ellos. Al igual que sucedía con los indicadores para las UT, todos los indicadores están asociados a la medición de la frecuencia de aparición de los diferentes aspectos considerados.

Fr2	**Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Registro muy frecuente a lo largo de la unidad; **4**: Registro bastante frecuente; **3**: Se registran varios/as a lo largo de la unidad; **2**: Se registran pocos/as, el registro tiene un carácter más bien aislado; **1**: No se registran comentarios, observaciones o aclaraciones.						
Fr1	**Asiduidad en la escritura de los pasos y procesos seguidos para resolver las actividades**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Escritura de los pasos y procesos seguidos en todas o la mayoría de las actividades; **4**: Escritura en muchas de las actividades; **3**: Escritura en algunas de las actividades, o los pasos y procesos se escriben de forma incompleta en muchos casos; **2**: Escritura en pocas actividades, o con deficiencias generalizadas en la escritura de pasos y procesos; **1**: No se escriben los pasos y procesos seguidos.						
Fr1	**Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con las actividades de la parte práctica**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Todos o la inmensa mayoría de los dibujos, esquemas y gráficos están explicados y se explicita su relación con las actividades correspondientes; **4**: Muchos de ellos están explicados; **3**: Algunos de ellos están explicados, otros no; **2**: Alguno de ellos está explicado, pero la mayoría no; **1**: No se explican los dibujos, esquemas y gráficos ni su relación con las actividades de la unidad.						
Fr2	**Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en las actividades que componen la parte práctica**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Hay señales frecuentes que indican partes comprendidas, no entendidas o la existencia de dudas a lo largo de la unidad teórica; **4**: Algunas señales de este tipo a lo largo de la unidad; **3**: Pocas señales a lo largo de la unidad; **2**: Alguna señal aislada; **1**: No hay señales de este tipo en la unidad.						

Tabla IV.13. Indicadores para la única variable de la Dimensión 3 en las UP.

IV.5. DIMENSIÓN 4 DE LA PLANTILLA DE ANÁLISIS: RIQUEZA Y CORRECCIÓN DEL LENGUAJE NATURAL UTILIZADO EN LA UNIDAD

La cuarta dimensión está centrada en el estudio del lenguaje natural que utilizan los alumnos en el cuaderno (y en sus unidades de registro). Con el término *lenguaje natural* nos referimos a todo el lenguaje verbal existente en el cuaderno, sin restringirnos únicamente a la terminología matemática. Este último aspecto se estudiará con mayor profundidad dentro de la Dimensión 5 (apartado IV.6).

En el estudio exploratorio ya se consideraba una dimensión para el estudio de este tipo de lenguaje. No obstante, el poco contenido de texto verbal en los cuadernos hizo que esta dimensión se desarrollara poco durante ese estudio, y se consideraran cuatro indicadores genéricos para su análisis. Los indicadores estaban centrados en el vocabulario, la sintaxis, la puntuación y la ortografía (subapartado II.3.2, Dimensión 4).

En una primera reformulación de dicha plantilla inicial, evolucionaron sustancialmente los cuatro indicadores con la introducción de las categorías propuestas por Morales (2004) para revisar un texto escrito, y que se recogen en el capítulo anterior (subapartado III.3.4). Así, los cuatro indicadores iniciales dieron paso a cuatro variables de análisis, cada una de ellas con varios indicadores para medir su desarrollo. Esas cuatro variables se han mantenido durante el avance del estudio, y son las siguientes:

- Variable 1: Vocabulario
- Variable 2: Gramática y sintaxis
- Variable 3: Puntuación
- Variable 4: Ortografía

En la formulación final de la plantilla asociada a esta dimensión, tanto las cuatro variables como sus correspondientes indicadores han sido los mismos para las UT y las UP. No obstante, el contexto dentro del cual se ha desarrollado la investigación y recogido los datos ha propiciado que la cantidad de texto escrito, generalmente, haya sido mayor en las UT que en las UP, derivado del registro de los contenidos teóricos a partir de las exposiciones de los docentes. En todo caso, debe resaltarse que la cantidad de texto creado y redactado por el propio estudiante ha sido muy reducido o inexistente en muchas unidades, al provenir de la transcripción de la teoría expuesta o de los pasos seguidos en la resolución de un ejercicio, y no proponerse por el docente ninguna tarea en la que el producto esperado fuera un texto elaborado (por ejemplo, redactar un pequeño informe ligado al estudio de alguna situación problemática).

Estructuramos este apartado en cuatro subapartados, uno para cada una de las cuatro variables: el subapartado IV.5.1 para la Variable 1, “Vocabulario”; el subapartado IV.5.2 para la Variable 2, “Gramática y sintaxis”; el subapartado IV.5.3 para la Variable 3, “Puntuación”; por último, el subapartado IV.5.4 para la Variable 4, “Ortografía”. En cada uno de los subapartados explicaremos los indicadores que se han utilizado para cada variable y el modo en que éstos se aplican.

IV.5.1. VARIABLE 1: VOCABULARIO

Con esta variable queremos medir el nivel y la calidad del vocabulario utilizado por un estudiante en el lenguaje natural escrito en una unidad. Para poder medir esta característica, es necesario fijarse en texto que haya sido pensado, elaborado y redactado por el propio estudiante. Así, para analizar esta variable se ha adoptado el siguiente criterio: no se ha valorado texto proveniente de la transcripción de elementos propios de la exposición teórica de los docentes, ni de la corrección de ejercicios realizada en el aula, puesto que no es texto producido y elaborado por el propio estudiante. Este criterio ha ocasionado que, en muchas unidades, no haya existido texto suficiente para hacer una valoración representativa de la variable, en cuyo caso sus indicadores se han dejado en blanco y se ha explicado la circunstancia.

Para medir esta variable se han considerado los indicadores propuestos por Morales (2004) para analizar y evaluar el vocabulario de un texto: la variedad del vocabulario utilizado y la propiedad del vocabulario (es decir, su adecuación para el carácter del texto y lo que éste pretende transmitir). Así, se elaboraron leyendas de codificación para ambos indicadores, asociados a la cualidad "calidad" y mantenidos en todo el análisis. La Tabla IV.14 recoge dichos indicadores y leyendas de codificación.

Ca	**Variedad y amplitud del vocabulario de la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: El vocabulario es muy amplio y variado, gran uso de sinónimos y palabras concretas; **4**: Vocabulario amplio y variado; **3**: El vocabulario es, en ocasiones, amplio y variado, aunque en otras zonas es algo repetitivo; **2**: Vocabulario pobre en amplitud y variedad, bastante uso de palabras genéricas, repetición de nexos; **1**: El vocabulario es muy pobre, uso de palabras genéricas, no concretas, repetición abundante de palabras y nexos.						
Ca	**Propiedad del vocabulario de la unidad (adecuación y comprensión)**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: El vocabulario es muy adecuado y comprensible, el estudiante siempre se expresa con propiedad; **4**: Vocabulario mayoritariamente adecuado y comprensible; **3**: Se mezclan zonas con vocabulario adecuado y comprensible, con otras de vocabulario más inadecuado y menor propiedad, o con palabras mal utilizadas; **2**: Vocabulario inadecuado en bastantes ocasiones, mal utilizado, con poca propiedad; **1**: El vocabulario es, en muchos casos, inadecuado, con palabras mal utilizadas o con escasa propiedad.						

Tabla IV.14. Indicadores para la variable "Vocabulario" en UT y UP.

IV.5.2. VARIABLE 2: GRAMÁTICA Y SINTAXIS

Con esta variable se pretende medir tanto la variedad de estructuras sintácticas utilizadas en el lenguaje natural elaborado y redactado por un estudiante como la corrección gramatical y sintáctica de dicho texto. En esta variable hemos adoptado el mismo criterio que en la Variable 1: únicamente se ha aplicado esta variable al texto que hubiera sido pensado, elaborado y redactado por el propio estudiante, no en textos transcritos o provenientes de otro medio. De nuevo, este criterio ha ocasionado que, en muchas unidades, no haya existido texto suficiente para hacer una valoración representativa de esta variable, en cuyo caso sus indicadores se han dejado en blanco, explicándose la circunstancia.

Para analizar esta variable, se han tomado como referencia dos de los aspectos indicados por Morales (2004) para medir la gramática y la cohesión de un texto, como son la concordancia en género, número y persona y el uso adecuado de elementos conectores. Además, hemos considerado un indicador más asociado a la riqueza y la variedad de las estructuras sintácticas empleadas en el texto y a su adecuada utilización. Estos tres indicadores se han mantenido a lo largo del avance del estudio, refinándose sus leyendas explicativas para cubrir las diferentes posibilidades detectadas. Los tres indicadores miden una cualidad asociada a la "calidad".

La Tabla IV.15 recoge la formulación final de los tres indicadores considerados en esta variable y sus leyendas de codificación. La tabla tiene la misma estructura que las tablas precedentes.

Ca	**Riqueza y variedad de las estructuras sintácticas empleadas**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Las estructuras son muy ricas y variadas, empleadas de manera óptima; **4**: Estructuras bastante ricas y variadas, mayoritariamente bien empleadas; **3**: Hay cierta variedad de estructuras (con algunas repeticiones), generalmente bien utilizadas; **2**: Las estructuras son poco ricas, repetitivas, a veces con un uso poco adecuado; **1**: Repetición constante de las mismas estructuras, en muchas ocasiones de forma poco adecuada o errónea.						
Ca	**Corrección en el uso de concordancias (género, número, persona) y tiempos verbales**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Uso óptimo de concordancias y tiempos verbales, sin fallos; **4**: Uso adecuado de concordancias y tiempos verbales, con algún error leve; **3**: Hay algunos (pocos) fallos de concordancia o de elección del tiempo verbal; **2**: Los tiempos verbales son poco adecuados o hay varios errores de concordancia; **1**: Hay errores de concordancia generalizados y la elección del tiempo verbal es inadecuada en muchas ocasiones.						

Ca	**Corrección en el uso de conectores y organizadores de contenido**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Uso óptimo y variado de conectores y organizadores de contenido; **4**: Uso adecuado, con algún error leve o repetición; **3**: Uso medianamente adecuado, a veces hay demasiada repetición o algunos (pocos) fallos en el uso; **2**: Uso poco adecuado, con repetición frecuente o bastantes fallos en su uso; **1**: Uso inadecuado, con frecuentes errores de utilización.						

Tabla IV.15. Indicadores para la variable “Gramática y sintaxis” en UT y UP.

IV.5.3. VARIABLE 3: PUNTUACIÓN

Esta tercera variable pretende analizar la calidad en la utilización de los signos de puntuación en el lenguaje natural existente en la unidad por parte del alumno. En este caso, a diferencia de las dos variables anteriores, el análisis sí se ha hecho extensivo a todo el lenguaje natural existente en la unidad, independientemente de que fuera redactado por el propio estudiante o fuera transcrito de la exposición teórica o de la corrección de alguna actividad.

Morales (2004), en sus categorías para revisar y evaluar un texto escrito, recoge una categoría referente al uso adecuado de la puntuación y de los signos de puntuación. En una “lectura superficial” de los documentos a analizar, el EI detectó la necesidad de diferenciar que los signos de puntuación que aparecieran en un texto estuvieran correctamente utilizados y que, de forma global, la puntuación en un texto fuera correcta y completa, puesto que podían faltar signos de puntuación necesarios.

Este hecho nos llevó a considerar dos indicadores para el estudio de esta variable: uno centrado en la corrección de los signos de puntuación utilizados y otro centrado en la presencia o no de los signos de puntuación necesarios en la unidad. No obstante, sí que es cierto que existe cierta relación entre los dos indicadores, puesto que la progresiva falta de los signos de puntuación necesarios hace más complicado considerar que se haga un uso correcto de los mismos cuando aparecen. Este aspecto se recoge en las leyendas de codificación de los dos indicadores.

La Tabla IV.16 muestra los dos indicadores finalmente considerados y sus leyendas explicativas de codificación. La tabla tiene la misma estructura que las anteriores.

Ca	**Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Uso muy adecuado de los signos de puntuación existentes; **4**: Uso adecuado de los signos de puntuación existentes, aunque puede faltar alguno de los necesarios; **3**: Uso parcialmente correcto de los signos de puntuación, con algunos errores de uso, o corrección difusa por el pobre número de signos de puntuación en relación a los necesarios; **2**: Mal uso de los signos de puntuación existentes, con bastantes errores, algunos graves; **1**: Uso muy inadecuado de los signos de puntuación existentes, con constantes errores en su utilización, algunos graves.						
Fr1	**Presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Están todos los signos de puntuación que se necesitan; **4**: Están casi todos los signos de puntuación que se necesitan, pero falta alguno; **3**: Hay bastantes signos de puntuación, pero faltan algunos; **2**: Faltan bastantes de los signos de puntuación necesarios en la unidad, pudiendo provocar que se transmita de manera incorrecta alguna idea; **1**: Faltan muchos signos de puntuación, de forma generalizada a lo largo de la unidad, o aquellos que son necesarios para expresar adecuadamente las ideas que se quieren transmitir.						

Tabla IV.16. Indicadores para la variable “Puntuación” en UT y UP.

IV.5.4. VARIABLE 4: ORTOGRAFÍA

Esta cuarta y última variable dentro de la Dimensión 4 tiene por objeto medir cuál es el nivel de corrección en la ortografía del lenguaje natural existente en la unidad. En este caso, como en la variable anterior de puntuación, para valorar la corrección de la ortografía se ha considerado todo el texto escrito (tanto elaborado y redactado por el estudiante como transcrito del desarrollo de la clase o de otro medio).

De nuevo, la referencia utilizada para determinar los indicadores de análisis en esta variable ha sido la categorización de Morales (2004); en concreto, los asociados a la ortografía: el uso adecuado de las letras (diferenciando, en nuestro caso, entre el uso adecuado de grafemas y la utilización adecuada de las letras mayúsculas), la separación adecuada de las palabras y el uso adecuado de las tildes.

Esta categorización ha dado lugar en nuestro estudio a cuatro indicadores para medir el grado de desarrollo de la calidad y la corrección ortográfica de un texto, distinguiendo entre cuatro posibles aspectos en los que pueden existir incorrecciones. Los cuatro indicadores, y sus correspondientes leyendas explicativas, se presentan en la Tabla IV.17, y han sido asociados a la cualidad “ausencia”, en concreto del tipo Au2.

Au2	**Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o fonemas similares (b/v, ll/y, h)**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: No hay faltas de ortografía de este tipo en la unidad; **4**: Hay una falta de ortografía de este tipo, que consideramos como no muy grave –en una palabra poco usual o poco conocida-; **3**: Hay dos o tres fallos que consideramos no muy graves o un fallo considerado muy grave; **2**: Hay dos o tres fallos de este tipo que consideramos como graves; **1**: Hay más de tres fallos de este tipo que consideramos como graves.						
Au2	**Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: No hay faltas de ortografía de este tipo en la unidad; **4**: Hay una falta de ortografía de este tipo, que consideramos como no muy grave –palabra poco usual o poco conocida-, o alguna ambigüedad sobre la separación o no de algunas palabras (espacio de separación exiguo); **3**: Hay dos o tres fallos que consideramos no muy graves, un fallo considerado como muy grave o ambigüedades frecuentes relacionadas con la separación entre palabras; **2**: Hay dos o tres fallos de este tipo que consideramos como graves; **1**: Hay más de tres fallos de este tipo que consideramos como graves.						
Au2	**Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de mayúsculas**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: Uso muy adecuado de las letras mayúsculas; **4**: Uso adecuado de las letras mayúsculas, con algún descuido o alguna ambigüedad entre mayúsculas y minúsculas; **3**: Algunos (pocos) fallos o ambigüedades en el uso de las mayúsculas; **2**: Varios errores en el uso de las mayúsculas, entre los cuales algunos que consideramos como graves; **1**: Mal uso reiterado de las letras mayúsculas a lo largo de toda la unidad.						
Au2	**Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: No hay fallos de acentuación a lo largo de la unidad; **4**: Hay uno o dos fallos de acentuación, relacionados con los casos más problemáticos –tildes diacríticas, interrogativos-; **3**: Hay varios fallos de acentuación a lo largo de la unidad, entre ellos alguno que consideramos como grave; **2**: Hay varios fallos de acentuación que consideramos como graves a lo largo de la unidad; **1**: Mala acentuación reiterada a lo largo de la unidad, o ausencia de la misma, desconocimiento de las reglas de acentuación.						

Tabla IV.17. Indicadores para la variable “Ortografía” en UT y UP.

IV.6. DIMENSIÓN 5 DE LA PLANTILLA DE ANÁLISIS: NIVEL DE CORRECCIÓN MATEMÁTICA DE LA UNIDAD: ERRORES EXISTENTES

Esta quinta y última dimensión está centrada en el análisis del nivel de corrección matemática (asociado a la cualidad de ser correcto) que presentan las unidades de los alumnos y lo registrado en cada una de ellas, ya sean UT o UP. Nuestra posición sobre el error en matemáticas y algunos antecedentes de interés ya han sido comentados en partes anteriores de esta memoria[31], así como la importancia de la detección y el tratamiento adecuado de los errores. En la Dimensión 2 para las UP ya hemos establecido una variable (con varios indicadores) para analizar el modo explícito en que los alumnos marcan y tratan los errores en los que incurren al resolver actividades en sus cuadernos (ver Tabla IV.11, en el apartado IV.3).

Por una parte, la Dimensión 5 pretende analizar cuál ha sido la riqueza y la corrección del lenguaje y de los sistemas de representación de los conceptos matemáticos que han sido utilizados por el estudiante a lo largo de una unidad. Además, tomando como referencia las variables ya utilizadas para esta dimensión en el estudio exploratorio (Tabla II.3) y los aspectos de interés detectados en el avance del estudio propio de la tesis doctoral, se ha considerado una pequeña categorización o tipología de los errores encontrados en una unidad que sirve de base para el desarrollo del análisis.

En su versión final, esta dimensión se compone de cinco variables para su estudio, cada una con sus correspondientes indicadores. De ellas, hay tres que son comunes para las UT y UP. Conjuntamente con estos tres indicadores, se consideran otros dos indicadores más asociados únicamente a las UP, al considerar que los errores a los que hacen referencia aparecerán en los intentos de resolución de actividades por parte de los alumnos, y no en la toma de notas de las exposiciones teóricas de los docentes. Indicamos a continuación los nombres finales de las cinco variables, explicitando además si pertenecen al análisis de los dos tipos de unidades o únicamente a las UP:

- Variable 1: Riqueza y corrección de los sistemas de representación de conceptos y del lenguaje matemático existente en la unidad (común a UT y UP)
- Variable 2: Corrección de los elementos transcritos (común a UT y UP)
- Variable 3: Corrección de los cálculos y los procesos asociados a la aplicación de reglas y propiedades aritmético-algebraicas en la unidad (variable sólo considerada en las UP)

[31] Las partes a las que nos referimos son el subapartado II.3.2 (en concreto, la que hace referencia a la Dimensión 5) y el subapartado III.3.3.

- Variable 4: Corrección de los procesos seguidos (distintos de los aritmético-algebraicos) (variable sólo considerada en las UP)
- Variable 5: Existencia de errores que pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de algún concepto (común a UT y UP)

A excepción de la Variable 4, todas las variables tienen su origen en la plantilla de análisis utilizada en el estudio exploratorio (ver Tabla II.3), aunque todas ellas han sufrido una evolución durante el avance de esta investigación doctoral.

Dividiremos este apartado en dos subapartados. En el primero de ellos se van a explicar las variables comunes a las UT y las UP, con los indicadores de análisis utilizados y la evolución de los mismos hasta su formulación final. En el segundo de los subapartados se hará lo propio con las dos variables específicas para las UP.

IV.6.1. VARIABLES COMUNES PARA EL ANÁLISIS DE ESTA DIMENSIÓN EN AMBOS TIPOS DE UNIDADES

En este subapartado, como acabamos de indicar, se explicarán las tres variables consideradas en esta Dimensión 5 que han sido comunes a ambos tipos de unidades. Como hemos hecho con el resto de variables, se mostrarán y explicarán sus indicadores de análisis y la evolución de variables e indicadores durante el avance del estudio. Explicaremos por separado lo concerniente a cada una de ellas.

Variable 1: Riqueza y corrección de los sistemas de representación de conceptos y del lenguaje matemático existente en la unidad

Si observamos la Tabla II.3, que contiene las variables e indicadores considerados para esta Dimensión 5 en el estudio exploratorio, la primera de las variables hacía referencia al “Lenguaje matemático utilizado en el cuaderno”. Esa variable es el germen de esta Variable 1, que vamos a desarrollar a continuación.

Una lectura de los indicadores señalados en la Tabla II.3 para describir la variable “Lenguaje matemático utilizado en el cuaderno” pone de manifiesto que la variable focalizaba su atención en la frecuencia y corrección de utilización del lenguaje matemático, marcando para esta última característica una diferenciación entre el estudio para la terminología verbal y para el lenguaje simbólico. En una primera reformulación de la plantilla, se mantuvo esta estructura, pero diferenciando también entre terminología y lenguaje simbólico en el estudio de la frecuencia de aparición de cada uno de ellos. Así, en esos momentos la variable constaba de cuatro indicadores de análisis (dos indicadores para la terminología y dos para el lenguaje simbólico).

La lectura de varios trabajos sobre los sistemas de representación de los conceptos matemáticos (Castro y Castro, 1997; Duval, 1999), y el papel fundamental que se atribuye a los mismos como motor para el desarrollo del aprendizaje de conceptos matemáticos[32], nos hizo pensar en la reformulación de esta variable hacia el estudio de los sistemas de representación de los conceptos matemáticos existentes en una unidad. Las dos parejas de indicadores anteriores pueden entenderse como indicadores para estudiar tanto la representación verbal como la representación simbólica del lenguaje y de los conceptos matemáticos. El bloque de contenidos en el que se ha llevado a cabo el análisis es el de Análisis Matemático. Este se basa en el concepto de función, existiendo un amplio consenso en considerar cuatro sistemas de representación básicos para este concepto: la representación verbal, simbólica, gráfica y numérica (Janvier, 1987; Blázquez y Ortega, 2001). Los dos primeros sistemas de representación, verbal y simbólica, sí que eran considerados con la formulación anterior, pero no así los dos restantes.

Debido a este hecho y a la carencia de indicadores específicos para medir y analizar las representaciones de tipo gráfico (especialmente en las UP), se consideró pertinente añadir dos indicadores más, con la misma estructura que las dos parejas ya existentes, pero enfocados en el análisis de la riqueza y corrección de las representaciones de tipo gráfico de los conceptos y del lenguaje matemático que se encontraran en una unidad. Es cierto que en las UT, en ese momento, ya existía una variable destinada al estudio de los dibujos, esquemas y gráficos tomados de la exposición teórica de los docentes (Dimensión 2, variable tercera). No obstante, se decidió añadir los dos indicadores a ambos tipos de unidades, puesto que no todas las representaciones gráficas en las UT de los alumnos se circunscribían a la transcripción de las realizadas por el docente, sino que hubo algunos estudiantes que realizaron gráficos propios ligados a la teoría (por ejemplo, en esquemas resumen de la teoría).

Con respecto al último tipo de representación no considerada hasta ahora, la representación numérica de una función, los profesores de las aulas participantes hicieron una utilización muy escasa de funciones definidas de forma numérica o tabular. La incidencia reducida de las mismas en el avance del estudio nos ha llevado a adoptar el criterio de no considerar una pareja propia de indicadores, del mismo tipo

[32] Más información en el subapartado III.3.2. de esta tesis doctoral, dentro del apartado en el que se desarrollan las ideas teóricas de referencia.

que las anteriores, para analizar las representaciones de tipo numérico. No obstante, sí que se han tenido en cuenta algunas incorrecciones detectadas en las pocas tablas existentes, generalmente ligadas a errores de tipo aritmético-algebraico, que se han considerado dentro de la tipología de error más apropiada para las mismas.

Así, la formulación final de esta variable consta de seis indicadores de análisis; una pareja para cada uno de los tres tipos de representaciones de los conceptos matemáticos que se han considerado: verbal, simbólica y gráfica. Uno de los dos indicadores de cada pareja está ligado a la cualidad “frecuencia”, para medir la asiduidad en la utilización de un tipo de representación en la unidad de un estudiante (tomando como referencia las representaciones que esperaría encontrarse en un cuaderno desarrollado de manera completa en el contexto de cada aula). El segundo indicador está asociado a la cualidad “calidad”, para medir la corrección de las representaciones existentes y de su utilización. En 1º de Bachillerato los alumnos están en pleno proceso de aprendizaje de diferentes sistemas de representación de los conceptos y del lenguaje matemático, especialmente en el lenguaje de tipo simbólico, por lo que es posible que se encuentren bastantes incorrecciones y errores asociados a este proceso y a la falta de comprensión de su significado. La Tabla IV.18 recoge los seis indicadores junto con la leyenda explicativa de codificación de cada uno de ellos. La tabla tiene la misma estructura que las tablas anteriores.

<table>
<tr><td>Fr1</td><td>Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Uso muy frecuente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático a lo largo de la unidad; 4: Uso frecuente de este tipo de representación a lo largo de la unidad; 3: Uso parcial, en ciertas zonas, no usándose la representación verbal necesaria en otras ocasiones; 2: Uso reducido, poca utilización de la representación verbal a lo largo de la unidad; 1: Nula o escasa utilización de la representación verbal en la unidad del estudiante.</td></tr>
<tr><td>Ca</td><td>Utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: La representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático empleada en la unidad es muy adecuada, precisa y pertinente; 4: Uso adecuado de la representación verbal en la mayoría de ocasiones; 3: Se combina el uso adecuado y pertinente de la representación verbal en algunas partes con el uso inadecuado o no pertinente en otras, existiendo algunos errores de uso; 2: Hay bastantes partes donde la representación verbal se usa de forma inadecuada, con varios errores de uso; 1: Uso inadecuado generalizado de la representación verbal a lo largo de la unidad del estudiante.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Fr1</td><td>Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Uso muy frecuente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático a lo largo de la unidad; 4: Uso frecuente de este tipo de representación a lo largo de la unidad; 3: Uso parcial, en ciertas zonas, no usándose la representación simbólica necesaria en otras ocasiones; 2: Uso reducido, poca utilización de la representación simbólica a lo largo de la unidad; 1: Nula o escasa utilización de la representación simbólica en la unidad del estudiante.</td></tr>
<tr><td>Ca</td><td>Utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: La representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático empleada en la unidad es muy adecuada, precisa y pertinente; 4: Uso adecuado de la representación simbólica en la mayoría de ocasiones; 3: Se combina el uso adecuado y pertinente de la representación simbólica en algunas partes con el uso inadecuado o no pertinente en otras, existiendo algunos errores de uso; 2: Hay bastantes partes donde la representación simbólica se usa de forma inadecuada, con varios errores de uso; 1: Uso inadecuado generalizado de la representación simbólica a lo largo de la unidad del estudiante.</td></tr>
<tr><td>Fr1</td><td>Asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: Uso muy frecuente de la representación gráfica de los conceptos y el lenguaje matemático a lo largo de la unidad; 4: Uso frecuente de este tipo de representación a lo largo de la unidad; 3: Uso parcial, en ciertas zonas, no usándose la representación gráfica necesaria en otras ocasiones; 2: Uso reducido, poca utilización de la representación gráfica a lo largo de la unidad; 1: Nula o escasa utilización de la representación gráfica en la unidad del estudiante.</td></tr>
<tr><td>Ca</td><td>Utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: La representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático empleada en la unidad es muy adecuada, precisa y pertinente; 4: Uso adecuado de la representación gráfica en la mayoría de ocasiones; 3: Se combina el uso adecuado y pertinente de la representación gráfica en algunas partes con el uso inadecuado o no pertinente en otras, existiendo algunos errores de uso; 2: Hay bastantes partes donde la representación gráfica se usa de forma inadecuada, con varios errores de uso; 1: Uso inadecuado generalizado de la representación gráfica a lo largo de la unidad del estudiante.</td></tr>
</table>

Tabla IV.18. Indicadores para la Variable 1, común a las unidades de tipo UT y UP.

Variable 2: Corrección de los elementos transcritos

Esta variable pretende centrar su atención en la corrección (es decir, en la cualidad de ser correcto) de los elementos que conforman una unidad (ya sea UT o UP) que se consideran transcritos de otro medio. Esta transcripción puede ser bien del dictado verbal o de lo escrito en la pizarra durante la exposición teórica del contenido por parte del docente, bien de la corrección en la pizarra de actividades por parte del docente o de algún alumno, o bien de otro medio posible como el libro de texto.

La variable se ha considerado en ambos tipos de unidades, al poder existir momentos de transcripción tanto asociados al contenido teórico como al contenido práctico. No obstante, esta variable (y sus indicadores) únicamente serán analizados y medidos en una unidad en aquellos casos en que se detecte la existencia de contenido transcrito o copiado de alguno de los medios anteriormente comentados. En caso contrario, los indicadores de dicha variable se dejarán en blanco.

En el estudio exploratorio ya se consideraba una variable con este propósito (Tabla II.3, segunda variable asociada a la Dimensión 5), que ha sufrido pocos cambios en cuanto a su estructura a lo largo del avance del análisis. Ya entonces se consideraron dos indicadores para describir la misma: uno asociado a la frecuencia de aparición de errores derivados de una transcripción errónea y otro asociado al nivel de gravedad de esos errores.

El propósito general de ambos indicadores se ha mantenido en la formulación final. El primero de los indicadores se ha reformulado como un indicador asociado a la cualidad “ausencia”, dado que la ausencia de errores de este tipo se asocia con algo positivo. En concreto, con los del tipo Au3[33].

El segundo de los indicadores ha seguido asociado al nivel de gravedad que se considera ligado a estos errores de transcripción. Como ya indicaba Socas (1997, p. 125), no todos los errores tienen la misma naturaleza y se les puede asociar el mismo nivel de gravedad. Es obvio que no puede tratarse igual un despiste o una errata al transcribir o al copiar un determinado aspecto que un error o una serie de errores que sí que revelen o puedan revelar la existencia de problemas en la comprensión de algún concepto, o que puedan dar lugar, en una revisión posterior del material, a la existencia de tales problemas. Estos últimos errores tienen una mayor gravedad potencial. Así, en este indicador se ha desarrollado una leyenda de codificación

[33] La información sobre la tipología de indicadores se encuentra desarrollada en el apartado segundo de este mismo capítulo.

esencialmente basada en el número de errores considerados como graves que se han encontrado en una unidad determinada. La leyenda explicativa para codificar cada nivel de la escala 1-5 ha sido modulada durante el desarrollo del estudio, buscando una mayor discriminación entre las diferentes posibilidades encontradas en las unidades analizadas.

Por tanto, la formulación final de esta variable consta de dos indicadores de análisis, que se presentan en la Tabla IV.19 junto con la leyenda explicativa de codificación de cada uno de ellos. La tabla tiene la misma estructura que las tablas precedentes con indicadores y leyendas de codificación.

<table>
<tr><td>Au3</td><td>Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta de dictados o copias</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: No hay errores de transcripción; 4: Hay algún error aislado de transcripción; 3: Hay pocos errores de transcripción, en comparación con la cantidad transcrita; 2: Hay varios errores de transcripción; 1: Los errores de transcripción son abundantes en la unidad.</td></tr>
<tr><td>Gr*</td><td>Tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:
5: No hay errores de transcripción; 4: Los errores que hay se muestran ocasionales o debidos a descuidos; 3: La mayoría de errores se muestran ocasionales, pero de alguno de ellos puede revelarse o podemos pensar en la existencia de algún problema relacionado con la comprensión de algún concepto o técnica; 2: Hay dos o tres errores en la situación anterior; 1: Hay cuatro o más errores de los que puede revelarse o podemos pensar en la existencia de algún problema relacionado con la comprensión de algún concepto o técnica.</td></tr>
</table>

Tabla IV.19. Indicadores para la Variable 2, común a las unidades de tipo UT y UP.

Variable 5: Existencia de errores que pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de algún concepto

Esta variable también es común a ambos tipos de unidades, UT y UP, aunque en el caso de las UT ha sido renombrada como Variable 3 dentro de esta dimensión, en lugar de como Variable 5 (al ser las dos variables restantes específicas para las UP).

Esta variable tiene por objeto estudiar la presencia en las unidades de registro de errores que se considere que pueden revelar un obstáculo o una dificultad en la comprensión de algún concepto matemático, o que pueden llegar a ocasionar este tipo de obstáculos o dificultades en la posible revisión posterior del cuaderno como herramienta para el estudio de las matemáticas.

Entendemos que, en este bloque de Análisis Matemático, la carga conceptual para los estudiantes es elevada, puesto que aparecen y se desarrollan muchos conceptos cuya comprensión y asimilación es vital para el desarrollo adecuado del aprendizaje en este bloque. Ejemplos de conceptos clave pueden ser los de función, límite, asíntota, derivada o recta tangente[34]. El estudio se ha desarrollado en aulas de 1º de Bachillerato, donde muchos de estos conceptos son trabajados por el estudiante por primera vez. En este curso, los alumnos comienzan a desarrollar la comprensión de cada uno de ellos, o, en palabras de Tall y Vinner (1981), un *concepto imagen*; algo que no siempre se realiza de forma adecuada. Pero el problema no se circunscribe únicamente a posibles problemas en la comprensión de los conceptos propios del Análisis Matemático, sino que también pueden existir errores que pongan de manifiesto la existencia de una comprensión deficiente de algunos conceptos que se espera que ya sean dominados por el estudiante en este nivel educativo, y que pueden situarse también en algunas de las otras variables de esta dimensión.

Así, esta variable ha sido pensada como un medio para recopilar y describir los errores asociados a la existencia de algún obstáculo o de deficiencias en la comprensión de algún concepto. La variable, al igual que sucedía en el estudio exploratorio (Tabla II.3) tiene una estructura distinta de las otras. Esta variable no consta de indicadores, sino que dentro de ella se describen de forma detallada y por separado cada uno de los errores considerados de este tipo que se detecten en la unidad de un alumno. Además de la descripción de los mismos, se realiza también una interpretación, indicando en algunos casos las causas que inferimos que han podido provocar su aparición, a partir de la información contextual existente y de la información obtenida en el análisis completo de la unidad del estudiante.

Estos errores deben ser conocidos por el profesor para conseguir la superación de los mismos a través de su adecuado tratamiento e integración en la docencia; de un modo general o particular. En este estudio, y dado que el análisis de las fotocopias se ha realizado con posterioridad al desarrollo en la clase de estos temas, no se ha podido proporcionar al docente esta información ni llevar a cabo el tratamiento de los mismos en las aulas participantes. No obstante, es claro que un profesor de matemáticas puede promover este tratamiento e integración de los errores, y el establecimiento de medios o de estrategias encaminados a su superación, a través de un análisis regular de los cuadernos que le permita detectar, de forma temprana, los errores que en él se pongan de manifiesto.

[34] Ya se han comentado aspectos asociados a la enseñanza y aprendizaje de tópicos como estos en el apartado I.4 del Capítulo I.

IV.6.2. VARIABLES ESPECÍFICAS PARA EL ANÁLISIS DE ESTA DIMENSIÓN EN LAS UNIDADES PRÁCTICAS

Este subapartado se centra en la explicación de las dos variables de la Dimensión 5 que únicamente se han considerado en las UP, debido a las diferencias en la naturaleza del contenido de esta unidad con respecto a las UT. Es decir, las UP constan de cinco variables de análisis. Al igual que hemos hecho con el resto de variables, para cada una de ellas se mostrarán y explicarán los indicadores de análisis finalmente utilizados, así como su evolución a lo largo del avance de la investigación.

Variable 3: Corrección de los cálculos y los procesos asociados a la aplicación de reglas y propiedades aritmético-algebraicas en la unidad

Esta variable está destinada a medir el nivel de corrección (como en las variables anteriores, se entiende “corrección” como la cualidad de ser correcto) de las operaciones y de los procesos de tipo aritmético o algebraico que realizan los alumnos en sus intentos propios de resolución de las actividades. Por este motivo la variable es específica de las UP, al circunscribirse su análisis a aquellas tareas que se interpretan como intentadas por el propio alumno en una unidad. En el caso de que en una unidad no se haya interpretado ninguna actividad como intentada por el alumno, no existe información alguna para poder medir esta variable, por lo que sus indicadores se quedarían en blanco.

El marco del estudio exploratorio, tomado como punto de partida, ya consideraba una variable con un propósito semejante dentro de esta Dimensión (Tabla II.3), y titulada “Errores de cálculo”. La evolución de esta variable ha sido similar a la anteriormente descrita para la Variable 2: se ha mantenido la estructura de dos indicadores para la dimensión y el propósito de los mismos, reformulándose el primero de ellos como un indicador asociado a la cualidad “ausencia” y el segundo como un indicador asociado al nivel de gravedad ligado a los errores de este tipo detectados en la unidad.

El nombre dado a la propia variable sí que ha sufrido más cambios en el avance del estudio propio de la tesis doctoral. El nombre de “errores de cálculo” aportaba poca información concreta sobre la variable, y podía llevar a malentendidos (por ejemplo, dar a entender que únicamente se tienen en cuenta en esta variable errores en cálculos numéricos). Así, durante el avance del estudio el nombre se fue completando y concretando, primero haciendo referencia a que los cálculos podían ser tanto aritméticos como algebraicos, cambiando la mención de los errores por la mención a la corrección, y considerando también de forma explícita en el nombre la aplicación de procesos o de reglas de tipo aritmético-algebraico. Así, el nombre final de la variable es el que se indica en el título: "Corrección de los cálculos y los procesos asociados a la aplicación de reglas y propiedades aritmético-algebraicas en la unidad".

La formulación final de esta variable consta de dos indicadores de análisis, que se presentan en la Tabla IV.20 junto con la leyenda explicativa de codificación de cada uno de ellos. El primero de los indicadores es análogo al primer indicador utilizado en la Variable 2. El segundo indicador se asocia a la cualidad "gravedad". Al igual que sucedía en la Variable 2 de esta dimensión, no todos los errores de este tipo pueden ser considerados de igual gravedad. Así, centraremos especialmente nuestra atención en aquellos errores en operaciones o en procesos aritmético-algebraicos que consideramos de mayor gravedad: aquellos que se presenten como sistemáticos a lo largo de la unidad (es decir, que se presenten de modo repetido) o que muestren un desconocimiento o una falta de dominio de alguna técnica aritmético-algebraica que el alumno ya debiera dominar en este nivel educativo de 1º de Bachillerato. Es decir, errores que evidencien la presencia de algún déficit operacional que suponga un obstáculo grave para el estudiante.

<table>
<tr><td>Au3</td><td>Ausencia de errores aritmético-algebraicos en la unidad</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:

5: No hay errores de este tipo; 4: Hay algún error de este tipo; 3: Hay pocos errores de este tipo, en comparación con la cantidad de cálculos y procesos aritmético-algebraicos realizados; 2: Hay bastantes errores de este tipo; 1: Los errores de índole aritmético-algebraica son muy abundantes y generalizados a lo largo de la unidad.</td></tr>
<tr><td>Gr</td><td>Tipos de errores aritmético-algebraicos existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Leyenda explicativa para realizar la codificación:

5: No hay errores de este tipo; 4: Los errores de este tipo se muestran como aislados y debidos a descuidos; 3: Hay varios fallos de este tipo aunque todos pueden considerarse debidos a descuidos, y no sistemáticos (no repetidos a lo largo de la unidad); 2: Alguno de los errores encontrados se repite de forma sistemática o muestra la existencia de un déficit operacional (errores en técnicas que ya deberían ser ampliamente dominadas en este nivel); 1: Varios de los errores de cálculo que aparecen son sistemáticos o muestran déficits operacionales.</td></tr>
</table>

Tabla IV.20. Indicadores para la Variable 3, específica para las UP.

Variable 4: Corrección de los procesos seguidos (distintos de los aritmético-algebraicos)

Esta variable es la única variable de las cinco finalmente utilizadas para el análisis de la Dimensión 5 en las UP que no tiene su origen en una variable del estudio exploratorio.

En una primera reformulación de la plantilla, tras el estudio exploratorio, se añadió una variable más. El punto de partida de la idea lo obtuvimos a partir de la clasificación de diferentes tipos de errores propuesta por Astolfi (1999), que considera un tipo de error relacionado con la diversidad de procedimientos utilizados por un alumno que se alejan de un determinado procedimiento estándar. Así, se consideró pertinente incluir una variable más dentro de esta dimensión, que fijara su atención en la corrección de los posibles procedimientos o procesos adoptados por un alumno al resolver una tarea, y en la corrección de dichos procesos o procedimientos. De nuevo, al igual que sucedía con la variable anterior, esta variable centraba su análisis únicamente en aquellos ejercicios que se interpretaban como ejercicios intentados por el propio alumno, por lo que sería un indicador específico para las UP. Además, únicamente sería valorado en el caso de que existiera información para ello, es decir, de que existieran intentos de resolución propios del alumno en la UP. Si no, los indicadores de la variable quedarían en blanco, sin valorar.

En un primer momento no se estableció ninguna leyenda explicativa de codificación, a la espera de que el avance de la investigación nos fuera dando información para poder hacerlo de una manera pertinente y adoptada a la misma. Tras ese avance, la variable quedó formulada como una variable que se centra en valorar la corrección (cualidad de correcto) de los procesos distintos de los aritmético-algebraicos (ya considerados en la variable anterior) en la resolución de los ejercicios intentados por los estudiantes. Estos errores pueden estar relacionados, por ejemplo, con el mal entendimiento de una tarea o con la aplicación de procesos inadecuados o irrelevantes para la resolución de la misma. Por ejemplo, un error que se enmarcaría dentro de esta variable sería la selección de una técnica inadecuada o irrelevante (porque no sirva para su propósito) para resolver un límite de una función.

La estructura final de esta variable es análoga a la de la variable anterior. La variable consta de dos indicadores de análisis, que se presentan en la Tabla IV.21 junto con sus leyendas explicativas de codificación. De nuevo, el primer indicador está asociado con la cualidad de "ausencia", y el segundo con el nivel de gravedad que asociamos a los errores de este tipo. Se consideran de mayor gravedad aquellos errores en los procesos no aritmético-algebraicos que parezcan mostrar o revelar un obstáculo o un déficit en la comprensión de algún concepto o contenido.

Au3	**Ausencia de errores en los procesos de resolución (no aritmético-algebraicos) desarrollados por el alumno en la unidad**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: No hay errores de proceso; **4**: Hay un error de proceso en la unidad; **3**: Hay dos errores de proceso de distinto tipo, o más, pero del mismo tipo (es decir, relacionados con un mismo proceso); **2**: Hay varios errores de proceso, de diferentes tipos; **1**: Los errores de proceso son muy abundantes a lo largo de la unidad.						
Gr	**Tipos de errores de proceso (no aritmético-algebraicos) existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos**	1	2	3	4	5
Leyenda explicativa para realizar la codificación: **5**: No hay errores de proceso; **4**: Los errores de proceso existentes son aislados y considerados como poco graves; **3**: Hay varios errores de proceso, pero ninguno considerado como grave o que pueda pensarse que muestra un obstáculo o déficit en la comprensión de algún concepto; **2**: Alguno de los errores es grave o puede pensarse que muestra un obstáculo o déficit en la comprensión de algún concepto; **1**: Varios errores son de este último tipo.						

Tabla IV.21. Indicadores para la Variable 4, específica para las UP.

IV.7. TABLAS RESUMEN DEL MARCO DE ANÁLISIS PARA UNIDADES TEÓRICAS Y UNIDADES PRÁCTICAS

El objetivo principal de este apartado es el de recoger dos tablas resumen, una para las UT y otra para las UP, en las que se muestran las cinco dimensiones de análisis seleccionadas para las unidades de registro, junto con sus variables, el nombre de los indicadores de cada una de las variables y el tipo o grupo de indicador en el que ha sido ubicado cada uno de ellos.

Estas tablas permiten ver más claramente la estructura del marco de análisis utilizado y la gran cantidad de diversos aspectos que el mismo recoge. Dado que el marco de análisis no es igual para las UT y las UP, se ha creado una tabla resumen del marco para cada tipo de unidad. Las Tablas IV.22 e IV.23 recogen estas dos tablas resumen.

RESUMEN DEL MARCO DE ANÁLISIS DE LAS UNIDADES TEÓRICAS	
DIMENSIÓN 1 Estructura, orden y presentación de la unidad	
Variable 1: Organización de la unidad	Claridad en la indicación de las diferentes partes que componen un tema (Ca); ausencia de partes de teoría correspondientes a temas distintos del actual (Au1); orden cronológico de la teoría y los ejemplos desarrollados (Ca).
Variable 2: Presentación de la unidad	Primera impresión que causa la revisión general de la unidad (Ca); limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma (Ca), respeto de los márgenes a lo largo de la unidad (Fr1); utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco (Ca); tamaño e integración de los dibujos, esquemas o gráficos (Ca); tamaño de la letra, números y signos matemáticos (Ca); legibilidad de la letra (Ca); legibilidad de los números y signos matemáticos (Ca).
Variable 3: Estilo propio en la unidad	Personalización en la organización de la unidad (Fr2); adecuación de los rasgos personales de organización de la unidad (si ha lugar) (Ca); personalización en la presentación de la unidad (Fr2); adecuación de los rasgos personales de presentación de la unidad (si ha lugar) (Ca); uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo (Fr2); adecuación de las mismas (si ha lugar) (Ca).
DIMENSIÓN 2 Completitud de la unidad	
Variable 1: Completitud de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones	Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad (Fr1); frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes (Fr1); frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno) (Fr1); precisión de los elementos de este tipo registrados (Ca).
Variable 2: Completitud de los ejemplos ilustrativos	Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad (Fr1); frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes (Fr1); frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno) (Fr1); precisión de los elementos de este tipo registrados (Ca).
Variable 3: Completitud de los dibujos, esquemas y gráficos	Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad (Fr1); frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes (Fr1); frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno) (Fr1); precisión de los elementos de este tipo registrados (Ca).
Variable 4: Completitud de las observaciones o comentarios de interés realizados por el docente	Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad (Fr1); frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes (Fr1); frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno) (Fr1); precisión de los elementos de este tipo registrados (Ca).

DIMENSIÓN 3 **Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno**	
Variable 1: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno	Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad (Fr2); explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con la teoría de la unidad (Fr1); señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en la teoría de la unidad (Fr2).
DIMENSIÓN 4 **Riqueza y corrección del lenguaje natural utilizado en la unidad**	
Variable 1: Vocabulario	Variedad y amplitud del vocabulario de la unidad (Ca); propiedad del vocabulario de la unidad (adecuación y comprensión) (Ca).
Variable 2: Gramática y sintaxis	Riqueza y variedad de las estructuras sintácticas empleadas (Ca); corrección en el uso de concordancias (género, número, persona) y tiempos verbales (Ca); corrección en el uso de conectores y organizadores de contenido (Ca).
Variable 3: Puntuación	Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad (Ca); presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad (Fr1).
Variable 4: Ortografía	Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o con fonemas similares (b/v, ll/y, h) (Au2); ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras (Au2); ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de mayúsculas (Au2); ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde (Au2).
DIMENSION 5 **Nivel de corrección matemática de la unidad: errores existentes**	
Variable 1: Riqueza y corrección de los sistemas de representación de conceptos y del lenguaje matemático existente en la unidad	Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología) (Fr1); utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología) (Ca); asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación) (Fr1); utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación) (Ca); asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos) (Fr1); utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos) (Ca).
Variable 2: Corrección de los elementos transcritos	Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta de dictados o copias (Au3); tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos (Gr*).
Variable 3: Existencia de errores que pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos	*En esta variable no hay indicadores.* *Se describen detalladamente los errores que pensamos que pueden mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos y cuáles son esas posibles deficiencias y obstáculos detectados.*

Tabla IV.22. Tabla resumen de dimensiones, variables e indicadores para las UT.

RESUMEN DEL MARCO DE ANÁLISIS DE LAS UNIDADES PRÁCTICAS	
DIMENSIÓN 1 **Estructura, orden y presentación de la unidad**	
Variable 1: Organización de la unidad	Información y referencia de los ejercicios (Fr1*); ausencia en la unidad de ejercicios de otros temas distintos del actual (Au1); orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase (Ca); ausencia de ejercicios cuya resolución esté separada en varias partes de la unidad (Au1); claridad en la indicación de los cambios de ejercicios cuando se producen (paso de unos a otros) (Ca).
Variable 2: Presentación de la unidad	Primera impresión que causa la revisión general de la unidad (Ca); limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma (Ca), respeto de los márgenes a lo largo de la unidad (Fr1); utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco (Ca); tamaño e integración de los dibujos, esquemas o gráficos (Ca); tamaño de la letra, números y signos matemáticos (Ca); legibilidad de la letra (Ca); legibilidad de los números y signos matemáticos (Ca).
Variable 3: Estilo propio en la unidad	Personalización en la organización de la unidad (Fr2); adecuación de los rasgos personales de organización de la unidad (si ha lugar) (Ca); personalización en la presentación de la unidad (Fr2); adecuación de los rasgos personales de presentación de la unidad (si ha lugar) (Ca); uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo (Fr2); adecuación de las mismas (si ha lugar) (Ca).
DIMENSIÓN 2 **Completitud de la unidad**	
Variable 1: Cantidad de actividades registradas en la unidad	Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente y posteriormente corregidas que se registran en la unidad (Por); porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente pero no corregidas posteriormente en el aula que se registran en la unidad (Por); cantidad de actividades a mayores de las propuestas registradas en la unidad (Num); contenidos abarcados por las actividades a mayores de las propuestas que se registran en la unidad (Num).
Variable 2: Completitud en el desarrollo de las actividades registradas	Grado de completitud de las actividades registradas que fueron corregidas en el aula (Por*); grado de completitud de las actividades registradas que no fueron corregidas en el aula (Por).
Variable 3: Ejecución por parte del alumno de las actividades registradas en la unidad	Porcentaje (respecto del total) de actividades que se revelan intentadas por el alumno (Por); Grado de satisfacción en los intentos de resolución de las actividades que ha efectuado el alumno (Num).
Variable 4: Revisión de las actividades que son corregidas	Frecuencia en la corrección de sus errores al resolver las actividades (Fr1); claridad en la indicación de los errores cometidos que corrige (Ca); explicación de los errores cometidos que corrige (Fr1); registro de las mejoras efectuadas por el profesor durante la corrección de actividades en el aula (Fr1); compleción de actividades durante el proceso de corrección (registro de partes no desarrolladas o toma de resoluciones distintas de la del alumno) (F1r); rehacimiento de ejercicios con pobres intentos de resolución (con grado de satisfacción 1 ó 2) o de apartados erróneos (Fr1).
DIMENSIÓN 3 **Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno**	
Variable 1: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el	Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad (Fr2); asiduidad en la escritura de pasos y procesos seguidos para resolver las actividades (Fr1);

estudio o revisión posterior por parte del alumno	explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con las actividades de la parte práctica (Fr1); señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en las actividades que componen la parte práctica (Fr2).
DIMENSIÓN 4 **Riqueza y corrección del lenguaje natural utilizado en la unidad**	
Variable 1: Vocabulario	Variedad y amplitud del vocabulario de la unidad (Ca); propiedad del vocabulario de la unidad (adecuación y comprensión) (Ca).
Variable 2: Gramática y sintaxis	Riqueza y variedad de las estructuras sintácticas empleadas (Ca); corrección en el uso de concordancias (género, número, persona) y tiempos verbales (Ca); corrección en el uso de conectores y organizadores de contenido (Ca).
Variable 3: Puntuación	Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad (Ca); presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad (Fr1).
Variable 4: Ortografía	Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o con fonemas similares (b/v, ll/y, h) (Au2); ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras (Au2); ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de mayúsculas (Au2); ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde (Au2).
DIMENSIÓN 5 **Nivel de corrección matemática de la unidad: errores existentes**	
Variable 1: Riqueza y corrección de los sistemas de representación de conceptos y del lenguaje matemático existente en la unidad	Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología) (Fr1); utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología) (Ca); asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación) (Fr1); utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación) (Ca); asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos) (Fr1); utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos) (Ca).
Variable 2: Corrección de los elementos transcritos	Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta de dictados o copias (Au3); tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos (Gr*).
Variable 3: Corrección de los cálculos y los procesos asociados a la aplicación de reglas y propiedades aritmético-algebraicas en la unidad	Ausencia de errores aritmético-algebraicos en la unidad (Au3); tipos de errores aritmético-algebraicos existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos (Gr).
Variable 4: Corrección de los procesos seguidos (distintos de los aritmético-algebraicos)	Ausencia de errores en los procesos de resolución (no aritmético-algebraicos) desarrollados por el alumno en la unidad (Au3); tipos de errores de proceso (no aritmético-algebraicos) existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos (Gr).
Variable 5: Existencia de errores que pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos	*En esta variable no hay indicadores.* *Se describen detalladamente los errores que pensamos que pueden mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos y cuáles son esas posibles deficiencias y obstáculos detectados.*

Tabla IV.23. Tabla resumen de dimensiones, variables e indicadores para las UP.

IV.8. ASPECTOS ASOCIADOS AL DESARROLLO Y PUESTA EN PRÁCTICA DEL ANÁLISIS DE LAS UNIDADES DE REGISTRO

Este apartado se dedica a explicar varios aspectos de interés ligados al propio avance y la puesta en práctica del marco anterior para analizar las unidades de registro. Especialmente a la clarificación y explicación de los procesos de codificación y los criterios adoptados durante el desarrollo del análisis para poder facilitar esa codificación y la objetividad de la misma.

A partir de los cuadernos de los alumnos y de las fotocopias de los mismos, la utilización del marco de análisis (presentado en los apartados IV.2 a IV.6 de este capítulo) ha permitido codificar la información inicial extraída de los cuadernos y sus unidades de registro. A través de esa codificación, se han obtenido otro tipo de datos, “datos de segundo orden” (utilizando la terminología de Piñuel, 2002), tanto de tipo cuantitativo como cualitativo, que nos permitieron realizar una comparación y un tratamiento posterior de los mismos.

El apartado va a dividirse en tres subapartados. En el primero explicaremos algunas características fundamentales asociadas al análisis de los cuadernos llevado a cabo. En el segundo subapartado se explicarán algunos de los criterios adoptados o los instrumentos de ayuda utilizados para la valoración de algunos indicadores o ante situaciones dudosas de codificación. Por último, en el subapartado tercero se muestran dos plantillas de codificación rellenas, para ilustrar el tipo de datos (tanto de tipo cuantitativo como de tipo cualitativo) que se obtienen como resultado del análisis realizado. Una de las plantillas corresponde a una UT y otra a una UP.

IV.8.1. CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS DESARROLLADO

Este subapartado tiene como objetivo exponer y explicar algunas de las características fundamentales asociadas al análisis de los cuadernos llevado a cabo, así como al desarrollo y al avance del mismo.

Los documentos base para el análisis son los cuadernos de matemáticas de los alumnos de las aulas participantes. Esos documentos fueron obtenidos a través del fotocopiado de las hojas correspondientes al bloque de análisis matemático en cada uno de los cuadernos. Puede verse un ejemplo en el Anexo C.1 (en el CD adjunto a la tesis), que contiene escaneos de las fotocopias correspondientes al tema de funciones elementales de la alumna A14. La primera tarea desarrollada por el EI fue la de segmentar el contenido de las fotocopias, para determinar a qué unidad de registro correspondía cada parte o cada elemento[35]. El orden cronológico en el desarrollo de los temas por parte de los docentes participantes hizo sencillo diferenciar a qué tema correspondía cada contenido (de los tres temas en que se dividió el bloque de Análisis Matemático[36]). Sin embargo, el desarrollo combinado y mezclado en los cuadernos de aspectos teóricos y aspectos prácticos ocasionó la necesidad de marcar claramente qué aspectos de un tema se encuadraban dentro de la unidad teórica (UT) y qué aspectos formaban parte de la unidad práctica (UP).

Para la mayoría de estudiantes, disponíamos de tres UT y de tres UP (una de cada tipo por cada uno de los tres temas del bloque). Sin embargo, hubo algunas excepciones derivadas del contexto de las aulas participantes y de la recogida de información proporcionada por los alumnos. En el aula Científico-Tecnológica de la Docente 3 no hubo tiempo para desarrollar el tema de derivadas, por lo que tenemos tan sólo dos unidades de cada tipo en estos alumnos. En el aula del Docente 1 este tema de derivadas fue tratado de forma somera y desde un punto de vista teórico, por lo que en los alumnos del Docente 1 sí que hay UT3 pero no UP3. Además, hay algunos estudiantes que nos proporcionaron información incompleta en los momentos marcados para su recogida. Es el caso de los alumnos A5, A18, A20, A21, A30 y A40. En el caso de A30 disponemos de unidades de registro de los dos primeros temas, faltando el tercero. En los restantes alumnos mencionados sólo hemos dispuesto de unidades de registro de uno de los temas: del Tema 1 (funciones elementales) en el caso de A5, A18, A20 y A40, y del Tema 2 (límite de una función) en el caso de A21.

El análisis de las unidades de registro ha sido desarrollado por el EI y, esencialmente, ha seguido un procedimiento manual. Una vez marcado en las fotocopias de un tema las partes correspondientes a la UT y a las UP, se ha hecho una lectura en profundidad de las mismas. En el desarrollo de esa lectura, se han escrito anotaciones en las propias fotocopias (márgenes) para destacar aquellos aspectos que se consideraban como aspectos de interés asociados a alguna de las dimensiones (generalmente, a alguna de sus variables y/o indicadores de las variables), teniendo presente en todo momento el marco de análisis considerado. En el Anexo C.2 (en el CD) puede observarse un ejemplo, en el que se recogen las fotocopias del tema de límites correspondientes al alumno A10 junto con las anotaciones del EI. Esas anotaciones han sido también recogidas en un documento para cada unidad,

[35] En el subapartado III.1.2 de la memoria de tesis doctoral puede encontrarse más información sobre las unidades de registro que se han fijado en este análisis de contenido.
[36] En el subapartado III.2.2. de esta memoria puede encontrarse más información sobre los tres temas considerados en el bloque de Análisis Matemático: funciones, límites y derivadas.

clasificando las anotaciones según la dimensión y la variable con la que estuvieran relacionados.

Una revisión global de las unidades y de las anotaciones relacionadas con cada variable de cada dimensión ha permitido al EI realizar una propuesta de codificación numérica de sus indicadores, siguiendo la escala de 1 a 5, y de acuerdo con la leyenda explicativa de codificación. Así, y siguiendo la terminología de Piñuel (2002), los "datos de primer orden" de este análisis (que serían las fotocopias del cuaderno de cada alumno participante) se han transformado a través de este proceso de codificación en un conjunto de "datos de segundo orden": las valoraciones numéricas en la escala 1-5 de los indicadores correspondientes y una explicación de la valoración asignada a cada indicador a partir de la valoración global de la unidad y de las anotaciones de interés o de los elementos destacados relacionados con el indicador.

Como se ha comentado, el EI no ha hecho uso en el proceso de codificación de ningún software específico, como pueda ser el caso de ATLAS.ti. Somos conscientes de que este tipo de softwares, destinados a facilitar el desarrollo de los análisis de contenido, hubieran podido haber apoyado o haber hecho más llevadero este proceso, frente a un análisis y codificación "manual". No obstante, cuando el EI tuvo conocimiento de estos softwares, una gran parte del análisis de los documentos y del proceso de codificación ya había sido desarrollado de forma "manual", por lo que se decidió completar el proceso de esa forma.

En relación también con el desarrollo de este proceso de codificación, hacemos a continuación un comentario sobre la fiabilidad y la validez del análisis desarrollado, siguiendo como referencia el manual de Krippendorff[37] (1990). Previamente a poder hablar de la *validez* de un análisis es necesario que el análisis sea *fiable*, o que tenga *validez interna*. Es decir, que se obtengan los mismos resultados para los mismos conjuntos de datos analizados, independientemente de las circunstancias de aplicación del análisis (por ejemplo, variaciones en las circunstancias de medición, autoría de la medición o variaciones asociadas a tendenciosidades derivadas del propio desarrollo del procedimiento). Krippendorff (1990) distingue tres posibles niveles posibles para la fiabilidad de un estudio: la *estabilidad* (o fiabilidad del observador), la *reproducibilidad* (o fiabilidad inter-codificadores) y la *exactitud* (o fiabilidad observador-norma). En nuestra investigación no tiene sentido hablar del tercero de los niveles, *exactitud*, puesto que no existe una norma o un patrón de

[37] En el subapartado III.1.1 de la memoria de tesis doctoral se explican detalladamente el modo en que se presentan los constructos *fiabilidad* y *validez* en el manual de Krippendorff (1990) sobre análisis de contenido.

codificación conocido con el que comparar las codificaciones de los analistas y el grado de “acierto” de éstos con respecto a una norma preestablecida.

Así, el nivel de fiabilidad que ha buscado este estudio ha sido el de *reproducibilidad*, o fiabilidad inter-codificadores, obtenida a través del análisis de un mismo conjunto de datos por parte de varios codificadores diferentes que utilizan unas mismas instrucciones de análisis. Este nivel busca reflejar posibles diferencias o desacuerdos al interpretar esas instrucciones.

En este caso, los codificadores han sido los dos miembros del EI (doctorando y director de tesis). No obstante, la amplitud de las unidades de registro y el gran número de unidades existente (unas 200), así como la necesidad de conocer en profundidad tanto el marco de análisis como el contexto de la clase que ha dado lugar a esas unidades, ha imposibilitado extender este nivel de reproducibilidad o de fiabilidad inter-codificadores a todas las unidades de registro. Esta reproducibilidad sí ha existido en la primera parte del análisis, correspondiente a las primeras unidades analizadas, buscando tanto el consenso en las valoraciones otorgadas como la detección de posibles puntos débiles en el marco de análisis y la propuesta de mejoras de la plantilla y las leyendas de codificación de los indicadores, desarrollando criterios de codificación que se han adoptado para el resto del análisis. Esto forma parte de lo que Krippendorff llama la *fiabilidad de la unidad* (1990, pp. 220-221).

Una vez superada esta primera fase, se ha mantenido en todo momento el nivel de fiabilidad de *estabilidad* (o fiabilidad del codificador), a través de test-retest por parte del mismo codificador (en este caso, el doctorando) de las unidades en distintos momentos temporales, para evitar cambios y tendenciosidades derivados del avance del estudio. Los posibles casos dudosos de codificación encontrados fueron tratados por ambos miembros del EI, buscando de nuevo un consenso y provocando ligeros retoques en las leyendas de codificación del marco utilizado, encaminados a la mejora del mismo: la inclusión de aspectos particulares no recogidos por las leyendas de la plantilla o la clarificación de algunos criterios. Se ha concluido el proceso con un reanálisis completo, por parte del doctorando, de todas las unidades utilizando la versión final del marco de análisis.

Una vez explicados los procesos seguidos para asegurar la fiabilidad, comentamos brevemente algunos aspectos asociados a la *validez* propiamente dicha (o *validez externa*, Campbell, 1957; citado en Krippendorff, 1990). En términos de Krippendorff (1990, p. 230), la validez pretende evaluar “el grado en que las variaciones inherentes al proceso del análisis se corresponden con las externas a él, y si los hallazgos representan a los fenómenos reales en el contexto de los datos". En este sentido, el proceso de codificación utilizando el marco de análisis fijado pretende transformar los datos en "datos de segundo orden". Las valoraciones en las escalas 1-5 de cada uno de los indicadores serán la base para la determinación posterior de propuestas de perfiles de elaboración del cuaderno entre los estudiantes, a través de técnicas estadísticas que se desarrollarán en el capítulo V. No obstante, el desarrollo posterior de entrevistas a algunas parejas de alumnos sobre su elaboración y uso del cuaderno de matemáticas pretende servir para apoyar y complementar los perfiles propuestos a partir del tratamiento estadístico de las valoraciones de los indicadores derivadas del marco de análisis.

Si fijamos nuestra atención en esta parte que ahora nos ocupa del desarrollo del análisis, Krippendorff (1990) distingue entre la validez orientada a los datos y la validez de los instrumentos de análisis que se utilizan.

Por una parte, los datos recogidos (fotocopias de los cuadernos de los alumnos) están directamente relacionados con el objetivo del análisis y lo que pretende: encontrar diferentes perfiles de elaboración del cuaderno de matemáticas en el alumnado. Es decir, aunque la muestra de aulas haya sido escogida por disponibilidad, y por ello no se pretenda generalizar los resultados, dentro de cada aula se ha buscado e intentado que participaran todos los alumnos, evitando "automuestreos" internos, para obtener información representativa sobre cada una de las aulas analizadas.

Por otra parte, el instrumento de análisis (plantillas para las UT y UP) ha sido creado a partir de las ideas teóricas consideradas como referencia por el EI, el desarrollo del estudio exploratorio (Capítulo II) y el avance del análisis de las propias unidades de registro utilizadas. Así, se ha buscado la creación de un instrumento de análisis *ad hoc*, de naturaleza esencialmente inductiva, a través de la progresiva reformulación y refinamiento del instrumento para incluir todos aquellos aspectos de interés detectados que discriminen unos cuadernos de otros y modificar las leyendas de codificación para evitar ambigüedades y propiciar una adecuada discriminación para cada indicador (buscando que el instrumento sea sensible para detectar diferencias entre unidades en aspectos considerados como de interés, pretendiendo desarrollar su *validez semántica*, Krippendorff, 1990). Los aspectos fundamentales de esa evolución se han comentado en los apartados en los que se presentan el marco y las plantillas de análisis (apartados IV.2 a IV.6). La revisión progresiva del análisis de las unidades ha dado lugar a la saturación del instrumento de análisis adaptado a la situación de nuestra investigación. Esta saturación del proceso es una de las técnicas posibles para desarrollar la validez del procedimiento (Pérez Serrano, 1994).

IV.8.2. CODIFICACIÓN DE INDICADORES: EJEMPLIFICACIÓN DE CRITERIOS ADOPTADOS E INSTRUMENTOS UTILIZADOS

En este subapartado se pretenden explicar e ilustrar algunos aspectos relacionados con la codificación de los indicadores y el modo en que se ha desarrollado.

La codificación de gran parte de los indicadores (entre ellos, los indicadores correspondientes a los indicadores de las Dimensiones 1, 3, 4 y 5, tanto para las UT como las UP) se ha derivado de la lectura en profundidad de los documentos. Esa lectura en profundidad por parte del EI ha dado lugar a un conjunto de anotaciones de interés sobre diferentes aspectos o elementos detectados en la unidad y relacionados con cada uno de los indicadores. A partir de estas anotaciones y de una valoración global de la unidad (especialmente en el caso de los indicadores de la Dimensión 1) se ha asignado un valor en la escala 1-5 para ese indicador y unidad analizada, de acuerdo con la leyenda explicativa correspondiente, y se ha generado una explicación justificativa de dicha asignación a partir de lo detectado en la unidad analizada.

Sin embargo, en gran parte de los indicadores de la Dimensión 2, titulada “Completitud de la unidad”, ha sido necesaria la utilización de algunos instrumentos auxiliares para apoyar la valoración de los mismos, tanto en las UT como en las UP. Esto ha sido así en aquellos indicadores en los que su valoración en la unidad se basaba en la valoración individual de una característica en determinados elementos que la componían. En el caso de las UT, es el caso de los indicadores asociados a la frecuencia con la que se registran los cuatro tipos de elementos en los que se ha dividido el contenido teórico[38]. Asimismo, en las UP, es el caso de los indicadores de las tres primeras variables, así como los tres últimos indicadores de la variable cuarta[39]. Explicamos con detalle e ilustramos esos instrumentos a continuación.

Dimensión 2 de las UT: Instrumentos auxiliares e ilustración del análisis

En relación a las UT, estas herramientas auxiliares de recogida y codificación de datos derivados de la lectura profunda de los documentos han sido necesarias para los tres primeros indicadores de cada una de las cuatro variables de la Dimensión 2. Esos tres

---

[38] Esos cuatro tipos de elementos se presentan y explican en el subapartado IV.3.1 de este mismo capítulo de la tesis doctoral.

[39] Las variables e indicadores de las UP correspondientes a la Dimensión 2 se explican en el subapartado IV.3.2 de este mismo capítulo de la tesis doctoral.

indicadores estaban ligados a la frecuencia de registro en una determinada UT de los elementos de cada uno de los cuatro tipos que se han considerado en las exposiciones teóricas del docente en un tema concreto de los tres del bloque.

La lista base de elementos de teóricos de cada uno de los cuatro tipos considerados ha sido construida a partir de los documentos creados que recogían toda la información disponible sobre el desarrollo de las clases, y que se presentan en los Anexos B.2 a B.5. Además de recoger el listado de elementos de cada tipo dentro del tema, también se marcan aquellos que son inferidos como elementos más importantes del tema para el docente, a partir de la información contextual, y que han sido reflejados añadiendo una marca, "(Imp)", previa al nombre de tal elemento. Una vez creada esa lista, y con la ayuda de una tabla de Excel, se ha recogido la información sobre si cada elemento estaba o no registrado en cada UT correspondiente a la clase y al tema. Las situaciones encontradas en las unidades ha hecho necesaria la distinción de tres niveles de registro: *registro completo* de un elemento, *registro parcial* de un elemento o *no registro* de un elemento. Explicamos e ilustramos esta valoración de la completitud del registro a través de dos contenidos concretos, de los que se muestran escaneos de un registro completo y de un registro considerado como parcial.

El primer contenido corresponde al tipo "Ejemplos ilustrativos" (Variable 2 de la Dimensión 2). Pertenece a la exposición del Docente 2 y a la UT1 (primer tema: funciones elementales), y es el desarrollo de un ejemplo ilustrativo de una función con valor absoluto, f(x)=|2x-1|. Es el ejemplo número 29 en el desarrollo teórico de dicho tema (Anexo B.3). En ese ejemplo, el docente escribe la función como una función definida a trozos (a partir de la definición de valor absoluto de una función) y realiza su representación gráfica. El siguiente escaneo de la alumna A14 (ver Figura IV.2), muestra cómo realiza un *registro completo* de este ejemplo, al recoger de forma completa los dos aspectos que formaron parte de su desarrollo.

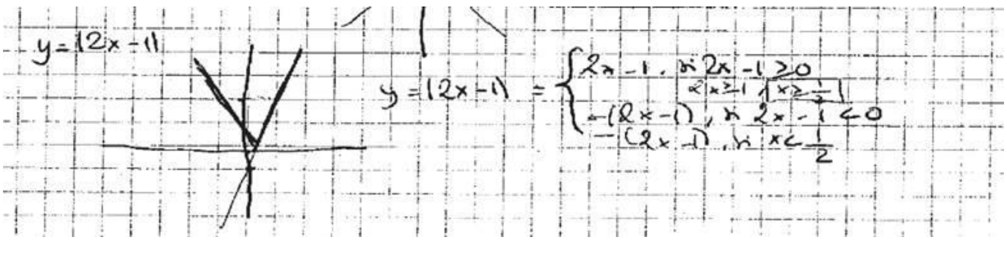


Figura IV.2. Escaneo que ilustra el registro completo de un ejemplo (alumna A14).

Como contraste, el escaneo de la Figura IV.3 muestra un registro considerado como parcial de ese mismo ejemplo. El escaneo pertenece a la UP1 de la alumna A11, de la misma clase. En él, se evidencia que la alumna no ha registrado la escritura de la función como una función definida a trozos, y tampoco ha completado la representación gráfica de la misma. Se representa la función f(x)=2x-1, pero no se representa la función con valor absoluto a partir de la misma. En esas circunstancias, dado que sí que son registrados algunos aspectos asociados al desarrollo del ejemplo, pero otros no, se ha valorado que el registro por parte de A11 de este ejemplo fue un *registro parcial*.

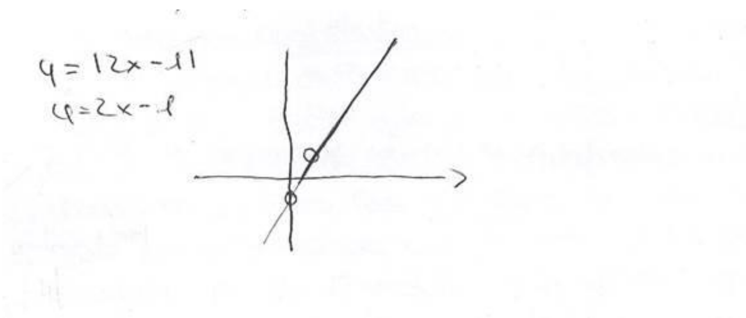


Figura IV.3. Escaneo que ilustra el registro parcial de un ejemplo (alumna A11).

El segundo contenido que vamos a utilizar para ilustrar esta valoración corresponde al tipo “Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones” (Variable 1 de la Dimensión 2). Se ha tomado este contenido para ilustrar un criterio de completitud del registro que ha sido adoptado por el EI, ante la presencia de un hecho detectado en muchos alumnos al registrar los contenidos teóricos asociados a la resolución de indeterminaciones, dentro de la UT2 (límite de una función y continuidad). Al presentar los docentes el procedimiento de resolución de una indeterminación concreta y poner varios ejemplos para ilustrarlo, se observó que muchos estudiantes no recogieron de forma explícita el procedimiento o los pasos a seguir para su resolución, pero sí que recogieron los ejemplos en los que implícitamente se observaba el procedimiento.

En particular, lo ilustramos en el aula de Ciencias Sociales del Docente 3, para el contenido número 17 dentro de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones de la UT2: “Método para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$”. El siguiente escaneo de la alumna A31 (ver Figura IV.4) evidencia que la alumna, además de desarrollar el ejemplo de límite, escribe verbalmente los pasos a seguir para resolver dicha indeterminación. En ese caso, hemos considerado que la alumna ha realizado un *registro completo* de este contenido. En la Figura IV.4 hemos añadido dos flechas para resaltar la escritura verbal de los pasos a la que hacemos referencia. Este registro verbal explícito del método para resolver la indeterminación no ha sido el comportamiento usual entre el alumnado ante este tipo de contenido.

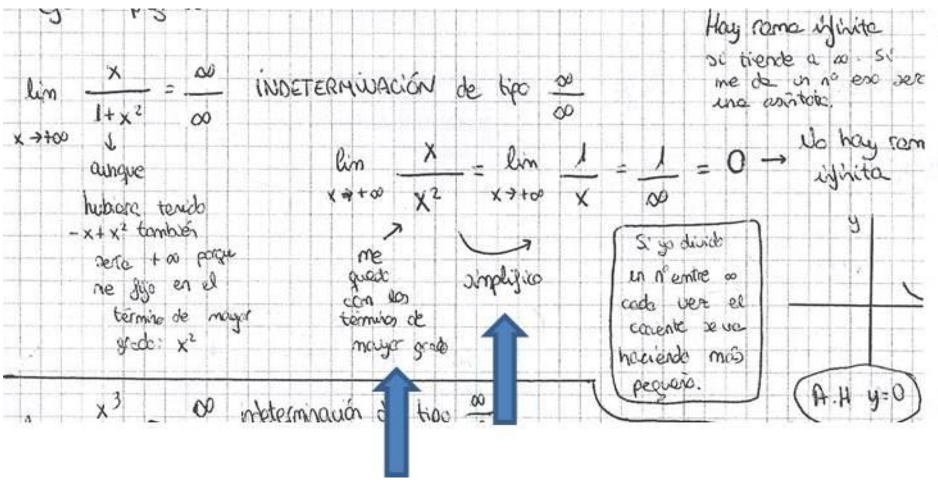


Figura IV.4. Escaneo que ilustra el *registro completo* del método para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ (resaltado con flechas, alumna A31).

El comportamiento más habitual ha sido el que se muestra en el siguiente escaneo, perteneciente a la alumna A41, y correspondiente al mismo contenido anterior. En la Figura IV.5 se observa el registro de los dos ejemplos utilizados para ilustrar el método. La alumna registra de forma completa ambos ejemplos, aunque sea poco ordenado su desarrollo. Sin embargo, los pasos a seguir para la resolución de la indeterminación se desarrollan de forma simbólica sobre los propios ejemplos, pero no se explicitan, por ejemplo, verbalmente. En esa situación, se ha considerado que existía un *registro parcial* del método.

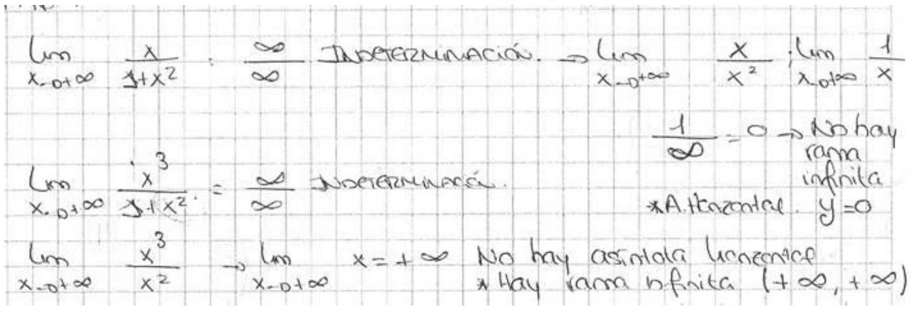


Figura IV.5. Escaneo que ilustra un *registro parcial* del método para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ (desarrollo simbólico de ejemplo, alumna A41).

Se ha creado una tabla Excel para cada tipo de contenido en cada tema y aula, en la que se almacena la información sobre los elementos registrados por cada estudiante y el nivel de registro (marcando con un “1” el registro completo, con un “0’5” un registro parcial y con un “0” la ausencia de registro). La Figura IV.6 muestra una imagen de la tabla obtenida para las “Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones” en el caso de la UT1 y el aula del Docente 2.

AULA DEL DOCENTE 2 (AULA CCSS). UT1. COMPLETITUD DE LA UNIDAD TEÓRICA

DEFINICIONES, RESULTADOS TEÓRICOS, FÓRMULAS Y JUSTIFICACIONES

ELEMENTO DE ESTE TIPO DESARROLLADO EN EL AULA	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
(Imp) Definición de función como relación entre dos o más variables	1	1	1	1	1	1	1	0
Definición de variable dependiente e independiente	1	1	0,5	1	0,5	0,5	1	0
(Imp) Tres formas de definir una función: tabla de valores, gráficamente o a través de expresión analítica	1	1	1	1	1	1	1	0
Explicación del paso de una función dada a partir de una tabla de valores a su representación gráfica	0	0	1	1	1	1	0,5	0
Explicación del paso de una función dada a partir de una tabla de valores a su expresión analítica	0	0	0,5	1	0	0,5	0,5	0
Concepto de función elemental	1	1	1	1	1	0,5	1	0
(Imp) Listado de funciones elementales: polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales…	1	0	1	1	1	1	1	0
(Imp) Función polinómica de grado 1: expresión analítica general y tipo de representación gráfica	1	1	1	1	1	1	1	0
(Imp) Pendiente de una recta: definición y modo de cálculo	1	1	1	1	1	1	1	0
(Imp) Concepto de ordenada en el origen	0	0	0	0	0	1	0,5	0
Explicación sobre cómo representar una función polinómica de primer grado (dada analíticamente)…	1	1	0,5	1	0	1	1	0
Obtención de la expresión analítica de una función polinómica de primer grado a partir de su gráfica	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0,5	0
(Imp) Ecuación punto-pendiente de una recta	1	1	1	1	0	1	1	0
Explicación sobre cómo obtener la ecuación punto-pendiente de una recta dados dos puntos de la misma	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0
(Imp) Función polinómica de grado 2: expresión analítica general y tipo de representación gráfica	1	1	1	1	1	1	1	0
Tres posibilidades según el número de puntos de corte de la función polinómica de segundo grado con el eje OX	1	1	1	0	0	0,5	1	0
(Imp) Función polinómica de grado 3: expresión analítica general y tipo de representación gráfica	1	1	1	1	1	1	1	0
(Imp) Función racional: definición analítica y verbal (cociente de polinomios)	1	1	1	1	1	1	1	0
En casos sencillos (varios ejemplos), la gráfica de una función racional es una hipérbola	0	0	0	1	0	0,5	0	0
(Imp) Idea de asíntota (horizontal o vertical, en las gráficas de hipérbolas)	0,5	0	0	0,5	0	1	0,5	0
(Imp) Indicación de la relación existente entre las gráficas de funciones recíprocas	1	1	1	1	1	1	1	0
Definición de función definida a trozos	1	1	1	1	1	1	1	0
(Imp) Definición de función valor absoluto, f(x)=|x|	1	1	1	1	1	1	1	0
(Imp) Concepto de interpolación (en particular, interpolación lineal)	1	1	1	1	1	1	1	0
(Imp) Función exponencial: expresión analítica general	0,5	0	0,5	0	0	1	1	0
(Imp) Propiedades de función exponencial con base a>1 (a partir de la gráfica)	1	1	1	1	1	1	1	0
Explicación sobre obtención de gráfica de exponencial con base 0<a<1 a partir de a>1…	0	0	0	0	0	0	0	0
(Imp) Definición de logaritmo en base a de un número	1	1	1	1	0	1	1	0
(Imp) Función logarítmica es la recíproca de la exponencial de misma base	1	1	1	1	1	1	1	0
(Imp) Propiedades de función logarítmica con base a>1 (a partir de la gráfica)	0,5	1	1	1	1	1	1	0
Diferente crecimiento de las funciones logarítmicas, polinómicas y exponenciales	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL ELEMENTOS DE ESTE TIPO: 31	***22,5***	***21***	***23***	***24***	***18***	***25,5***	***25***	***0***

Figura IV.6. Imagen de la tabla Excel que almacena la información sobre los registros del tipo de contenido “Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones” en la UT1 para el aula del Docente 2.

Este tipo de tablas han servido como instrumento auxiliar para valorar de forma global la completitud en el registro por parte de cada alumno de los contenidos desarrollados por el docente. Por ejemplo, fijándonos en el contenido de la tabla que muestra la Figura IV.6, podemos ver que la alumna A14 ha registrado 23 elementos de forma completa y 2 elementos de forma parcial y que, además, hay seis elementos que no ha registrado del total de 31 existentes en la exposición del Docente 2 correspondiente a la UT1. Con esta información, se ha valorado con un 4 en la escala 1-5 el primero de los indicadores, “Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad”, de la Variable 1, “Completitud de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones”, de acuerdo con la leyenda explicativa, puesto que la alumna registra bastantes de los elementos de este tipo (alrededor de las tres cuartas partes), pero faltan los restantes.

Dimensión 2 de las UP: Instrumentos auxiliares e ilustración del análisis

En relación a las UP, varias herramientas similares de almacenamiento de la información se han necesitado para poder valorar en la unidad bastantes de los indicadores de la Dimensión 2, a partir de las valoraciones particulares en cada una de las actividades. Dado que en las dos primeras variables se distinguen diferentes indicadores según hayan sido corregidas en el aula o no las actividades planteadas por el docente, se han desarrollado dos tablas de Excel distintas para recoger la información relevante de cada actividad asociada con los indicadores y su medición, una tabla centrada en cada grupo de tareas.

Las listas base de actividades planteadas por un docente a lo largo de un tema concreto que han sido o no corregidas posteriormente han sido construidas a partir de los documentos creados que recogen toda la información disponible sobre el desarrollo de las clases, documentos que se presentan en los Anexos B.2 a B.5. En estas listas se ha mantenido el código utilizado en dichos anexos para indicar si una actividad es extraída directamente del libro de texto (AELT), es reformulada a partir de una actividad del libro de texto (ARLT) o es creada por el propio docente (ACD). Se ha mantenido este código a título informativo, puesto que es un hecho que no se refleja ni tiene incidencia en los diferentes indicadores. Para poder identificar la actividad se ha tomado la referencia completa del material del que ha sido extraído (por ejemplo, del libro de texto, indicando la página y el número) o se ha explicado brevemente su enunciado (en caso de ser creada por el propio docente).

Una vez creadas esas tablas de Excel y las listas de tareas, se han ido completando a través de la valoración de cada actividad en cada UP, de acuerdo con los indicadores considerados. La primera variable considerada, “Cantidad de actividades registradas en la unidad”, estudia si las actividades han sido registradas o no. En caso de que una actividad sí estuviera registrada se ha escrito “Reg”[40]. En caso contrario, “No Reg”.

La Variable 2, “Completitud en el desarrollo de las actividades registradas”, mide el grado de desarrollo de las actividades que sí que se han considerado como registradas. Como ya explicábamos al presentar esta variable (subapartado IV.3.2), se han establecido cinco niveles posibles para el desarrollo del registro de una actividad. Ilustramos a continuación esos niveles de registro, a partir de escaneos tomados de las UP de los alumnos para una actividad concreta.

Tomaremos para ello una actividad planteada por el Docente 3 en el aula de Ciencias Sociales y extraída del libro de texto. En esta actividad se han detectado muchos de los niveles de desarrollo, de ahí que se tome como ejemplo ilustrativo. La actividad es el ej. 35 de la página 126, correspondiente a la UP1, que fue planteada y corregida posteriormente por el Docente 3 en el aula. El enunciado de la actividad es:

> Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 menos.
>
> (a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?
>
> (b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.
>
> (c) ¿Qué subida produce ingresos máximos? (Colera y García, 2008b, p. 126)

Una actividad ha sido considerada como *actividad desarrollada de manera completa* siempre que se desarrollaran de forma completa todos los apartados o se diera respuesta completa a todas las preguntas o requerimientos que plantea la actividad. En relación con la actividad tomada como ejemplo, en la unidad de la alumna A38 el EI ha valorado que el ejercicio ha quedado completamente desarrollado, puesto que se da respuesta completa a los tres apartados. El escaneo de la Figura IV.7 muestra este hecho. Esto es independiente de que se considere que el alumno haya intentado resolver la actividad o haya sido transcrita de su corrección, o que la resolución sea

[40] Recordamos el criterio para considerar una actividad como registrada, ya indicado en el subapartado IV.3.2 de este mismo capítulo: “Para contabilizar una actividad como registrada será necesario que, al menos, se haya escrito el enunciado de la misma, o bien la referencia y los datos de la misma (aunque luego, por ejemplo, no se produzca ningún avance en el intento de resolución de la misma o en su transcripción).”

satisfactoria o no, características en las que se centra la Variable 3. Además de las anotaciones de la alumna, en el escaneo de la Figura IV.7 también pueden apreciarse las anotaciones realizadas por el EI durante la lectura profunda y el análisis de los documentos, sobre aspectos de interés relacionados con los distintos indicadores (en el escaneo: anotaciones en los márgenes o con un color negro más marcado). Las *actividades desarrolladas de manera completa* se han marcado con un “1” en la columna de la tabla de Excel destinada a esta variable.

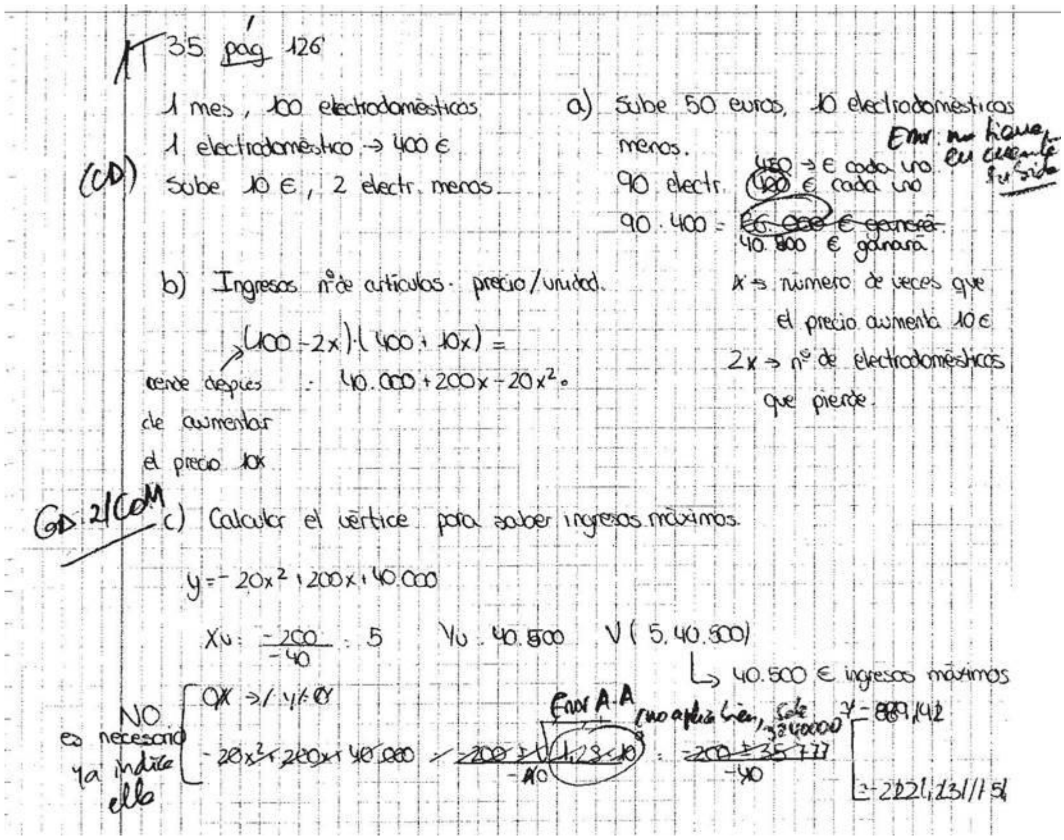


Figura IV.7. Escaneo de una *actividad desarrollada de manera completa* en la UP1 de la alumna A38, junto con las anotaciones en el análisis del EI.

Una actividad ha sido considerada como *actividad bastante desarrollada* si queda recogida la respuesta a gran parte de las preguntas o requerimientos que plantea la actividad, pero no a todos. En relación con la actividad ejemplo, se ha asignado este nivel de desarrollo al registro de la alumna A33, recogido en la Figura IV.8 (junto con las anotaciones del EI). En este caso, la alumna escribe la respuesta completa para los dos primeros apartados, pero no para el tercero, donde indica la subida asociada a los ingresos máximos pero no escribe los ingresos máximos, algo que también se desarrolló en el aula (de hecho, la alumna tacha ese cálculo). Las *actividades bastante* *desarrolladas* se han marcado con un “0’75” en la columna de la tabla de Excel destinada a esta Variable 2.

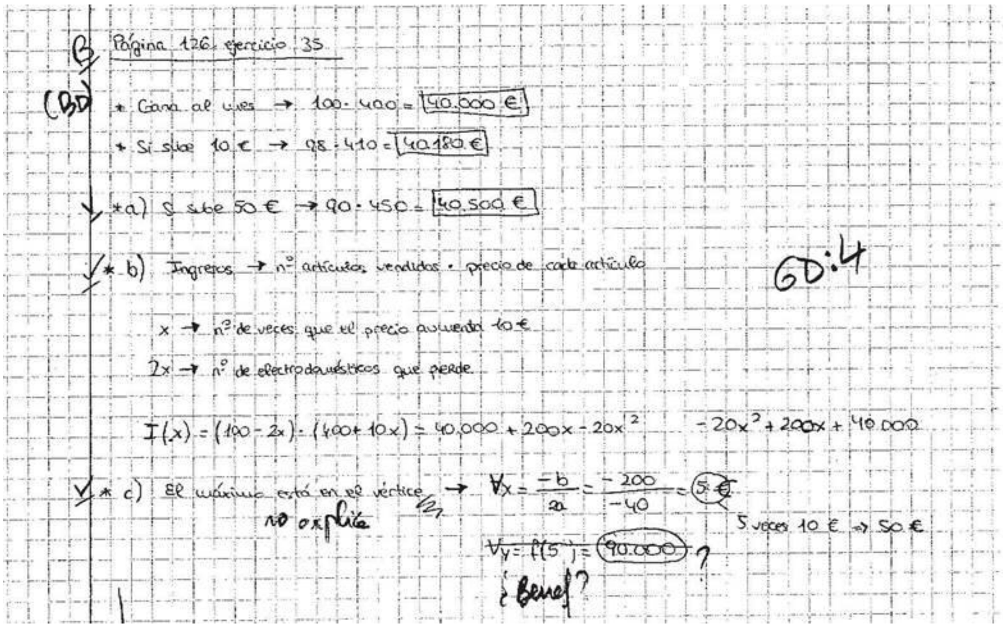


Figura IV.8. Escaneo de una *actividad bastante desarrollada* en la UP1 de la alumna A33, junto con las anotaciones en el análisis del EI.

Una actividad ha sido valorada como *actividad parcialmente desarrollada*, si en ella, aproximadamente, han quedado registrados y desarrollados alrededor de la mitad de los apartados o de los requerimientos planteados, o si los apartados se desarrollan generalmente de forma incompleta. En relación a la actividad ejemplo, se ha asignado este nivel de desarrollo al registro del alumno A37, que se muestra en la Figura IV.9 (junto con las anotaciones del EI). En este caso, el alumno sí desarrolla el segundo apartado, pero el primero y el tercero están muy incompletos (especialmente el primero, donde únicamente se escribe el resultado, que además es erróneo y no es corregido por el estudiante). Las *actividades parcialmente desarrolladas* se han marcado con un “0’5” en la columna de la tabla de Excel destinada a esta Variable 2.

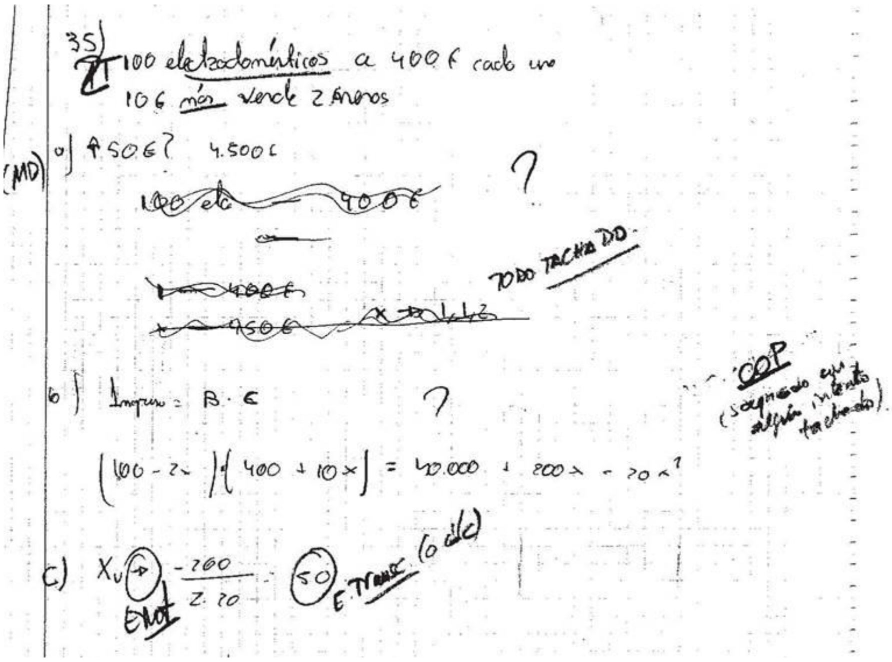


Figura IV.9. Escaneo de una *actividad parcialmente desarrollada* en la UP1 del alumno A37, junto con las anotaciones en el análisis del EI.

Una actividad ha sido valorada como *actividad poco desarrollada* cuando se da respuesta a pocos de los requerimientos o apartados de que consta la tarea, o existe un número importante de apartados que apenas se desarrollan. Este nivel de desarrollo es el que se ha asignado al registro de la alumna A40 para la actividad ejemplo, que puede verse en la Figura IV.10 (junto con las anotaciones del EI). En este caso, la alumna únicamente desarrolla el primer apartado, dejando los dos restantes en blanco. Las *actividades poco desarrolladas* se han marcado con un "0'25" en la columna de la tabla de Excel destinada a esta Variable 2.

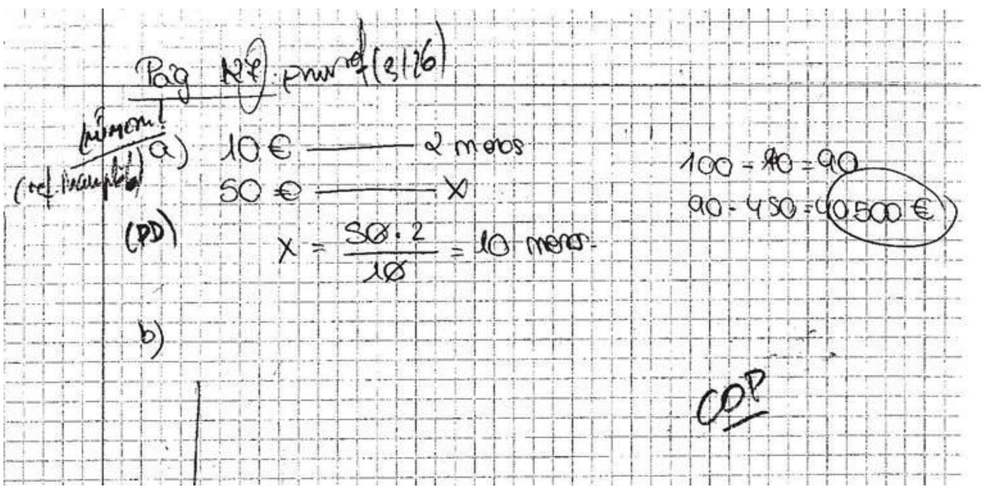


Figura IV.10. Escaneo de una *actividad poco desarrollada* en la UP1 de la alumna A40, junto con las anotaciones en el análisis del EI.

Por último, una actividad puede ser valorada como *actividad registrada pero no desarrollada.* Esto sucede en el caso de que únicamente se recoja el enunciado de la actividad, o se escriba una referencia de la misma y los datos, pero sin que quede registrado ningún desarrollo de la solución de dicha tarea.

Pasamos a continuación a la Variable 3, “Ejecución por parte del alumno de las actividades registradas en la unidad”, que tiene dos indicadores fundamentales. Esto ha aconsejado reservar dos columnas para esta variable en la tabla de Excel. Con respecto al primer indicador, “Porcentaje (respecto del total) de actividades que se revelan intentadas por el alumno”, en el subapartado IV.3.2 ya se ha explicado que el EI ha intentado inferir si las actividades que aparecen en la UP de un estudiante se revelaban como intentadas por él mismo o como transcritas de otros medios, a partir de la información y los datos existentes. En el caso de que una actividad se haya inferido como intentada por el propio estudiante, se ha marcado este hecho en la tabla escribiendo “Int”, mientras que si se ha revelado como transcrita directamente de otro medio se ha escrito “No Int”.

El segundo indicador, “Grado de satisfacción en los intentos de resolución de las actividades que ha efectuado el alumno”, se aplica únicamente a las actividades que se han inferido como intentadas por el propio estudiante. En cada una de ellas, se ha asignado un grado de satisfacción al intento de resolución llevado a cabo, a través de una escala 1-5. En la Tabla IV.10 se explicó la leyenda finalmente utilizada para realizar esa asignación.

Para clarificar e ilustrar esta asignación, vamos a utilizar los escaneos de dos actividades concretas planteadas por el Docente 3 en el aula de Ciencias Sociales y que fueron posteriormente corregidas. Las actividades corresponden a la UP3 (tema sobre la derivada de una función) y fueron extraídas del libro de texto: los apartados a y b del ej. 69 de la pág. 197. Los apartados se han analizado como ejercicios independientes en el estudio. Se han escogido estas dos actividades idénticas al detectarse en las UP de los alumnos gran parte de los diferentes niveles del grado de satisfacción (a excepción del nivel más bajo). El enunciado común de las dos actividades es: “Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximo y mínimo” (Colera y García, 2008b, p. 197), siendo las dos funciones de los dos apartados: a) $f(x)=-3x^2+6x$, y b) $f(x)=2x^2-8x+7$.

De acuerdo con la leyenda de la Tabla IV.10, se ha asignado al intento de resolución de una actividad un grado de satisfacción de “5” cuando la resolución de la actividad ha sido completamente satisfactoria, sin cometer ningún error. Es el caso del escaneo que se muestra en la Figura IV.11, tomado de la alumna A31, en el que se resuelve de forma completamente satisfactoria el apartado a), incluyendo la indicación explícita de los cálculos para averiguar el signo de la derivada en los dos intervalos y el uso adecuado de la notación simbólica. El escaneo contiene, además, las anotaciones realizadas por el EI durante la lectura profunda y el análisis de los documentos (en el escaneo: anotaciones en los márgenes o con un color negro más marcado). En esta situación, se ha introducido un “5” en la segunda columna de la tabla de Excel correspondiente a esta variable.

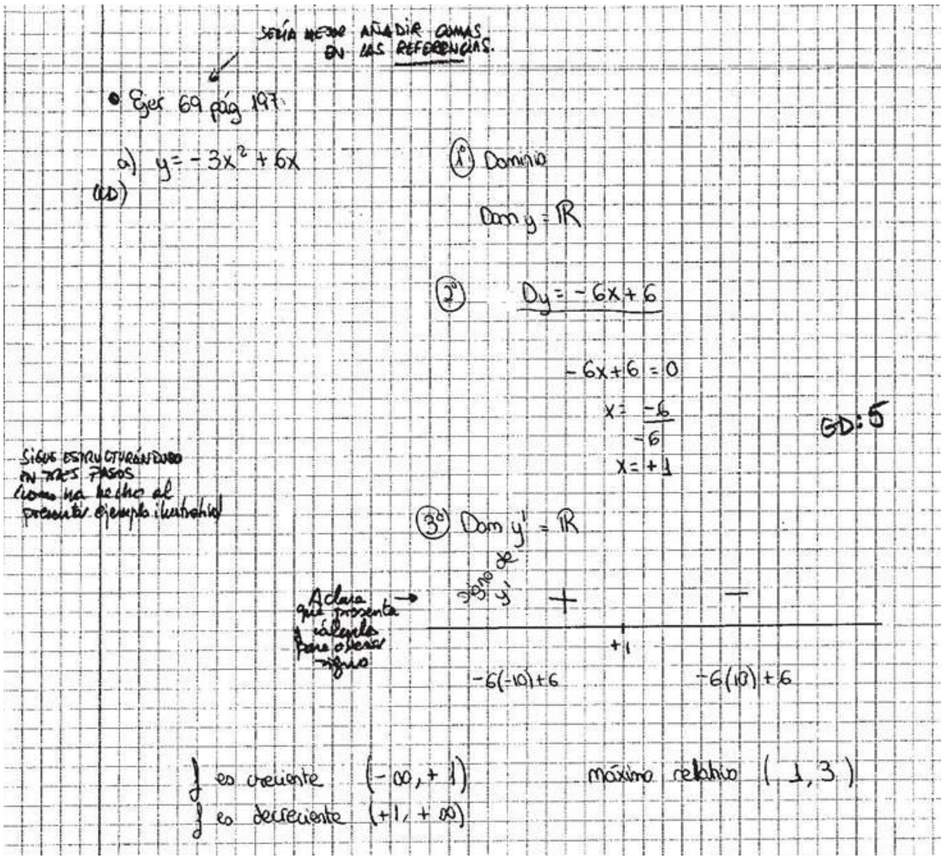


Figura IV.11. Escaneo de una actividad con un grado de satisfacción asignado de “5” en la escala 1-5, de la alumna A31, junto con las anotaciones en el análisis del EI.

Del mismo modo, se ha asignado a una actividad intentada un grado de satisfacción de “4” en el intento de resolución cuando dicha resolución ha sido satisfactoria, pero contenía alguna errata o algún error poco relevante, o bien no se ha desarrollado algún aspecto de forma completa. Un ejemplo es el escaneo que se muestra en la Figura IV.12, de la alumna A33, en la que se resuelve el apartado b) de forma correcta, pero sin explicitar los cálculos realizados para averiguar el signo de la derivada en los dos intervalos. El escaneo, además, contiene las anotaciones realizadas durante el análisis por el EI. En las actividades a las que se les ha asignado este nivel de satisfacción, se ha introducido un “4” en la segunda columna de la tabla de Excel correspondiente a esta variable.

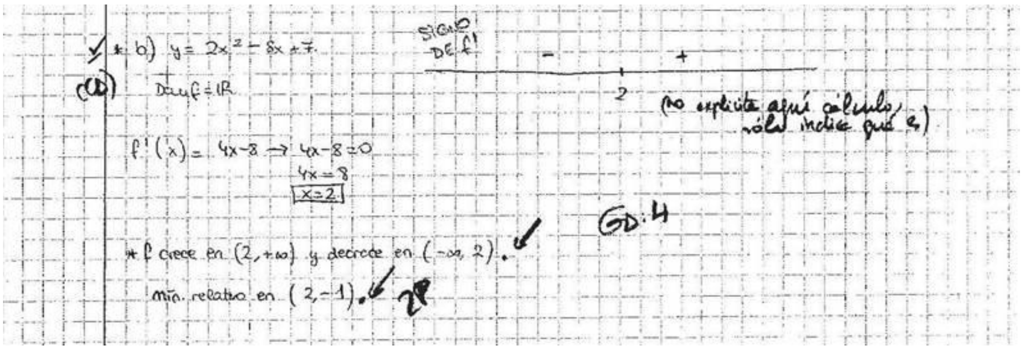


Figura IV.12. Escaneo de una actividad con un grado de satisfacción asignado de “4” en la escala 1-5, de la alumna A33, junto con las anotaciones en el análisis del EI.

Según vemos en la Tabla IV.10, la asignación del grado de satisfacción a un intento de resolución ha sido de “3” cuando la actividad se ha resuelto parcialmente (aproximadamente la mitad) o la resolución ha sido medianamente satisfactoria, entendiendo este hecho como que la actividad ha contenido algunos errores en su resolución, pero ninguno de ellos es considerado como un error grave. Un ejemplo de actividad a la que se ha asignado este grado de satisfacción se muestra en la Figura IV.13, correspondiente a un escaneo de la alumna A32 (junto con las anotaciones del EI). En su intento de resolución, la alumna parece cometer un error aritmético-algebraico en el signo al resolver la ecuación de primer grado, que corrige utilizando tippex o transformando el “-1” en un “+1” en algunos lugares. El resto del razonamiento era correcto, de ahí que se haya decidido valorar la actividad con un “3”.

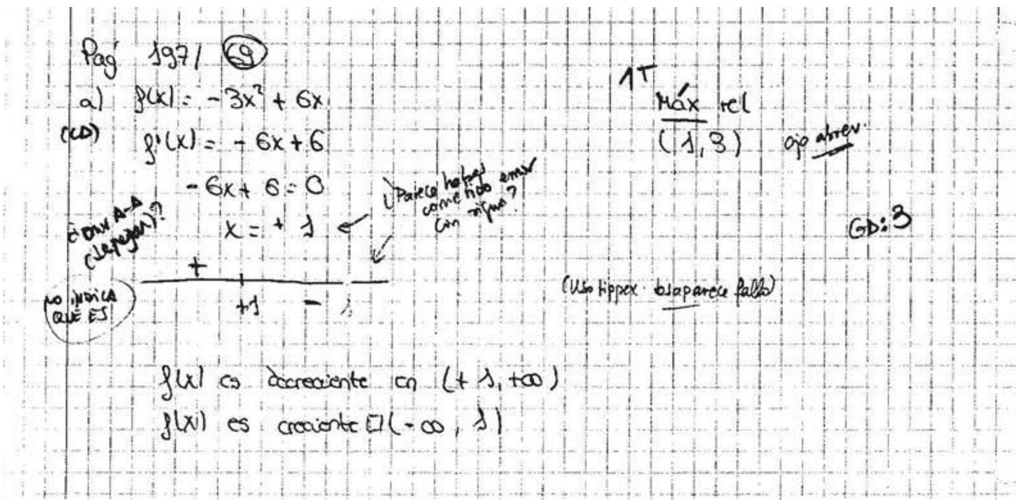


Figura IV.13. Escaneo de una actividad con un grado de satisfacción asignado de “3” en la escala 1-5, de la alumna A32, junto con las anotaciones en el análisis del EI.

En las actividades a las que se les ha asignado un nivel de satisfacción de “3”, se ha introducido un “3” en la segunda columna de la tabla de Excel correspondiente a esta variable.

Siguiendo con el orden decreciente de valores posibles para la asignación, se ha asignado un “2” al grado de satisfacción en un intento de resolución cuando el estudiante ha realizado un intento de resolución poco desarrollado, o el intento de resolución ha sido poco satisfactorio por contener uno o varios errores graves en su planteamiento y/o desarrollo. Un ejemplo de actividad a la que se ha asignado este nivel de satisfacción está en la Figura IV.14, de la alumna A36, junto con las anotaciones del EI. La alumna hace un intento de resolución incompleto (al no indicarse la existencia o no de máximos y/o mínimos), y con un error grave: la alumna parece sustituir en la función f (en lugar de hacerlo en la función derivada) para obtener los signos en los intervalos, lo que le lleva a obtener signo positivo en ambos intervalos. La corrección de este aspecto es muy tenue en la representación de la recta real, sí que corrige las conclusiones obtenidas sobre la monotonía de la función. La presencia de un error grave hace que valoremos con un “2” el nivel de satisfacción en el intento de resolución.

Además, consideramos que esta alumna completa la actividad durante la corrección, puesto que añade la información sobre la existencia de máximo o mínimo, aspecto que no había tratado en su intento de resolución en la UP.

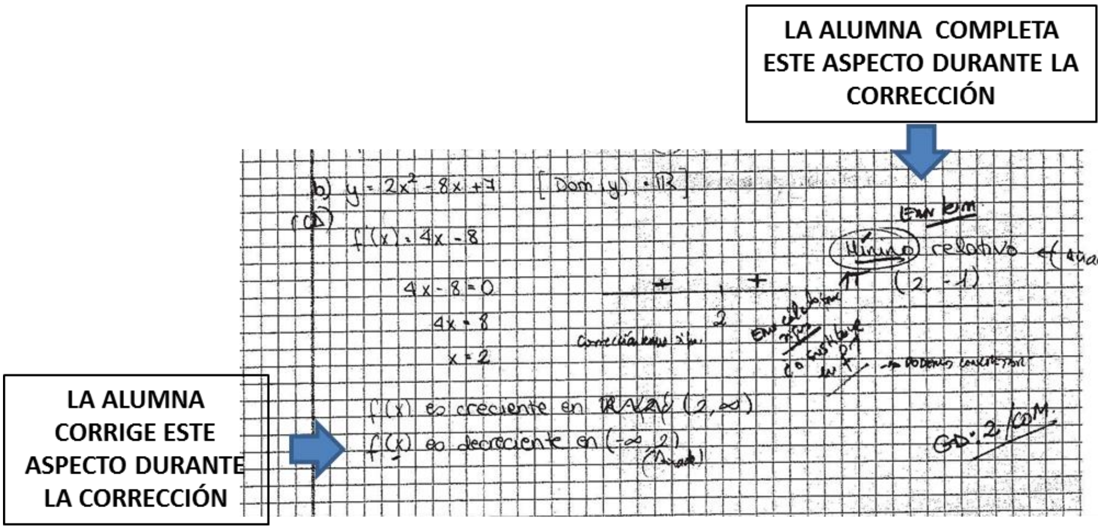


Figura IV.14. Escaneo de una actividad con un grado de satisfacción asignado de “2” en la escala 1-5, posteriormente completada, de la alumna A36, junto con las anotaciones en el análisis del EI.

En las actividades a las que se les ha asignado un nivel de satisfacción de “2”, se ha introducido un “2” en la segunda columna de la tabla de Excel correspondiente a la Variable 3.

Por último, el nivel más bajo de satisfacción que hemos asignado a un intento de resolución es “1”, asociado a un mínimo intento de resolución en el que apenas se haya realizado algún pequeño planteamiento rápidamente abortado. En ese caso, se ha introducido un “1” en la segunda columna para la Variable 3 en la tabla de Excel.

Pasamos a continuación a la última variable considerada en la Dimensión 2 para las UP, la Variable 4, titulada “Revisión de las actividades que son corregidas”. Para el indicador cuarto de dicha variable, “Registro de las mejoras efectuadas por el profesor durante la corrección de actividades en el aula”, también se ha creado una lista de mejoras por tema y aula (a partir de la información contenida en los Anexos B.2 a B.5), y se ha creado una tabla para valorar si los alumnos recogían estas mejoras en sus UP de forma total, parcial o no las recogían.

Para los indicadores quinto y sexto, que hacen mención a si los alumnos completan o rehacen (si ha lugar a ello) sus intentos de resolución de las actividades durante la corrección de las mismas, se ha destinado una última columna en la Tabla de Excel donde se ha indicado la circunstancia. En el caso de que se interpretara que el alumno había realizado un intento de resolución incompleto de la actividad y que dicho intento fue completado durante el proceso de corrección de la misma en el aula, se ha escrito “Com” en el espacio correspondiente a dicha actividad en la columna para esta variable. La Figura IV.14 muestra un ejemplo de compleción de actividad durante su corrección, al añadirse la existencia de un mínimo relativo en la función.

También se han detectado alumnos que han rehecho alguna actividad desde el principio, descartando completamente el intento previo y comenzando uno nuevo (propio o transcrito de la corrección realizada en el aula). En ese caso, se ha escrito “Reh” en el espacio correspondiente a dicha actividad en la columna de la tabla de Excel. Un ejemplo de actividad rehecha por un alumno en una UP se muestra en el escaneo de la Figura IV.15, donde la alumna A24 rehace completamente una actividad creada y propuesta por la Docente 3 en el aula Científico-Tecnológica y posteriormente corregida. La actividad tenía el siguiente enunciado: “Partiendo de la función $f(x)=x^2-1$, escribe la expresión analítica y realiza la representación gráfica de la función trasladada de la anterior una unidad hacia la izquierda y dos unidades hacia abajo”. En la primera parte de la Figura IV.15 se observa un intento de resolución de la alumna A24, con varios errores graves. La alumna, durante la corrección en el aula de la actividad, tacha su intento de resolución y, debajo de él, transcribe la resolución realizada en el aula desde el principio.

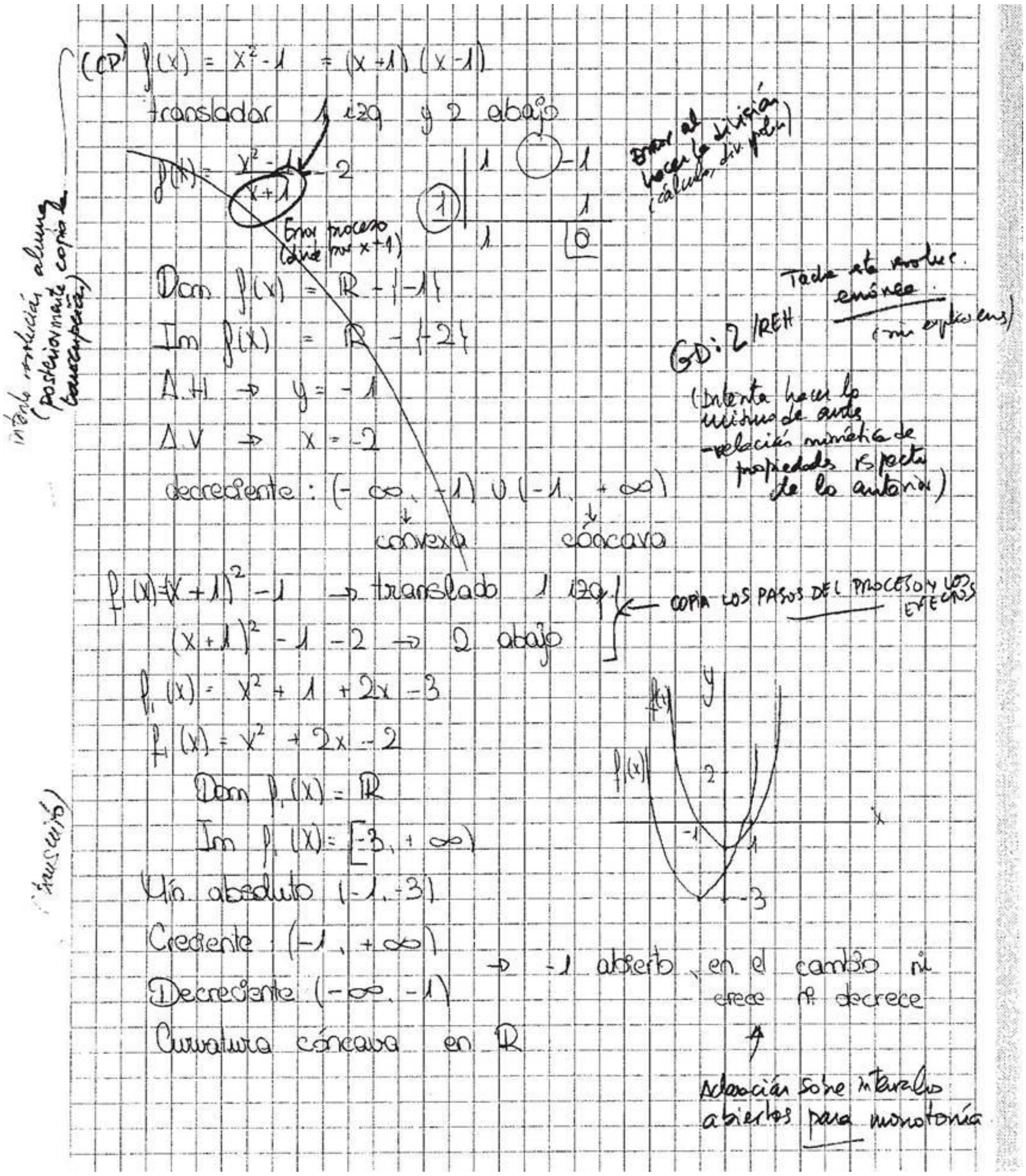


Figura IV.15. Escaneo de una actividad rehecha durante la corrección por la alumna A24, junto con las anotaciones en el análisis del EI.

Por último, en algunos casos se han conjugado los dos comportamientos: ante un intento incompleto de resolución del estudiante, éste ha rehecho de manera completa la actividad desde el principio. En ese caso, se ha escrito “Com/Reh” en la columna correspondiente de la tabla de Excel, para indicar la presencia de los dos hechos.

Una vez explicado el proceso de compleción de la tabla de Excel que sirve para recopilar la información relevante de cada actividad para realizar la valoración global de muchos de los indicadores de la Dimensión 2, vamos a mostrar un ejemplo de tabla resultante. En concreto, es la tabla correspondiente a las actividades propuestas por el Docente 2 y que fueron posteriormente corregidas en la UP1 (primer tema). Las Figuras IV.16 e IV.17 muestran imágenes de la tabla de Excel, que se ha partido en dos para una mejor lectura, al ser dicha tabla excesivamente ancha.

Estas tablas han servido como instrumento auxiliar para valorar de forma global los indicadores de las Variables 1, 2 y 3, y varios indicadores de la Variable 4 en esta Dimensión 2. Por ejemplo, si nos fijamos en el contenido de la tabla para la UP1 de la alumna A14 (en la Figura IV.16), de las 29 actividades planteadas por el Docente 2 en este tema y posteriormente corregidas en el aula, la alumna registra 27. Esto supone un registro del 93’10% de las actividades en esta circunstancia. De acuerdo con la leyenda explicativa para este indicador (ver Tabla IV.8), se ha valorado con un 5 el primer indicador de la Variable 1 para la Dimensión 2 en la UP1 de la alumna A14.

Desarrollamos un ejemplo más, siguiendo con los datos de A14. Nos fijamos ahora en la Variable 2. La tabla (ver Figura IV.16) muestra que, de las 27 actividades que la alumna ha registrado entre las propuestas y posteriormente corregidas, ha habido 18 que se han considerado desarrolladas de manera completa (marcado con un “1”), seis han sido consideradas como bastante desarrolladas (“0’75”), dos como parcialmente desarrolladas (“0’5”) y una registrada pero no desarrollada (“0”). Así, esta alumna ha conseguido 23’5 puntos de un total de 27 puntos posibles al medir el grado de desarrollo de las actividades registradas. En porcentaje, esa cantidad de puntos representa el 87’04% del total. A partir de la leyenda explicativa para el primer indicador de esta variable (ver Tabla IV.9), dicho indicador ha sido valorado con un 4 en la escala 1-5, puesto que el porcentaje obtenido se encuentra dentro del intervalo [80,95).

EJERCICIOS PLANTEADOS POR EL DOCENTE 2 (AULA CCSS) Y CORREGIDOS POS

	A11					A12					A13					A14				
	Var 1	Var 2	Var 3		Var 4	Var 1	Var 2	Var 3		Var 4	Var 1	Var 2	Var 3		Var 4	Var 1	Var 2	Var 3		Var 4
ACD: Representación de una función cúbica	Reg	0,75	No Int			Reg	0,75	No Int			Reg	0,5	No Int			Reg	1	Int	2	Com
AELT: Pág. 109, ej. 1	No Reg					No Reg					Reg	0,5	No Int			Reg	0	No Int		
AELT: Pág. 109, ej. 2	No Reg					No Reg					Reg	0,5	No Int			No Reg				
AELT: Pág. 125, ej. 27	Reg	1	No Int			Reg	0,25	No Int			Reg	1	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 125, ej. 28	Reg	1	No Int			Reg	0,5	No Int			Reg	1	No Int			Reg	1	Int	2	Reh
AELT: Pág. 125, ej. 30	No Reg					No Reg					Reg	0,5	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 125, ej. 31	Reg	0,5	No Int			No Reg					Reg	1	No Int			Reg	1	Int	2	Reh
AELT: Pág. 125, ej. 32	Reg	0,25	No Int			Reg	0,5	No Int			Reg	0,75	No Int			Reg	1	Int	2	Com
AELT: Pág. 125, ej. 33	Reg	0,75	No Int			Reg	0,5	No Int			Reg	0,75	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 125, ej. 34	Reg	0,25	No Int			No Reg					Reg	0,75	No Int			Reg	0,75	Int	2	Reh
AELT: Pág. 125, ej. 35	Reg	0,5	No Int			Reg	0,25	No Int			Reg	0,5	No Int			Reg	0,75	No Int		
AELT: Pág. 126, ej. 36	Reg	0,75	No Int			Reg	0,5	No Int			Reg	1	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 126, ej. 37	Reg	0,25	No Int			Reg	0,25	No Int			Reg	0,75	No Int			Reg	0,75	No Int		
AELT: Pág. 144, ej. 25	Reg	0,5	No Int			No Reg					Reg	0,5	No Int			Reg	1	Int	2	
AELT: Pág. 144, ej. 26	Reg	0,75	No Int			No Reg					Reg	0,5	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 144, ej. 27	Reg	1	No Int			Reg	0,5	No Int			Reg	1	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 144, ej. 28, apartado a	Reg	0,75	No Int			No Reg					Reg	0,5	No Int			Reg	0,5	Int	3	
AELT: Pág. 144, ej. 31	No Reg					No Reg					Reg	0,75	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 127, ej. 1 de autoevaluación	No Reg					No Reg					No Reg					Reg	1	Int	3	
AELT: Pág. 127, ej. 2 de autoevaluación	No Reg					No Reg					No Reg					Reg	0,5	Int	3	
AELT: Pág. 127, ej. 3 de autoevaluación	No Reg					No Reg					No Reg					Reg	0,75	Int	2	
AELT: Pág. 127, ej. 4 de autoevaluación	No Reg					No Reg					Reg	1	Int	2		Reg	0,75	No Int		
AELT: Pág. 127, ej. 5 de autoevaluación	No Reg					No Reg					Reg	1	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 127, ej. 6 de autoevaluación	No Reg					No Reg					No Reg					No Reg				
AELT: Pág. 145, ej. 3 de autoevaluación	No Reg					No Reg					Reg	1	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 145, ej. 4 de autoevaluación	No Reg					No Reg					Reg	0,75	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 145, ej. 5 de autoevaluación	No Reg					No Reg					Reg	0,75	No Int			Reg	0,75	No Int		
AELT: Pág. 145, ej. 7 de autoevaluación	No Reg					No Reg					Reg	1	No Int			Reg	1	No Int		
AELT: Pág. 145, ej. 8 de autoevaluación	No Reg					No Reg					Reg	0,75	No Int			Reg	1	No Int		

Figura IV.16. Imagen de la primera parte de la tabla Excel que almacena la información relevante de cada actividad para medir los indicadores de la Dimensión 2 para las UP, en el caso de las actividades planteadas por el docente y posteriormente corregidas, en el aula del Docente 2.

TERIORMENTE EN LA CLASE

A15					A16					A17					A18					
Var 1	Var 2	Var 3		Var 4	Var 1	Var 2	Var 3		Var 4	Var 1	Var 2	Var 3		Var 4	Var 1	Var 2	Var 3		Var 4	
Reg	0,5	No Int			Reg	0,75	No Int			Reg	0,5	No Int			No Reg					ACD: Representación de una función cúbica
Reg	0,5	No Int			No Reg					Reg	0,5	No Int			No Reg					AELT: Pág. 109, ej. 1
No Reg					No Reg					Reg	0,5	No Int			No Reg					AELT: Pág. 109, ej. 2
Reg	1	No Int			Reg	1	No Int			Reg	1	No Int			Reg	0,25	No Int			AELT: Pág. 125, ej. 27
Reg	1	No Int			Reg	1	Int	4		Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 125, ej. 28
Reg	1	No Int			Reg	1	Int	2		Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 125, ej. 30
Reg	1	No Int			Reg	1	Int	4	de la alu	Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 125, ej. 31
Reg	0,5	No Int			Reg	0,75	Int	2	m (prof (	Reg	1	Int	2	Com	No Reg					AELT: Pág. 125, ej. 32
Reg	0.25	No Int			Reg	0,75	Int	3		Reg	0,75	No Int			No Reg					AELT: Pág. 125, ej. 33
No Reg					No Reg					Reg	0,75	No Int			No Reg					AELT: Pág. 125, ej. 34
No Reg					No Reg					Reg	0,75	No Int			No Reg					AELT: Pág. 125, ej. 35
Reg	0,75	No Int			Reg	1	Int	3	m (prof (	Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 126, ej. 36
Reg	0,25	No Int			Reg	0.75	Int	3		Reg	0,75	No Int			No Reg					AELT: Pág. 126, ej. 37
Reg	0,5	No Int			No Reg					Reg	0,5	No Int			No Reg					AELT: Pág. 144, ej. 25
No Reg					No Reg					Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 144, ej. 26
No Reg					No Reg					Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 144, ej. 27
No Reg					No Reg					Reg	0,25	No Int			No Reg					AELT: Pág. 144, ej. 28, apartado a
Reg	0,5	No Int			No Reg					Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 144, ej. 31
No Reg					No Reg					Reg	0,75	Int	3		No Reg					AELT: Pág. 127, ej. 1 de autoevaluación
No Reg					No Reg					No Reg					No Reg					AELT: Pág. 127, ej. 2 de autoevaluación
No Reg					No Reg					No Reg					No Reg					AELT: Pág. 127, ej. 3 de autoevaluación
No Reg					Reg	1	No Int			Reg	1	Int	2	Reh	No Reg					AELT: Pág. 127, ej. 4 de autoevaluación
No Reg					Reg	0,5	No Int			Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 127, ej. 5 de autoevaluación
No Reg					No Reg					No Reg					No Reg					AELT: Pág. 127, ej. 6 de autoevaluación
No Reg					No Reg					Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 145, ej. 3 de autoevaluación
No Reg					No Reg					Reg	0,75	No Int			No Reg					AELT: Pág. 145, ej. 4 de autoevaluación
No Reg					No Reg					Reg	0,75	No Int			No Reg					AELT: Pág. 145, ej. 5 de autoevaluación
No Reg					No Reg					Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 145, ej. 7 de autoevaluación
No Reg					No Reg					Reg	1	No Int			No Reg					AELT: Pág. 145, ej. 8 de autoevaluación

Figura IV.17. Imagen de la segunda parte de la tabla Excel que almacena la información relevante de cada actividad para medir los indicadores de la Dimensión 2 para las UP, en el caso de las actividades planteadas por el docente y posteriormente corregidas, en el aula del Docente 2.

Criterios excepcionales adoptados por el EI para mejorar la codificación de los indicadores

Durante el avance del estudio y del proceso de codificación de las unidades, que han dado lugar a una transformación de los datos iniciales en lo que Piñuel (2002) llama "datos de segundo orden" (en este caso, valoraciones de los indicadores y explicaciones de esas valoraciones a partir de los hechos detectados en las unidades), se han presentado algunas circunstancias que han llevado al EI a adoptar algunos criterios excepcionales para mejorar la información obtenida en la codificación de los indicadores.

El primer problema de este tipo surgió en la codificación de uno de los indicadores de las UP: el indicador segundo de la Variable 3 correspondiente a la Dimensión 2. Dicho indicador es el "Grado de satisfacción en los intentos de resolución de las actividades que ha efectuado el alumno". Este indicador, según se indicó en la Tabla IV.10, está asociado a la cualidad "conteo numérico", y se le asignaba un valor a partir del redondeo a los enteros de la media aritmética de los grados de satisfacción, en la escala 1-5, asociados a cada actividad que se infiriera como intentada por el estudiante.

Pronto surgió el problema de cómo proceder ante valoraciones que eran equidistantes entre dos enteros. Por ejemplo, en una UP en la que un alumno hubiera intentado dos actividades y se les hubieran asignado grados de satisfacción de 3 y 4, lo que arrojaba una media de 3'5. Inicialmente, se valoró la aplicación tal cual de la regla de redondeo, lo que haría que, ante ese resultado, la media fuera redondeada a 4, y se valorara el indicador con un 4. No obstante, teniendo en cuenta que la pretensión de esta codificación es ayudar a discriminar entre unidades, este hecho podría distorsionar esa discriminación (recibiría la misma valoración que una unidad con media 4'49, de la que está distanciada prácticamente un punto en media). El mismo problema sucedería si se considerara la posible codificación del indicador en esa situación con un 3.

Ante esa circunstancia, tuvimos presente qué tipo de análisis era el que pretendía hacerse con estas valoraciones. En nuestro caso, se pretendían aplicar técnicas estadísticas de análisis clúster o de conglomerados basadas en las distancias entre los vectores cuyas componentes eran las codificaciones numéricas de los indicadores, como primer paso para la agrupación de unidades con características afines en perfiles. En la aplicación de estas técnicas no representaba ningún problema la potencial presencia de valores distintos de los cinco niveles enteros. Así, se admitió como válida, de forma excepcional, la posibilidad de codificar un indicador utilizando la valoración intermedia entre dos valores consecutivos de la escala 1-5. En el caso del ejemplo anterior, 3’5. Estas valoraciones tenían sentido para el análisis posterior, y modulaban mejor la distancia de la media obtenida al resto de valores de la escala (manteniéndose la equidistancia a los valores 3 y 4).

La adopción de este hecho hizo pensar al EI en la posibilidad, para todos los indicadores, de habilitar la valoración numérica intermedia entre dos valores consecutivos de la escala 1-5 (es decir, 1’5, 2’5, 3’5 y 4’5). No obstante, la legitimación implícita de cuatro valores más para la escala como algo natural en todos los indicadores llevaría aparejada la necesidad de reformular todas las leyendas de codificación, añadiendo explicaciones para todos los indicadores sobre cuándo una unidad debía ser valorada, por ejemplo, con un 1’5 o con un 3’5. En ese caso, la escala, en realidad, sería equivalente a una escala 1-9, con 9 valores posibles.

Pensamos que este hecho, aunque podría ser pertinente para algunos indicadores, suponía una complicación excesiva en otros muchos y para el desarrollo del estudio, por lo que se adoptó el criterio siguiente: Mantener las escalas de valoración 1-5 de los indicadores, pero admitiendo la posibilidad excepcional de dar una valoración intermedia entre dos valores consecutivos, siempre y cuando estuviera suficientemente justificado, y en aras de una mejor discriminación entre situaciones diferentes detectadas para un determinado indicador.

Por ejemplo, en los indicadores asociados a la cualidad “medición de un porcentaje” (en varios indicadores de la Dimensión 2 para las UP), el desarrollo del estudio aconsejó la adopción de un criterio concreto para valorar UP en las que el porcentaje obtenido fuera muy alto dentro del intervalo asignado, y estuviera muy próximo al extremo inferior del intervalo correspondiente al valor inmediatamente superior de la escala. Ese sería el caso, por ejemplo, al obtener un porcentaje del 89% en el proceso de análisis para valorar cualquiera de los dos primeros indicadores de la Variable 1 de esa dimensión. Ante ese valor, la leyenda explicativa (ver Tabla IV.8) estipula que el indicador debe valorarse con un 4, al estar el porcentaje obtenido en el intervalo [70,90); reservándose la valoración de 5 en el caso de que estuviera en el intervalo [90,100].

Ante esa situación, el criterio adoptado fue el siguiente: En aquellos casos en que el porcentaje estuviera a una distancia menor de dos puntos porcentuales del extremo inferior del intervalo correspondiente al siguiente valor de la escala, se valoraría excepcionalmente el indicador con una valoración intermedia equidistante entre la valoración que le correspondería y la valoración inmediatamente superior. Por ejemplo, en el caso anterior, la UP con ese porcentaje recibiría una valoración de 4’5 para el indicador correspondiente.

En otro de los indicadores anteriormente comentado, “Grado de satisfacción en los intentos de resolución de las actividades que ha efectuado el alumno”, también se ha adoptado un criterio para aquellas medias que, aunque no fueran exactamente la valoración intermedia entre dos valores consecutivos de la escala, sí que fueran muy próximas a ellas. De nuevo, el objetivo perseguido con la adopción de este criterio ha sido el de discriminar mejor entre diferentes grados de satisfacción. En el caso concreto de este indicador, medido a través de una media aritmética de valoraciones, la presencia en muchos casos de un número alto de ejercicios intentados, generalmente con distinto nivel de satisfacción, ha generado una tendencia a que muchas de las medias se hayan situado entre valores algo superiores a 2 y algo menores que 4. Con la inclusión de ese criterio, se ha conseguido una mayor y mejor discriminación entre las medias obtenidas, buscando una mejor respuesta al objetivo general de la investigación.

El criterio, en este caso, ha sido el siguiente: En aquellos casos en los que la media aritmética obtenida estuviera a una distancia menor de una décima del valor intermedio entre dos valores consecutivos de la escala, se valoraría excepcionalmente el indicador con el valor equidistante entre esos dos valores consecutivos. Por ejemplo, si la media aritmética obtenida para los grados de satisfacción de las actividades intentadas fuera de 2’55 (valor a una distancia menor que una décima de 2’5, valoración intermedia entre los valores 2 y 3), se valoraría este indicador en la UP correspondiente con un 2’5.

En otro tipo de indicadores, no basados en la medición numérica de aspectos, el EI ha utilizado valoraciones intermedias de forma excepcional y siempre de una forma justificada, en aquellos casos en los que se ha considerado que una unidad tenía características claramente intermedias a las que se habían fijado para dos valores consecutivos de la escala.

IV.8.3. “DATOS DE SEGUNDO ORDEN” OBTENIDOS EN EL AVANCE DE LA CODIFICACIÓN: DOS EJEMPLOS DE PLANTILLAS RELLENADAS

Como se ha anticipado en otros lugares de este capítulo, la aplicación del marco desarrollado para analizar las unidades de registro de que constan los cuadernos de matemáticas de los alumnos ha permitido transformar los datos brutos de que se partía (las fotocopias de estos cuadernos) en un conjunto de “datos de segundo orden” que recogen la información y los hechos más relevantes que caracterizan al cuaderno en las diferentes dimensiones de análisis consideradas.

En concreto, el avance del análisis ha generado dos tipos de "datos de segundo orden":

- Un conjunto de datos numéricos, derivados de las valoraciones numéricas de los distintos indicadores que se han analizado en la unidad de registro. Las valoraciones se han realizado en una escala 1-5, a excepción de las situaciones excepcionales en las que se ha optado por una valoración intermedia entre dos valores consecutivos (explicado en el subapartado anterior).
- Una serie de explicaciones y justificaciones de las valoraciones otorgadas a cada uno de los indicadores, a partir de la valoración global de la unidad y de las diferentes anotaciones y elementos de interés, ligados a cada indicador, que el EI haya destacado en el transcurso de la lectura profunda de la unidad de registro.

Para recoger todos estos "datos de segundo orden" se ha partido de dos esqueletos vacíos de plantilla de análisis, uno para las UT y otro para las UP. Ambas plantillas constan, en su primera parte, de una serie de información fundamental para poder identificar la unidad en el contexto del estudio (código del alumno, tema, centro, curso y código de su docente de matemáticas). Posteriormente, y siguiendo la estructura y el orden de las dimensiones, variables e indicadores, se presentan tablas con los nombres de los indicadores (una tabla para los indicadores de cada una de las variables) y una serie de casillas con la escala 1-5, en las que marcar el nivel asignado a cada indicador en la unidad analizada. Esa marcación se ha hecho coloreando la casilla correspondiente al nivel asignado. En el caso excepcional en que un indicador se haya codificado utilizando una valoración intermedia, se ha indicado este hecho marcando los dos valores más próximos a la valoración intermedia. Por ejemplo, si un indicador se ha decidido valorar con un 3'5, se han coloreado las casillas correspondientes a los valores 3 y 4.

Se presenta un ejemplo de tabla de las que consta dicha plantilla en la Tabla IV.24. La tabla corresponde a los indicadores de la Variable 1 en la Dimensión 1 para las UP. Tras todas estas tablas, hay un epígrafe titulado "Comentarios aclaratorios a la valoración propuesta", destinado a recoger todas las explicaciones y justificaciones sobre las valoraciones propuestas a todos y cada uno de los indicadores analizados, a partir de los elementos y características detectadas en el desarrollo del análisis por el EI.

Información y referencia de los ejercicios	1	2	3	4	5
Ausencia en la unidad de ejercicios de otros temas distintos del actual	1	2	3	4	5
Orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase	1	2	3	4	5
Ausencia de ejercicios cuya resolución esté separada en varias partes de la unidad	1	2	3	4	5
Claridad en la indicación de los cambios de ejercicio cuando se producen (paso de unos a otros)	1	2	3	4	5

Tabla IV.24. Ejemplo del aspecto de una de las tablas para valorar los indicadores, perteneciente a la plantilla vacía para el análisis de las UP.

En los Anexos C.3 y C.4 (en el CD adjunto a esta memoria) pueden encontrarse dos esqueletos completos de plantillas vacías: la plantilla para las UT y la plantilla para las UP, destinadas a recoger los “datos de segundo orden” generados en el avance del análisis de las unidades de registro.

Además, en los Anexos C.5 a C.8 (también en el CD) se recogen varios ejemplos de plantillas rellenadas, que pretenden servir para ilustrar el tipo de información y de datos (de los dos tipos) que ha generado el análisis de cada una de las unidades de registro. En concreto, el Anexo C.5 contiene la plantilla rellena correspondiente a la UT1 de la alumna A14, el Anexo C.6 recoge la plantilla rellena correspondiente a la UP1 de esta misma alumna, el Anexo C.7 la correspondiente a la UT2 del alumno A10 y el Anexo C.8 la de la UP2 de ese mismo alumno.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LAS VALORACIONES: PROPUESTA DE PERFILES DE ELABORACIÓN

El desarrollo del análisis de las unidades de registro, utilizando el marco presentado en el capítulo IV de esta tesis doctoral, nos ha permitido rellenar las plantillas de análisis correspondientes a las unidades de cada alumno participante. Así, se han obtenido informaciones de tipo cuantitativo (codificaciones numéricas de cada uno de los indicadores) y de tipo cualitativo (explicaciones y justificaciones de las codificaciones numéricas otorgadas a partir de los hechos y las características encontradas en la unidad analizada).

El objetivo fundamental de este capítulo es el de describir y justificar el análisis que se ha desarrollado asociado al primero de esos conjuntos de datos: los datos de naturaleza cuantitativa, así como presentar los resultados obtenidos en este análisis y aportar una primera interpretación de los mismos. Con este análisis se detectarán y determinarán grupos de unidades, tanto teóricas como prácticas, cuya valoración en los diferentes indicadores sea semejante o parecida. Estas agrupaciones de unidades "similares" serán el punto de partida a partir del cual articulemos diferentes perfiles de elaboración del cuaderno en los alumnos participantes, de acuerdo con las valoraciones numéricas de los indicadores estudiados. Para lograr ese propósito, y conseguir reunir distribuir las unidades en grupos tales que cada grupo reúna unidades con características similares, y que existan diferencias entre las características de un grupo y otro, es el análisis clúster o análisis de conglomerados (Everitt, Landau, Leese & Stahl, 2011). En el caso particular de este estudio, el análisis se ha llevado a cabo utilizando el software SPSS (edición 20).

Los datos que sirven de base para el desarrollo del análisis cualitativo son las valoraciones numéricas que hemos asignado a los diferentes indicadores en las unidades de registro analizadas, de acuerdo con las leyendas de codificación establecidas. Esas valoraciones están en una escala de “1” a “5”, admitiéndose de forma excepcional las valoraciones intermedias entre dos valores enteros consecutivos de la escala[41].

En el desarrollo del análisis de las unidades de registro no todos los indicadores han podido ser siempre valorados. Eso ha sucedido cuando o bien no teníamos ninguna información que nos permitiera valorar dicho indicador, o bien la información que teníamos era muy escasa y con ella no podía hacerse una valoración que pudiera considerarse como significativa y suficientemente justificada. Este hecho ha supuesto un primer obstáculo para el análisis de estos datos numéricos. El análisis clúster necesita que todas las unidades participantes tengan una valoración en todos los indicadores, para que todas las unidades estén asociadas a vectores de datos (el vector generado a partir de las valoraciones numéricas de los indicadores) que tengan la misma dimensión. Esa dimensión, en nuestro caso, coincide con el número de indicadores utilizados en el análisis. En el primer apartado de este capítulo V explicaremos los pasos que se han adoptado para lograr superar ese obstáculo.

Además, un análisis de las valoraciones dadas a los diferentes indicadores puso de manifiesto la existencia de relaciones de correlación muy altas entre indicadores. La primera y más evidente ha venido provocada por el tipo de docencia seguida por todos los profesores al presentar los contenidos teóricos: explicaciones teóricas basadas en exposiciones personales de carácter oral combinadas con el uso de la pizarra de tiza y sin seguir explícitamente el libro de texto u otro material proporcionado a los alumnos. Esto ha causado que, para las cuatro variables de la Dimensión 2 en las UT, los indicadores primero, “Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad”, y tercero, “Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)”, hayan tenido una valoración coincidente. Para evitar esta duplicidad, que no aporta información nueva, no va a considerarse en el desarrollo del análisis cuantitativo el tercer indicador de cada una de esas cuatro variables, sino únicamente el primero.

[41] En el subapartado IV.8.2 de la tesis doctoral se explican las detalladamente las circunstancias en que se han admitido estas valoraciones y algunos criterios adoptados para su utilización.

Aun quitando estos cuatro indicadores, los análisis mostraban todavía la existencia de correlaciones muy altas entre algunos de los indicadores. Este hecho supone una dificultad para poder desarrollar un análisis clúster o de conglomerados, puesto que daría lugar a una distorsión en el peso de los diferentes indicadores. La existencia de indicadores con valoraciones muy parecidas hace que el comportamiento de éstos, al calcular la distancia entre vectores con valoraciones numéricas, domine sobre otros indicadores. Con el objetivo de evitar la existencia de correlaciones entre indicadores, antes de desarrollar el análisis clúster se ha llevado a cabo un análisis de componentes principales (de ahora en adelante, ACP). Con este análisis pretendemos reducir la dimensión de los datos, agrupando indicadores con alta correlación entre sí, para crear componentes que nos sirvan tanto para explicar de manera suficiente la situación como para conseguir que no existan correlaciones entre las componentes determinadas. En el segundo apartado del este capítulo describiremos los dos ACP realizados, uno para las UT y otro para las UP.

Tras estos ACP, y utilizando las componentes determinadas en los mismos, se ha desarrollado el análisis clúster o de conglomerados. Este análisis se describe y explica en el apartado tercero de este capítulo, y ha dado lugar a la distribución tanto de las UT como de las UP en varios grupos, formados por unidades con características comunes entre sí y diferentes a las del resto de grupos. En el cuarto apartado se utilizarán los resultados obtenidos en el desarrollo de este análisis cuantitativo para presentar varios perfiles frecuentes de elaboración del cuaderno que han sido detectados como consecuencia del análisis. En el quinto apartado se compara el rendimiento académico en el bloque de análisis matemático de los alumnos de los diferentes grupos teóricos y prácticos que se han generado, y de los perfiles frecuentes de elaboración del cuaderno encontrados. Como el capítulo resulta tener una extensión larga, se ha añadido un sexto apartado en el que se hace una breve síntesis de lo que en él se ha realizado y los principales resultados obtenidos.

Durante todo este capítulo, y para abreviar el modo en que nos referimos a los indicadores y a su lugar dentro del marco de análisis presentado en el capítulo IV, hemos utilizado una notación específica para referirnos a cada indicador, haciendo mención al número de la dimensión al que pertenece, al número de la variable de la que forma parte dentro de la dimensión, y al número que le corresponde a este indicador dentro del orden en que se han presentado los mismos en las diferentes tablas. Por ejemplo, usaremos la notación D1V2Ind3 para hacer referencia al indicador tercero de la segunda variable dentro de la Dimensión 1, cuyo nombre es “Respeto a los márgenes a lo largo de la unidad” (ver Tabla IV.4 en el capítulo anterior).

V.1. TRATAMIENTO DE LOS INDICADORES SIN VALORACIÓN NUMÉRICA

Como ya hemos comentado, la presencia de indicadores sin valoración numérica en algunas unidades supone un obstáculo importante para poder desarrollar un análisis clúster de manera adecuada. Existían indicadores cuya valoración se había quedado en blanco porque, o bien no existía información alguna que permitiera hacer la valoración del mismo o bien la existencia de información era muy reducida y se consideraba insuficiente para hacer una valoración del indicador que pudiera juzgarse como significativa. Así, se convierte en esencial la sustitución de esa ausencia de valoración por algún valor numérico que se ajuste de la mejor manera posible a la situación concreta.

La primera solución que se tanteó para intentar superar este obstáculo fue la asignación de un “0” como valoración numérica en todos aquellos indicadores cuya valoración se había quedado en blanco. La realización de algunas pruebas preliminares de análisis clúster tras hacer ese cambio, utilizando el programa SPSS, puso de manifiesto la gran influencia que ejercían los indicadores a los que se había asignado esta valoración numérica de “0”. Teniendo en cuenta que trabajamos con escalas numéricas de “1” a “5”, en las que son posibles tanto las valoraciones enteras como, excepcionalmente, las valoraciones intermedias; asignar un “0” a esos indicadores tendría un significado equivalente a asignar una puntuación muy baja al indicador, incluso inferior al “1”, que ya significaba un desarrollo mínimo del mismo. La lejanía de estas valoraciones con un “0” al resto de valores posibles, especialmente a las valoraciones altas, provoca que el programa tienda a agrupar en un análisis clúster a aquellas unidades que contienen un “0” en un determinado indicador, o a juntar estas unidades con otras que tienen una valoración baja en dicho indicador.

Consideramos que ambas circunstancias sesgan el análisis. Por una parte, no tiene sentido real que se agrupen variables por el simple hecho de no contener información de algún aspecto en concreto, puesto que esto no implica que existan similitudes entre ellas. Por otra parte, la ausencia de información sobre un determinado indicador no implica que el desarrollo de ese indicador en la unidad sea mínimo. Por ejemplo, es distinto no poder valorar si un alumno corrige o no sus errores porque no comete ningún error en su unidad a que un alumno no corrija ninguno de los errores que sí que comete en una UP. Sin embargo, una valoración de “0” en la primera situación y de “1” en la segunda provoca la existencia de poca distancia entre ambas valoraciones, lo que tiende a producir agrupamientos en ese indicador que no tienen sentido. Por todo lo anterior, desestimamos utilizar el "0" como propuesta para valorar numéricamente aquellos indicadores que permanecen sin valoración.

Así, se hace necesario utilizar otros criterios para asignar una valoración numérica a estos indicadores sin valorar, con la intención de que no sesguen el análisis posterior y que se ajusten de la mejor manera posible a la situación existente en cada caso. Para ello, hemos seguido una serie de pasos para ir asignando progresivamente valoración a estos indicadores en blanco, que se explican a continuación.

V.1.1. PASO 1

Una de las posibles situaciones que da lugar a la existencia de un indicador sin valorar es que, en el momento de analizar los datos, hayamos considerado que no existía información suficiente en la unidad para poder realizar una asignación que consideráramos significativa. No obstante, en estos casos sí que existe algo de información. Aunque esa información sea escasa, ésta nos permitiría valorar el indicador de acuerdo a la misma, y ajustándose a la leyenda de codificación del indicador correspondiente.

Hemos revisado todas las plantillas y sus valoraciones para detectar aquellos indicadores en esta situación. Posteriormente, hemos vuelto a analizar las unidades en relación con estos indicadores, para asignar una codificación numérica de acuerdo con la información existente y la leyenda explicativa asociada. Con este primer paso hemos conseguido reducir notablemente el número de indicadores que se mantenían sin valoración. Los cambios han sido realizados sobre las propias plantillas de valoración de las unidades. No obstante, existía aún un número importante de unidades con algún indicador sin valorar. Concretamente, aquellos indicadores para los que no se cuenta con información alguna en una unidad que permita su valoración.

V.1.2. PASO 2

Tras realizar los cambios anteriores, el EI ha detectado la existencia de algunos grupos de indicadores en los que su valoración únicamente ha podido llevarse a cabo en muy pocos alumnos, debido a que en la gran mayoría de las unidades no se tenía ninguna información sobre el mismo. Hemos detectado ocho indicadores en esta situación, que son comunes tanto a las UT como a las UP: tres indicadores pertenecen a la Dimensión 1 y los otros cinco a la Dimensión 4. Explicamos a continuación el tratamiento particular que hemos dado a estos ocho indicadores.

Los tres indicadores de la Dimensión 1, “Estructura, orden y presentación de la unidad”, a los que hacemos referencia son el segundo trío de indicadores considerados en la Variable 3, titulada “Estilo propio en la unidad”[42]. Estos tres indicadores fueron presentados en la Tabla IV.6 del capítulo anterior, estaban asociados a la cualidad “calidad”, y pretendían valorar el nivel de adecuación de los rasgos personales existentes en una unidad, ya fuera teórica o práctica. Sin embargo, estos tres indicadores únicamente han recibido una valoración en la escala 1-5 en el caso de que se detectara una cierta frecuencia en la presencia de rasgos personales de alguno de los tres tipos considerados en la unidad analizada.

Tras finalizar el análisis, hemos comprobado que ha existido un número bajo de unidades de registro en las que el EI haya considerado la presencia con cierta frecuencia de rasgos personales, que marcaran la existencia de un estilo propio en el alumno. Así, en muchas unidades ha sido usual que este bloque de indicadores, total o parcialmente, haya quedado sin valoración por la falta de información para ello. Además, en aquellas unidades donde sí había sido valorada la adecuación de los rasgos de estilo propio presentes (en algunos o en todos los aspectos) la valoración que el EI había otorgado había sido bastante homogénea, con puntuaciones de “3” y “4” en la escala 1-5. Es decir, las valoraciones fluctuaban entre la consideración de que los rasgos existentes eran “medianamente adecuados” o “bastante adecuados”.

Por ambas circunstancias (la ausencia de valoración en muchas unidades y la homogeneidad en las pocas unidades valoradas), el EI ha optado por no incluir en el desarrollo del análisis cuantitativo estos tres indicadores. Sí ha sido considerado el primer trío de indicadores de esta variable (presentados en la Tabla IV.5), que tenían como propósito medir la frecuencia de aparición de rasgos en la unidad que denotaran la presencia de un estilo propio del alumno en la unidad analizada.

En relación a la Dimensión 4, titulada “Riqueza y corrección del lenguaje natural utilizado en la unidad”, las Variables 1 y 2 pretendían medir la calidad y riqueza léxica y gramatical de los textos creados y elaborados propiamente por un alumno en su unidad. La Variable 1, “Vocabulario”, consta de dos indicadores que se presentaron en la Tabla IV.14[43] del capítulo anterior; mientras que la Variable 2, “Gramática y sintaxis”, está compuesta por tres indicadores, presentados en la Tabla IV.15[43]. El desarrollo de la docencia en las aulas participantes en nuestro estudio y el tipo de actividades

[42] La información completa sobre esta variable y sus indicadores se presenta en el subapartado IV.2.3 de esta tesis doctoral.

[43] La información completa sobre la Dimensión 4 y todas sus variables se presenta en el apartado IV.5 de esta memoria de tesis doctoral.

propuestas por los profesores provocó que la mayoría del texto verbal existente en las unidades de registro haya sido transcrito de otro medio, y no elaborado y redactado por el propio alumno. En muchos casos, el texto verbal encontrado se correspondía con la transcripción del dictado o el discurso oral del docente en las exposiciones teóricas, o bien el texto escrito en la pizarra. Así, los fragmentos de texto cuya creación podía ser considerada como propia del alumno fueron poco frecuentes (inexistentes en muchos alumnos) y, en caso de que existieran, de una extensión muy reducida (frases aisladas, incluso palabras sueltas).

La consecuencia de este hecho es que el EI únicamente consideró la valoración de todos o algunos de los indicadores de las Variables 1 y 2 en un número muy reducido de unidades. Es decir, en la inmensa mayoría de las unidades de registro analizadas (ya fueran UT o UP), se ha dejado en blanco la valoración de estos indicadores por considerar que no existía texto elaborado por el alumno que permitiera hacer tales valoraciones.

Por esta razón, el EI ha tomado la decisión de no incluir los indicadores correspondientes a las Variables 1 y 2 de la Dimensión 4 en el análisis cuantitativo.

V.1.3. PASO 3

Tras los dos pasos anteriores, continúan existiendo algunos indicadores, distintos de los desestimados en el paso anterior, que no habían sido valorados en algunas unidades concretas, por la ausencia de información propia en la unidad analizada que hubiera permitido evaluar su nivel de desarrollo. En esos casos, el EI ha pensado diferentes estrategias posibles para poder sustituir esa falta de valoración por una valoración numérica que se ajustara del mejor modo posible al comportamiento mostrado por el alumno al que pertenece la unidad, aunque hubiese sido en otras unidades distintas de la analizada en ese momento.

Para ello, ante un indicador de una unidad concreta que continuara sin valoración, se ha tomado como base la información y valoración de ese mismo indicador en otras unidades del mismo alumno y tipo (bien teóricas, bien prácticas). Así, en caso de que dichas valoraciones existieran, el EI ha adoptado el siguiente criterio: sustituir la ausencia de valoración en un indicador por la media aritmética de las valoraciones para este indicador que han recibido las unidades del mismo alumno y tipo.

Por ejemplo, supongamos que un indicador en la unidad teórica UT2 de un estudiante no haya podido ser aún valorado. En ese caso, el EI ha buscado qué valoración había recibido ese mismo indicador en las unidades teóricas UT1 y UT3 de ese mismo estudiante. Pongamos por caso que dicho indicador se hubiera valorado con un 2 en la UT1 y con un 4 en la UT3 del alumno: en ese caso, el indicador en la UT2, a efectos del desarrollo del análisis clúster, se ha valorado con un 3.

En la aplicación de este criterio se presentaron dos problemas potenciales. El primero es que la aplicación del criterio podría dar lugar a una media resultante que estuviera fuera del rango de codificaciones posibles, por no ser un número natural. En el caso de que la media obtenida haya sido 1'5, 2'5, 3'5 o 4'5, se ha admitido la valoración intermedia entre dos consecutivas como una valoración posible (al igual que se hizo de modo extraordinario en otros casos comentados en el subapartado IV.8.2 de esta tesis doctoral). Pero también pudiera suceder que la media, excepcionalmente, estuviera fuera de ese rango. Por ejemplo, tomando como base la situación ejemplo anterior, eso sucedería si el indicador se hubiera valorado con un 2 en la UT1 y, de modo excepcional, con un 3'5 en la UT3. En ese caso, la media es 2'75. En esas situaciones el EI ha adoptado el siguiente criterio: asignar como codificación para el indicador el valor inmediatamente inferior a la media obtenida que está en el rango de valores posibles, incluyendo los valores intermedios entre enteros. Así, en el caso anterior, el indicador se valoraría con un 2'5.

El segundo problema que puede presentarse es que sea inviable la aplicación del criterio anterior debido a que el indicador no ha podido ser valorado en ninguna de las unidades de un alumno de un determinado tipo. En esos casos, no tenemos ninguna información que nos permita analizar el comportamiento del alumno ante un indicador, aunque sea en otras unidades del mismo tipo. Esta situación será tratada en los pasos siguientes.

El criterio anteriormente explicado ha sido el utilizado en todos los indicadores, a excepción de dos indicadores donde nos ha parecido más adecuado, por su naturaleza, utilizar un criterio distinto. Estos dos indicadores han sido los indicadores D2V4Ind2 y D2V4Ind3 de las UP, que analizan la indicación y explicación de los errores corregidos por el alumno en una unidad práctica. Durante el avance del análisis de las unidades de registro, se habían dejado estos dos indicadores en blanco en el caso de que un estudiante no hubiera corregido ninguno de los errores existentes en sus intentos de resolución de las actividades (aspecto marcado con un "1" en el indicador inmediatamente anterior a estos dos). En ese caso, se consideraba que, al no haber ninguna corrección del estudiante, no podía valorarse el modo en que los estudiantes indicaban y explicaban los errores cometidos que se corregían.

Sin embargo, y con el propósito de evitar el problema que causan los indicadores sin valoración para el desarrollo del análisis clúster, se ha considerado razonable entender que, si un alumno no ha corregido ninguno de los errores que ha cometido, entonces tampoco ha hecho una indicación y una explicación de los mismos, por lo que tiene más sentido valorar también con un “1” esos dos indicadores en esta situación, en lugar de utilizar la media aritmética de otras unidades del alumno. En el caso en que el primer indicador tampoco hubiera podido ser valorado, sí que se ha recurrido al criterio de la media aritmética.

Todos los cambios efectuados en este Paso 3 han sido realizados en la matriz de datos para realizar el análisis cuantitativo, que contiene las valoraciones de todos los indicadores en todos los alumnos. No obstante, es necesario destacar que estos cambios no se han realizado sobre las propias plantillas de los alumnos, a diferencia de los cambios llevados a cabo en el Paso 1. En este caso, la finalidad de los cambios, exclusivamente, ha sido la de evitar el sesgo producido por la presencia de indicadores sin valoración, y es por eso por lo que se han efectuado únicamente en la matriz de datos para el desarrollo del análisis cuantitativo.

Los cambios realizados en la matriz de datos asociados a este Paso 3, se presentan detalladamente, por indicador y alumno, en el Anexo D.1 (CD adjunto a la memoria).

V.1.4. PASO 4

Una vez hechos los cambios indicados en los tres pasos anteriores, hay un alumno, A18, para el cual se mantiene un alto número de indicadores sin valoración numérica. De este alumno tan sólo tenemos una UT y una UP, las correspondientes al primer tema. Las unidades de este alumno se caracterizaron por su incompletitud y la escasez de elementos, lo que nos impidió valorar un gran número de indicadores. .

Por esta circunstancia hemos decidido tratar este alumno como caso atípico, siendo excluido del análisis cuantitativo que vamos a realizar.

V.1.5. PASO 5

Tras los cuatro pasos anteriores, aún se conservaba un pequeño número de indicadores en algunos alumnos que no tenían valoración numérica. En concreto, esto sucede en aquellos indicadores que no habían podido ser valorados en ninguna de las UT o de las UP de un determinado alumno, es decir, aquellos indicadores sobre los cuales no teníamos información alguna para dicho estudiante.

Estos casos se concentran en la Dimensión 2 de la plantilla, en alumnos que se caracterizaron por la poca completitud de sus unidades en alguno de los aspectos considerados. Uno de ellos es la falta de registro de las observaciones y los comentarios proporcionados por el profesor, que impidió realizar una valoración de la precisión de dichos registros. Otro aspecto es la falta de actividades en la unidad de un alumno en una determinada circunstancia, como puede ser la falta de registro de actividades que el docente planteara pero luego no corrigiera, ausencia que imposibilitaba poder valorar la compleción de dichas actividades en la unidad de un alumno. Un tercer aspecto, que también apareció en varias unidades, fue la ausencia de errores en las unidades de los alumnos, lo que impedía valorar cómo los alumnos corrigen, indican o explican éstos.

A diferencia de los Pasos 1 y 3, en estos casos no contábamos con ninguna información propia del alumno, directa o indirectamente, que nos permitiera realizar una valoración numérica. Pero se necesitaba asignar una valoración numérica a estos indicadores, que posibilitara el desarrollo del análisis cuantitativo posterior. Tras reflexionar sobre cómo asignar una valoración que intentara evitar la creación de sesgos y que influyera lo menos posible en el análisis cuantitativo posterior, se pensó en la utilización, como valor base, de la media aritmética de las valoraciones que ha tenido ese indicador en todas las unidades del mismo tipo. Como es muy probable que dicha media aritmética no se encontrara entre el rango de valores posibles para la codificación (admitiendo los valores intermedios entre enteros), se adoptó el siguiente criterio: el valor numérico asignado al indicador sería el valor inmediatamente inferior a la media aritmética que sí perteneciera al rango posible de valores (incluyendo las valoraciones intermedias entre enteros). Por ejemplo, si para un indicador en esta situación la media aritmética de sus valoraciones en otras unidades (de los alumnos restantes) había sido de 3’12, se asignaría una valoración de 3 en todas las unidades donde este indicador se mantenía en blanco.

En el Anexo D.2 (CD) se recoge el tratamiento individual que hemos realizado de las unidades con indicadores en estas circunstancias, explicando los cambios efectuados en la codificación de acuerdo al criterio anterior. Los cambios en este paso se han realizado, de nuevo, únicamente en la matriz de datos para el análisis cuantitativo, únicamente con el objetivo de evitar el sesgo de los indicadores sin valoración en el desarrollo del análisis clúster. Estos cambios no se han efectuado en las plantillas de las unidades.

V.2. ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES (ACP)

Una vez que llevados a cabo los cinco pasos indicados en el apartado anterior, todos los indicadores que van a formar parte del análisis cuantitativo tienen una valoración numérica en todas las unidades de los alumnos (a excepción del alumno A18, que hemos excluido del análisis por considerarlo un caso atípico de alumno con muy poca información existente).

Para el desarrollo del análisis cuantitativo se utilizan 43 indicadores teóricos y 52 indicadores prácticos, mientras que el número de unidades de cada uno de los dos tipos que tenemos está rondando la centena. Por tanto, el número de indicadores que tenemos es alto en comparación con el número de unidades, que juegan el papel de observaciones de esos indicadores. Además, existen correlaciones bastante altas entre algunos grupos de indicadores. Ambas circunstancias, de acuerdo con Everitt y Dunn (2001), hacen aconsejable la realización de un análisis de componentes principales (ACP) previo a la realización del análisis clúster o de conglomerados que tenemos previsto.

Con la realización de un ACP tanto en las unidades teóricas como en las unidades prácticas buscamos el cumplimiento de dos objetivos. Uno de ellos es el de reducir el alto número de indicadores existente, sustituyendo estos por un número menor de componentes que expliquen, de forma suficiente e intentando perder el mínimo de información posible, la variabilidad existente en los datos. El segundo es que estas nuevas componentes no presenten correlación entre sí (son incorreladas), lo que facilita la interpretación posterior de los resultados.

Todos los indicadores están medidos en una misma escala: escala de 1 a 5, permitiendo las valoraciones intermedias entre naturales en casos excepcionales. En el Anexo D.3 (en el CD) se recogen las tablas con el análisis estadístico descriptivo (valores mínimo y máximo, media y desviación típica) de cada uno de los indicadores que van a formar parte del análisis cuantitativo, tanto en las UT como en las UP.

Como podemos observar en las dos tablas, aunque todos los indicadores han sido valorados utilizando la misma escala numérica, las varianzas de las distribuciones de cada uno de ellos son distintas. Tal como indican Everitt y Dunn (2001), la presencia de diferencias importantes en las varianzas de estos indicadores provoca que las primeras componentes, es decir, las componentes con mayor peso e información, tiendan a ser dominadas por los indicadores con mayores varianzas. Es decir, todos los indicadores no tendrían un papel igualmente importante. Para evitarlo, con anterioridad al comienzo del ACP hemos tipificado todos los indicadores que van a participar en el mismo, para que todos ellos tengan una distribución de media 0 y varianza 1.

En la situación anterior, con indicadores tipificados, es equivalente realizar el ACP extrayendo las componentes de la matriz de covarianzas o de la matriz de correlaciones. Nosotros lo haremos utilizando esta última en ambos casos (para las UT y las UP), utilizando el software SPSS.

Detallamos en el primer subapartado el desarrollo del análisis ACP para las unidades teóricas, y en el segundo subapartado el desarrollo análogo para las unidades prácticas.

V.2.1. ACP PARA LAS UNIDADES TEÓRICAS

La matriz de correlaciones será la matriz que utilizaremos como base para la realización del ACP. Dicha matriz muestra la correlación existente entre cualquier pareja de indicadores de las unidades teóricas que participan en este análisis. Para medir la correlación, hemos utilizado el coeficiente de correlación de Pearson. Dicho coeficiente siempre está comprendido entre -1 y 1, existiendo más correlación entre los indicadores cuanto más próximo en valor absoluto sea este coeficiente a 1. Además, nos indica si la correlación entre las variables es positiva (cuando el coeficiente nos proporciona valores positivos) o negativa (cuando proporciona valores negativos). La matriz de correlaciones para las UT se muestra en el Anexo D.4 (CD).

Para valorar si es adecuado o no realizar el ACP con la matriz de correlaciones existente, hemos llevado a cabo varias pruebas que nos proporcionan información sobre esa adecuación. Un indicador es que el determinante de dicha matriz sea muy pequeño en magnitud. Un valor próximo a cero indica la existencia de relaciones importantes entre los indicadores que van a formar parte del análisis, lo cual es un hecho decisivo para que el análisis ACP que se va a realizar sea pertinente. En nuestro caso, el determinante de la matriz de correlaciones es $9'242 \cdot 10^{-17}$. El valor obtenido es muy próximo a cero, lo que nos proporciona información positiva sobre la pertinencia del análisis ACP con estos datos.

Otro indicador que mide la adecuación de la muestra para el análisis que se va a realizar es la Medida de Adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin. Este índice está siempre comprendido entre 0 y 1, y pretende medir si las correlaciones parciales existentes entre pares de indicadores (eliminando la influencia del resto) son suficientemente pequeñas. Este índice indica una mayor adecuación de los datos a la realización de un ACP a medida que el valor es más próximo a 1, considerándose inaceptable su realización en aquellos casos en los que el índice sea inferior a 0'5. Como podemos observar en la Tabla V.1, el valor que se obtiene para los datos que nosotros tenemos es de 0'754. Este valor, al estar comprendido entre 0'7 y 0'8, es considerado por Kaiser (1974) como un valor aceptable para la realización del análisis ACP.

KMO y prueba de Bartlett		
Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin		0,754
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	3168,982
	gl	903
	Signif.	<0,001

Tabla V.1. Valores en las pruebas para medir la adecuación de un ACP para las UT.

Por último, hemos llevado a cabo también la prueba de esfericidad de Bartlett, que contrasta si la matriz de correlaciones de los indicadores es la matriz identidad. El estadístico de la prueba se distribuye asintóticamente según una distribución chi-cuadrado con 903 grados de libertad (los grados de libertad se determinan a través de la expresión $p\cdot(p-1)/2$, siendo p el número de variables involucradas, en nuestro caso $p=43$ indicadores). Como observamos en la Tabla V.1, el valor del estadístico al desarrollar esta prueba ha sido de 3168,982, con un p-valor inferior a 0'001, por lo que se rechaza de manera muy clara que la matriz de correlaciones de los indicadores sea la matriz identidad. Esto indica, de nuevo, la existencia de indicadores con correlaciones altas entre sí, lo que refuerza la pertinencia de realizar este análisis.

Como resumen de las pruebas anteriores, podemos extraer la conclusión de que es oportuno realizar un análisis de componentes principales para los datos que tenemos asociados a las UT, utilizando la matriz de correlaciones. Este análisis ACP va determinando progresivamente combinaciones lineales de los indicadores participantes. Dichas combinaciones lineales reciben el nombre de componentes, y cumplen dos propiedades: las componentes maximizan la variabilidad total de los datos (o la variabilidad restante, si ya se hubiera determinado alguna componente previamente) que son capaces de explicar y son incorreladas con respecto a todas las componentes ya determinadas anteriormente (Everitt & Dunn, 2001).

Como en nuestro caso hay 43 indicadores que toman parte del análisis, el análisis ACP ha creado 43 componentes distintas, que van explicando progresivamente cada vez una parte menor de la variabilidad de los indicadores. Es decir, las primeras componentes son las que explican un mayor porcentaje de la varianza de los datos, dicho de otra manera, las que nos proporcionan más información sobre los indicadores.

Uno de los objetivos del ACP es reducir la dimensionalidad del problema intentando perder la mínima información posible sobre los datos. Si tomamos las 43 componentes creadas, no perdemos nada de información, pero tampoco reducimos la dimensión del problema. Así, un punto fundamental del ACP es decidir con cuántos indicadores de los creados vamos a quedarnos y cuáles vamos a desechar, de tal forma que exista un equilibrio entre la reducción de la dimensión del problema y la información total que conservamos al realizar esa reducción.

En este sentido, existen varias reglas para determinar el número de componentes que deben escogerse. Everitt y Dunn (2001, p. 53) explican algunas de las técnicas más comunes para poder realizar esa determinación con garantías. Estas técnicas están relacionadas tanto con la magnitud de los autovalores de la matriz de correlaciones como con el porcentaje de la variación total de los indicadores originales que queda explicado con las componentes escogidas.

Al realizar el ACP para las unidades teóricas con los datos que tenemos, observamos (ver Tabla V.2) que la matriz de correlaciones tiene 12 autovalores que son superiores a 1, que es el valor de referencia que suele tomarse habitualmente. No obstante, si nos fijamos en el gráfico de sedimentación de Cattell (ver Figura V.1), que muestra la magnitud de los autovalores asociado a las sucesivas componentes, observamos la presencia de una inflexión en esa gráfica tras el decimotercer autovalor (también muy próximo a 1). Esta inflexión refleja la presencia de un salto entre la magnitud de este autovalor decimotercero y los autovalores previos con respecto a los siguientes.

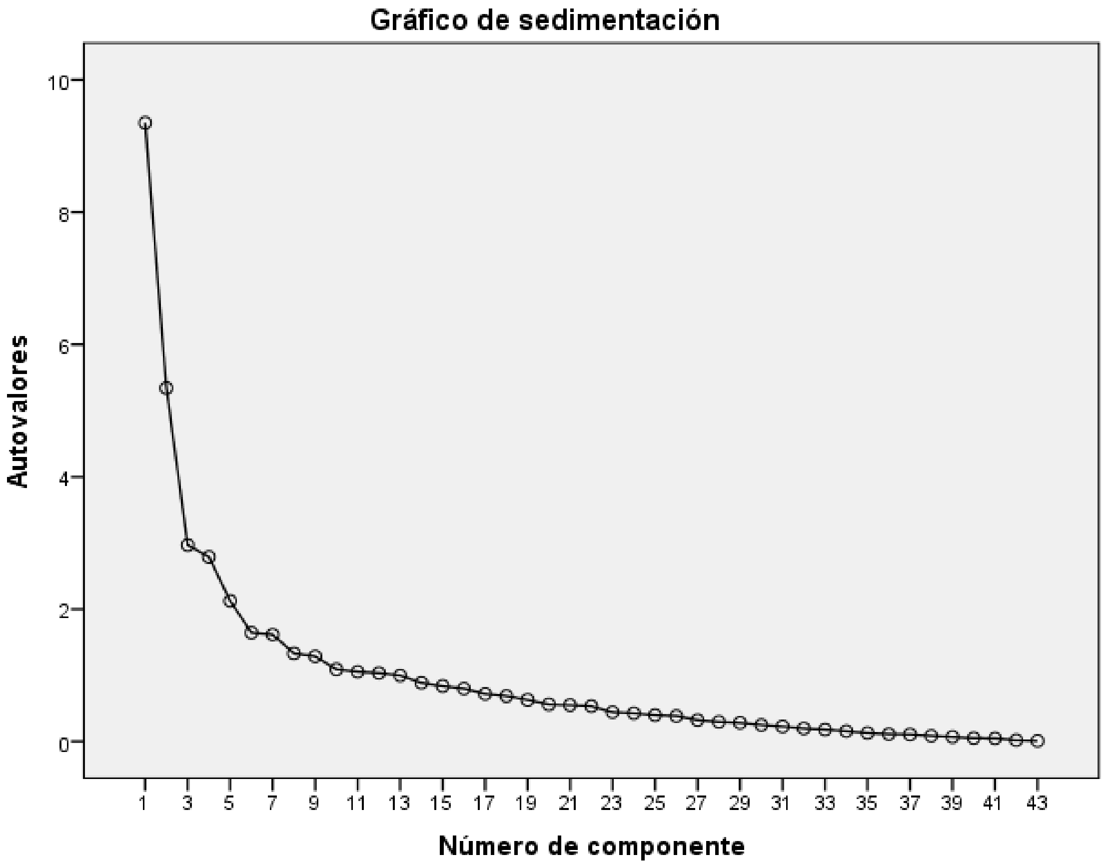


Figura V.1. Gráfico de sedimentación de Cattell para el ACP en las UT.

Por ello, hemos decidido seleccionar las trece primeras componentes obtenidas como componentes principales de nuestro análisis. Estas trece componentes explican, según vemos en la Tabla V.2, un 75,865% del total de la variabilidad de los datos, lo que es un dato aceptable (valor entre el 70% y el 90%, Everitt y Dunn, 2001).

Varianza total explicada			
Componente	Autovalores iniciales		
	Total	% de la varianza que explica	% acumulado de la varianza explicada
1	9,349	21,741	21,741
2	5,340	12,419	34,160
3	2,968	6,902	41,062
4	2,790	6,487	47,549
5	2,124	4,940	52,490
6	1,644	3,823	56,312
7	1,615	3,756	60,068
8	1,331	3,094	63,162
9	1,286	2,992	66,154
10	1,090	2,535	68,689
11	1,054	2,451	71,140
12	1,034	2,405	73,545
13	0,997	2,320	**75,865**
14	0,886	2,061	77,926
15	0,837	1,948	79,874
16	0,799	1,858	81,731
17	0,719	1,673	83,405
18	0,687	1,598	85,003
19	0,629	1,463	86,466
20	0,560	1,303	87,769
21	0,550	1,280	89,049
22	0,534	1,243	90,292
23	0,442	1,028	91,319
24	0,427	0,992	92,312
25	0,398	0,926	93,238
26	0,384	0,894	94,132
27	0,323	0,752	94,884
28	0,296	0,688	95,573
29	0,282	0,656	96,228
30	0,249	0,579	96,807
31	0,226	0,525	97,332
32	0,196	0,455	97,787
33	0,178	0,415	98,202
34	0,156	0,362	98,564
35	0,128	0,297	98,861
36	0,112	0,260	99,121
37	0,105	0,245	99,366
38	0,084	0,196	99,562
39	0,068	0,158	99,720

40	0,050	0,115	99,836
41	0,045	0,105	99,940
42	0,018	0,041	99,982
43	0,008	0,018	100,000

Tabla V.2. Autovalores de la matriz de correlaciones y varianza explicada según el número de componentes seleccionado para las UT.

Tras esa selección, hay que determinar si todos los indicadores quedan suficientemente explicados en el nuevo modelo. Esto puede detectarse a través de las *comunalidades* de cada uno de los indicadores, es decir, el tanto por uno de la variabilidad de cada indicador que queda recogido y explicado a través de las trece componentes seleccionadas, en relación con la variabilidad total del indicador. Generalmente se toma como valor base una comunalidad de 0’6 en un indicador para considerar que éste queda bien explicado. La Tabla V.3 muestra las comunalidades que hemos obtenido en nuestro análisis ACP para cada indicador de las UT considerado. La tabla refleja un valor de la comunalidad entre 0’6 y 1 en todos los indicadores, a excepción de tan sólo uno, el indicador D1V3Ind3, “Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo”. No obstante, la comunalidad de este indicador es de 0’589, muy próxima a 0’6.

Así, consideramos que todos los indicadores quedan suficientemente explicados tras la selección de trece componentes principales.

Nomenclatura del indicador	Comunalidad en el modelo previo	Comunalidad en el nuevo modelo (trece componentes)
D1V1Ind1	1,000	0,689
D1V1Ind2	1,000	0,806
D1V1Ind3	1,000	0,628
D1V2Ind1	1,000	0,817
D1V2Ind2	1,000	0,704
D1V2Ind3	1,000	0,690
D1V2Ind4	1,000	0,743
D1V2Ind5	1,000	0,692
D1V2Ind6	1,000	0,641
D1V2Ind7	1,000	0,765
D1V2Ind8	1,000	0,606
D1V3Ind1	1,000	0,691
D1V3Ind2	1,000	0,716
D1V3Ind3	1,000	**0,589**
D2V1Ind1	1,000	0,842
D2V1Ind2	1,000	0,868
D2V1Ind4	1,000	0,628
D2V2Ind1	1,000	0,907
D2V2Ind2	1,000	0,868
D2V2Ind4	1,000	0,747
D2V3Ind1	1,000	0,929
D2V3Ind2	1,000	0,892
D2V3Ind4	1,000	0,911
D2V4Ind1	1,000	0,869
D2V4Ind2	1,000	0,869
D2V4Ind4	1,000	0,669
D3V1Ind1	1,000	0,756
D3V1Ind2	1,000	0,633
D3V1Ind3	1,000	0,722
D4V3Ind1	1,000	0,742
D4V3Ind2	1,000	0,729
D4V4Ind1	1,000	0,735
D4V4Ind2	1,000	0,605
D4V4Ind3	1,000	0,684
D4V4Ind4	1,000	0,783
D5V1Ind1	1,000	0,830
D5V1Ind2	1,000	0,649
D5V1Ind3	1,000	0,844
D5V1Ind4	1,000	0,672
D5V1Ind5	1,000	0,929

D5V1Ind6	1,000	0,937
D5V2Ind1	1,000	0,791
D5V2Ind2	1,000	0,803

Tabla V.3. Comunalidad de cada indicador al seleccionar trece componentes principales en el ACP para las UT.

Una vez que hemos decidido que van a extraerse trece componentes como componentes principales en el análisis ACP que va a realizarse, el desarrollo del análisis con el programa SPSS nos proporciona una matriz, denominada la *matriz de cargas factoriales*. Esta matriz contiene los coeficientes reescalados de la combinación lineal que da lugar a cada componente a partir de los indicadores inicialmente considerados. Esos coeficientes se obtienen a partir de las coordenadas de los autovectores asociados a los trece autovalores de mayor magnitud de la matriz de correlaciones inicial, que son reescalados multiplicando cada coordenada por la raíz cuadrada positiva del autovalor correspondiente en cada caso.

En el Anexo D.5 (en el CD adjunto) mostramos la matriz de cargas factoriales que hemos obtenido en nuestro análisis. En dicha matriz se observan varias componentes en las que el peso de los indicadores es bajo en todos los casos (todas ellas inferiores a 0’5 en valor absoluto, el valor que usualmente se toma como referencia, según De la Fuente, 2011b). Esto dificulta que puedan interpretarse con precisión cada una de las componentes determinadas y su significado. Para solucionar este problema existen métodos de rotación de las componentes, a partir de las cuales se obtienen nuevas matrices factoriales que, según leemos en De la Fuente (2011b), intentan aproximarse al Principio de Estructura Simple de Thurstone (1935, citado en De la Fuente, 2011b), cumpliendo las siguientes tres características:

- Cada componente sólo tiene unos pocos pesos de magnitud alta y los restantes próximos a cero.
- Cada indicador no debe tener un valor alto más que en una componente.
- Las componentes deben tener distinta distribución de cargas altas y bajas.

El cumplimiento de estas tres características hace que la interpretación de las componentes obtenidas, en relación con los indicadores iniciales, sea más sencilla. Existen tres métodos principales de rotación que conservan la propiedad de que las componentes estén incorreladas entre sí. Esos tres métodos son el Método Varimax, el Quartimax y el Equamax.

En nuestro caso hemos llevado a cabo, utilizando el programa SPSS, los tres métodos de rotación, y hemos analizado la matriz de cargas factoriales que se ha obtenido para cada uno de los tres métodos, para decidir cuál era el método que nos ofrecía una interpretación óptima de los indicadores. Las tres matrices de cargas factoriales rotadas se adjuntan en el Anexo D.6 (CD adjunto). Un análisis de las matrices obtenidas pone de manifiesto la presencia de un alto número de componentes con la misma interpretación para los tres métodos de rotación, apareciendo los mismos indicadores con pesos altos y bajos en ellos. Sin embargo, existen pequeñas diferencias que han hecho que el EI se decantara por uno de los métodos frente a los otros dos.

Una de esas diferencias está en la interpretación de las componentes centradas en la completitud del contenido, que son las que aparecen con mayor importancia en el análisis (primera o primeras componentes determinadas). El método Quartimax ha generado una primera componente "general" sobre completitud, englobando a todos los tipos de elementos y representaciones, dándose un hecho del que ya alerta Jackson (1991) en su manual sobre ACP. El método Varimax ha separado la completitud en dos componentes: por una parte los ejemplos, representaciones simbólicas y gráficas y, por otro lado, todo tipo de representaciones verbales (definiciones, enunciados, observaciones, comentarios, explicaciones). El método Equamax es el que produce una separación más clara de los diferentes tipos de contenidos, en particular separa las definiciones y los enunciados de las observaciones y comentarios. Esa mayor división de los contenidos según su tipo en diferentes componentes nos parece de interés para nuestro análisis, puesto que los alumnos pueden registrar los distintos tipos de elementos con diferente incidencia.

Además, en algunas componentes donde los indicadores con mayor peso (en magnitud) son los mismos, el método Equamax ha destacado con signo positivo aquellos indicadores que nos parecen más relevantes para nuestro estudio frente a otros que tienen un peso negativo alto.

Por último, las componentes que no utilizan los métodos Varimax y Quartimax para desglosar la completitud de los diferentes elementos no aportan información adicional sobre otros indicadores que pueda ser de interés. En la componente 10 del método Quartimax hay varios indicadores con un peso mediano, ninguno destacado, que ya han sido recogidos por otras componentes, por lo que representaría una componente de muy difícil interpretación. Además, la componente 12 tanto de Varimax como de Quartimax se enfoca en el estilo propio en la presentación, una circunstancia en la que hay diferencias en un número muy bajo de alumnos (poco relevante) y que, en el método Equamax, queda unida junto a los indicadores de asiduidad en el registro de observaciones y comentarios, de mayor relevancia y con mayor peso en la componente para este método.

Por todas las razones anteriormente explicadas, hemos decidido quedarnos con el método Equamax de rotación para interpretar las componentes obtenidas como principales en términos de los indicadores inicialmente existentes para las UT. Para ello, nos fijamos en aquellos indicadores que tienen, para cada componente, la carga factorial mayor en magnitud. Reproducimos en la Tabla V.4 la matriz de cargas factoriales rotadas que nos proporciona este método, y que puede encontrarse también en el Anexo D.6 junto con la correspondía a los otros dos métodos de rotación probados. Hemos redondeado las cargas factoriales a valores con dos números decimales y hemos destacado aquellas cargas factoriales positivas de gran magnitud. Hemos señalado con color verde las celdas que contienen cargas positivas de gran magnitud: en verde oscuro las iguales o superiores a 0’5, en una tonalidad de verde más claro las que son inferiores a 0’5 pero iguales o superiores a 0’3. Asimismo, hemos señalado en color naranja las celdas que contienen cargas negativas de gran magnitud: en un tono naranja oscuro las iguales o inferiores a -0’5, y en un tono naranja más claro las superiores a -0’5 pero inferiores o iguales a -0’3.

Una vez determinada la matriz de cargas factoriales que va a ser utilizada, posteriormente han sido calculadas las puntuaciones factoriales en cada una de las trece componentes de las distintas UT, partiendo de las valoraciones de la unidad en los indicadores antiguos. El cálculo ha sido realizado utilizando el método de regresión, donde esas puntuaciones son estimadas utilizando el método de los mínimos cuadrados. Estas puntuaciones por componente y unidad representan la base para el posterior desarrollo del análisis clúster.

Matriz de cargas factoriales rotada (método Equamax)													
Nomenclatura del indicador	Número de componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D1V1Ind1	0,04	0,43	-0,19	0,17	0,06	0,21	0,41	-0,07	0,29	-0,21	0,24	0,14	0,11
D1V1Ind2	0,10	-0,02	0,08	0,07	-0,06	-0,03	0,09	0,01	0,03	-0,06	0,87	0,06	-0,04
D1V1Ind3	0,07	0,50	0,15	-0,05	0,14	0,31	-0,03	-0,03	-0,29	-0,11	0,13	0,15	-0,30
D1V2Ind1	0,12	0,21	-0,04	-0,06	0,16	0,57	0,35	-0,25	0,05	0,09	0,37	0,23	0,14
D1V2Ind2	0,21	0,06	0,05	-0,16	0,19	0,34	0,50	-0,30	-0,09	0,19	0,26	0,19	0,08
D1V2Ind3	-0,17	0,12	0,05	-0,19	0,03	0,22	0,03	-0,50	-0,23	0,22	0,18	0,35	-0,23
D1V2Ind4	-0,01	-0,06	0,02	-0,11	0,24	0,57	-0,22	0,09	-0,12	0,12	0,18	0,46	0,14
D1V2Ind5	0,02	0,09	-0,01	-0,18	0,03	0,17	0,20	0,10	-0,65	0,04	0,35	0,04	0,16
D1V2Ind6	0,11	0,01	-0,07	-0,21	0,00	0,70	0,10	0,01	0,14	-0,07	-0,05	-0,21	-0,10
D1V2Ind7	-0,03	-0,15	0,09	0,19	0,16	0,72	0,27	-0,19	-0,02	0,08	-0,04	0,13	0,14
D1V2Ind8	0,15	-0,02	0,09	0,01	-0,03	0,24	0,61	0,02	0,13	0,26	0,18	0,12	0,12
D1V3Ind1	0,13	0,06	-0,22	-0,12	-0,05	0,14	-0,03	0,08	0,70	-0,20	0,15	-0,13	0,07
D1V3Ind2	0,08	0,20	0,08	-0,63	0,26	0,07	0,16	0,07	0,23	-0,24	-0,20	0,02	0,11
D1V3Ind3	0,08	-0,06	-0,00	0,09	-0,05	-0,01	0,07	0,01	-0,11	0,17	0,06	0,72	0,04
D2V1Ind1	0,41	0,72	-0,12	0,27	0,07	-0,05	0,03	0,12	0,15	-0,07	0,11	0,04	0,09
D2V1Ind2	0,26	0,79	-0,10	0,27	0,09	-0,04	0,02	0,21	0,11	-0,01	0,04	-0,06	0,16
D2V1Ind4	-0,06	0,17	0,56	0,29	0,12	0,11	0,06	-0,06	-0,01	0,13	0,23	-0,23	0,21
D2V2Ind1	0,74	0,38	-0,03	0,13	-0,04	0,20	-0,06	0,08	0,21	0,11	0,24	0,19	-0,04
D2V2Ind2	0,72	0,39	-0,03	0,09	0,05	0,21	-0,17	0,17	0,18	-0,00	0,13	0,22	-0,01
D2V2Ind4	0,17	0,20	0,59	-0,06	-0,02	-0,14	0,26	0,04	0,05	-0,19	-0,13	0,42	-0,06
D2V3Ind1	0,84	0,21	0,00	0,22	0,05	0,01	0,18	0,11	0,10	-0,06	0,20	0,16	0,08
D2V3Ind2	0,83	0,20	0,04	0,20	-0,01	0,06	0,09	0,14	0,09	-0,02	0,16	0,21	0,10
D2V3Ind4	0,01	0,01	0,05	0,12	0,93	0,08	0,06	-0,12	-0,00	0,05	0,01	0,02	-0,08
D2V4Ind1	0,25	0,31	0,05	0,73	0,21	-0,09	0,09	0,27	0,11	-0,17	0,06	0,07	0,01
D2V4Ind2	0,23	0,27	0,04	0,74	0,18	-0,09	0,09	0,25	0,14	-0,23	0,03	0,12	0,03
D2V4Ind4	-0,09	0,12	0,04	-0,01	0,17	0,12	0,39	0,08	0,61	0,08	0,22	-0,13	0,02
D3V1Ind1	0,24	0,34	0,11	0,42	0,05	0,03	0,23	0,44	0,21	-0,07	-0,21	0,16	0,18
D3V1Ind2	0,30	0,24	0,17	0,26	0,14	-0,00	0,16	0,14	0,41	-0,10	0,33	0,20	0,01
D3V1Ind3	0,04	0,15	-0,05	0,06	-0,08	-0,01	0,03	0,82	-0,08	-0,03	0,02	0,06	-0,02
D4V3Ind1	0,10	-0,20	-0,08	-0,24	0,04	0,08	0,12	0,08	0,08	0,54	0,18	0,14	0,50
D4V3Ind2	-0,07	0,02	0,08	-0,04	-0,15	0,02	0,08	-0,12	-0,11	0,03	-0,05	-0,01	0,81
D4V4Ind1	0,05	0,00	0,22	-0,03	-0,01	-0,02	-0,07	-0,07	-0,08	0,81	-0,03	0,10	-0,07
D4V4Ind2	-0,07	-0,22	0,10	-0,28	0,06	0,01	0,06	-0,33	-0,19	0,28	-0,08	-0,15	-0,45
D4V4Ind3	0,04	0,13	0,23	-0,07	0,25	0,18	0,02	-0,58	-0,08	0,04	-0,20	0,02	0,35
D4V4Ind4	-0,05	0,12	0,22	0,06	0,11	0,08	0,40	-0,14	-0,09	0,61	-0,23	0,23	0,19
D5V1Ind1	0,11	0,60	-0,06	0,28	0,17	-0,11	0,20	0,27	0,28	-0,19	0,22	0,24	0,08
D5V1Ind2	0,02	-0,05	0,67	0,03	-0,06	-0,05	0,09	-0,11	-0,22	0,26	-0,04	-0,21	-0,06
D5V1Ind3	0,68	0,41	0,08	0,25	-0,08	0,20	-0,02	0,08	0,07	0,19	0,15	0,15	0,04

Nomenclatura del indicador	Número de componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D5V1Ind4	-0,13	-0,06	0,26	0,06	0,17	0,04	0,72	0,12	-0,06	-0,10	0,06	-0,01	0,09
D5V1Ind5	0,84	0,16	-0,01	0,21	0,01	0,03	0,23	0,13	0,09	-0,08	0,21	0,15	0,02
D5V1Ind6	-0,06	0,04	0,04	-0,03	0,95	0,08	0,07	-0,05	0,03	-0,02	-0,03	-0,04	-0,07
D5V2Ind1	0,07	-0,10	0,80	0,00	0,06	0,09	0,10	-0,12	0,06	0,19	0,08	0,20	0,10
D5V2Ind2	-0,10	-0,16	0,81	-0,06	0,19	-0,01	0,13	-0,06	-0,11	0,16	0,04	0,11	0,01

Tabla V.4. Matriz de cargas factoriales rotada utilizando el método Equamax.

De mayor a menor importancia, en función de la cantidad de variabilidad de los datos que explica cada una, explicamos a continuación la interpretación que hemos realizado de cada una de las trece componentes seleccionadas en este ACP para las unidades teóricas.

Componente 1: Componente que mide la completitud de la unidad teórica, enfocado principalmente en la transcripción de los ejemplos y de los dibujos, esquemas y gráficos de que consta la explicación del docente, y en la asiduidad en la utilización de las representaciones de carácter simbólico y gráfico.

Hay seis indicadores con un peso muy alto en esta componente. Son el indicador D2V2Ind1, "Frecuencia de registro de ejemplos ilustrativos en la unidad", con un peso de 0'74; el indicador D2V2Ind2, "Frecuencia de registro de los ejemplos ilustrativos considerados por el docente como más importantes", con un peso de 0'72; el indicador D2V3Ind1, "Frecuencia de registro de los dibujos, esquemas y gráficos en la unidad", con un peso de 0'84; el indicador D2V3Ind2, "Frecuencia de registro de los dibujos, esquemas y gráficos considerados por el docente como más importantes", con un peso de 0'83; el indicador D5V1Ind3, "Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)", con un peso de 0'68 y el indicador D5V1Ind5, "Asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)", con un peso de 0'84.

Además, hay otros dos indicadores con alto peso en esta componente, aunque no tan alto como los anteriores. Son el indicador D2V1Ind1, "Frecuencia de registro de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones en la unidad", con un peso de 0'41 y el indicador D3V1Ind2, "Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con la teoría de la unidad", con un peso de 0'30.

No existe ningún indicador con un peso negativo que tenga una magnitud que consideremos importante (todos los indicadores con peso negativo tienen un peso que es inferior, en valor absoluto, a 0’3).

Componente 2: Esta componente es complementaria de la componente anterior, puesto que también está relacionada con la completitud, pero se enfoca en los enunciados, teoremas y justificaciones, la presencia de los títulos de los apartados del tema y la asiduidad en la representación de las representaciones de carácter verbal. También aparece ligada a esta componente el indicador sobre el mantenimiento del orden cronológico en el desarrollo de la unidad.

Hay cuatro indicadores con un peso muy alto en esta componente. Son el indicador D1V2Ind3, “Orden cronológico de la teoría y los ejemplos desarrollados”, con un peso de 0’50; el indicador D2V1Ind1, “Frecuencia de registro de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones en la unidad” con un peso de 0’72; el indicador D2V1Ind2, “Frecuencia de registro de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones considerados por el docente como más importantes”, con un peso de 0’79 y el indicador D5V1Ind1, “Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)”, con un peso de 0’60.

Además, hay seis indicadores con alto peso en esta componente, aunque menor que los anteriores. Son el indicador D1V1Ind1, “Claridad en la indicación de las diferentes partes que componen un tema”, con un peso de 0’43; el indicador D2V2Ind1, “Frecuencia de registro de ejemplos ilustrativos en la unidad”, con un peso de 0’38; el indicador D2V2Ind2, “Frecuencia de registro de los ejemplos ilustrativos considerados por el docente como más importantes”, con un peso de 0’39; el indicador D2V4Ind1, “Frecuencia de registro de las observaciones o comentarios de interés realizados por el docente en la unidad”, con un peso de 0’31; el indicador D3V1Ind1, “Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad”, con un peso de 0’30 y el indicador D5V1Ind3, “Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)”, con un peso de 0’41.

En esta componente no hay indicadores con un peso negativo que tengan una magnitud importante (todos estos indicadores tienen un peso que es inferior, en valor absoluto, a 0’3).

Componente 3: Esta componente está centrada en la precisión de las transcripciones realizadas por el estudiante en su unidad, con especial atención a las definiciones y los resultados teóricos (en general, a las representaciones de carácter verbal) y, también, a los ejemplos ilustrativos.

En esta componente existen cinco indicadores que tienen un peso muy alto. Son el indicador D2V1Ind4, “Precisión de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones registradas”, con un peso de 0’56; el indicador D2V2Ind4, “Precisión de los ejemplos ilustrativos registrados”, con un peso de 0’59; el indicador D5V1Ind2, “Utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)”, con un peso de 0’67; el indicador D5V2Ind1, “Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta e dictados o copias”, con un peso de 0’80 y el indicador D5V2Ind2, “Tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad que hemos asociado a los mismos”, con un peso de 0’81.

No existe ningún otro indicador que tenga un peso superior en magnitud a 0’3, tanto positivos (entre 0’3 y 0’5) como negativos (inferiores a -0’3).

Componente 4: Esta componente está relacionada, según observamos con los pesos positivos de mayor magnitud, con la abundancia de observaciones y de comentarios escritos en una unidad, principalmente los indicados por el profesor durante su explicación, pero también los comentarios y aclaraciones que el propio alumno decide tomar. Además, encontramos un contrapeso negativo importante en esta componente: la presencia de rasgos propios en la presentación de la unidad, que parece mostrar una alta correlación negativa con la abundancia de observaciones y comentarios.

Existen dos indicadores que tienen un peso muy alto en esta cuarta componente. Son el indicador D2V4Ind1, “Frecuencia de registro de las observaciones o comentarios de interés realizados por el docente en la unidad”, con un peso de 0’73 y el indicador D2V4Ind2, “Frecuencia de registro de las observaciones o comentarios de interés realizados por el docente y considerados por el docente como más importantes”, con un peso de 0’74.

Además, hay un indicador con un peso alto en esta componente, aunque menor que los dos anteriores. Dicho indicador es el D3V1Ind1, “Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad”, con un peso de 0’42.

En este caso, existe un indicador que tiene un peso negativo muy importante en esta componente. Es el indicador D1V3Ind2, “Personalización en la presentación de la unidad", con un peso de -0'63. No existen otros indicadores con peso negativo inferior a -0'3.

Componente 5: Esta componente está muy centrada en la precisión de los dibujos, esquemas y gráficos y, en general, de las representaciones de tipo gráfico que realiza el estudiante en una unidad.

Tan sólo hay dos componentes que tengan un peso muy alto en esta componente. Son el indicador D2V3Ind4, "Precisión de los dibujos, esquemas y gráficos registrados", con un peso de 0'93 y el indicador D5V1Ind6, "Utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)", con un peso de 0'95.

No hay ningún otro indicador con un peso mayor o igual a 0'3 en valor absoluto.

Componente 6: Esta componente aglutina varios aspectos relacionados con la presentación de la unidad, como son la impresión general que causa la unidad, la utilización de los espacios, el tamaño de los elementos y la legibilidad de la letra.

Encontramos cuatro indicadores que tienen un peso muy alto en esta componente. Son el indicador D1V2Ind1, "Primera impresión que causa la revisión general de la unidad", con un peso de 0'57; el indicador D1V2Ind4, "Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco", con un peso de 0'57; el indicador D1V2Ind6, "Tamaño de la letra, números y signos matemáticos", con un peso de 0'70 y el indicador D1V2Ind7, "Legibilidad de la letra", con un peso de 0'72.

Además, otros dos indicadores tienen un peso alto en la componente, aunque no tanto como los cuatro anteriores. Son el indicador D1V1Ind3, "Orden cronológico de la teoría y los ejemplos desarrollados", con un peso de 0'31 y el indicador D1V2Ind2, "Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma", con un peso de 0'34.

En esta componente no hay indicadores con un peso negativo menor o igual que -0'3.

Componente 7: Esta componente se centra, fundamentalmente, en la precisión de las representaciones de tipo simbólico, en la legibilidad de los signos matemáticos y en la limpieza y la ausencia de tachones. Además, encontramos algunos indicadores, de naturaleza heterogénea, con una contribución secundaria en esta componente.

Hay tres indicadores que tienen un peso muy alto en esta séptima componente. Son el indicador D1V2Ind2, "Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma", con un peso de 0'50, el indicador D1V2Ind8, "Legibilidad de los números y signos matemáticos", con un peso de 0'61 y el indicador D5V1Ind4, "Utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)", con un peso de 0'72.

Encontramos otros cuatro indicadores con un alto peso en esta componente, pero menor que los tres anteriores. Estos cuatro indicadores, como ya hemos indicado anteriormente, tienen una naturaleza muy diversa, por lo que es difícil interpretar un posible significado conjunto. Son el indicador D1V1Ind1, "Claridad en la indicación de las diferentes partes que componen un tema", con un peso de 0'41, el indicador D1V2Ind1, "Primera impresión que causa la revisión general de la unidad", con un peso de 0'35, el indicador D2V4Ind4, "Precisión de las observaciones o comentarios de interés realizados por el docente registrados", con un peso de 0'39 y el indicador D4V4Ind4, "Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde", con un peso de 0'40.

No existe en esta componente ningún indicador con un peso negativo que sea igual o inferior a -0'3.

Componente 8: Esta componente se centra, sobre todo, en medir la presencia en la unidad de anotaciones del alumno de carácter personal, como pueden ser las marcas de comprensión de los diferentes conceptos y técnicas tratadas, la explicitación de dudas o, en menor medida, la escritura de comentarios y de aclaraciones por parte del alumno en el desarrollo de la unidad. Encontramos dos fuertes contrapesos en la componente: la falta de respeto de los márgenes y la presencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de las mayúsculas.

El primero de los dos contrapesos que han emergido puede tener cierta relación lógica con el resto de aspectos primeramente comentados, puesto que los márgenes de las hojas suele ser el lugar utilizado por los estudiantes para escribir estas anotaciones personales.

Tan sólo hay un indicador con un peso muy alto en esta componente: el indicador D3V1Ind3, "Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en la teoría de la unidad", con un peso de 0'82. Además, hay otro indicador con un alto peso en la componente, aunque menor que el anterior: el indicador D3V1Ind1, "Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad", con un peso de 0'44.

Hay dos indicadores con un peso negativo muy alto en esta componente. Son el indicador D1V2Ind3, "Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad", con un peso de -0’50 y el indicador D4V4Ind3, “Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de mayúsculas”, con un peso de -0’58. Además, hay dos indicadores con un peso negativo alto, aunque menor en magnitud a los dos anteriores. Son el indicador D1V2Ind2, “Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma”, con un peso de -0’30 y el indicador D4V4Ind2, “Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras”, con un peso de -0’33.

Componente 9: En esta componente se recogen tres aspectos que pudieran parecer poco relacionados a priori, pero que aparecen con un alto peso en esta componente. Uno de ellos, el de mayor magnitud, es la presencia de un estilo propio en la unidad al organizar ésta. De forma secundaria aparece la precisión al tomar las observaciones y comentarios realizados por el docente y la explicación de las representaciones gráficas recogidas en la unidad. En este sentido, existe un contrapeso: el tamaño y la integración de este tipo de representaciones, indicador que parece tener una importante correlación negativa con los anteriores.

Hay dos indicadores que tienen un peso muy alto en esta componente novena. Son el indicador D1V3Ind1, “Personalización en la organización de la unidad”, con un peso de 0’70 y el indicador D2V4Ind4, “Precisión de las observaciones o comentarios de interés realizados por el docente y registrados”, con un peso de 0’61. Además, hay un indicador con un alto peso en esta componente, pero menor que los dos anteriores. Es el indicador D3V1Ind2, “Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con la teoría de la unidad”, con un peso de 0’41.

Existe un indicador con un peso negativo muy alto en esta componente: el indicador D1V2Ind5, “Tamaño e integración de los dibujos, esquemas o gráficos”, con un peso de -0’65. No existe ningún otro indicador que tenga un peso negativo con valor absoluto igual o superior a 0’3.

Componente 10: Esta componente relaciona varios indicadores asociados a la corrección lingüística del texto escrito. Están asociados con la ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso incorrecto de grafemas correspondientes a un mismo fonema o a fonemas similares y con una acentuación adecuada. También se destaca el uso adecuado de los signos de puntuación existentes.

Hay tres indicadores que tienen un peso muy alto en esta componente décima, y que son los tres que hemos indicado anteriormente. Son el indicador D4V3Ind1, “Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad”, con un peso de 0’54, el indicador D4V4Ind1, “Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o con fonemas similares (b/v, ll/y, h)", con un peso de 0'81 y el indicador D4V4Ind4, "Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde", con un peso de 0'61.

No existe ningún otro indicador con un peso positivo igual o superior a 0'3. Tampoco hay indicadores con un peso negativo que tenga un valor absoluto igual o superior a 0'3.

Componente 11: Esta componente, principalmente, está asociada a la continuidad en la unidad teórica del alumno, es decir, la no presencia de partes de teoría correspondientes a temas distintos del actual a lo largo de dicho tema actual.

Hay tan sólo un indicador que tenga un peso muy alto en esta componente: es el indicador D1V1Ind2, "Ausencia de partes de teoría correspondientes a temas distintos del actual", con un peso de 0'87. Además, hay otros tres indicadores con un peso superior a 0'3 pero inferior a 0'5. Son el indicador D1V2Ind1, "Primera impresión que causa la revisión general de la unidad", con un peso de 0'37, el indicador D1V2Ind5, "Tamaño e integración de los dibujos, esquemas o gráficos", con un peso de 0'35 y el indicador D3V1Ind2, "Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con la teoría de la unidad", con un peso de 0'33.

No existe ningún indicador con un peso negativo que sea igual o superior a 0'3 en valor absoluto.

Componente 12: Esta componente está asociada, principalmente, a la utilización de notaciones y representaciones personales por parte del alumno, que se complementa con una buena utilización de los márgenes y de los espacios en la unidad (indicadores que ya aparecían en componentes anteriores).

Tan sólo hay un indicador que tenga un peso muy alto en esta componente: es el indicador D1V3Ind3, "Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo", con un peso de 0'72. Además, hay otros tres indicadores con un peso alto en esta componente, pero inferior a 0'5. Son el indicador D1V2Ind3, "Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad", con un peso de 0'35; el indicador D1V2Ind4, "Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco", con un peso de 0'46 y el indicador D2V2Ind4, "Precisión de los ejemplos ilustrativos registrados", con un peso de 0'42.

No hay ningún indicador con un peso negativo que tenga un valor absoluto que sea igual o superior a 0’3.

Componente 13: Esta última componente está relacionada con la corrección lingüística del texto, y puede considerarse como complementaria de la componente décima. Esta componente está focalizada en la puntuación, sobre todo en el uso de los signos de puntuación necesarios en el texto. También aparecen algunos indicadores ortográficos, asociados al uso adecuado de las mayúsculas y, en sentido negativo, la separación de palabras.

Encontramos dos indicadores con un peso muy alto en esta componente decimotercera. Son el indicador D4V3Ind1, “Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad”, con un peso de 0’50 y, sobre todo, el indicador D4V3Ind2, “Presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad”, con un peso de 0’81. Además, hay otro indicador con un peso alto en esta componente, pero inferior a 0’5. Es el indicador D4V4Ind3, “Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de mayúsculas”, con un peso de 0’35.

No hay ningún indicador con un peso negativo muy alto (en valor absoluto igual o superior a 0’5) en esta componente. Sí que hay dos indicadores con un peso negativo que es igual o superior a 0’3 en valor absoluto. Son el indicador D1V1Ind3, “Orden cronológico de la teoría y los ejemplos desarrollados”, con un peso de -0’30 y el indicador D4V4Ind2, “Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras”, con un peso de -0’45.

V.2.2. ACP PARA LAS UNIDADES PRÁCTICAS

Hemos realizado un análisis similar al anterior, y siguiendo los mismos pasos, pero con la matriz de datos correspondiente a las unidades prácticas. Por ello, no nos detendremos tanto en los detalles propios del método de análisis estadístico utilizado.

Una vez llevados a cabo los pasos previos al análisis indicados en el apartado V.1, el número de indicadores que iban a tomar parte inicialmente en este análisis es de 52, un número algo superior que el que teníamos para las unidades teóricas (43). No obstante, de esos 52 indicadores hay uno en el que su valoración en todos los alumnos ha sido de “1” en la escala 1-5. Es el indicador D1V3Ind2, “Personalización en la presentación de la unidad”. Es decir, ningún alumno presentó en sus UP rasgo alguno de presentación que pudiera considerarse como propio del alumno. Por esa razón, este indicador ha sido excluido antes de realizar el ACP, puesto que su inclusión no iba a aportar ninguna información para nuestro propósito, al no presentar ninguna característica diferenciadora entre alumnos.

La matriz que utilizaremos como base para el desarrollo del análisis ACP, de nuevo, será la matriz de correlaciones, que contiene los coeficientes de correlación de Pearson para cada una de las parejas de indicadores que forman parte del análisis. La matriz se muestra en el Anexo D.7 (CD adjunto a la memoria).

Lo primero que se ha hecho es valorar si es adecuada o no la realización del análisis ACP para la matriz de correlaciones existente en las UP. Utilizamos para estudiar esa adecuación las mismas pruebas señaladas en el apartado anterior. El determinante de la matriz de correlaciones es $3'31 \cdot 10^{-18}$, un valor prácticamente nulo, lo que es un dato positivo sobre la pertinencia de la realización de un análisis de este tipo.

En la Tabla V.5 se recogen los valores obtenidos al realizar dos pruebas que miden la adecuación de la muestra para el análisis a realizar: la medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin y la prueba de esfericidad de Bartlett. En este caso, el valor obtenido para la prueba de Kaiser-Meyer-Olkin es 0’634. Dicho valor es superior a 0’5, valor por debajo del cual se considera inaceptable la realización de este análisis, no obstante, es un valor que puede considerarse como mediocre.

Sin embargo, la prueba de esfericidad de Bartlett sí que ofrece un resultado muy positivo. En este caso, el estadístico de esta prueba se distribuye asintóticamente según una distribución chi-cuadrado con 51·50/2=1275 grados de libertad. En la Tabla V.5 se observa que el valor del estadístico obtenido al desarrollar la prueba ha sido de 2959’121, con un p-valor inferior a 0’001, por lo que se rechaza de manera evidente que la matriz de correlaciones de los indicadores sea la matriz identidad.

KMO y prueba de Bartlett		
Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin		0,634
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	2959,121
	gl	1275
	Signif.	<0,001

Tabla V.5. Pruebas para medir la adecuación del ACP en las unidades prácticas.

Por todo ello, consideramos que es oportuna y adecuada la realización de un análisis ACP para los datos existentes en las unidades prácticas.

Una vez establecida su pertinencia y adecuación, el siguiente paso ha consistido en llevar a cabo el propio ACP, utilizando el software SPSS y la matriz de correlaciones asociada a los indicadores de las UP. La Tabla V.6 recoge los autovalores de la matriz de correlaciones ordenados de mayor a menor magnitud y, también, el porcentaje de variabilidad explicada por las componentes asociadas a dichos autovalores. Como antes, es decisión del investigador decidir cuáles son las componentes que se van a seleccionar como componentes principales, estableciendo un equilibrio entre la reducción del número de dimensiones del problema y la pérdida de información que dicha reducción supone.

Las reglas que hemos tenido en cuenta para determinar el número de componentes son las mismas que en el apartado anterior. La Tabla V.6 revela la existencia de 16 autovalores superiores a 1, valor establecido habitualmente como referencia. El gráfico de sedimentación de Cattell para este ACP, que puede verse en la Figura V.2, nos muestra la existencia de una pequeña inflexión en la gráfica entre el autovalor asociado a la decimosexta componente y la siguiente, lo que nos indica la presencia de un salto entre la magnitud de estos dos indicadores que es superior al salto que existía con respecto al autovalor anterior.

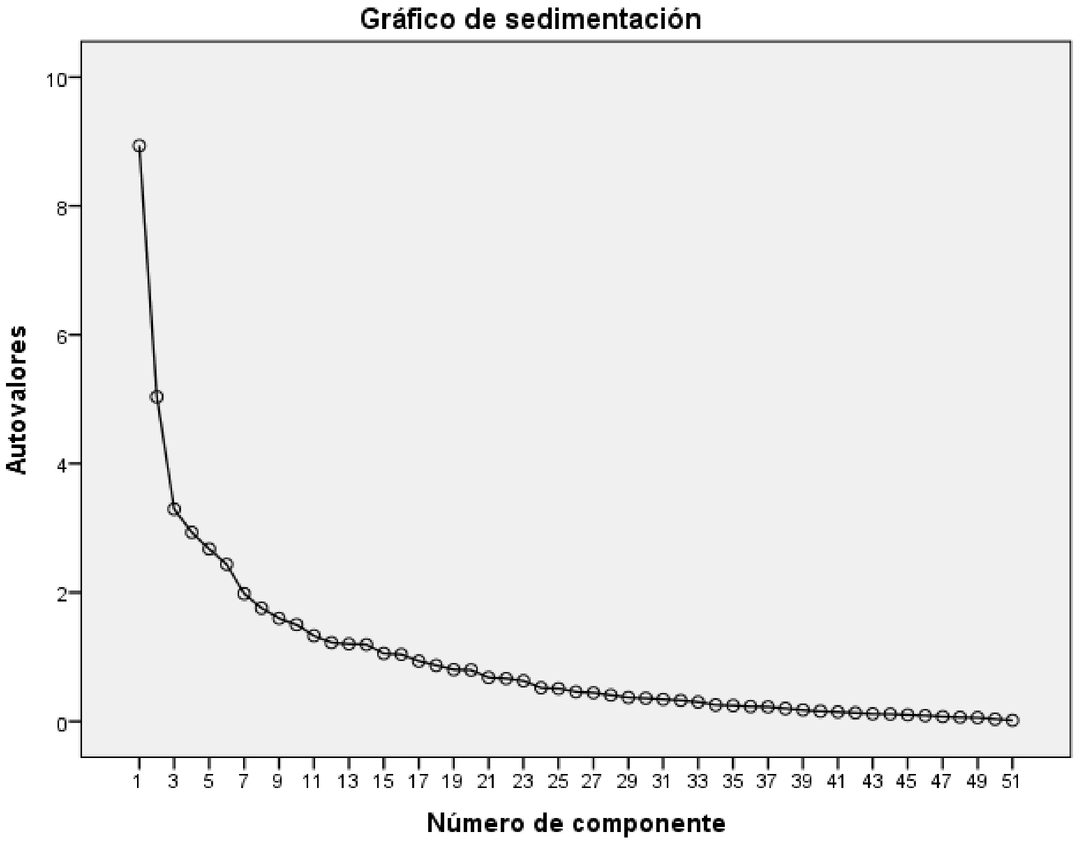


Figura V.2. Gráfico de sedimentación de Cattell para el ACP en las UP.

El porcentaje de variabilidad explicado si seleccionamos las dieciséis primeras componentes es del 76’822%, un valor comprendido entre el 70 y el 90% que suele tomarse como intervalo de referencia (Everitt & Dunn, 2001). Por todo ello, el EI ha decidido seleccionar dichas 16 componentes como componentes principales en el análisis de las UP, lo que nos permitirá reducir la dimensión del problema de 51 indicadores de partida a 16 componentes, explicando con estas componentes una gran mayoría de la variabilidad de los datos.

Varianza total explicada			
Componente	Autovalores iniciales		
	Total	% de la varianza	% acumulado
1	8,935	17,520	17,520
2	5,037	9,876	27,396
3	3,293	6,458	33,854
4	2,933	5,752	39,605
5	2,674	5,242	44,848
6	2,439	4,782	49,630
7	1,981	3,885	53,515
8	1,757	3,446	56,960
9	1,597	3,131	60,091
10	1,499	2,939	63,030
11	1,328	2,604	65,634
12	1,223	2,398	68,032
13	1,200	2,354	70,386
14	1,192	2,337	72,723
15	1,052	2,063	74,786
16	1,038	2,036	**76,822**
17	0,933	1,829	78,651
18	0,866	1,698	80,349
19	0,802	1,573	81,923
20	0,797	1,562	83,485
21	0,680	1,333	84,818
22	0,666	1,305	86,123
23	0,629	1,233	87,356
24	0,520	1,019	88,375
25	0,508	0,997	89,372
26	0,457	0,897	90,268
27	0,443	0,869	91,137
28	0,405	0,793	91,930
29	0,370	0,725	92,655
30	0,358	0,701	93,356
31	0,340	0,667	94,023
32	0,323	0,634	94,657
33	0,299	0,586	95,243
34	0,253	0,496	95,739
35	0,245	0,480	96,219
36	0,229	0,450	96,669
37	0,223	0,438	97,106
38	0,198	0,388	97,494
39	0,177	0,347	97,841
40	0,157	0,309	98,149

41	0,146	0,287	98,436
42	0,132	0,259	98,695
43	0,116	0,227	98,923
44	0,113	0,222	99,145
45	0,102	0,200	99,344
46	0,089	0,175	99,519
47	0,074	0,145	99,664
48	0,063	0,124	99,788
49	0,058	0,115	99,903
50	0,035	0,068	99,971
51	0,015	0,029	100,000

Tabla V.6. Autovalores de la matriz de correlaciones para las unidades prácticas y varianza explicada según el número de componentes seleccionado.

Una vez seleccionadas las primeras 16 componentes como principales, tenemos que estudiar si todos los indicadores quedan explicados de forma suficiente en ellas. Para ello, recurrimos al estudio de las *comunalidades* de cada indicador. En este caso, observamos en la Tabla V.7 que todos los indicadores participantes tienen una comunalidad en el modelo final superior a 0’6, el valor que suele tomarse habitualmente como referencia. Por tanto, consideramos que todos los indicadores quedan suficientemente explicados con las 16 componentes principales que se han seleccionado.

Nomenclatura del indicador	Comunalidad en el modelo previo	Comunalidad en el nuevo modelo (dieciséis componentes)
D1V1Ind1	1,000	0,750
D1V1Ind2	1,000	0,755
D1V1Ind3	1,000	0,651
D1V1Ind4	1,000	0,842
D1V1Ind5	1,000	0,804
D1V2Ind1	1,000	0,807
D1V2Ind2	1,000	0,791
D1V2Ind3	1,000	0,699
D1V2Ind4	1,000	0,780
D1V2Ind5	1,000	0,786
D1V2Ind6	1,000	0,755
D1V2Ind7	1,000	0,656
D1V2Ind8	1,000	0,646
D1V3Ind1	1,000	0,612
D1V3Ind3	1,000	0,705
D2V1Ind1	1,000	0,835
D2V1Ind2	1,000	0,713
D2V1Ind3	1,000	0,861
D2V1Ind4	1,000	0,894
D2V2Ind1	1,000	0,772
D2V2Ind2	1,000	0,704
D2V3Ind1	1,000	0,824
D2V3Ind2	1,000	0,803
D2V4Ind1	1,000	0,859
D2V4Ind2	1,000	0,725
D2V4Ind3	1,000	0,760
D2V4Ind4	1,000	0,661
D2V4Ind5	1,000	0,621
D2V4Ind6	1,000	0,849
D3V1Ind1	1,000	0,784
D3V1Ind2	1,000	0,709
D3V1Ind3	1,000	0,798
D3V1Ind4	1,000	0,709
D4V3Ind1	1,000	0,822
D4V3Ind2	1,000	0,841
D4V4Ind1	1,000	0,690
D4V4Ind2	1,000	0,801
D4V4Ind3	1,000	0,759
D4V4Ind4	1,000	0,750
D5V1Ind1	1,000	0,799

D5V1Ind2	1,000	0,843
D5V1Ind3	1,000	0,775
D5V1Ind4	1,000	0,759
D5V1Ind5	1,000	0,665
D5V1Ind6	1,000	0,747
D5V2Ind1	1,000	0,858
D5V2Ind2	1,000	0,845
D5V3Ind1	1,000	0,775
D5V3Ind2	1,000	0,860
D5V4Ind1	1,000	0,859
D5V4Ind2	1,000	0,813

Tabla V.7. Comunalidad de cada indicador para las unidades prácticas al seleccionar dieciséis componentes principales en el ACP.

Una vez extraídas las dieciséis componentes que hemos seleccionado como principales en este análisis, obtenemos la *matriz de cargas factoriales*, que mostramos en el Anexo D.8 (CD). Como puede verse en dicha matriz, hay un número importante de componentes donde ninguna de las cargas factoriales de los indicadores supera, en valor absoluto, el valor de referencia de 0'5, a partir del cual se considera el peso como significativo en la componente (De la Fuente, 2011b).

Para facilitar la interpretación adecuada de estas componentes, se han aplicado a la matriz los tres métodos de rotación más comunes que mantienen la incorrelación de las componentes, usando el programa SPSS. Buscamos conocer cuál es el método que nos proporciona una mejor interpretación de todas las componentes. Las tres matrices de cargas factoriales rotadas se adjuntan en el Anexo D.9 (CD).

El análisis de las matrices de cargas factoriales y de los indicadores con mayor peso en cada componente revela la existencia de componentes que son comunes a los tres métodos de rotación, es decir, que tienen los mismos indicadores con pesos altos. Estas componentes parecen ser las que se forman de un modo más claro, con una interpretación que es esencialmente la misma independientemente del método de rotación que se escoja para la matriz de cargas factoriales. Sin embargo, hay algunas diferencias en otras componentes y en los indicadores que se muestran como relevantes en ellas, que han propiciado que el EI escogiera uno de los tres métodos como el más adecuado para la interpretación de las componentes.

Los métodos de Varimax y Quartimax muestran más similitudes entre sí, mostrando más diferencias la matriz rotada utilizando el método Equamax. Esta última matriz centra su primera componente únicamente en tres indicadores de la Dimensión 3, sobre comentarios, observaciones y explicaciones de pasos, procesos y gráficas. Algunos indicadores que nos parecen relevantes, como los indicadores sobre el registro de los ejercicios y la completitud de los mismos están muy difuminados en varias componentes, lo que dificulta una identificación adecuada de los comportamientos asociados a estos indicadores. También hay otros indicadores que consideramos a priori como relevantes y que aparecen muy difusos en la matriz, como el asociado a la precisión de las representaciones simbólicas registradas; o que tienen un rol secundario en componentes donde domina un indicador que consideramos menos decisivo (como los indicadores de presentación o de ortografía). Este hecho obtenido utilizando el método Equamax contrasta con lo que sucede para los otros dos métodos, donde los indicadores considerados a priori como más relevantes sí que tienen un rol principal en alguna de las componentes. Por esta razón, hemos desestimado la utilización de la matriz rotada obtenida aplicando el método Equamax.

Entre las matrices que nos proporcionan el método Varimax y el método Quartimax, el EI se ha decantado por la primera de ellas por dos razones. De nuevo, al igual que sucedió en el ACP para las UT, el método Quartimax genera una primera componente sobre completitud que engloba, bajo nuestro criterio, demasiados elementos con un peso alto. Esta concentración dificulta el poder detectar posibles diferencias entre alumnos en su comportamiento, que supone el objetivo principal del desarrollo de este análisis cuantitativo. En este sentido, nos parece más adecuada la distinción que hace el método Varimax en sus dos primeras componentes, una más centrada en los aspectos de explicación de los elementos y de toma de observaciones y comentarios (componente primera), y otra componente más centrada en medir el número de ejercicios planteados que pueden encontrarse en la UP, así como la presencia de intentos de resolución de las actividades (componente segunda).

La segunda razón para decantarnos por el método Varimax es que, para este método, la satisfacción en la resolución de ejercicios es un indicador con un peso alto en una de las componentes (quinta), mientras que dicho indicador aparece muy disgregado entre varias componentes en la matriz proporcionada por el método Quartimax, sin que tenga un peso principal en ninguna de ellas.

Por estas dos razones se ha optado por seleccionar la matriz de rotación proporcionada por el método Varimax como la matriz base que se utilizará para interpretar las componentes seleccionadas en términos de los indicadores inicialmente tenidos en cuenta en las UP. En la Tabla V.8 reproducimos dicha matriz, que también puede encontrarse en el Anexo D.9 junto con las matrices para los otros métodos de rotación. En ella se muestran las cargas factoriales de cada indicador en cada componente, con tres números decimales. Mostramos la matriz utilizando un formato apaisado, para una mejor lectura de la misma, puesto que el número de componentes principales seleccionado es más alto que para las UT.

Al igual que en el caso de las UT, hemos utilizado un código de colores para que puedan visualizarse rápidamente los indicadores con un peso alto en cada componente. Hemos señalado con color verde oscuro aquellas celdas con cargas factoriales positivas muy altas (iguales o superiores a 0’5), mientras que hemos utilizado un tono verde más claro para aquellas celdas con cargas también altas, pero no de forma tan significativa (iguales o superiores a 0’3, pero inferiores a 0’5). Del mismo modo, hemos marcado con color naranja oscuro las celdas con cargas factoriales negativas de gran magnitud (iguales o inferiores a -0’5), mientras que se han señalado con un color naranja más claro las celdas con cargas factoriales iguales o inferiores a -0’3, pero mayores que -0’5.

Con posterioridad a la elección de la matriz de cargas factoriales que vamos a utilizar, han sido calculadas las puntuaciones factoriales de cada unidad en cada una de las dieciséis componentes que se han considerado como principales, a partir de las valoraciones de la unidad en los indicadores inicialmente utilizados. El cálculo ha sido realizado utilizando el método de regresión, donde esas puntuaciones han sido estimadas utilizando el método de los mínimos cuadrados. Estas puntuaciones por componente y unidad representan la base para el desarrollo posterior del análisis clúster.

Matriz de cargas factoriales rotada (método Varimax)																
Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D1V1Ind1	0,380	0,137	0,252	0,215	-0,039	0,136	-0,060	0,057	-0,152	0,256	0,413	-0,133	0,042	0,112	0,326	-0,230
D1V1Ind2	0,193	-0,227	0,105	0,456	-0,278	0,072	-0,270	0,078	-0,092	-0,437	-0,071	0,197	0,177	-0,040	0,093	0,042
D1V1Ind3	0,090	-0,024	-0,047	0,385	0,420	0,329	0,055	-0,057	0,164	-0,202	0,164	0,080	-0,135	-0,212	-0,027	-0,191
D1V1Ind4	-0,170	-0,292	-0,187	0,341	-0,131	0,279	-0,192	-0,026	0,124	-0,103	0,151	-0,269	0,184	-0,001	0,029	-0,536
D1V1Ind5	0,214	-0,030	0,461	0,210	-0,102	-0,023	-0,038	-0,001	-0,083	0,343	0,460	-0,058	-0,127	0,014	0,359	0,062
D1V2Ind1	-0,066	0,049	0,647	0,125	0,249	0,145	0,119	0,131	-0,165	0,174	0,355	-0,100	0,015	0,033	0,213	-0,104
D1V2Ind2	-0,129	-0,006	0,635	0,139	0,158	0,256	0,074	-0,007	-0,274	0,263	0,278	0,051	-0,006	0,112	0,003	-0,137
D1V2Ind3	-0,461	-0,053	0,278	0,249	0,203	0,170	-0,056	0,237	-0,075	0,173	0,122	0,313	-0,228	0,015	0,013	-0,118
D1V2Ind4	0,074	-0,089	0,242	0,037	0,092	-0,066	0,015	-0,003	-0,026	-0,018	0,825	0,052	0,056	0,057	-0,056	0,013
D1V2Ind5	0,077	0,015	0,173	0,067	0,007	0,063	0,036	0,126	0,001	0,840	0,044	0,047	0,098	0,020	0,016	0,064
D1V2Ind6	-0,020	0,040	0,576	-0,391	-0,145	-0,071	-0,196	-0,104	0,162	0,146	-0,040	0,223	-0,214	-0,143	-0,151	-0,074
D1V2Ind7	0,053	-0,045	0,722	0,128	0,012	-0,070	0,052	0,075	0,166	-0,085	0,154	-0,097	0,092	0,084	-0,082	0,103
D1V2Ind8	0,273	0,120	0,670	0,062	0,146	-0,060	0,108	-0,004	-0,018	0,019	-0,021	0,085	0,230	0,005	-0,057	-0,048
D1V3Ind1	0,281	0,216	-0,244	0,145	0,420	-0,403	-0,077	-0,127	0,123	-0,011	0,051	0,070	0,009	0,126	0,011	-0,076
D1V3Ind3	0,163	0,237	0,347	0,034	0,166	0,074	0,646	0,012	0,042	0,086	-0,055	-0,075	-0,041	0,146	0,094	0,012
D2V1Ind1	0,432	0,493	0,126	0,211	0,486	-0,117	-0,086	-0,109	-0,011	0,005	0,030	-0,098	-0,180	-0,139	-0,007	0,114
D2V1Ind2	0,492	0,539	0,148	0,064	0,013	-0,013	-0,165	-0,013	-0,088	-0,110	-0,086	0,064	0,075	-0,253	-0,034	-0,156
D2V1Ind3	0,091	0,088	-0,074	-0,895	-0,049	-0,102	-0,018	0,095	-0,005	-0,067	-0,076	-0,036	-0,027	-0,025	0,048	0,022
D2V1Ind4	0,096	0,075	-0,105	-0,907	-0,010	-0,077	-0,058	0,079	0,022	-0,083	-0,068	-0,106	0,032	-0,047	0,056	0,026
D2V2Ind1	0,280	0,099	0,159	0,103	0,631	-0,079	0,127	-0,023	0,167	0,203	0,323	-0,134	-0,061	0,128	0,009	0,122
D2V2Ind2	0,127	0,362	-0,204	-0,498	0,301	0,100	0,077	-0,075	-0,069	0,178	0,198	0,153	0,105	-0,025	0,211	0,009
D2V3Ind1	0,176	0,603	0,168	-0,150	0,504	0,237	0,113	-0,016	0,067	-0,057	-0,076	0,037	-0,180	-0,029	0,045	-0,071

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D2V3Ind2	0,252	0,138	0,237	-0,240	0,679	0,187	0,145	-0,123	-0,080	-0,015	-0,142	-0,056	-0,008	0,171	0,118	0,028
D2V4Ind1	0,155	0,059	0,051	0,021	0,361	-0,040	0,013	-0,004	0,766	0,022	-0,007	-0,152	0,150	-0,027	0,094	0,231
D2V4Ind2	-0,260	0,060	-0,058	-0,001	-0,131	0,075	0,168	-0,093	0,740	-0,006	-0,089	0,114	-0,012	0,146	-0,024	0,013
D2V4Ind3	0,335	0,091	0,072	0,065	0,236	0,101	0,700	0,034	0,225	0,007	0,014	-0,005	-0,099	-0,078	-0,075	0,024
D2V4Ind4	0,615	0,149	0,054	0,086	0,186	0,053	0,069	-0,056	-0,031	-0,029	0,019	0,002	0,084	-0,350	0,254	0,092
D2V4Ind5	0,190	-0,050	0,189	-0,031	0,424	-0,308	0,186	-0,095	0,240	0,032	0,242	-0,149	0,109	-0,167	-0,220	-0,001
D2V4Ind6	0,060	-0,117	-0,130	0,007	0,013	0,272	-0,014	-0,051	0,258	0,031	0,040	-0,178	-0,026	-0,068	0,005	0,795
D3V1Ind1	0,770	0,054	0,045	-0,104	0,108	0,091	0,332	-0,010	-0,037	-0,080	-0,071	-0,137	-0,027	0,051	0,098	0,022
D3V1Ind2	0,793	0,036	0,023	-0,036	0,088	0,132	0,110	-0,015	0,000	0,115	0,083	-0,007	-0,047	0,042	-0,101	0,065
D3V1Ind3	0,714	0,117	0,057	-0,200	0,120	-0,028	-0,062	0,072	0,135	0,351	-0,052	0,010	0,156	0,136	0,116	-0,081
D3V1Ind4	0,422	0,198	-0,170	-0,050	-0,182	-0,011	0,597	-0,110	-0,008	0,047	0,126	-0,086	0,046	-0,045	-0,164	0,039
D4V3Ind1	-0,038	0,021	0,014	-0,001	0,001	0,136	-0,009	0,873	-0,049	0,109	-0,039	-0,018	0,107	0,029	-0,088	0,044
D4V3Ind2	0,004	-0,044	0,047	-0,140	-0,143	-0,027	-0,011	0,884	-0,028	-0,002	0,036	0,023	-0,039	0,065	0,004	-0,079
D4V4Ind1	-0,137	0,096	0,138	0,146	-0,143	0,195	0,309	0,053	0,037	-0,036	-0,062	0,538	0,104	-0,376	0,027	-0,129
D4V4Ind2	-0,175	0,062	0,059	0,188	-0,057	0,130	0,053	0,098	-0,062	0,001	-0,003	-0,067	0,142	0,036	-0,816	0,004
D4V4Ind3	-0,205	-0,013	0,097	0,158	-0,245	-0,159	-0,076	0,260	-0,066	-0,289	0,035	0,255	0,150	0,533	0,027	0,248
D4V4Ind4	-0,086	-0,019	0,118	0,030	0,192	0,259	0,115	0,291	0,173	-0,277	0,190	0,302	0,505	0,023	-0,055	0,180
D5V1Ind1	0,736	0,080	0,039	-0,060	0,173	0,068	0,285	-0,031	-0,096	-0,090	0,253	-0,085	-0,145	-0,022	0,134	-0,031
D5V1Ind2	-0,092	-0,180	-0,093	0,059	-0,064	0,113	-0,226	-0,029	-0,015	0,020	0,026	0,814	0,154	0,170	0,045	-0,046
D5V1Ind3	0,578	0,387	0,175	-0,026	0,377	-0,068	0,025	0,039	-0,114	0,017	0,117	0,078	-0,203	-0,079	0,032	0,171
D5V1Ind4	-0,012	-0,113	0,157	-0,036	-0,132	0,064	-0,113	0,030	0,050	0,156	0,017	0,132	0,775	0,078	-0,139	-0,120
D5V1Ind5	0,254	0,460	-0,023	0,099	0,311	0,014	0,239	-0,213	-0,139	0,294	-0,010	-0,024	0,099	-0,251	0,038	0,003
D5V1Ind6	0,026	-0,180	0,125	0,067	0,166	0,201	0,073	0,047	0,141	0,112	0,084	0,015	0,085	0,739	-0,020	-0,157

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D5V2Ind1	0,085	0,038	-0,030	0,055	0,052	0,898	0,090	0,073	0,037	0,093	0,024	0,047	0,045	0,000	-0,067	0,059
D5V2Ind2	0,158	0,000	0,037	0,161	0,003	0,863	0,010	0,024	-0,005	-0,022	-0,070	0,125	0,094	0,112	-0,030	0,066
D5V3Ind1	0,002	-0,504	-0,081	0,292	-0,052	0,134	0,009	-0,080	-0,305	0,014	-0,128	-0,210	0,351	0,082	0,321	0,126
D5V3Ind2	-0,109	-0,650	-0,183	0,221	-0,114	0,013	-0,004	-0,019	-0,365	0,074	-0,136	-0,039	0,250	-0,102	0,310	-0,047
D5V4Ind1	-0,100	-0,874	-0,033	0,104	-0,030	0,041	-0,169	-0,080	-0,039	-0,024	0,115	0,115	-0,025	0,079	-0,013	0,000
D5V4Ind2	-0,052	-0,860	0,140	0,085	0,016	-0,027	-0,148	0,068	0,023	-0,081	0,009	0,091	-0,010	0,004	-0,043	-0,010

Tabla V.8. Matriz de cargas factoriales seleccionada para las unidades prácticas (método de rotación: Varimax).

Teniendo como base la Tabla V.8, hemos realizado la interpretación de cada una de las dieciséis componentes seleccionadas en este ACP para las UP, teniendo en cuenta aquellos indicadores con pesos que tienen una magnitud mayor, en valor absoluto, en cada componente. Dichos componentes se presentan por orden, de mayor a menor importancia, en función de la cantidad de variabilidad de los datos que explica cada una de ellas (aparecen de izquierda a derecha en la tabla).

Componente 1: Esta componente está relacionada con la escritura abundante de elementos de carácter verbal: observaciones y aclaraciones, explicaciones de los pasos y procesos seguidos al resolver los ejercicios y de las representaciones gráficas realizadas, registro de las mejoras hechas por el docente durante la corrección de ejercicios. Unido a la abundancia de registros de carácter verbal también se refleja la abundancia de registros de tipo simbólico. De forma secundaria aparecen ligadas con esta componente otros indicadores asociados a la escritura de representaciones verbales, aunque éstos aparecen con pesos mayores en otras componentes. A esta componente también aparecen ligado, aunque en sentido negativo, el respeto a los márgenes (hecho que puede tener cierta explicación, puesto que algunos de estos comentarios verbales se ubican en los márgenes en algunas ocasiones).

Hay seis indicadores con un peso muy alto en esta primera componente. Son el indicador D2V4Ind4, “Registro de las mejoras efectuadas por el profesor durante la corrección de actividades en el aula”, con un peso de 0’62; el indicador D3V1Ind1, “Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad”, con un peso de 0’77; el indicador D3V1Ind2, “Asiduidad en la escritura de pasos y procesos seguidos para resolver las actividades”, con un peso de 0’79; el indicador D3V1Ind3, “Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con las actividades de la parte práctica”, con un peso de 0’71; el indicador D5V1Ind1, “Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)”, con un peso de 0’74 y el indicador D5V1Ind3, “Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)”, con un peso de 0’58.

Además, hay otros cinco indicadores que tienen un peso alto en esta primera componente, pero menor que el caso de los seis anteriores. Son el indicador D1V1Ind1, “Información y referencia de los ejercicios”, con un peso de 0’38; el indicador D2V1Ind1, “Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente y posteriormente corregidas que se registran en la unidad”, con un peso de

0’43; el indicador D2V1Ind2, “Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente pero no corregidas posteriormente en el aula que se registran en la unidad”, con un peso de 0’49; el indicador D2V4Ind3, “Explicación de los errores cometidos que corrige”, con un peso de 0’34 y el indicador D3V1Ind4, “Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en las actividades que componen la parte práctica”, con un peso de 0’42.

No encontramos ningún indicador que tenga un peso negativo que sea igual o superior a 0’5 en magnitud dentro de esta componente. Sí que hay un indicador con un peso negativo superior, en magnitud, a 0’3. Es el indicador D1V2Ind3, “Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad”, con un peso de -0’46.

Componente 2: Esta componente está ligada con la presencia de un alto número de ejercicios planteados y, sobre todo, con el hecho de que el alumno intente resolverlos. También está fuertemente ligado a la presencia de errores en sus intentos de resolución, tanto aritmético-algebraicos como, sobre todo, en procesos propios del análisis matemático, bloque al que pertenecen las actividades. La relación entre ambos indicadores puede encontrar una explicación sencilla posible: la presencia de un mayor número de ejercicios intentados posibilita que puedan existir más errores de diferente tipo en esos intentos de resolución. De forma secundaria, la asiduidad en el uso de representaciones gráficas también aparece ligada a esta componente.

Hay dos indicadores que tienen un peso positivo muy alto en esta componente segunda. Son el indicador D2V1Ind2, “Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente pero no corregidas posteriormente en el aula que se registran en la unidad”, con un peso de 0’54 y el indicador D2V3Ind1, “Porcentaje (respecto del total) de actividades que se revelan intentadas por el alumno”, con un peso de 0’60. Además, hay otros cuatro indicadores con un peso alto en la componente, aunque menor que los dos anteriores. Son el indicador D2V1Ind1, “Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente y posteriormente corregidas que se registran en la unidad”, con un peso de 0’49; el indicador D2V2Ind2, “Grado de completitud de las actividades registradas que no fueron corregidas en el aula”, con un peso de 0’36; el indicador D5V1Ind3, “Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)”, con un peso de 0’39 y el indicador D5V1Ind5, “Asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos), con un peso de 0’46.

En esta componente existen cuatro indicadores con un peso negativo de gran magnitud. Son el indicador D5V3Ind1, “Ausencia de errores aritmético-algebraicos en la unidad”, con un peso de -0’50; el indicador D5V3Ind2, “Tipos de errores aritmético-algebraicos existentes en la unidad y nivel de gravedad que hemos asociado a los mismos”, con un peso de -0’65; el indicador D5V4Ind1, “Ausencia de errores en los procesos de resolución (no aritmético-algebraicos) desarrollados por el alumno en la unidad”, con un peso de -0’87 y el indicador D5V4Ind2, “Tipos de errores de proceso (no aritmético-algebraicos) existentes en la unidad y nivel de gravedad que hemos asociado a los mismos”, con un peso de -0’86. No hay ningún indicador más que tenga un peso negativo igual o superior, en valor absoluto, a 0’3.

Componente 3: Esta componente está enfocada en la presentación de la unidad, teniendo como indicadores de mayor peso la buena impresión de la unidad, su limpieza, y el tamaño y la legibilidad de la letra y los signos matemáticos utilizados. La componente también está ligada, de forma secundaria, a la claridad en la indicación de los cambios de ejercicios y al uso de notaciones y representaciones personales, aunque estos indicadores aparecen de un modo más claro en otras componentes.

Hay cinco indicadores que tienen un peso positivo muy alto en esta tercera componente. Son el indicador D1V2Ind1, “Primera impresión que causa la revisión general de la unidad”, con un peso de 0’65; el indicador D1V2Ind2, “Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma”, con un peso de 0’64; el indicador D1V2Ind6, “Tamaño de la letra, números y signos matemáticos”, con un peso de 0’58; el indicador D1V2Ind7, “Legibilidad de la letra”, con un peso de 0’72 y el indicador D1V2Ind8, “Legibilidad de los números y signos matemáticos”, con un peso de 0’67.

Además, hay otros dos indicadores con un alto peso en esta componente, aunque inferior a los cinco indicadores anteriores. Son el indicador D1V1Ind5, “Claridad en la indicación de los cambios de ejercicios cuando se producen (paso de unos a otros)”, con un peso de 0’46 y el indicador D1V3Ind3, “Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo”, con un peso de 0’35.

No existe ningún indicador con un peso negativo que sea superior, en magnitud, a 0’3.

Componente 4: Esta cuarta componente está ligada, principalmente y con un peso negativo de gran magnitud, a la presencia en la unidad de actividades a mayores de las propuestas por el docente. En menor medida también aparece la completitud de las actividades no corregidas en clase, en parte coincidentes con las anteriores. De forma secundaria se ligan a esta componente algunos indicadores de organización, que aparecen transversalmente en algún otro componente.

No hay ningún indicador que tenga en esta componente un peso igual o superior a 0’5. Sí que hay tres indicadores con un peso alto, igual o superior a 0’3, pero inferior a 0’5. Son el indicador D1V1Ind2, “Ausencia en la unidad de ejercicios de otros temas distintos del actual”, con un peso de 0’46; el indicador D1V1Ind3, “Orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase”, con un peso de 0’39 y el indicador D1V1Ind4, “Ausencia de ejercicios cuya resolución esté separada en varias partes de la unidad”, con un peso de 0’34.

En esta componente existen tres indicadores con un peso negativo de magnitud muy alta, especialmente dos de ellos. Son los indicadores D2V1Ind3, “Cantidad de actividades a mayores de las propuestas registradas en la unidad”, con un peso negativo de -0’90; el indicador D2V1Ind4, “Contenidos abarcados por las actividades a mayores de las propuestas que se registran en la unidad”, con un peso de -0’91 y el indicador D2V2Ind2, “Grado de completitud de las actividades registradas que no fueron corregidas en el aula”, con un peso de -0’50. Además, hay un indicador más con un peso negativo bastante alto, pero inferior en magnitud a 0’5. Es el indicador D1V2Ind6, “Tamaño de la letra, números y signos matemáticos”, con un peso de -0’39.

Componente 5: Esta componente está relacionada con la completitud de las actividades registradas en la unidad que son corregidas por el docente, así como de aquellas que el alumno no resuelve en su totalidad, y con la presencia de un alto número de ejercicios intentados por el alumno junto con una alta satisfacción en sus intentos de resolución. Además, hay un alto número de indicadores con un peso menor, secundario, en esta componente, indicadores que aparecen de forma más clara en otras componentes.

En esta componente hay tres indicadores que tienen un peso muy alto. Son el indicador D2V2Ind1, “Grado de completitud de las actividades registradas que fueron corregidas en el aula”, con un peso de 0’63; el indicador D2V3Ind1, “Porcentaje (respecto del total) de actividades que se revelan intentadas por el alumno”, con un peso de 0’50 y el indicador D2V3Ind2, “Grado de satisfacción en los intentos de resolución de las actividades que ha efectuado el alumno”, con un peso de 0’68.

Además, hay ocho indicadores con un peso alto en la componente, aunque inferior a 0'5. Son el indicador D1V1Ind3, "Orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase", con un peso de 0'42; el indicador D1V3Ind1, "Personalización en la organización de la unidad", con un peso de 0'42; el indicador D2V1Ind1, "Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente y posteriormente corregidas que se registran en la unidad", con un peso de 0'49; el indicador D2V2Ind2, "Grado de completitud de las actividades registradas que no fueron corregidas en el aula", con un peso de 0'30; el indicador D2V4Ind1, "Frecuencia en la corrección de sus errores al resolver las actividades", con un peso de 0'36; el indicador D2V4Ind5, "Compleción de actividades durante el proceso de corrección (registro de partes no desarrolladas o toma de resoluciones distintas de la del alumno)", con un peso de 0'42; el indicador D5V1Ind3, "Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)", con un peso de 0'38 y el indicador D5V1Ind5, "Asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos), con un peso de 0'31.

No existe ningún indicador que tenga un peso negativo en esta componente superior, en valor absoluto, a 0'3.

Componente 6: Esta componente se relaciona, fundamentalmente, con la precisión al transcribir elementos propios de la corrección de ejercicios realizada por el profesor en el aula. Además, se ligan a esta componente la ausencia de estilo propio en la organización de la unidad y la falta de compleción de las actividades que el alumno deja incompleta (lo cual guarda relación lógica con los indicadores de mayor peso: una menor transcripción de elementos hace más difícil la existencia de imprecisiones en la transcripción).

Encontramos dos indicadores con un peso muy alto en esta componente sexta. Son los indicadores D5V2Ind1, "Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta de dictados o copias", con un peso de 0'90 y el indicador D5V2Ind2, "Tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad que hemos asociado a los mismos", con un peso de 0'86. Además, hay otro indicador con un peso alto en esta componente, aunque muy inferior a los dos anteriores. Es el indicador D1V1Ind3, "Orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase", con un peso de 0'33.

No hay ningún indicador que tenga un peso negativo que sea, en valor absoluto, mayor o igual que 0'5. Sí que hay dos indicadores con un peso negativo superior o igual, en magnitud, a 0'3. Son el indicador D1V3Ind1, "Personalización en la organización de la unidad", con un peso de -0'40 y el indicador D2V4Ind5, "Compleción de actividades durante el proceso de corrección (registro de partes no desarrolladas o toma de resoluciones distintas de la del alumno)", con un peso de – 0'31.

Componente 7: Esta componente está asociada a la personalización que hace el alumno de la unidad como un instrumento que le sea útil a él mismo, puesto que tienen en ella gran peso indicadores como el uso de notaciones y representaciones personales, la explicación de los errores cometidos y la presencia de marcas de comprensión y de dudas por parte del propio estudiante. En menor medida, también está ligada a esta componente la presencia de comentarios, observaciones y aclaraciones escritas por el alumno.

Hay tres indicadores con un peso positivo muy alto en esta componente séptima. Son el indicador D1V3Ind3, "Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo", con un peso de 0'65; el indicador D2V4Ind3, "Explicación de los errores cometidos que corrige", con un peso de 0'70 y el indicador D3V1Ind4, "Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en las actividades que componen la parte práctica", con un peso de 0'60.

Además, hay otros dos indicadores que tienen un peso alto en esta componente, aunque inferior a los tres anteriores. Son el indicador D3V1Ind1, "Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad", con un peso de 0'33 y el indicador D4V4Ind1, "Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o con fonemas similares (b/v, ll/y, h)", con un peso de 0'31.

No existe ningún indicador que tenga un peso negativo en esta componente superior, en magnitud, a 0'3.

Componente 8: Esta componente está claramente ligada a la puntuación de la unidad: al uso de los signos de puntuación necesarios a lo largo de la unidad y a la corrección en su utilización.

Tan sólo son los dos indicadores sobre puntuación los que encontramos con pesos superiores en magnitud a 0’3. En particular, aparecen los dos con un peso positivo muy alto. Son el indicador D4V3Ind1, “Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad”, con un peso de 0’87 y el indicador D4V3Ind2, “Presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad”, con un peso de 0’88.

Componente 9: Esta componente está vinculada de forma clara con la corrección de los errores cometidos por el alumno al resolver las actividades y la claridad en la indicación de esos errores. Además, se liga a esta componente de forma secundaria la presencia de errores de tipo aritmético-algebraicos. Este hecho puede tener una explicación lógica en que para que puedan corregirse los errores es necesario que dichos errores existan.

Hay dos indicadores con un peso positivo muy alto en esta componente novena. Son el indicador D2V4Ind1, “Frecuencia en la corrección de sus errores al resolver las actividades”, con un peso de 0’77 y el indicador D2V4Ind2, “Claridad en la indicación de los errores cometidos que corrige”, con un peso de 0’74. No encontramos ningún indicador más con un peso positivo igual o superior a 0’3.

Tampoco hay indicadores que en esta componente tengan un peso negativo igual o superior, en valor absoluto, a 0’5. Sí que hay dos indicadores con un peso negativo igual o superior, en magnitud, a 0’3. Son el indicador D5V3Ind1, “Ausencia de errores aritmético-algebraicos en la unidad”, con un peso de -0’31 y el indicador D5V3Ind2, “Tipos de errores aritmético-algebraicos existentes en la unidad y nivel de gravedad que hemos asociado a los mismos”, con un peso de -0’37.

Componente 10: Componente asociada, principalmente, al tamaño e integración de las representaciones gráficas de la unidad, junto, de manera secundaria, a la presencia de explicaciones sobre lo que representan las mismas. Además, y aunque sin una relación clara con lo anterior, esta componente también está ligada a la presencia en la unidad de ejercicios correspondientes a temas distintos del que se desarrolla en ese momento.

Hay un indicador que tiene un peso positivo muy alto en esta componente, y es el indicador D1V2Ind5, “Tamaño e integración de los dibujos, esquemas o gráficos”, con un peso de 0’84. Además, dos indicadores que también tienen un peso alto en esta componente, aunque menor que 0’5. Son el indicador D1V1Ind5, “Claridad en la indicación de los cambios de ejercicios cuando se producen (paso de unos a otros)”, con un peso de 0’34 y el indicador D3V1Ind3, “Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con las actividades de la parte práctica”, con un peso de 0’35.

No hay ningún indicador que tenga, en esta componente, un peso negativo igual o superior, en valor absoluto, a 0’5. Sí que hay un indicador con un peso negativo igual o superior, en magnitud, a 0’3. Es el indicador D1V1Ind2, “Ausencia en la unidad de ejercicios de otros temas distintos del actual”, con un peso de -0’44.

Componente 11: Esta componente está ligada con varios aspectos asociados a la organización de la unidad. El principal y con mayor peso es la correcta utilización y distribución de los espacios en la unidad, aunque también aparecen, de forma secundaria, otros indicadores como la referencia adecuada de los ejercicios de la unidad, la claridad en el paso de unos a otros o la impresión causada por la unidad en un primer vistazo de la misma.

Hay un indicador cuyo peso es muy alto en esta componente, es el indicador D1V2Ind4, “Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco”, con un peso de 0’83. Además, hay otros cuatro indicadores con un peso alto, aunque inferior al del indicador anterior. Es el caso del indicador D1V1Ind1, “Información y referencia de los ejercicios”, con un peso de 0’41; el indicador D1V1Ind5, “Claridad en la indicación de los cambios de ejercicios cuando se producen (paso de unos a otros)”, con un peso de 0’46; el indicador D1V2Ind1, “Primera impresión que causa la revisión general de la unidad”, con un peso de 0’36 y el indicador D2V2Ind1, “Grado de completitud de las actividades registradas que fueron corregidas en el aula”, con un peso de 0’32.

No hay ningún indicador que tenga, en esta componente, un peso negativo que sea igual o superior, en magnitud, a 0’3.

Componente 12: Esta componente aparece fuertemente vinculada con dos indicadores que, a priori, no aparentan tener una relación clara. Uno de ellos, el principal, es la precisión de las representaciones de tipo verbal que el alumno realiza en la unidad. El otro es un indicador de tipo ortográfico: la ausencia de faltas de ortografía asociadas al uso incorrecto de grafemas.

En esta componente hay dos indicadores con un peso muy alto, a los que ya hemos hecho referencia implícitamente en el párrafo anterior. Son el indicador D4V4Ind1, "Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o con fonemas similares (b/v, ll/y, h)", con un peso de 0'54 y el indicador D5V1Ind2, "Utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)", con un peso de 0'81.

Además, hay otros dos indicadores con un peso alto, pero inferior a 0'5. Son el indicador D1V2Ind3, "Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad", con un peso de 0'31 y el indicador D4V4Ind4, "Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde", con un peso de 0'30.

En esta componente no hay ningún indicador con un peso negativo que sea igual o superior, en valor absoluto, a 0'3.

Componente 13: Esta componente es de una naturaleza similar a la anterior, volviendo a focalizarse en un indicador de precisión y en otro de carácter ortográfico. En este caso, la componente está ligada, principalmente, a la precisión de las representaciones de carácter simbólico que realiza el alumno en la unidad; complementándose con la acentuación adecuada en la unidad. Además, de forma secundaria aparece la ausencia de errores de tipo aritmético-algebraico, que podría estar ligado con la precisión de las representaciones simbólicas anteriormente comentada.

Hay dos indicadores que tienen un peso muy alto en esta componente. Son el indicador D4V4Ind4, "Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde", con un peso de 0'51 y el indicador D5V1Ind4, "Utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)", con un peso de 0'78.

Además, hay un indicador más que tiene un peso alto, aunque inferior al de los dos indicadores anteriores. Es el indicador D5V3Ind1, "Ausencia de errores aritmético-algebraicos en la unidad", con un peso de 0'35.

Componente 14: La componente decimocuarta vuelve a tener una naturaleza similar a las dos componentes anteriores. Está vinculado, principalmente, a la precisión en las representaciones gráficas realizadas por el alumno, complementándose con un indicador ortográfico: el uso adecuado de las mayúsculas. Existen algunos indicadores con peso negativo de forma secundaria, indicadores que ya aparecían en componentes previas de una forma más marcada.

Hay dos indicadores que tienen un peso muy alto en esta componente. Son el indicador D4V4Ind3, “Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de mayúsculas”, con un peso de 0’53 y el indicador D5V1Ind6, “Utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)”, con un peso de 0’74. No hay ningún otro indicador con un peso positivo que sea igual o superior a 0’3.

Tampoco hay ningún indicador con un peso negativo que tenga magnitud igual o superior a 0’5, pero sí que hay dos indicadores con un peso negativo que, en valor absoluto, es igual o superior a 0’3. Esos dos indicadores son el indicador D2V4Ind4, “Registro de las mejoras efectuadas por el profesor durante la corrección de actividades en el aula”, con un peso de -0’35 y el indicador D4V4Ind1, “Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o con fonemas similares (b/v, ll/y, h)”, con un peso de -0’38.

Componente 15: Esta componente está vinculada, principalmente y con un fuerte peso negativo, a la ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras. Esta componente se complementa de forma positiva, además, con varios indicadores ya aparecidos en componentes anteriores, como la escritura de enunciado o referencia de los ejercicios o la ausencia de errores aritmético-algebraicos.

No hay ningún indicador que tenga un peso positivo muy alto en esta componente. Sí que hay cuatro indicadores con un peso alto, pero inferior a 0’5. Esos indicadores son el indicador D1V1Ind1, “Información y referencia de los ejercicios”, con un peso de 0’33; el indicador D1V1Ind5, “Claridad en la indicación de los cambios de ejercicios cuando se producen (paso de unos a otros)”, con un peso de 0’36; el indicador D5V3Ind1, “Ausencia de errores aritmético-algebraicos en la unidad”, con un peso de 0’32 y el indicador D5V3Ind2, “Tipos de errores aritmético-algebraicos existentes en la unidad y nivel de gravedad que hemos asociado a los mismos”, con un peso de 0’31.

En esta componente hay un indicador con un peso negativo que es igual o superior, en valor absoluto, a 0’5. Es el indicador D4V4Ind2, “Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras”, que tiene un peso de -0’82. No hay ningún otro indicador que tenga, en esta componente, un peso negativo que sea igual o superior, en magnitud, a 0’3.

Componente 16: Esta componente está vinculada fuertemente al hecho de rehacer aquellos ejercicios que el estudiante ha intentado resolver de forma poco satisfactoria. Además, aparece ligado a la presencia de ejercicios cuya resolución está partida en varios trozos en la unidad, lo cual es lógico, en cierta medida, puesto que cuando se rehace el ejercicio (por ejemplo, copiando la corrección que del mismo se hace en el aula) puede no hacerse inmediatamente a continuación del intento del alumno.

En esta componente tan sólo hay un indicador con un peso positivo igual o superior a 0'5. Es el indicador D2V4Ind6, "Rehacimiento de ejercicios con pobres intentos de resolución (con grado de satisfacción 1 ó 2) o de apartados erróneos", con un peso de 0'80. No hay ningún indicador más que tenga un peso positivo igual o superior a 0'3.

Al igual que sucede con los pesos positivos, sólo hay un indicador que tenga un peso negativo que sea igual o superior, en valor absoluto, a 0'5. Es el indicador D1V1Ind4, "Ausencia de ejercicios cuya resolución esté partida en varias partes de la unidad", con un peso de -0'54. Además, no hay ningún indicador más que tenga un peso negativo con una magnitud igual o superior a 0'3.

V.3. ANÁLISIS CLÚSTER O DE CONGLOMERADOS

Tras los dos pasos anteriores, tenemos determinadas una serie de componentes, tanto en las UT como en las UP, con las que hemos conseguido reducir la dimensionalidad de los datos conservando gran parte de la información que explica la variabilidad de éstos, y con la ventaja de ser componentes incorreladas entre sí.

Como ya hemos indicado antes, una vez seleccionadas las componentes que iban a considerarse como principales, y el método de rotación que mejor explicaba el significado de las diferentes componentes, hemos calculado qué valor tenía cada una de las unidades de registro en las nuevas componentes. Lo hemos hecho haciendo uso del programa SPSS y a través del método de regresión, un método que estima esos valores utilizando el método de los mínimos cuadrados.

Así, se han transformado los datos que tenemos de cada unidad. Anteriormente, teníamos las valoraciones que habíamos otorgado a cada indicador (en la escala 1-5, con valoraciones enteras y permitiendo las valoraciones intermedias de forma excepcional) en cada una de las unidades, ya fueran teóricas o prácticas. Ahora, tenemos las puntuaciones en cada componente de cada una de las unidades participantes, obtenidas usando el método de regresión a partir de las valoraciones de los indicadores y los pesos de cada indicador en cada componente. Como ya hemos comentado anteriormente, las variables con las puntuaciones de las unidades en cada componente son incorreladas para cada pareja de componentes, y, además, son variables tipificadas, con media 0 y desviación típica 1. Este hecho es relevante puesto que homogeneiza el papel que van a jugar las componentes en el análisis posterior que vamos a realizar, evitando que existan problemas de descompensación entre ellas, derivados de la presencia de componentes con magnitudes muy diferentes entre sí.

Nuestro objetivo primordial al realizar este análisis cuantitativo era el de obtener propuestas de agrupamiento de unidades que presentaran características comunes, y que formarían y darían lugar a diferentes perfiles de elaboración de dichas unidades, ya sean UT o UP. Para realizar esa tarea de descubrir posibles agrupaciones de las unidades, las técnicas más adecuadas son las técnicas de *análisis clúster* o, en castellano, *análisis de conglomerados*. En la siguiente cita textual de su trabajo, Everitt *et al*. (2011) explican cuál es el objetivo que pretenden conseguir estas técnicas:

> Cluster analysis techniques are concerned with exploring data sets to assess whether or not they can be summarized meaningfully in terms of a relatively small number of groups or clusters of objects or individuals which resemble each other and which are different in some respects from individual in other clusters (p. 13).

Así pues, utilizaremos técnicas propias del análisis clúster para obtener diferentes formas en que pueden agruparse las unidades, según éstas presenten semejanzas para algunas componentes o se diferencien en otras: el objetivo es la creación de grupos que tengan la máxima homogeneidad dentro de cada uno y la mayor diferencia entre unos y otros (De la Fuente, 2011a). No obstante, como bien señalan Everitt *et al*. (2011), un mismo conjunto de objetos puede clasificarse de diferentes maneras alternativas, por lo que no deben juzgarse estas en términos de una teoría científica, de su verdad o falsedad, sino en términos de la utilidad que tenga la clasificación para el investigador o para la comunidad científica.

En nuestro caso, en los dos pasos anteriores ya hemos tenido que realizar elecciones para poder continuar nuestro análisis, todas ellas justificadas de acuerdo a criterios de pertinencia y adecuación. Ejemplos son el modo en que hemos tratado las valoraciones no existentes en la matriz de datos inicial (explicado en el apartado V.1), el número de componentes principales que se han seleccionado para los dos tipos de unidades o el método de rotación utilizado para explicar el significado de las componentes (apartado V.2). En este apartado también vamos a tener que tomar decisiones asociadas al desarrollo del análisis clúster, encaminadas a la obtención de una solución más útil y adecuada, sin olvidar que la aplicación de otras técnicas de análisis clúster podría generar otras posibles agrupaciones de los datos que podrían tener su interés.

El análisis clúster que vamos a desarrollar tiene un carácter de exploración de los datos, puesto que no partimos con ninguna organización previa de dichos datos que se busque contrastar, sino que pretendemos obtener posibles agrupaciones a través del análisis. La cantidad de componentes existente (trece para las UT y dieciséis para las UP) no nos permite, tampoco, recurrir a técnicas gráficas de representación de la información que nos permitieran establecer hipótesis sobre la organización de los datos, puesto que el número de dimensiones que tendrían dichos gráficos hace inviable esa representación.

Hemos optado, tanto para las unidades teóricas como las prácticas, por desarrollar un análisis clúster de tipo *jerárquico*, por varios motivos. El primero es que desconocemos a priori cuál es el número de grupos o de clústeres más adecuado para la organización de los datos, algo que no es necesario conocer para desarrollar un análisis de tipo jerárquico. El segundo es que un análisis clúster de tipo jerárquico nos permite establecer diferentes niveles de división de los datos. Este tipo de análisis nos puede permitir la detección de grandes grupos o clústeres con unidades que presenten algunas características comunes pero que, dentro de estos grandes grupos, puedan presentarse algunas diferencias en otras características.

El análisis clúster utiliza técnicas de tipo numérico basadas en la distancia o técnicas de *similaridad* entre los diferentes elementos. En nuestro caso, cada uno de los elementos (cada unidad, bien teórica o bien práctica) estará representada por un vector, cuyas coordenadas son los valores que tiene la unidad para cada una de las componentes. La medida numérica para valorar la distancia entre dos unidades será la distancia entre esos dos vectores. De entre todas las distancias posibles que pueden utilizarse (cualquier aplicación que cumpla los requisitos de distancia o métrica), hemos utilizado la distancia euclídea elevada al cuadrado, que es la que utiliza por defecto el programa SPSS. La elección de esta distancia está basada en la adecuación de la misma para nuestros propósitos: esta distancia minimiza las diferencias existentes en valores cercanos de las componentes (y los minimiza mucho más cuanto más próxima a cero sea esa distancia), mientras que maximiza distancias amplias en componentes, que sean superiores a la unidad, y que indican una diferencia importante entre las dos unidades para esa determinada componente. Además, posteriormente se suman todas estas diferencias al cuadrado, lo que nos da una muestra de la diferencia global considerando todas las componentes.

Según podemos leer en De la Fuente (2011a), existen dos tipos de análisis clúster jerárquicos: los *aglomerativos* y los *disociativos.* Los *aglomerativos* parten de considerar cada elemento como un clúster y el análisis, a través de sucesivos pasos, va fusionando aquellos clústeres con menor distancia (o con mayor *similaridad*) entre sí. Los *disociativos* siguen la filosofía inversa: comienzan considerando un gran clúster que contiene a todos los elementos y, progresivamente, van dividiendo este gran clúster separando los elementos con mayor distancia (o con menor *similaridad*) con respecto a los clústeres formados por los restantes individuos. En ambos casos obtenemos como resultado un *dendograma*, un diagrama en forma de árbol en el que se recogen todas las fusiones o separaciones producidas en los clústeres, además del nivel en que se ha producido cada una de ellas, en función de la distancia entre los clústeres.

En un análisis jerárquico es necesario, además, establecer cómo va a medirse la distancia entre grupos o clústeres a partir de la distancia determinada entre elementos. Existen varias opciones, que tienen en cuenta las distancias entre los elementos que los conforman. Entre ellas están: el método del *linkage simple*, que utiliza como distancia entre grupos el mínimo de las distancias entre sus elementos, el método del *linkage completo*, que utiliza el máximo de las distancias en lugar del mínimo, el método del *promedio del grupo*, que utiliza la media aritmética de las distancias de todos los pares de elementos posibles, considerando cada uno en uno de los grupos o el método del *centroide*, que calcula las distancias entre los centros de gravedad de ambos grupos. Ejemplos de aplicación de estas distancias entre grupos pueden verse en Everitt y Dunn (2001), en Everitt *et al*. (2011) o en De la Fuente (2011a).

En el análisis que vamos a desarrollar a continuación, hemos optado por desarrollar un análisis clúster de tipo *aglomerativo*, al ser el que consideramos más natural en nuestra situación, donde se parte de todas las unidades por separado y se pretende ir agrupando en el mismo clúster a aquellas que tengan mayor número de características comunes. Además, en lugar de utilizar una distancia concreta entre clústeres, nos hemos decantado por utilizar el método de Ward, que agrupa los clústeres de tal manera que la suma de las distancias entre los miembros de cada conglomerado sea mínima para cada nueva unión, es decir, que busca la minimización de la varianza dentro del propio clúster. Este método, como leemos en De la Fuente (2011a), tiene una ventaja muy apreciable para nosotros: la formación de grupos con mayor homogeneidad en sus miembros, además de crear grupos con tamaños similares.

Explicamos a continuación el desarrollo del análisis clúster, con todas las consideraciones y elecciones anteriores. Como en el apartado anterior, hemos dividido la explicación en dos subapartados, uno para cada tipo de unidades. El primer subapartado explica el análisis clúster llevado a cabo con las UT. El segundo apartado hace lo propio con las UP.

V.3.1. ANÁLISIS CLÚSTER EN LAS UNIDADES TEÓRICAS

Hemos llevado a cabo el análisis clúster utilizando el programa SPSS, con las consideraciones anteriormente comentadas: análisis clúster jerárquico, de tipo *aglomerativo*, utilizando la distancia euclídea al cuadrado y el método de Ward. El dendograma obtenido en este análisis se muestra en la Figura V.3:

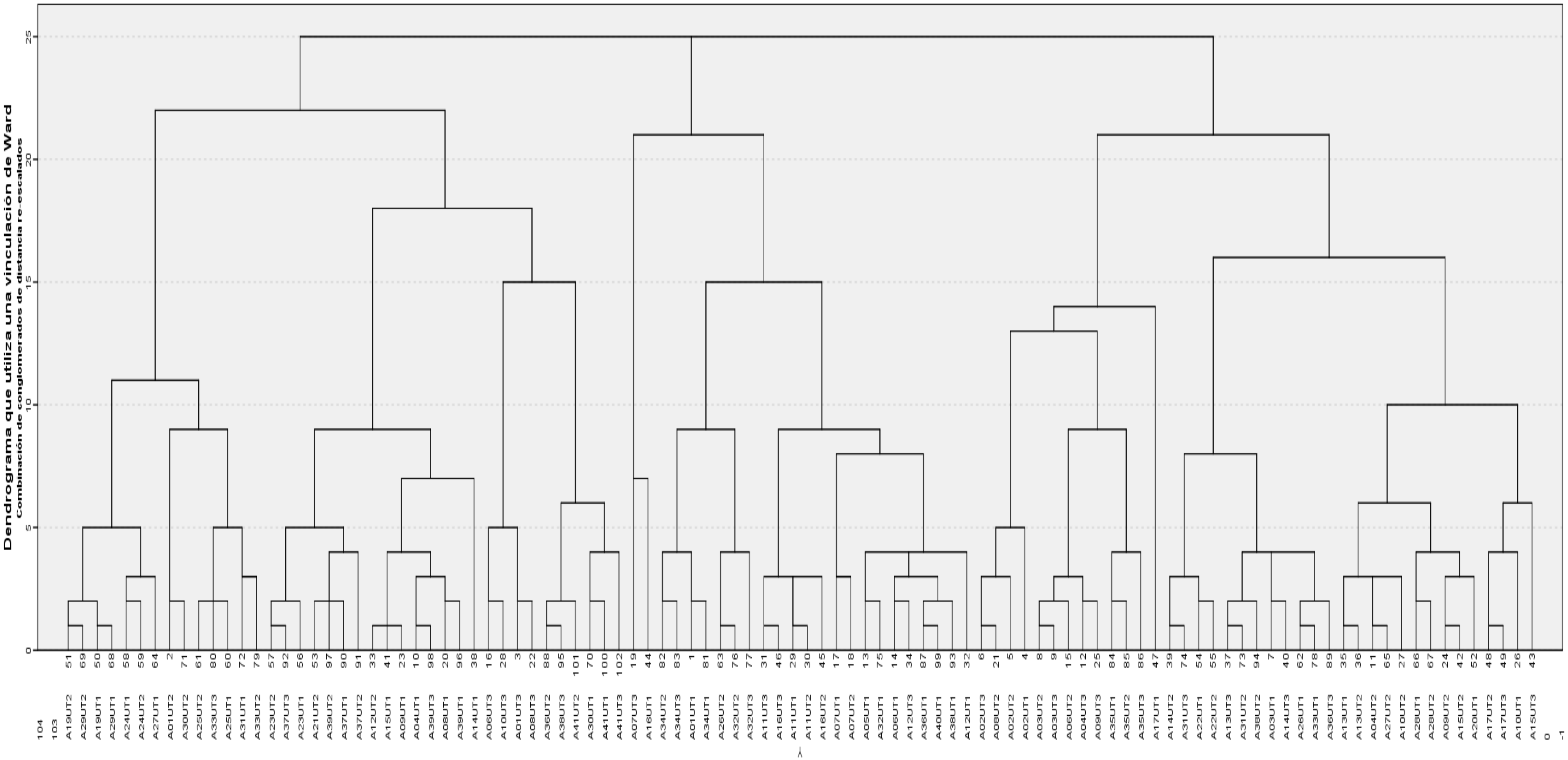


Figura V.3. Dendograma para el análisis clúster en las unidades teóricas.

Un estudio visual del dendograma nos muestra la presencia de unos últimos pasos en los que se agrupan, casi al mismo nivel (el escalado y el redondeo a valores enteros que se produce en el gráfico provocan que se vean al mismo nivel) tres grupos o clústeres diferentes que contienen, cada uno de ellos, un número apreciable de unidades teóricas. Además, si bajamos a niveles previos, observamos cómo cada uno de estos tres grandes grupos se divide en otros dos, pareciendo bastante clara esta división especialmente en los grupos que se configuran en la parte central y más a la derecha del dendograma.

Estudiamos a continuación qué información nos proporciona cada una de estas grandes divisiones obtenidas en los últimos pasos del análisis jerárquico *aglomerativo*, y qué características tienen las UT que los componen. Primero, de los tres grandes grupos que terminan fusionándose en el grupo total. Posteriormente, considerando los dos subgrupos que dan lugar a cada uno de los tres grandes grupos.

Estudio de los tres grandes grupos de unidades teóricas: contraste de medias en las diferentes componentes

En la parte del dendograma que está más a la izquierda en la Figura V.3, todas las unidades existentes terminan confluyendo en un gran grupo, que llamaremos Gran Grupo para las Unidades Teóricas 1 (de ahora en adelante, GGT1), y que consta de 39 unidades. En la Figura V.4 se muestra un recorte del dendograma de la Figura V.3, en el que están representados los elementos que conforman este Gran Grupo y su fusión progresiva para dar lugar al GGT1.

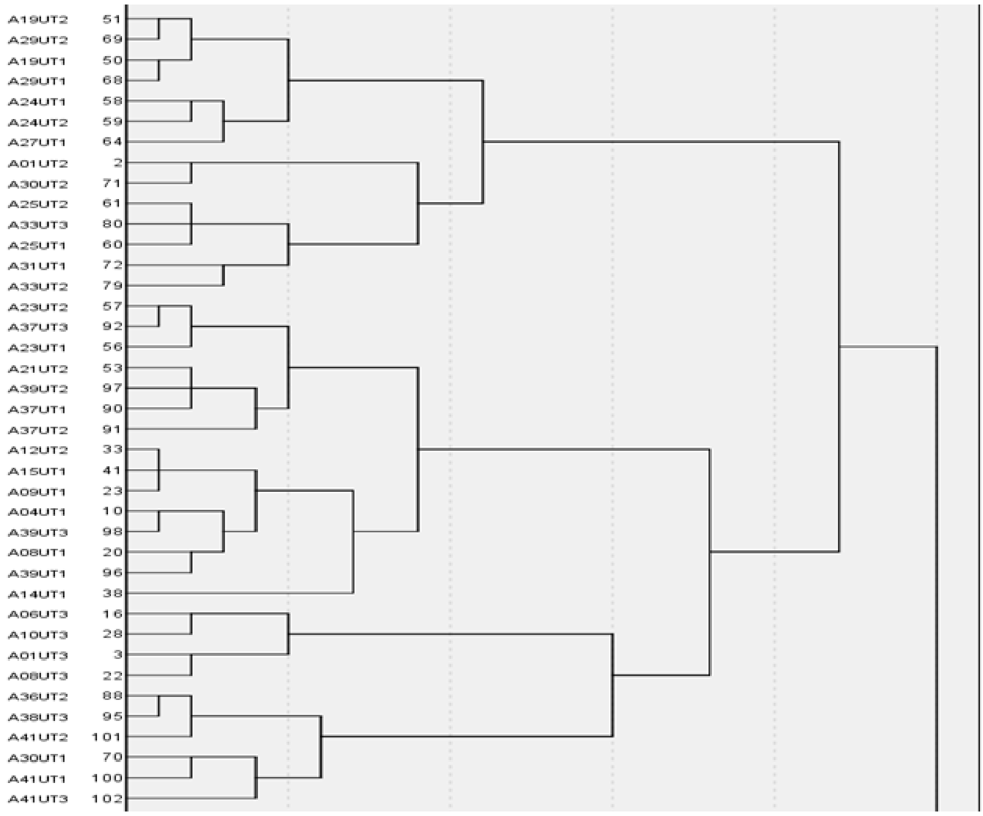


Figura V.4. Extracto del dendograma correspondiente al GGT1 formado.

En la parte central del dendograma, las unidades se fusionan progresivamente en un gran grupo, al que llamaremos Gran Grupo para las Unidades Teóricas 2 (de ahora en adelante, GGT2). Este grupo consta de 24 unidades. La Figura V.5 muestra el extracto del dendograma que contiene los elementos que conforman este GGT2 y la constitución del mismo a partir del agrupamiento progresivo de sus miembros.

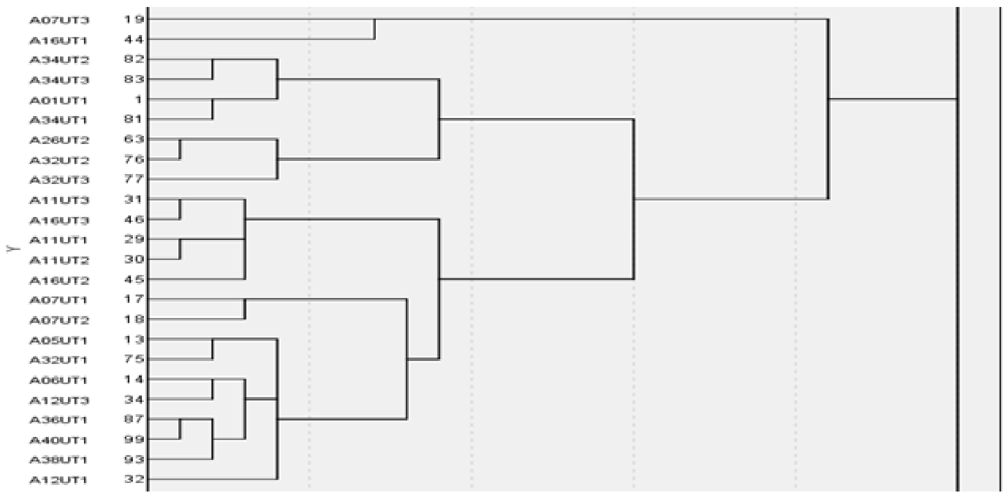


Figura V.5. Extracto del dendograma correspondiente al GGT2 formado.

Por último, en la parte más a la derecha del dendograma de la Figura V.3 las unidades se fusionan de modo progresivo para dar lugar a otro gran grupo: el Gran Grupo para las Unidades Teóricas 3 (de ahora en adelante, GGT3). Consta de 39 elementos. La Figura V.6 muestra la parte del dendograma que contiene los elementos que conforman este Gran Grupo y la formación progresiva de éste.

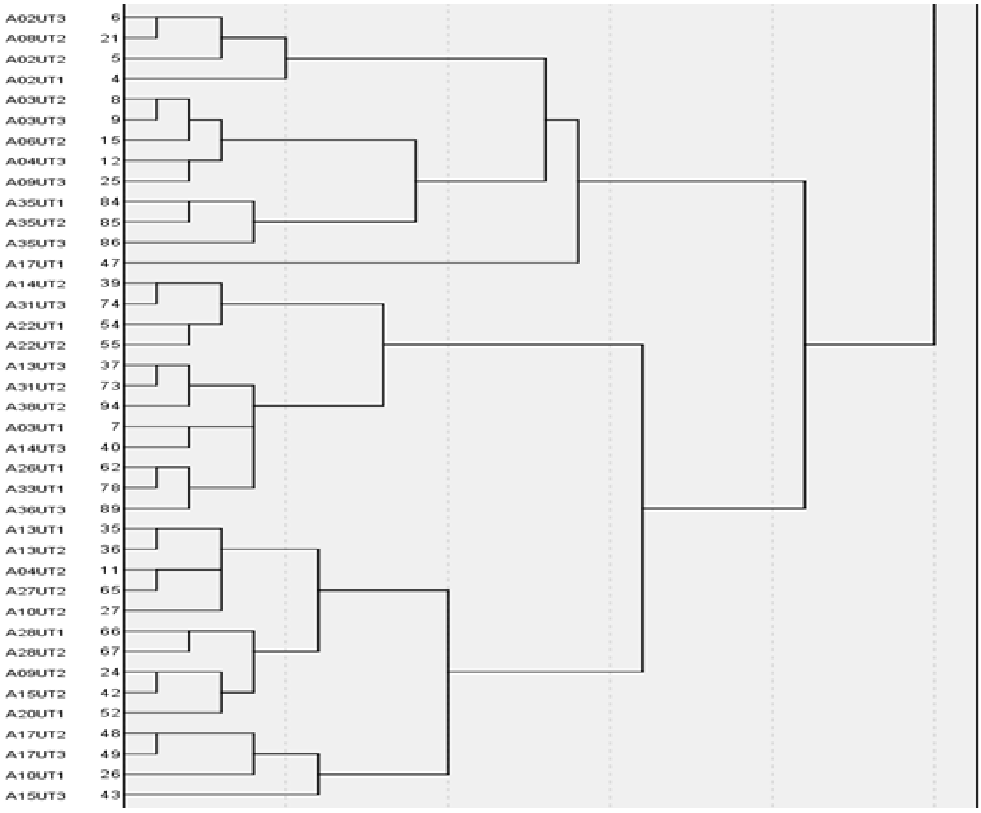


Figura V.6. Extracto del dendograma correspondiente al GGT3 formado.

Una vez detectada la presencia de estos tres grandes grupos entre las unidades teóricas, necesitamos conocer qué es lo que caracteriza a cada uno de ellos: cuáles son sus características comunes y qué es lo que les diferencia de los restantes grandes grupos. Para realizar este estudio, tomamos como datos base la media y la desviación típica en cada componente de los miembros pertenecientes a cada uno de los grandes grupos. Dichos datos están en las Tablas V.9 y V.10, que se presentan a continuación, partiendo la información en dos tablas para una mejor lectura de los datos que contienen. La Tabla V.9 contiene las medias de las componentes 1 a 7 de cada uno de los tres grandes grupos, mientras que la Tabla V.10 presenta esa información para las componentes 8 a 13.

Gran Grupo Teórico		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7
GGT1	M	0,2182	-0,3440	0,2306	-0,1169	-0,3008	0,0413	0,1434
	N	39	39	39	39	39	39	39
	DT	0,9934	0,8016	1,2005	0,7655	0,8934	1,0498	1,0128
GGT2	M	-0,1070	0,1211	-0,3356	-0,3999	0,0204	0,6268	0,1701
	N	24	24	24	24	24	24	24
	DT	0,9816	0,9328	0,8255	1,4716	1,0167	0,7259	1,0586
GGT3	M	-0,1524	0,2694	-0,0241	0,3630	0,2882	-0,4270	-0,2481
	N	39	39	39	39	39	39	39
	DT	1,0040	1,1329	0,8234	0,7148	1,0275	0,8944	0,9226

Tabla V.9. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 1 a 7 en los tres grandes grupos teóricos.

Gran Grupo Teórico		Componente 8	Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13
GGT1	M	-0,2616	-0,2289	0,1115	-0,0741	0,3636	-0,6861
	N	39	39	39	39	39	39
	DT	0,6927	0,8710	0,7158	1,0501	1,2116	0,8816
GGT2	M	-0,1656	0,3743	-0,9329	0,2080	-0,1935	0,5649
	N	24	24	24	24	24	24
	DT	0,5900	1,1053	0,9989	1,1077	0,8594	0,7927
GGT3	M	0,3635	-0,0014	0,4625	-0,0539	-0,2446	0,3385
	N	39	39	39	39	39	39
	DT	1,3207	1,0087	0,8716	0,8812	0,7225	0,8356

Tabla V.10. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 8 a 13 en los tres grandes grupos teóricos.

Para progresar en la caracterización de cada uno de los tres grandes grupos para las UT vamos a estudiar si existen o no diferencias estadísticamente significativas en las medias de cada uno de los grupos en cada una de las trece componentes principales. Consideramos que el estudio de la existencia de posibles diferencias estadísticamente significativas entre la media de los grupos nos ayuda a detectar características que representan a un grupo y que lo diferencian de los grupos restantes.

Con ese objetivo hemos realizado pruebas estadísticas de contraste de medias para estudiar la existencia de dichas diferencias significativas en las medias. La prueba escogida dependerá de si las componentes en los grandes grupos cumplen o no con los criterios de normalidad y de homocedasticidad (u homogeneidad de varianzas) en cada una de las componentes. En el caso de que sí se cumplan ambos criterios en todos los grandes grupos para una componente, la prueba que realizaremos será una prueba ANOVA. En el caso de que no se cumpla alguno de los criterios en alguno de los grandes grupos para una componente, llevaremos a cabo una prueba equivalente a la anterior pero no paramétrica: la prueba de Kruskal-Wallis.

Para ello, lo primero que se ha estudiado es si las componentes en cada uno de los tres grandes grupos teóricos tienen una distribución que puede considerarse estadísticamente como normal o no. Los tres grupos tienen un número de unidades que es inferior a 50, por lo que se ha aplicado la prueba de Shapiro-Wilk como prueba de normalidad. El nivel de significación estadística que hemos establecido en el contraste de hipótesis es de 0´05 (confianza del 95%). Los resultados de la aplicación de esta prueba pueden verse en el Anexo D.10, donde se muestra el estadístico y el p-valor que nos indica si se acepta o se rechaza la hipótesis de que los valores provengan de una población normalmente distribuida.

De la aplicación de esta prueba obtenemos que la distribución de los tres grandes grupos en cinco de las componentes (componentes 2, 3, 6, 7 y 13) sí ha superado la prueba de normalidad. Sin embargo, en el resto de componentes (las numeradas como 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11 y 12) existe al menos uno de los grupos donde se ha rechazado la hipótesis de normalidad en su distribución, lo que imposibilita la realización de un análisis ANOVA en este segundo bloque de componentes.

En las cinco componentes en las que la distribución de todos los grupos ha superado el test de normalidad, hemos llevado a cabo una prueba de homocedasticidad, o de homogeneidad de varianzas. El estadístico que hemos utilizado para efectuar esta prueba ha sido el estadístico de Levene, realizando el análisis con el programa SPSS. La Tabla V.11 refleja los resultados obtenidos: el valor para el estadístico y el p-valor correspondiente. Hemos utilizado el mismo nivel de significación que anteriormente (0´05). En dicha tabla hemos señalado en color verde aquellos p-valores que nos indican que se acepta la hipótesis contrastada (la igualdad de las varianzas en los tres grandes grupos). Con color rojo se han marcado las celdas con p-valores que marcan el rechazo de esta hipótesis de igualdad de varianzas. En estos casos últimos casos, tampoco puede llevarse a cabo el análisis ANOVA.

Número de componente	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Signif. (p-valor)
Componente 2	1,477	2	99	0,233
Componente 3	4,013	2	99	0,021
Componente 6	3,470	2	99	0,035
Componente 7	0,301	2	99	0,741
Componente 13	0,101	2	99	0,904

Tabla V.11. Valores y significatividad al aplicar la prueba de Levene en los GGT.

Las pruebas de normalidad y de homocedasticidad nos indican que únicamente en las componentes 2, 7 y 13 se cumplen los requisitos necesarios para poder aplicar un análisis ANOVA con el que realizar un contraste de las medias de las distribuciones de los tres grandes grupos en esas componentes.

El análisis ANOVA nos indica si se acepta o se rechaza la igualdad de medias en una componente para los tres grandes grupos, con el nivel de significación fijado (en nuestro caso, 0'05). Pero este análisis no nos indica cuáles son las parejas de grupos en las que se presentan diferencias estadísticamente significativas y en cuáles no. Por ello, en los casos donde el análisis ANOVA rechace la igualdad de medias, es necesario completar este análisis con un análisis post-hoc por parejas, que nos indique cuáles son las parejas en las que se rechaza la igualdad. En nuestro caso, hemos recurrido a dos análisis post-hoc: el análisis de Scheffé y el de Bonferroni, para detectar qué parejas de grupos presentan medias cuya diferencia puede considerarse significativa. De nuevo, el nivel de significación fijado ha sido de 0'05, aunque hemos bajado ese nivel a 0'1 para detectar un mayor número de parejas en las que se rechace la igualdad de medias, aunque sea con una significatividad menor, y así obtener algo más de información sobre todas las componentes.

En el resto de componentes (componentes 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 y 12) se ha llevado a cabo un análisis equivalente al anterior, pero utilizando métodos no paramétricos, que no necesitan que las distribuciones tengan un modelo concreto. El análisis efectuado en estas componentes ha sido el de Kruskal-Wallis. Al igual que para el análisis ANOVA, en aquellos casos donde en una componente sea rechazada la igualdad de distribuciones de los tres grandes grupos, es necesario llevar a cabo un análisis post-hoc por parejas que estudie en qué parejas se obtiene ese rechazo de la hipótesis de forma estadísticamente significativa. El análisis post-hoc que hemos llevado a cabo es el test de Dunn-Bonferroni, test que proporciona automáticamente

SPSS en el caso de que se rechace la igualdad de distribuciones en una componente. Los niveles de significación, tanto para el análisis de Kruskal-Wallis como para el test post-hoc de Dunn-Bonferroni, han sido los mismos que comentábamos para la prueba ANOVA y sus correspondientes pruebas post-hoc por parejas.

Detallamos a continuación, componente por componente, cuáles han sido los resultados que hemos obtenido al llevar a cabo los contrastes de medias que acabamos de explicar. Estos resultados nos permitirán caracterizar mejor cada uno de los tres grandes grupos.

COMPONENTE 1

En esta componente no se ha cumplido el criterio de normalidad de la distribución en todos los grupos (en concreto, no se supera la prueba de normalidad en el grupo GGT2), por lo que hemos aplicado el análisis no paramétrico de Kruskal-Wallis. Al realizar este análisis con SPSS hemos obtenido un valor de 3’718 para el estadístico de la prueba, con un p-valor asociado de 0’156, superior a 0’05. Por lo tanto, **aceptamos la hipótesis estadística de que las distribuciones de esta componente en cada uno de los tres grandes grupos son iguales.**

COMPONENTE 2

En esta componente sí que se ha cumplido tanto el criterio de normalidad en la distribución de todos los grupos como el de homocedasticidad, por lo que hemos aplicado el análisis ANOVA.

Al efectuar este análisis ANOVA de un factor obtenemos un valor del estadístico F(2,99)=4’141, con p=0’019, por lo que se rechaza en esta componente la igualdad de medias en los tres grandes grupos. Tanto el análisis post-hoc de Scheffé como el de Bonferroni informan del rechazo para la hipótesis de la igualdad de medias en tan sólo una de las parejas formadas: la pareja formada por los grandes grupos GGT1 y GGT3, puesto que, para ambos tests, el 0 no pertenece al intervalo de confianza al 95% determinado para la diferencia de las medias y el p-valor es inferior a 0’05. En el caso del test de Scheffé el intervalo de confianza obtenido es (-1’159, -0’067), con un p-valor de 0’024; en el caso del test de Bonferroni dicho intervalo es (-1’148, -0’078), con un p-valor de 0’019. Para el resto de parejas, el intervalo de confianza determinado para la diferencia de medias sí que contiene al 0 y el p-valor obtenido es superior no sólo a 0’05, sino también a 0’1 (si estableciéramos 0’1 como nivel de significación), por lo que se acepta la hipótesis de la igualdad de medias en las parejas restantes.

En resumen, para esta componente obtenemos una diferencia significativa de medias: **la media de la componente 2 en el grupo GGT3 es significativamente superior a la media de esta componente en el grupo GGT1**.

COMPONENTE 3

En esta componente sí que se ha cumplido el criterio de normalidad de la distribución en los tres grandes grupos, pero no así el criterio de homocedasticidad. Por tanto, hemos aplicado en esta componente la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. Al desarrollar esta prueba con SPSS hemos obtenido un valor para el estadístico de la prueba de 3’689, asociado a un p-valor de 0’158, superior a 0’05. Por lo tanto, **aceptamos la hipótesis estadística de que las distribuciones en los tres grandes grupos de esta componente 3 son iguales**.

COMPONENTE 4

La prueba de normalidad tan sólo ha sido superada en uno de los tres grandes grupos (en el GGT2), por lo que hemos aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para comparar las distribuciones en esta componente. Al aplicar esta prueba se obtiene un estadístico de 8’763, con un p-valor asociado de 0’013, inferior a 0’05. Por tanto, la prueba rechaza la hipótesis de la igualdad de distribuciones de los tres grandes grupos en esta componente. A continuación, el programa SPSS lleva a cabo un análisis post-hoc por parejas utilizando la prueba de Dunn-Bonferroni, para detectar en qué parejas de grupos se rechaza la hipótesis de igualdad de sus distribuciones en esta componente. La prueba ha puesto de manifiesto el rechazo de la hipótesis en dos parejas.

Una de ellas es la pareja formada por GGT1 y GGT3, en la que se obtiene un valor, al dividir la diferencia en los rangos promedio (-17’462) entre el error típico (6’701), igual a -2’606. Este valor lleva asociado un p-valor, tras efectuar la corrección de Bonferroni (se multiplica por tres el valor obtenido, al haber tres grupos), de 0’027, inferior a 0’05, lo que indica el rechazo de la hipótesis.

La otra pareja es la formada por GGT2 y GGT3, en la que el valor obtenido, al dividir la diferencia de rangos promedio proporcionada por el análisis (-18’429) entre el error típico (7’676) es de -2’401. Este valor lleva asociado un p-valor, una vez realizada la corrección de Bonferroni, de 0’049, inferior a 0’05, por lo que también es rechazada la igualdad de distribuciones en esta pareja.

En resumen, para esta componente obtenemos dos diferencias significativas en las medias: **la media de la componente 4 en el grupo GGT3 es significativamente superior a la media de la misma tanto en el grupo GGT1 como en el grupo GGT2**.

COMPONENTE 5

La prueba de normalidad para esta componente tan sólo ha sido superada por el grupo GGT2, mientras que no lo ha sido en los otros dos grandes grupos, GGT1 y GGT3. Así, hemos aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para comparar las distribuciones de la componente en los tres grupos. Al efectuar la prueba, hemos obtenido un valor para el estadístico de 9’562, con un p-valor asociado de 0’008, valor inferior a 0’05. Por tanto, la hipótesis de la igualdad de distribuciones de esta componente en cada uno de los grupos ha sido rechazada.

La realización posterior, utilizando el programa SPSS, de la prueba post-hoc de Dunn-Bonferroni para ver en qué parejas se rechaza esta hipótesis, pone de manifiesto la existencia de una pareja en la que esa hipótesis es rechazada: la formada por los grupos GGT1 y GGT3. El valor obtenido en esta prueba, al dividir la diferencia en los rangos promedio (-20’718) entre el error típico (6’701), es de -3’092. Este valor lleva asociado un p-valor, tras efectuar la corrección de Bonferroni, de 0’006, valor inferior a 0’05, lo que nos indica el rechazo de la hipótesis.

En resumen, para esta componente obtenemos una diferencia significativa de medias: **la media de la componente 5 en el grupo GGT3 es significativamente superior a la media en el grupo GGT1 de esta misma componente**.

COMPONENTE 6

En el Anexo D.10 (CD adjunto a la tesis doctoral) puede observarse que la prueba de normalidad para esta componente ha sido superada en los tres grandes grupos. Sin embargo, no se cumple el criterio de homocedasticidad, como ya se ha puesto de manifiesto anteriormente en la Tabla V.11. Por tanto, se ha llevado a cabo en esta componente la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. El valor obtenido para el estadístico de esta prueba ha sido de 16’584, con un p-valor asociado inferior a 0’001. Por tanto, esta prueba rechaza la hipótesis de que la distribución de esta componente en los tres grandes grupos sea la misma.

Hemos llevado a cabo la prueba de Dunn-Bonferroni para hacer el estudio por parejas de la hipótesis. Utilizando el nivel de significación de 0’05, la prueba pone de manifiesto el rechazo de esa hipótesis en una de las parejas: la formada por los grupos GGT2 y GGT3. El valor obtenido en la prueba para esta pareja, al dividir la diferencia en los rangos promedio (30’885) entre el error típico (7’676), es de 4’023. Este valor lleva asociado un p-valor, tras efectuar la corrección de Bonferroni, que es inferior a 0’001 y, por tanto, a 0’05, lo que nos indica el rechazo de la hipótesis.

Además, si cambiamos el nivel de significación de 0’05 a 0’1, hay otra pareja más en la que la hipótesis se rechaza: la formada por los grupos GGT1 y GGT3. El valor obtenido en la prueba para esta pareja, al dividir la diferencia en los rangos promedio (15’564) entre el error típico (6’701), es de 2’323. Este valor lleva asociado un p-valor, tras efectuar la corrección de Bonferroni, de 0’061, inferior a 0’1. Así, con un nivel de confianza del 90% también se rechaza la hipótesis en esta pareja (aunque no se obtiene ese rechazo con un nivel de confianza del 95%).

En resumen, hay una pareja con diferencia significativa de medias al 95% para esta componente: **la media de la componente 6 en el grupo GGT2 es significativamente superior a la media en el grupo GGT3 de esta misma componente**. Además, **la media de la componente en el grupo GGT1 también es superior a la del grupo GGT3, aunque con una significatividad del 90%.**

COMPONENTE 7

En esta componente se ha cumplido el criterio de normalidad en la distribución de cada uno de los grupos y, también, el criterio de homocedasticidad, por lo que ha sido posible aplicar un análisis ANOVA para comparar las medias en los diferentes grupos.

La aplicación del análisis ANOVA de un factor con SPSS proporciona un valor del estadístico F(2,99)=1’986, con p=0’143. Por lo tanto, **se acepta la hipótesis de la igualdad de medias para este componente en los tres grandes grupos para las unidades teóricas**.

COMPONENTE 8

La prueba de normalidad para esta componente ha sido superada en dos de los tres grupos, GGT1 y GGT2, pero no en el grupo GGT3. Por lo tanto, hemos efectuado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para poder comparar las distribuciones de esta componente en cada uno de los grupos. En esta prueba, el estadístico ha tomado un valor de 6’204, asociado a un p-valor de 0’045, inferior a 0’05, lo que hace que la hipótesis de la igualdad de las distribuciones de esta componente en cada uno de los tres grupos haya sido rechazada.

Al desarrollar la prueba post-hoc de Dunn-Bonferroni por parejas, tan sólo existe una pareja en la que se rechace la hipótesis de la igualdad de sus distribuciones en la componente: la pareja formada por GGT1 y GGT3. El valor obtenido en la prueba para esta pareja, al dividir la diferencia en los rangos promedio (-16’103) entre el error típico (6’701), es de -2’403. Este valor lleva asociado un p-valor, tras efectuar la corrección de Bonferroni, de 0’049, inferior a 0’05, lo que hace que rechacemos la hipótesis en esta pareja. En las otras dos parejas posibles, la hipótesis de la igualdad de distribuciones es aceptada.

En resumen, **la media de la componente 8 en el grupo GGT3 es significativamente superior a la media de esta componente en el grupo GGT1**.

COMPONENTE 9

La prueba de normalidad para esta componente ha sido superada en los grupos GGT1 y GGT2, pero no en el grupo restante, GGT3. Por ello, hemos llevado a cabo la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para comparar las distribuciones de esta componente en cada uno de los grupos. El valor del estadístico que se ha obtenido es de 6’131, con un p-valor asociado de 0’047. Al ser dicho p-valor inferior a 0’05, rechazamos la hipótesis de la igualdad de las distribuciones de esta componente en los tres grandes grupos.

El posterior análisis por parejas de Dunn-Bonferroni detecta la existencia de una pareja de grandes grupos donde la igualdad de distribuciones es rechazada: la pareja formada por GGT1 y GGT2. El valor obtenido en la prueba para esta pareja, al dividir la diferencia en los rangos promedio (-18’997) entre el error típico (7´676), ha sido igual a -2’475. El p-valor asociado, una vez llevada a cabo la corrección de Bonferroni, es 0’040, un valor inferior a 0’05. Por lo tanto, rechazamos la hipótesis de la igualdad de las distribuciones en esta pareja; aceptándose dicha hipótesis en las parejas restantes.

Así, **la media de la componente 9 en el grupo GGT2 es significativamente superior a la media de esta componente en el grupo GGT1**.

COMPONENTE 10

La prueba de normalidad para esta componente ha sido superada en los dos primeros grupos, GGT1 y GGT2, pero no en el grupo GGT3. Por ello, hemos efectuado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para comparar las distribuciones de la componente 10 en los tres grupos. La prueba nos proporciona un valor del estadístico de 28’581, con un p-valor asociado inferior a 0’001. Por tanto, la prueba rechaza, y de manera clara, la hipótesis de la igualdad de las distribuciones de esta componente en los tres grandes grupos. El posterior análisis por parejas de Dunn-Bonferroni evidencia la presencia de dos parejas en las que se rechaza esta hipótesis.

Una de las parejas en las que se rechaza la igualdad de distribuciones es la formada por GGT1 y GGT2. El valor que nos proporciona la prueba para esta pareja, al dividir la diferencia en los rangos promedio (27’131) entre el error típico (7´676), es de 3’534. El p-valor asociado, una vez aplicada la corrección de Bonferroni, es inferior a 0’001, por lo que la prueba muestra claramente el rechazo a que los dos grupos tengan la misma distribución en esta componente.

La segunda pareja donde también se rechaza esta hipótesis es la formada por GGT2 y GGT3. En este caso, el valor proporcionado por la prueba, al dividir la diferencia en los rangos promedio (-40’978) entre el error típico (7´676), es de -5’338. El p-valor asociado, tras efectuar la corrección de Bonferroni, vuelve a ser inferior a 0’001, rechazándose también de forma clara la hipótesis de la igualdad de distribución de los dos grupos.

En resumen, obtenemos que **la media de la componente 10 tanto en el grupo GGT3 como en el grupo GGT1 ha sido significativamente superior a la media de esta componente en el grupo GGT2**.

COMPONENTE 11

Ninguno de los tres grandes grupos ha superado la prueba de normalidad para las distribuciones en la componente 11. Así, hemos efectuado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para realizar la comparación de las distribuciones de esta componente en los tres grupos. En esta prueba y componente, el estadístico toma un valor de 3’891, asociado a un p-valor de 0’143. Al ser dicho p-valor superior a 0’05, **se acepta la hipótesis de la igualdad de distribuciones de esta componente en los tres grandes grupos**.

COMPONENTE 12

En esta componente no se ha cumplido el criterio de normalidad en los tres grandes grupos, puesto que la prueba de normalidad sí que se superaba en el grupo GGT3, pero no ocurría lo mismo en los dos grupos restantes. Por lo tanto, se ha desarrollado un análisis de Kruskal-Wallis para comparar las distribuciones de esta componente en los tres grupos. Al efectuar la prueba, el estadístico toma un valor de 5’430, con un p-valor asociado de 0’066. Como el p-valor obtenido ha sido superior a 0’05, **se acepta la hipótesis de la igualdad de distribuciones de esta componente en los tres grandes grupos**.

COMPONENTE 13

En esta componente se ha cumplido tanto el criterio de normalidad en la distribución de cada uno de los grupos como el criterio de homocedasticidad (ver Tabla V.11). Por tanto, en las distribuciones para esta componente sí ha sido posible aplicar un análisis ANOVA para comparar las medias en los diferentes grupos.

La aplicación del análisis ANOVA de un factor con SPSS proporciona un valor del estadístico F(2,99)=21’398, con p<0’001, por lo que se rechaza estadísticamente, de manera clara, la hipótesis de que las medias de esta componente en los tres grupos sean la misma. En este caso, hay dos parejas de grupos en las que, tanto para el análisis post-hoc de Scheffé como para el de Bonferroni, queda rechazada la hipótesis de igualdad de las medias en esta componentes.

Una de las parejas es la formada por los grupos GGT1 y GGT2. En el caso del test de Scheffé, el intervalo de confianza al 95% para la diferencia de las medias de ambos grupos que hemos obtenido es (-1’795, -0’707), con un p-valor p<0’001. En el caso del test de Bonferroni, dicho intervalo de confianza es (-1’784, -0’718), también con un p-valor p<0’001. La otra pareja en la que también se rechaza la igualdad de medias es la formada por los grupos GGT1 y GGT3. En el caso del test de Scheffé se obtiene como intervalo de confianza (-1’500, -0’550), con un p-valor p<0’001. Para el test de Bonferroni, el intervalo de confianza es (-1’490, -0’559), con un p-valor también inferior a 0’001. Para la pareja restante (GGT2 y GGT3) sí que se acepta la hipótesis estadística de su igualdad de medias, puesto que ambos tests construyen un intervalo de confianza para la diferencia de medias que sí contiene al 0, además de obtenerse un p-valor no sólo superior a 0’05, sino, también, superior a 0’1.

Así, para esta componente obtenemos diferencias significativas de medias en dos parejas de grupos: **la media de la componente 13 tanto del grupo GGT2 como del grupo GGT3 es significativamente superior a la media en el grupo GGT1 de esta componente.**

Estudio de los tres grandes grupos de unidades teóricas: caracterización de los grandes grupos

Una vez que hemos completado el análisis comparativo de las medias en cada componente de los tres grandes grupos, tenemos más información sobre qué caracteriza a cada uno de los grupos y qué le diferencia de los restantes. La información base para ello son aquellas componentes en las que el grupo presenta una media que es superior o inferior, de forma estadísticamente significativa, a la de alguno de los otros grupos. En las Tablas V.12 y V.13 se vuelven a reflejar tanto la media como la desviación típica de cada componente en los tres grandes grupos (misma información que ya se proporcionaba en las Tablas V.9 y V.10), pero añadiendo un código de colores que permita visualizar rápidamente la información extraída del contraste de medias realizado.

En color verde hemos señalado aquellas celdas que contienen una media de un grupo en una componente que resulta ser significativamente superior a la media de esta componente en algún otro de los grandes grupos. Se ha utilizado un tono de verde oscuro en los casos donde esa superioridad sea significativa con un nivel de confianza del 95%, y un tono más claro en los casos en los que la superioridad se ha detectado al reducir el nivel de significación al 90%.

Un criterio análogo al anterior hemos seguido con aquellas medias de grupos en componentes que se han mostrado significativamente inferiores a las medias en esa componente de alguno de los otros grupos, pero utilizando un color naranja intenso o naranja más claro, según el nivel de confianza con el que se rechazó la igualdad.

Gran Grupo Teórico		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7
GGT1	M	0,2182	-0,3440	0,2306	-0,1169	-0,3008	0,0413	0,1434
	N	39	39	39	39	39	39	39
	DT	0,9934	0,8016	1,2005	0,7655	0,8934	1,0498	1,0128
GGT2	M	-0,1070	0,1211	-0,3356	-0,3999	0,0204	0,6268	0,1701
	N	24	24	24	24	24	24	24
	DT	0,9816	0,9328	0,8255	1,4716	1,0167	0,7259	1,0586
GGT3	M	-0,1524	0,2694	-0,0241	0,3630	0,2882	-0,4270	-0,2481
	N	39	39	39	39	39	39	39
	DT	1,0040	1,1329	0,8234	0,7148	1,0275	0,8944	0,9226

Tabla V.12. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 1 a 7 para los GGT, marcando las medias cuyas diferencias son estadísticamente significativas.

Gran Grupo Teórico		Componente 8	Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13
GGT1	M	-0,2616	-0,2289	0,1115	-0,0741	0,3636	-0,6861
	N	39	39	39	39	39	39
	DT	0,6927	0,8710	0,7158	1,0501	1,2116	0,8816
GGT2	M	-0,1656	0,3743	-0,9329	0,2080	-0,1935	0,5649
	N	24	24	24	24	24	24
	DT	0,5900	1,1053	0,9989	1,1077	0,8594	0,7927
GGT3	M	0,3635	-0,0014	0,4625	-0,0539	-0,2446	0,3385
	N	39	39	39	39	39	39
	DT	1,3207	1,0087	0,8716	0,8812	0,7225	0,8356

Tabla V.13. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 8 a 13 para los GGT, marcando las medias cuyas diferencias son estadísticamente significativas.

A partir de la información proporcionada por el contraste de medias, y que se resume visualmente en las Tablas V.12 y V.13, explicamos qué es lo que caracteriza a cada uno de los tres grandes grupos que el análisis clúster ha determinado en las UT, a partir de la interpretación dada a cada una de las componentes y explicada en el apartado V.2. Además, junto con esa explicación de la caracterización se van a señalar cuáles son las UT que pertenecen a cada uno de los grupos. Dado que de cada alumno, generalmente, hemos tenido dos o tres UT; distinguiremos aquellos alumnos tales que todas sus UT han sido encuadradas dentro del mismo gran grupo de aquellos alumnos que tienen otras UT en algún otro de los dos grandes grupos.

Los tres grandes grupos teóricos han quedado caracterizados de la siguiente manera:

Gran Grupo Teórico 1 (GGT1, 39 unidades integrantes): Estas unidades se caracterizan por una alta completitud asociada a los ejemplos y las representaciones gráficas, pero una falta de completitud de los elementos asociados, generalmente, a representaciones verbales: enunciados, teoremas, títulos de apartados, comentarios y observaciones, tanto propias del discurso del profesor como personales del alumno (incluyendo anotaciones personales sobre su comprensión o dudas). Aunque la presencia de errores de transcripción sea baja, estas unidades destacan por la poca precisión de las representaciones de tipo gráfico. Además, en este tipo de unidades también aparece como carencia destacada el poco uso de los signos de puntuación en la escritura.

Alumnos con todas sus unidades teóricas en GGT1: A19 (x2), A21 (x1), A23 (x2), A24 (x2), A25 (x2), A29 (x2), A30 (x2), A37 (x3), A39 (x3) y A41 (x3).

Alumnos con alguna de sus unidades teóricas en GGT1: A1 (UT2 y UT3), A4 (UT1), A6 (UT3), A8 (UT1 y UT3), A9 (UT1), A10 (UT3), A12 (UT2), A14 (UT1), A15 (UT1), A27 (UT1), A32 (UT1), A33 (UT2 y UT3), A36 (UT2) y A38 (UT3).

Gran Grupo Teórico 2 (GGT2, 24 unidades integrantes): Las unidades de este gran grupo se caracterizan positivamente por una buena presentación, unido a la presencia de cierto estilo propio al organizar la unidad. En el aspecto negativo, destacan por la baja presencia de comentarios y observaciones (aunque las pocas que toman suelen ser transcritas de forma precisa) y por una mala ortografía y un uso poco adecuado de los signos de puntuación.

Alumnos con todas sus unidades teóricas en GGT2: A5 (x1), A7 (x3), A11 (x3), A16 (x3), A32 (x3), A34 (x3) y A40 (x1).

Alumnos con alguna de sus unidades teóricas en GGT2: A1 (UT1), A6 (UT1), A12 (UT1 y UT3), A26 (UT2), A36 (UT1) y A38 (UT1).

Gran Grupo Teórico 3 (GGT3, 39 unidades integrantes): Estas unidades se caracterizan por ser completas en todo lo relativo a representaciones de carácter verbal: enunciados, teoremas, títulos de apartados, observaciones, comentarios y aclaraciones, tanto propios del discurso del docente como personales del alumno (por ejemplo, relativos a su comprensión de los distintos contenidos). Estas unidades también destacan positivamente por su ortografía y puntuación, y por la precisión de las representaciones de carácter gráfico. Sin embargo, las unidades en este grupo destacan negativamente por una pobre presentación.

Alumnos con todas sus unidades teóricas en GGT3: A2 (x3), A3 (x3), A13 (x3), A17 (x3), A20 (x1), A22 (x2), A28 (x2) y A35 (x3).

Alumnos con alguna de sus unidades teóricas en GGT3: A4 (UT2 y UT3), A6 (UT2), A8 (UT2), A9 (UT2 y UT3), A10 (UT1 y UT2), A14 (UT2 y UT3), A15 (UT2 y UT3), A26 (UT1), A27 (UT2), A31 (UT2 y UT3), A33 (UT1), A16 (UT3) y A38 (UT2).

División de cada gran grupo en dos: estudio de los seis grupos de unidades teóricas

Los tres grandes grupos que se han determinado y de los que acabamos de caracterizar sus rasgos distintivos, a través de las medias de las componentes, tienen un alto número de integrantes (el GGT2 consta de 24 unidades y los otros dos de 39). Por tanto, un alto o bajo valor de la media de un grupo en una componente no garantiza que todas las unidades que el análisis clúster ha ubicado en ese grupo tengan que compartir un alto o bajo valor en la componente. Un indicativo de este hecho puede ser la presencia de varias componentes en las que algún grupo tiene una desviación típica bastante alta, lo cual indica la existencia de una alta variabilidad dentro del grupo y componente. La presencia de esta característica restaría utilidad a la agrupación establecida, puesto que se agruparían unidades con características que pueden ser muy diferentes en alguna componente con una relevancia alta para el equipo investigador.

Para poder evaluar con mayor claridad si este hecho sucede en nuestro análisis, y con qué grado de incidencia, vamos a estudiar cuáles son las medias en cada componente de los dos subgrupos principales de cada gran grupo teórico cuya fusión da lugar a éste (ver dendograma en Figura V.3).

Las Tablas V.14 y V.15 recogen el resultado obtenido al calcular tanto la media como la desviación típica, en cada una de las trece componentes, de cada uno de esos subgrupos que han dado lugar a los grandes grupos. En la tabla hemos añadido a la nomenclatura del Gran Grupo, “GGTnº”, una “S” mayúscula (inicial de subgrupo) y un número 1 ó 2, asignando el “1” al subgrupo situado más a la izquierda del otro en el dendograma de la Figura V.3, y un “2” al situado más a la derecha. Al igual que sucedía con las Tablas V.9 y V.10, y V.12 y V.13, se presenta la información partida en dos tablas: en la Tabla V.14 se recoge la información de las componentes 1 a 7, mientras que en la Tabla V.15 contiene la información sobre las componentes 8 a 13.

Subgrupos de los GGT		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7
GGT1 S1	M	0,1454	-0,2728	0,6896	0,4936	0,2752	0,8346	0,3016
	N	14	14	14	14	14	14	14
	DT	0,7885	0,6363	1,4093	0,5973	0,6073	0,6658	0,8842
GGT1 S2	M	0,2589	-0,3838	-0,0264	-0,4588	-0,6233	-0,4030	0,0548
	N	25	25	25	25	25	25	25
	DT	1,1050	0,8907	1,0071	0,6288	0,8730	0,9654	1,0853
GGT2 S1	M	-0,1512	1,0798	0,3992	**-3,7078**	**1,9372**	0,1702	1,3689
	N	2	2	2	2	2	2	2
	DT	0,1927	2,0396	0,3131	1,5098	0,7299	1,0242	1,1375
GGT2 S2	M	-0,1030	0,0340	-0,4023	**-0,0992**	**-0,1539**	0,6683	0,0611
	N	22	22	22	22	22	22	22
	DT	1,0263	0,8121	0,8280	1,0614	0,8515	0,7110	1,0082
GGT3 S1	M	**-1,0451**	**-0,0621**	-0,1235	**-0,1310**	-0,1305	0,0725	-0,1567
	N	13	13	13	13	13	13	13
	DT	0,7176	1,5638	0,9055	0,3740	0,9347	0,8233	0,6721
GGT3 S2	M	**0,2940**	**0,4352**	0,0256	**0,6100**	0,4976	-0,6767	-0,2938
	N	26	26	26	26	26	26	26
	DT	0,8144	0,8315	0,7933	0,7204	1,0240	0,8343	1,0347

Tabla V.14. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 1 a 8 en los subgrupos de los grandes grupos teóricos.

Subgrupos de los GGT		Componente 8	Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13
GGT1 S1	M	-0,1242	-0,2734	0,3770	0,1085	1,3176	-0,3898
	N	14	14	14	14	14	14
	DT	0,7608	0,7219	0,5996	0,5387	1,2681	0,9452
GGT1 S2	M	-0,3386	-0,2040	-0,0372	-0,1764	-0,1706	-0,8520
	N	25	25	25	25	25	25
	DT	0,6550	0,9577	0,7432	1,2484	0,7907	0,8166
GGT2 S1	M	0,1885	**1,6629**	-1,6066	-2,0453	0,2810	0,5210
	N	2	2	2	2	2	2
	DT	0,4505	0,2437	1,6703	2,2275	0,7602	0,8045
GGT2 S2	M	-0,1978	**0,2571**	-0,8716	0,4129	-0,2366	0,5689
	N	22	22	22	22	22	22
	DT	0,5988	1,0783	0,9554	0,7616	0,8706	0,8106
GGT3 S1	M	**1,1222**	-0,4037	0,8577	-0,5821	-0,5883	0,4682
	N	13	13	13	13	13	13
	DT	1,7618	0,9147	0,6646	1,0051	0,6376	0,9162
GGT3 S2	M	**-0,0158**	0,1997	0,2650	0,2103	-0,0727	0,2736
	N	26	26	26	26	26	26
	DT	0,8440	1,0093	0,9060	0,6912	0,7115	0,8033

Tabla V.15. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 8 a 13 en los subgrupos de los grandes grupos teóricos.

Un primer vistazo a los valores de las Tablas V.14 y V.15 nos permite observar la presencia de diferencias muy apreciables entre los subgrupos que, posteriormente, han dado lugar a un gran grupo teórico en el transcurso del análisis clúster jerárquico. Explicamos a continuación esas diferencias, así como la decisión adoptada por el EI atendiendo a las mismas.

El caso más claro en el que se parecen presentarse diferencias importantes entre subgrupos es el de los dos subgrupos que forman el Gran Grupo Teórico 3: el GGT3S1 (con 13 unidades integrantes) y el GGT3S2 (con 26 unidades integrantes). En la Tabla V.14 puede apreciarse que el valor de las medias de estos dos subgrupos en las Componentes 1, 2 y 4 es muy diferente, medias que hemos marcado en la tabla con negrita. Estas tres componentes están relacionadas con la completitud de la unidad teórica, cada una enfocada en diferentes elementos, y son consideradas por el equipo investigador como componentes con un papel muy relevante en el análisis. Observamos una media muy superior en el GGT3S2 frente al GGT3S1, lo que deja entrever la presencia de unidades muy completas en el segundo subgrupo en contraposición con unidades más incompletas, con pocos elementos, en el primer subgrupo. La fusión de estos dos subgrupos en un Gran Grupo, GGT3, modera los valores de la media en estas componentes, pasando desapercibido en el grupo fusión la gran diferencia existente entre las unidades que lo componen, un hecho que sí que da lugar a una alta desviación típica en estas componentes (especialmente en la componente 1). Para estos mismos subgrupos, una situación parecida se encuentra también en la componente 8, que mide la presencia de anotaciones personales del alumno. En este caso, la Tabla V.15 nos indica una alta incidencia de estas anotaciones en el S1 frente a una presencia mucho menor o inexistente en el S2. También hemos marcado en negrita estos valores. Tan sólo en las componentes 10 y 13 observamos un valor alto de la media en altos subgrupos, pero estas componentes, centradas en la puntuación y ortografía del texto escrito, no están entre las que consideramos de mayor relevancia para nuestro análisis.

También observamos diferencias importantes en alguna componente para los dos subgrupos que, con su unión, dieron lugar al Gran Grupo Teórico 2. En este caso, existe una descompensación grande en el número de unidades de cada subgrupo: 2 unidades en el GGT2S1 frente a las 22 que componen el GGT2S2. Un análisis rápido de las medias nos hace entender que las dos únicas unidades que integran el GGT2S1 presentan características especiales que las diferencian de las unidades del GGT2S2: el valor extremadamente bajo en la componente 4 y el valor alto en la componente 9 nos indican la presencia de estilos propios muy marcados en estas unidades, tanto en su presentación como en su organización. También presentan un valor muy alto en la componente 5, sobre la precisión de las representaciones gráficas. Hemos marcado en negrita estos valores en las Tablas V.14 y V.15. Estas características pasan más desapercibidas en la fusión de ambos grupos, dando lugar a una desviación típica muy alta en las componentes 4, 5 y 9 del GGT2 (ver Tablas V.12 y V.13).

En el caso de los dos subgrupos que conforman, en el avance del análisis clúster, el Gran Grupo Teórico 1 sí que se observan algunas características comunes (valores parecidos en las componentes 1 y 2, bajos valores en la componente 13), pero hay diferencias importantes en otras componentes (valor alto de la media en un subgrupo frente al valor bajo en el otro, como sucede en las componentes 4, 5, 6 y 12). No obstante, en este caso, a diferencia de los anteriores, sí que se podría observar la presencia de unas características comunes a ambos subgrupos que confluyen en el Gran Grupo, mientras que presentan algunas características que diferencian a un subgrupo del otro.

Las razones anteriormente expuestas nos llevan a considerar la artificialidad de la división primeramente considerada en tres Grandes Grupos Teóricos, puesto que se agrupan unidades con poca homogeneidad entre sí, lo que difumina o enmascara las características que mejor definen a los grupos. Este hecho ha hecho que el EI no haya considerado como útil, en nuestra investigación, esta división, que ha sido desestimada.

La división que sí que consideramos de utilidad, y de la que el EI piensa que puede extraerse una mayor cantidad de información y una mejor caracterización de la elaboración de las UT, es la división en seis grupos, previa a la creación de los tres grandes grupos en el avance del desarrollo del análisis clúster. Para eliminar las referencias a esos grandes grupos, vamos a cambiar el nombre utilizado para identificar los seis grupos. Nos referiremos a ellos como “Grupo Teórico” (eliminando la palabra Gran) seguido del número que le corresponda, considerándolos en orden, empezando por la izquierda, según se ubican en el dendograma de la Figura V.3.

Los dos subgrupos que confluían en Gran Grupo Teórico 1, y que se visualizan en la Figura V.4 (extracto de la parte izquierda del dendograma completo), recibirán el nombre de **Grupo Teórico 1**, en el caso del grupo que se forma en la parte superior de la Figura V.4 (formado por 14 integrantes), y de **Grupo Teórico 2**, para el formado en la parte inferior de esa figura, y con 25 integrantes. La notación reducida con que haremos referencia a estos grupos será GT1 y GT2, respectivamente.

Los dos subgrupos cuya fusión daba lugar al Gran Grupo Teórico 2, y que se visualizan en la Figura V.5 (extracto central del dendograma completo), recibirán el nombre de **Grupo Teórico 3**, en el caso del grupo superior (grupo reducido con tan sólo 2 integrantes), y de **Grupo Teórico 4**, para el grupo cuyos miembros ocupan la parte inferior de la figura, y que está integrado por 22 unidades. La notación reducida con que haremos referencia a estos grupos será GT3 y GT4 respectivamente.

Los dos subgrupos cuya unión conformaba el Gran Grupo Teórico 3, y que pueden observarse en la Figura V.6 (parte más a la derecha del dendograma completo), recibirán el nombre de **Grupo Teórico 5**, en el caso del grupo formado en la parte superior e integrado por 13 unidades, y de **Grupo Teórico 6**, para el grupo cuyos miembros ocupan la parte inferior de la figura, y que está compuesto por 26 unidades. La notación reducida con que haremos referencia a estos grupos será GT5 y GT6 respectivamente.

A continuación volvemos a indicar, en las Tablas V.16 y V.17, el número de elementos y los valores obtenidos al calcular la media y la desviación típica en cada componente de los seis grupos teóricos. Las tablas, esencialmente, son las mismas que las Tablas V.14 y V.15, pero cambiando la notación antigua de los grupos por la nueva notación como grupos con entidad propia. De nuevo, mostramos la tabla dividida en dos partes debido al alto número de columnas, para facilitar su lectura.

Grupos Teóricos		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7
GT1	M	0,1454	-0,2728	0,6896	0,4936	0,2752	0,8346	0,3016
	N	14	14	14	14	14	14	14
	DT	0,7885	0,6363	1,4093	0,5973	0,6073	0,6658	0,8842
GT2	M	0,2589	-0,3838	-0,0264	-0,4588	-0,6233	-0,4030	0,0548
	N	25	25	25	25	25	25	25
	DT	1,1050	0,8907	1,0071	0,6288	0,8730	0,9654	1,0853
GT3	M	-0,1512	1,0798	0,3992	-3,7078	1,9372	0,1702	1,3689
	N	2	2	2	2	2	2	2
	DT	0,1927	2,0396	0,3131	1,5098	0,7299	1,0242	1,1375
GT4	M	-0,1030	0,0340	-0,4023	-0,0992	-0,1539	0,6683	0,0611
	N	22	22	22	22	22	22	22
	DT	1,0263	0,8121	0,8280	1,0614	0,8515	0,7110	1,0082
GT5	M	-1,0451	-0,0621	-0,1235	-0,1310	-0,1305	0,0725	-0,1567
	N	13	13	13	13	13	13	13
	DT	0,7176	1,5638	0,9055	0,3740	0,9347	0,8233	0,6721
GT6	M	0,2940	0,4352	0,0256	0,6100	0,4976	-0,6767	-0,2938
	N	26	26	26	26	26	26	26
	DT	0,8144	0,8315	0,7933	0,7204	1,0240	0,8343	1,0347

Tabla V.16. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 1 a 7 en los seis grupos teóricos considerados.

Grupos Teóricos		Componente 8	Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13
GT1	M	-0,1242	-0,2734	0,3770	0,1085	1,3176	-0,3898
	N	14	14	14	14	14	14
	DT	0,7608	0,7219	0,5996	0,5387	1,2681	0,9452
GT2	M	-0,3386	-0,2040	-0,0372	-0,1764	-0,1706	-0,8520
	N	25	25	25	25	25	25
	DT	0,6550	0,9577	0,7432	1,2484	0,7907	0,8166
GT3	M	0,1885	1,6629	-1,6066	-2,0453	0,2810	0,5210
	N	2	2	2	2	2	2
	DT	0,4505	0,2437	1,6703	2,2275	0,7602	0,8045
GT4	M	-0,1978	0,2571	-0,8716	0,4129	-0,2366	0,5689
	N	22	22	22	22	22	22
	DT	0,5988	1,0783	0,9554	0,7616	0,8706	0,8106
GT5	M	1,1222	-0,4037	0,8577	-0,5821	-0,5883	0,4682
	N	13	13	13	13	13	13
	DT	1,7618	0,9147	0,6646	1,0051	0,6376	0,9162
GT6	M	-0,0158	0,1997	0,2650	0,2103	-0,0727	0,2736
	N	26	26	26	26	26	26
	DT	0,8440	1,0093	0,9060	0,6912	0,7115	0,8033

Tabla V.17. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 8 a 13 en los seis grupos teóricos considerados.

Para poder tener una mejor caracterización de los rasgos distintivos de las unidades que pertenecen a cada uno de los seis grupos teóricos, vamos a realizar un análisis siguiendo los mismos pasos que en el anteriormente realizado, cuando se consideraban los tres Grandes Grupos de Unidades Teóricas, finalmente desestimados. Es decir, vamos a realizar un contraste de las medias de los seis grupos en cada una de las componentes, buscando detectar diferencias entre medias que puedan considerarse estadísticamente significativas.

El primer paso ha sido estudiar la normalidad de las distribuciones de cada componente. Esto se ha desarrollado en cinco de los seis grupos teóricos, excluyendo el grupo formado por dos unidades por no tener sentido ese estudio en dicho grupo. Como todos los grupos están formados por un número de unidades inferior a 50, se ha utilizado la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk. Los resultados del estudio se detallan en el Anexo D.11 (CD). De esta prueba de normalidad obtenemos que, con un nivel de confianza del 95%, se acepta la hipótesis estadística de que la distribución de los grupos teóricos en las componentes 2, 4, 6, 7, 9 y 13 es una distribución normal. Por el contrario, en las componentes 1, 3, 5, 8, 10, 11 y 12 hay al menos un grupo teórico donde la hipótesis de la distribución normal ha sido rechazada, lo que imposibilita en ese caso llevar a cabo un análisis ANOVA para contrastar las medias.

En las componentes en las que la prueba de normalidad ha sido positiva, se ha realizado posteriormente una prueba de homocedasticidad o de homogeneidad de varianzas en los grupos teóricos. La prueba utilizada ha sido la prueba de Levene. La Tabla V.18 refleja los valores obtenidos al desarrollar la prueba con SPSS en estas componentes, utilizando el mismo nivel de significación y el mismo código de colores que en la Tabla V.11. Hemos marcado en color verde aquellas celdas con p-valores superiores a 0'05, que indican que se acepta en la componente la hipótesis de la igualdad de varianzas en las distribuciones de los distintos grupos teóricos. El color utilizado en las celdas es el rojo cuando el p-valor es inferior a 0'05, que marca el rechazo de la hipótesis.

Número de componente	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Signif. (p-valor)
Componente 2	4,478	5	96	0,001
Componente 4	2,406	5	96	0,042
Componente 6	1,999	5	96	0,086
Componente 7	0,882	5	96	0,496
Componente 9	0,910	5	96	0,478
Componente 13	0,165	5	96	0,975

Tabla V.18. Resultados de aplicar la prueba de Levene en los grupos teóricos.

Así, tan sólo se cumplen las hipótesis de normalidad y homocedasticidad en las distribuciones de los grupos teóricos en las componentes número 6, 7, 9 y 13. Por ello, tan sólo en estas cuatro componentes puede realizarse el contraste de las medias de los seis grupos teóricos utilizando un análisis ANOVA. En las otras componentes, al igual que hicimos para la división en tres grandes grupos, realizaremos la prueba análoga no paramétrica: la prueba de Kruskal-Wallis.

En el caso de que se rechace la hipótesis de igualdad de medias o de distribuciones en alguna de las componentes, los análisis post-hoc para saber en qué parejas se rechaza estadísticamente la igualdad de medias han sido los mismos que anteriormente: el test de Scheffé y el de Bonferroni para el caso del análisis ANOVA y el test de Dunn-Bonferroni para caso del análisis Kruskal-Wallis. El nivel de significación para este análisis post-hoc ha sido 0’05, aunque se ha bajado el nivel a 0’1 para detectar más parejas en las que la hipótesis se rechazara, aunque fuera con una significatividad menor. Esto nos permitirá conseguir mayor información en las componentes, encaminada a una mejor caracterización de cada uno de los seis GT.

Explicamos componente por componente los resultados obtenidos al realizar el contraste de las distribuciones entre los diferentes grupos, indicando qué diferencias significativas se detectan entre parejas de grupos en caso de que dichas diferencias existan.

COMPONENTE 1

En esta componente hay dos grupos en los que no se ha superado la prueba de normalidad, por lo que aplicaremos la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para el contraste de las distribuciones. El valor del estadístico que obtenemos al desarrollar esta prueba es 20’081, con un p-valor asociado p=0’001, que es inferior a 0’05, por lo que se rechaza la igualdad de distribuciones en todos los grupos teóricos. Posteriormente, el programa SPSS desarrolla un análisis post-hoc por parejas, utilizando la prueba de Dunn-Bonferroni, para conocer en qué parejas de grupos se rechaza la hipótesis anterior. En este caso, al existir seis grupos teóricos, se realizan quince comparaciones por parejas, por lo que la corrección de Bonferroni multiplica por quince el p-valor asociado al análisis de Dunn para determinar la aceptación o no de la hipótesis con el nivel de significación fijado, 0’05. La prueba post-hoc en esta componente ha revelado la existencia de tres parejas de grupos en los que se ha rechazado la hipótesis de la igualdad de sus distribuciones.

Una de las parejas es la formada por los grupos GT1 y GT5, en la que se obtiene un valor del estadístico, al dividir la diferencia en los rangos promedio (36’720) entre el error típico (11’397), de 3’222. Este valor lleva asociado un p-valor, tras aplicar la corrección de Bonferroni, de 0’019. Al ser inferior a 0’05, la hipótesis se rechaza en esta pareja.

La segunda pareja es la conformada por los grupos GT2 y GT5, en la que se obtiene un valor del estadístico, al dividir la diferencia en los rangos promedio (38’193) entre el error típico (10’118), de 3’775. Este valor lleva asociado un p-valor, una vez realizada la corrección de Bonferroni, de p=0’002. Por tanto, en esta pareja también se rechaza la igualdad de distribuciones.

Por último, en la pareja que forman los grupos GT5 y GT6 también se rechaza la hipótesis. En esta pareja, al dividir la diferencia entre los rangos promedio (-40’615) entre el error típico (10’051) se obtiene un valor del estadístico de 4’041. Este valor lleva asociado un p-valor, tras realizar la corrección de Bonferroni, que es igual a 0’001. Como es inferior a 0’05, se rechaza la igualdad de distribuciones.

En resumen, **la media de la componente 1 tanto en el grupo GT1, como en el grupo GT2 y como en el grupo GT6 es significativamente superior a la media de esta componente en el grupo GT5.**

COMPONENTE 2

En todos los grupos se superó la prueba de normalidad en la distribución de esta componente, pero no sucedió lo mismo con la prueba de homocedasticidad o de homogeneidad de varianzas (ver Tabla V.18). Por lo tanto, se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. En dicha aplicación, el valor del estadístico que hemos obtenido ha sido de 11’967, con un p-valor asociado de p=0’035. Como dicho p-valor es inferior al nivel de significación fijado, 0’05, se ha rechazado la hipótesis de la igualdad de la distribución en todos los grupos de esta componente.

El análisis post-hoc de Dunn-Bonferroni únicamente ha evidenciado el rechazo de la igualdad de distribuciones en una de las quince parejas. Esa pareja es la formada por los grupos GT2 y GT6. Al dividir la diferencia entre el promedio de los rangos en cada grupo (-25’560) entre el error típico (8’288) se obtiene un valor de -3’084 para el estadístico. Este valor tiene asociado un p-valor, tras aplicar la corrección de Bonferroni, de 0’031, que es inferior a 0’05, el nivel de significación fijado, lo que hace que sea rechazada la hipótesis en esta pareja.

En resumen, **la media de la componente 2 en el grupo GT6 es significativamente superior a la media de esta componente en el grupo GT2.**

COMPONENTE 3

Al aplicar la prueba de Shapiro-Wilk se ha evidenciado la presencia de un grupo, GT5, en el que se rechaza la hipótesis de normalidad en la distribución de esta componente, por lo que se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para realizar el contraste de las distribuciones. Al desarrollar esta prueba, hemos obtenido un valor del estadístico de 8’829, con un p-valor asociado de 0’116, que es un p-valor superior al nivel de significación fijado, 0’05. De este hecho se deriva que **aceptemos la**

hipótesis de que todos los grupos teóricos tienen la misma distribución para esta componente.

COMPONENTE 4

En la componente 4 todos los grupos teóricos han superado la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk, pero no la prueba de homocedasticidad (utilizando el estadístico de Levene). Por lo tanto, hemos aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para comparar las distribuciones. Al desarrollar esta prueba, el valor del estadístico que hemos obtenido ha sido de 34’753, con un p-valor asociado que es inferior a 0’001, por lo que también es inferior al nivel de significación fijado, 0’05. Así, la hipótesis de la igualdad de distribuciones en esta componente ha sido rechazada. El análisis post-hoc de Dunn-Bonferroni muestra la presencia de cuatro parejas de grupos teóricos en las que es rechazada esta igualdad de distribuciones.

Una de las parejas en las que se rechaza la hipótesis es la que conforman los grupos GT1 y GT2. En esta pareja, al dividir la diferencia del valor promedio de los rangos en ambos grupos (37´694) entre el error típico (9’877), se obtiene un valor del estadístico de 3’816. Dicho valor lleva asociado un p-valor, tras realizar la corrección de Bonferroni, de p=0’002, que es inferior a 0’05 por lo se rechaza la hipótesis de la igualdad de distribuciones en esta pareja.

Otra pareja en la que la hipótesis es rechazada es la compuesta por GT1 y GT3. El valor del estadístico obtenido para esta pareja, tras dividir la diferencia del valor promedio de los rangos (67’214) entre el error típico (22’367), es de 3’005. Ese valor está asociado a un p-valor, tras la corrección de Bonferroni, de 0’040. Al ser inferior a 0’05 (nivel de significación fijado), la igualdad de distribuciones es también rechazada en esta pareja.

La tercera pareja es la que forman los grupos GT2 y GT6. En ella, el valor del estadístico que se obtiene es de -4’810, una vez que se divide la diferencia del valor promedio de los rangos (-39’865) entre el error típico (8’288). El p-valor asociado que se obtiene, tras aplicar la corrección de Bonferroni, es inferior a 0’001, por lo que también se rechaza la hipótesis de la igualdad de distribuciones en esta pareja.

La cuarta y última pareja en la que la hipótesis es rechazada es la compuesta por los grupos GT3 y GT6. El valor del estadístico obtenido tras aplicar la prueba de Dunn-Bonferroni es de -3’196, una vez que se divide la diferencia del valor promedio de los rangos (-69’385) entre el error típico (21’712). El p-valor asociado al estadístico obtenido es 0’021. Como es inferior al nivel de significación fijado, 0’05, rechazamos la hipótesis de la igualdad de distribuciones en esta pareja.

Por último, hemos de indicar la presencia de una quinta pareja en la que la hipótesis se rechaza si se reduce el nivel de significación al 90%: la pareja formada por los grupos GT4 y GT6. En esta pareja, el valor del estadístico obtenido, tras dividir la diferencia del valor promedio de los grupos (-23’476) entre el error típico (8’571) es de -2’739. El p-valor asociado que obtenemos es 0’092, superior a 0’05 pero inferior a 0’1. Por lo tanto, aunque con una menor significatividad, la hipótesis de la igualdad de distribuciones también es rechazada aquí.

En resumen, **la media de la componente 4 en el grupo GT1 es significativamente superior a la media de esta componente tanto en el grupo GT2 como en el grupo GT3. Lo mismo sucede con la media de la componente 4 en el grupo GT6, que es significativamente superior a los mismos dos grupos indicados anteriormente, grupos GT2 y GT3.** Además, **aunque con menor significatividad, la media en el grupo GT6 también es superior a la media en el grupo GT4 de esta componente.**

COMPONENTE 5

La prueba de normalidad de Shapiro-Wilk nos revela el rechazo de la hipótesis de normalidad en la distribución de tres de los grupos para la componente 5. Por lo tanto, la prueba que se ha aplicado es la no paramétrica de Kruskal-Wallis. Al desarrollar esta prueba, hemos obtenido un valor del estadístico de 25’017, asociado a un p-valor que es inferior a 0’001. Por lo tanto, queda rechazada la hipótesis de la igualdad de distribuciones de los grupos en esta componente. El análisis post-hoc de Dunn-Bonferroni detecta la existencia de dos parejas de grupos en los que es rechazada la igualdad de sus distribuciones, con el nivel de significación fijado de 0’05.

Una de esas parejas es la formada por los grupos GT2 y GT6. El valor del estadístico que se obtiene para esta pareja es de -4’320, tras dividir la diferencia del valor promedio de los rangos en ambos grupos (-35’803) entre el error típico (8’288). El p-valor asociado que se obtiene, tras aplicar la corrección de Bonferroni, es inferior a 0’001, lo que evidencia el rechazo de la hipótesis de la igualdad de las distribuciones de ambos grupos.

La segunda pareja en la que también se rechaza esa hipótesis es la compuesta por los grupos GT2 y GT3. En esta pareja, tras dividir la diferencia del valor promedio de los rangos (-66'380) entre el error típico (21'743), obtenemos un valor del estadístico igual a -3'053. El p-valor asociado a la prueba, tras llevar a cabo la corrección de Bonferroni, es p=0'034, que es inferior a 0'05. Así, aquí también queda rechazada la hipótesis de la igualdad de distribuciones.

Además, hay una tercera pareja en la que, para el nivel de significación de 0'05, se acepta la igualdad de distribuciones, pero dicha igualdad se rechaza si el nivel de confianza se reduce al 90%. Esa pareja es la formada por los grupos GT1 y GT2. El valor del estadístico obtenido en esta pareja al hacer la prueba de Dunn es de 2'808, una vez que se divide la diferencia del valor promedio de los rangos (27'737) entre el error típico (9'877). El p-valor obtenido, una vez que se realiza la corrección de Bonferroni, es de 0'075, superior a 0'05 pero inferior a 0'1. Por lo tanto, aunque con una significatividad menor, también se rechaza la igualdad de distribuciones en esta pareja.

En resumen, **la media de la componente 5 tanto en el grupo GT3 como en el grupo GT6 es significativamente superior a la media de esta componente en el grupo GT2**. Además, **aunque con menor significatividad, la media en el grupo GT1 también es superior a la media de la componente en dicho grupo GT2.**

COMPONENTE 6

En esta componente sí que hemos desarrollado el contraste de medias utilizado el análisis ANOVA, puesto que se cumplían los criterios de normalidad y de homocedasticidad u homogeneidad de varianzas. La aplicación del análisis ANOVA de un factor con SPSS proporciona un valor del estadístico F(5,96)=10'483, con un p-valor asociado inferior a 0'001, por lo que se rechaza la hipótesis estadística de que todos los grupos teóricos tengan la misma media para esta componente. La realización de los análisis post-hoc tanto de Scheffé como de Bonferroni ha puesto de manifiesto la existencia de cuatro parejas de grupos teóricos en los que la hipótesis estadística de la igualdad de sus medias en esta componente es rechazada.

Una de esas parejas es la formada por los grupos GT1 y GT2. Para esta pareja, el test de Scheffé proporciona un intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia de sus medias de (0'302, 2'173), con un p-valor asociado p=0'002, lo que rechaza la hipótesis de la igualdad de medias. En el caso del test de Bonferroni, el intervalo de confianza para la diferencia de medias es (0’409, 2’067), con un p-valor asociado inferior a 0’001, lo que vuelve a rechazar esta hipótesis.

La hipótesis también es rechazada por ambos tests para la pareja formada por los grupos teóricos GT1 y GT6. El test de Scheffé nos proporciona el intervalo de confianza (0’582, 2’440) para la diferencia de medias, mientras que aplicando el test de Bonferroni obtenemos el intervalo (0’688, 2’335). En ambos casos, el p-valor suministrado por los tests es inferior a 0’001, lo que provoca que se rechace la hipótesis.

Una tercera pareja en la que los dos tests rechazan la hipótesis de la igualdad de medias es la configurada por los grupos GT2 y GT4. El intervalo de confianza para la diferencia de medias proporcionado por el test de Scheffé es (-1’891, -0’252), con un p-valor asociado p=0’003. Para el test de Bonferroni, el intervalo de confianza obtenido es (-1’797, -0’345), con un p-valor asociado inferior a 0’001. En ambos casos se rechaza la hipótesis estadística de la igualdad de medias. Como los dos extremos del intervalo son negativos, en este caso, a diferencia de los anteriores, la media del segundo de los grupos que hemos escrito, GT4, es significativamente superior a la media del primero, GT2.

Por último, la hipótesis es rechazada en la pareja formada por GT4 y GT6 también en ambos test. El test de Scheffé nos devuelve el intervalo de confianza (0’533, 2’157) para la diferencia de medias. Para el test de Bonferroni, dicho intervalo de confianza es (0’626, 2’064). En ambos casos, el p-valor asociado es inferior a 0’001, lo que hace que rechacemos la hipótesis de la igualdad de medias en esta pareja.

En resumen, **la media de la componente 6 en el grupo GT1 es significativamente superior a la media de esta componente tanto en el grupo GT2 como en el grupo GT6**. Asimismo, **la media en el grupo GT4, para esta misma componente, también es significativamente superior a los mismos dos grupos antes indicados, GT2 y GT6.**

COMPONENTE 7

En esta componente también se ha aplicado un análisis ANOVA, al cumplirse los criterios de normalidad en todos los grupos y de homocedasticidad u homogeneidad de las varianzas. El valor del estadístico que nos proporciona el análisis es F(5,96)=1’594, con un p-valor asociado de p=0’169, superior a 0’05. Por lo tanto, **en la**

componente 7 se acepta la hipótesis de la igualdad de las medias de todos los grupos teóricos.

COMPONENTE 8

La prueba de Shapiro-Wilk rechaza la hipótesis de la normalidad en la distribución de dos de los grupos teóricos para esta componente. Por lo tanto, hemos aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para realizar el contraste de las distribuciones. Al llevar a cabo dicha prueba, obtenemos un valor del estadístico de 14’463, con un p-valor asociado de 0’013. Al ser dicho p-valor inferior a 0’05, nivel de significación fijado, rechazamos la hipótesis de que las distribuciones en todos los grupos teóricos sean la misma. El análisis post-hoc de Dunn-Bonferroni, para ese mismo nivel de significación, detecta la existencia de dos parejas en las que se rechaza esta hipótesis de igualdad de distribuciones.

La primera pareja en la que la hipótesis es rechaza es la conformada por los grupos GT2 y GT5. En esta pareja, se obtiene un valor del estadístico de -3’501, una vez que se divide la diferencia en el valor promedio de los rangos de ambos grupos (-35’422) entre el error típico (10’118). El p-valor asociado al estadístico anterior, tras realizar la corrección de Bonferroni, es p=0’007, inferior a 0’05, lo que hace que rechacemos la hipótesis para el nivel de significación fijado.

La segunda pareja en la que también es rechazada la hipótesis es la que componen los grupos GT4 y GT5. Al realizar la división de la diferencia en el valor promedio de los rangos (-32’234) entre el error típico (10’351) se obtiene un valor del estadístico de -3’114. El p-valor asociado a ese valor del estadístico, una vez realizada la corrección de Bonferroni, es de p=0’028. Al ser inferior a 0’05 también rechazamos la hipótesis en esta pareja.

Si cambiamos el nivel de significación de 0’05 a 0’1, hay una pareja más en la que se detecta el rechazo de la hipótesis de igualdad de distribuciones. Dicha pareja es la formada por GT1 y GT5, en la que el valor del estadístico es de -2’748 (división del valor promedio de los rangos, -31’319, entre el error típico, 11’397). El p-valor asociado a este valor del estadístico es de 0’090, superior a 0’05 pero inferior a 0’1.

Por lo tanto, **la media de la componente 8 en el grupo GT5 es significativamente superior a la media tanto en el grupo GT2 como en el grupo GT4 de esta**

componente. Además, **aunque con menor significatividad, la media en el grupo GT5 también es superior a la media de la componente en el grupo GT1.**

COMPONENTE 9

En esta componente hemos realizado un análisis ANOVA, puesto que las distribuciones de todos los grupos han superado la prueba de normalidad y, además, se cumple el criterio de homocedasticidad u homogeneidad de varianzas. El análisis ANOVA nos proporciona un valor del estadístico $F(5,96)=2'645$, con un p-valor asociado de 0'028, que es inferior a 0'05. Por tanto, queda rechazada la hipótesis de que la media de esta componente en todos los grupos sea la misma. Sin embargo, al realizar el análisis post-hoc tanto de Scheffé como de Bonferroni, no hemos encontrado ninguna pareja en la que los intervalos de confianza al 95% para la diferencia de las medias no contuvieran al 0 y los p-valores asociados fueran inferiores a 0'05, nivel de significación inicialmente fijado.

Cuando cambiamos el nivel de confianza y lo rebajamos hasta el 90%, para ver si se encuentra alguna diferencia entre las medias aunque sea con una menor significación, el test de Scheffé vuelve a aceptar la igualdad de las medias en cualquier pareja de grupos teóricos. Sin embargo, para el test de Bonferroni sí que hay una pareja en la que rechaza esa hipótesis: la formada por los grupos GT3 y GT5. Para esta pareja, el intervalo de confianza obtenido para la diferencia de las medias es (0'041, 4'092), con un p-valor asociado de 0'085, inferior a 0'1.

En resumen, a pesar de que se rechaza la hipótesis estadística de que la media en todos los grupos para esta componente sea la misma, tan sólo obtenemos que **la media de la componente 9 en el grupo GT3 es superior, aunque con un nivel de confianza únicamente del 90%, a la del grupo GT5.**

COMPONENTE 10

La prueba de normalidad de Shapiro-Wilk rechaza la hipótesis de normalidad en la distribución del grupo GT6 en esta componente. Por este motivo, el contraste de medias se ha llevado a cabo aplicando la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. Al aplicar esta prueba, obtenemos un valor del estadístico igual a 34'531, asociado a un p-valor que es inferior a 0'001. Por lo tanto, la prueba rechaza la igualdad de las distribuciones de todos los grupos en esta componente. El análisis post-hoc por parejas de Dunn-Bonferroni, con el nivel de significación de 0'05, detecta la existencia de cuatro parejas en las que se rechaza la hipótesis de la igualdad de sus distribuciones.

Una de esas parejas es la que componen los grupos GT1 y GT4. En esta pareja, el valor del estadístico obtenido al aplicar la prueba de Dunn es de 3’480 (división de la diferencia del valor promedio de los rangos, 35’208, entre el error típico, 10’116). Este valor lleva asociado un p-valor, una vez realizada la corrección de Bonferroni, de p=0’008, inferior a 0’05, lo que hace que rechacemos la hipótesis en esta pareja.

Otra pareja es la que conforman los grupos GT2 y GT5. El valor del estadístico al aplicar la prueba en esta pareja es de -3’138, obtenido al dividir la diferencia del valor promedio de los rangos de cada grupo (-31’748) entre el error típico (10’118). El p-valor asociado obtenido al aplicar esta prueba, una vez aplicada la corrección de Bonferroni, ha sido p=0’026. Al ser un valor inferior a 0’05, también rechazamos la hipótesis de la igualdad de distribuciones en esta pareja.

La tercera pareja en la que también rechazamos esta hipótesis es la que forman los grupos GT4 y GT5. Al dividir la diferencia del valor promedio de los rangos (-52’944) entre el error típico (10’351) obtenemos un valor del estadístico de -5’115. El p-valor asociado, tras realizar la corrección de Bonferroni, es inferior a 0’001, por lo que se rechaza la igualdad de distribuciones.

La cuarta y última pareja es la compuesta por los grupos GT4 y GT6. La aplicación de la prueba de Dunn en esta pareja nos proporciona un valor de -3’924 para el estadístico (obtenido al dividir la diferencia del valor promedio de los rangos, -33’636, entre el error típico, 8’571). El p-valor asociado a la prueba, tras aplicar la corrección de Bonferroni, es p=0’001, lo que hace que también se rechace la hipótesis de la igualdad de distribuciones en esta pareja.

Si se rebaja al 90% el nivel de confianza, se detecta una quinta pareja en la que se rechaza la igualdad de distribuciones: la formada por los grupos GT3 y GT5. La aplicación de la prueba de Dunn nos proporciona un valor del estadístico de -2’839; al dividir la diferencia del valor promedio de los rangos, -63’808, entre el error típico, 22’474. El p-valor asociado, tras la corrección de Bonferroni, es p=0’068, valor superior a 0’05 pero inferior a 0’1, por lo que se rechaza aquí la igualdad de las distribuciones.

Por lo tanto, **la media de la componente 10 tanto en el grupo GT1, como en el grupo GT5 y en el grupo GT6, es estadísticamente superior a la media de esta**

componente en el grupo GT4. Asimismo, **la media en el grupo GT5 también es estadísticamente superior a la del grupo GT2 en esta componente.** Por último, **aunque con menor significatividad, la media de la componente en el grupo GT5 es superior a la media en el grupo GT3.**

COMPONENTE 11

La prueba de normalidad de Shapiro-Wilk rechaza la hipótesis de normalidad en la distribución de tres de los grupos para esta componente. Por tanto, se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para hacer el contraste de las distribuciones. El valor del estadístico que se ha obtenido en la prueba es de 17’909, con un p-valor asociado de 0’003, inferior a 0’05. Al ser inferior al nivel de significación fijado, se rechaza la hipótesis de que la distribución en todos los grupos sea la misma para esta componente.

El análisis post-hoc por parejas de Dunn-Bonferroni pone de manifiesto la existencia de sólo una pareja en la que se rechaza la igualdad de sus distribuciones con ese nivel de significación. Dicha pareja es la formada por GT4 y GT5, en la que se obtiene un valor del estadístico de 3’514 (división de la diferencia en el valor promedio de los rangos, 36’374, entre el error típico, 10’351), con un p-valor asociado, tras la corrección de Bonferroni, de p=0’007. Al ser un p-valor inferior a 0’05, rechazamos la hipótesis de la igualdad de las distribuciones en esta pareja para esta componente.

Es decir, **la media de la componente 11 en el grupo GT4 es estadísticamente superior a la media de esta componente en el grupo GT5.**

COMPONENTE 12

La hipótesis de normalidad en las distribuciones de los grupos teóricos para esta componente es rechazada en uno de los grupos, GT4, por lo que hemos de aplicar la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis como contraste de las distribuciones en esta componente. El valor del estadístico que obtenemos al llevar a cabo esta prueba es de 21’488, con un p-valor asociado p=0’001. Al ser inferior a 0’05, rechazamos la hipótesis de que las distribuciones de todos los grupos en esta componente sean las mismas. El análisis post-hoc de Dunn-Bonferroni detecta la existencia de tres parejas en las que se rechaza la igualdad de distribuciones.

Una de las parejas en las que esto sucede es la pareja compuesta por los grupos GT1 y GT2. El valor del estadístico de la prueba de Dunn en esta pareja es de 4’215 (división de la diferencia del valor promedio de los rangos en cada grupo, 48’038, entre el error típico, 11’397). El p-valor asociado, una vez realizada la corrección de Bonferroni, es inferior a 0’001, por lo que se rechaza la hipótesis de la igualdad de sus distribuciones.

Otra de las parejas es la que forman los grupos GT1 y GT4. La prueba de Dunn nos proporciona un estadístico de 3’738 (división de la diferencia del valor promedio de los rangos en cada grupo, 37’818, entre el error típico, 10’116). Tras aplicar la corrección de Bonferroni, el p-valor obtenido es p=0’003. Al ser un valor inferior a 0’05, también es rechazada la hipótesis de la igualdad de distribuciones en esta pareja.

La tercera y última pareja es la compuesta por los grupos GT1 y GT5. El estadístico obtenido al aplicar la prueba de Dunn ha sido 3’371, resultado de dividir la diferencia del valor promedio de los rangos (33’300) entre el error típico (9’877). El p-valor que se obtiene es de 0’011 (tras haber realizado la corrección de Bonferroni). Al ser un valor inferior al nivel de significación fijado, 0’05, también se rechaza la hipótesis de la igualdad de distribuciones en esta pareja.

Cuando cambiamos el nivel de confianza y lo rebajamos hasta el 90%, se detecta una pareja más donde se rechaza la igualdad de distribuciones. Es la formada por los grupos GT1 y GT6, para la que se obtiene un valor del estadístico de 2’882 (resultado de dividir la diferencia del valor promedio de los rangos, 28’269, entre el error típico, 9’809). Tras aplicar la corrección de Bonferroni, el p-valor asociado a la prueba obtenido ha sido p=0’059, valor superior a 0’05, pero inferior a 0’01, lo que nos permite rechazar la hipótesis con el nivel de confianza antes señalado.

En resumen, **la media de la componente 12 en el grupo GT1 es estadísticamente superior a la media de esta componente tanto en el grupo GT2, como en el grupo GT4 y como en el grupo GT5.** Además, aunque con menor significatividad, **la media en dicho grupo GT1 también es superior a la media en el grupo GT6.**

COMPONENTE 13

En esta componente hemos realizado un análisis ANOVA, puesto que se cumplían los criterios de normalidad y de homogeneidad de las varianzas. Al efectuar con el programa SPSS el análisis ANOVA, hemos obtenido un valor del estadístico $F(5,96)=9'206$, con un p-valor asociado $p<0'001$. Por ello, se rechaza la hipótesis estadística de que la media de esta componente en todos los grupos teóricos sea la misma. La realización de los análisis post-hoc tanto de Scheffé como de Bonferroni ha determinado la existencia de tres parejas de grupos teóricos en los que ambos tests rechazan la hipótesis estadística de la igualdad de sus medias.

Una de esas tres parejas es la configurada por los grupos GT2 y GT4. Para esta pareja, el test de Scheffé establece un intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia de sus medias de (-2’259, -0’583), con un p-valor asociado inferior a 0’001. El test de Bonferroni devuelve el intervalo de confianza (-2’163, -0’679), también con un p-valor inferior a 0’001. Es decir, los dos tests han rechazado la hipótesis de que las medias de la componente en estos dos grupos sean la misma.

Otra pareja es la formada por los grupos GT2 y GT5. El test de Scheffé proporciona, para la diferencia de las medias, un intervalo de confianza de (-2’300, -0’340), con un p-valor p=0’002. Aplicando el test de Bonferroni se obtiene un intervalo de confianza que no contiene al 0, (-2’188, -0’452), con un p-valor inferior a 0’001. Por tanto, los dos tests rechazan la igualdad de medias en esta componente para estos dos grupos.

La tercera pareja es la que conforman los grupos GT2 y GT6. El intervalo de confianza (al 95%) obtenido al aplicar el test de Scheffé es (-1’928, -0’323), con un p-valor p=0’001. Para esa misma diferencia de medias, el test de Bonferroni nos devuelve el intervalo de confianza (-1’837, -0’415) con un p-valor que es inferior a 0’001. En esta tercera pareja también queda rechazada estadísticamente la igualdad de sus medias en esta componente.

Además, en una cuarta pareja el test de Bonferroni rechaza la igualdad de medias con el nivel de significación fijado, 0’05. Dicha pareja es la formada por los grupos GT1 y GT4. El intervalo de confianza para la diferencia de medias que nos proporciona este test es (-1’827, -0’091), con un p-valor p=0’019, inferior a 0’05. Sin embargo, el test de Scheffé no rechaza esta igualdad con ese nivel de significación, puesto que el intervalo de confianza obtenido sí contiene al 0, con un p-valor asociado de 0’059. Al reducir el nivel de confianza al 90% este test sí que rechaza la igualdad de medias, al obtenerse un intervalo de confianza para la diferencia de medias de (-1’849, -0’068)

En resumen, **la media de la componente 13 tanto en el grupo GT4, como en el grupo GT5 y en el grupo GT6, es estadísticamente superior a la media de esta componente en el grupo GT2**. Asimismo, **aunque con menor significatividad, la media en el grupo GT4 también es superior a la media en el grupo GT1.**

Estudio de los seis grupos de unidades teóricas: caracterización de los grupos

Una vez completado el análisis comparativo de las medias de los seis grupos en cada una de las trece componentes seleccionadas, hemos detectado la presencia de diferencias significativas entre las medias de algunas parejas de grupos y componentes. Estas diferencias nos ayudan a determinar la existencia de valores medios especialmente altos o bajos para algunas de las componentes, que nos sirven para encontrar los rasgos que caracterizan y distinguen un grupo de los restantes.

Al igual que ya hiciéramos para la anterior división en tres grandes grupos, volvemos a exponer la tabla con las medias y la desviación típica de cada componente en los seis grupos teóricos (datos ya expuestos en las Tablas V.16 y V.17), pero añadiendo un código de colores que nos ayude a visualizar y extraer rápidamente la información obtenida del contraste de medias. El código de colores es el mismo que anteriormente hemos seguido. Hemos utilizado el color verde para señalar celdas con medias en una determinada componente que han sido estadísticamente superiores a las de algún otro grupo (verde oscuro: nivel de significación de 0'05, verde claro: nivel de significación de 0'1). Del mismo modo, hemos utilizado el color naranja para marcar celdas con valores de la media que han sido estadísticamente inferiores en una componente a los de, al menos, otro grupo (naranja oscuro: nivel de significación de 0'05, naranja claro: nivel de significación de 0'1). La Tabla que expone esas medias con el código de colores es la Tabla V.19, que disponemos en modo apaisado para una lectura más clara de la misma.

Grupo Teórico		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7	Componente 8	Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13
GT 1	M	0,1454	-0,2728	0,6896	0,4936	0,2752	0,8346	0,3016	-0,1242	-0,2734	0,3770	0,1085	1,3176	-0,3898
	N	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
	DT	0,7885	0,6363	1,4093	0,5973	0,6073	0,6658	0,8842	0,7608	0,7219	0,5996	0,5387	1,2681	0,9452
GT 2	M	0,2589	-0,3838	-0,0264	-0,4588	-0,6233	-0,4030	0,0548	-0,3386	-0,2040	-0,0372	-0,1764	-0,1706	-0,8520
	N	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	DT	1,1050	0,8907	1,0071	0,6288	0,8730	0,9654	1,0853	0,6550	0,9577	0,7432	1,2484	0,7907	0,8166
GT 3	M	-0,1512	1,0798	0,3992	-3,7078	1,9372	0,1702	1,3689	0,1885	1,6629	-1,6066	-2,0453	0,2810	0,5210
	N	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	DT	0,1927	2,0396	0,3131	1,5098	0,7299	1,0242	1,1375	0,4505	0,2437	1,6703	2,2275	0,7602	0,8045
GT 4	M	-0,1030	0,0340	-0,4023	-0,0992	-0,1539	0,6683	0,0611	-0,1978	0,2571	-0,8716	0,4129	-0,2366	0,5689
	N	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
	DT	1,0263	0,8121	0,8280	1,0614	0,8515	0,7110	1,0082	0,5988	1,0783	0,9554	0,7616	0,8706	0,8106
GT 5	M	-1,0451	-0,0621	-0,1235	-0,1310	-0,1305	0,0725	-0,1567	1,1222	-0,4037	0,8577	-0,5821	-0,5883	0,4682
	N	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
	DT	0,7176	1,5638	0,9055	0,3740	0,9347	0,8233	0,6721	1,7618	0,9147	0,6646	1,0051	0,6376	0,9162
GT 6	M	0,2940	0,4352	0,0256	0,6100	0,4976	-0,6767	-0,2938	-0,0158	0,1997	0,2650	0,2103	-0,0727	0,2736
	N	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26
	DT	0,8144	0,8315	0,7933	0,7204	1,0240	0,8343	1,0347	0,8440	1,0093	0,9060	0,6912	0,7115	0,8033

Tabla V.19. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de cada componente en los grupos teóricos, marcando las medias cuyas diferencias son estadísticamente significativas.

Con ayuda de la información que hemos obtenido al desarrollar el contraste de medias en cada componente y que se visualiza en la Tabla V.19., podemos caracterizar cuáles son los rasgos que distinguen a cada uno de los seis grupos teóricos. Al igual que hicimos anteriormente para los tres grandes grupos teóricos (agrupación finalmente desestimada), además de los rasgos caracterizadores de cada grupo indicamos cuáles son las unidades que pertenecen a cada uno de ellos, diferenciando entre el hecho de que en un mismo grupo estén todas las UT de un alumno o éste tenga otras UT en otros grupos.

Grupo Teórico 1 (GT1, 14 unidades integrantes): Las unidades pertenecientes a este grupo se caracterizan por una alta completitud en el registro de ejemplos y de representaciones gráficas, así como de observaciones y comentarios, especialmente de aquellos indicados por el docente en su discurso (en contraposición con los personales del alumno, sobre todo aquellos relativos a su propia comprensión, que tienen una incidencia baja). La completitud de los enunciados, teoremas, títulos de apartados y la incidencia de las representaciones de carácter verbal es menor. Las representaciones gráficas tienen cierta precisión, existiendo también cierta precisión en la transcripción de elementos teóricos, aunque posiblemente no en todas las unidades (desviación típica muy alta, que reduce la significatividad del valor elevado de la media). Estas unidades también destacan por una buena presentación y ortografía (aunque faltan signos de puntuación necesarios), así como el uso de notaciones y representaciones personales en su desarrollo.

Alumnos con todas sus unidades teóricas en GT1: A19 (x2), A24 (x2), A25 (x2) y A29 (x2).

Alumnos con alguna de sus unidades teóricas en GT1: A1 (UT2), A27 (UT1), A30 (UT2), A31 (UT1) y A33 (UT2 y UT3).

Grupo Teórico 2 (GT2, 25 unidades integrantes): Estas unidades se caracterizan por la transcripción de un gran número de los ejemplos y representaciones gráficas de que consta el desarrollo del tema, pero esa completitud es muy baja en el caso de los enunciados, teoremas, observaciones, comentarios y aclaraciones, es decir, en todas las representaciones de carácter verbal. Además, estas unidades tienen otros aspectos negativos como la poca precisión de las representaciones gráficas realizadas, la mala presentación y la baja presencia de los signos de puntuación necesarios en el texto escrito.

Alumnos con todas sus unidades teóricas en GT2: A21 (x1), A23 (x2), A37 (x3), A39 (x3) y A41 (x3).

Alumnos con alguna de sus unidades teóricas en GT2: A1 (UT3), A4 (UT1), A6 (UT3), A8 (UT1 y UT3), A9 (UT1), A10 (UT3), A12 (UT2), A14 (UT1), A15 (UT1), A30 (UT1), A36 (UT2) y A38 (UT3).

Grupo Teórico 3 (GT3, 2 unidades integradas): Estas unidades destacan por la presencia de un estilo propio muy marcado tanto en la organización como, sobre todo, en la presentación de la unidad. También, por la precisión de las representaciones gráficas recogidas. En el aspecto negativo, destacamos la mala ortografía y puntuación de las unidades que quedan recogidas en este grupo teórico.

Alumnos con todas sus unidades teóricas en GT3: No hay.

Alumnos con alguna de sus unidades teóricas en GT3: A7 (UT3) y A16 (UT1).

Grupo Teórico 4 (GT4, 22 unidades integrantes): Las unidades pertenecientes a este grupo se caracterizan por una buena presentación y por tener continuidad en el desarrollo de los temas (ausencia de partes teóricas pertenecientes a otros temas distintos del desarrollado). No obstante, el número de observaciones y comentarios que quedan recogidos es bajo, incluyendo los personales del alumno sobre su comprensión de lo abordado. También destacan negativamente por la mala ortografía y un uso poco adecuado de los signos de puntuación, aunque sí que aparezcan bastantes de los necesarios. Aunque no haya sido destacado como significativo en el contraste de medias, la puntuación en la componente sobre la precisión en la transcripción de elementos es baja, lo que se asocia con la presencia de bastantes errores relacionados con la transcripción de elementos teóricos.

Alumnos con todas sus unidades teóricas en GT4: A5 (x1), A11 (x3), A32 (x3), A34 (x3) y A40 (x1).

Alumnos con alguna de sus unidades teóricas en GT4: A1 (UT1), A6 (UT1), A7 (UT1 y UT2), A12 (UT1 y UT3), A16 (UT2 y UT3), A26 (UT2), A36 (UT1) y A38 (UT1).

Grupo teórico 5 (GT5, 13 unidades integrantes): Las unidades agrupadas aquí se caracterizan de manera muy clara por una transcripción muy baja de los ejemplos y de las gráficas, es decir, de las representaciones de tipo simbólico y gráfico. En relación con aspectos positivos, estas unidades se caracterizan por la alta presencia de anotaciones personales del alumno, especialmente relacionadas con su comprensión y la presencia de dudas, aunque la alta desviación típica de la media en esta componente parece revelar que no en todas las unidades este hecho se presenta con la misma intensidad. La ortografía y puntuación de la unidad también es adecuada, pero existen problemas con la continuidad de la unidad y con el uso de los márgenes y los espacios, aspectos que son destacados negativamente de forma significativa en estas unidades.

Alumnos con todas sus unidades en GT5: A2 (x3) y A35 (x3).

Alumnos con alguna de sus unidades en GT5: A3 (UT2 y UT3), A4 (UT3), A6 (UT2), A8 (UT2), A9 (UT3) y A17 (UT1).

Grupo Teórico 6 (GT6, 26 unidades integrantes): Las unidades que pertenecen a este grupo se caracterizan por recoger un gran número de los elementos teóricos que constituyen el discurso del docente: tanto enunciados, teoremas, fórmulas, títulos de apartados, ejemplos, representaciones gráficas y, también, observaciones y comentarios. Las representaciones gráficas son precisas. Estas unidades también presentan una ortografía y puntuación correctas, pero se caracterizan negativamente por una mala presentación.

Alumnos con todas sus UT en GT6: A13 (x3), A20 (x1), A22 (x2) y A28 (x2).

Alumnos con alguna de sus unidades en GT6: A3 (UT1), A4 (UT2), A9 (UT2), A10 (UT1 y UT2), A14 (UT2 y UT3), A15 (UT2 y UT3), A17 (UT2 y UT3), A26 (UT1), A27 (UT2), A31 (UT2 y UT3), A33 (UT1), A36 (UT3) y A38 (UT2).

V.3.2. ANÁLISIS CLÚSTER EN LAS UNIDADES PRÁCTICAS

Utilizando el programa SPSS, hemos llevado a cabo un análisis clúster con las mismas consideraciones y características anteriormente comentadas en el análisis para las UT: análisis clúster jerárquico, de tipo *aglomerativo*, utilizando la distancia euclídea al cuadrado y el método de Ward. Mostramos el dendograma obtenido en el desarrollo de este análisis en la Figura V.7.:

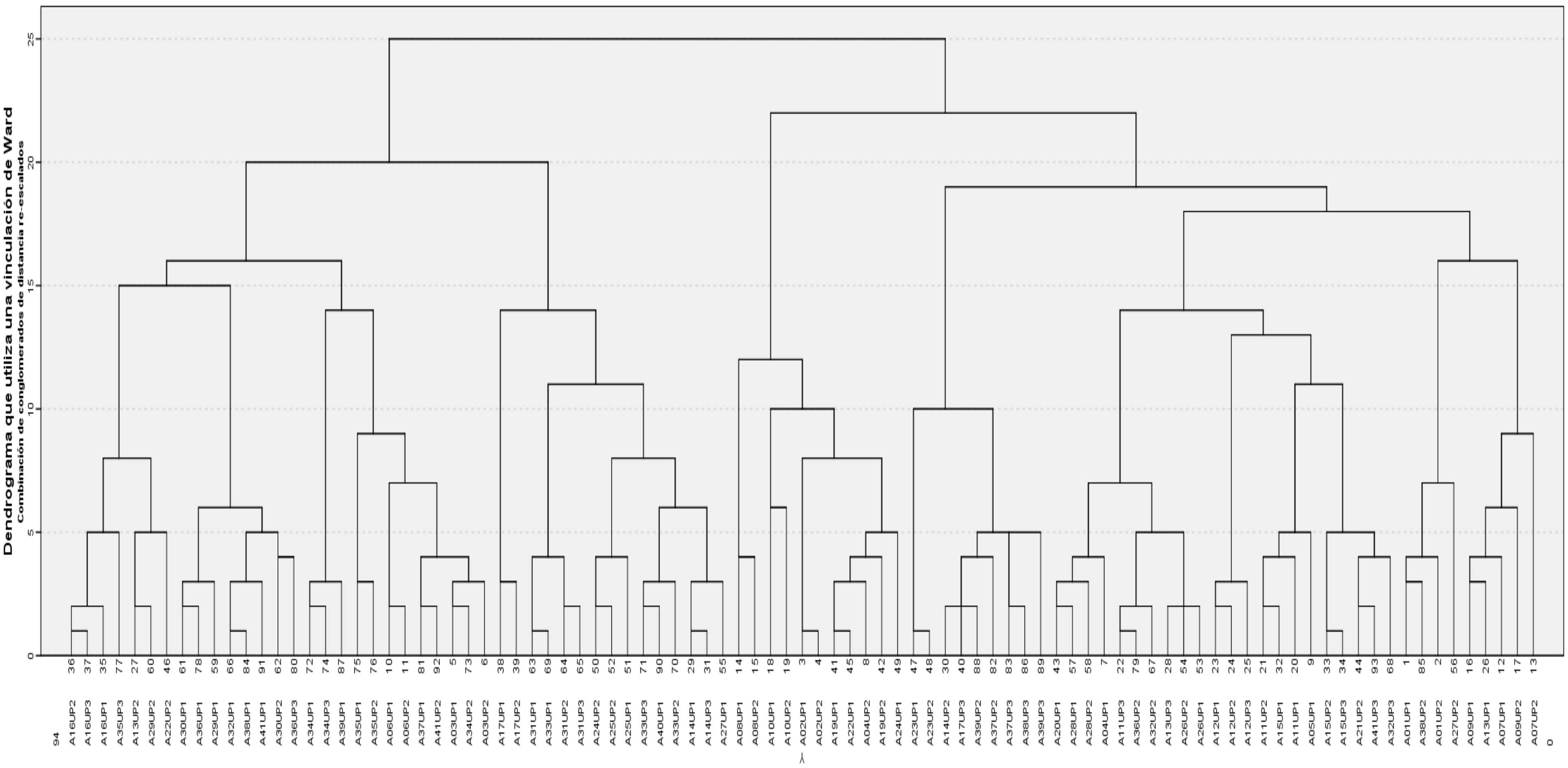


Figura V.7. Dendograma para el análisis clúster en las unidades prácticas.

Un estudio visual del dendograma nos hace ver cómo, en el último paso del análisis clúster jerárquico *aglomerativo*, se produce la unión de dos grandes grupos o clústeres de unidades prácticas, cada uno de ellos conteniendo aproximadamente la mitad de unidades. Cada uno de estos grandes grupos se ha formado a partir de la unión de otros grupos más pequeños.

Estudio de los dos grandes grupos de unidades prácticas: contraste de medias en las diferentes componentes

En primer lugar, realizaremos un estudio de estos dos grandes grupos que determina el análisis clúster, para conocer si esta configuración de división es pertinente, presenta características de interés y nos es útil para el desarrollo de la investigación. En la parte izquierda del dendograma de la Figura V.7, todas las UP confluyen en un gran grupo, que llamaremos Gran Grupo para las Unidades Prácticas 1 (GGP1), y que consta de 42 unidades. La Figura V.8 muestra el recorte del dendograma completo en el que pueden visualizarse todas las UP que conforman este gran grupo, y la determinación progresiva de éste en el avance del análisis clúster.

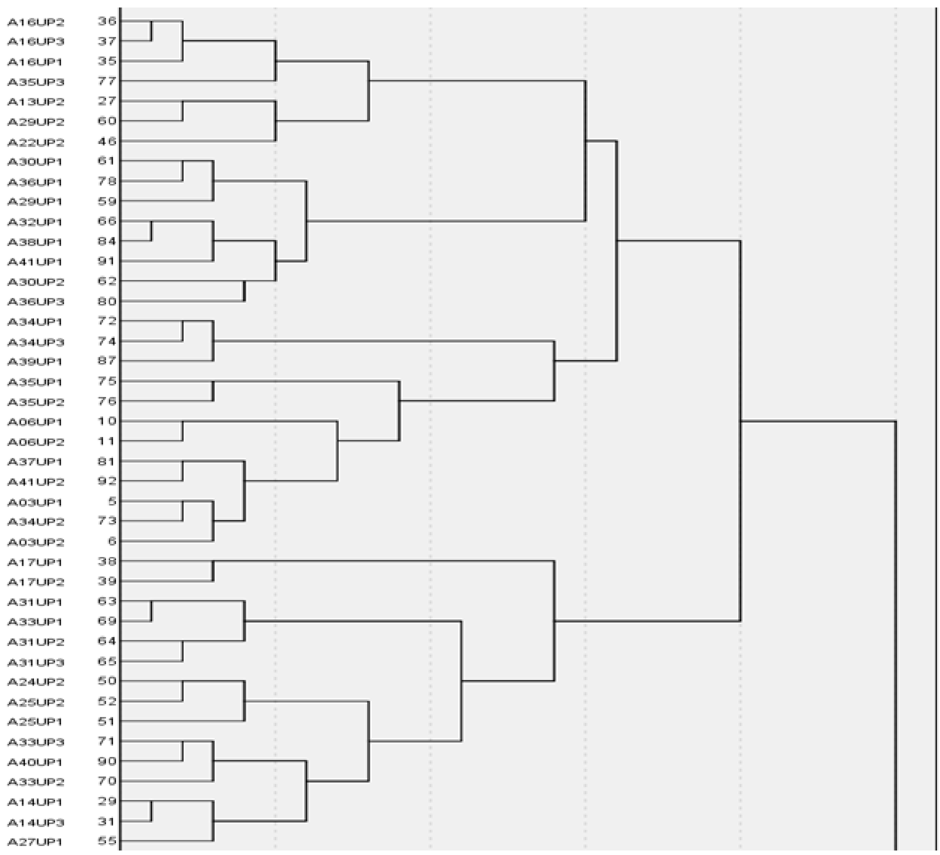


Figura V.8. Extracto del dendograma que corresponde a la formación del GGP1.

En la parte derecha del dendograma mostrado en la Figura V.7 también se configura un gran grupo, que llamaremos Gran Grupo para las unidades prácticas 2 (GGP2). Este grupo o clúster se compone de 51 UP, que se van uniendo progresivamente en el desarrollo del análisis. La Figura V.9 muestra el extracto del dendograma en el que se visualiza este proceso de formación progresiva del GGP2.

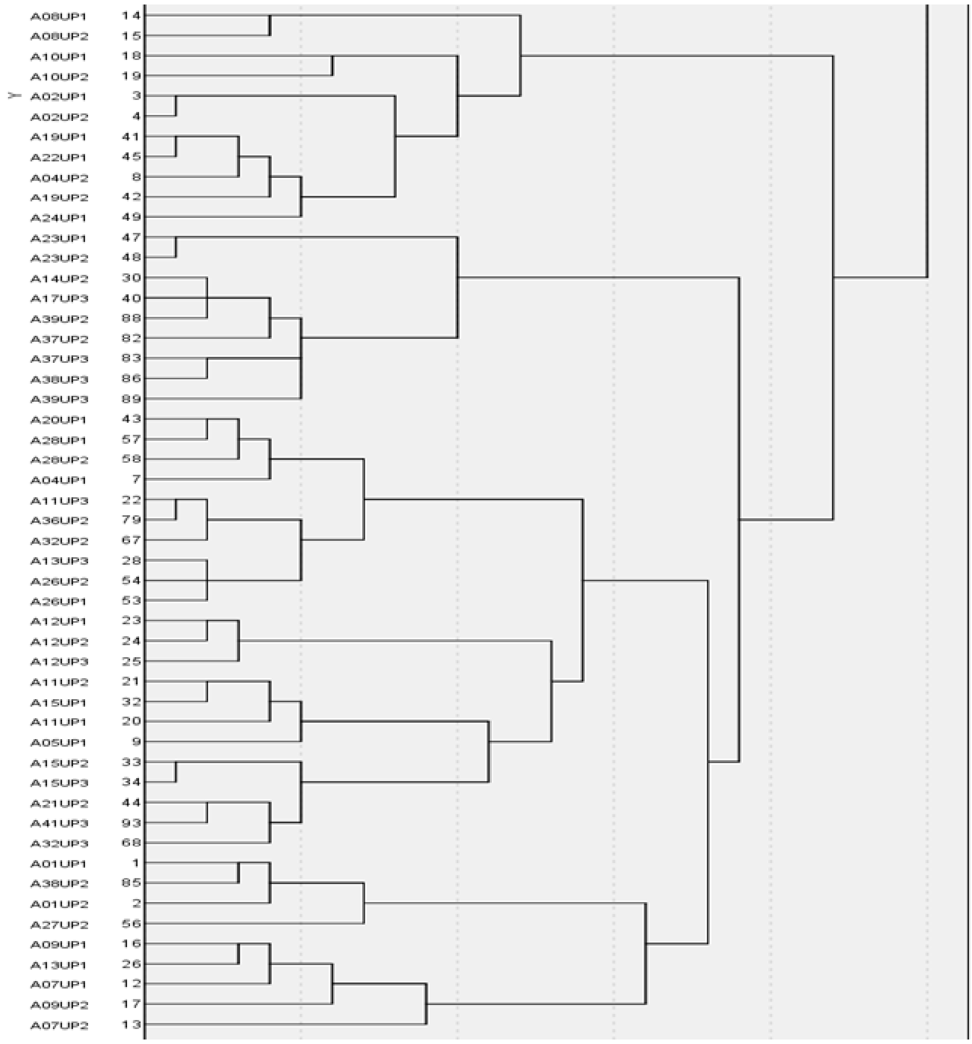


Figura V.9. Extracto del dendograma que corresponde a la formación del GGP2.

Para saber cuáles son los rasgos que caracterizan a los dos grandes grupos que estamos estudiando, vamos a utilizar como dato fundamental tanto la media como la desviación típica del GGP1 y el GGP2 en cada una de las componentes. Un contraste de las medias nos permitirá conocer cuáles son las características que diferencian un grupo de otro de una manera más clara y estadísticamente significativa. A continuación, en las Tablas V.20 y V.21, presentamos las medias y desviaciones típicas para cada componente, partiendo la información en dos tablas para una mejor lectura de sus datos. La Tabla V.20 contiene la información relativa a las componentes 1 a 8, mientras que la Tabla V.21 hace lo propio con las componentes 9 a 16.

Gran Grupo Práctico		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7	Componente 8
GG P1	M	0,2999	0,3718	0,2553	-0,5868	0,0562	0,0562	0,2292	-0,1500
	N	42	42	42	42	42	42	42	42
	DT	0,9956	0,6074	1,0237	1,1019	0,9690	1,0219	1,1732	0,8270
GG P2	M	-0,2470	-0,3061	-0,2103	0,4832	-0,0463	-0,0462	-0,1888	0,1235
	N	51	51	51	51	51	51	51	51
	DT	0,9431	1,1514	0,9385	0,5630	1,0321	0,9894	0,7943	1,1157

Tabla V.20. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 1 a 8 en los dos grandes grupos prácticos.

Gran Grupo Práctico		Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13	Componente 14	Componente 15	Componente 16
GG P1	M	-0,1335	0,1304	0,0484	-0,1249	0,2369	0,1363	0,0549	0,2816
	N	42	42	42	42	42	42	42	42
	DT	0,8832	1,0194	0,8201	1,0684	0,8513	1,0758	0,8746	0,8047
GG P2	M	0,1100	-0,1074	-0,0399	0,1029	-0,1951	-0,1123	-0,0452	-0,2319
	N	51	51	51	51	51	51	51	51
	DT	1,0831	0,9807	1,1335	0,9382	1,0769	0,9287	1,0992	1,0897

Tabla V.21. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 9 a 16 en los dos grandes grupos prácticos.

La realización de contrastes de medias entre GGP1 y GGP2 nos permitirá conocer si se acepta o no estadísticamente la igualdad de medias de los dos grupos en cada una de las dieciséis componentes. La aceptación indicaría que no hay diferencias importantes en el comportamiento global de ambos grupos en esa componente. El rechazo sí marcaría la presencia de una diferencia significativa en el comportamiento global de ambos grupos, lo que nos ayudaría a caracterizarlos y a discriminar los rasgos que los diferencian.

En aquellas componentes en las que la distribución de los dos grandes grupos sea una distribución normal y se acepte estadísticamente la igualdad de sus varianzas, la prueba que aplicaremos para realizar el contraste de medias será la prueba T para muestras independientes, basada en la distribución t de Student. En las componentes en las que alguno de los grandes grupos no presente una distribución normal o en las que se rechace la igualdad de varianzas de los dos grandes grupos, la prueba que aplicaremos será la prueba no paramétrica equivalente a la anterior: la prueba U de Mann-Whitney para muestras independientes.

De esta forma, el primer aspecto a analizar es en qué componentes se cumplen los dos criterios necesarios para la aplicación de la prueba T. Para saber si la distribución de los grandes grupos es normal o no, hemos aplicado pruebas de normalidad. La prueba de referencia aplicada para el GGP2 ha sido la de Kolmogorov-Smirnov, al tener más de 50 elementos, cantidad que suele tomarse como referencia. La prueba para el GGP1 ha sido la de Shapiro-Wilk (grupo con menos de 50 unidades).

Los resultados obtenidos en la aplicación de las pruebas de normalidad se recogen en el Anexo D.12 (en el CD). Esas pruebas muestran la aceptación de la hipótesis de normalidad en los dos grandes grupos, con un nivel de significación fijado de 0’05, para las componentes número 3, 6, 9, 10, 11, 13, 14 y 15. En las componentes 1, 4, 5, 7, 12 y 16 se rechaza la hipótesis de normalidad en uno de los dos grandes grupos, mientras que en las componentes 2 y 8 la hipótesis se ha rechazado en ambos.

En las componentes en las que sí que se ha superado la prueba de normalidad, hemos estudiado a continuación si se aceptaba o se rechazaba estadísticamente (con el mismo nivel de significación anterior) que las distribuciones de los dos grandes grupos tuvieran la misma varianza. Para ello, hemos aplicado la prueba de Levene, donde se lleva a cabo el contraste de la hipótesis de la igualdad de las varianzas (es decir, diferencia de varianzas igual a 0). Los resultados obtenidos al aplicar la prueba están recogidos en la Tabla V.22, en la que se ha utilizado el código de colores habitual. Se han marcado en verde las celdas con los p-valores superiores al nivel de significación fijado, lo que indica la aceptación en la componente de la igualdad de varianzas en las distribuciones de los dos grupos. En color rojo hemos señalado las celdas con los p-valores inferiores a 0’05, que evidencian la no aceptación de esta hipótesis. En estas últimas componentes no podrá aplicarse la prueba T, al no cumplirse el criterio de homocedasticidad u homogeneidad de varianzas.

Número de componente	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Signif. (p-valor)
Componente 3	1,004	1	91	0,319
Componente 6	0,163	1	91	0,688
Componente 9	1,720	1	91	0,193
Componente 10	0,049	1	91	0,825
Componente 11	3,122	1	91	0,081
Componente 13	1,399	1	91	0,240
Componente 14	0,935	1	91	0,336
Componente 15	2,521	1	91	0,116

Tabla V.22. Resultados de la prueba de Levene en los grandes grupos prácticos.

En este caso, se supera la hipótesis de homocedasticidad en todas las componentes en las que ambos grupos habían superado las pruebas de normalidad. Así, aplicaremos la prueba T para dos muestras independientes en las componentes 3, 6, 9, 10, 11, 13, 14 y 15. En las componentes restantes, al no haberse cumplido el criterio de normalidad en las distribuciones de ambos grupos, se aplicará la prueba no paramétrica equivalente: la prueba U de Mann-Whitney.

Los resultados obtenidos al aplicar la prueba T en las componentes donde la prueba puede desarrollarse están recogidos en la Tabla V.23. El nivel de significación fijado es de 0’05, y el código de colores es el habitual y ya explicado.

Número de componente	Prueba T para la igualdad de medias						
	t	gl	Signif. (bilate-ral)	Diferencia de medias	Error típico de la diferencia	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
						Inferior	Superior
Componente 3	-2,285	91	0,025	-0,46556	0,20375	-0,87028	-0,06085
Componente 6	-0,489	91	0,626	-0,10240	0,20923	-0,51802	0,31322
Componente 9	1,171	91	0,245	0,24353	0,20795	-0,16954	0,65659
Componente 10	-1,143	91	0,256	-0,23778	0,20802	-0,65099	0,17544
Componente 11	-0,422	91	0,674	-0,08827	0,20931	-0,50403	0,32749
Componente 13	-2,112	91	0,037	-0,43199	0,20456	-0,83832	-0,02566
Componente 14	-1,196	91	0,235	-0,24861	0,20788	-0,66155	0,16432
Componente 15	-0,479	91	0,633	-0,10017	0,20925	-0,51582	0,31547

Tabla V.23. Resultados al aplicar la prueba T en las componentes posibles.

La prueba T pone de manifiesto la aceptación de la hipótesis estadística de la igualdad de las medias de los dos grandes grupos en las componentes número 6, 9, 10, 11, 14 y 15. En estas seis componentes, el intervalo de confianza al 95% construido para la diferencia de las medias contiene al 0, con un p-valor asociado superior a 0’05. En las dos componentes restantes, números 3 y 13, el intervalo de confianza para la diferencia de las medias no contiene al 0, y el p-valor es inferior al nivel de significación fijado, 0’05, por lo que se rechaza la hipótesis de la igualdad de las medias en esos casos.

En las componentes donde no se ha podido aplicar la prueba T (números 1, 2, 4, 5, 7, 8, 12 y 16), se ha desarrollado la prueba equivalente no paramétrica: la prueba U de Mann-Whitney para muestras independientes, con un nivel de significación de 0’05. El estadístico U de esta prueba, para un caso como el que aquí tenemos, con grupos por encima de veinte unidades, se distribuye aproximadamente como una distribución normal, con una media igual al semiproducto de los cardinales de los grupos (en este caso, 42·51/2=1071) y con una desviación típica, incorporando a la fórmula los datos de nuestro estudio, igual a $\sqrt{\frac{42\cdot 51\cdot(42+51+1)}{12}}$ = 129’534. Por lo tanto, una vez obtenido el valor del estadístico en cada componente, se calcula el valor tipificado, a partir del cual puede obtenerse fácilmente el p-valor asociado, a partir de la tabla de la distribución normal estándar, que nos permitirá aceptar o rechazar la igualdad de medias. La Tabla V.24, recoge toda la información relativa a la aplicación de la prueba U de Mann-Whitney en estas componentes: el valor del estadístico U, el valor Z tipificado y el p-valor correspondiente, utilizando el código de colores habitual.

Número de componente	Prueba U de Mann-Whitney		
	Valor del estadístico U	Valor tipificado Z	Signif. (p-valor)
Componente 1	714,000	-2,756	0,006
Componente 2	725,000	-2,671	0,008
Componente 4	1668,000	4,609	<0,001
Componente 5	1047,000	-0,185	0,853
Componente 7	873,000	-1,529	0,126
Componente 8	1264,000	1,490	0,136
Componente 12	1215,000	1,112	0,266
Componente 16	713,000	-2,764	0,006

Tabla V.24. Resultados de la prueba U de Mann-Whitney en el resto de componentes.

Así, el análisis estadístico desarrollado para comparar las medias de los dos grandes grupos prácticos en cada componente nos ha proporcionado los siguientes resultados (para el nivel de significación fijado, de 0'05):

- Se acepta la hipótesis estadística de la igualdad de las medias en los dos grandes grupos para las componentes 5 a 12, 14 y 15.
- Se rechaza dicha hipótesis de la igualdad de medias en los dos grandes grupos para las componentes 1 a 4, 13 y 16.

Este análisis nos resultará de gran ayuda para poder caracterizar mejor los dos grandes grupos de unidades.

Estudio de los dos grandes grupos de unidades prácticas: caracterización de los grupos

Una vez completado este análisis comparativo de las medias de los dos grandes grupos en cada componente, ya conocemos en qué componentes se producen las diferencias entre un grupo y otro que pueden considerarse como estadísticamente significativas. Las Tablas V.25 y V.26 pretenden ayudar a visualizar los resultados obtenidos en el análisis. Estas tablas presentan la misma información que contenían las Tablas V.20 y V.21, con las medias por componente, pero añadiendo el código de colores ya utilizado en otras tablas de naturaleza análoga a esta. Se usa el color verde para marcar aquellas medias significativamente superiores a la media de esa componente en el otro grupo. En ese caso, la media en este segundo grupo ha sido marcada con color naranja.

Gran Grupo Práctico		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7	Componente 8
GG P1	M	0,2999	0,3718	0,2553	-0,5868	0,0562	0,0562	0,2292	-0,1500
	N	42	42	42	42	42	42	42	42
	DT	0,9956	0,6074	1,0237	1,1019	0,9690	1,0219	1,1732	0,8270
GG P2	M	-0,2470	-0,3061	-0,2103	0,4832	-0,0463	-0,0462	-0,1888	0,1235
	N	51	51	51	51	51	51	51	51
	DT	0,9431	1,1514	0,9385	0,5630	1,0321	0,9894	0,7943	1,1157

Tabla V.25. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 1 a 8 en los dos GGP, marcando las medias cuyas diferencias son estadísticamente significativas.

Gran Grupo Práctico		Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13	Componente 14	Componente 15	Componente 16
GG P1	M	-0,1335	0,1304	0,0484	-0,1249	0,2369	0,1363	0,0549	0,2816
	N	42	42	42	42	42	42	42	42
	DT	0,8832	1,0194	0,8201	1,0684	0,8513	1,0758	0,8746	0,8047
GG P2	M	0,1100	-0,1074	-0,0399	0,1029	-0,1951	-0,1123	-0,0452	-0,2319
	N	51	51	51	51	51	51	51	51
	DT	1,0831	0,9807	1,1335	0,9382	1,0769	0,9287	1,0992	1,0897

Tabla V.26. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de las componentes 9 a 16 en los dos GGP, marcando las medias cuyas diferencias son estadísticamente significativas.

A continuación, y a partir de los resultados del contraste de medias, vamos a detallar cuáles son esos rasgos que caracterizan globalmente a cada uno de los dos grandes grupos. Además, indicamos cuáles son las unidades que han quedado encuadradas dentro de cada gran grupo, distinguiendo dos circunstancias. En primer lugar, señalaremos aquellos alumnos tales que todas sus UP están dentro de un mismo gran grupo, lo que parece mostrar una mayor homogeneidad en su comportamiento a lo largo de los temas analizados. Posteriormente, se indicarán aquellas UP de alumnos que tienen alguna otra unidad práctica en el otro gran grupo, lo que denotan un comportamiento menos homogéneo.

Gran Grupo Práctico 1 (GGP1, 42 unidades integrantes): Este gran grupo se caracteriza por un mayor número de ejercicios registrados e intentados, incluyendo la posible presencia de actividades a mayores de las planteadas, aunque eso haga que exista un mayor número de errores cometidos. También es relativamente alto el número de comentarios, aclaraciones y explicaciones, por lo que estas unidades son más completas. Además, la presentación de estas unidades es, en general, buena; las representaciones de tipo simbólico suelen tener cierta precisión, la acentuación es adecuada y en estas unidades se suelen rehacer los ejercicios cuyos intentos de resolución han sido poco satisfactorios.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP1: A3 (x2), A6 (x2), A16 (x3), A25 (x2), A29 (x2), A30 (x2), A31 (x3), A33 (x3), A34 (x3), A35 (x3) y A40 (x1).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP1: A13 (UP2), A14 (UP1 y UP3), A17 (UP1 y UP2), A22 (UP2), A24 (UP2), A27 (UP1), A32 (UP1), A36 (UP1 y UP3), A37 (UP1), A38 (UP1), A39 (UP1) y A41 (UP1 y UP2).

Gran Grupo Práctico 2 (GGP2, 51 unidades integrantes): Este gran grupo se caracteriza por un menor número de ejercicios registrados e intentados, incluyendo la no presencia de actividades a mayores de las propuestas, siendo menor también la presencia de errores cometidos. También por un bajo número de comentarios, aclaraciones y explicaciones tanto de pasos y procesos como de las representaciones gráficas realizadas. Así, estas unidades son, en general, menos completas. Además, la presentación de estas unidades es pobre, existe poca precisión en las representaciones simbólicas utilizadas, una mala acentuación y no se suelen rehacer aquellos ejercicios cuyos intentos de resolución han sido poco satisfactorios.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP2: A1 (x2), A2 (x2), A4 (x2), A5 (x1), A7 (x2), A8 (x2), A9 (x2), A10 (x2), A11 (x3), A12 (x3), A15 (x3), A19 (x2), A20 (x1), A21 (x1), A23 (x2), A26 (x2) y A28 (x2).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP2: A13 (UP1 y UP3), A14 (UP2), A17 (UP3), A22 (UP1), A24 (UP1), A27 (UP2), A32 (UP2 y UP3), A36 (UP2), A37 (UP2 y UP3), A38 (UP2 y UP3), A39 (UP2 y UP3) y A41 (UP3).

A diferencia de lo que sucedía para los tres grandes grupos que se determinaban en el análisis clúster para las unidades teóricas, en este caso el EI sí que ha considerado como útil la división en dos GGP planteada por el análisis de las UP. Los rasgos que caracterizan a ambos grandes grupos están entre las características que el EI, a priori, ha considerado como más relevantes dentro de las UP, como son las relacionadas con la completitud de la unidad, la realización de actividades y aspectos relacionados con su corrección y el hecho de rehacer algunas actividades.

No obstante, que la media de un gran grupo sea alta (o baja) en alguna de las componentes no quiere decir que todos los alumnos que han quedado encuadrados dentro del grupo presenten las características asociadas a la componente con una intensidad alta (o baja). O quizá sólo presenten algunos de los rasgos que caracterizan al gran grupo, lo que haya hecho que estén más cercanos a un gran grupo que al otro y, por eso, han quedado encuadrados en el mismo.

Tomando como base la división general anterior, y para poder caracterizar mejor diferentes comportamientos entre los alumnos de un mismo grupo, vamos a establecer diferentes subgrupos dentro de cada grupo. Para ello, volveremos a tener como referencia principal el análisis clúster jerárquico *aglomerativo* ya realizado, y el dendograma obtenido en él (Figura V.7), fijándonos en los pasos previos al considerado anteriormente para la creación de los dos grandes grupos. Para saber cuántos subgrupos coger hemos tenido en cuenta algunos criterios, que explicamos a continuación. Uno de ellos ha sido la intención de no crear grupos de unidades ni demasiado pequeños (comportamientos demasiado personales que nos dificulten el establecimiento de un número razonable de verdaderos perfiles de elaboración del cuaderno) ni demasiado grandes (que puedan albergar diferencias importantes en algunos aspectos de las unidades que los componen). Otro criterio ha sido la mayor utilidad y pertinencia percibida a una división frente a otras posibles, de acuerdo a sus características principales (diferencias que se evidencian entre unidades, componentes de relevancia involucradas en la caracterización).

División en subgrupos de los grandes grupos prácticos: contraste de medias en las diferentes componentes

Existen diferentes posibilidades para determinar divisiones en subgrupos de los dos grandes grupos principales ya explicados. Estas posibilidades se determinan según el nivel en el que se detenga el avance del análisis clúster jerárquico *aglomerativo*, que va progresivamente creando grupos mayores.

Tras explorar y valorar diferentes posibilidades, la división en subgrupos que nos ha parecido óptima teniendo en cuenta los dos criterios anteriormente expuestos es la que divide al gran grupo GGP1 en cuatro subgrupos diferentes y al gran grupo GGP2 en seis subgrupos diferentes.

En la Figura V.8 se visualiza un extracto del dendograma, con las unidades que terminan confluyendo en el gran grupo GGP1. En este gran grupo hemos determinado la existencia de cuatro subgrupos diferentes, que presentamos a continuación empezando por la parte superior de esa Figura V.8 y descendiendo progresivamente. En la parte superior tenemos un primer subgrupo del gran grupo, que está compuesto por 7 unidades prácticas, y que denotaremos como **GGP1S1**. Debajo de él, se encuentra un segundo subgrupos con 8 unidades, que llamaremos **GGP1S2**. Estos dos grupos se unen poco después para formar un grupo mayor, pero preferimos conservar los dos subgrupos puesto que presentan diferencias en sus medias que evidencian rasgos característicos importantes que discriminan uno y otro. Por debajo de los dos subgrupos anteriores se conforma un tercer subgrupo, **GGP1S3**, que se compone de 12 unidades. Por último, en la parte inferior de esa figura, se crea un cuarto subgrupo que llamaremos **GGP1S4** y que contiene a un total de 15 unidades.

En la Figura V.9 puede verse el extracto del dendograma completo con todas las unidades que, en el transcurso del análisis, terminan formando parte del gran grupo GGP2. En ese gran grupo vamos a considerar la existencia de seis subgrupos diferentes que, como antes, comenzamos presentando por la parte superior según aparecen en la Figura V.9, y descendiendo progresivamente. En la parte superior de la Figura se encuentra un primer subgrupo formado por 11 unidades y que denotaremos como **GGP2S1**. Debajo de él hay otro subgrupo con 9 unidades y al que llamaremos **GGP2S2**. Si continuamos bajando, encontramos un tercer subgrupo formado por 10 unidades y al que nos referiremos como **GGP2S3**. Inmediatamente inferior a éste subgrupo aparece un cuarto subgrupo, **GGP2S4**, de 12 unidades. Estos dos subgrupos, GGP2S3 y GGP2S4, se unen en el avance del análisis poco después, pero nos ha interesado mantener su división puesto que se diferencian en algunas características relevantes, aunque tengan otras en común. En la parte inferior de la Figura V.9 se sitúan dos subgrupos pequeños, pero que parecen tener características muy bien definidas y diferentes al resto de unidades. Son el subgrupo **GGP2S5**, conformado por tan sólo 4 unidades, y el subgrupo **GGP2S6**, con 5 unidades que lo integran.

A continuación mostramos dos tablas que contienen cuál es la media y la desviación típica de los diferentes subgrupos que hemos determinado en todas las componentes de análisis. La primera tabla, Tabla V.27, recoge los datos para los cuatro subgrupos que dan lugar al gran grupo GGP1 en el avance del análisis clúster jerárquico. La segunda tabla, Tabla V.28, hace lo propio con los seis subgrupos que confluyen posteriormente en el gran grupo GGP2. Para una mejor lectura de cada una de las dos tablas, dado que el número de componentes es elevado (dieciséis), presentamos dichas tablas en formato apaisado, una por página.

Subgrupos del GGP1		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7	Componente 8	Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13	Componente 14	Componente 15	Componente 16
GGP 1S1	M	-0,281	0,094	0,688	-0,986	-0,158	0,266	-0,250	-0,497	-0,786	-1,070	0,698	0,680	-0,045	0,940	0,177	0,522
	N	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	DT	0,480	0,845	1,134	1,156	1,241	0,376	0,760	0,537	0,472	0,921	0,697	1,177	0,580	0,270	0,711	0,719
GGP 1S2	M	-0,732	0,779	0,752	-0,268	0,163	-1,091	0,812	-0,028	-0,172	0,756	0,014	-0,024	0,210	-0,326	0,536	0,722
	N	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	DT	0,686	0,351	0,784	0,646	0,773	0,395	0,860	0,899	0,690	0,944	1,186	0,684	0,980	0,768	0,583	0,919
GGP 1S3	M	0,433	0,109	-0,500	-1,684	0,159	-0,332	-0,308	0,272	0,148	0,004	-0,259	-0,529	0,254	-0,153	-0,171	0,104
	N	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	DT	0,568	0,563	1,022	0,526	0,894	0,951	1,035	0,791	1,008	0,719	0,656	1,289	1,097	1,177	0,942	0,647
GGP 1S4	M	1,015	0,495	0,393	0,307	0,017	0,880	0,572	-0,391	-0,034	0,458	0,009	-0,231	0,369	0,240	-0,078	0,077
	N	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
	DT	0,988	0,505	0,803	0,728	1,060	0,760	1,374	0,837	0,927	0,870	0,653	0,853	0,702	1,203	0,977	0,843

Tabla V.27. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de cada componente en cada uno de los subgrupos que confluyen en el GGP1.

Subgrupos del GGP2		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7	Componente 8	Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13	Componente 14	Componente 15	Componente 16
GGP 2S1	M	-0,449	-1,068	-0,288	0,392	0,266	0,123	0,081	-0,344	1,154	-0,289	0,493	0,157	0,312	-0,091	-0,582	0,907
	N	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	DT	0,772	0,897	1,427	0,666	1,066	1,059	0,976	0,648	0,294	1,014	1,007	1,168	1,193	0,697	0,940	1,133
GGP 2S2	M	-0,274	0,373	-0,727	0,256	0,550	0,145	-0,500	-1,217	0,192	-0,143	0,264	0,052	-0,946	-0,456	0,524	-1,004
	N	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
	DT	0,898	0,636	0,447	0,605	0,656	1,353	0,538	0,684	0,974	1,259	0,771	0,746	1,072	0,479	1,048	0,572
GGP 2S3	M	0,062	0,550	-0,193	0,685	0,334	-0,320	-0,652	1,094	0,598	-0,333	-0,567	0,298	0,318	-0,192	0,274	-0,514
	N	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
	DT	0,886	0,942	0,761	0,442	0,507	0,639	0,375	0,462	0,448	0,795	0,854	0,710	0,598	1,186	0,805	0,699
GGP 2S4	M	-0,720	-0,025	-0,120	0,397	-0,999	0,214	-0,171	0,468	-0,459	0,288	-0,461	0,652	-0,566	0,242	-0,538	-0,115
	N	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	DT	0,705	0,766	0,712	0,609	1,151	0,677	0,489	1,215	0,594	0,832	1,608	0,645	0,863	0,939	0,691	1,124
GGP 2S5	M	0,566	-0,944	1,049	0,861	-0,685	-0,573	0,267	0,293	-0,173	-1,024	0,453	-1,530	-1,019	-0,572	-0,966	-1,012
	N	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	DT	0,984	1,284	0,479	0,354	0,671	0,965	1,596	1,007	0,898	0,475	1,035	0,244	0,729	0,936	0,968	0,276
GGP 2S6	M	0,115	-1,730	-0,368	0,595	0,232	-0,418	0,296	0,663	-1,716	0,592	-0,088	-0,326	0,563	0,138	1,392	-0,439
	N	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	DT	1,518	1,124	0,625	0,376	0,631	1,375	0,764	0,725	1,302	0,805	0,568	0,504	0,973	1,382	1,135	0,731

Tabla V.28. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de cada componente en cada uno de los seis subgrupos que conforman el GGP2.

Seguiremos los mismos pasos ya indicados y utilizados en análisis anteriores para caracterizar mejor cuáles son los rasgos que distinguen a los diferentes subgrupos que se han determinado dentro de cada gran grupo práctico. Realizaremos un contraste de las medias de las componentes en los subgrupos, para poder conocer qué subgrupos presentan diferencias estadísticamente significativas con respecto a otros dentro de cada una de las componentes y cuáles no. De nuevo, dependiendo de si la distribución de las componentes en los subgrupos cumple o no las condiciones de normalidad y de homocedasticidad (u homogeneidad de varianzas), el análisis desarrollado será distinto: ANOVA en el primer caso y Kruskal-Wallis (equivalente no paramétrico) en el segundo.

Lo primero que debe estudiarse es si las distribuciones de cada componente en los diferentes subgrupos pueden considerarse estadísticamente normales o no. Para ello, aplicaremos la prueba de Shapiro-Wilk al tener todos los subgrupos un número de unidades inferior a 50. El Anexo D.13 (CD) presenta los resultados detallados de la aplicación de esta prueba, en la que se ha fijado un nivel de significación de 0’05. Dicha prueba ha aceptado la hipótesis de normalidad en la distribución de todos los subgrupos para las componentes número 1, 3, 6, 10, 11, 14, 15 y 16. En las componentes restantes, números 2, 4, 5, 7, 8, 9, 12 y 13, existe al menos un subgrupo en el que no se acepta la normalidad de la distribución para esta componente.

En aquellas componentes en las que sí se ha cumplido el criterio de normalidad, hemos pasado a estudiar si se cumple o no el criterio de homocedasticidad u homogeneidad de varianzas, es decir, si se acepta estadísticamente que las varianzas de la distribución son las mismas en todos los subgrupos. La prueba que se ha aplicado es, como en casos anteriores, la prueba de Levene, con un nivel de significación de 0’05. La Tabla V.29 contiene los resultados obtenidos en esta prueba, utilizando el mismo código de colores que en tablas anteriores de similar naturaleza, como las Tablas V.11, V.18 o V.22. Se han señalado en color verde aquellas celdas con p-valores superiores al valor de significación, lo que indica la aceptación de la hipótesis de igualdad de varianzas. En color rojo hemos marcado los p-valores inferiores a 0’05, que hacen que se rechace dicha hipótesis en la componente analizada.

Número de componente	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Signif. (p-valor)
Componente 1	1,621	9	83	0,122
Componente 3	2,266	9	83	0,025
Componente 6	1,449	9	83	0,181
Componente 10	0,602	9	83	0,791
Componente 11	2,372	9	83	0,019
Componente 14	1,933	9	83	0,058
Componente 15	0,549	9	83	0,834
Componente 16	1,496	9	83	0,163

Tabla V.29. Resultados de la prueba de Levene para los subgrupos de los GGP en las componentes con distribución estadísticamente normal.

La prueba de Levene pone de manifiesto la existencia de seis componentes, las numeradas como 1, 6, 10, 14, 15 y 16, en las que sí que se acepta la igualdad de varianzas en las distribuciones de todos los subgrupos. Por tanto, en estas seis componentes sí que puede efectuarse un análisis ANOVA para contrastar las medias de las distribuciones en los subgrupos, con un nivel de significación fijado de 0’05. En las componentes restantes, números 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12 y 13, al no cumplirse alguna de las dos condiciones (normalidad y homocedasticidad), el contraste de medias se realizará utilizando la prueba no paramétrica equivalente a ANOVA: la prueba de Kruskal-Wallis, con un nivel de significación fijado de 0’05.

Con la aplicación de una de estas dos pruebas (la que corresponda en cada caso), obtendremos la aceptación o el rechazo de la igualdad de las medias de todos los subgrupos en cada componente. En el caso de que se rechace la igualdad de medias, será necesario realizar análisis post-hoc por parejas para conocer en qué parejas de subgrupos se presenta una diferencia en sus medias que es considerada como significativa.

En el caso del análisis ANOVA, hemos llevado a cabo dos análisis distintos post-hoc por parejas, para tener mayor información: los tests de Scheffé y de Tukey. Hemos decidido utilizar estos dos tests por ser los más adecuados cuando hay que desarrollar un alto número de comparaciones por parejas (en este caso, 10·9/2=45), ya que en ese caso el test de Bonferroni funciona peor (el número de comparaciones por parejas son casi la mitad del número total de unidades). El test de Scheffé es más conservador que el test de Tukey, por lo que se han obtenido bastantes casos en los que se rechazaba la igualdad de medias con un nivel de significación al 95% para el test de

Tukey, pero no se rechazaba esa igualdad con el mismo nivel de significación para el test de Scheffé. Así, distinguiremos entre aquellas parejas donde se rechace la igualdad de medias para ambos tests (lo que indica mayor evidencia estadística de que las medias son significativamente diferentes) y aquellas donde la hipótesis sólo sea rechazada en la aplicación del test de Tukey. En todos los casos, el nivel de significación tomado como referencia ha sido 0’05.

En el caso del análisis de Kruskal-Wallis, el análisis post-hoc por parejas que hemos llevado a cabo es el test que proporciona automáticamente el software SPSS: el test de Dunn con la corrección de Bonferroni. En este caso, al tener que realizar 45 análisis por parejas, la corrección de Bonferroni consiste en multiplicar por 45 el p-valor obtenido en la prueba de Dunn, manteniendo el nivel de significación fijado de 0’05.

A continuación indicamos, componente por componente, cuáles son los resultados obtenidos al realizar estos análisis estadísticos, y qué información nos proporcionan con respecto a los diferentes subgrupos en cada componente.

COMPONENTE 1

En esta componente sí se cumplían los criterios de normalidad y homocedasticidad, por lo que se ha aplicado un análisis ANOVA. Dicho análisis nos ha proporcionado un valor del estadístico $F(9,83)=5'170$, con un p-valor asociado que es inferior a 0’001, y, por lo tanto, al nivel de significación fijado, 0’05. Así, este análisis rechaza la hipótesis de la igualdad de medias para esta componente en todos los subgrupos. La realización de los análisis post-hoc tanto de Scheffé como de Tukey detecta la existencia de tres parejas de subgrupos en los cuales no se acepta la hipótesis de la igualdad de sus medias en esta componente.

Una de esas parejas es la formada por los subgrupos GGP1S4 y GGP2S1. Para esta pareja, el test de Tukey establece un intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia de sus medias de (0’377, 2’552), con un p-valor asociado $p=0'001$. El test de Scheffé proporciona el intervalo (0’047, 2’882) para la diferencia de las medias, con un p-valor $p=0'036$. Así, se rechaza la igualdad de las medias en estos dos subgrupos.

Otra pareja en la que también es rechazada la igualdad de medias es la pareja compuesta por GGP1S4 y GGP2S4. Para esta pareja, el test de Tukey establece un intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia de sus medias de (0’674, 2’796), con un p-valor asociado que es inferior a 0’001. El test de Scheffé proporciona el intervalo

(0'352, 3'118) para la diferencia de las medias, con un p-valor p=0'003. Tanto para un test como para el otro, el 0 no pertenece a los intervalos de confianza y el p-valor es inferior a 0'05, lo que hace que rechacemos la hipótesis.

La tercera pareja en la que también se rechaza la igualdad de las medias en esta componente es la formada por GGP1S2 y GGP1S4. Para esta pareja, el test de Tukey establece un intervalo de confianza al 95% para la diferencia de las medias que no contiene al 0, (-2'947, -0'547), con un p-valor asociado p<0'001. Para el test de Scheffé, el intervalo de confianza es (-3'310, -0'184), con un p-valor p=0'014. De nuevo, ambos tests no aceptan la igualdad de sus medias en esta componente.

Además, hay otras tres parejas en las que el test de Tukey sí que rechaza, con el nivel de significación anterior, la igualdad de sus medias; pero en las que el test de Scheffé (más conservador) no lo hace. Indicamos a continuación cuáles son esas parejas y los resultados obtenidos al aplicar el test de Tukey. Una es la compuesta por los subgrupos GGP1S1 y GGP1S4, con un intervalo de confianza igual a (-2'550, -0'042) y un p-valor asociado p=0'037. Otra pareja es la formada por los subgrupos GGP1S3 y GGP2S4, con un intervalo de confianza igual a (0'035, 2'272) y un p-valor asociado p=0'038. La tercera pareja es la que componen los subgrupos GGP1S4 y GGP2S2, para la cual el intervalo de confianza para la diferencia de las medias es (0'133, 2'444) y el p-valor asociado es p=0'017.

En resumen, **la media de la componente 1 en el subgrupo GGP1S4 es significativamente superior a la media de esta componente tanto en el subgrupo GGP1S2 como en el subgrupo GGP2S1 y en GGP2S4.** Además, **aunque con menor significatividad, la media de esta componente en ese subgrupo, GGP1S4, también es superior a la media en el subgrupo GGP1S1 y en el subgrupo GGP2S2; y la media de la componente 1 en el subgrupo GGP1S3 es superior a la media de esta componente en GGP2S4.**

COMPONENTE 2

En esta componente no se cumplía el criterio de normalidad de las distribuciones en todos los subgrupos, por lo que hemos aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. Al aplicar esta prueba, obtenemos un valor del estadístico de 34'095, con un p-valor asociado que es inferior a 0'001. Así, esta prueba rechaza la hipótesis de la igualdad de las distribuciones en todos los subgrupos para esta componente. El análisis post-hoc por parejas de Dunn-Bonferroni ha detectado la existencia de seis parejas de subgrupos en las que se rechaza la hipótesis de la igualdad de sus distribuciones en esta componente.

Dos de esas parejas involucran al subgrupo GGP1S2. Una de ellas es la que forma con GGP2S1, para la cual se obtiene un estadístico de 4’170, resultado de dividir la diferencia en el promedio de los rangos de cada subgrupo (52’295) entre el error típico (12’542). El p-valor asociado a ese estadístico, tras la corrección de Bonferroni, es p=0’001, inferior a 0’05. La segunda pareja es la que forma con GGP2S6, donde al aplicar la prueba se obtiene un estadístico igual a 3’909, resultado de la división de la diferencia en el promedio de los rangos (60’150) entre el error típico (15’387). El p-valor asociado a este estadístico es p=0’004, también inferior a 0’05. En ambos casos, se rechaza la hipótesis de igualdad de las distribuciones para esta componente.

Otras dos parejas involucran al subgrupo GGP1S4. La primera es la que forma con GGP2S1, para la cual se obtiene un estadístico de 3’716, resultado de dividir la diferencia en el promedio de los rangos de cada subgrupo (39’812) entre el error típico (10’714). El p-valor asociado a ese estadístico, tras la corrección de Bonferroni, es p=0’009, inferior a 0’05. La segunda pareja es la que constituye con el subgrupo GGP2S6. En este caso, al dividir la diferencia en el promedio de los rangos (47’667) entre el error típico (13’938) obtenemos un valor del estadístico igual a 3’420, con un p-valor asociado de p=0’028, inferior a 0’05. En ambos casos, vuelve a ser rechazada la hipótesis de la igualdad de las distribuciones de los subgrupos involucrados.

Por último, hay dos parejas más en las que el subgrupo GGP2S3 aparece como miembro. La primera de ellas es la que conforma con el subgrupo GGP2S1. Para esta pareja, el valor obtenido en el estadístico de la prueba de Dunn es -4’074, resultado de dividir la diferencia en el promedio de rangos (-48’045, colocando como minuendo el valor para GGP2S1) entre el error típico (11’739). El p-valor asociado a este estadístico, tras realizar la corrección de Bonferroni, es p=0’002, que es inferior a 0’05. La segunda pareja es la formada con el subgrupo GGP2S6, para la cual se obtiene un estadístico igual a 3’781, resultado de la división de la diferencia en el valor promedio de los rangos (55’900) entre el error típico (14’783). El p-valor asociado es p=0’007, inferior a 0’05. En ambos casos queda rechazada la igualdad de las distribuciones.

En resumen, **la media de la componente 2 en el subgrupo GGP1S2 es significativamente superior a la media de esta componente tanto en el subgrupo GGP2S1 como en el subgrupo GGP2S6**. Asimismo, **la media de esta componente**

en el subgrupo GGP1S4 es significativamente superior a la media de esta componente en esos mismos dos subgrupos (GGP2S1 y GGP2S6). Igualmente, **la media de esta componente en el subgrupo GGP2S3 es significativamente superior a la media de la componente en los mismos dos subgrupos anteriormente indicados (GGP2S1 y GGP2S6).**

COMPONENTE 3

En esta componente sí que se cumple el criterio de normalidad de la distribución en todos los subgrupos, pero no sucede lo mismo con el criterio de homocedasticidad. Así, se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis, en la cual hemos obtenido un valor para el estadístico igual a 24’844, con un p-valor asociado de 0’003. Como el p-valor es inferior al nivel de significación fijado, 0’05, la prueba rechaza la igualdad de las distribuciones para esta componente en todos los subgrupos. La realización del análisis post-hoc de Dunn-Bonferroni ha aceptado la igualdad de las distribuciones en todas las parejas con el nivel de significación fijado de 0’05. Tan sólo al reducir el nivel de confianza al 90% (nivel de significación de 0’1), se han detectado dos parejas en las que se rechaza la igualdad.

Una de esas parejas es la formada por los subgrupos GGP1S2 y GGP2S2. En este caso, el valor del estadístico obtenido es 3’100, una vez que dividimos la diferencia en el valor promedio de los rangos (40’653) entre el error típico (13’115). El p-valor asociado, tras la corrección de Bonferroni, es p=0’087, que es superior a 0’05 pero inferior a 0’1, por lo que se rechaza la hipótesis con un nivel de confianza del 90%.

La segunda pareja donde también se detecta este rechazo con ese nivel de confianza es la que componen los subgrupos GGP2S2 y GGP2S5. Aquí, al dividir la diferencia en el valor promedio de los rangos (-50’528) entre el error típico (16’219), se obtiene un valor del estadístico igual a -3’115. El p-valor asociado, una vez realizada la corrección de Bonferroni, es p=0’083, que es superior a 0’05 pero inferior a 0’1.

En resumen, **al reducir el nivel de confianza al 90%, se detecta que la media de esta componente tanto en el subgrupo GGP1S2 como en el subgrupo GGP2S5 es superior a la media de la componente en GGP2S2.**

COMPONENTE 4

En esta componente no todos los subgrupos tenían una distribución que fuera estadísticamente normal, por lo que hemos aplicado la prueba no paramétrica de

Kruskal-Wallis. El valor obtenido al desarrollar esta prueba ha sido de 44’245, con un p-valor asociado inferior a 0’001 y, por tanto, al nivel de significación fijado. Así, se rechaza la hipótesis de la igualdad de distribuciones en esta componente para todos los subgrupos. El análisis post-hoc de Dunn-Bonferroni con un nivel de significación de 0’05 ha detectado la existencia de bastantes parejas en las que se rechaza la igualdad de distribuciones, con un peculiaridad: todas esas parejas tienen un subgrupo en común, el subgrupo GGP1S3. La Tabla V.30 recoge todas las parejas de subgrupos donde eso sucede, con los valores estadísticos que así lo justifican.

Pareja de subgrupos	Diferencia valor promedio de rangos	Error típico	Valor del estadístico	Signif. (p-valor con corrección Bonferroni)
GGP1S3-GGP1S4	-45,067	10,453	-4,311	0,001
GGP1S3-GGP2S1	-45,909	11,267	-4,075	0,002
GGP1S3-GGP2S2	-40,778	11,902	-3,426	0,028
GGP1S3-GGP2S3	-55,300	11,557	-4,785	<0,001
GGP1S3-GGP2S4	-44,667	11’019	-4,054	0,002
GGP1S3-GGP2S5	-65,250	15,583	-4,187	0,001
GGP1S3-GGP2S6	-52,400	14,367	-3,647	0,012

Tabla V.30. Resultados de la prueba de Dunn-Bonferroni en los subgrupos donde se rechaza la igualdad de las distribuciones (nivel de significación: 0’05).

Además, si rebajamos el nivel de confianza al 90%, obtenemos otras dos parejas más en las que también se rechaza la igualdad de las distribuciones. Las dos parejas también tienen un subgrupo en común, GGP1S1. En el primero caso, el segundo miembro de la pareja es GGP2S3, para la cual se obtiene un estadístico de 3’159 (división de la diferencia en el promedio de rangos, -42’014; entre el error típico, 13’301), con un p-valor asociado, tras la corrección de Bonferroni, de 0’071 (p-valor superior a 0’05, pero inferior a 0’1). La segunda pareja, además de GGP1S1, contiene al subgrupo GGP2S5, para la cual el estadístico toma un valor de 3’072 (resultado de dividir la diferencia del valor promedio de rangos, -51’964; entre el error típico, 16’917). El p-valor asociado a esta segunda pareja es p=0’096, inferior a 0’1.

En resumen, **la media de la componente 4 tanto en todos los subgrupos correspondientes al GGP2 (GGP2S1 a GGP2S6) como en el subgrupo GGP1S4 es significativamente superior a la media de esta componente en el subgrupo**

GGP1S3. Además, **con una menor significatividad, la media en esta componente tanto en el subgrupo GGP2S3 como en GGP2S5 es superior a la media en el subgrupo GGP1S1.**

COMPONENTE 5

En esta componente no se ha cumplido el criterio de normalidad, puesto que hay un subgrupo en el que se ha rechazado la hipótesis de la normalidad de su distribución. Es por ello que hemos aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. El valor del estadístico que obtenemos es 16’860, con un p-valor asociado de 0’051. El valor es superior, aunque por muy poco, al nivel de significación que hemos fijado de 0’05. Debido a esa cercanía del p-valor al nivel de significación, se ha llevado a cabo el análisis post-hoc de Dunn-Bonferroni para averiguar si la hipótesis de la igualdad de distribuciones se rechazaba de forma significativa en alguna de las parejas.

Al aplicar este análisis, hemos obtenido una pareja en la que se rechaza la hipótesis para el nivel de significación de 0’05: la formada por GGP2S2 y GGP2S4. Para esta pareja, el valor del estadístico es de 3’293 (resultado de dividir la diferencia en el valor promedio de los rangos, 39’194, entre el error típico, 11’902). El p-valor asociado, tras la corrección de Bonferroni, es p=0’045 (inferior a 0’05), por lo que rechazamos la hipótesis de la igualdad de distribuciones en esta pareja.

En resumen, **la media de la componente 5 en el subgrupo GGP2S2 es estadísticamente superior a la media de esta componente en el subgrupo GGP2S4.**

COMPONENTE 6

En esta componente todos los subgrupos han superado la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk, así como la prueba de homocedasticidad u homogeneidad de las varianzas. Por lo tanto, se ha aplicado un análisis ANOVA para realizar el contraste de las medias, que nos ha proporcionado un valor del estadístico F(9,83)=3’845, con un p-valor asociado inferior a 0’001, y, por lo tanto, a 0’05. Así, el análisis ha rechazado la igualdad de las medias en todos los subgrupos.

Tan sólo hay una pareja de subgrupos en los que ambos test post-hoc por parejas (el de Scheffé y el de Tukey) rechazan la igualdad de sus medias: la formada por GGP1S2 y GGP1S4. Para esta pareja, el test de Tukey establece un intervalo de confianza al 95% para la diferencia de sus medias de (-3’230, -0’712), con un p-valor asociado inferior a 0’001. El test de Scheffé proporciona el intervalo (-3’612, -0’330) para la diferencia de las medias, con un p-valor p=0’005. Es decir, ninguno de los dos tests acepta la igualdad de las medias de estos dos subgrupos.

Además, hay otras dos parejas en las que el test de Tukey rechaza la hipótesis con un nivel de significación de 0’05; pero en las que el test de Scheffé, más conservador, no lo hace. Una de esas parejas es la formada por GGP1S3 y GGP1S4, donde la aplicación del test de Tukey devuelve un intervalo de confianza al 95% para la diferencia de medias igual a (-2’326, -0’099) y un p-valor asociado p=0’022. La otra pareja es la compuesta por los subgrupos GGP1S4 y GGP2S3, con un intervalo de confianza igual a (0’026, 2’374) y un p-valor asociado p=0’041.

En resumen, **la media de la componente 6 en el subgrupo GGP1S4 es significativamente superior a la media de esta componente en el subgrupo GGP1S2.** Además, **aunque con menor significatividad, la media de esta componente en ese subgrupo, GGP1S4, también es superior a la media en el subgrupo GGP1S3 y en el subgrupo GGP2S3.**

COMPONENTE 7

El criterio de normalidad para esta componente no se ha cumplido, al existir un subgrupo en el que se ha rechazado la hipótesis de normalidad de la distribución. Por lo tanto, hemos aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis, obteniendo un valor del estadístico de 19’469, con un p-valor asociado de 0’021. Como el p-valor es inferior al nivel de significación fijado, se ha rechazado la hipótesis de la igualdad de las distribuciones de todos los subgrupos.

Sin embargo, el análisis post-hoc de Dunn-Bonferroni, con un nivel de significación de 0’05, acepta la hipótesis de la igualdad de distribuciones en todas las parejas posibles. Al reducir el nivel de confianza al 90%, el análisis sí que detecta una pareja de subgrupos donde la hipótesis se rechaza: la formada por GGP1S2 y GGP2S3. Para esta pareja, si dividimos la diferencia en los valores promedio de los rangos (41’525) entre el error típico (12’803), obtenemos un valor del estadístico de 3’243. El p-valor asociado, tras la corrección de Bonferroni, es p=0’053, un valor que es inferior a 0’1.

En resumen, **al rebajar el nivel de confianza al 90% detectamos que la media de la componente 7 en el subgrupo GGP1S2 es superior a la media de dicha componente en el subgrupo GGP2S3.**

COMPONENTE 8

En esta componente existen dos subgrupos en los que la prueba de Shapiro-Wilk rechaza la hipótesis de normalidad de la distribución. Por tanto, se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis, obteniéndose un valor del estadístico de 34’518, con un p-valor inferior a 0’001 y, por tanto, a 0’05, nivel de significación fijado. Es decir, se rechaza la igualdad de las distribuciones de todos los subgrupos. El análisis post-hoc por parejas de Dunn-Bonferroni, con el mismo nivel de significación, detecta la existencia de cuatro parejas donde se rechaza la igualdad de distribuciones.

Una de esas parejas es la formada por los subgrupos GGP1S4 y GGP2S3, donde se obtiene un valor del estadístico igual a -3’660 (división de la diferencia de los valores promedio de los rangos, -40’333; entre el error típico, 11’019). El p-valor asociado a la prueba en esta pareja, tras la corrección de Bonferroni, es p=0’011. Como es inferior a 0’05, se rechaza la hipótesis en esta pareja.

La hipótesis también es rechazada en la pareja formada por los subgrupos GGP2S1 y GGP2S3. El valor del estadístico para esta pareja es de -3’268, resultado de dividir la diferencia en el valor promedio de los rangos (-38’545) entre el error típico (11’793). El p-valor asociado, tras la corrección de Bonferroni, es p=0’049, inferior a 0’05.

Asimismo, se rechaza también la hipótesis en la pareja que conforman los subgrupos GGP2S2 y GGP2S3. En esta pareja, tras dividir la diferencia en el valor promedio de los rangos (-59’000) entre el error típico (12’401), se obtiene un valor del estadístico igual a -4’758. El p-valor asociado es inferior a 0’001, lo que evidencia ese rechazo.

La última pareja en la que también se rechaza la igualdad de distribuciones es la formada por GGP2S2 y GGP2S4. En esta pareja, el estadístico toma el valor -3’613, resultado de dividir la diferencia en el valor promedio de los rangos (-43’000) entre el error típico (11’902). El p-valor asociado es p=0’014, inferior a 0’05.

Además, encontramos otras tres parejas en las que, al rebajar el nivel de confianza del test al 90%, también se rechaza la igualdad de distribuciones. Una de ellas es la formada por los subgrupos GGP1S1 y GGP2S3 (diferencia de los valores promedio de los rangos: -41’143, error típico: 13’301, valor del estadístico: -3’093, p-valor corregido: 0’089). Otra pareja es la conformada por GGP1S3 y GGP2S2 (diferencia de los valores promedio de los rangos: 37’333, error típico: 11’902, valor del estadístico: 3’137, p-valor corregido: 0’077). La tercera de las parejas es la que componen

GGP2S2 y GGP2S6 (diferencia de los valores promedio de los rangos: -48’400, error típico: 15’055, valor del estadístico: -3’215, p-valor corregido: 0’059).

En resumen, **la media de la componente 8 en el subgrupo GGP2S3 es significativamente superior a la media de esta componente tanto en el subgrupo GGP1S4, como en el subgrupo GGP2S1 y en GGP2S2.** Asimismo, **la media de la componente 8 en el subgrupo GGP2S4 es estadísticamente superior a esa media en el subgrupo GGP2S2**. Además, **aunque con menor significatividad, la media tanto en el subgrupo GGP1S3 como en el subgrupo GGP2S6 es superior a la media en el subgrupo GGP2S2, y la media en el subgrupo GGP2S3 es superior a la media en el subgrupo GGP1S1.**

COMPONENTE 9

En esta componente hay un subgrupo en el que la prueba de Shapiro-Wilk rechaza la normalidad de la distribución. Así, se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis, obteniendo un valor del estadístico igual a 40’020, con un p-valor asociado que es inferior a 0’001 y, por tanto, al nivel de significación fijado, 0’05, por lo que se rechaza la igualdad de distribuciones en los subgrupos. El análisis post-hoc por parejas de Dunn-Bonferroni detecta la existencia de cuatro parejas en las que se rechaza la hipótesis de la igualdad de sus distribuciones.

Una de esas parejas es la formada por GGP1S1 y GGP2S1. Para esta pareja, el valor del estadístico es igual a -4’433 (división de la diferencia del valor promedio de los rangos, -57’844; entre el error típico, 13’050). Este valor lleva asociado un p-valor inferior a 0’001 tras la corrección de Bonferroni, por lo que se rechaza la igualdad de distribuciones en esta pareja.

En la pareja formada por GGP2S1 y GGP2S4 también es rechazada la igualdad de sus distribuciones; al obtenerse un valor del estadístico igual a 4’366, tras dividir la diferencia de los valores promedio de los rangos (49’189) entre el error típico (11’267), Este valor del estadístico lleva asociado un p-valor de p=0’001, que es inferior a 0’05.

Lo mismo sucede con la pareja que conforman GGP2S1 y GGP2S6, en la que el valor del estadístico que se obtiene es 4’731 (división de la diferencia del valor promedio de los rangos, 68’873; entre el error típico, 14’558). El p-valor asociado es inferior a 0’001 una vez hecha la corrección de Bonferroni, y, por lo tanto, inferior también a 0’05.

La cuarta y última pareja en la que es rechazada la igualdad de sus distribuciones es la formada por GGP2S3 y GGP2S6. El análisis nos arroja un valor del estadístico igual a 3’585, que resulta de la división entre la diferencia del valor promedio de los rangos (53’000) entre el error típico (14’783). El p-valor asociado a este análisis es p=0’015, inferior al nivel de significación fijado.

Además, hay otras dos parejas más donde se rechaza la hipótesis si se reduce el nivel de confianza del 95% al 90%. Una de esas parejas es la formada por GGP1S1 y GGP2S3 (diferencia de los valores promedio de los rangos: -41’971, error típico: 13’301, valor del estadístico: -3’155, p-valor corregido: 0’072). Otra pareja es la compuesta por GGP1S4 y GGP2S1 (diferencia de los valores promedio de los rangos: -33’939, error típico: 10’714, valor del estadístico: 3’168, p-valor corregido: 0’069).

En resumen, **la media de la componente 9 en el subgrupo GGP2S1 es significativamente superior a la media de esta componente tanto en el subgrupo GGP1S1, como en GGP2S4 y como en GGP2S6.** Asimismo, **la media de la componente 8 en el subgrupo GGP2S3 es estadísticamente superior a esa media en el subgrupo GGP2S6.** Además, **aunque con menor significatividad, la media en el subgrupo GGP2S1 de esta componente es superior a esa media en GGP1S4 y la media de GGP2S3 es superior a la de GGP1S1.**

COMPONENTE 10

En esta componente se cumplen tanto el criterio de normalidad (se acepta la hipótesis en todos los subgrupos) como el de homocedasticidad, por lo que se ha aplicado un análisis ANOVA como contraste de medias. En él se ha obtenido un valor para el estadístico F(9,83)=3’419, con un p-valor asociado p=0’001, inferior a 0’05, lo que hace que se rechace la hipótesis de la igualdad de las medias para esta componente en todos los subgrupos. Al llevar a cabo los dos análisis post-hoc por parejas (tanto el de Tukey como el de Scheffé), no hay ninguna pareja en la que los dos tests rechacen la igualdad de sus medias para el nivel de significación 0’05. Sí que hay dos parejas donde únicamente el test de Tukey rechaza esa igualdad. Indicamos a continuación esas dos parejas y los resultados obtenidos al aplicar en ellas el test de Tukey.

Una de las parejas es la compuesta por los subgrupos GGP1S1 y GGP1S2, donde el test devuelve un intervalo de confianza igual a (-3’339, -0’313) y un p-valor asociado p=0’007. La otra pareja es la formada por GGP1S1 y GGP1S4, con un intervalo de confianza igual a (-2’866, -0’189) y un p-valor asociado p=0’013.

Por lo tanto, **aunque con menor significatividad (al ser únicamente detectado por el test de Tukey), la media de la componente 10 en los subgrupos tanto GGP1S2 como GGP1S4 es superior a la media de esta componente en GGP1S1.**

COMPONENTE 11

En esta componente la hipótesis de normalidad ha sido aceptada en todos los subgrupos, pero no se supera la prueba de homocedasticidad u homogeneidad de varianzas. Así, se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis, que devuelve un valor del estadístico de 14'386, con un p-valor de 0'109. Dicho p-valor es superior al nivel de significación fijado, 0'05; por lo que **se acepta la hipótesis de que la media de esta componente en todos los subgrupos es la misma.**

COMPONENTE 12

En esta componente hay tres subgrupos en los que la prueba de Shapiro-Wilk rechaza la hipótesis de normalidad en la distribución de los subgrupos. Por lo tanto, se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. El valor del estadístico obtenido al aplicar esta prueba ha sido de 21'751, con un p-valor asociado de 0'010, inferior al nivel de significación fijado, 0'05, por lo que se rechaza la igualdad de distribuciones en todos los subgrupos. El análisis post-hoc de Dunn-Bonferroni detecta dos parejas de subgrupos en los que se rechaza esta hipótesis.

Una pareja es la formada por GGP1S1 y GGP2S5. El valor del estadístico obtenida ha sido 3'281 (división de la diferencia en el valor promedio de los rangos, 55'500; entre el valor típico, 16'917), con un p-valor asociado, tras la corrección de Bonferroni, de p=0'047. Como dicho p-valor es inferior a 0'05, rechazamos la hipótesis de la igualdad de sus distribuciones.

La otra pareja es la que conforman los subgrupos GGP2S4 y GGP2S5. En esta pareja, el valor del estadístico se obtiene al dividir la diferencia en el valor promedio de los rangos (56'167) entre el error típico (15'583), y es 3'604. El p-valor asociado, una vez realizada la corrección de Bonferroni, es p=0'014. Al ser un p-valor inferior a 0'05, la hipótesis también se rechaza en esta pareja.

Por lo tanto, **la media de la componente 12 tanto en el subgrupo GGP1S1 como en el subgrupo GGP2S4 es estadísticamente superior a la media de esta componente en el subgrupo GGP2S5.**

COMPONENTE 13

Al igual que sucedía en la componente anterior, en esta componente existen subgrupos donde la hipótesis de la normalidad de la distribución ha sido rechazada en esta componente. Así, se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis, devolviendo un valor del estadístico de 21’775, con un p-valor asociado igual a 0’010, inferior al nivel de significación fijado, 0’05. La prueba muestra el rechazo de la hipótesis de la igualdad de la distribución de esta componente en todos los subgrupos.

Sin embargo, al desarrollar el análisis post-hoc por parejas de Dunn-Bonferroni, no existe ninguna pareja en la que se rechace la igualdad de sus distribuciones en esta componente, ni con un nivel de confianza del 95% ni, tampoco, bajando este nivel al 90%. El p-valor más pequeño se obtiene para la pareja GGP1S4-GGP2S2, con un p-valor igual a 0’149, superior a los dos niveles de significación fijados.

Así, **a pesar de que se rechaza la hipótesis de la igualdad de distribuciones en global, esta hipótesis es aceptada en todas y cada una de las parejas de subgrupos posibles, incluso bajando el nivel de confianza al 90%.**

COMPONENTE 14

En esta componente, la prueba de Shapiro-Wilk muestra la aceptación de la hipótesis de normalidad de la distribución en todos los subgrupos. Además, también se cumple el criterio de homocedasticidad. Por tanto, se ha aplicado un análisis ANOVA para comparar las medias, en el que se ha obtenido un valor del estadístico F(9,83)=1’465, con p=0’175. El p-valor es superior al nivel de significación fijado, 0’05, por lo que **el análisis ANOVA acepta la hipótesis de la igualdad de las medias para la componente 14 en todos los subgrupos.**

COMPONENTE 15

En esta componente se cumplen los dos criterios que nos permiten aplicar el análisis ANOVA. Al aplicar este análisis, se ha obtenido un valor del estadístico F(9,83)=3’792, con un p-valor asociado que es inferior a 0’001, y, por lo tanto, al nivel de significación fijado, 0’05. Así, el análisis ANOVA rechaza la hipótesis de la igualdad de medias para esta componente en todos los subgrupos. No hay ninguna pareja, para ese nivel de significación, en la que los dos tests (Tukey y Scheffé) muestren el rechazo de la igualdad de las medias. Sí que hay cuatro parejas en las que únicamente el test de Tukey rechaza esta igualdad. Todas esas parejas tienen un subgrupo en común: el subgrupo GGP2S6. Indicamos cuáles son esas parejas y los resultados obtenidos al aplicar el test de Tukey en cada una de ellas, con el nivel de significación de 0’05.

La primera de las parejas es la formada por los subgrupos GGP1S3 y GGP2S6, donde el test de Tukey devuelve un intervalo de confianza para la diferencia de medias igual a (-3’097, -0’029) y un p-valor p=0’042. La segunda pareja es la que componen GGP2S1 y GGP2S6, con un intervalo de confianza igual a (-3’528, -0’420) y un p-valor p=0’003. Otra pareja es la conformada por GGP2S4 y GGP2S6, con un intervalo de confianza para la diferencia de medias igual a (-3’464, -0’396) y un p-valor asociado p=0’004. Por último, hay una cuarta pareja formada por GGP2S5 y GGP2S6, en la que se obtiene el intervalo de confianza (-4’291, -0’425) y el p-valor asociado p=0’006.

En resumen, **aunque con menor significatividad (ya que sólo es detectado por el test de Tukey), la media de la componente 15 en el subgrupo GGP2S6 es superior a la media de esa componente tanto en el subgrupo GGP1S3, como en GGP2S1, en GGP2S4 y en GGP2S5.**

COMPONENTE 16

En esta componente sí que se cumplen los criterios tanto de normalidad como de homocedasticidad, por lo que se ha aplicado el análisis ANOVA para realizar un contraste de las medias. Dicho análisis nos ha devuelto un valor del estadístico de F(9,83)=4’988. El p-valor asociado es inferior a 0’001 y, por tanto, al nivel de significación fijado, 0’05. Así, el análisis ANOVA rechaza la hipótesis de la igualdad de las medias para esta componente en todos los subgrupos.

Tan sólo hay una pareja de subgrupos donde los dos test post-hoc han evidenciado el rechazo de la igualdad de sus medias, para ese nivel de significación. Dicha pareja es la compuesta por GGP2S1 y GGP2S2. Para esta pareja, el test de Tukey establece un intervalo de confianza para la diferencia de sus medias de (0’672, 3’151), con un p-valor p<0’001. El test de Scheffé proporciona el intervalo (0’296, 3’527), con un p-valor p=0’007. Por tanto, se rechaza la hipótesis de la igualdad de las medias para esta componente en los dos subgrupos.

Además, hay otras cinco parejas donde, para ese mismo nivel de significación, el test de Tukey ha rechazado la hipótesis, no así el test de Scheffé, más conservador. Explicamos a continuación cuáles son las cinco parejas en esta situación y los resultados estadísticos obtenidos al aplicar el test de Tukey en cada una de ellas.

Una de esas parejas es la formada por GGP1S1 y GGP2S2, con un intervalo de confianza para la diferencia de medias igual a (0’137, 2’916) y un p-valor p=0’020. Otra pareja es la compuesta por GGP1S2 y GGP2S2, con un intervalo de confianza igual a (0’386, 3’066) y un p-valor p=0’003. La tercera pareja en esta situación es la que componen los subgrupos GGP1S2 y GGP2S5, para la que se obtiene un intervalo de confianza (0’045, 3’423) y un p-valor asociado p=0’039. También está en esta situación la pareja formada por GGP2S1 y GGP2S3, con un intervalo de confianza para la diferencia de sus medias de (0’216, 2’626) y un p-valor asociado p=0’009. Por último, se rechaza también la igualdad de medias en la pareja compuesta por GGP2S1 y GGP2S5, al obtenerse un intervalo de confianza (0’309, 3’529) y un p-valor p=0’008.

Por lo tanto, **la media de la componente 16 en el subgrupo GGP2S1 es significativamente superior a la media de esta componente en el subgrupo GGP2S2.** Además, **aunque con menor significatividad (puesto que sólo es detectado por el test de Tukey), la media de esta componente en el subgrupo GGP2S1 es superior tanto a la media en GGP2S3 como a la de GGP2S5, la media de esta componente en el subgrupo GGP1S2 es superior a la media tanto en GGP2S2 como en GGP2S5, y la media de esta componente en el subgrupo GGP1S1 es superior a esa media en GGP2S2.**

División en subgrupos de los grandes grupos prácticos: caracterización de los grupos

Una vez que hemos finalizado el contraste de las medias de todos los subgrupos en cada componente, y que hemos detectado parejas de subgrupos con diferencias estadísticamente significativas en sus medias, ya tenemos una mayor cantidad de información que nos permite caracterizar cada uno de los subgrupos, es decir, indicar cuáles son los rasgos que le distinguen de los otros subgrupos seleccionados a partir del análisis clúster.

Al igual que ya hiciéramos en los estudios anteriores, vamos a ofrecer la información obtenida en el contraste de medias de un modo visual, para que sea más fácilmente digerible y facilite la extracción de la información necesaria. Para ello, se vuelve a las Tablas V.27 y V.28, que contenían las medias y las desviaciones típicas en cada componente de todos los subgrupos de UP, pero añadiendo la información obtenida en el contraste de medias que hemos desarrollado.

En las Tablas V.31 y V.32 se utiliza un código de colores para mostrar esa información obtenida en el contraste de medias. El color verde es usado para señalar aquellas celdas con medias de un subgrupo que, en una determinada componente, han sido estadísticamente superiores al menos a la media de otro subgrupo. El color verde será oscuro para las diferencias con un nivel de significación de 0’05 (en el caso del análisis post-hoc de Kruskal-Wallis) o para las diferencias que se muestran significativas en los dos test post-hoc utilizados para el caso del análisis ANOVA. Utilizaremos un tono más claro de verde para las diferencias determinadas sólo con un nivel de significación de 0’1 (en el caso del análisis post-hoc de Kruskal-Wallis) o para las diferencias que sólo se muestran significativas para el test de Tukey (en el caso del análisis post-hoc del ANOVA).

De manera análoga, hemos utilizado el color naranja para marcar celdas con valores de la media que han sido estadísticamente inferiores en una componente a los de, al menos, otro grupo. Se ha distinguido entre un naranja más intenso (nivel de significación de 0’05 en post-hoc de Kruskal-Wallis, o ambos test post-hoc en ANOVA) y un naranja más claro (nivel de significación 0’1 en post-hoc de Kruskal-Wallis, sólo Test de Tukey en ANOVA).

Subgrupos del GGP1		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7	Componente 8	Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13	Componente 14	Componente 15	Componente 16
GGP1S1	M	-0,281	0,094	0,688	-0,986	-0,158	0,266	-0,250	-0,497	-0,786	-1,070	0,698	0,680	-0,045	0,940	0,177	0,522
	N	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	DT	0,480	0,845	1,134	1,156	1,241	0,376	0,760	0,537	0,472	0,921	0,697	1,177	0,580	0,270	0,711	0,719
GGP1S2	M	-0,732	0,779	0,752	-0,268	0,163	-1,091	0,812	-0,028	-0,172	0,756	0,014	-0,024	0,210	-0,326	0,536	0,722
	N	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	DT	0,686	0,351	0,784	0,646	0,773	0,395	0,860	0,899	0,690	0,944	1,186	0,684	0,980	0,768	0,583	0,919
GGP1S3	M	0,433	0,109	-0,500	-1,684	0,159	-0,332	-0,308	0,272	0,148	0,004	-0,259	-0,529	0,254	-0,153	-0,171	0,104
	N	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	DT	0,568	0,563	1,022	0,526	0,894	0,951	1,035	0,791	1,008	0,719	0,656	1,289	1,097	1,177	0,942	0,647
GGP1S4	M	1,015	0,495	0,393	0,307	0,017	0,880	0,572	-0,391	-0,034	0,458	0,009	-0,231	0,369	0,240	-0,078	0,077
	N	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
	DT	0,988	0,505	0,803	0,728	1,060	0,760	1,374	0,837	0,927	0,870	0,653	0,853	0,702	1,203	0,977	0,843

Tabla V.31. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de cada componente en todos los subgrupos del GGP1, marcando en color verde o naranja las medias estadísticamente superiores o inferiores a otras.

Subgrupos del GGP2		Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5	Componente 6	Componente 7	Componente 8	Componente 9	Componente 10	Componente 11	Componente 12	Componente 13	Componente 14	Componente 15	Componente 16
GGP2S1	M	-0,449	-1,068	-0,288	0,392	0,266	0,123	0,081	-0,344	1,154	-0,289	0,493	0,157	0,312	-0,091	-0,582	0,907
	N	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	DT	0,772	0,897	1,427	0,666	1,066	1,059	0,976	0,648	0,294	1,014	1,007	1,168	1,193	0,697	0,940	1,133
GGP2S2	M	-0,274	0,373	-0,727	0,256	0,550	0,145	-0,500	-1,217	0,192	-0,143	0,264	0,052	-0,946	-0,456	0,524	-1,004
	N	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
	DT	0,898	0,636	0,447	0,605	0,656	1,353	0,538	0,684	0,974	1,259	0,771	0,746	1,072	0,479	1,048	0,572
GGP2S3	M	0,062	0,550	-0,193	0,685	0,334	-0,320	-0,652	1,094	0,598	-0,333	-0,567	0,298	0,318	-0,192	0,274	-0,514
	N	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
	DT	0,886	0,942	0,761	0,442	0,507	0,639	0,375	0,462	0,448	0,795	0,854	0,710	0,598	1,186	0,805	0,699
GGP2S4	M	-0,720	-0,025	-0,120	0,397	-0,999	0,214	-0,171	0,468	-0,459	0,288	-0,461	0,652	-0,566	0,242	-0,538	-0,115
	N	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	DT	0,705	0,766	0,712	0,609	1,151	0,677	0,489	1,215	0,594	0,832	1,608	0,645	0,863	0,939	0,691	1,124
GGP2S5	M	0,566	-0,944	1,049	0,861	-0,685	-0,573	0,267	0,293	-0,173	-1,024	0,453	-1,530	-1,019	-0,572	-0,966	-1,012
	N	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	DT	0,984	1,284	0,479	0,354	0,671	0,965	1,596	1,007	0,898	0,475	1,035	0,244	0,729	0,936	0,968	0,276
GGP2S6	M	0,115	-1,730	-0,368	0,595	0,232	-0,418	0,296	0,663	-1,716	0,592	-0,088	-0,326	0,563	0,138	1,392	-0,439
	N	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	DT	1,518	1,124	0,625	0,376	0,631	1,375	0,764	0,725	1,302	0,805	0,568	0,504	0,973	1,382	1,135	0,731

Tabla V.32. Medias (M) y desviaciones típicas (DT) de cada componente en todos los subgrupos del GGP2, marcando en color verde o naranja las medias estadísticamente superiores o inferiores a otras.

Una vez hecho el estudio de comparación de las medias de cada componente en los diferentes subgrupos, ya podemos conocer mejor cuáles son las características que definen cada uno de los subgrupos y que lo distinguen de los restantes. A partir de la información obtenida en el contraste de medias, resumida visualmente en las Tablas V.31 y V.32, vamos a explicar cuáles son las características que definen cada subgrupo, tanto los cuatro subgrupos del Gran Grupo Práctico 1 como el Gran Grupo Práctico 2. Además, como en anteriores ocasiones, también indicamos qué alumnos tienen todas sus UP dentro de un determinado subgrupo, lo que nos indica cierta homogeneidad en el comportamiento del estudiante con respecto a la elaboración de su cuaderno; y qué unidades corresponden a alumnos que tienen otras UP en otros subgrupos.

Comenzamos indicando cuáles son las características de los cuatro subgrupos que han confluido en el Gran Grupo Práctico 1 (GGP1):

Subgrupo 1 del Gran Grupo Práctico 1 (GGP1S1, 7 unidades integrantes): Estas unidades están caracterizadas por la presencia de algunas actividades a mayores de las propuestas por el docente y por la buena presentación y organización en la unidad (a excepción del tamaño e integración de las representaciones gráficas). En estas unidades no se suelen corregir los errores cometidos, pero sí que se suelen rehacer aquellos ejercicios con intentos de resolución poco satisfactorios. Las representaciones de tipo verbal y gráfico tienen cierta precisión en estas unidades, aunque no exista asiduidad en su presencia. La puntuación del texto escrito es bastante pobre.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP1S1: A16 (x3).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP1S1: A13 (UP2), A22 (UP2), A29 (UP2) y A35 (UP3).

Subgrupo 2 del Gran Grupo Práctico 1 (GGP1S2, 8 unidades integrantes): Las unidades que han quedado encuadradas en este subgrupo se caracterizan por ser unidades completas en cuanto al registro de ejercicios y a los intentos de resolución, aunque contienen un gran número de errores, tanto al transcribir actividades corregidas en el aula como al intentar resolver las actividades. No obstante, en estas unidades se tiende a rehacer aquellas actividades con intentos de resolución poco satisfactorios. Estas unidades también se caracterizan por la muy baja presencia de comentarios, observaciones y explicaciones de pasos y procesos, pero sí que tienen una alta componente de personalización por parte del alumno: uso de notaciones y representaciones personales, explicaciones de los errores cometidos, marcas sobre la comprensión del alumno y dudas. La presentación de estas unidades es buena, especialmente el tamaño e integración de las representaciones gráficas.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP1S2: A30 (x2).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP1S2: A29 (UP1), A32 (UP1), A36 (UP1 y UP3), A38 (UP1) y A41 (UP1).

Subgrupo 3 del Gran Grupo Práctico 1 (GGP1S3, 12 unidades integrantes): Estas unidades se caracterizan sobre todo por dos circunstancias. La principal es la presencia de ejercicios intentados a mayores de los propuestos por el docente. La segunda es la alta presencia de comentarios, aclaraciones y explicaciones de los pasos y procesos seguidos y los elementos tomados, aunque las transcripciones sean, en ocasiones, poco precisas. La presentación de estas unidades es también pobre en algunos casos.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP1S3: A3 (x2), A6 (x2) y A34 (x3).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP1S3: A35 (UP1 y UP2), A37 (UP1), A39 (UP1) y A41 (UP2).

Subgrupo 4 del Gran Grupo Práctico 1 (GGP1S4, 15 unidades integrantes): Estas unidades se caracterizan, sobre todo, por un número muy alto de comentarios, aclaraciones y explicaciones de los pasos y procesos y de las representaciones gráficas, así como cierta personalización de las unidades: uso de notaciones y representaciones personales, explicaciones de los errores cometidos y marcas de comprensión en algunos casos. Además, las unidades son bastante completas en cuanto a ejercicios registrados e intentados, aunque no siempre de forma satisfactoria, y no siempre corrigiéndose los errores cometidos. Las transcripciones tomadas de las correcciones en el aula son precisas. Estas unidades también destacan por una pobre puntuación del texto escrito.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP1S4: A25 (x2), A31 (x3), A33 (x3) y A40 (x1).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP1S4: A14 (UP1 y UP3), A17 (UP1 y UP2), A24 (UP2) y A27 (UP1).

A continuación, indicamos cuáles son los rasgos característicos de cada uno de los seis subgrupos considerados que se fusionan en el Gran Grupo Práctico 2 (GGP2):

Subgrupo 1 del Gran Grupo Práctico 2 (GGP2S1, 11 unidades integrantes): Estas unidades se caracterizan por ser incompletas en el registro de actividades, aunque sí que suelen intentarse las actividades registradas y existe un bajo número de errores. Además, en estas unidades sí que se corrigen e indican claramente los errores cometidos, así como se rehacen los ejercicios cuyos intentos de resolución son poco satisfactorios. El número de comentarios y explicaciones de los elementos es bajo. Además, estas unidades también presentan una pobre puntuación del texto escrito.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP2S1: A2 (x2), A8 (x2), A10 (x2) y A19 (x2).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP2S1: A4 (UP2), A22 (UP1) y A24 (UP1).

Subgrupo 2 del Gran Grupo Práctico 2 (GGP2S2, 9 unidades integrantes): Estas unidades se caracterizan por una cierta presencia de ejercicios registrados e intentados por el alumno, realizados de manera bastante satisfactoria aunque con una escasez de comentarios y explicaciones verbales sobre lo realizado. En estas unidades no se rehacen los ejercicios con pobres intentos de resolución. Las unidades también destacan negativamente por su mala presentación, la mala puntuación y acentuación y la poca precisión de las representaciones de carácter simbólico.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP2S2: A23 (x2).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP2S2: A14 (UP2), A17 (UP3), A37 (UP2 y UP3), A38 (UP3) y A39 (UP2 y UP3).

Subgrupo 3 del Gran Grupo Práctico 2 (GGP2S3, 10 unidades integrantes): Las unidades que están dentro de este subgrupo tienen bastantes actividades registradas y también intentadas, aunque hay bastantes errores, también errores al transcribir la corrección en el aula de otras actividades. En las unidades aquí ubicadas sí se suelen corregir los errores e indicarlos, aunque no se suelen rehacer aquellas actividades resueltas de forma poco satisfactoria. Además, estas unidades destacan por la buena puntuación del texto, pero por la mala organización (mala distribución de espacios y referenciación de los ejercicios) así como una baja personalización del cuaderno por parte del alumno (sin notaciones y representaciones personales, explicaciones de errores o marcas de comprensión y dudas del estudiante).

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP2S3: A20 (x1), A26 (x2) y A28 (x2).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP2S3: A4 (UP1), A11 (UP3), A13 (UP3), A32 (UP2) y A36 (UP2).

Subgrupo 4 del Gran Grupo Práctico 2 (GGP2S4, 12 unidades integrantes): Estas unidades se caracterizan por una presencia muy reducida de comentarios, aclaraciones y explicaciones de los pasos y procesos seguidos y de las representaciones gráficas realizadas, así como por un número de ejercicios intentados reducido junto con una pobre satisfacción en su resolución. En bastantes casos, no se corrigen ni se indican claramente los errores cometidos. Aunque el texto sea escaso, la puntuación es correcta así como las representaciones de carácter verbal suelen ser precisas.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP2S4: A5 (x1), A12 (x3), A15 (x3) y A21 (x1),

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP2S4: A11 (UP1 y UP2), A32 (UP3) y A41 (UP3).

Subgrupo 5 del Gran Grupo Práctico 2 (GGP2S5, 4 unidades integrantes): Las unidades aquí ubicadas son poco completas en cuanto a ejercicios registrados e intentados por los alumnos, siendo, además, poco satisfactorios los intentos de resolución llevados a cabo. No se rehacen los ejercicios cuya resolución es poco satisfactoria. Aunque hay un cierto número de comentarios y explicaciones verbales, éstas destacan por su poca precisión, así como una pobre ortografía. Las unidades están bien presentadas, aunque el tamaño y la integración de las representaciones gráficas son mejorables.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP2S5: A1 (x2).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP2S5: A27 (UP2) y A38 (UP2).

Subgrupo 6 del Gran Grupo Práctico 2 (GGP2S6, 5 unidades integrantes): Unidades caracterizadas por un bajo registro de ejercicios, así como por un número de ejercicios intentados muy reducido, lo que provoca que los errores cometidos sean escasos. No obstante, estos alumnos no corrigen los pocos errores que cometen, ni indican claramente los mismos cuando éstos son corregidos. Estos alumnos, además, llevan a cabo una puntuación correcta en la unidad.

Alumnos con todas sus unidades prácticas en GGP2S6: A7 (x2) y A9 (x2).

Alumnos con alguna de sus unidades prácticas en GGP2S6: A13 (UP1).

V.4. CRUZAMIENTO DE LOS GRUPOS TEÓRICOS Y PRÁCTICOS: DETECCIÓN DE PERFILES DE ELABORACIÓN DEL CUADERNO EN LOS ALUMNOS

Hasta ahora, las unidades teóricas y las unidades prácticas se han tratado por separado. A través de los pasos que se han ido explicando en los apartados anteriores de este capítulo, hemos conseguido determinar la distinción de seis grupos en las UT, así como los rasgos que caracterizan cada uno de ellos. Del mismo modo, hemos establecido la división de las UP en dos grandes grupos con características muy diferentes; distinguiendo varios subgrupos con diversas peculiaridades dentro de ellos.

Sin embargo, en los cuadernos de los alumnos, y para cada uno de los temas, las unidades teórica y práctica se han entremezclado en su desarrollo de forma general, sin que los alumnos establezcan distinciones claras y reales entre unas y otras. Además, el comportamiento del alumno al elaborar y desarrollar el contenido teórico en su cuaderno puede condicionar su comportamiento en el desarrollo de la parte más práctica, correspondiente a las actividades, o viceversa. O, incluso, ambos comportamientos pueden ser complementarios y explicarse mejor en conjunto. Por tanto, para conocer cuáles son las características de los cuadernos elaborados por los alumnos, cruzaremos los comportamientos asociados al mismo tema en las unidades teóricas y prácticas. Como resultado de este cruzamiento obtendremos perfiles de elaboración del cuaderno que hayan resultado como representativos en esta investigación que hemos realizado.

Generalmente, de cada alumno hemos tenido las fotocopias del cuaderno que ha elaborado durante dos o tres temas, salvo casos aislados de estudiantes en los que únicamente hemos podido contar con un tema, debido a que han abandonado el seguimiento de las clases o a que no nos han proporcionado su cuaderno para fotocopiarlo en alguna de las ocasiones en que se lo hemos solicitado como parte de la investigación.

La existencia en la inmensa mayoría de casos de los dos tipos de unidades de un mismo tema, UT y UP, permite hacer el análisis cruzado. No obstante, el tercero de los temas desarrollado por el Docente 1 en el bloque de Análisis Matemático (Derivadas) coincidió con el último tema tratado en el curso, y no hubo tiempo suficiente para completar su desarrollo. Todo lo desarrollado en el aula correspondiente a este último tema fue encuadrado dentro de la UT. La UP fue inexistente, ya que el Docente 1 no planteó ni corrigió ninguna actividad sobre este tema, ni tampoco se ha encontrado ningún alumno que haya desarrollado actividades por cuenta propia en su cuaderno. Debido a este hecho, las UT correspondientes a los alumnos del Docente 1 y a este tema de derivadas han sido excluidas del cruzamiento, al no existir UP correspondiente con quien cruzarlas.

V.4.1. COMBINACIONES UT-UP CONSIDERANDO LOS SEIS GRUPOS TEÓRICOS Y LOS DOS GRANDES GRUPOS PRÁCTICOS

En un primer análisis cruzado de las unidades, hemos considerado la división en seis grupos realizada entre las UT y la división de en dos grandes grupos de las UP. En la Tabla V.33, y utilizando una tabla de doble entrada, se presentan las combinaciones de grupos en las que han quedado encuadradas las UT y las UP correspondientes a un mismo tema de cada uno de los alumnos. Los seis grupos en que se han dividido las UT se marcan en las columnas de la tabla, mientras que la división en dos grandes grupos de las UP se sitúa en las filas. En ambos casos, se ha utilizado la nomenclatura para los grupos utilizada durante el desarrollo del análisis clúster, así como los códigos para referirnos a los alumnos. Dentro del paréntesis, la primera letra (una "A" o una "O") indica si el estudiante es una alumna o un alumno, respectivamente. El número (o los números) que se indican posteriormente dentro del paréntesis indican el o los números de los temas para los cuales la combinación UT-UP de un estudiante han quedado ubicada en esa celda[44]. Las UT3 de los alumnos del Docente 1, que no tenían UP con quien cruzarse, se han ubicado en la última fila de la Tabla V.33.

[44] La numeración utilizada sigue el orden en que se desarrollaron los temas en el aula, un aspecto ya comentado en el subapartado III.2.2 de la tesis doctoral. El número "1" se corresponde al tema de funciones elementales, el "2" al de límites y el "3" al de derivadas.

	GT1	GT2	GT3	GT4	GT5	GT6
GGP1	A24 (A; 2) A25 (A; 1, 2) A27 (A; 1) A29 (A; 1, 2) A30 (A; 2) A31 (A; 1) A33 (A; 2, 3)	A14 (A; 1) A30 (A; 1) A37 (O; 1) A39 (O; 1) A41 (A; 1, 2)	A16 (A; 1)	A6 (A; 1) A16 (A; 2, 3) A32 (A; 1) A34 (A; 1, 2, 3) A36 (A; 1) A38 (A; 1) A40 (A; 1)	A3 (O; 2) A6 (A; 2) A17 (O; 1) A35 (O; 1, 2, 3)	A3 (O; 1) A13 (O; 2) A14 (A; 3) A17 (O; 2) A22 (O; 2) A31 (A; 2, 3) A33 (A; 1) A36 (A; 3)
Total Alumnos (Temas)	**7 (10)**	**5 (6)**	**1 (1)**	**7 (10)**	**4 (6)**	**8 (9)**
GGP2	A1 (O; 2) A19 (A; 1, 2) A24 (A; 1)	A4 (O; 1) A8 (A; 1) A9 (O; 1) A12 (A; 2) A15 (O; 1) A21 (O; 2) A23 (O; 1, 2) A36 (A; 2) A37 (O; 2, 3) A38 (A; 3) A39 (O; 2, 3) A41 (A; 3)		A1 (O; 1) A5 (A; 1) A7 (A; 1, 2) A11 (A; 1, 2, 3) A12 (A; 1, 3) A26 (A; 2) A32 (A; 2, 3)	A2 (O; 1, 2) A8 (A; 2)	A4 (O; 2) A9 (O; 2) A10 (O; 1, 2) A13 (O; 1, 3) A14 (A; 2) A15 (O; 2, 3) A17 (O; 3) A20 (A; 1) A22 (A; 1) A26 (A; 1) A27 (A; 2) A28 (O; 1, 2) A38 (A; 2)
Total Alumnos (Temas)	**3 (4)**	**12 (15)**	**0 (0)**	**7 (12)**	**2 (3)**	**13 (17)**
Sin UP asociada		A1 (O; 3*) A6 (A; 3*) A8 (A; 3*) A10 (O; 3*)	A7 (A; 3*)		A2 (O; 3*) A3 (O; 3*) A4 (O; 3*) A9 (O; 3*)	

Tabla V.33. Cruzamiento de UT y UP para un mismo tema y estudiante, considerando las divisiones en seis grupos teóricos y en dos grandes grupos prácticos.

En la tabla anterior observamos la presencia de algunas combinaciones de grupo teórico y grupo práctico que son más numerosas. No obstante, en este hecho también influye el diferente cardinal que tenían los distintos grupos teóricos (hay grupos mucho más numerosos que otros), frente al número de unidades más equilibrado en los dos grandes grupos prácticos (42 unidades en GGP1 y 51 en la GGP2). No obstante, dentro de un mismo grupo teórico (es decir, de una misma columna de la tabla), la distribución generalmente no ha sido la misma entre los dos GGP, lo que ha dado lugar a algunas combinaciones de comportamientos de los que se evidencia una mayor presencia entre el alumnado participante. Estos comportamientos muestran unos perfiles de elaboración del cuaderno que se han mostrado como mayoritarios en nuestro análisis. Explicamos a continuación esos comportamientos detectados, que han sido señalados con color azul en las celdas de la Tabla V.33.

Combinación GT1-GGP1

En relación con el grupo teórico 1, GT1, la mayoría de las unidades teóricas que han quedado incluidas en este grupo han tenido su unidad práctica correspondiente dentro del gran grupo GGP1. Así, aparece un primer perfil mayoritario, la combinación GT1-GGP1 a la que pertenecen 10 pares de unidades pertenecientes a 7 alumnos distintos. Este perfil de elaboración del cuaderno tiene como característica principal la completitud del mismo, que es característica común a ambos tipos de unidades: tanto de los elementos que conforman el desarrollo de la unidad teórica como en el alto número de ejercicios registrados e intentados y la presencia de bastantes explicaciones en los mismos. Además, estas unidades también se caracterizan por tener cierta precisión y una buena presentación. Asimismo, hay un uso de notaciones y representaciones personales en las unidades teóricas, y suelen rehacerse los ejercicios intentados de un modo poco satisfactorio por el estudiante.

Si analizamos qué alumnos presentan esta combinación de unidades en al menos uno de sus temas, se observa que todos los alumnos en esta situación pertenecen a las clases del Docente 3, además con cierta incidencia entre sus estudiantes. Dos de las alumnas del Bachillerato Científico-Tecnológico, A25 y A29, presentan esta combinación en los dos temas desarrollados, lo que muestra un comportamiento bastante homogéneo de las alumnas. También hay otra alumna del Bachillerato de Ciencias Sociales, A33, donde se detecta esta combinación en dos de los tres temas (límites y derivadas). La Tabla V.33 muestra cuatro estudiantes más con este comportamiento teórico-práctico en uno de sus temas: las alumnas A24, A27 y A31 en el primer tema (funciones elementales), mientras que la alumna A30 en el Tema 2 (límite de una función).

Combinación GT2-GGP2

Dentro de las UT que han sido ubicadas en el numeroso grupo teórico GT2, la Tabla V.33 nos muestra una prevalencia en la combinación de una unidad de este tipo con una UP encuadrada dentro del GGP2. La combinación GT2-GGP2 está presente en

15 pares de unidades, correspondientes a 12 estudiantes distintos. Este perfil de elaboración se caracteriza por una unidad teórica mayoritariamente compuesta por ejemplos y por representaciones gráficas, con una incidencia muy baja de las representaciones de tipo verbal. Esto se complementa con la presencia de pocos ejercicios intentados. Hay algunos elementos comunes a ambos tipos de unidades, como son la poca presencia de elementos verbales (enunciados, observaciones, explicaciones, comentarios) y una pobre presentación.

A diferencia de lo que sucedía para la combinación GT1-GGP1, esta combinación ha tenido presencia en las cuatro aulas en las que se ha desarrollado la investigación. Hay un alumno, A23, en el que se ha detectado este comportamiento en los dos pares de unidades suyos de los que disponemos, por lo que el alumno muestra regularidad en esta forma de elaborar el cuaderno. Lo mismo sucede con el alumno A21, del cual únicamente disponemos de las unidades correspondientes a un tema, y que han quedado aquí encuadradas. Además, hay otros dos estudiantes, A37 y A39, que presentan esta combinación en dos de sus tres pares de unidades (en ambos casos, en los temas de límites y derivadas). El resto de alumnos aquí ubicados presentan esta combinación teórico-práctica en uno de los temas, pero, curiosamente, en temas diferentes. Es el caso de los alumnos A4, A8 y A15 y de la alumna A9 en el tema de funciones elementales, de las alumnas A12 y A36 en el tema de límite de una función, y de las alumnas A38 y A41 en el tema de derivadas.

Combinaciones GT4-GGP1 y GT4-GGP2

Si observamos la Tabla V.33, dentro de las unidades teóricas que han quedado incluidas en el Grupo Teórico GT4 se observa una distribución muy equitativa con el tipo de UP asociada. Hay 10 pares de unidades, de 7 alumnos distintos, con la combinación GT4-GGP1; mientras que hay 12 pares de unidades, también de 7 alumnos distintos, en los que se da la combinación GT4-GGP2. Así, no parece existir una relación muy marcada entre el comportamiento para las unidades teóricas que evidencia el GT4 con el comportamiento asociado para la unidad práctica correspondiente, puesto que se combina casi equitativamente con UP tanto del GGP1 como del GGP2.

Las unidades teóricas incluidas en el GT4 se han caracterizado de forma global por una buena presentación, un bajo número de observaciones y comentarios recogidos, una pobre ortografía y puntuación, y cierta presencia de errores de transcripción de los elementos. Las unidades teóricas con estas características se han combinado tanto con unidades prácticas completas, y con un alto número de actividades registradas e intentadas por los alumnos (características del GGP1), como con unidades poco completas, con un menor número de actividades intentadas y registradas y con un bajo número de comentarios, observaciones y explicaciones sobre las actividades (características del GGP2).

La combinación GT4-GGP1 se ha presentado en 7 alumnas, muchas de ellas pertenecientes al aula de Ciencias Sociales del Docente 3, y con mayor incidencia en las unidades correspondientes al tema de funciones elementales. Entre ellas, destaca la alumna A34, donde esta combinación se presenta en sus tres pares de unidades, lo que denota cierta regularidad en la combinación de estos comportamientos durante el periodo analizado. También la alumna A16 presenta esta combinación en los dos últimos temas (límites y derivadas).

La combinación GT4-GGP2 también se ha presentado mayoritariamente en alumnas. Únicamente hay un alumno, A1, con una pareja de unidades que han mostrado ese comportamiento. En esta combinación destaca la presencia de cuatro alumnas con varias o todas sus unidades en él, por lo que parece ser un comportamiento bastante regular en ellas: las tres parejas de unidades de A11, las dos parejas de unidades de A7, y dos de las tres parejas de unidades de A12 y A32.

Combinación GT5-GGP1

Si observamos en la Tabla V.33 qué alumnos han tenido alguna de sus unidades teóricas incluida en el grupo teórico 5 (GT5), podemos ver que la mayoría de ellos han combinado una UT de ese tipo con una UP contenida en el Gran Grupo Práctico 1 (GGP1). Esto nos lleva a considerar la presencia de un nuevo perfil de actuación, correspondiente a la combinación GT5-GGP1. Esta combinación se presenta en 6 pares de unidades correspondientes a 4 alumnos diferentes. A pesar de no ser una combinación excesivamente numerosa, hemos dado una importancia especial a este perfil de actuación, debido al interés y a la particularidad de sus características. La característica fundamental es la alta presencia de anotaciones de tipo personal por parte del alumno en las unidades teóricas, sobre su comprensión de los elementos tratados o sobre posibles dudas, acompañadas de unas unidades prácticas con un alto número de ejercicios registrados e intentados, la existencia de algunos ejercicios a mayores y un alto número de explicaciones, comentarios y aclaraciones sobre los ejercicios que contiene la UP.

Hay un alumno, A35, que muestra un comportamiento homogéneo y regular de este tipo, puesto que las unidades correspondientes a los tres temas presentan esta combinación GT5-GGP1. Además, hay otros tres estudiantes donde esta combinación se ha dado en uno de sus temas. Es el caso del alumno A17 para el tema de funciones elementales, y del alumno A3 y la alumna A6 para el tema de límites.

Combinaciones GT6-GGP1 y GT6-GGP2

El Grupo Teórico GT6 fue el grupo más numeroso de los seis GT, con 26 unidades incluidas en él. La Tabla V.33 muestra que las unidades teóricas del GT6 se han combinado con unidades prácticas de los dos grandes grupos prácticos. No obstante, hay una combinación de las dos que ha sido mayoritaria: la combinación GT6-GGP2, que se ha presentado en 17 pares de unidades, correspondientes a 13 alumnos distintos. Esta combinación se caracteriza por la completitud en la transcripción de los elementos teóricos, con cierta precisión en esa transcripción (sobre todo las representaciones gráficas); pero esa completitud no se mantiene en las actividades prácticas, donde el número de actividades registradas e intentadas es inferior. Además, ambas unidades se caracterizan por una presentación pobre, tanto para los aspectos teóricos como para los aspectos prácticos.

Esta combinación ha tenido presencia en las cuatro aulas participantes. En concreto, hay dos alumnos, A10 y A28, en las que las dos parejas de unidades de las que disponemos han presentado esta combinación GT6-GGP2. Así, estos dos alumnos parecen tener un comportamiento regular y homogéneo en la elaboración de su cuaderno, con las características anteriormente comentadas. Además, hay otros dos estudiantes, A13 y A15, que tienen dos pares de unidades con esta combinación (en el caso del alumno A13 son las unidades de funciones elementales y derivadas, en el caso de A15 son las unidades de límites y derivadas). Por último, hay otros nueve alumnos donde se ha presentado esta combinación en uno de sus temas. En el caso de las alumnas A20, A22 y A26 han sido las unidades del tema de funciones elementales; en el caso de los alumnos A4 y A9, y de las estudiantes A14, A27 y A38, el tema de límites; y en el caso del alumno A17 el tema de derivada de una función.

La combinación GT6-GGP1, aunque menos numerosa que la GT6-GGP2, también tiene contiene un número apreciable de temas, por lo que sus características merecen ser remarcadas. En concreto, en torno a esta combinación GT6-GGP1, que se presenta en nueve pares de unidades, se agrupan ocho estudiantes distintos. Esta combinación de unidades en un tema se caracteriza por recoger los diferentes elementos teóricos de manera completa, así como contener también un alto número de ejercicios registrados e intentados. Estos intentos dan lugar a bastantes errores cometidos, optándose en ocasiones por rehacer los ejercicios con intentos de resolución poco satisfactorios. Tanto para los aspectos teóricos como los aspectos prácticos, se escriben un alto número de observaciones, comentarios, aclaraciones y explicaciones sobre los aspectos teóricos y prácticos, por lo que son unidades con bastantes representaciones de tipo verbal y, en general, destacan por su completitud.

Esta combinación ha tenido presencia en las cuatro aulas participantes, aunque no ha existido ningún estudiante donde todos sus pares de unidades se hayan situado en esta combinación. La alumna A31 sí que tiene la combinación GT6-GGP1 en dos pares de unidades (temas de límites y derivadas). En el resto de casos, los estudiantes han tenido esta combinación en uno de los temas: el alumno A3 y la estudiante A33 en el tema de funciones elementales, los alumnos A13 y A17 y la alumna A22 en el tema de límites y, por último, las estudiantes A14 y A36 en el tema de derivadas.

V.4.2. DISCUSIÓN Y PRIMERAS REFLEXIONES SOBRE LAS COMBINACIONES OBTENIDAS

En este subapartado presentamos una primera discusión de las combinaciones que se presentan en la Tabla V.33, obtenidas al cruzar los seis grupos en que han sido divididas las UT con los dos GGP determinados por las UP. Esta discusión dará lugar a las primeras reflexiones sobre las combinaciones obtenidas y las características de los cuadernos elaborados por los alumnos, en relación con el contexto de las aulas participantes en el estudio y las interpretaciones derivadas de los mismos.

Se ha realizado una lectura por filas de la Tabla V.33, analizando los pares de unidades según haya sido una UP incluida en el GGP1 o en el GGP2 y según quién haya sido el docente de matemáticas del aula en que han sido generadas. Hemos construido una tabla de frecuencias, la Tabla V.34, que resume los resultados obtenidos. También se ha añadido en cada celda el porcentaje que representa la frecuencia obtenida con respecto al total de UP del GGP correspondiente.

	UP en el aula del Docente 1	UP en el aula del Docente 2	UP en las aulas del Docente 3	Total
UP en el GGP1	4 (9’52%)	8 (19’05%)	30 (71’43%)	42
UP en el GGP2	15 (29’41%)	13 (25’49%)	23 (45’10%)	51

Tabla V.34. Tabla de frecuencias que muestra la distribución de las UP en los dos grandes grupos prácticos, según el docente de matemáticas del aula.

La Tabla V.34 muestra claramente una mayor presencia de unidades prácticas incluidas dentro del GGP1 en las dos aulas participantes que han tenido como profesor de matemáticas al Docente 3. El 71’43% de las UP que se han encuadrado en el GGP1 pertenecen a estudiantes de las aulas del Docente 3, siendo mucho mayor que el porcentaje de UP en el GGP2 que corresponden a esas dos aulas (45’10%). Sin embargo, en las otras dos aulas, las correspondientes a los Docentes 1 y 2, la incidencia es la contraria, especialmente en el caso del aula del Docente 1.

Las UP encuadradas en el GGP1 se caracterizaban por ser bastante completas y por tener un alto número de actividades registradas e intentadas, incluyendo actividades a mayores, y una alta presencia de comentarios, observaciones y explicaciones asociadas a las actividades. También contenían un mayor número de errores, derivado de la mayor presencia de intentos de resolución, rehaciendo a veces las tareas resueltas de modo poco satisfactorio. Así, la Tabla V.34 deja entrever que el contexto de las aulas del Docente 3 ha podido posibilitar o propiciar una mayor incidencia de UP agrupadas en el GGP1. Si revisamos las características propias del planteamiento y desarrollo de actividades prácticas en el aula por parte de cada docente[45], puede observarse que el Docente 3 planteó actividades a sus alumnos con mayor regularidad (generalmente, todos los días de clase se planteaban “deberes” para realizar fuera del aula), y también en un mayor número, actividades que se corregían en el aula posteriormente. Además, muchas de estas actividades pueden ser catalogadas como ejercicios de repaso o refuerzo de técnicas o aspectos trabajados en el aula. Estos hechos han podido favorecer el desarrollo de un hábito de trabajo regular fuera del aula en los estudiantes, y que ese trabajo quedara plasmado en los cuadernos, lo que habría generado UP más completas y con un mayor número de intentos de resolución.

En el caso del Docente 2[45], no existió ese hábito de mandar actividades todos los días, sino que se mandaban en ciertos periodos (generalmente al final de cada tema), y en muchos casos también eran trabajados en el aula bajo la supervisión del docente. Sin embargo, como se recoge en el diario del docente incluido en el Anexo B.3, pocos alumnos intentaban de forma activa la resolución de estas actividades, lo que puede explicar la distribución obtenida para las UP. Por último, el Docente 1[45] no solía plantear explícitamente actividades a los alumnos y, como norma general, únicamente corregía en el aula aquellas tareas en las que los estudiantes decían haber tenido alguna duda en su proceso de resolución. Así, la menor incidencia de actividades

[45] Las características generales sobre el planteamiento y resolución de actividades por parte de los tres docentes se explica con detalle en el subapartado III.2.2 de esta memoria de tesis doctoral, y en los Anexos B.2 a B.5.

registradas e intentadas en esta aula puede deberse a la mayor autonomía y madurez que se requiere a los estudiantes para que realicen por sí mismo las actividades que ellos consideren o la posibilidad de que desarrollen esos intentos de resolución en otro lugar, distinto del propio cuaderno. Si observamos la Tabla V.33, dentro de esta aula únicamente las UP del alumno A3 y de la alumna A6 se han situado en el GGP1, estando las UP de los alumnos restantes en el GGP2.

Si realizamos una lectura similar de la Tabla V.33, pero por filas, también puede construirse una tabla de frecuencias que recoja cuál es la distribución de UT en los seis GT según cuál haya sido el docente de matemáticas del aula en que han sido generadas. Dicha tabla es la Tabla V.35. Además, se ha añadido en cada celda el porcentaje que representa la frecuencia obtenida con respecto al total de UT del GT correspondiente. La Tabla V.35 muestra algunas tipos de UT que prevalecen en algunas clases frente a otras.

	UT en el aula del Docente 1	UT en el aula del Docente 2	UT en las aulas del Docente 3	Total
UT en el GT1	1 (7’14%)	0 (0%)	13 (92’86%)	14
UT en el GT2	7 (28%)	3 (12%)	15 (60%)	25
UT en el GT3	1 (50%)	1 (50%)	0 (0%)	2
UT en el GT4	5 (22’72%)	7 (31’82%)	10 (45’46%)	22
UT en el GT5	9 (69’23%)	1 (7’69%)	3 (23’08%)	13
UT en el GT6	5 (19’23%)	9 (34’62%)	12 (46’15%)	26

Tabla V.35. Tabla de frecuencias que muestra la distribución de las UT en los seis grupos teóricos, según el docente de matemáticas del aula.

Por ejemplo, puede observarse cómo las unidades teóricas del tipo GT5 han sido generadas mayoritariamente en las aulas del Docente 1. Estas unidades teóricas se caracterizaban por ser poco completas en algunos aspectos (baja transcripción de ejemplos y de representaciones gráficas y simbólicas), y con cierta presencia de escritura de tipo expresivo (anotaciones personales, comentarios sobre la comprensión o dudas). Pudiera ser que el estilo del docente al exponer la teoría, generalmente de un modo menos organizado que los otros dos docentes y con un ritmo algo mayor, haya influido en ello. Un número apreciable de UT generadas en el aula del Docente 1 ha sido del tipo GT2, que se caracterizaban por transcribir de forma completa ejemplos y representaciones gráficas, pero por no contener apenas registros de tipo verbal.

Con respecto al Docente 2, las UT generadas en sus clases han correspondido, con mayor prevalencia, a unidades pertenecientes a los grupos GT4 y GT6. Las unidades de tipo GT6 eran unidades caracterizadas por su completitud, un hecho que puede venir favorecido por la metodología docente, que dictaba algunos aspectos de la exposición teórica con la intención de que los estudiantes los recogieran en sus cuadernos. Pero también hay bastantes unidades del tipo GT4, que se caracterizan por su buena presentación y por un bajo número de comentarios y observaciones, por lo que ya no recogerían algunos aspectos.

Las unidades generadas en las dos aulas del Docente 3, en su inmensa mayoría, han sido unidades pertenecientes a los grupos GT1, GT2, GT4 y GT6, especialmente a los dos primeros. Las unidades de tipo GT1 y GT2 se caracterizaban por su completitud en la recogida de ejemplos y de representaciones gráficas, aunque diferían en que las unidades de tipo GT1 también eran completas en cuanto a los comentarios del docente y tenían una buena presentación, pero no sucedía así en las de tipo GT2. En muchos casos, las exposiciones teóricas de la Docente 3 eran cortas, dedicando mucho tiempo en las clases al planteamiento y, sobre todo, a la corrección de actividades (ver Anexos B.4 y B.5). En esa situación, los alumnos sí han tendido a recoger estos aspectos, especialmente los ejemplos asociados a los conceptos presentados y las representaciones de tipo gráfico.

Partiendo de nuevo de la Tabla V.33, nos fijamos ahora en la variable del género de los alumnos para analizar cómo se han distribuido las unidades teóricas y prácticas. La Tabla V.36 muestra la tabla de frecuencias con los resultados y los porcentajes de las frecuencias obtenidas con respecto al total de UP de cada gran grupo práctico.

	UP de alumnas	UP de alumnos	Total
UP en el GGP1	32 (76’19%)	10 (23’81%)	42
UP en el GGP2	26 (50’98%)	25 (49’02%)	51

Tabla V.36. Tabla de frecuencias que muestra la distribución de las UP en los dos grandes grupos prácticos, según el género del alumnado.

Dicha tabla muestra claramente que las unidades prácticas incluidas dentro del GGP1 han sido de forma mayoritaria UP de alumnas (un 76'19% del total), mientras que en el caso del GGP2 la presencia de unidades se equilibra entre ambos sexos.

Como hemos indicado anteriormente, las UP del GGP1 se caracterizan por una mayor completitud (mayor número de ejercicios intentados y registrados, alta presencia de comentarios, observaciones y explicaciones asociadas a las actividades). Debe recordarse que el número de alumnas era mucho mayor que el de alumnos en las dos aulas del Docente 3. Así, la mayor presencia de unidades de alumnas incluidas en el GGP1 pudiera derivarse de este hecho. No obstante, también pueden existir otras posibles interpretaciones en las que tenga alguna influencia el sexo de los participantes y el rol que para ellos juega el cuaderno de matemáticas.

Si nos fijamos ahora en las UT (y los seis grupos teóricos) en lugar de en las UP, la Tabla V.37 presenta los resultados y los porcentajes de las frecuencias obtenidas con respecto al total de UT de cada grupo teórico.

	UT de alumnas	UT de alumnos	Total
UT en el GT1	13 (92'86%)	1 (7'14%)	14
UT en el GT2	11 (44%)	14 (56%)	25
UT en el GT3	2 (100%)	0 (0%)	2
UT en el GT4	21 (95'45%)	1 (4'55%)	22
UT en el GT5	2 (15'38%)	11 (84'62%)	13
UT en el GT6	11 (42'31%)	15 (57'69%)	26

Tabla V.37. Tabla de frecuencias que muestra la distribución de las UT en los seis grupos teóricos, según el género del alumnado.

La Tabla V.37 muestra la presencia de una polarización bastante alta en algunos tipos de unidades, en las que prevalece de un modo muy marcado uno de los dos sexos. En relación a las alumnas, la inmensa mayoría de las unidades de tipo GT1 y de tipo GT4 corresponden a alumnas. Las unidades de tipo GT1 se caracterizaban por su completitud en bastantes elementos (salvo en enunciados y en algunos aspectos verbales) y tenían cierta precisión y una buena presentación. Por otra parte, las unidades de tipo GT4 también se caracterizaban por su buena presentación, además de por el bajo número de observaciones y de comentarios recogidos, una pobre puntuación, ortografía y la poca precisión en algunas ocasiones al transcribir elementos teóricos. Pudiera ser que las alumnas valoraran más algunos de estos aspectos, como pudiera ser la buena presentación, en sus unidades teóricas.

Si nos fijamos en los alumnos, también hay un tipo de unidad en la que ha prevalecido el sexo masculino entre los autores de las mismas: las unidades de tipo GT5 (11 unidades de chicos frente a únicamente dos de chicas). Estas unidades se caracterizaban por la poca completitud de algunos aspectos (ejemplos, representaciones gráficas y simbólicas), y cierta presencia de escritura de tipo expresivo (anotaciones personales, comentarios sobre la comprensión o dudas). Pudiera ser que alguna de estas características fuera más valorada por los chicos que por las chicas, aunque también tiene influencia en la mayor presencia el hecho de que hubiera un número importante de alumnos de sexo masculino en el aula del Docente 1 (donde más se ha dado este tipo de unidad). También hay un número apreciable de unidades del tipo GT2 y GT6 pertenecientes a chicos, que son unidades más completas en cuanto a contenidos, especialmente las segundas, y con una pobre presentación.

No obstante, y en ambos casos, las entrevistas a algunos de los estudiantes participantes y el análisis de las mismas nos puede ofrecer alguna otra interpretación para estas circunstancias detectadas.

Si nos fijamos ya globalmente en la Tabla V.33, puede observarse cómo en algunas de las combinaciones UT-UP que se han presentado de forma mayoritaria (y que se señalaron con color azul en dicha tabla), hay una presencia más o menos equilibrada de alumnos de todas las aulas participantes y de los dos sexos. Es el caso, especialmente, de las parejas de unidades con combinación GT6-GGP1 y GT6-GGP2. Por el contrario, en otras combinaciones sí que se evidencian algunos desequilibrios.

Como ya hemos comentado previamente, y se ha mostrado en las Tablas V.34 y V.36, en las UP incluidas dentro del GGP1 hay un alto porcentaje de unidades correspondientes a alumnas, y correspondientes a estudiantes del aula del Docente 3. En particular, todos los pares de unidades con combinación GT1-GGP1 han sido elaboradas por alumnas pertenecientes a las dos aulas del Docente 3. Las características comunes a ambos tipos de unidades (completitud, alto número de ejercicios registrados e intentados, presencia de bastantes observaciones y explicaciones, buena presentación) han podido ser favorecidos por características derivadas de la metodología del Docente 3, pero también estas características parecen ser altamente valoradas por las estudiantes participantes. Profundizaremos en estas interpretaciones a través de las entrevistas realizadas a algunos de los alumnos. Algo similar sucede con la combinación GT4-GGP1, donde todos los pares de unidades corresponden a alumnas, la mayoría pertenecientes al aula del Docente 3.

La combinación GT4-GGP2 también se ha presentado de forma mayoritaria entre las alumnas (derivado de la mayoría global existente en las unidades del GT4, y que hemos comentado anteriormente). No obstante, a diferencia de la combinación GT4-GGP1, muchos de los pares corresponden a alumnas de las clases de los Docentes 1 y 2, lo que podría derivarse del contexto de planteamiento y resolución de actividades propias de cada aula que anteriormente ha sido explicado.

La Tabla V.33 también muestra la presencia de dos combinaciones de pares de unidades UT-UP con una mayor presencia de alumnos de sexo masculino. Una de esas combinaciones es la GT2-GGP2, donde 10 de los 15 pares de unidades aquí situados corresponden a alumnos, y únicamente 5 a alumnas. Este perfil de elaboración se caracterizaba por unidades teóricas compuestas mayoritariamente por ejemplos y representaciones gráficas, con un bajo número de elementos verbales (enunciados, observaciones, comentarios, explicaciones), una pobre presentación y un bajo número de ejercicios registrados e intentados. Pareciera que estos alumnos dan más importancia y valor a los ejemplos y a los elementos gráficos frente a los contenidos desarrollados verbalmente, y que dieran poco valor a intentar resolver ejercicios en el cuaderno (porque no los hicieran o porque consideraran otros posibles lugares para llevarlos a cabo). Las entrevistas nos servirán para profundizar sobre algunos de estos hechos y algunas de las interpretaciones o hipótesis que aquí apuntamos.

La otra combinación donde la presencia de alumnos de sexo masculino ha sido mayoritaria es la formada por GT5-GGP1 (cinco de las seis parejas de unidades corresponden a alumnos). En cierto modo, esta combinación presenta características opuestas a GT2-GGP2, puesto que en estas parejas de unidades sí que hay una alta presencia de explicaciones, comentarios y aclaraciones, tanto en el desarrollo de las actividades como sobre la comprensión del propio alumno, así como un alto número de ejercicios registrados e intentados, incluyendo actividades a mayores de las propuestas por los docentes. Como hemos comentado anteriormente, las entrevistas nos servirán para profundizar entre estas diferencias, los usos asociados a estas elaboraciones y las razones y argumentos proporcionados por los estudiantes para defender o apoyar estos comportamientos.

V.4.3. COMBINACIONES UT-UP CONSIDERANDO LOS SEIS GRUPOS TEÓRICOS Y TODOS LOS SUBGRUPOS DE LOS DOS GGP. DISCUSIÓN Y CONCRECIÓN DE LAS REFLEXIONES ANTERIORES

La tabla anterior, Tabla V.33, indica la presencia de algunos perfiles relevantes de alumnos, una vez que se ha cruzado su comportamiento al elaborar una UT y una UP correspondiente al mismo tema. No obstante, los dos grandes grupos prácticos eran grupos muy amplios. Es cierto que los elementos de cada uno de los grupos tenían ciertas características globales importantes, pero también es cierto que existían algunos rasgos diferenciadores dentro de cada uno de los GGP. Esos rasgos son los proporcionados por los diferentes subgrupos de los grandes grupos prácticos, que se explicaron dentro del subapartado V.3.2 de este capítulo.

Por tanto, para avanzar hacia una mayor especificación de los perfiles de elaboración de los cuadernos entre el alumnado participante, se ha elaborado una tabla similar a la Tabla V.33, pero considerando la combinación de comportamientos a partir de la división de las UT en los seis GT y de las UP en los diez subgrupos que resultan de la división de los dos GGP. Dicha tabla es la Tabla V.38, y se presenta a continuación. La nomenclatura de los grupos y los códigos con los que nos referimos a los alumnos son los utilizados durante el desarrollo de la investigación. Asimismo, el significado de la letra (“A” u “O”) y del número o los números que se indican entre paréntesis tras el código del alumno son los mismos que en la Tabla V.33.

En el desarrollo del *análisis clúster aglomerativo*, la agrupación de las UP en diez subgrupos es previa a la fusión de varios de ellos en los dos GGP. Por tanto, es importante remarcar que si en la Tabla V.38 se omitieran las divisiones generadas por los subgrupos (y, por ejemplo, el contenido en cada columna de las celdas correspondientes a los subgrupos GGP1S1 a GGP1S4 se fusionara en una sola celda) se volvería a la Tabla V.33 anterior.

	GT1	GT2	GT3	GT4	GT5	GT6
GGP1S1	A29 (A; 2)		A16 (A; 1)	A16 (A; 2, 3)	A35 (O; 3)	A13 (O; 2) A22 (A; 2)
GGP1S2	A29 (A; 1) A30 (A; 2)	A30 (A; 1) A41 (A; 1)		A32 (A; 1) A36 (A; 1) A38 (A; 1)		A36 (A; 3)
GGP1S3		A37 (O; 1) A39 (O; 1) A41 (A; 2)		A6 (A; 1) A34 (A; 1, 2, 3)	A3 (O; 2) A6 (A; 2) A35 (O; 1, 2)	A3 (O; 1)
GGP1S4	A24 (A; 2) A25 (A; 1, 2) A27 (A; 1) A31 (A; 1) A33 (A; 2, 3)	A14 (A; 1)		A40 (A; 1)	A17 (O; 1)	A14 (A; 3) A17 (O; 2) A31 (A; 2, 3) A33 (A; 1)
GGP2S1	A19 (A; 1, 2) A24 (A; 1)	A8 (A; 1)			A2 (O; 1, 2) A8 (A; 2)	A4 (O; 2) A10 (O; 1, 2) A22 (A; 1)
GGP2S2		A23 (O; 1, 2) A37 (O; 2, 3) A38 (A; 3) A39 (O; 2, 3)				A14 (A; 2) A17 (O; 3)
GGP2S3		A4 (O; 1) A36 (A; 2)		A11 (A; 3) A26 (A; 2) A32 (A; 2)		A13 (O; 3) A20 (A; 1) A26 (A; 1) A28 (O; 1, 2)
GGP2S4		A12 (A; 2) A15 (O; 1) A21 (O; 2) A41 (A; 3)		A5 (A; 1) A11 (A; 1, 2) A12 (A; 1, 3) A32 (A; 3)		A15 (O; 2, 3)
GGP2S5	A1 (O; 2)			A1 (O; 1)		A27 (A; 2) A38 (A; 2)
GGP2S6		A9 (O; 1)		A7 (A; 1, 2)		A9 (O; 2) A13 (O; 1)
Sin unidad práctica asociada		A1 (3*) A6 (3*) A8 (3*) A10 (3*)	A7 (3*)		A2 (3*) A3 (3*) A4 (3*) A9 (3*)	

Tabla V.38. Cruzamiento de UT y UP para un mismo tema y estudiante, considerando las divisiones en seis grupos teóricos y en todos los subgrupos de los GGP.

Al utilizar un mayor número de grupos para clasificar las UP, existe un número mucho mayor de combinaciones UT-UP posibles. Además, las combinaciones resultantes, en líneas generales, cuentan con un número menor de parejas que las integran, apareciendo también bastantes celdas en blanco. Se ha adoptado el siguiente criterio para extraer información representativa de la Tabla V.38: se van a estudiar aquellas combinaciones UT-UP en las que, al menos, existen tres alumnos que presentan dicha combinación en al menos uno de sus temas. Esas celdas han sido marcadas en color azul en la Tabla V.38. A mayores de las anteriores, también se ha tenido en cuenta la presencia de algunos alumnos que tenían al menos dos de sus parejas de unidades en una combinación minoritaria no considerada de acuerdo al criterio anterior, puesto que estos alumnos pueden presentar un perfil específico en la elaboración de su cuaderno de matemáticas. Las celdas con alumnos en esa situación se han marcado en la Tabla V.38 con color rojo.

Explicamos a continuación todas estas combinaciones, que deben ser entendidas como un refinamiento de las combinaciones explicadas a lo largo del subapartado V.4.1, en especial en el comportamiento para las UP. Estas nuevas combinaciones también nos han permitido concretar algunas de las reflexiones e interpretaciones comentadas a lo largo del subapartado V.4.2.

Combinaciones específicas dentro de la combinación GT1-GGP1 anterior

La consideración de los diferentes subgrupos prácticos en los pares de unidades que anteriormente habían sido incluidos en la combinación GT1-GGP1 ha mostrado la presencia de un perfil específico mayoritario de actuación. Ese perfil, como puede observarse en la Tabla V.38, se corresponde con la combinación GT1-GGP1S4, en la que existen siete pares de unidades correspondientes a cinco alumnos distintos.

Los pares de unidades pertenecientes a esta combinación muestran un perfil de elaboración del cuaderno caracterizado por el desarrollo de unas unidades muy completas, tanto en los elementos teóricos como, también, en el registro de ejercicios, existiendo un alto número de ejercicios intentados. También existe un registro elevado de comentarios, aclaraciones y explicaciones de los pasos y procesos seguidos, junto con la presencia de cierta personalización por parte del alumno en ambos tipos de unidades. Por último, hay cierta precisión de los elementos.

Al estar dentro de la combinación anterior GT1-GGP1, todos los pares de unidades aquí incluidos pertenecen a alumnas de las dos clases del Docente 3. En concreto, la alumna A25 tiene sus dos pares de unidades dentro de este perfil específico GT1-GGP1S4, lo que muestra cierta regularidad en este tipo de elaboración y comportamiento. La estudiante A33 tiene dos de sus tres pares de unidades con esta combinación (los correspondientes a los temas de límites y derivadas). En el resto de casos, se ha presentado esta combinación en uno de los temas: las alumnas A27 y A31 en el tema de funciones elementales, y la alumna A24 en el tema de límites.

Combinaciones específicas dentro de la combinación GT2-GGP2 anterior

La consideración de los diferentes subgrupos prácticos en los pares de unidades que anteriormente habían sido incluidos en la combinación GT2-GGP2 ha evidenciado la presencia de dos perfiles de actuación mayoritarios dentro del perfil general: los que se determinan con el subgrupo segundo y el cuarto del GGP2. En ambos casos, estos dos perfiles específicos, GT2-GGP2S2 y GT2-GGP2S4 contienen pares de unidades correspondientes a cuatro alumnos.

El que se muestra como más numeroso y, también, como más estable dentro de los alumnos en los que se presenta, es el perfil correspondiente a GT2-GGP2S2. Hay siete pares de unidades con esta combinación. La característica común principal para este perfil específico de elaboración es la presencia muy reducida de los signos de tipo verbal, tanto en las UT (enunciados, observaciones y comentarios sobre el desarrollo de la teoría) como en las UP (comentarios y explicaciones de los pasos y procesos seguidos en las actividades). También son comunes la mala presentación, la pobre puntuación de las unidades y la poca precisión de algunas representaciones. Por lo demás, las UT sí que son completas en los ejemplos y representaciones gráficas, mientras que hay una cierta presencia de ejercicios registrados e intentados y con cierta satisfacción, aunque sin rehacerse las actividades resueltas de forma menos satisfactoria.

Todos los pares de unidades incluidos en esta combinación específica corresponden a estudiantes del Docente 3. Hay tres alumnos tales que dos de sus pares de unidades han quedado aquí encuadrados dentro, lo que muestra cierta estabilidad de esta forma de actuar en los estudiantes en los que se presenta. Es el caso del alumno A23 (en sus dos pares de unidades) y los alumnos A37 y A39 (en los pares de unidades correspondientes a los temas de límites y derivadas). Además, la alumna A38 ha presentado esta combinación en el tema de derivadas.

Observando la Tabla V.38, el otro perfil específico de elaboración con cierta presencia dentro de la combinación general GT2-GGP2 ha sido el GT2-GGP2S4. Estos pares de unidades mantienen una característica común con respecto al perfil específico anterior: la presencia muy reducida de signos de tipo verbal, tanto en las unidades teóricas como prácticas. También se mantienen las características de las unidades del

GT2: la completitud en los ejemplos y representaciones gráficas en las UT, pudiendo ser éstas poco precisas en algunas ocasiones. Sin embargo, hay una diferencia importante en las UP: el número de ejercicios intentados por el alumno es muy bajo, con un nivel de satisfacción muy pobre y, además, sin corregirse los errores cometidos en algunos casos. Hay cuatro alumnos que presentan la combinación GT2-GGP2S4 en una de sus parejas de unidades, y que pertenecen a distintas clases y ambos sexos: el alumno A15 (tema de funciones elementales), la alumna A12 y el alumno A21 (tema de límites) y la alumna A41 (tema de derivadas).

Así, estos dos perfiles específicos tienen en común la reducida presencia de texto verbal, lo que pudiera revelar una falta de valoración de la utilidad del mismo entre estos estudiantes. No obstante, los dos perfiles sí que presentan una diferencia fundamental en relación a la cantidad de ejercicios registrados e intentados que se encuentran en las UP (mayor en el caso del primer perfil específico, GT2-GGP2S2). Todos los alumnos de este primer perfil pertenecían a las aulas del Docente 3, lo que vuelve a evidenciar una mayor presencia de intentos de resolución de las actividades en las aulas de este docente.

Combinaciones específicas dentro de las combinaciones GT4-GGP1 y GT4-GGP2 anteriores

La Tabla V.33 mostraba cómo las dos combinaciones GT4-GGP1 y GT4-GGP2 albergaban un número similar de parejas de unidades. Al considerar los subgrupos para los GGP, la Tabla V.38 evidencia la presencia de un perfil específico con mayor incidencia: el correspondiente a la combinación GT4-GGP2S4, con seis pares de unidades de cuatro estudiantes distintos. Los pares de unidades aquí incluidos tienen como característica común la baja presencia de observaciones y de comentarios por parte del alumno, tanto en las UT como en las UP, algo que también sucede con las explicaciones y aclaraciones en las actividades. Este perfil de elaboración se caracteriza también por la presencia de un número muy bajo de ejercicios intentados y con una pobre satisfacción, sin corregir los errores, en las UP; así como una buena presentación y una baja precisión en los elementos transcritos en las UT.

Este perfil ha sido detectado en seis pares de unidades, todos correspondientes a alumnas. En el caso de A11 y A12, se han detectado dos pares de unidades con esta combinación. También está en este perfil el único par de unidades que tenemos de la estudiante A5 (tema de funciones elementales), así como las unidades del tema de derivadas de la alumna A32. Las alumnas A11 y A12 pertenecen al aula del Docente 2. Este profesor ya comentó en el diario y en reuniones informales con él que estas dos alumnas no intentaban las actividades que se planteaban para resolver fuera del aula, y que en el aula lo hacían a ráfagas, despistándose con gran facilidad.

Además, hay otras dos combinaciones específicas en las que han quedado encuadradas tres pares de unidades. Son las combinaciones GT4-GGP1S2 y GT4-GGP2S3, que comentamos brevemente.

En el caso de GT4-GGP1S2, las parejas de unidades se caracterizan por una buena presentación y por un alto número de errores, tanto al transcribir elementos en las UT como en los numerosos intentos de resolución de las actividades en las UP. No obstante, sí que suelen rehacerse algunas actividades resueltas de forma poco satisfactoria y existe cierta personalización de las UP (explicaciones en ocasiones de los errores cometidos, presencia de marcas de comprensión sobre las actividades desarrolladas, uso de notaciones y representaciones personales). Los tres pares de unidades que han sido aquí situados pertenecen a alumnas de la clase de Ciencias Sociales del Docente 3 (en concreto a A32, A36 y A38) y al tema de funciones elementales. Así, podrían haber existido algunas condiciones contextuales que hayan favorecido el desarrollo de una combinación de unidades de este tipo, como el alto número de actividades planteadas por este docente, así como el interés de estas alumnas por mejorar y mostrar sus avances en la resolución de las actividades que no resuelven satisfactoriamente. También podría tener influencia en el mayor número de intentos el hecho de que este tema sea el primero del bloque, que, en muchos casos, contiene aspectos que ya han sido trabajados por los alumnos en cursos anteriores (tipos básicos de funciones, cálculo de dominios y estudio de características globales).

En el caso de la combinación GT4-GGP2S3, existen algunas características comunes con perfiles anteriores, como la presencia de bastantes errores en la transcripción de elementos teóricos y en los intentos de resolución de las actividades. No obstante, hay algunas diferencias con el perfil específico anterior, como son la corrección de muchos de los errores cometidos en las actividades (pero sin rehacer éstas) y la baja personalización en las UP, sin explicar los errores y sin utilizar anotaciones personales, sobre la comprensión o posibles dudas del estudiante. Esta combinación específica se presenta en varias aulas, aunque los tres pares de unidades pertenecen a alumnas: alumnas A26 y A32 (tema de límites) y alumna A41 (tema de derivadas).

Combinaciones específicas dentro de la combinación GT5-GGP1 anterior

Dentro de la combinación GT5-GGP1, al considerar los diferentes subgrupos en el GGP1 se evidencia la presencia de un perfil específico mayoritario: el correspondiente a la combinación GT5-GGP1S3 (ver Tabla V.38). En esta combinación hay cuatro pares de unidades de tres estudiantes distintos.

Los pares de unidades ubicados en este perfil tienen varias características comunes que los distinguen de la mayoría de pares restantes. Son unidades con una alta personalización por parte del estudiante en su desarrollo, existiendo un alto número de anotaciones personales sobre la comprensión, el estudio o con dudas sobre el desarrollo de los temas. También hay una presencia frecuente de ejercicios a mayores de los planteados por el docente, que el estudiante decide realizar en su cuaderno, y que complementa con bastantes comentarios, explicaciones y aclaraciones sobre dichas actividades. En otros aspectos, estos pares de unidades tienen un carácter incompleto, como en la baja transcripción de ejemplos o representaciones de tipo simbólico o gráfico en las UT, o la baja precisión de algunas transcripciones.

Dos de los tres pares de unidades del alumno A35 (los correspondientes a funciones elementales y límites) han sido aquí situados. También lo han sido los pares de unidades del tema de límites del alumno A3 y de la alumna A6. Todos estos estudiantes parecen valorar la utilidad de las explicaciones y los elementos de tipo verbal, al contrario de lo que parecía suceder en los perfiles situados dentro de la combinación GT2-GGP2. Además, en todas estas unidades existió un contexto que incitó la presencia de actividades a mayores. Este es el caso de los estudiantes A3 y A6, ambos de la clase del Docente 1, donde este docente proporcionó en el tema de límites hojas de ejercicios con un gran número de límites para que fueran resueltos, de forma personal y autónoma, por los estudiantes. En el caso del estudiante A35, su cuaderno evidencia que el alumno acude a clases particulares o a una academia (presencia de otros contenidos, letra con otra caligrafía…), en la que se proponen y realizan, en el propio cuaderno, otros ejercicios distintos de los propuestos por su profesora.

Combinaciones específicas dentro de las combinaciones GT6-GGP1 y GT6-GGP2 anteriores

La Tabla V.33 mostraba la existencia de bastantes unidades con combinación GT6-GGP1 o GT6-GGP2, especialmente la segunda. Al considerar los subgrupos para los GGP, la Tabla V.38 evidencia tres perfiles específicos de combinación con una mayor presencia.

El primero de ellos es el formado por la combinación GT6-GGP1S4, que se presenta en cinco pares de unidades correspondientes a cuatro alumnos distintos. Estos pares de unidades tienen ciertas similitudes con los que quedaron encuadrados en la combinación GT1-GGP1S4: unidades completas, tanto en las UT como en el alto número de ejercicios registrados y de intentos de resolución de las actividades, así como bastantes observaciones y explicaciones de los pasos, y de los procesos seguidos. Sin embargo, también existen diferencias en el desarrollo de la teoría, puesto que en las unidades pertenecientes a la combinación GT6-GGP1S4 no encontramos notaciones y representaciones personales del alumno, y la presentación de las UT es mucho peor.

La alumna A31 tiene dos pares de unidades dentro de esta combinación específica: las unidades de los temas de límites y continuidad. Otros tres estudiantes tienen un par de unidades aquí: la alumna A33 (tema de funciones elementales), el alumno A17 (tema de límites) y la alumna A14 (tema de derivadas).

Los otros dos perfiles específicos son los formados por las combinaciones GT6-GGP2S1 y GT6-GGP2S3. Ambos perfiles mantienen características comunes para las UT, basadas en la completitud de las transcripciones en todo tipo de elementos (incluidas observaciones y comentarios), así como cierta precisión en las representaciones (sobre todo las gráficas) y una pobre presentación. En las UP de ambas combinaciones también hay características comunes, como son haber intentado muchos de los ejercicios existentes en la unidad y haber corregido los errores cometidos. Sin embargo, el número de ejercicios registrado es mucho mayor en la combinación GT6–GGP2S3 que en la GT6–GGP2S1, también lo es el número de errores existentes en esos intentos de resolución. Además, en los pares de unidades correspondientes a GT6-GGP2S1 sí que suelen rehacerse las tareas resueltas de forma poco satisfactoria, hecho que no sucede con los pares de unidades encuadrados en GT6-GGP2S3.

En concreto, en el perfil específico determinado por GT6–GGP2S1 hay cuatro pares de unidades, de tres alumnos distintos. En el caso del alumno A10, los dos pares de unidades completos de que disponemos han quedado encuadrados en este perfil, por lo que muestra un comportamiento constante y homogéneo durante el periodo analizado. También están en este perfil el par de unidades sobre el tema de límites de la alumna A22 y el par de unidades sobre límites del alumno A4.

Para el perfil específico determinado por GT6–GGP2S3 hay cinco pares de unidades, de cuatro estudiantes distintos. De nuevo, hay un estudiante con sus dos pares de unidades dentro de este perfil: el alumno A28. Además, el par de unidades correspondiente al único tema que disponemos de la alumna A20 (tema de funciones elementales) ha quedado encuadrado dentro de este perfil. Por último, hay dos pares de unidades más en este perfil: alumna A26 (funciones elementales) y alumno A13 (derivadas).

Otra combinación específica destacada

Dentro del subapartado V.4.1, no se destacó la combinación formada por GT2-GGP1, puesto que su incidencia era mucho menor que la formada por GT2-GGP2. Sin embargo, al estudiar la distribución por subgrupos se encuentra un perfil específico con cierta incidencia que merece ser destacado por poseer características particulares diferenciadoras: el correspondiente a la combinación GT2–GGP1S3.

Estos pares de unidades tienen algunas características comunes, como son la pobre presentación de las unidades y la baja precisión al transcribir algunos elementos. Sin embargo, sí existe un contraste importante entre las UT y las UP correspondientes: mientras que las UT se caracterizan por una alta transcripción de ejemplos y representaciones gráficas y una baja escritura de representaciones verbales, las UP sí que destacan por la alta presencia de comentarios, de aclaraciones y explicaciones sobre las actividades, y de los pasos y procesos seguidos. Además, las UP dentro de esta combinación también se caracterizan por la alta presencia de actividades a mayores de las planteadas por el profesor, hecho diferencial frente a otras UP.

En este perfil específico han quedado situadas tres pares de unidades, correspondientes a tres estudiantes de la clase de Ciencias Sociales del Docente 3. Son los alumnos A37 y A39 (con el tema de funciones elementales) y la alumna A41 (con el tema de límites). Interpretamos que estos alumnos podrían dar una mayor importancia a las actividades frente a la teoría, buscando una mejor comprensión de qué es lo que se está realizando en una determinada actividad. Con las entrevistas a los alumnos intentaremos profundizar en estas interpretaciones.

Comportamientos particulares destacados de algunos alumnos

Además de los perfiles específicos que se han destacado a lo largo de este subapartado, la Tabla V.38 muestra la presencia de algunos alumnos en los cuales se agrupan sus pares de unidades en algunas combinaciones que se han mostrado como minoritarias en este análisis. Este hecho puede indicar la presencia de comportamientos particulares en algunos alumnos al elaborar su cuaderno, no compartidos prácticamente por más estudiantes. En la Tabla V.38 se han marcado en rojo las celdas que contenían alumnos en esta situación (con al menos dos pares de unidades en una celda de presencia “minoritaria”). En concreto, son seis estudiantes los que, de acuerdo con la Tabla V.38 han mostrado un comportamiento particular.

El caso más marcado es el de la alumna A34. Sus tres pares de unidades han quedado encuadrados en la combinación GT4-GGP1S3, lo que muestra una regularidad en las características de elaboración de su cuaderno a lo largo del periodo analizado, con unas características que únicamente ha compartido la alumna A6 en uno de los temas. Esta combinación se caracteriza por una precisión baja en la transcripción de elementos (ya sean teóricos o prácticos) y una pobre ortografía. El pobre dominio del idioma por parte de esta estudiante (de origen extranjero) podría ayudar a explicar estas características comunes. Además, existe un contraste entre la cantidad de texto escrito en ambos tipos de unidades, con una escritura muy reducida de observaciones y comentarios en las UT, y frecuente en las UP, en las que, además, también hay una alta presencia de actividades a mayores de las planteadas.

Otro caso de estudiante con todos sus pares de unidades en una misma combinación es la alumna A19, con la combinación GT1-GGP2S1. Esta combinación únicamente es compartida por un par de unidades de A24 (en el tema de funciones elementales). La combinación se caracterizan por presentar un contraste llamativo entre las UT y las UP: mientras que las UT son muy completas, el registro de actividades es bastante bajo, aunque en ocasiones sí que son actividades intentadas por el estudiante, y se corrigen en bastantes casos los errores cometidos. También es común a ambas unidades la menor incidencia de los signos de tipo verbal frente a otro tipo de representaciones, y la existencia de cierta precisión en las transcripciones. Esta alumna pudiera dar más importancia a la recogida del contenido teórico en el cuaderno frente a aspectos prácticos.

Un caso más es el del alumno A2, con sus dos pares de unidades incluidos en la combinación GT5-GGP2S1. Únicamente hay otro estudiante, A8, en el que se ha detectado esta combinación en un tema. Los pares se caracterizan por la existencia de un carácter selectivo al registrar elementos en su cuaderno: el registro de elementos teóricos es poco completo (sobre todo en ejemplos y en representaciones gráficas), así como el registro de actividades en las UP. No obstante, sí que se percibe una implicación y trabajo del alumno, a través de la presencia de anotaciones de carácter personal (sobre su comprensión o sus dudas), así como intentos de resolución de las pocas actividades registradas, corrigiéndose los errores cometidos. El alumno A2 fue uno de los que participó en la entrevista posterior sobre la elaboración, el uso y el rol del cuaderno de matemáticas para los alumnos, por lo que pudimos interpretar mejor este comportamiento en relación al uso que hace este estudiante del cuaderno.

La alumna A7 presenta la combinación GT4-GGP2S6 en sus dos pares de unidades, y son los únicos con esta combinación. Se caracterizan por una transcripción incompleta de algunos elementos (como las observaciones y comentarios del docente en las UT, o de un bajo número de actividades en las UP), junto con la presencia muy reducida de intentos de resolución de las actividades por parte de la alumna, sin que se marquen o corrijan los errores. Es decir, esta alumna muestra muy poco trabajo propio en el proceso de elaboración de su cuaderno, limitándose prácticamente a la transcripción de elementos, con una buena presentación, pero no siempre completa.

Por último, indicaremos dos estudiantes, pertenecientes al aula del Docente 2, que tienen dos de sus tres pares de unidades en combinaciones que únicamente se han presentado en dichos estudiantes.

La combinación GT4-GGP1S1 sólo se presenta en las unidades de límites y de derivadas de la alumna A16. Las unidades teóricas no destacan por su completitud, especialmente en el caso de las observaciones y comentarios, ni por su precisión al transcribir elementos; lo cual contrasta con la existencia de un mayor trabajo personal de la alumna en las UP, al existir algunas actividades a mayores de las propuestas por el profesor, actividades que son rehechas en casos donde el intento de resolución es poco satisfactorio. La buena presentación de las unidades es un hecho común a ambas. Las unidades de esta alumna presentan indicios de que la estudiante asiste a clases particulares o a una academia (presencia de otra letra y de correcciones ajenas a estudiante y Docente 2). Tendremos oportunidades de profundizar algo más en esta interpretación, puesto que esta alumna es una de las que participa en las entrevistas.

Finalmente, la combinación GT6-GGP2S4 únicamente se presenta en las unidades de límites y derivadas del alumno A15. Estos pares de unidades presentan un contraste muy grande entre las UT y las UP. Mientras que las UT destacan por ser unidades completas, en las UP apenas existen comentarios de tipo verbal, con un bajo número de actividades intentadas, con un pobre nivel de satisfacción, y sin marcar ni corregir los errores en algunos casos. Es decir, el trabajo personal del estudiante en su cuaderno con los contenidos propios de los temas parece reducido, en comparación con la completitud de su transcripción en las unidades teóricas, que pudiera venir facilitada por el hecho de que el Docente 2 combine el dictado verbal y el uso de la pizarra en la exposición de la teoría.

V.5. RENDIMIENTO ACADÉMICO EN LOS DIFERENTES GRUPOS TEÓRICOS Y PRÁCTICOS

En este quinto apartado vamos a tratar de relacionar las formas de elaboración de los cuadernos de matemáticas que se han presentado en los alumnos en el bloque de Análisis Matemático con el rendimiento académico que han tenido estos estudiantes en dicho bloque. El objetivo de este apartado es obtener más información acerca de en qué grupos ha existido un mayor rendimiento académico en este bloque de la asignatura. Es decir, cuáles han sido los modos de elaborar el cuaderno que, en esta investigación, se han asociado a qué resultados en la asignatura o viceversa.

Además de los cuadernos de los alumnos participantes para realizar las fotocopias, y de toda la información contextual indicada en los capítulos previos, los docentes nos han facilitado información sobre las calificaciones relacionadas con el bloque de Análisis Matemático que obtuvieron los alumnos en 1º de Bachillerato.

En el caso del Docente 1, el profesor nos proporcionó los resultados obtenidos por los alumnos de su aula en un examen realizado durante la 3ª evaluación, en la que se evaluó sobre contenidos propios del primer tema del bloque de Análisis Matemático. La docencia de este bloque llegó hasta el final del curso, por lo que no hubo una prueba de evaluación específica para los contenidos de los temas restantes. Estos contenidos sí formaron parte del examen global de la asignatura realizado por el docente, pero no hemos tenido acceso a esos resultados. Por tanto, de esta clase contamos con los resultados de los alumnos en ese primer examen comentado (calificación de 0 a 10), que se utilizan como referencia de su rendimiento en el bloque de contenidos.

En el caso del Docente 2, este profesor realizó dos exámenes sobre los contenidos del bloque de Análisis Matemático. El primer examen abarcó los contenidos del primer tema (funciones elementales), mientras que en el segundo examen se evaluó sobre los contenidos de los dos temas restantes (límites y derivadas). El docente nos proporcionó las calificaciones de ambas pruebas, ambas puntuadas de 0 a 10. En esta investigación vamos a considerar la media aritmética de esas calificaciones como el valor de referencia del rendimiento académico para cada estudiante participante.

En el caso de las dos aulas de la Docente 3, poseemos una información menos concreta que en los dos casos anteriores, debido a las restricciones impuestas por el propio centro privado-concertado. La docente únicamente nos pudo proporcionar las calificaciones finales de los estudiantes en cada una de las tres evaluaciones de la asignatura, tanto en el Bachillerato Científico-Tecnológico como en el de Ciencias Sociales. Por esa razón, hemos seleccionado la calificación del trimestre en el que se desarrolló el bloque de Análisis Matemático como valor de referencia del rendimiento académico de cada estudiante. En el aula de Ciencias Sociales, el bloque de Análisis Matemático se prolongó durante el segundo trimestre, prácticamente en su totalidad, por lo que se ha tomado la calificación de ese trimestre como valor de referencia para el rendimiento de los alumnos. En el caso del aula Científico-Tecnológica, el bloque de Análisis Matemático (los dos primeros temas, puesto que para el tema de derivadas ya no hubo tiempo) se impartió durante gran parte del tercer trimestre, por lo que el valor de referencia ha sido la calificación del tercer trimestre. En ambos casos, la calificación es una nota numérica entre 0 y 10 puntos.

La Tabla V.39 muestra la calificación tomada como referencia del rendimiento académico de cada uno de los alumnos participantes en el bloque de Análisis Matemático. Se presenta por columnas la información de cada una de las aulas. En la parte final se indican tanto la media como la desviación típica de estas calificaciones en el global de los grupos.

Docente 1 C-T		**Docente 2 CCSS**		**Docente 3 C-T**		**Docente 3 CCSS**	
Estud.	Media	Estud.	Media	Estud.	Media	Estud.	Media
A1	2’8	A11	2’65	A19	3’96	A30	0’76
A2	5’5	A12	5’5	A20	7’42	A31	8’34
A3	1’7	A13	2’88	A21	5’94	A32	7’1
A4	3’7	A14	5’05	A22	6’59	A33	6’04
A5	1’7	A15	3’18	A23	5’46	A34	1’47
A6	5’2	A16	3’75	A24	9’61	A35	3’2
A7	1’5	A17	5	A25	9’42	A36	4’3
A8	4’7	A18	0	A26	2’29	A37	3’85
A9	3’3			A27	2’42	A38	5’09
A10	8’2			A28	9’05	A39	2’53
				A29	5’45	A40	4’98
						A41	4’6
Media	3’83	Media	3’50	Media	6’15	Media	4’36
DT	2’00	DT	1’67	DT	2’48	DT	2’11

Tabla V.39. Calificaciones de los alumnos tomadas como referencia de su rendimiento académico en el bloque de Análisis Matemático.

Un primer vistazo a la Tabla V.39 evidencia que la media de resultados en tres de las cuatro aulas es mediocre, con unas medias entre 3’5 y 4’5, con bastantes calificaciones muy pobres y pocas calificaciones entre el alumnado que destaquen positivamente. Por el contrario, en el aula del Bachillerato Científico-Tecnológico de la Docente 3 la media es bastante más alta, con un porcentaje mayoritario de aprobados y tres alumnos con una calificación por encima de 9 en la evaluación tomada como referencia. Como indicamos en el Capítulo III[46], la profesora de este grupo ya nos había advertido del rendimiento bastante bueno en matemáticas que, en líneas generales, tenían los estudiantes de esta clase; y a los que destacaba como alumnos bastante estudiosos. Además de este hecho, también han podido existir influencias derivadas del contexto que contribuyeran a esos resultados, como puede ser que en esta clase no se llegara a impartir el tema de derivadas y sus aplicaciones, un tema que resulta complejo para el alumnado y que sí fue impartido en las otras tres aulas. Por tanto, es necesario tener presente este pequeño desequilibrio entre las calificaciones tomadas como referencia para el rendimiento académico, puesto que pudiera influir en cuáles son las agrupaciones o los perfiles de elaboración que se asocian a mejores resultados en la asignatura de matemáticas.

Para estudiar el rendimiento académico en los diferentes grupos de elaboración del cuaderno (de las unidades teóricas, prácticas, y globalmente) que han sido detectados a lo largo de este capítulo V, es necesario remarcar dos aspectos importantes. Por un lado, las unidades del único tema que poseíamos del alumno A18 fueron excluidas del desarrollo del análisis cuantitativo por considerarse atípicas (prácticamente sin contenido, lo que hacía que muchos indicadores no pudieran valorarse), por lo que este alumno tampoco forma parte de esta comparación elaboración-rendimiento.

Por otro lado, de cada alumno tuvimos dos o tres temas de contenido por regla general, lo que equivale a dos o tres unidades distintas, tanto teóricas como prácticas. Estas unidades pueden haber sido incluidas en grupos de elaboración distintos. Por ejemplo, y considerando la división en seis grupos teóricos, un alumno puede tener una unidad en el GT2, otra en el GT4 y otra en el GT5. Por el contrario, otro alumno puede tener sus tres unidades teóricas dentro de un mismo grupo, lo que indica una mayor homogeneidad en la elaboración de las unidades. Para reflejar este hecho, hemos adoptado el siguiente criterio: a cada unidad de un estudiante contenida en un grupo se le ha asociado el rendimiento académico del alumno, duplicándose o triplicándose la presencia de la calificación en el caso de que el estudiante tuviera dos o tres unidades, respectivamente, dentro de un determinado grupo.

[46] La información fundamental sobre las aulas y los alumnos participantes se incluye en el subapartado III.2.1. de esta tesis doctoral.

V.5.1. CONTRASTE ENTRE LOS SEIS GRUPOS TEÓRICOS Y EL RENDIMIENTO ACADÉMICO

Comenzamos el estudio comparativo de elaboración del cuaderno y rendimiento en la asignatura con la división de las unidades teóricas en seis grupos, división explicada en el subapartado V.3.1 de este capítulo. Utilizando el programa SPSS, hemos calculado la media y la desviación típica del rendimiento asociado a cada uno de los seis grupos, de acuerdo con el criterio anterior, y posteriormente, hemos realizado un contraste de medias, para estudiar la posible presencia de diferencias significativas entre las medias de unos grupos y otros.

La Tabla V.40 muestra los valores de la media y la desviación típica del rendimiento en los seis grupos teóricos, GT1 a GT6.

Grupo Teórico	Número de UT	Media	DT
GT1	14	5,9486	2,96571
GT2	25	4,2512	1,47139
GT3	2	2,6250	1,59099
GT4	22	3,7055	1,97664
GT5	13	3,9538	1,37636
GT6	26	5,2200	2,33592

Tabla V.40. Media y desviación típica del rendimiento académico en cada uno de los seis grupos teóricos.

Para estudiar la presencia de posibles diferencias significativas entre las medias del rendimiento, hemos realizado un contraste de medias, siguiendo los mismos parámetros establecidos a lo largo del análisis cuantitativo. Primeramente, se han aplicado pruebas de normalidad para estudiar si la distribución de los valores del rendimiento académico dentro de cada grupo cumple o no la hipótesis de normalidad. Para ello, se ha aplicado la prueba de Shapiro-Wilk a todos los grupos salvo al GT3 (que no tiene sentido por constar sólo de dos unidades). El nivel de significación ha sido de 0’05. La Tabla V.41 presenta los resultados obtenidos en dicha prueba. Dicha tabla muestra el rechazo de la hipótesis de normalidad en la distribución para los grupos teóricos GT4 y GT6, por lo que se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. Tras implementar esta prueba utilizando SPSS se ha obtenido un valor para el estadístico de 10’922, con un p-valor asociado de 0’053. El p-valor es ligeramente superior al nivel de significación fijado, por lo que se acepta la hipótesis estadística de que las distribuciones de los valores del rendimiento académico en los seis grupos teóricos son iguales.

Grupo Teórico	Prueba de Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Signif. (p-valor)
GT1	0,918	14	0,205
GT2	0,959	25	0,400
GT4	0,890	22	0,019
GT5	0,879	13	0,069
GT6	0,921	26	0,047

Tabla V.41. Valores obtenidos al aplicar la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk en las distribuciones del rendimiento en cada uno de los seis grupos teóricos.

No obstante, aunque no sean diferencias que se hayan manifestado como estadísticamente significativas, los valores de la Tabla V.40 muestran que la media del rendimiento es más alta en los grupos GT6 y, sobre todo, GT1, aunque es cierto que también son los grupos con una mayor desviación típica, por lo que hay diferencias importantes entre el rendimiento asociado a los alumnos con ese tipo de UT.

Los grupos GT1 y GT6 se caracterizaban por su alta completitud, el GT6 en todo tipo de elementos y el GT1 especialmente en ejemplos y representaciones gráficas, con una menor presencia de aspectos de tipo verbal (enunciados, observaciones y comentarios propios del alumno). Por tanto, parece que la completitud en los contenidos de tipo teórico recogidos en los cuadernos se asocia a un mejor rendimiento en la asignatura, aunque sin que esa diferencia se haya mostrado estadísticamente significativa con respecto a otros grupos.

Por otra parte, dejando de lado al GT3 (compuesto únicamente por dos unidades de dos alumnas), los grupos GT4 y GT5 son los que han presentado medias más bajas para el rendimiento académico, ambos por debajo de 4. Estas unidades presentan pocos aspectos en común, pero en ambas se aprecia una escasa presencia de alguno de los tipos de contenido utilizados como referencia en la investigación. En el caso del GT4 las unidades destacan por no contar apenas con observaciones y comentarios, tanto del docente como personales; mientras que las unidades del grupo GT5 sí que contienen anotaciones personales de los alumnos sobre su comprensión, pero registran un número muy bajo de ejemplos y de representaciones de tipo gráfico. Además, el grupo GT4 destaca negativamente por el alto número de errores al transcribir los elementos teóricos. En estas unidades se recoge parcialmente el contenido teórico, y no siempre de forma correcta, lo que parece asociarse con un menor rendimiento académico en la asignatura (medias inferiores a 4), aunque sin que la diferencia se haya detectado como estadísticamente significativa con respecto a los otros grupos.

V.5.2. CONTRASTE ENTRE LA ELABORACIÓN DE LAS UNIDADES PRÁCTICAS Y EL RENDIMIENTO ACADÉMICO

Consideramos aquí el análisis comparativo del modo en que se elaboran las UP y el rendimiento académico. Para ello, se han considerado las agrupaciones de las unidades prácticas explicadas en el subapartado V.3.2 de este mismo capítulo.

Rendimiento académico considerando los dos grandes grupos prácticos

Comenzamos con la agrupación en dos grandes grupos prácticos, GGP1 y GGP2. La Tabla V.42 muestra los valores de la media y de la desviación típica del rendimiento asociado a estos dos grandes grupos.

Gran Grupo Práctico	Número de UP	Media	DT
GGP1	42	4,6764	2,36579
GGP2	51	4,5184	2,05620

Tabla V.42. Media y desviación típica del rendimiento académico en cada uno de los dos grandes grupos prácticos.

Hemos realizado un contraste de medias para estudiar la presencia de posibles diferencias significativas entre las medias del rendimiento. Se han seguido los mismos pasos que anteriormente. No obstante, un vistazo a la Tabla V.42, que muestra valores muy parejos para las medias y de las desviaciones típicas, hace presagiar que este contraste de medias no detectará diferencias estadísticamente significativas.

Para saber qué tipo de prueba estadística hay que aplicar, se ha estudiado primero si la distribución de los valores del rendimiento académico dentro de cada GGP cumple la hipótesis de normalidad o no. El GGP1 tiene menos de 50 unidades, por lo que en él se ha aplicado la prueba de Shapiro-Wilk, obteniendo un valor del estadístico de 0’957 y un p-valor de 0’114, superior a 0’05. En el caso del GGP2, de más de 50 unidades, se ha utilizado la prueba de Kolmogorov-Smirnov, que ha proporcionado un valor del estadístico de 0’120 y un p-valor de 0’062, también superior a 0’05. Ambos p-valores son superiores al valor de significación fijado, 0’05, por lo que se acepta que las distribuciones del rendimiento en los dos grandes grupos son normales.

La segunda hipótesis que debe contrastarse es si existe homocedasticidad o no entre las distribuciones de los dos grandes grupos, para lo que recurrimos al estadístico de Levene. Aplicando la prueba con SPSS, se ha obtenido un valor para el estadístico de 0’384, con un p-valor asociado de 0’537, superior a 0’05. Se cumple la hipótesis de homocedasticidad u homogeneidad de varianzas.

Por tanto, puede aplicarse la prueba T para dos muestras independientes. La Tabla V.43 muestra los resultados obtenidos al aplicar esta prueba.

Grandes Grupos Prácticos	Prueba T para la igualdad de medias						
	t	gl	Signif. (bilate-ral)	Diferencia de medias	Error típico de la diferencia	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
						Inferior	Superior
GGP1-GGP2	0,344	91	0,731	0,15800	0,45864	-0,75303	1,06902

Tabla V.43. Resultados al aplicar la prueba T entre los dos grandes grupos prácticos.

La prueba T evidencia la aceptación de la hipótesis estadística de la igualdad de las medias para el rendimiento académico en los dos GGP, al obtenerse un p-valor de 0’731, superior a 0’05, y pertenecer el 0 al intervalo de confianza construido para la diferencia de las medias con ese nivel de significación.

Por tanto, no existen diferencias estadísticamente significativas entre las medias del rendimiento académico en los dos grandes grupos prácticos.

Rendimiento académico considerando los subgrupos de los dos grandes grupos prácticos

Dentro del subapartado V.3.2, y con posterioridad a la detección y estudio de los dos GGP, se profundizó en el análisis de estos dos grandes grupos obteniendo varios subgrupos dentro de ellos, con algunas características comunes, pero otras diferenciadas. Vamos a desarrollar un contraste de medias para el rendimiento académico dentro de cada uno de estos subgrupos, para ver si en ellos sí que existe alguna diferencia estadísticamente significativa entre sus medias, que nos permita obtener más información sobre elaboraciones de unidades prácticas que hayan aparecido asociadas, en esta investigación, a un mejor o peor rendimiento académico en la asignatura.

Utilizando como base el análisis clúster jerárquico que se llevó a cabo, el GGP1 fue dividido en cuatro subgrupos: GGP1S1 a GGP1S54. Del mismo modo, el GGP2 se dividió en seis subgrupos: GGP2S1 a GGP2S6. La Tabla V.44 muestra los valores de la media y la desviación típica del rendimiento en cada uno de los diez subgrupos.

Subgrupo del Gran Grupo Práctico	Número de UP	Media	DT
GGP1S1	7	4,1957	1,33069
GGP1S2	8	4,0450	2,21745
GGP1S3	12	2,9658	1,46635
GGP1S4	15	6,6060	2,15489
GGP2S1	11	5,8745	2,00948
GGP2S2	9	4,3133	1,17457
GGP2S3	10	5,0730	2,78694
GGP2S4	12	4,2233	1,67433
GGP2S5	4	3,2775	1,22154
GGP2S6	5	2,4960	0,92525

Tabla V.44. Media y desviación típica del rendimiento académico en cada uno de los subgrupos de los dos grandes grupos prácticos.

Para estudiar la presencia de posibles diferencias significativas entre las medias del rendimiento, se realiza de nuevo un contraste de medias. Estudiamos primero si la distribución del rendimiento en los diferentes subgrupos sigue una distribución estadísticamente normal o no, para lo que se aplica la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk. La Tabla V.45 muestra los resultados obtenidos.

Subgrupo del Gran Grupo Práctico	Prueba de Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Signif. (p-valor)
GGP1S1	0,843	7	0,107
GGP1S2	0,871	8	0,154
GGP1S3	0,863	12	0,053
GGP1S4	0,897	15	0,085
GGP2S1	0,892	11	0,146
GGP2S2	0,834	9	0,050
GGP2S3	0,841	10	0,045
GGP2S4	0,926	12	0,343
GGP2S5	0,752	4	0,040
GGP2S6	0,777	5	0,052

Tabla V.45. Valores obtenidos al aplicar la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk en las distribuciones del rendimiento en cada subgrupo de los grandes grupos prácticos.

La prueba muestra que no se cumple que la distribución sea estadísticamente normal, para un nivel de significación de 0’05, en todos los subgrupos. Por tanto, aplicaremos la prueba de Kruskal-Wallis para realizar el contraste entre las distribuciones de los subgrupos. Al implementar esta prueba con SPSS se ha obtenido un valor para el estadístico igual a 28'444, con un p-valor asociado de 0'001, inferior a 0'05 (nivel de significación fijado). Esto significa que se rechaza la hipótesis de que el rendimiento en todos los subgrupos esté igualmente distribuido.

Para encontrar parejas de subgrupos donde esa hipótesis de igualdad de distribuciones sea rechazada, el programa SPSS desarrolla un análisis post-hoc utilizando la prueba de Dunn-Bonferroni. Esta prueba post-hoc ha puesto de manifiesto este rechazo en tres parejas de subgrupos, con los valores para el estadístico y p-valor asociado (tras aplicar la corrección de Bonferroni) mostrados en la Tabla V.46.

Parejas de subgrupos donde se rechaza la igualdad	Prueba post-hoc de Dunn-Bonferroni			
	Diferencia de los rangos promedio	Error típico	Valor del estadístico	Signif. (p-valor con corrección Bonferroni)
GGP2S6 y GGP1S4	49'200	13'932	3'531	0,019
GGP1S3 y GGP1S4	-43'017	10'449	-4'117	0,002
GGP1S3 y GGP2S1	-36'826	11'262	-3'270	0,048

Tabla V.46. Valores obtenidos al aplicar la prueba post-hoc de Dunn-Bonferroni para detectar los subgrupos en los que rechaza la igualdad de distribuciones.

El desarrollo del análisis nos ha permitido detectar que la media del rendimiento académico en el subgrupo GGP1S4 es superior, de forma estadísticamente significativa, a dicha media tanto en el subgrupo GGP2S6 como en el subgrupo GGP1S3. Del mismo modo, la media del rendimiento en el subgrupo GGP2S1 también es significativamente superior a la media en el subgrupo GGP1S3.

Por tanto, tenemos dos subgrupos que destacan positivamente por su media, que son GGP1S4 y GGP2S1; y otros dos cuya media destaca negativamente, GGP1S3 y GGP2S6.

Si nos fijamos en las características que tenían los subgrupos que han destacado por tener una media de rendimiento superior, GGP1S4 y GGP2S1, existe un importante contraste entre ellas. Es decir, hay dos elaboraciones distintas del cuaderno, desde el punto de vista de las unidades prácticas, que han dado lugar en esta investigación a un mayor rendimiento académico.

Las unidades de tipo GGP1S4 se caracterizaban por su completitud en cuando a ejercicios registrados, intentando un buen número de ellos (aunque no siempre de forma satisfactoria, y no siempre corrigiendo los errores cometidos) y, sobre todo, escribiendo un gran número de comentarios, aclaraciones y explicaciones de los pasos y procesos, así como anotaciones más personales, explicaciones de los errores y marcas de comprensión. Es decir, estas unidades parecen destacar sobre todo por su carácter completo, tanto en ejercicios resueltos como en anotaciones de todo tipo relacionadas con ellos. Estas características, en esta investigación, se han asociado con un buen rendimiento en la asignatura.

Las unidades de tipo GGP2S1 se caracterizaban por no tener un número demasiado alto de actividades registradas, pero las que se encuentran sí que son intentadas por el alumno, con un bajo número de errores, e indicándose de forma clara estos posibles errores, así como rehaciéndose los ejercicios con intentos de resolución poco satisfactorios. Es decir, estas unidades parecen destacar porque el contenido del cuaderno sea propio (intentos de resolución de las actividades) y que sea correcto (corrigiendo posibles errores o rehaciendo actividades), características que también se han asociado aquí con un buen rendimiento en la asignatura.

En los dos subgrupos que han destacado negativamente por tener una media de rendimiento significativamente inferior, GGP1S3 y GGP2S6, también existe un contraste importante entre sus características, como sucedía con la pareja anterior.

Las unidades de tipo GGP1S3, sobre todo, se caracterizaban por la presencia de actividades a mayores de las planteadas por el docente y por una alta presencia de comentarios, aclaraciones y explicaciones de los pasos y procesos, aunque a veces fueran poco precisas. Estas características han aparecido ligadas a un bajo rendimiento en el bloque de contenidos. Este pudiera venir derivado de que los alumnos intentaran resolver ejercicios pero posteriormente no sean conscientes o no se aseguren del carácter correcto de los mismos, hecho que también concuerda con la necesidad que podrían mostrar de apuntar muchas aclaraciones y explicaciones que pudieran ayudarles en esas actividades que intentan por su cuenta.

Por otra parte, las unidades de tipo GGP2S6 también han aparecido asociadas a un mal rendimiento en el bloque de Análisis Matemático. Estas unidades se han caracterizado por ser muy incompletas en cuanto a ejercicios registrados y por no aparecer casi intentos de resolución propios de los alumnos, junto con una falta de corrección de los posibles errores. Así, no es sorprendente que las unidades con estas características, todas ellas negativas y que denotan una falta de trabajo del alumno con su cuaderno y una falta de atención y de evaluación del poco trabajo realizado, hayan aparecido asociadas aquí a un bajo rendimiento académico.

V.5.3. CONTRASTE ENTRE LA COMBINACIÓN UNIDAD TEÓRICA-UNIDAD PRÁCTICA Y EL RENDIMIENTO ACADÉMICO

Una vez que hemos analizado qué grupos de unidades teóricas y qué grupos (y subgrupos) de unidades prácticas se han relacionado con la presencia de un rendimiento en la asignatura que destaca positiva o negativamente, se ha realizado un último análisis tomando como referencia los perfiles obtenidos al combinar las UT y UP correspondientes a un mismo tema y alumno. Esta información se presentaba en la Tabla V.33, considerando los seis grupos teóricos y los dos grandes grupos prácticos.

En el análisis se han seguido los mismos criterios y pasos anteriores. En la Tabla V.47 se muestra la media y la desviación típica del rendimiento académico para cada una de las combinaciones de unidad teórica y práctica existentes.

Combinación GT-GGP	Número de combinaciones UT-UP	Media	DT
GT1-GGP1	10	6,2950	3,01685
GT1-GGP2	4	5,0825	3,06747
GT2-GGP1	6	3,5650	1,63512
GT2-GGP2	15	4,2660	1,10074
GT3-GGP1	1	3,7500	0
GT4-GGP1	10	3,8580	1,89779
GT4-GGP2	12	3,5783	2,11505
GT5-GGP1	6	3,5833	1,31212
GT5-GGP2	3	5,2333	0,46188
GT6-GGP1	9	5,3600	2,25365
GT6-GGP2	17	5,1459	2,44326

Tabla V.47. Media y desviación típica del rendimiento académico en cada una de las combinaciones UT-UP correspondientes a un mismo tema y alumno.

Para estudiar la presencia de posibles diferencias significativas en las medias del valor considerado como referencia para el rendimiento académico, se realiza un contraste de medias. De nuevo, lo primero es saber si las distribuciones de las medias en cada combinación GT-GGP son estadísticamente normales o no, para lo cual aplicamos la prueba de Shapiro-Wilk en las combinaciones donde tiene sentido (se excluye GT3-GGP1 al contar con una única unidad integrante). El nivel de significación fijado es 0’05. La Tabla V.48 presenta los resultados de dicha prueba, que muestra el rechazo de la hipótesis de normalidad en varias de las combinaciones GT-GGP.

Combinación GT-GGP	Prueba de Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Signif. (p-valor)
GT1-GGP1	0,900	10	0,219
GT1-GGP2	0,776	4	0,066
GT2-GGP1	0,868	6	0,217
GT2-GGP2	0,947	15	0,480
GT4-GGP1	0,902	10	0,228
GT4-GGP2	0,818	12	0,015
GT5-GGP1	0,882	6	0,279
GT5-GGP2	0,750	3	0,000
GT6-GGP1	0,956	9	0,754
GT6-GGP2	0,875	17	0,026

Tabla V.48. Valores obtenidos al aplicar la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk en las distribuciones del rendimiento en cada combinación GT-GGP.

Así, se ha aplicado la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. Al realizar esta prueba con SPSS se ha obtenido un valor para el estadístico de 13'223, con un p-valor asociado de 0'153. El p-valor es superior a 0'05, el nivel de significación fijado. Por tanto, se acepta la hipótesis estadística de igualdad de distribuciones del rendimiento académico en todos los grupos de combinaciones GT-GGP.

No obstante, aunque no sean diferencias que se hayan manifestado como estadísticamente significativas, los valores de la Tabla V.47 muestran que la media del rendimiento es superior en alumnos con una combinación de unidades GT1-GGP1 para la elaboración de su cuaderno. No obstante, la desviación típica en esta combinación es un valor elevado, lo que indica la presencia de bastante contraste entre las calificaciones de los alumnos con parejas de unidades de este tipo. La combinación GT1-GGP1 tiene por denominador común la completitud de ambos tipos de unidades, la teórica especialmente en lo que se refiere a ejemplos y representaciones gráficas, y con un alto número de observaciones y comentarios tanto en UT como en UP. También es común la buena presentación. Además, las UT destacan por el uso de notaciones y representaciones personales en su desarrollo así como cierta precisión en la transcripción de elementos, mientras que las UP destacan por la posible presencia de actividades a mayores (lo que a veces ocasiona la presencia de algunos errores) y el rehacimiento de tareas que se desarrollan de forma poco satisfactoria y luego son corregidas en el aula.

Así, parece que estas características teórico-prácticas al elaborar el cuaderno se han presentado asociadas a un mejor rendimiento en esta investigación, lo cual tiene cierta lógica puesto que muchas de las características que se indican son consideradas como positivas, y el cuaderno resulta un instrumento completo, con una alta carga de trabajo del alumno y con bastante información.

No hemos procedido a realizar un análisis del mismo tipo considerando las combinaciones con los subgrupos de los grupos prácticos, puesto que en la Tabla V.38 podemos observar cómo existen 36 combinaciones GTnº-GGPnºSnº posibles, un número muy elevado y con un número muy bajo de pares de unidades en algunas ocasiones. No obstante, anteriormente hemos constatado que los subgrupos de los GGP a los que se asociaba un mejor rendimiento eran GGP1S4 y GGP2S1, y que los grupos teóricos GT1 y GT6 mostraban un mejor rendimiento global, aunque sin diferencias que se consideraran significativas. Por ello, puede decirse que las combinaciones GT1-GGP1S4, GT1-GGP2S1, GT6-GGP1S4 y GT6-GGP2S1 serían las que, potencialmente, podrían asociarse a un mejor rendimiento académico de los alumnos que las han presentado. Estas combinaciones de unidades se caracterizan por unas UT completas, más en el caso de la GT6, y por uno de los dos comportamientos en la elaboración de las UP que se han asociado con un mejor rendimiento académico: unidades muy completas, con muchos intentos de resolución, anotaciones, explicaciones y posibles marcas de comprensión (GGP1S4) o unidades menos completas, pero en las que prima que el contenido sea propio (intentos de resolución de las actividades) y sea correcto (se corrijan o rehagan las actividades resueltas de modo menos satisfactorio).

V.6. SÍNTESIS FINAL DEL CAPÍTULO

Dado que la explicación del análisis cuantitativo desarrollado y sus diferentes pasos, así como los resultados derivados del mismo, han dado lugar a un capítulo con una extensión amplia, consideramos necesario finalizar el capítulo con una síntesis, a modo de resumen, de lo que se ha presentado en este capítulo y de los principales resultados obtenidos.

Este capítulo está directamente relacionado con el objetivo principal de la tesis doctoral. El desarrollo del análisis cuantitativo llevado a cabo, a partir de las valoraciones numéricas asociadas a las plantillas de análisis de cada unidad de registro, tiene por objeto detectar diferentes perfiles de elaboración del cuaderno de matemáticas entre el alumnado participante. Estos perfiles se complementarán con la información sobre razones que justifican los modos de elaboración, las concepciones del cuaderno y los modos de uso, obtenida a través de entrevistas a parte del alumnado participante, y que se presentan en el capítulo VI. Además, se han estudiado las posibles relaciones entre los perfiles de elaboración y el rendimiento académico en el bloque de contenidos de los alumnos participantes.

Esa detección y configuración de perfiles de elaboración del cuaderno ha tenido como base la aplicación de un análisis clúster o de conglomerados sobre las unidades de registro y las valoraciones numéricas asociadas a cada una, a través del cual se buscaba agrupar a aquellas unidades con características similares entre sí y diferentes de las restantes. En este sentido, ha sido necesaria la aplicación de dos etapas previas que permitieran desarrollar este análisis.

- Se necesitaba que todos los indicadores de todas las unidades participantes tuvieran una valoración numérica. Para ello, se han tratado los indicadores en los que el análisis no había permitido establecer una valoración numérica a través de una serie de pasos que se explican y justifican en el apartado V.1.

- El número de indicadores, tanto para las UT como para las UP, era muy alto en relación al número de unidades de registro, además de existir una alta correlación entre algunos de ellos. Por esa razón, se ha desarrollado un análisis de componentes principales para cada tipo de unidades en el que, a partir de los indicadores, se han establecido una serie de componentes que agrupan ideas de varios indicadores que han mostrado afinidad en sus valoraciones. Se explica este proceso en el apartado V.2 de este capítulo, del cual se han obtenido 13 componentes principales para el estudio de las unidades teóricas y 16 para el estudio de las unidades prácticas.

Tras estas dos etapas previas, se han llevado a cabo dos análisis clúster en paralelo, uno para las UT y otro para las UP, que se detallan en los dos subapartados del apartado V.3. En ambos casos, se ha considerado la realización de un análisis clúster de tipo jerárquico y *aglomerativo*, basado en la agrupación progresiva de unidades de registro con características afines derivadas de la similitud en la valoración de sus indicadores, considerando el método de Ward y la distancia euclídea al cuadrado. Los dendogramas de las Figuras V.3 (para las UT) y V.7 (para las UP) son el resultado de dicho análisis, en el que se muestra cómo se produce esa agrupación de unidades.

La realización de un análisis de tipo jerárquico ha permitido establecer diferentes jerarquías de agrupaciones, pudiendo distinguir entre grandes grupos con ciertas características afines, y varios subgrupos dentro de ellos que presentaran diferencias reseñables en otros aspectos. Para realizar ese estudio de las características, derivadas de las componentes principales, se han realizado contrastes de medias de las valoraciones numéricas de las componentes principales, para detectar qué diferencias de medias en las componentes se revelaban como diferencias estadísticamente significativas. Explicamos a continuación los modos de elaboración para las UT y las UP que hemos encontrado, así como los perfiles más comunes al cruzar el comportamiento de las unidades teórica y práctica, así como su relación con el contexto de desarrollo del estudio y el rendimiento académico en la asignatura.

V.6.1. MODOS DE ELABORACIÓN DE LAS UNIDADES TEÓRICAS: CONTEXTO Y RENDIMIENTO ACADÉMICO

En este sentido, el dendograma de la Figura V.3 evidenció la presencia de tres grandes grupos para las UT, dividiéndose cada uno de ellos a su vez en dos subgrupos. No obstante, el estudio de las características que evidenciaban los tres grandes grupos, y la presencia de un número alto de diferencias apreciables entre los subgrupos establecidos dentro de éstos, llevó al EI a rechazar la división en tres grandes grupos y considerar únicamente la división dada por los subgrupos. Así, existen seis grupos teóricos que muestran seis modos distintos de elaborar la UT que han sido detectados en los cuadernos de los alumnos participantes, grupos denominados GT1 a GT6. En el subapartado V.3.1 se explican detalladamente las características que el contraste de medias ha asociado a cada GT, y cuáles son las unidades de registro que han sido incluidas en cada grupo. Se recuerdan aquí brevemente las características de cada uno de ellos:

- GT1: Unidades que destacan por su completitud, sobre todo en el registro de ejemplos, representaciones gráficas, observaciones y comentarios, sobre todo del docente. Cierta precisión en la transcripción de elementos y en las representaciones gráficas, buena presentación y ortografía y cierto uso de notaciones y representaciones personales del alumno.

- GT2: Unidades caracterizadas por una alta transcripción de ejemplos y representaciones gráficas, pero muy baja de elementos verbales (enunciados, teoremas, observaciones, comentarios). Pobre presentación y poca precisión de las representaciones gráficas.

- GT3: Unidades caracterizadas por la presencia de un estilo propio muy marcado en la organización y presentación de la unidad, y por la precisión de las representaciones gráficas. Mala ortografía y puntuación.
- GT4: Unidades que destacan por su buena presentación y por tener continuidad en su desarrollo, aunque apenas existen comentarios y observaciones ni personales ni del docente, hay errores de transcripción y una mala ortografía y puntuación.
- GT5: Unidades caracterizadas por una transcripción muy baja de ejemplos y representaciones de tipo simbólico y gráfico, pero con la presencia de muchas anotaciones personales (escritura expresiva, Britton *et al.*, 1975). Buena ortografía y puntuación, mala organización de la unidad.
- GT6: Unidades que destacan por su completitud, al recoger un gran número de elementos teóricos de todo tipo, incluidas observaciones y comentarios. Por tanto, son más próximas a apuntes de tipo "exhaustivo" en la recogida de información[47]. Representaciones gráficas precisas, pero mala presentación.

Los grupos GT2, GT4 y GT6 han sido los más numerosos, y el GT3 únicamente cuenta con dos unidades. La distribución de estos grupos no ha sido uniforme entre las aulas: las de tipo GT5 han predominado en el aula del Docente 1, quizá por la exposición, en general, menos organizada y con un mayor ritmo por parte del docente; las de tipo GT4 y GT6 en el aula del Docente 2, pudiendo ayudar el dictado verbal y el uso de la pizarra por parte del docente en la mayor aparición de unidades de tipo "exhaustivo"; y las de tipo GT1 y GT2 en las aulas de la Docente 3, destacando la recogida sobre todo de los ejemplos y las representaciones de tipo gráfico, en exposiciones teóricas del docente que se han caracterizado generalmente por ser cortas y asociadas a la aplicación práctica.

En relación al sexo de los alumnos, la inmensa mayoría de unidades de tipo GT1 y GT4 corresponden a alumnas, entre las cuales prevalecen las unidades de estos tipos. Estas unidades tienen en común cierta completitud y una buena presentación, lo que puede ser una característica más valorada por las estudiantes. Por el contrario, casi todas las unidades de tipo GT5 han pertenecido a alumnos de sexo masculino, por lo que un grupo de alumnos configura su cuaderno más en torno a la presencia de una escritura expresiva y personal que en torno al contenido (muy incompletos). Además,

[47] Este es el nombre que habitualmente se ha dado, en los estudios sobre toma de apuntes, a los alumnos que recogían toda o gran parte de la información presentada (ver apartado I.2).

también hay bastantes alumnos con unidades de tipo GT2 y GT6, unidades completas pero que se caracterizan por una pobre presentación, característica contraria a la encontrada en las unidades predominantes entre las alumnas.

El subapartado V.5.1 se ha estudiado la relación entre el tipo de unidades teóricas y el rendimiento académico en el bloque de los alumnos que han elaborado UT de ese tipo. Dicho estudio no ha detectado la presencia de diferencias estadísticamente significativas entre el rendimiento académico de los alumnos según el tipo de unidad teórica elaborada. No obstante, sí que se ha observado una media mayor en el rendimiento de aquellos alumnos con unidades del tipo GT1 y GT6, por lo que la elaboración de unidades teóricas completas (aunque con alguna diferencia entre ellas), al menos en este estudio, ha aparecido ligada a un mejor rendimiento académico en la asignatura. Por el contrario, la media de rendimiento ha sido más baja entre los alumnos con unidades del tipo GT4 y GT5, que eran unidades menos completas en su contenido y con algunas características complementarias en cuanto a su compleción y su presentación que han podido causar limitaciones y tener influencia en que los alumnos hayan tenido un peor rendimiento académico.

V.6.2. MODOS DE ELABORACIÓN DE LAS UNIDADES PRÁCTICAS: CONTEXTO Y RENDIMIENTO ACADÉMICO

En el caso de las UP, el dendograma de la Figura V.7 mostraba la presencia de dos grandes grupos para las UP, que hemos llamado GGP1 y GGP2, cada uno de ellos proveniente de varios subgrupos. En este caso, a diferencia de para el caso de las UT, sí que se ha considerado pertinente mantener la división en dos grandes grupos que evidencia el análisis clúster, y caracterizar cada uno de los dos grandes grupos de unidades a partir de un contraste de las medias de las unidades en las componentes principales. A grandes rasgos, las unidades del tipo GGP1 se han caracterizado por tener una mayor número de actividades intentadas (aunque esto haga que pueda haber más errores) y un mayor número de explicaciones, aclaraciones y comentarios asociados a las tareas, así como por una buena presentación y por tender a rehacer las actividades que han resuelto de un modo menos satisfactorio. Estas características son opuestas en las unidades de tipo GGP2.

No obstante, dentro de cada gran grupo y entre las varias divisiones posibles en subgrupos que pueden establecerse (según el punto en el que uno decida parar el proceso de agrupación en el análisis clúster jerárquico), se ha considerado como la división más pertinente y relevante para el objeto de la investigación una división del

GGP1 en cuatro subgrupos (llamados de GGP1S1 a GGP1S4) y una división del GGP2 en seis subgrupos (de GGP2S1 a GGP2S6). En el subapartado V.3.2 se explica detalladamente todo este proceso, cuáles son las características de las UP de cada subgrupo y qué unidades se han sido incluidas en cada uno. Se explican brevemente a continuación estos diez modos de elaboración de las UP que se han distinguido entre el alumnado participante:

- GGP1S1: Unidades caracterizadas por la presencia de algunas actividades a mayores, una buena presentación y organización, representaciones verbales y gráficas escasas pero precisas, el rehacimiento de actividades pobremente desarrolladas y un déficit en la corrección de los posibles errores.

- GGP1S2: Unidades caracterizadas por su completitud y por existir muchos intentos de resolución de las tareas, por su buena presentación y por la presencia de cierta personalización y escritura expresiva; pero también por la existencia de muchos errores (aunque pueden rehacerse actividades) y la ausencia de comentarios y explicaciones de los pasos y procesos seguidos.

- GGP1S3: Unidades que destacan por la presencia de actividades a mayores de las propuestas y por una alta presencia de comentarios, aclaraciones y explicaciones de los pasos y procesos. Pobre presentación, poca precisión en los elementos transcritos.

- GGP1S4: Unidades caracterizadas por ser bastante completas en ejercicios registrados e intentados (aunque no siempre se corrigen los errores), y por un alto número de comentarios, aclaraciones y explicaciones y una cierta personalización y escritura expresiva. Cierta precisión de las transcripciones.

- GGP2S1: Unidades en las que no se recogen todas las actividades, pero las que están sí que son intentadas por el alumno, y de forma bastante satisfactoria. Además, se corrigen e indican claramente los errores cometidos, y se rehacen las actividades pobremente resueltas. Bajo número de comentarios y explicaciones.

- GGP2S2: Unidades con cierta presencia de ejercicios registrados e intentados, generalmente de forma satisfactoria, pero sin rehacer las actividades pobremente resueltas. Mala presentación y puntuación, escasez de comentarios y explicaciones verbales, poca precisión del simbolismo.

- GGP2S3: Unidades con bastantes actividades registradas e intentadas, pero muchos errores tanto de transcripción como al intentar las tareas. Suelen corregirse los errores, pero no rehacerse las actividades pobremente resueltas. Buena puntuación, mala organización, cuaderno poco personalizado.
- GGP2S4: Unidades caracterizadas por un bajo número de ejercicios intentados, además de forma poco satisfactoria y sin indicarse claramente los errores. Poca presencia de texto verbal (comentarios, explicaciones), aunque suele ser preciso.
- GGP2S5: Unidades con pocos ejercicios registrados e intentados por los alumnos, de un modo poco satisfactorio y sin que sean rehechas posteriormente. Cierta presencia de comentarios y explicaciones verbales, con un carácter preciso. Buena presentación.
- GGP2S6: Unidades caracterizadas por un bajo registro de actividades y sin apenas intentos de resolución del estudiante. Presencia de errores (transcripción, intentos de resolución) que no son corregidos.

Si se considera la división en dos grandes grupos prácticos, se ha evidenciado una presencia muy alta en el GGP1 de unidades prácticas elaboradas en las aulas de la Docente 3, y una prevalencia de unidades del tipo GGP2 en las aulas de los Docentes 1 y 2. La mayor presencia de actividades intentadas y la mayor completitud en las unidades de las aulas de la Docente 3 puede deberse a la presencia de un hábito regular de planteamiento de tareas como “deberes” para realizar fuera del aula, generalmente de refuerzo o de repaso de lo trabajado en la clase, que ha podido favorecer la creación de un hábito diario de trabajo de los estudiantes en su cuaderno. En concreto, hay una especial prevalencia entre las unidades de tipo GGP1S2 y GGP1S4, destacando ambas por su completitud y la presencia de muchos intentos de resolución, aunque difieran en otros aspectos como la escritura de comentarios y explicaciones sobre las actividades. Por el contrario, ese hábito del planteamiento diario de tareas no existió en las otras dos aulas (en la del Docente 2 se concentraban en los periodos finales del tema y en la del Docente 1 no existía un planteamiento explícito de tareas), lo que ha podido tener relación con la mayor presencia en estas aulas de UP menos completas y con menos intentos de resolución en el cuaderno. En el caso del Docente 2, éste nos alertó del poco trabajo de las actividades por parte de los estudiantes, que se refleja en una mayoría de unidades de tipo GGP2S4. En el aula del Docente 1 los alumnos pueden haber sido más selectivos en la realización de actividades en el cuaderno (muchas unidades de tipo GGP2S1), haber utilizado otros lugares para la resolución de tareas, o no plantearse la realización de las tareas al no ser mandadas explícitamente por el docente (varias unidades de tipo GGP2S6).

En relación al sexo de los participantes, las unidades de tipo GGP1 corresponden mayoritariamente a alumnas, por lo que, al menos en este estudio, las alumnas han tenido mayor tendencia a desarrollar un hábito de trabajo continuado de las actividades en su cuaderno. Los subgrupos del GGP1 con una mayor presencia de alumnas son GGP1S2 y GGP1S4. No obstante, en estas prevalencias también podría influir el hecho de que en las aulas de la Docente 3 hubo mayoría de chicas frente a chicos, y el aspecto de la metodología docente anteriormente comentado. Por el contrario, en el subgrupo GGP1S3, que se caracterizaba por la resolución de un gran número de actividades a mayores y una alta presencia de comentarios, hay un equilibrio entre la presencia de chicos y chicas. En las unidades de tipo GGP2 también existe un equilibrio entre ambos sexos, que se extiende, en líneas generales, a los diferentes subgrupos. Únicamente es destacable la prevalencia de los chicos entre las UP de tipo GGP2S2, con cierto trabajo de las unidades pero con una mala presentación y organización del cuaderno, un aspecto que vuelve a ligarse a las unidades creadas por alumnos de sexo masculino.

En el subapartado V.5.2 se ha estudiado la relación entre el tipo de unidades prácticas elaboradas por los alumnos y el rendimiento académico en el bloque de esos estudiantes. En la división de las UP en dos grandes grupos no se han detectado diferencias significativas en relación al rendimiento académico de los alumnos con esa elaboración. Sin embargo, sí que se han evidenciado diferencias significativas entre varios subgrupos, que evidencian ciertas elaboraciones de las UP que, en esta investigación, se han asociado a un mejor (o peor) rendimiento de los alumnos.

Las unidades de tipo GGP1S4 y GGP2S1 son las que se han asociado a un mejor rendimiento en el bloque de Análisis Matemático. Es curioso observar cómo estas unidades enfatizan características diferentes. Mientras que las de tipo GGP1S4 destacan por su completitud, el trabajo de los estudiantes y la presencia de escritura de tipo expresivo (Britton *et al*., 1975) y personal, las de tipo GGP2S1 destacan también por el trabajo del alumno (pero es más selectivo, las unidades son menos completas) y, sobre todo, porque el contenido sea correcto (corrección de errores, rehacimiento de actividades pobremente desarrolladas). Por el contrario, las unidades de tipo GGP1S3 y GGP2S6 se han asociado con un rendimiento académico inferior. Este hecho puede ser lógico en el caso de las unidades GGP2S6, puesto que éstas son muy incompletas, con bastantes errores y carecen de trabajo personal por parte del alumno (sin apenas intentos de resolución). Sin embargo, las de tipo GGP1S3 se han caracterizado por la alta presencia de actividades distintas de las planteadas por el profesor y de bastantes comentarios, aclaraciones y explicaciones de los pasos y procesos, comportamientos en los que puede subyacer una falta de seguridad de los estudiantes sobre el carácter correcto de sus intentos de resolución de las actividades, y de la pertinencia de las mismas dentro del tema que se está estudiando.

V.6.3. PERFILES MAYORITARIOS AL CRUZAR UNIDADES TEÓRICAS Y PRÁCTICAS

En el apartado V.4 de este capítulo se ha realizado un cruzamiento de los grupos obtenidos en la elaboración de las UT y UP correspondientes a un mismo tema, para ver cuáles han sido las combinaciones que se han mostrado como mayoritarias en esta investigación.

La combinación con una mayor presencia (17 pares de unidades, de 13 alumnos distintos) ha sido la formada por GT6-GGP2. Ambas unidades se caracterizan por una pobre presentación, pero existe un contraste entre la mayor completitud de las unidades teóricas (cercano a un carácter exhaustivo en la información recogida) y una menor completitud de las unidades prácticas. Si nos fijamos en los subgrupos para las UP, la mayor prevalencia ha estado en las combinaciones GT6-GGP2S1 y GT6-GGP2S3, lo que puede mostrar un cierto carácter selectivo de los estudiantes en relación a las actividades que realizan en su cuaderno, puesto que las UP son menos completas pero sí que hay una presencia importante de intentos de resolución del alumno y una corrección de los errores cometidos.

La combinación GT6-GGP1, en la que la completitud de las UT se ha trasladado también a las UP, ha tenido cierta presencia entre el alumnado (9 pares de unidades, correspondientes a 8 alumnos distintos). Dentro de ella, y en concreto, la combinación GT6-GGP1S4. Esta combinación también se caracteriza por la alta presencia de comentarios y explicaciones de tipo verbal a lo largo de todo el tema.

Una combinación más que, en general, destaca por su completitud en el desarrollo del tema es GT1-GGP1 (10 pares de unidades de 7 alumnos distintos), aunque en esta combinación también existe una buena presentación y un cierto uso de notaciones y representaciones personales en las UT. Dentro de esta combinación, si nos fijamos en los subgrupos, son mayoría los pares de unidades de tipo GT1-GGP1S4.

Otra combinación que se ha detectado en un número importante de pares de unidades ha sido GT2-GGP2 (15 pares de unidades, de 12 estudiantes distintos). En ambas unidades es común la poca presencia de registros verbales y la pobre presentación, existiendo cierta selección de la información registrada en la UT (predominan los ejemplos y las representaciones gráficas) y una baja presencia de intentos de resolución de las actividades. Esta combinación se ha presentado en las cuatro aulas, y más en alumnos que en alumnas. Si atendemos a los subgrupos de las UP, dentro de esta combinación son mayoría los pares de unidades de tipo GT2-GGP2S2 y GT2-GGP2S4.

Las unidades teóricas de tipo GT4 se han combinado de modo equitativo con unidades prácticas de tipo GGP1 (10 pares de unidades) y GGP2 (12 pares de unidades), teniendo ambas combinaciones cierta frecuencia de aparición. Si consideramos los subgrupos de las UP, la combinación mayoritaria es la de tipo GT4-GGP2S4, que se caracterizan por una baja presencia de observaciones, comentarios y explicaciones y, también, la existencia de un número muy bajo de actividades intentadas y con una pobre satisfacción.

Por último, una combinación con una menor frecuencia, pero que ha sido destacada por sus peculiares características ha sido la formada por GT5-GGP1. Esta combinación destaca por una alta presencia de anotaciones, en algunos casos de tipo personal y con un mayor carácter expresivo (Britton *et al.*, 1975), además de existir una alta presencia de actividades intentadas, pero con una UT muy incompleta, especialmente en lo relativo a ejemplos y representaciones gráficas. En este sentido, podrían considerarse como un perfil opuesto al obtenido en la combinación GT2-GGP2, perfil anteriormente comentado.

Para finalizar este capítulo, es interesante remarcar que este estudio de los perfiles de elaboración también ha permitido detectar la existencia de estudiantes con un comportamiento de elaboración muy marcado (es decir, tales que todos sus pares de unidades han sido incluido por el análisis clúster dentro de una misma combinación) y otros que presentan unos patrones en los que se ha detectado cierta variación entre un tema y otro (con pares de unidades que tienen dos y hasta tres combinaciones diferentes).

En concreto, hay varios estudiantes en los que la combinación se ha mantenido incluso considerando la división en subgrupos de las UP. Este ha sido el caso del alumno A2 (combinación GT5-GGP2S1), la alumna A7 (GT4-GGP2S6), el alumno A10 (GT6-GGP2S1), la alumna A19 (GT1-GGP2S1), el alumno A23 (GT2-GGP2S2), la alumna A25 (GT1-GGP1S4) y la alumna A34 (GT4-GGP1S3). Además, si consideramos la división únicamente en dos grandes grupos, aparecen algunos alumnos más que han presentado la misma combinación, como A11 (GT4-GGP2), A29 (GT1-GGP1) o A35 (GT5-GGP1). En algunos de estos estudiantes se han detectado características muy marcadas en la elaboración de su cuaderno de matemáticas y, en algunos, muy particulares (que, atendiendo al análisis clúster, no se han presentado prácticamente en ningún alumno más).

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Este sexto capítulo describe la planificación, el desarrollo y el análisis de las entrevistas realizadas a algunos de los estudiantes que habían participado con sus cuadernos en el análisis pormenorizado que se ha explicado en capítulos anteriores, explicando los resultados obtenidos y realizando una discusión de los mismos. El objetivo fundamental de estas entrevistas fue el de contrastar los diferentes modos de elaborar el cuaderno que han surgido durante este análisis, buscando profundizar en las razones que hay detrás de estos modos de elaboración, su relación con el uso que hace el estudiante del cuaderno y el rol que juega este instrumento en su estudio y aprendizaje de las matemáticas.

Estas entrevistas, y un análisis de contenido sobre las transcripciones de las mismas, nos han permitido obtener información y resultados sobre estos aspectos, que sirven para complementar y explicar mejor las propuestas de perfiles realizadas en el capítulo V. En este sentido, las entrevistas se han desarrollado con posterioridad a la finalización de un primer análisis de todas las fotocopias de los cuadernos de los alumnos que han participado. El desarrollo de ese análisis nos ha permitido decidir qué alumnos podían ser los más interesantes para desarrollar una entrevista. Como explicaremos con más detalle a lo largo del capítulo, las entrevistas se han desarrollado por parejas de alumnos de una misma clase entre los cuales se había detectado cierto contraste en su elaboración del cuaderno, con la intención de que se entablaran diálogos entre ellos, en los que defendieran y argumentaran posibles diferencias en sus posicionamientos.

El capítulo se ha estructurado en cuatro apartados. En el primer apartado se han remarcado algunos aspectos metodológicos sobre la planificación y realización de entrevistas de investigación, centrándose en su aplicación en nuestro estudio. En el segundo apartado se comenta brevemente el desarrollo y el proceso de transcripción de las entrevistas. En los apartados tercero y cuarto se presentan los resultados obtenidos al analizar las respuestas de los estudiantes en la entrevista. En el caso del tercer apartado se consideran por separado las respuestas de cada uno de los bloques de que constó la entrevista. El análisis conjunto de esas respuestas nos ha permitido detectar cinco perfiles diferentes en el alumnado participante en las entrevistas según el rol que tiene el cuaderno para los alumnos y el modo en que utilizan usualmente el mismo. Estos cinco perfiles se presentan y discuten en el cuarto apartado de este capítulo.

VI.1. ASPECTOS METODOLÓGICOS SOBRE LA PLANIFICACIÓN Y REALIZACIÓN DE ENTREVISTAS: APLICACIÓN A NUESTRO ESTUDIO

En este apartado desarrollamos de forma sucinta algunas ideas sobre la utilización de entrevistas en la investigación educativa, y el modo en que hemos planificado y concretado esas ideas en nuestra investigación.

Cohen, Manion y Morrison (2000) indican que el denominador común de la entrevista es la transacción que se produce entre la búsqueda de información por parte del entrevistador y el suministro de información por parte del entrevistado. En ese sentido, estos mismos autores citan a Cannell y Kahn (1968), que definen del siguiente modo una entrevista desde el punto de vista de la investigación: “A two-person conversation initiated by the interviewer for the specific purpose of obtaining research-relevant information, and focused by him [sic] on content specified by research objectives of systematic description, prediction, or explanation.” (Cannell & Kahn, 1968; citado en Cohen *et al*., 2000, p. 269).

Así, la utilización de entrevistas en la investigación tiene tres propósitos fundamentales: es un medio para recoger información que tenga relación directa con los objetivos de la investigación (asociado al conocimiento, información, valores, preferencias, pensamientos, actitudes y creencias de una persona), es un medio para comprobar hipótesis, hacer surgir otras nuevas y poder identificar y explicar variables y relaciones, y es un medio para complementar o validar otros métodos de investigación, así como profundizar y concretar los resultados obtenidos (Cohen *et al*., 2000, p. 268).

Consideramos que los tres propósitos se ven ampliamente reflejados en nuestro estudio de investigación, por lo que creemos que es muy pertinente la realización de entrevistas en nuestra situación.

Existen múltiples clasificaciones que pretenden establecer diferentes tipologías de entrevista en el mundo de la investigación, de acuerdo a diferentes criterios. En este caso, vamos a considerar la clasificación siguiente que realiza Patton (1980, p. 206), según el grado de estructuración (progresivamente de un carácter más abierto a un carácter más cerrado) y el tipo de preguntas que piensan plantearse:

- Entrevista a modo de conversación informal (en inglés, *informal conversational interview*): entrevista en la que no hay tópicos ni preguntas predeterminadas, y las cuestiones van emergiendo en el contexto y durante el transcurso de la propia entrevista.

- Entrevista a partir de un guion planificado (en inglés, *interview guide approach*): entrevista en la que los tópicos y cuestiones a tratar son planificados previamente en un esquema o guion, pero en las que el entrevistador decide el orden, el modo o la pertinencia del planteamiento de las mismas en el transcurso de la entrevista.

- Entrevistas estandarizadas abiertas (en inglés, *standardized open-ended interviews*): entrevista en la que previamente se han planificado el enunciado exacto y la secuencia de las preguntas, siendo preguntas abiertas (es decir, el entrevistado no tiene que decidir entre un conjunto de respuestas prefijadas)

- Entrevistas cuantitativas cerradas (en inglés, *closed quantitative interviews*): entrevista en la que previamente se han planificado tanto el enunciado exacto y la secuencia de preguntas como las categorías de respuesta posibles que se fijan, y entre las cuales elige el entrevistado.

Como muestra Patton (1980, p. 206), los cuatro tipos de entrevistas tienen sus fortalezas y debilidades, y es decisión del EI decidir qué tipo de entrevista se ajusta mejor al propósito de su investigación. En este sentido, el último tipo de entrevistas son propias de enfoques cuantitativos, en las que el trabajo arduo está en la fase de planificación, preparación y pilotaje de la misma para que cumpla su propósito. Los otros tres tipos de entrevistas son propias de enfoques cualitativos. Cuanto más abierta es la entrevista, más sencilla resulta su planificación, pero más complicada es la organización, la categorización, y la comparación de los datos emergentes (Cohen *et al.*, 2000).

En esta investigación, el tipo de entrevistas que mejor encajan con nuestro propósito son las *entrevistas a partir de un guion planificado*, también conocidas como entrevistas semiestructuradas. Las entrevistas se han desarrollado con posterioridad a un primer análisis completo de los cuadernos (utilizando el marco presentado en el capítulo IV), pero con anterioridad al desarrollo del análisis cuantitativo (Capítulo V). Ese primer análisis nos proporcionó varios tópicos de interés sobre la elaboración de los cuadernos en los cuales el EI consideró necesario obtener más información, especialmente ligada a las razones y los argumentos que proporcionan los alumnos para desarrollar y justificar sus modos de elaboración. Asimismo, la entrevista también perseguía la obtención de información que permitiera ligar y complementar esos modos de elaboración con los modos de utilización del cuaderno entre el alumnado, y con el rol que el cuaderno de matemáticas juega para estos estudiantes.

Por tanto, se planificaron una serie de bloques sobre los cuales hacer pivotar la entrevista, con una guía de posibles preguntas asociadas a cada bloque. Este documento iba a hacer el papel de guion o de esquema base, pero admitía ser modulado, modificado o adaptado durante la entrevista. Las diferencias entre estudiantes hacían que no fueran igual de pertinentes todas las preguntas para todos los estudiantes, que pudieran existir preguntas concretas de interés dirigidas sólo a algunos de ellos, o que se decidiera prestar una mayor atención a unos bloques o a otros según cuál fuera la pareja entrevistada. Además, dado que las preguntas eran básicamente de respuesta abierta, podían emerger otros aspectos de interés durante el transcurso de la entrevista que modificaran o que modularan su desarrollo.

La mayoría de las preguntas que se planificaron fueron preguntas abiertas, sin proporcionar a los entrevistados posibles respuestas sobre las cuales elegir. En algún caso sí que se pidió a los alumnos posicionarse entre algunas frases o posibilidades, pero acompañado siempre de una explicación o de una argumentación. Las preguntas abiertas son una buena elección en nuestra situación puesto que, como indican Cohen *et al.* (2000), son preguntas que aportan flexibilidad al desarrollo de la entrevista (permitiendo profundizar o aclarar algunos aspectos), permiten un mejor conocimiento de lo que realmente piensa el entrevistado y permiten la posible generación de hipótesis o de relaciones no previstas u ocultas hasta ese momento.

Dentro de las preguntas, se combinaron preguntas directas con preguntas indirectas, menos directivas y que suelen generar respuestas con mayor franqueza (Cohen *et al.*, 2000). También se combinaron preguntas con una temática general con otras más particulares. No obstante, en este sentido debe indicarse que las entrevistas se realizaron un año después de la recogida de información en las aulas, por lo que no tenía sentido plantear preguntas sobre aspectos demasiado concretos o propios de una circunstancia particular, dado que era muy difícil que los estudiantes se acordaran de las mismas debido al tiempo transcurrido.

Por último, el EI consideró conveniente y más útil que las entrevistas no se desarrollaran a un único alumno (es decir, con un esquema entrevistador-entrevistado), sino que cada entrevista se realizara a una pareja de alumnos participantes. Se buscó que la pareja de alumnos entrevistados, en cada caso, presentara ciertos contrastes en su elaboración del cuaderno, aspecto que habíamos detectado a través del primer desarrollo del análisis de sus cuadernos. El objetivo de esta disposición por parejas era que los estudiantes pudieran desarrollar diálogos entre ellos, contrastaran posibles diferencias en sus posturas, las defendieran o argumentaran y pudieran opinar sobre otros posibles estilos de elaboración o uso del cuaderno. Además, la presencia de dos estudiantes también aumentaba la posibilidad de que surgieran nuevas hipótesis, ideas o relaciones derivadas de la interacción.

En el siguiente subapartado vamos a presentar el esquema o guion base para el desarrollo de las entrevistas que fue planificado por el EI, en función de los marcos de referencia y de los resultados detectados en un primer análisis de las fotocopias de los alumnos participantes.

VI.1.1. GUION PARA EL DESARROLLO DE LAS ENTREVISTAS SOBRE EL CUADERNO DE MATEMÁTICAS

Se describe en este apartado el guion que el EI diseñó y planificó para el desarrollo de las entrevistas sobre el cuaderno de matemáticas. Ese diseño y planificación tuvo en cuenta algunos aspectos resaltados por la literatura consultada y aspectos relevantes detectados en el análisis de los cuadernos. Se fijaron seis bloques temáticos a tratar en la entrevista. La necesidad de conocer en profundidad los modos de elaboración de cada estudiante hizo que se considerara pertinente que fuera el EI el que exclusivamente se encargara del diseño y planificación de la entrevista, frente a otras opciones como podría haber sido la consideración adicional de un “equipo de expertos”.

El guion que se presenta es el guion utilizado como base. No obstante, y con anterioridad a cada una de las entrevistas, el EI personalizó el guion para adaptarlo a la pareja entrevistada. Es decir, se seleccionaron aquellos bloques o cuestiones que se consideraban más interesantes o sobre las que se quería obtener más información en concreto para esos estudiantes, y se planteó la posible adición de alguna pregunta específica más relacionada con estilos particulares de elaboración del cuaderno que podían haberse detectado. El objetivo final es la obtención de la máxima información posible acerca de los modos de elaboración y utilización del cuaderno y del papel que juega ese instrumento para los alumnos entrevistados.

El primer bloque de la entrevista se centró en la necesidad y la utilidad de tener un cuaderno en matemáticas, y en qué elementos o cualidades son las que le confieren esa necesidad o utilidad para los alumnos. El segundo bloque se desarrolló a partir de las ideas de Fried y Amit (2003) del cuaderno de matemáticas como un instrumento que puede ubicarse dentro del *dominio público* o *privado* de un estudiante. En este bloque se pretendió profundizar sobre las posibles variables de distinto tipo que pueden influir en un estudiante en la elaboración de su cuaderno, así como estudiar el nivel de flexibilidad o de "permeabilidad" de los estudiantes en esa elaboración según sea el contexto o las "condiciones de producción" del material (utilizando la terminología propia del análisis de contenido).

Los bloques tercero y cuarto están centrados en cada uno de las dos tipos de unidades de registro, teóricas y prácticas, en las que hemos dividido los temas. El bloque tercero se refiere a las UT, y en él se pretende conocer mejor qué tipos de contenido matemático son los que los alumnos prefieren anotar en su cuaderno en diferentes situaciones, y por qué. El cuarto bloque hace referencia a las UP, al rol que juega el cuaderno en relación a las actividades (tomando como base la dicotomía entre "lugar donde registrar actividades" y "lugar donde hacer actividades" que se encontró en el trabajo exploratorio, Capítulo II), el modo general de actuar cuando se intenta resolver una actividad en el cuaderno o se intenta evaluar la corrección de dicho intento, y las razones y argumentos que los estudiantes dan para apoyar sus comportamientos.

En el bloque quinto se trata de conocer más información sobre los modos en que los estudiantes utilizan su cuaderno de matemáticas, tanto en el desarrollo de su aprendizaje de la materia como en la preparación de pruebas de evaluación. En ese planteamiento se distingue entre los contenidos propios de las UT y de las UP. Por último, el sexto bloque se centra en otros aspectos asociados al cuaderno de matemáticas que se consideran de interés, como son la organización y la presentación del mismo, el tipo de escritura que los estudiantes creen que deben desarrollar en él, y la relación de las características del cuaderno con los diferentes modos de elaboración y uso, así como con el rendimiento académico en matemáticas.

Se reproduce el guion a continuación, indicando en cada bloque el título que se ha dado al mismo y el esquema o la propuesta de preguntas o aspectos posibles a tratar dentro de él. El guion que se reproduce se ha tomado como base para todas las entrevistas, aunque las características particulares de cada pareja entrevistada han hecho que el EI adaptara, concretara o suprimiera algunas de las preguntas o aspectos planteados, así como añadiera otros posibles aspectos concretos de interés.

Primer bloque: Necesidad y utilidad del cuaderno de matemáticas

> ¿Piensas que es necesario tener un cuaderno de matemáticas? ¿Por qué consideras que es útil (o no) tenerlo?
>
> ¿Qué elementos o cualidades debe tener un cuaderno para que te sea útil/para que sea un “buen” cuaderno para ti? Si aparecen varios, sugerir a los alumnos que establezcan un “orden de prioridades/de importancia” para ellos.

Segundo bloque: Dualidad del cuaderno como instrumento público o privado. Variables contextuales y docentes que pueden influir en su elaboración y uso

> Pedir a los alumnos que nos indiquen variables que influyen (o que pueden influir) en su elaboración del cuaderno (las variables pueden ser diferentes según la pareja de alumnos, modular el desarrollo del bloque según lo que nos digan).
>
> En caso de que los alumnos no las hagan explícitas, plantear qué influencia ejercen las siguientes variables o aspectos concretos (posibilidad de modular el énfasis de las variables o aspectos a partir del análisis concreto de los cuadernos de los alumnos entrevistados):

- Factores contextuales: ¿Influencia del resto de alumnos del grupo? ¿Ayudas exteriores? ¿Otros condicionantes?
- Factores relacionados con la asignatura o el tipo de contenido: posibilidad de diferencias en la elaboración y el uso del cuaderno según cuál sea el bloque de la asignatura desarrollado: álgebra, geometría, análisis, estadística…
- Factores relacionados con la metodología del docente, en concreto de su docente de matemáticas durante el periodo analizado: ¿hiciste alguna adaptación en la elaboración y el uso del cuaderno provocada por la

metodología del docente? ¿Cuáles? Posibilidad de pedir un pequeño análisis "histórico" con respecto a sus docentes de matemáticas en secundaria y las posibles adaptaciones o cambios en su forma de elaborar y utilizar el cuaderno.

- Factores relacionados con la evaluación realizada por el docente: ¿Habéis tenido docentes que os revisaran el cuaderno? ¿De qué forma? ¿Tenía influencia en la evaluación de la asignatura? ¿Cómo? ¿Qué cambios hacíais/haríais en la elaboración y el uso del cuaderno en el caso de que un docente lo tuviera presente en la evaluación de la asignatura? Posibles ventajas e inconvenientes de llevar a cabo esta revisión.

Tercer bloque: Apuntes o elementos teóricos del cuaderno de matemáticas

Plantear a la pareja de alumnos tres escenarios diferentes en el desarrollo de la parte teórica (existe la opción de que haya salido ya algún aspecto relacionado con este bloque en el bloque anterior, tener en cuenta esta circunstancia):

- 1er escenario: El profesor realiza la exposición de la parte teórica siguiendo el libro de texto de la asignatura.

- 2º escenario: El profesor realiza la exposición de la parte teórica a partir de unos apuntes elaborados por el docente, y que ha proporcionado a los alumnos.

- 3^er^ escenario: El profesor realiza una exposición de los contenidos teóricos relativamente personal, en la que combina, generalmente, el discurso oral con la utilización de la pizarra.

Tras el planteamiento de cada uno de los escenarios, preguntar a los alumnos qué elementos, como norma general, registrarían en su cuaderno en cada uno de ellos. Se les puede ayudar a enfocar la respuesta explicitando su comportamiento ante los cuatro tipos de elementos matemáticos considerados en el desarrollo del análisis: definiciones, resultados teóricos, justificaciones y fórmulas; ejemplos ilustrativos desarrollados; dibujos, esquemas y gráficos; observaciones y comentarios de interés realizados por el docente.

Posible planteamiento de preguntas relacionadas con aspectos concretos, propios de alguno de los estudiantes participantes en la entrevista, sobre el estilo detectado al elaborar el contenido teórico en su cuaderno de matemáticas.

Pedir a los alumnos que justifiquen su manera de comportarse: ¿qué razones os llevan a actuar así, por regla general? Pueden aparecer diferencias entre los dos miembros de la pareja: establecimiento de un diálogo en el que defiendan sus posturas y comenten la postura de su compañero, justificando si la adoptarían o no.

Contraponer la literalidad en la toma de apuntes con el parafraseo o la elaboración personal: ¿cuál de estas dos estrategias es la que usualmente seguís o es la que utilizaríais en matemáticas? ¿Por qué? ¿Qué razones tenéis en cuenta en esa decisión?

Cuarto bloque: Ejercicios y actividades en el cuaderno de matemáticas

Leer estas dos frases a los alumnos: “El cuaderno es un lugar donde, en gran medida, se registran ejercicios” y “El cuaderno es un lugar donde, en gran medida, se hacen ejercicios”. ¿Con cuál de las dos frases estáis más de acuerdo, o simpatizáis más? ¿Por qué? Posibles preguntas derivadas de contrastar la respuesta y razones proporcionadas por el alumno con el comportamiento suyo que hemos inferido en el análisis de su cuaderno.

(Pregunta específica para algunas personas en las que se haya observado este hecho, pero puede plantearse en general si se considera pertinente) Al revisar tu cuaderno, me ha dado la sensación de que, en varias ocasiones, has intentado resolver las actividades justo en el momento en que el profesor las estaba corrigiendo en la pizarra. ¿Es esto cierto? ¿Recuerdas si fue ese tu comportamiento en algunos casos? ¿Lo sueles hacer habitualmente? ¿Por qué actúas así? Posibles ventajas e inconvenientes.

(Pregunta especialmente pertinente para los alumnos del Docente 1, profesor que no solía mandar tareas explícitamente a los estudiantes) Cuando intentáis resolver actividades de matemáticas, ¿lo haces siempre / generalmente / algunas veces / pocas veces en vuestro cuaderno? ¿En qué otros lugares (si los hay) desarrollas intentos de resolución de las tareas? ¿Por qué razón? ¿Incorporas estos ejercicios a tu cuaderno? (En el caso de que aparezcan otros lugares, puede profundizarse sobre este hecho en el quinto bloque, sobre la utilización del cuaderno para el estudio y el aprendizaje de la asignatura).

Cuando haces o transcribes una actividad en tu cuaderno, ¿qué elementos, de entre los siguientes, suelen quedar reflejados: enunciado, únicamente la resolución, posibles comentarios explicando el proceso de resolución, posibles dudas o elementos que no se comprenden bien? ¿Qué razones te llevan a actuar así? ¿Actúas siempre del mismo modo, o existen diferencias entre unas actividades y otras? En caso de que existan diferencias, ¿qué factores influyen en la presencia de las mismas?

Preguntar explícitamente, en caso de que se pronuncien negativamente o que sean elementos que no hayamos detectado en el análisis de sus cuadernos, sobre por qué no consideran como necesaria la aparición de algunos de los elementos antes comentados (enunciado, posibles comentarios explicando el proceso, posibles dudas).

Imagina que en clase se está corrigiendo un ejercicio que has intentado resolver con anterioridad en tu cuaderno. ¿Cuál es tu comportamiento durante la corrección? ¿En qué centras tu atención? ¿Intentas siempre corregir los posibles errores en tus intentos de resolución? ¿Y explicarlos? Preguntar por la posibilidad de rehacer un ejercicio en el que han cometido varios errores. (De este párrafo, seleccionar y modular las preguntas realizadas según el comportamiento general detectado).

¿Sueles añadir otros procesos de resolución de las actividades que surjan durante el proceso de corrección y que sean distintos del proceso que tú has seguido? ¿Te parece interesante hacerlo? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?

Imagina que has intentado resolver una actividad que, posteriormente, no ha sido corregida en la clase. ¿Sigues algún procedimiento para confirmar si tu resolución es correcta? (posible ayuda de compañeros, consulta al profesor, apoyos externos al aula) En caso de que una actividad de este tipo te genere dudas, momentos de bloqueo o que existan aspectos que no estás comprendiendo bien, ¿realizas algún tipo de marca en tu cuaderno? ¿Intentas buscar su superación? ¿De qué forma?

Quinto bloque: Trabajo con el cuaderno fuera del aula. Uso del cuaderno para estudiar matemáticas

¿Revisas fuera del aula el contenido teórico registrado en el cuaderno? ¿Realizas alguna acción sobre ese contenido? (maquillaje topográfico, compleción, reelaboración) ¿De qué modo? ¿Con qué finalidad?

¿Revisas fuera del aula las actividades registradas en tu cuaderno? ¿Realizas las tareas en él registradas? ¿Realizas actividades a mayores de las propuestas por el profesor? Preguntar sobre el modo, la periodicidad y las circunstancias, especialmente en el caso de la última pregunta.

(Preguntas más centradas en la preparación de pruebas de evaluación y el posible uso del cuaderno con esta finalidad) En caso de hacerlo, ¿cómo utilizas el cuaderno para estudiar la asignatura de matemáticas? Diferenciar entre los elementos teóricos y los aspectos prácticos. ¿Y para la preparación de una prueba de evaluación?

¿Combináis el uso del cuaderno de matemáticas con el del libro de texto de la asignatura? ¿De qué manera? ¿Por qué? ¿Los métodos de estudio que seguís son fijos o dependen de diferentes variables: contexto, bloque, profesor…? (en las respuestas, intentar contrastar entre posibles estilos de aprendizaje más guiados, dependientes de la revisión de la teoría o de los ejercicios existentes en el cuaderno; o más independientes, con la posible realización de más ejercicios y una menor revisión de lo ya realizado).

Sexto bloque: Otros aspectos relacionados con el cuaderno de matemáticas

Sobre aspectos organizativos y de presentación en el cuaderno: ¿qué aspectos de cada tipo consideráis necesario/imprescindible llevar a cabo para que el cuaderno sea un elemento eficaz de estudio y aprendizaje? (Indagar en la relación entre las respuestas y la diferente utilización del cuaderno en el estudio y aprendizaje).

Contraponer la utilización de una escritura matemática formal y precisa (utilización del lenguaje matemático) frente a una escritura más libre y expresiva (clarificadora, de apoyo y ayuda en los procesos de aprendizaje y estudio): ¿qué tipo de escritura utilizáis más habitualmente en vuestro cuaderno? ¿En qué situaciones? ¿Qué tipo de escritura pensáis que debería predominar? ¿Por qué?

¿Qué cambios en la elaboración y el uso del cuaderno haríais o intentaríais hacer, si es que hubiera alguno, para intentar mejorar vuestro aprendizaje y vuestro rendimiento académico en la asignatura?

¿En qué medida piensas que tu cuaderno podría ser utilizado por otras personas para estudiar esta asignatura? ¿Por qué sí/no?

¿Piensas que podrías estudiar matemáticas con el cuaderno de otra persona? ¿Qué debería contener para que pudieras hacerlo?

Intentad hacer un poco de memoria y pensad en los docentes de matemáticas que habéis tenido a lo largo de la Enseñanza Secundaria. ¿Recordáis que algún docente os haya dado alguna sugerencia u os haya planteado algún modo de elaborar o de utilizar vuestro cuaderno? En caso afirmativo, ¿qué sugerencias o modos os proporcionaron? ¿Las adoptasteis? ¿Recordáis si os resultaron útiles?

¿Aceptarías que un profesor de matemáticas te propusiera una manera determinada de trabajar con tu cuaderno? ¿Te parecería algo apropiado o conveniente? ¿Por qué sí/no?

VI.2. SELECCIÓN DE LOS ESTUDIANTES ENTREVISTADOS. DESARROLLO Y TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS

Una vez terminado el primer análisis completo de todos los cuadernos de los alumnos participantes, y planificado el guion base para el desarrollo de las entrevistas semiestructuradas, fue necesario decidir cuáles iban a ser los estudiantes que el EI consideraba como más interesantes para su participación en la fase de entrevistas, y cómo configurar las parejas de alumnos.

Las entrevistas fueron realizadas un año después del periodo analizado en el análisis de los cuadernos y la recogida de información. Se llevaron a cabo durante los meses de abril y mayo del año 2013. Como ya se ha comentado anteriormente, la existencia de un periodo de alrededor de un año entre el periodo en que los alumnos elaboraron los cuadernos analizados y el desarrollo de las entrevistas hace que sea imposible formular preguntas sobre hechos demasiado concretos. Así, el guion que se había diseñado y planificado contenía preguntas más bien generales sobre los modos en los que, generalmente, los estudiantes elaboraban y utilizaban su cuaderno, y el papel que el cuaderno de matemáticas jugaba para el alumno.

Los alumnos que potencialmente podían ser escogidos para la entrevista partían de la lista de alumnos participantes en cada aula. Sin embargo, los docentes nos hicieron saber de la existencia de algunos estudiantes que habían abandonado el bachillerato o que habían abandonado el centro, lo que les descartaba como posibles entrevistados. Así, dentro de la lista de posibles alumnos de cada clase, y teniendo como base las características detectadas en el primer análisis de los cuadernos de los alumnos, el EI seleccionó varios alumnos por aula y propuso dos parejas de alumnos de cada clase para realizarles una entrevista. Se decidió entrevistar a dos parejas por aula porque ese número nos permitía que hubiera una participación equilibrada de las cuatro aulas participantes y con una representatividad suficiente de los comportamientos detectados en la elaboración del cuaderno y el contraste entre ellos.

Estas propuestas fueron consultadas con los profesores de matemáticas, que explicaron a los alumnos inicialmente seleccionados el propósito de las entrevistas. La mayoría de alumnos nos dieron su consentimiento para participar en la entrevista, aunque hubo que hacer algún cambio puntual en este sentido tras oír a los docentes.

La Tabla VI.1 presenta las ocho parejas de alumnos a las que se realizó la entrevista sobre el cuaderno de matemáticas. Además, esta tabla también recoge información sobre qué día y a qué hora se llevaron a cabo dichas entrevistas. Generalmente, se utilizó la media hora del recreo, para que los alumnos no perdieran ninguna de las horas de clase por participar en la entrevista. Únicamente en el caso de una pareja (la formada por A2 y A3) se trasladó la entrevista a una hora de clase que los alumnos tenían libre, y la entrevista pudo ser unos minutos más larga. Las entrevistas fueron desarrolladas en los propios centros, en aulas en las que únicamente estuvieron presentes el doctorando (como entrevistador) y la pareja de estudiantes entrevistada, sin que hubiera ninguna otra persona presente. En todo el desarrollo de la información obtenida se siguen manteniendo las codificaciones establecidas para los alumnos.

Clase participante en el análisis	Pareja de alumnos	Día de realización de la entrevista	Hora de realización de la entrevista
Aula del Docente 1 (Público, C-T)	A6 y A10	Jueves, 18/04/2013	10:55 – 11:25 h.
	A2 y A3	Lunes, 22/04/2013	10:05 – 10:45 h.
Aula del Docente 2 (Público, CCSS)	A12 y A14	Miércoles, 24/04/2013	10:55 – 11:25 h.
	A13 y A16	Jueves, 25/04/2013	10:55 – 11:25 h.
Aula del Docente 3 (Concertado, C-T)	A24 y A28	Lunes, 06/05/2013	11:15 – 11:45 h.
	A21 y A27	Viernes, 10/05/2013	11:15 – 11:45 h.
Aula del Docente 3 (Concertado, CCSS)	A31 y A36	Martes, 14/05/2013	11:15 – 11:45 h.
	A38 y A39	Viernes, 17/05/2013	11:15 – 11:45 h.

Tabla VI.1. Tabla con la información básica sobre las entrevistas desarrolladas.

Con el permiso expreso de todos los estudiantes participantes, las entrevistas fueron grabadas utilizando una grabadora de audio. Cada entrevista semiestructurada fue preparada individualmente por el EI. El guion base para todas ellas fue el presentado en el subapartado VI.1.1. No obstante, como ya se ha comentado, en cada entrevista el EI seleccionó, adaptó, concretó o suprimió algunas de las preguntas o situaciones planteadas o introdujo otros aspectos específicos de interés a tratar con la pareja entrevistada, todo ello teniendo en cuenta la restricción de la duración de las mismas a 25-30 minutos, para poder hacerlas durante el periodo de recreo). Además, el propio transcurso de las entrevistas y de las respuestas dadas por los estudiantes, también sirvió para modular y adaptar el guion buscando la optimización de su propósito.

Las entrevistas fueron desarrolladas en un ambiente cordial, en el que los estudiantes se mostraron tranquilos, no cohibidos, y perdiendo rápidamente el posible miedo inicial ante las preguntas. Este hecho, y que no comunicáramos nada a los docentes sobre lo que los estudiantes nos habían comentado, nos hace pensar que los alumnos fueron bastante sinceros y francos en sus respuestas, y participaron de manera proactiva en las entrevistas.

Las entrevistas fueron escuchadas y transcritas por el EI poco tiempo después de su realización. Este hecho nos permitió tener un mejor recuerdo de las mismas y de su desarrollo, lo que posibilitó que se incluyeran algunos aspectos contextuales, visuales o gestuales propios del desarrollo de la entrevista, que no habían sido recogidos por la grabadora de audio pero sí en las notas del entrevistador sobre el desarrollo de la misma. Así, se pretende complementar y enriquecer la transcripción del discurso oral en un texto escrito. Además, se recogen en notas a pie de página algunas aclaraciones sobre las contestaciones de los estudiantes. Estas notas también recogen varias reflexiones asociadas a las respuestas obtenidas, reflexiones generadas durante la transcripción de las mismas y la lectura de las transcripciones a partir de la interpretación de los datos que contienen en relación al contexto del aula y del análisis de los cuadernos realizado. En los Anexos E.1 a E.8 (todos ellos en el CD adjunto a la memoria de tesis) se recogen las transcripciones de las ocho entrevistas realizadas, presentadas en el orden cronológico en que se desarrollaron, junto con la información contextual, y las anotaciones y reflexiones a pie de página.

VI.3. ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS: RESULTADOS OBTENIDOS EN CADA BLOQUE

Una vez que se realizó la transcripción de las entrevistas, y que se tenía tanto el contenido transcrito, como la información contextual complementaria y las reflexiones generadas durante la transcripción, se ha realizado un análisis de las transcripciones, teniendo en cuenta la tensión que indican Cohen *et al*. (2000) entre una atomización y fragmentación de los datos y el sentido global de la entrevista. Así, se han seguido las etapas en el análisis señaladas por estos autores:

- Primeramente se han agrupado las respuestas propias de cada uno de los seis bloques, y se han analizado para generar diferentes unidades de significado que emergen de las respuestas.
- Posteriormente, se han clasificado, categorizado y ordenado esas unidades de significado en cada uno de los bloques, para obtener cuáles son las ideas fundamentales que han emergido.
- Finalmente, se ha realizado una descripción e interpretación conjunta de las ideas emergidas, relacionando la misma con ideas derivadas de los antecedentes y del análisis cuantitativo presentado en el Capítulo V.

Así, se dedica este apartado a presentar los resultados obtenidos en el análisis de las respuestas dadas por los alumnos participantes dentro de cada uno de los bloques, poniendo especial énfasis en las ideas emergidas o puestas de manifiesto por los estudiantes y los contrastes existentes entre algunas de esas ideas. Se dedica un subapartado a cada uno de los bloques: subapartados VI.3.1 a VI.3.6.

VI.3.1. RESULTADOS OBTENIDOS AL ANALIZAR LAS RESPUESTAS PROPIAS DEL BLOQUE 1: IDEAS EMERGENTES

El primer bloque de la entrevista[48] contenía varias preguntas asociadas a la necesidad y la utilidad que para los alumnos tiene el uso de un cuaderno de matemáticas, qué razones sustentan para ellos esa necesidad y utilidad, y qué elementos o cualidades debe tener un cuaderno para que cumpla con esos propósitos de necesidad y utilidad. Exponemos a continuación los resultados derivados del análisis de las respuestas dadas por los alumnos entrevistados a estas preguntas.

Todos los alumnos han dado una respuesta afirmativa al ser cuestionados sobre la necesidad de tener un cuaderno de matemáticas, aunque existen diferentes grados de expresividad en la respuesta. En este sentido, son destacables las respuestas de A27: “¡Obvio! Claro que sí” (intervención 2, Anexo E.6) y de A31: “¡Por supuesto! Es imprescindible” (intervención 2, Anexo E.7). Sin embargo, la razón o las razones que emergen al solicitarles que justifiquen esa necesidad ha variado entre los estudiantes participantes. El análisis de las respuestas nos ha permitido identificar cuatro grandes grupos de respuesta, según la idea fundamental que expresan.

[48] Las preguntas de este primer bloque que se establecieron en el guion base de la entrevista pueden verse en el subapartado VI.1.1 de este mismo capítulo.

El grupo de respuestas que ha sido puesto de manifiesto por más alumnos (12 de los 16 alumnos entrevistados, un 75%, y pertenecientes a todas las aulas) está relacionado con la cualidad del cuaderno como instrumento para registrar aspectos, generalmente lo que se ha hecho en la clase o durante el desarrollo de un tema. Dentro de este grupo existe un equilibrio entre los alumnos que enfatizan el registro de aspectos teóricos, los que enfatizan el registro de aspectos prácticos (actividades) y los que hacen referencia al registro de ambos tipos de contenido.

Otras tres ideas fundamentales han tenido cierta presencia en las respuestas de los alumnos, aunque menor que la del grupo anterior. Siete estudiantes (todos ellos pertenecientes a alguna de las dos aulas del Docente 3) han destacado el carácter organizador del contenido que tiene el cuaderno de matemáticas, lo que va un poco más allá de la cualidad de registro que se comentaba anteriormente. De nuevo, en las respuestas emerge la cualidad de organizador tanto para el contenido teórico como el práctico, aunque con un mayor énfasis en este último. Seis de los alumnos entrevistados (37’5%) destacaron el rol del cuaderno como el lugar en el que se hacen o se practican las actividades. Algunos alumnos, como A6 y A10, lo subrayaron como un aspecto importante asociado al cuaderno, como pone de manifiesto este extracto de la entrevista con ellos (intervenciones 5 a 7, Anexo E.1).

96. Inv.: ¿Por qué consideráis que es útil tener un cuaderno de matemáticas?
97. A6: Porque... bueno, más que en cualquier otra asignatura, los ejercicios es lo... más importante. Tienes que practicar y eso se hace... en los cuadernos, vaya.
98. A10: Sí, lo mismo, vamos (*Además de la afirmación oral, el estudiante también hace gestos evidenciando estar de acuerdo con la afirmación de A6*).

Por último, seis alumnos también han expresado la cualidad del cuaderno de matemáticas como una herramienta de estudio para ellos.

Posteriormente, y también dentro de este bloque, se preguntó a los estudiantes cuál o cuáles eran las cualidades que ellos asignaban o que debía tener un cuaderno de matemáticas para que fuera un “buen” cuaderno para ellos. El análisis de las transcripciones puso de manifiesto la emergencia de dos ideas clave en torno a las cuales giraban todas las respuestas. Así, ha existido un continuo de respuestas que abarcaban desde aquellas que priorizan sobre todo aspectos asociados al contenido del cuaderno hasta aquellas que hacen lo propio con aspectos de organización, estructuración y limpieza del cuaderno, existiendo respuestas que se ubican en diferente posición en ese continuo según se prioricen de modo más o menos marcado unas cualidades frente a las otras. La Figura VI.1 refleja gráficamente ese hecho.

Figura VI.1. Representación del continuo de ideas emergidas en las respuestas obtenidas al preguntar sobre las cualidades asignadas a un “buen” cuaderno.

Existió un grupo de alumnos que destacó cualidades asociadas al contenido como las cualidades que consideraban más importantes. De entre ellos, un número importante marcó como cualidad más importante que el contenido existente en el cuaderno fuera correcto, especialmente en lo relativo a los aspectos prácticos: que los ejercicios y las actividades del cuaderno estuvieran bien realizadas y que, en caso de que los hubiera, se marcaran claramente los errores cometidos en los intentos de resolución. Es el caso de los estudiantes A6, A10, A12, A13, A14, A16 y A28. El siguiente extracto de la entrevista de A12 y A14 muestra este hecho (intervenciones 19 a 25, Anexo E.3), donde las alumnas lo contrapusieron a la organización y la limpieza.

19. Inv.: (*Dirigiéndome a A12*) ¿A qué le das importancia en un cuaderno?
20. A12: Pues…, no sé, a que tenga lo necesario. Hombre, lo más importante, no sé… Las actividades y eso, los ejercicios, son importantes.
21. A14: Que estén hechos, más que…
22. A12: ¡Claro!
23. A14: Más que el orden y la limpieza.
24. A12: Que esté bien, claro.
25. A14: Aunque depende de la persona, claro.

Otros alumnos, como A2, también antepusieron aspectos de contenido frente a aspectos organizativos, aunque haciendo referencia no a la calidad del contenido existente sino a la presencia del contenido más importante, lo que evidencia la presencia de una jerarquía entre los diferentes contenidos para este alumno.

Existen otros estudiantes, como A3, A38 y A39, que se situaron en la parte central del continuo representado en la Figura VI.1, y que dijeron conceder importancia por igual tanto a los aspectos asociados al contenido como asociados a la organización. El siguiente extracto de la entrevista a A2 y A3 muestra cómo el alumno A3, espontáneamente, recurrió a un porcentaje para poner esta equivalencia de pesos de manifiesto (intervenciones 33 a 35, Anexo E.2).

33. A3: Yo siempre he dicho que 50-50 (*risas de A2*). Cincuenta por ciento estructura y todo bien escrito, organizado, y cincuenta por ciento contenido para que... (*se calla*)
34. Inv.: Digamos que le das la misma importancia.
35. A3: Sí. Hombre, tiene que ser muy importante el contenido pero si lo tienes todo..., pues cada cosa por un lado pues no... no te vas a enterar al final.

El alumno A21 también hizo emerger espontáneamente la equidistancia con respecto a ambos bloques de aspectos, pero porque no destacó ninguno de ellos como importante ni dijo buscar ninguna de estas cualidades en su cuaderno.

Por último, hay un grupo de cuatro alumnas (A24, A27, A31 y A36) que establecieron como prioritarias las cualidades asociadas a aspectos organizativos, de orden y limpieza (situadas más a la derecha en la Figura VI.1). Este extracto de la entrevista a A31 y A36 evidencia esta característica (intervenciones 8 a 22, Anexo E.7).

8. Inv.: De acuerdo. ¿Y qué elementos o cualidades debe tener un cuaderno para vosotras para que sea un cuaderno “bueno”, para que sea un cuaderno útil?
9. A36: Limpieza.
10. A31: Orden, limpieza.
11. A36: Nosotras, que somos chicas, colores.
12. A31: (*Risas*) Colores, sí.
13. A36: Para mí son imprescindibles (*la alumna A31 también asiente con la cabeza*). A mí me gusta poner los temas en colores...
14. A31: Las cosas subrayadas...
15. A36: Las soluciones o... vamos, yo sí que suelo utilizar bastantes colores.
16. A31: Utilizar, para corregir, el rojo siempre.
17. A36: Sí.

18. A31: Porque hay gente que... bueno, a lo mejor, pues yo que sé... No sé cómo decirte. Y eso, ¿no?[49]
19. A36: Sí. Limpieza, orden, color. A mí me gusta que esté bien estructurado. Aparte, yo soy bastante maniática (*risas*). Así que tiene que estar todo muy cuadriculado para verlo bien.
20. Inv.: ¿Sólo ese tipo de aspectos: aspectos de organización, de estructura, de limpieza...? (*Me callo tras hacer la pregunta, pero ninguna de las alumnas contesta, y se quedan en silencio*). Esos son los principales para vosotras.
21. A31: Sí.
22. A36: Yo creo que sí.

Además, en este extracto de entrevista es interesante comentar cómo la alumna A36, en la intervención 11, hizo emerger una distinción en los aspectos de presentación del cuaderno según sea el sexo de los alumnos, un aspecto sobre el que se reafirma posteriormente en varios momentos de la entrevista, dando a entender que las chicas dan una mayor importancia y muestran un mayor cuidado y atención hacia aspectos asociados con la organización y la presentación de las unidades. En el capítulo anterior hemos detectado la mayor presencia, en general, de cuadernos con una buena presentación y organización entre las alumnas, por lo que sí es una cualidad que aparenta ser más enfatizada y desarrollada de forma consciente por las alumnas que por los alumnos.

Muchos de los alumnos que priorizaron las cualidades de organización y presentación del cuaderno pertenecían a las dos aulas del Docente 3. Asimismo, se evidenciaron algunas relaciones entre las respuestas de los estudiantes a las preguntas de este bloque, que muestran la coherencia entre las razones aportadas para justificar la necesidad de tener un cuaderno de matemáticas y las cualidades que más valoraban en un cuaderno para que fuera útil para ellos.

VI.3.2. RESULTADOS OBTENIDOS AL ANALIZAR LAS RESPUESTAS PROPIAS DEL BLOQUE 2: IDEAS EMERGENTES

El segundo bloque de la entrevista[50] contenía varias preguntas y situaciones que pretenden analizar la mayor o menor estabilidad del modo de elaboración del cuaderno en los alumnos, y la posible influencia de variables o de situaciones que pueden hacer cambiar o modificar esa elaboración. Esa mayor o menor influencia nos

[49] La alumna A31 parece querer aportar alguna idea que finalmente no verbaliza, resultando un comentario vacío de contenido.
[50] Las preguntas y situaciones establecidas en el guion base para este segundo bloque de la entrevista pueden verse en el subapartado VI.1.1 perteneciente a este mismo capítulo.

puede aportar también información sobre si los alumnos participantes tienen una concepción del cuaderno como una instrumento situado plenamente dentro del *dominio privado* del estudiante, en términos de Fried y Amit (2003), o existen algunas restricciones que serían propias de su situación en un *dominio público*.

En todas las entrevistas se comenzó este bloque preguntando a los estudiantes participantes si tenían una elaboración más o menos uniforme del cuaderno a lo largo del tiempo o podían hacer cambios asociados a diferentes variables, y cuáles eran esos cambios y variables. El desarrollo restante del bloque se adaptó a las respuestas dadas por cada pareja de estudiantes a esta cuestión. Al realizar esta pregunta, 9 de los 16 alumnos participantes indicaron una elaboración más o menos uniforme del cuaderno a lo largo del tiempo y de su historial escolar en estos últimos años. No obstante, al preguntar posteriormente a estos alumnos de forma explícita sobre la influencia de posibles variables concretas, como el bloque de contenidos o la metodología del docente, 7 de esos 9 alumnos sí que indicaron la presencia de algunos matices diferenciadores. Tan sólo dos alumnas, A14 y A27, verbalizaron que no les afectaban aspectos como los anteriormente indicados, y que mantenían un modo de elaborar el cuaderno bastante uniforme.

Siete de los dieciséis alumnos, ante la primera pregunta, sí que hicieron emerger espontáneamente algunos factores o variables que influían en su modo de elaborar el cuaderno. Estos alumnos son A2, A13, A16, A21, A24, A28 y A39. Entre sus respuestas, como estaba previsto, surgieron aspectos relacionados tanto con los bloques de contenidos como con el docente y su metodología. Pero, además, destacaron las respuestas de tres alumnos, A2, A21 y A39, que aludieron a variables propias del alumno y de su aprendizaje de los contenidos, indicando que el registro y el trabajo realizado es más completo, más ordenado y más estructurado cuando están trabajando un tema que a ellos les resulta más difícil. La siguiente intervención del alumno A21 (intervención número 19, Anexo E.6) es un ejemplo de ello, destacando aspectos relativos al orden y la estructura:

19. A21: [...] Por ejemplo, había temas en matemáticas, sobre todo, que se me daban mal... o sea, que se me complicaban más, sobre todo en primero, que era el tema de los vectores. Yo me acuerdo que ese apartado le tenía mucho más ordenado, mucho más colocado que otros temas que se me daban mucho mejor.

Otro ejemplo es esta intervención del alumno A39 (intervención número 36, Anexo E.8), que evidencia una mayor carga de trabajo personal con el cuaderno y, como resultado, un cuaderno más completo:

36. A39: Pues yo creo que los temas, más o menos, les[51] tratas igual. Pero, por ejemplo… No sé, algún tema que te resulte un poco más fácil, o… o algún tema que sea de otros años, pues a lo mejor le das menos importancia y en vez de hacer… O sea, en un tema más difícil a lo mejor haces más ejercicios que están en el libro de texto, repasas más y haces más apartados que, a lo mejor, en un tema que tienes más…

Bien al preguntar explícitamente a los alumnos o bien porque los propios estudiantes lo hicieran emerger, siete alumnos mencionaron la presencia de alguna influencia en la elaboración del cuaderno derivada de características asociadas al bloque de contenidos que se esté trabajando. Todos ellos son estudiantes que pertenecieron a aulas del Docente 3 en el desarrollo del estudio: A21, A24, A28, A31, A36, A38 y A39. Las respuestas más repetidas se centraron en la influencia que tenía el diferente rol que podían tener las representaciones de tipo gráfico dentro de un tema (A24, A28, A31, A36 y A38): las representaciones de este tipo se hacían con un mayor detalle, cuidado y esmero cuando esos gráficos eran importantes para la comprensión de los conceptos (A24 y A28 verbalizan bloques de contenidos como los de geometría o funciones), o cuando eran la base de la solución de actividades (A31 y A36 verbalizan actividades como las de programación lineal). Otras respuestas hicieron mención a aspectos curriculares (presencia de un tema nuevo en el currículo de matemáticas de ese curso, A38 y A39) o a la estructura matemática de los temas (A21).

Doce alumnos (un 75% de los estudiantes participantes en las entrevistas) pusieron de manifiesto, bien de forma espontánea o bien al ser preguntados explícitamente por ello, la presencia de cierta influencia en la elaboración del cuaderno derivada de la metodología del docente. Es el caso de A2, A3, A6, A10, A12, A13, A16, A21, A24, A31, A36 y A39. Gran parte de esas respuestas hacían referencia al modo en que el docente exponía o presentaba la teoría de la asignatura[52]. En seis de los alumnos (entre ellos, los cuatro participantes provenientes del aula del Docente 1), emergió la influencia determinante que juega uno de los recursos tradicionales del aula: la pizarra de tiza. De un modo consciente o inconsciente, pusieron de manifiesto que existe una mayor transcripción de aquellos elementos que el profesor decide escribir en la pizarra, como muestra la respuesta de A24 en este extracto de entrevista (intervenciones 36 a 38, Anexo E.5):

---

[51] El alumno comete un leísmo en esta frase.

[52] Es necesario indicar que todos los alumnos participantes en las entrevistas, durante los dos cursos de Bachillerato, estuvieron en clases con una metodología del profesor de matemáticas basada en exposiciones teóricas por parte del docente, de un modo relativamente personal y sin seguir el libro de texto, seguida del planteamiento y la resolución de actividades. Así, la presencia de este tipo de metodología puede suponer una influencia en los alumnos al responder a esta cuestión y en relación a los temas o ideas que hacen emerger.

36. A24: Sí, yo creo que un poco sí que influye. Porque dependiendo de sus explicaciones y también de lo que escriba en la pizarra, pues te influye a la hora de elaborar tu cuaderno.

37. Inv.: ¿Cómo te influye?

38. A24: Pues..., si se esfuerza más, escribiendo más en la pizarra, pues tú, quieras que no, tomas más apuntes y te esfuerzas más.

Varios alumnos verbalizaron la idea de que el profesor selecciona y organiza los aspectos teórico-prácticos que considera más importantes para escribirlos en la pizarra y así, también, facilitar el trabajo a sus alumnos en ese registro. Con el fin de que el texto no se extienda demasiado, se presentan aquí agrupadas tres respuestas de diferentes entrevistas (intervenciones 47 y 51 de la entrevista a A2 y A3, Anexo E.2; intervención 33 de la entrevista a A6 y A10, Anexo E.1) en las que emergió esa idea:

47. A3: Sí, yo, normalmente, pues suelo escribir todo... todo lo que nos ponen en la pizarra para que no se me escape ninguna idea. Aunque vea que es muy fácil la idea intento apuntarla para que al final siempre la tenga escrita cuando me haga falta. Así que yo, normalmente, sea difícil o fácil el tema, lo suelo apuntar todo lo que nos pone.

51. A2: No, sí que afecta. Por ejemplo, el año pasado..., es decir, este año tenemos otro profesor distinto que el del año pasado y..., el profesor del año pasado casi no escribía letras en la pizarra y este, por ejemplo, las explicaciones teóricas escribe con letras. Entonces, al ver que el profesor lo pone con letras pues lo copias. Sin embargo, el año pasado, como lo decía de viva voz pues copiabas..., vamos, que no lo copiabas. Las explicaciones, digamos.

33. A6: Hombre..., es que, por ejemplo, con un profesor..., con un profesor que da más importancia a la teoría..., copia todo en la pizarra..., entonces nosotros lo copiamos con más facilidad..., y, con otros profesores, pues es todo más en clase de..., hacer ejercicios, hacer ejercicios, y él lo explica pero sin copiarlo en la pizarra, por ejemplo. Entonces...

Es decir, la pizarra se ha mostrado como un medio muy influyente para los alumnos en su registro de la información en metodologías de este tipo, algo ya detectado por investigaciones como la de Guasch y Castelló (2002), Nogueira (2005) o Rensaa (2014). Por esta razón, el docente debe ser consciente de la influencia que tiene la misma en su docencia en la clase.

Además, un número importante de alumnos mostraron preferencias por metodologías docentes basadas en un orden de exposición teoría + ejemplos de aplicación + ejercicios, indicando como razón fundamental que es un orden que les facilita el estudio posterior utilizando el cuaderno. Es decir, hay una preferencia porque el cuaderno tenga una estructura similar a la que se mantiene usualmente en un libro de texto, y a la estructura “contar-mostrar-hacer” que comentan Shield y Galbraith (1998), presentando ya una matemática cerrada y construida, frente a que el cuaderno muestre ese proceso de construcción y obtención de la misma.

En la segunda parte de este bloque, se preguntó a los alumnos sobre la posible influencia que podría tener para ellos que un docente de matemáticas les revisara los cuadernos. Hubo bastante homogeneidad en las respuestas de los alumnos al indicar que sí que eran frecuentes las revisiones del cuaderno en Primaria y en los primeros cursos de la ESO, pero que en Bachillerato ya no existían esas revisiones. Según cuentan los alumnos, esas revisiones en el inicio de la Secundaria buscaban controlar la realización de las actividades y el trabajo diario de los estudiantes, la completitud del cuaderno, y aspectos de organización, escritura y limpieza. Generalmente, estas revisiones servían al docente para completar la evaluación sumativa de los estudiantes derivada de las pruebas de evaluación. Pero también, como indica la alumna A31 en el siguiente extracto (intervenciones 68 a 71, Anexo E.7), esas revisiones suponían una motivación y un acicate para los estudiantes para desarrollar un mejor trabajo.

68. Inv.: ¿Y tenía influencia esa revisión luego en la evaluación de la asignatura? ¿Lo tenía en cuenta?
69. A31: Sí, personalmente, sí.
70. A36: Sí, yo creo que sí. Lo típico, para subir nota o para... Yo creo que es verdad que, para los profesores, se veía la evolución diaria, el trabajo diario, que en Secundaria es bastante importante.
71. A31: Sí, lo tienen muy en cuenta. Vamos, yo creo que también es una..., es algo que les puede luego también ayudar a..., a evaluarte. Porque no es igual una persona que..., pues..., no sé cómo explicarlo, que tiene ahí todo hecho un barullo, que no hace los ejercicios al día... Es una forma de motivación también, yo creo, revisar los cuadernos. Porque tú sabes, pues..., estás haciéndolo en casa y dices: “Mañana me lo van a mirar”. Entonces pones más énfasis, más empeño, más cuidado..., al hacer las cosas.

Además, los estudiantes indicaron que, si un docente de matemáticas les dijera que les va a revisar su cuaderno, para la mayoría de alumnos sí que tendría alguna influencia. Las respuestas mayoritarias indican que harían mejoras en aspectos de forma (organización, presentación). También hay cuatro estudiantes (A2, A3, A10 y A12, todos de las aulas de los Docentes 1 y 2), que hacen emerger la existencia de cambios en el contenido del cuaderno: sería más completo y tendría explicaciones más detalladas. Un aspecto que, como reconoce el alumno A10, también sería beneficioso por sí mismo para él, puesto que el cuaderno le sería una herramienta más útil (intervención número 81, Anexo E.1).

81. A10: Pues sí, a lo mejor, sí. Si lo tienes que entregar pues a lo mejor trabajas mejor en él y las explicaciones y tal pues..., te las curras más luego te..., te sirven más como instrumento el cuaderno que antes. Yo creo que sí.

Hay una alumna, A12, que llega a decir que haría “todo lo que el profesor te diga” (intervención número 61, Anexo E.3). Por el contrario, hay tres alumnos (A13, A16 y A24) que manifestaron que una revisión tal no les afectaría, especialmente en una etapa avanzada como el Bachillerato, y dejaron clara su postura de cuaderno como un instrumento personal, un instrumento útil para el propio alumno. El siguiente extracto de la entrevista a A13 y A16 (intervenciones 50 a 55, Anexo E.4) pone de manifiesto este hecho, en el que se ve cómo los estudiantes hablan de su cuaderno claramente como un instrumento dentro de un *dominio privado* del alumno, utilizando la terminología de Fried y Amit (2003).

50. Inv.: Si el profesor os dijera que os va a recoger el cuaderno de matemáticas, ¿haríais algún cambio en vuestra elaboración y uso del cuaderno? ¿O no lo haríais?
51. A13: Yo creo que no porque..., este cuaderno que llevamos ya es para..., o sea, tienes que hacer un cuaderno para aprobar y para..., para entenderte tú, para aprobar la asignatura. Entonces yo creo que lo haces lo mejor que..., lo mejor posible.
52. A16: Hombre, yo creo que ya cambia un poco. Porque antes lo hacías..., pues sí, por si te lo recogía. Ahora lo haces para ti, para un uso personal, no para el profesor.
53. A13: Sí, personalizado.
54. Inv.: O sea, que los dos anteponéis que el cuaderno sea una herramienta que os sirva para vosotros para estudiar, a que alguien pueda revisarlo y no le guste..., o no le parezca bien cómo lo hagáis.
55. A13: Sí. (*La alumna A16 también asiente*).

Por tanto, aunque en Bachillerato el cuaderno ya no sea un instrumento revisado por el docente (generalmente); el nivel de desarrollo de la concepción del cuaderno como un instrumento personal del alumno es diferente entre los estudiantes entrevistados.

VI.3.3. RESULTADOS OBTENIDOS AL ANALIZAR LAS RESPUESTAS PROPIAS DEL BLOQUE 3: IDEAS EMERGENTES

El tercer bloque de la entrevista[53] se centra especialmente en el contenido teórico que puede existir en un cuaderno. En dicho bloque se realizan varias preguntas asociadas a diferentes situaciones hipotéticas en las que un docente puede presentar su teoría a los estudiantes, dentro de una metodología de tipo expositivo. El objetivo es conocer mejor el rol que tendría el cuaderno en estas situaciones hipotéticas, y qué aspectos o qué contenido matemático registrarían los estudiantes en estas situaciones y por qué.

Las situaciones hipotéticas que se plantearon fueron tres. La primera situación es que el docente expusiera la teoría, esencialmente, siguiendo un libro de texto de la asignatura. La respuesta mayoritaria fue que, en ese caso, anotarían muy poco o nada en su cuaderno, siendo respuestas muy hipotéticas las que dan en caso de que sí hicieran esto último (utilizando expresiones como "si acaso" o "en último caso"), dando a entender que no sería el comportamiento habitual. Un grupo numeroso de alumnos explicó que seguiría la exposición a través de la lectura del libro de texto y que, si realiza alguna acción, sería sobre el propio libro (subrayando, o tomando algún posible comentario sobre algo nuevo o "distinto"). El siguiente extracto ejemplifica esta respuesta, tomado de la entrevista con A38 y A39 (intervenciones 70 a 81, Anexo E.8).

70. Inv.: La primera situación, el primer escenario es: tenéis el libro de texto de la asignatura y el profesor va siguiendo, de una manera más o menos literal, el libro de la asignatura a lo largo de la explicación. En esa situación, ¿vosotros tomáis nota de algo en el cuaderno, a lo largo de la explicación teórica?
71. A38: No.
72. A39: En mi caso no.
73. A38: Si está en el libro de texto tal cual no. Lo subrayaría en el libro y ya está.
74. A39: Claro, subrayar lo que da más importancia, pero a la hora de pasarlo…
75. A38: ¡Porque es tenerlo dos veces! A lo mejor en el cuaderno sí que pondría, por ejemplo, el título del tema y "Teoría, página tal"[54]. Pero…, copiarlo dos veces no.
76. A39: Claro.
77. Inv.: En ningún caso.
78. A39: No.

[53] Las preguntas y situaciones establecidas en el guion base de la entrevista para este tercer bloque pueden verse en el subapartado VI.1.1 perteneciente a este mismo capítulo.
[54] Ambos alumnos indican que podrían añadir una referencia en el cuaderno a la circunstancia.

79. A38: Yo creo que no. Si añade algo nuevo..., si está la mayoría en el libro de texto, lo apuntaría en el libro.
80. Inv.: ¿Tú también, A39?
81. A39: Yo también.

Si revisamos este extracto, observamos en la intervención 75 cómo la alumna A38 explica que copiar la teoría en el cuaderno en esta situación sería tenerla por duplicado, dando a entender que no le aportaría nada. Tan sólo hay tres estudiantes (A12, A14 y A24) que hicieron mención a posibles anotaciones del contenido teórico en el cuaderno: en elementos complicados o ejemplos distintos de los expuestos en el libro (en el caso de las alumnas A12 y A14) o la anotación en el cuaderno de la teoría más destacada (en el caso de la alumna A24).

Además, en la misma intervención destacada anteriormente, la alumna A38 también indicó la presencia de otro posible tipo de anotación interesante en el cuaderno, que ha sido comentado por otros estudiantes (A13, A31 y A39): la escritura explícita de una nota en la que se haga referencia expresa a que la teoría ha sido desarrollada siguiendo el libro de texto. La alumna A31 fue la que expresó un comportamiento más habitual en este sentido (intervención 76 de la entrevista a A31 y A36, Anexo E.7).

76. A31: Yo pongo: "Página tal". […] Vamos, yo por lo menos ha sido poco habitual para mí que lo expliquen por el libro, pero no suelo... Vamos, a lo mejor sí, yo que sé, si es una fórmula de tal pues claro, la copias. Pero si es así..., cosas más así, más generales, pongo "Página tal", "Explicación en página tal". Y no... No ando copiando, la verdad.

La presencia de este tipo de referencias en el cuaderno a la teoría desarrollada en otros medios, parece indicar un uso importante del cuaderno como herramienta base para el desarrollo del estudio y aprendizaje de la asignatura. Esta misma alumna lo reafirmó en intervenciones posteriores.

La segunda situación planteada en este bloque a los alumnos fue que el docente proporcionara unos apuntes del tema a los estudiantes, y que se fueran siguiendo dichos apuntes en la exposición teórica. En ese caso, la mayoría de alumnos explicó que tendría un comportamiento similar al caso anterior: seguiría los apuntes y podría efectuar alguna acción sobre ellos mismos, como el subrayado o añadir alguna anotación (ejemplo, comentario…). No obstante, hay cuatro estudiantes que hicieron emerger una asociación con el cuaderno en sus respuestas: A13, A16, A31 y A38. Estos cuatro alumnos agregarían estos apuntes al propio cuaderno (los graparían, pegarían o los añadirían, en el caso de que su cuaderno estuviera formado por hojas sueltas). En particular, en el caso de A31, se reafirmó el hecho que comentábamos anteriormente (intervenciones 80 a 82 de la entrevista a A31 y A36, Anexo E.7).

80. A31: Yo, cuando se me ha dado esa situación, lo que hecho es pues, directamente, como yo hago mucho uso del cuaderno, grapar los apuntes al propio cuaderno. Entonces, así... De tal forma que lo tengo ahí, no me hace falta volver a..., a hacerlo. Por ejemplo, cuando vimos el tema de los límites en funciones, nuestra profesora, en este caso la Docente 3, nos dio una hoja con todas las indeterminaciones. Y, pues eso, pues lo tienes ahí, no lo andas copiando. Pero lo grapé, entonces...
81. Inv.: Intentas que quede junto con el cuaderno.
82. A31: Claro, sí.

Únicamente la alumna A38 hizo mención a una posible anotación sobre el propio cuaderno: la escritura de un resumen para facilitar su repaso posterior.

La tercera y última situación planteada en este bloque, y que se correspondía con la metodología que habían seguido los docentes participantes en este estudio, es que un profesor realizara una exposición relativamente personal de los contenidos teóricos, combinando el discurso oral con la utilización de la pizarra. En esa situación, y como era de esperar, los estudiantes han indicado una mayor anotación de diferentes aspectos en sus cuadernos, detectándose los dos bloques de respuestas indicados por Badger *et al*. (2001) cuando preguntaron a los estudiantes sobre qué deciden anotar al tomar apuntes.

Por una parte, hay cuatro alumnos (A6, A10, A27 y A31) que dijeron “copiarlo todo” o que “intentaban copiar todo”. La alumna A27 dijo que lo hacía para poder tener registrado y poder recordar lo que se había hecho en la clase, mientras que A31 valoró tener todo el contenido en el cuaderno, incluyendo todo tipo de observaciones y comentarios (intervenciones 93 y 95, Anexo E.7), que tienen una utilidad supeditada a la utilización posterior del cuaderno como herramienta base para estudiar la asignatura (para enfatizar o recordar aspectos en el repaso y lectura del cuaderno en la preparación de pruebas de evaluación).

Los estudiantes restantes sí que indicaron la realización de una selección en el registro de los diferentes aspectos de los que consta la exposición, teniendo a anotar aquello que consideraban como “más importante”, aunque las marcas de importancia varían de unos alumnos a otros.

Ocho alumnos, la mitad de los participantes en las entrevistas, mencionaron entre esas marcas al medio utilizado por el docente en la exposición. De nuevo, volvió a emerger la mayor importancia que dan al contenido que el docente escribe en la pizarra frente a, por ejemplo, su discurso oral. Esto les lleva a copiar en mayor medida o de forma completa lo que el profesor escribe en la pizarra durante la exposición. Un ejemplo de extracto donde se evidenció este hecho son estas dos intervenciones de A3 en la entrevista a los alumnos A2 y A3 (intervenciones 85 a 87, Anexo E.2):

85. A3: Hombre, el profesor, muchas veces, sabes cuándo te está diciendo algo importante y cuándo no, y cuando dice algo importante, tú lo apuntas y... y cuando no pues... intentas recordarlo pero tampoco le tomas tanta importancia. También tienes que ver la importancia que da el profesor a lo que explica.
86. Inv.: ¿Y cómo lo ves tú eso?
87. A3: Pues... no sé, por ejemplo, a algo que le da mucha importancia lo escribe en la pizarra, pero si no le da tanta, pues lo dice oralmente y ya está.

En relación al discurso oral del docente, algunos de estos ocho alumnos indicaron que la anotación es mucho más selectiva. En este sentido, los alumnos están atentos a marcas de importancia que puede proporcionar explícitamente el propio docente, como puede ser la repetición o la enfatización de algunos aspectos, o comunicar directamente este hecho (esto es coherente con lo obtenido por Van Meter *et al.*, 1994 y Guasch y Castelló, 2002, en sus estudios sobre toma de apuntes), como marca este extracto de la entrevista a A13 y A16 (intervenciones 85 y 86, Anexo E.4):

85. A16: Hombre, normalmente, el profesor dice “esto es más importante”, también. O esto... para el examen. Entonces eso siempre... siempre se apunta.
86. A13: Eso sí.

Los estudios sobre toma de apuntes reflejados en los antecedentes no evidenciaron aspectos asociados al contenido como una variable o “marca de importancia” señalada por los alumnos al ser preguntados. En estas entrevistas sí ha emergido. La mitad de los alumnos hicieron alguna mención relacionada con la distinta importancia concedida a diferentes tipos de contenido matemático. En este sentido, bastantes de estos alumnos destacan su preferencia para anotar aspectos relacionados con los ejemplos ilustrativos o con los ejemplos de aplicación, y con la teoría que se aplica en los ejemplos y ejercicios (fórmulas o teoremas aplicados, pasos a seguir, explicaciones para entender los ejemplos). Así, los alumnos parecen dar más importancia a recoger los aspectos procedimentales frente a los conceptuales, quizá también por la influencia de la evaluación que suele realizarse (y que, en el caso concreto de estas cuatro aulas, mayoritariamente se basó en actividades prácticas y ejercicios de aplicación). La siguiente intervención de la alumna A12 deja claro que da más importancia a los ejemplos que a otro tipo de contenido teórico, como son las definiciones (intervenciones 79 a 83 de la entrevista a A12 y A14, Anexo E.3).

79. A12: Yo…, no sé, sí que también lo suelo copiar todo pero…, no sé si veo que son cosas más importantes…
80. Inv.: ¿Y cómo ves tú que son cosas más importantes?
81. A12: Pues…, no sé. Por ejemplo, si pone una definición pues, a lo mejor, no la copio entera, la copio menos. O que está en el libro, no sé. Los ejemplos y eso sí que los suelo copiar.
82. Inv.: Los ejemplos sí que los copias más… Das más importancia a tomar los ejemplos.
83. A12: Sí.

Otro ejemplo relacionado con lo anterior es esta intervención de A21 (intervención 54 de la entrevista con A21 y A27, Anexo E.6), en la que evidenció una concepción muy práctica de la teoría, siendo útil para él los ejemplos (sobre todo si son ejemplos con elementos genéricos, frente a ejemplos concretos) y aquella teoría que puede ser aplicada, indicando que, si no, ésta "no le convence".

54. A21: Yo…, el año pasado copiaba tanto la teoría como el ejemplo que venía posterior, normalmente. Y ahora lo que hago, normalmente, es diferenciar el tipo de teoría que está aplicando y copiar sólo el ejemplo. Porque la teoría del principio…, no me servía. O sea, la copiaba, luego no me enteraba muy bien del ejemplo… Y casi prefería enterarme del ejemplo, porque es realmente lo que se basan… A mi entender las matemáticas, sobre todo, es práctica. Hay muy poca teoría. O sea, más que demostraciones, que es aprendérselas de memoria, sí. Pero…, creo que es más práctica. Y entonces, esa pequeña teoría que nos daba no me acababa de convencer[55]. Igual que en los ejemplos que se daban con letras[56], que luego había que aplicar con números, yo también prefería copiar los de letras, y el ejemplo numérico no. Pero, al igual, cuando era una demostración, una explicación en plan: "Pues esto es el módulo de vectores, hay que coger un vector…" Y eso la gente lo copiaba. Yo simplemente me quedaba con el ejemplo numérico, o de letras, en este caso.

Por último, hay un reducido número de estudiantes (4 de los 16, un 25%) que mencionaron marcas de importancia personales, enfatizando que son ellos mismos los que toman la decisión de qué consideran más importante en cada momento para ser registrado. Así, el alumno A13 parece ligar la anotación de algo con el hecho de que lo esté comprendiendo bien (intervención número 82, Anexo E.4), mientras que el

[55] ¿Puede referirse a definiciones, introducciones de conceptos…?
[56] Se refiere a los ejemplos con elementos genéricos (por ejemplo, representantes genéricos de un conjunto) en lugar de con elementos concretos.

alumno A28 hace mención a la “autocrítica” del estudiante para considerar qué es más importante y qué no lo es (intervención número 79, Anexo E.5).

VI.3.4. RESULTADOS OBTENIDOS AL ANALIZAR LAS RESPUESTAS PROPIAS DEL BLOQUE 4: IDEAS EMERGENTES

El cuarto bloque de la entrevista[57] se centra especialmente en las unidades que, en el desarrollo de la investigación, hemos llamado unidades prácticas. Así, este bloque está compuesto por varias situaciones y preguntas destinadas a conocer cuál es el rol que juega el cuaderno para los alumnos, en relación a las actividades; cómo actúan con el cuaderno los estudiantes al intentar resolver una actividad o evaluar la corrección de la misma, y qué razones y argumentos proporcionan para justificar sus comportamientos. Presentamos a continuación los resultados obtenidos al analizar las respuestas de los alumnos a las diferentes cuestiones planteadas en este bloque.

Como inicio de este bloque, se presentó a los alumnos dos frases sobre el rol principal que para ellos tenía el cuaderno, teniendo que elegir con cuál de las dos estaban más de acuerdo y por qué. Las frases eran:

- “El cuaderno es un lugar donde, en gran medida, se registran ejercicios”
- “El cuaderno es un lugar donde, en gran medida, se hacen ejercicios”

Vamos a presentar el análisis de las respuestas dadas por los alumnos y ligadas a la respuesta a la pregunta posterior, donde debían indicar con qué frecuencia acudían al cuaderno para resolver las actividades de matemáticas. En general, la mayoría de alumnos ha mostrado preferencia por la segunda frase con respecto a la primera, pero existen algunos hábitos de trabajo de los alumnos con el cuaderno que explican la elección de ambas frases.

Al plantear la situación anterior, nos hemos encontrado con un continuo de respuestas que mostraban unas preferencias más o menos marcadas de una opción frente a la otra. Forzamos a todos los alumnos participantes a que tuvieran que posicionarse escogiendo una de las dos frases, aunque en algunos casos las respuestas fueron más matizadas, valorando y justificando el interés de ambos hechos.

Doce de los 16 alumnos entrevistados (un 75%) mostraron preferencia por la segunda frase, simpatizando más con la visión del cuaderno de matemáticas como lugar en el

---

[57] Las preguntas y situaciones establecidas en el guion base de la entrevista para este cuarto bloque pueden verse en el subapartado VI.1.1 de este mismo capítulo.

que se hacen actividades. Esos alumnos son A6, A10, A12, A14, A16, A21, A24, A28, A31, A36, A38 y A39. Todos ellos hablaron de la importancia del trabajo en matemáticas a través de la realización de actividades, y del cuaderno como lugar en el que desarrollar ese trabajo. Hay estudiantes, como A6, A12, A14 y A28 que fueron más claros en su respuesta, eligiendo la segunda frase e indicando que siempre usan al cuaderno para sus intentos de resolución de las tareas. El siguiente extracto de la entrevista a A12 y A14 evidencia este hecho (intervenciones 96 a 105, Anexo E.3):

96. A14: Yo creo que es donde se hacen los ejercicios, más que se registran. Bueno, depende, si no haces los ejercicios nunca, pues no. Pero si tú lo haces en tu casa, o en clase cuando lo mandan o algo…, no sé, lo haces en el cuaderno. Para poder ver todo el proceso y todo.
97. A12: Sí, yo también creo eso, que se hacen los ejercicios, no se registran.
98. Inv.: Dais más importancia a hacer los ejercicios.
99. A12: Hombre, es que, registrando los ejercicios pues no haces nada, o sea, no aprendes. Yo creo, vamos. Los tienes que hacer tú.
100. Inv.: De acuerdo. Cuando intentáis actividades de matemáticas que el profesor os ha propuesto o que no os ha propuesto y los hacéis porque lo consideráis interesantes, ¿lo soléis hacer siempre en el cuaderno? ¿Generalmente? ¿Algunas veces? ¿Pocas veces? Es decir, ¿utilizáis el cuaderno para realizar las actividades que el profesor propone?
101. A12: Sí, sí, siempre.
102. A14: Sí (*también asiente con la cabeza*).
103. Inv.: Siempre. O sea, no utilizáis otros lugares para intentar tareas.
104. A12: No.
105. A14: No.

Otros estudiantes también prefirieron la segunda frase, pero añadieron algunos matices a sus respuestas que modulan la rotundidad en la elección. Por ejemplo, A10 y A21 sí hicieron emerger una diferenciación entre actividades en relación a su realización en el cuaderno: aquellas actividades que ha propuesto el docente sí que se intentan resolver en el cuaderno, pero si el propio estudiante intenta alguna actividad distinta de las planteadas, esos intentos ya no se hacen en el cuaderno, sino en hojas aparte u otros lugares. Según indicó A10 en el siguiente extracto de entrevista, este hecho le permitía diferenciar lo hecho o propuesto en clase, a lo que da más importancia para la evaluación, que lo que él mismo intenta por iniciativa propia (intervención 92, y 95 a 100, entrevista a A6 y A10, Anexo E.1):

92. A10: Sí, sobre todo si los ha mandado el profesor. Si no, a lo mejor, si es por iniciativa propia, a lo mejor, los haces aparte, pero... si te los manda el profesor... yo por lo menos sí que los tengo en el cuaderno.

[…]

95. Inv.: Me comentabas, A10, que si el profesor os ha mandado las tareas tú las realizas en el cuaderno; pero si no, a veces las haces en el cuaderno, pero a veces las haces en otros lugares.

96. A10: Sí.

97. Inv.: ¿Qué lugares utilizas para esos intentos de resolución?

98. A10: Pues nada especial..., cuadernos viejos, hojas en sucio... Cosas así.

99. Inv.: ¿Por qué razón?

100. A10: Porque..., no sé, no forma parte del contenido propio... que te lo ha mandado el profesor, ¿no? Entonces a lo mejor es un ejercicio que te hace gracia y... puede ser interesante. Entonces lo haces y..., ya está, pero no lo metes en el cuaderno[58] porque luego, al estudiar, no tiene la misma importancia que los que te ha dicho el profesor que hagas, porque él considera que son importantes. Que son los que luego, normalmente, entran en el examen.

Por otra parte, siete estudiantes (A16, A21, A24, A31, A36, A38 y A39) marcaron su preferencia por el cuaderno como lugar para hacer actividades, pero también señalaron el hecho de que el cuaderno permite registrar los ejercicios realizados, aunque lo consideren menos importante que el hecho de hacerlos. La importancia de este registro está ligada, en la mayor parte de los casos, a la utilización del cuaderno como instrumento en el estudio de la asignatura y la preparación de pruebas de evaluación, como se comentará específicamente en el bloque 5. Incluso, hay cuatro alumnas (A16, A31, A36 y A38) que verbalizaron tener presente esa utilización posterior del cuaderno, lo que les influye en su comportamiento al intentar resolver las tareas propuestas, tomando algunas precauciones. En todo caso, además de hacer el ejercicio, valoran que la solución sea correcta y que la resolución del ejercicio resulte limpia y ordenada. Esto hace que, en algunos casos, puedan hacer fuera del cuaderno sus primeros intentos de resolución en ejercicios que consideren más dificultosos o donde no tengan claro un planteamiento exitoso para resolverlos (como es el caso de A36 y A38), que puedan utilizar lápiz para borrar sus primeros intentos o posibles errores (A16) o que puedan llegar a repetir la resolución de una actividad, arrancando la hoja de su cuaderno (A31).

[58] En este sentido, el alumno parece utilizar implícitamente su cuaderno como instrumento para diferenciar el trabajo planteado por el docente de otro tipo de actividades realizadas por iniciativa del alumno.

Por otra parte, hay cuatro alumnos (A2, A3, A13 y A27) que han verbalizado y justificado su preferencia por la primera frase, por lo que simpatizan más con la visión del cuaderno de matemáticas como lugar en el que se registran actividades. No obstante, debe indicarse la presencia de un hecho diferencial importante entre estos cuatro estudiantes. Por una parte, el alumno A13 sí que dice intentar resolver las actividades propuestas por el docente, pero da más importancia al hecho de que queden registradas y puedan volver a ser repasadas y recordadas posteriormente (intervención 99 en entrevista con A13 y A16, Anexo E.4):

98. Inv.: […] Si os tuvierais que quedar con una frase, ¿con cuál estaríais más de acuerdo y por qué?
99. A13: Yo creo que con la que se registran ejercicios. Porque tú, aparte de hacerlos, después los tienes que volver a mirar y a volver a recordar. Entonces, no solamente te sirve para hacerlos, sino también para, después, volver otra vez a recoger esos ejercicios.

Sin embargo, de las respuestas de los alumnos A2, A3 y A27 obtuvimos que no realizan sus intentos de resolución de las actividades, sean del tipo que sean, en su cuaderno; sino que lo hacen en otros lugares (hojas sueltas, otros cuadernos “para sucio”). Al no utilizar el cuaderno para resolver actividades, simpatizaron más con la primera opción, con mayor o menor intensidad. Los estudiantes A3 y A27 sí que valoran ampliamente ese papel del cuaderno como lugar donde se registran actividades, bien copiadas directamente de su corrección en el aula o incorporadas a su cuaderno tras haber sido intentadas por anterioridad con el estudiante y confirmado el carácter correcto de su resolución. Este hecho es explicado por la alumna A27 en el siguiente extracto (intervenciones 86 a 95, entrevista a A21 y A27, Anexo E.6).

86. Inv.: […] Cuando intentáis hacer actividades de matemáticas, bien que os hayan propuesto o bien que las hacéis porque consideráis oportuno. ¿Utilizáis siempre el cuaderno para hacerlas? ¿O también las podéis hacer en otros lugares?
87. A27: Yo lo hago siempre aparte, nunca lo hago en el cuaderno. Porque si… No me gusta tener cosas mal en el cuaderno y luego poder confundirme cuando lo estudie. Entonces siempre lo hago aparte.
88. Inv.: ¿Siempre?
89. A27: Sí, siempre.
90. Inv.: ¿Y qué lugares utilizas?
91. A27: Folios. Folios u otros cuadernos en sucio o…, cosas así.
92. Inv.: Y luego, con esos folios, ¿tú qué haces?

93. A27: Eso…, pues les[59] guardo, y…, y luego lo estudio si lo tengo bien. Y si lo tengo mal pues…, pues lo tacho o lo corrijo, también.

94. Inv.: En tu cuaderno sí que había ejercicios[60]. Esos ejercicios que aparecen en tu cuaderno, ¿serían transcripciones de lo realizado, digamos, durante la corrección de la profesora en la pizarra? ¿O luego tú, en algunas ocasiones, esos intentos de resolución que haces en folios los pasas al cuaderno?

95. A27: Sí… sí, lo segundo. O sea, si, por ejemplo, ha mandado un ejercicio, y yo lo hago en un folio y digo…, y bueno, lo corregimos y tal. Lo corrijo, lo tengo ya bien, pues lo paso al cuaderno para…, por si se me pierde esa hoja o para tenerlo todo ahí, en el cuaderno.

Por el contrario, el alumno A2 indicó que se limita a recoger en el cuaderno las actividades corregidas en la clase, pero es un registro al que tampoco da mucha importancia, siendo valorado únicamente para actividades que le resultaran especialmente problemáticos. El alumno, como pone de manifiesto el siguiente extracto, lo que realmente valora es que haya sabido resolver una actividad, no dando importancia en ese caso a que ésta quede registrada (intervención 124, entrevista con A2 y A3, Anexo E.2).

123. Inv.: ¿Por qué razón no intentáis la resolución de las actividades en el cuaderno?

124. A2: […] Pues yo como uso folios en el cuaderno[61] pues…, eh…, en vez de coger un… Como los ejercicios que realizas los hago en casa y normalmente los realizas…, pues como ha dicho él, con borratajos, si te sale mal tachas… Para hacerlo con más libertad, digamos, que no estés pendiente de que te quede limpio y tal, porque es un ejercicio que tú lo haces para comprobar si lo sabes hacer y tal. Entonces lo haces en…, en una hoja que pilles por casa. Lo haces, si te sale bien pues bien, y esa hoja ya la tiras o… ¿sabes? Una hoja…, que no vas a coger una hoja limpia para hacer un ejercicio…, vamos, unos cuantos ejercicios, que simplemente para comprobar que están bien. Luego no vas a estudiar de esos ejercicios, simplemente compruebas que te salen bien y ya está. Ya vas al examen y…, es decir, si tú en casa lo has hecho bien, pues luego en el examen también[62].

Dentro de este bloque, también se preguntó a los alumnos en qué aspectos centraban fundamentalmente su atención mientras se corregía en el aula una actividad propuesta

[59] Leísmo.
[60] Interpelo a la alumna con este hecho que hemos detectado en el análisis de su cuaderno, para completar su respuesta y la explicación de su comportamiento.
[61] Este alumno suele utilizar folios sueltos, en lugar del mayoritario "cuaderno de anillas".
[62] De esta contestación de A2 se infiere que el alumno da más valor al propio hecho de que el alumno haya sabido hacer el ejercicio a que dicha resolución quede registrada. Unido a intervenciones anteriores de este mismo alumno, únicamente parece dar valor a ese registro en ejercicios hechos en clase en los que haya tenido más dificultades o dudas.

que había sido previamente intentada por ellos. En este sentido, todos los alumnos entrevistados hicieron alusión, de un modo más o menos explícito, a la comparación de su resolución con la realizada por el docente en la corrección, y a la búsqueda de posibles errores en su intento de resolución. Ante posibles errores, los estudiantes señalaron la corrección de los mismos, o la opción de rehacerlos copiando la resolución de la pizarra (dicho por A16, que utilizaba el lápiz en sus intentos de resolución, para poder borrar y reescribir). Pero también hay dos estudiantes, A13 y A24, en los que emerge un factor importante en su respuesta: la atención para poder comprender o entender bien el fallo cometido y la resolución propuesta por el docente.

Además de lo anterior, hay siete alumnos que verbalizaron que su atención principal estaría enfocada en el proceso utilizado por el docente para resolver el ejercicio (A2, A3, A6, A10, A21, A28 y A31), que en algún caso extremo, como el de A21, se torna para el alumno en "verdad irrefutable" (en particular, lo que escribe en la pizarra) a partir de la cual cuestionar lo que él ha hecho, como evidencia la siguiente intervención (intervención número 116, entrevista a A21 y A27, Anexo E.6).

> 116. A21: […] Yo creo que me centro muchísimo más en lo que pone en la pizarra. Y entonces eso lo veo, de una forma u otra, como re…, como verdad. O sea, así es como se hace. Entonces, desde ese punto de vista, ya comparo con lo que he hecho yo. Y si lo que he hecho yo tiene sentido, si no tiene sentido, si es lo mismo… Y entonces ahí es cuando, una vez más, me replanteo: "Bueno, ¿esto no se podría haber hecho de otra forma?". Pero, normalmente, me fijo mucho más en lo que pone en la pizarra, porque…, de cara a que yo también suelo hacer muchos caminos absurdos. Que me dedico…, pues eso, a la hora de hacer un ejercicio, a veces la idea o el planteamiento es muy sencillo y yo lo veo muy abstracto. Entonces…, me centro muchas veces: "Bueno, esto es mucho más claro". Y copio lo claro, porque… O sea, me centro mucho más en la pizarra.

Otro alumno con un comportamiento que no ha sido evidenciado por nadie más es A39, que indicó que suele completar su resolución durante la corrección de la pizarra, entendiendo por ello explicitar mejor todos los pasos seguidos o escribir el enunciado del ejercicio.

En relación con la pregunta anterior, cuando se interroga a los alumnos sobre si anotarían en su cuaderno o no otras posibles resoluciones del ejercicio hechas en clase que fueran distintas de la suya, existió un contraste entre las respuestas de los estudiantes. Hay un pequeño grupo (A14, A21, A31, A38 y A39) que defendió que siempre anotaría tales resoluciones. El siguiente extracto de A38 y A39 muestra cómo ambos estudiantes justifican la utilidad que tiene para ellos anotar las mismas, argumentando que es mejor tener varios métodos posibles para poder resolver una actividad (intervenciones 190 a 197, Anexo E.8).

190. Inv.: Si la profesora lo realiza de una manera distinta a como lo habéis realizado vosotros, suponiendo que las dos resoluciones son válidas, ¿tomáis nota en el cuaderno de esas resoluciones alternativas que puedan surgir?
191. A38: Sí, yo sí. Lo copio en otro color. En rojo, por ejemplo. Pongo que mi opción también está bien, pero que hay otra opción posible, que a lo mejor es más corta, o…, o que tiene menos operaciones, o tal, y parece… Por ejemplo luego, a la hora de repasar, también puedes comprobar si de la otra forma también lo tienes bien.
192. A39: Yo lo copio con el mismo color. Lo copio… Pues si ese ejercicio es el último, pues lo copio debajo y pongo: “Otra opción”. O lo pongo en otra página: “Página tal, ejercicio tal, opción b”.
193. Inv.: Pero sí que es un comportamiento habitual, que toméis nota de otros procesos.
194. A39: Sí, porque a lo mejor tú lo has hecho de esa manera que crees que es más fácil. Pero luego, a la hora de repasar, dices: oye, pues…
195. A38: A lo mejor le has dado más vueltas, o haces más pasos…
196. A39: A la hora de repasar, a lo mejor dices: “Oye, pues esta es más fácil”. O tiene menos pasos, como dice ella. Te puede ayudar. Mejor tener las dos, por si en el examen no te sale bien una pues…, pues hacer la otra en caso de que…
197. A38: Sí.

El resto de alumnos participantes condicionaron la realización de esa anotación. Un grupo importante indicó que preguntaría al docente sobre la resolución suya y que sí tomaría nota de otra resolución en el caso de que fuera “más fácil” o “más corta” que la que el estudiante había propuesto. Los alumnos A12, A13 y A27 expresan que únicamente anotarían una resolución tal en el caso de que su resolución fuera incorrecta, no dando valor a este hecho en otro caso. El siguiente extracto muestra el contraste en este aspecto entre las alumnas A12 y A14, al responder a esta pregunta de la entrevista (intervenciones 119 a 123, Anexo E.3).

119. Inv.: […] Y, por ejemplo, si el profesor realiza la actividad de un modo distinto a como lo habéis realizado vosotras, ¿qué hacéis?
120. A14: Yo lo copio… Lo copio otra vez, o sea, cómo lo ha hecho el profesor. Y el mío, que ya estaba hecho.
121. A12: Pero si da lo mismo, ¡para qué! (*riéndose*)
122. A14: Yo sí que lo copio.

123. A12: Pero si algo se puede hacer de distintas formas…, no sé. Yo no lo…, no lo…, si lo tengo bien no lo copio. Pero, vamos, que si lo tengo mal sí lo copio.

Con la última pregunta dentro de este bloque se pretendía conocer si los alumnos seguían algún tipo de procedimiento para confirmar que habían resuelto correctamente actividades que intentaran pero que no fueran corregidas en el aula. El primer hecho destacable es que tres alumnos, A24, A27 y A28, asociaron la no corrección en el aula de una actividad planteada con que dicha actividad represente ser menos importante para el docente, por lo que no suelen tomar medidas.

En general, el resto de alumnos sí que verbalizan la adopción de algún procedimiento de comprobación, aunque sea desde un punto de vista hipotético. El docente de matemáticas se revela como la fuente mayoritaria de apoyo, emergiendo en las respuestas de 10 de los 16 participantes, y especialmente cuando los alumnos realmente tienen dudas sobre su resolución, como evidencia la siguiente respuesta de A6 (intervenciones 138 y 139, entrevista a A6 y A10, Anexo E.1).

138. A6: Mmm... Pues depende. Si ese ejercicio te ha resultado más difícil que otro, pues siempre se lo puedes preguntar al profesor, que..., te lo resuelva. Pero si crees, estás en un 90% seguro...

139. A6: Si tienes dudas se lo comentas al profesor, y si estás seguro o muy convencido de que no has fallado, de que lo tienes bien, pues lo dejas pasar, yo creo, más.

Los alumnos A13 y A16 hicieron referencia a un profesor particular, en lugar de al docente de clase. En particular, es sorprendente la respuesta de A13, que indicó que no recurriría en ningún caso al profesor del aula (intervención 144, entrevista a A13 y A16, Anexo E.4). El alumno no aportó razones para tal comportamiento, pero pudiera estar evidenciándose la presencia de miedo o de poca confianza para consultar este aspecto con su docente o, en concreto, con su profesor del año pasado, el Docente 2.

144. A13: Pues..., hombre yo ahora ya también tengo clases particulares, así que se lo preguntaría a él. Pero en el caso del año pasado, que no tenía, pues..., o lo compararía con otro alumno a ver si le da igual o... Hombre, lo más lógico sería preguntarle al profesor pero..., no lo haría. No le preguntaría al profesor[63]. Compararía con otros alumnos, para ver si tenemos lo mismo o no.

La intervención de este mismo alumno también puso de manifiesto otra de las fuentes que ha sido compartida por varios participantes (A2, A13, A31, A36 y A38): la consulta a otros compañeros de la clase, especialmente si saben que los han hecho o con

[63] Pareciera que la figura del profesor para hacer esa comprobación le da al alumno cierto miedo o respeto, y prefiere compartir su resolución con sus compañeros (mayor confianza).

alumnos con los que tengan especial confianza. Por último, hay dos fuentes más que emergieron, de un modo más minoritario, pero que son interesantes. Por una parte, los alumnos A10 y A39 recurrieron a intentar la resolución de los ejercicios del libro de los que poseen acceso a la solución por algún medio (CD que acompaña al libro de texto, por ejemplo), para poder comparar la solución. Por otro lado, la alumna A12 recurrió a un familiar, que es matemático.

VI.3.5. RESULTADOS OBTENIDOS AL ANALIZAR LAS RESPUESTAS PROPIAS DEL BLOQUE 5: IDEAS EMERGENTES

El quinto bloque de la entrevista[64] pretende conocer más información sobre cuáles son los modos en que los estudiantes utilizan su cuaderno de matemáticas fuera del aula, en su proceso de aprendizaje de las matemáticas o en la preparación de pruebas de evaluación, y distinguiendo entre contenidos propios de la unidad teórica y de la unidad práctica.

Como ya hemos indicado anteriormente, en las respuestas que han emergido en las entrevistas puede haber tenido influencia que en ambos cursos de Bachillerato todos los alumnos participantes hayan tenido docentes de matemáticas que han utilizado metodologías expositivas para la presentación de la teoría, siendo los propios docentes los que desarrollaban el contenido de modo más o menos personal, seguido de un planteamiento y resolución de actividades.

En los procesos de estudio de los contenidos de la asignatura de matemáticas, los alumnos han hecho mención a dos fuentes principales: el cuaderno y el libro de texto. De entre ambos, la mayoría de alumnos (11 de 16) dio una mayor importancia a los contenidos registrados en su cuaderno, y considera éste como el instrumento fundamental para el estudio de los contenidos teóricos. Las razones que aportan para este hecho están relacionadas con que el cuaderno suele contener lo que es más importante, lo que más gusta al docente o lo más cercano a lo que el docente quiere, al provenir de su exposición. La siguiente intervención, del alumno A10, recoge alguna de esas razones (intervención número 157, entrevista a A6 y A10, Anexo E.1).

> 157. A10: Porque..., si el profesor lo ha dado es porque es lo que le gusta. Entonces, si tú lo pones en el examen lo que ha dado él, más que lo del libro. Bueno, hay veces que cuesta un poco entender alguna cosilla de teoría y lo miras en el libro, que a veces a lo mejor lo acompaña con gráficas o cosas así. Entonces sí, pero si no, no. Yo..., sólo para hacer ejercicios.

---

[64] Las preguntas y situaciones establecidas en el guion base de la entrevista para este cuarto bloque pueden verse en el subapartado VI.1.1 perteneciente a este mismo capítulo.

Entre estos alumnos que concedían más importancia al contenido teórico existente en su cuaderno, existen diferencias en el rol que juega el libro de texto de la asignatura. Hay varios alumnos (A3, A10, A12, A14 y A28) que sí que indicaron el papel del libro como un instrumento de apoyo para completar o revisar algunos aspectos de la teoría existente en el cuaderno. La intervención anterior del alumno A10 muestra ese rol del libro como recurso para entender mejor algunos aspectos. Otros estudiantes se mostraron muy tajantes al afirmar que no utilizan "nunca" el libro de texto en su estudio de los contenidos teóricos.

Los cinco alumnos restantes (A2, A16, A21, A38 y A39) afirmaron que el libro de texto es su instrumento básico para estudiar la teoría, dando más importancia a este instrumento que al cuaderno. Estos estudiantes relegan el rol del cuaderno a la posible existencia de algún aspecto a mayores, que sepan que no aparece en el libro de texto.

Utilicen uno u otro instrumento como medio principal para acceder al contenido teórico, los alumnos indicaron que solían estudiar o repasar ese contenido como primer paso en su estudio o en su preparación de pruebas de evaluación. Las únicas alumnas que manifestaron un comportamiento distinto fueron A12 y A14, que únicamente decían recurrir a la revisión del contenido teórico en el caso de que se presentara algún problema en los ejercicios que intentaban resolver en dicha preparación (intervenciones 142 a 147, Anexo E.3).

142. Inv.: […] La pregunta es: En caso de hacerlo, ¿cómo utilizáis el cuaderno para estudiar la asignatura? Vamos a empezar primero a hablar de los elementos teóricos: definiciones, teoremas… ¿Cómo utilizáis el cuaderno para estudiar este tipo de elementos, si es que lo utilizáis? Y si no, ¿qué herramientas utilizáis?
143. A12: ¿Cómo utilizamos el cuaderno? Pues…, no sé. Yo lo que hago es hacer ejercicios y, en caso de duda, miro los ejemplos que tengo anteriormente, o la teoría y ya está. No, no me leo la teoría antes de hacer los ejercicios, ni nada.
144. Inv.: O sea que la teoría tampoco te la miras mucho para un examen…
145. A12: Me la miro cuando…, cuando tengo dudas en ejercicios. Pero si me salen los ejercicios no… (*riéndose*)
146. Inv.: No te miras la teoría.
147. A14: Yo tampoco la teoría la miro mucho. Y para el cuaderno y eso pues… lo mismo que A12. Ejercicios y tal y…, a lo mejor, si tienes alguna duda o algo, miro la teoría yo también… Pero al estudiar.

En ese proceso de estudio o de repaso del contenido teórico, algunos de los alumnos (A13, A16, A24, A36) hicieron emerger que ese estudio tiene una naturaleza memorística. En la siguiente intervención, el alumno A13 justificó esa forma de proceder, indicando que “se le dan mal las matemáticas”, pareciendo desistir de intentar comprender los conceptos y las relaciones matemáticas involucradas, algo que asume también su compañera de entrevista A16 (intervenciones 146 a 150, Anexo E.4). Este es uno de los roles que en ocasiones adoptan los alumnos al estudiar matemáticas, como recogen algunos de los antecedentes comentados en el Capítulo I (Borasi & Rose, 1989; Schoenfeld, 1989; Porter & Masingila, 2002).

146. A13: Si la teoría está en el cuaderno recogida, sí. Si no del libro, o de las fotocopias, como has dicho antes. Entonces..., no, eso, si está la teoría en el cuaderno sí. Si no, pues utilizo el libro, fotocopias...

147. Inv.: ¿Y cómo utilizas el cuaderno cuando tienes allí la teoría?

148. A13: Me la aprendo de memoria las fórmulas. De memoria. Porque... se me dan bastante mal las matemáticas, así que de memoria.

149. Inv.: De acuerdo.

150. A16: Yo, prácticamente, estudio del libro. A no ser que haya algo que no..., que el profesor haya dado a mayores, o que no siga el libro, las fórmulas y eso... también. Y yo, como A13, de memoria me las suelo aprender.

Ese proceso de estudio o repaso puede realizarse directamente del contenido del cuaderno o del libro de texto. Pero hay seis alumnos (A10, A21, A24, A27, A28 y A39) que verbalizaron la adición de un paso previo: la realización de un esquema o de un resumen teórico, a modo de repositorio, en el que reflejan la teoría más importante del tema, y que les facilita tanto el estudio de la misma como el hecho de acudir a la teoría de referencia en el proceso de resolución de actividades. En ese caso, habría acciones propias de un uso *constructivo/estratégico* de los apuntes frente a un uso meramente *reproductivo/mecánico* (utilizando la terminología de Espino, 2012). El siguiente extracto, con intervenciones del alumno A10, recoge esta circunstancia (intervenciones 147 a 151, entrevista a A6 y A10, Anexo E.1).

147. A10: Bueno, depende del profesor. Sí, el Docente 1 nunca... solía preguntar teoría creo, pero el profesor que tenemos ahora siempre..., siempre cae un apartado o una pregunta que es sólo de teoría. Pero siempre pregunta teoría que él ha dado en clase entonces..., tú lo que coges no es el libro, al menos en mi caso, para estudiarte la teoría, sino los apuntes. Y vas sacando la teoría, porque normalmente está fragmentada porque..., estudias un teorema, haces un par de ejercicios, otro teorema[65], otro par de ejercicios. Entonces lo sacas fuera y es lo que te estudias.

[65] El alumno hace mención explícita a los teoremas, pero no a otros posibles contenidos teóricos como, por ejemplo, definiciones de conceptos importantes.

148. Inv.: ¿A qué te refieres con “lo sacas fuera”? ¿Lo reescribes?

149. A10: Sí..., o bueno, no del todo.

150. Inv.: ¿Lo juntas todo? ¿Te haces un pequeño esquema?

151. A10: Sí, casi un pequeño esquema. Por ejemplo, “Teorema de Rolle”, “Teorema de Weierstrass”... Eso.

Al preguntar a los alumnos sobre cómo estudian o preparan los contenidos de tipo más práctico (resolución de actividades), y el rol que juega el cuaderno en ese proceso, las respuestas han permitido detectar dos grandes grupos de estudiantes con un comportamiento diferente, que se explican e ilustran a continuación.

El grupo mayoritario, formado por los alumnos A3, A6, A13, A14, A24, A27, A28, A31, A36 y A38, evidenció dar un rol muy importante a su cuaderno, utilizando el mismo como medio sobre el cual se articula toda su preparación de los aspectos prácticos para, por ejemplo, una prueba de evaluación. Cabe señalar que la gran mayoría de los estudiantes que se han ubicado dentro de este grupo son chicas (siete de los diez integrantes del grupo). Para todos estos estudiantes, el cuaderno de matemáticas tiene un cometido fundamental en ese proceso, como medio de referencia para poder revisar y comprobar actividades. Dentro del grupo, hay dos modos distintos en los que se produce esa utilización del cuaderno como medio de referencia.

En el caso de los estudiantes A24, A28, A31, A36 y A38, estos alumnos indicaban optar por revisar las actividades que tienen registradas en su cuaderno a lo largo de un tema, fijándose especialmente en aquellas que les hayan resultado más complicadas o en cubrir las diferentes “tipos” de actividades (A28), en las que tuvieran un mayor número de correcciones o de anotaciones (A31, A36 y A38), o en aquellas que fueran consideradas por el docente como más importantes (A24). En estas actividades prioritarias para ellos, además, los alumnos intentan su resolución, en hojas aparte fuera del cuaderno, y utilizan el cuaderno como referencia para poder comprobar o evaluar la corrección de su intento de resolución. El siguiente extracto, de A28, pone de manifiesto este método (intervención 170, entrevista a A24 y A28, Anexo E.5).

170. A28: Yo cojo... Si me entran dos temas, cojo desde el principio y empiezo a hacer todos, pero no les..., no les hago, sólo que les miro, miro los pasos, si tengo claro el método de hacer los ejercicios, pues..., paso al siguiente ejercicio. Y algunos, cuando te trabas un poco, pues sí que insistes y lo hace aparte, pero si no, no. Y..., por ejemplo, ahí, en funciones, pues, de cada tipo de función haces un ejemplo de cada una y así te sirve..., para estudiártelo, teniendo un ejemplo de cada cosa.

Otro extracto que evidencia esta forma de proceder es el siguiente, de la alumna A36 (intervención 173, entrevista a A31 y A36, Anexo E.7).

172. Inv.: […] Y a la hora de practicar actividades para el examen, ¿cómo utilizáis ahí el cuaderno?
173. A36: Mirar los ejercicios que tienes mal, y volverlos a hacer y comprobar si los tienes bien. Y si no te salen, volverlos a hacer y mirar por qué no los tienes bien. Sobre todo como apoyo y referencia a la hora de volver a realizar un ejercicio que tienes mal.

En el caso de los estudiantes A3, A6, A13, A14 y A27, estos alumnos decían optar directamente por repetir o rehacer todas o gran parte de las actividades que se han realizado en la clase y tienen en sus cuadernos. Los estudiantes toman la referencia o el enunciado de esas actividades, intentan la resolución de las mismas (generalmente fuera del cuaderno, salvo el caso de la alumna A14) y utilizan el cuaderno como instrumento para comprobar el carácter correcto o no de su intento de resolución. El siguiente extracto, de la alumna A6, evidencia este comportamiento (intervención 164, entrevista a A6 y A10, Anexo E.1).

163. Inv.: Y para los ejercicios, ¿cómo utilizáis el cuaderno a la hora de estudiar para un examen?
164. A6: Yo hago los ejercicios aparte, y si coinciden con lo que yo he hecho en el cuaderno pues... bien, y si no pues lo vuelvo a hacer, ya lo consulto en el cuaderno, me aseguro de cómo se hace...

Además, en esta intervención de la alumna se hizo explícita una concepción que subyace en los dos comportamientos de este grupo mayoritario: la concepción del cuaderno como un lugar que contiene contenido validado, verídico e irrefutable, obtenido a lo largo de las clases. Pareciera que estos alumnos no admitieran la posibilidad de que hubiera errores en el cuaderno.

Otra característica común a todos los alumnos de este gran grupo es que no se proponen la posible realización de actividades distintas a las que contenga su cuaderno. Al preguntar a las alumnas A31 y A36 sobre esta circunstancia, estas indicaron que podría ser bueno, pero dieron varias razones por las cuales no actuaban así, basadas en que podrían surgir dudas o aspectos problemáticos que no supieran cómo superar o que no tendrían una seguridad sobre si lo que han hecho es correcto o no (intervenciones 177 a 182, Anexo E.7). Esto puede indicar cierta inmadurez matemática de las estudiantes para poder autoevaluar la corrección de los procesos que han seguido.

177. Inv.: Y siempre, las actividades que... tenéis como base en el cuaderno. A la hora de estudiar para un examen, ¿no intentáis actividades nuevas, distintas de las que se pudieran haber hecho en clase?
178. A31: Yo la verdad es que no. Porque pienso que, a lo mejor... A lo mejor sería bueno, pero también puede dar lugar a nuevas, no sé cómo decirte...
179. A36: Dudas.
180. A31: Dudas. Entonces prefiero quedarme con lo que hemos dado, que sé que es lo que me va a preguntar en el colegio[66], a andar buscando por ahí más ejercicios. No soy curiosa en el tema ese.
181. A36: Y, aparte, como no lo tienes corregido, también juegas con el factor de que creas que lo tienes bien, lo haces de esa manera en el examen y... y metas la pata.
182. A31: Claro.

El otro grupo de estudiantes, menos numeroso que el primero, es el formado por A2, A10, A16, A21 y A39. Hay que señalar que cuatro de los cinco son chicos (todos salvo A16). Estos alumnos consideraban que, en el proceso de preparar una prueba de evaluación, lo fundamental era intentar resolver más actividades. Estos alumnos prefieren resolver actividades distintas de las ya hechas en clase y registradas en sus cuadernos. Esos intentos de resolución suelen realizarse fuera del cuaderno y, en algunos casos, alumnos como A10 y A39 indican que intentan hacer actividades de las que tengan la solución por algún medio (por ejemplo, en el CD adjunto al libro de texto). No obstante, este grupo de alumnos también contemplaban la posibilidad de utilizar el cuaderno para repasar algunas actividades que les hubieran resultado especialmente dificultosas o problemáticas, que fueran muy específicas, o en exámenes en los que la carga de materia es muy grande, como en posibles exámenes globales al final del curso. Por tanto, en estos alumnos el rol del cuaderno para preparar los contenidos prácticos de una prueba de evaluación es mucho menos importante y determinante que para el grupo anterior. Generalmente, los alumnos de este grupo consideran que su modo de actuar les prepara mejor para la prueba de evaluación, al situarse en una posición más “cercana” a la que se van a enfrentar en el examen. El siguiente extracto, con intervenciones del alumno A39, explica este modo de proceder (intervenciones 225 y 228, entrevista a A38 y A39, Anexo E.8).

225. A39: A mí me gusta más hacer…, nuevos. Alguno que no hayamos hecho… De la autoevaluación.

     […]

---

[66] La alumna da por supuesto que el docente va a basar la prueba de evaluación en actividades muy similares a las que ha planteado y desarrollado en el aula.

227. Inv.: Tú (*dirigiéndome a A39*) prefieres más ejercicios nuevos. ¿Qué te aporta a ti hacer ejercicios nuevos?
228. A39: Pues, no sé. Es que en los que ya hemos hecho, pues a lo mejor te acuerdas de algún tipo de[67]… Como al examen al que te vas a enfrentar suele ser nuevo, pues haces alguno nuevo para ver qué tal se te dan. Y en caso de tener alguna duda, pues a lo mejor sí que…, o que te cueste un poco más, pues ya miras la solución o intentas hacer alguno que esté hecho también para… (*Deja la frase inconclusa*). Sobre todo cuando eso pasa pues subrayas lo que tienes duda y tal.

Otro ejemplo es esta intervención de A21 (intervención 141, entrevista a A21 y A27, Anexo E.6).

141. A21: Muchas veces cojo el libro de texto… Y bueno, de este tipo de ejercicio hago este, hago este y este[68]… A no ser que sea un ejercicio muy específico, que no sepa encontrar uno parecido, que hago justo el del cuaderno. Pero suelo… O sea, no me suele preocupar, como he dicho antes, no me suele preocupar justo el resultado numérico, con lo cual no necesito comparar un resultado. Solo comparo…, bueno, este ejercicio, ¿cómo se haría? Tal, tal, tal. ¿Cómo se ha hecho el resto? Tal, tal, tal. Entonces, si cuadra, el resultado numérico, realmente, no me intranquiliza.

Por último, la alumna A12 se situó en una situación intermedia, puesto que dijo combinar la resolución de actividades ya hechas en la clase con otras nuevas, y la revisión del cuaderno (tanto de la teoría como de las actividades resueltas) cuando tenía dificultades en la resolución de alguna de las actividades que intentaba.

VI.3.6. RESULTADOS OBTENIDOS AL ANALIZAR LAS RESPUESTAS PROPIAS DEL BLOQUE 6: IDEAS EMERGENTES

El sexto y último bloque de la entrevista[69] se centra en otros aspectos asociados al cuaderno de matemáticas que pueden considerarse de interés. Este bloque contenía varias preguntas, aunque su planteamiento final se moduló en función de los temas que habían emergido en el resto de la entrevista y del tiempo disponible. Destacamos algunos aspectos fundamentales que emergieron asociados a este bloque.

En relación a los aspectos sobre la organización y la presentación de su cuaderno que los estudiantes consideraban como más importantes, hay un elemento que se destacó

[67] El alumno parece comentar que esos ejercicios ya hechos no tendrían para él la misma dificultad "real", puesto que sí que podría recordar algunos pasajes de su corrección, frente a otros ejercicios nuevos. Habla de los ejercicios de "autoevaluación", de los cuales el libro de texto sí que aporta su solución (en un CD adjunto al libro de texto).
[68] El alumno sí que parece tener presente una "tipología" de ejercicios dentro de un tema.
[69] Las preguntas y situaciones establecidas en el guion base de la entrevista para este cuarto bloque pueden verse en el subapartado VI.1.1 de este mismo capítulo.

como más frecuente en las respuestas de los alumnos: la importancia de escribir los títulos de los temas y de sus diferentes apartados. Las razones aportadas fueron que estos aspectos clarificaban la estructura del tema, y que facilitaban tanto el estudio de la teoría como el hecho de poder encontrar los elementos o contenidos específicos que conforman un tema. Además, surgieron otros aspectos, con menor frecuencia de respuesta, como la importancia de la limpieza, del orden y del uso de colores o de marcas para llamar la atención del alumno (aspecto ligado a una futura revisión posterior del mismo). Ante esta pregunta, algunos alumnos como A10, A12, A14, A21 o A28 volvieron a poner de manifiesto que los aspectos organizativos y de presentación no son prioritarios para ellos, y que no les prestan mucha atención, la suficiente para que ellos puedan manejarse y “entenderse” con su cuaderno.

Asociado a la pregunta anterior, al plantear a los alumnos si pensaban que su cuaderno podía ser útil para otras personas o, de forma inversa, qué debería tener el cuaderno de otra persona para que a ellos les sirviera, bastantes de las respuestas hicieron emerger aspectos asociados a la organización y a la limpieza como aspectos más importantes para que pueda producirse un “intercambio” o un “trasvase” efectivo de cuadernos entre alumnos. En menor medida, también hay estudiantes que aludieron a la necesidad de que el cuaderno fuera completo y estructurado en sus contenidos, y que tuviera un alto carácter explicativo.

No obstante, algunos alumnos en sus respuestas dejaron clara una concepción del cuaderno como un instrumento personal de cada alumno, que lo puede organizar y elaborar de diferentes maneras debido al diferente rol que tiene para el alumno y los diferentes usos que puede hacer de él. Un ejemplo es el siguiente extracto de la entrevista a A24 y A28 (intervenciones 191 a 196, Anexo E.5).

191. Inv.: […] ¿Hasta qué punto pensáis que vuestro cuaderno podría ser utilizado por otra persona para estudiar la asignatura?
192. A24: Mmm... Bueno. Yo creo que el cuaderno de cada uno es personal, y cada uno lo organiza como mejor le viene, y como piensa que puede estudiarlo mejor. Entonces, creo que cada cuaderno..., cada uno debe de usar el suyo. Aunque..., sí que..., yo creo que el mío sí que se podría usar. Pero..., que cada uno debe de tener el suyo, que es como mejor te enteras, con el tuyo.
193. A28: Sí.
194. Inv.: ¿Por qué crees que el tuyo se podría usar?
195. A24: Porque sí que lo tengo bien organizado..., y limpio..., y sí que se entiende bien.

196. A28: Yo también apoyo lo que ha dicho A24. Pero, vamos, yo no dejaría mi cuaderno porque no..., no lo entenderían (*risas del alumno*). Y cada persona tiene que hacer su cuaderno personal, porque de ahí va a estudiar.

La última parte del bloque buscaba conocer qué les parecería a los alumnos que un docente les proporcionara un método o una manera concreta de trabajar con su cuaderno de matemáticas. Las respuestas fueron bastante homogéneas entre los estudiantes participantes. Muchos de ellos comentaron que veían poco o nada adecuado que se planteara algo así en cursos avanzados, como Bachillerato, aunque sí que podría ser adecuado y más efectivo en cursos inferiores (Primaria, primeros cursos de la ESO). Los alumnos defendieron que, en niveles como el Bachillerato, el cuaderno ya se ha convertido en un instrumento personal para el alumno (en términos de Fried y Amit, 2003, con un mayor desarrollo dentro de su *dominio privado*): cada estudiante tiene diferentes métodos de trabajo con el cuaderno y ya son métodos bastante cristalizados o interiorizados como fruto de su historial académico.

No obstante, algunos alumnos como A12 y A14 sí que abrieron la puerta a replantearse sus métodos de trabajo con el cuaderno en el caso de que tuvieran malos resultados académicos en la asignatura. Otros alumnos indicaron que podrían tener en cuenta algún aspecto concreto del método de trabajo planteado por el docente que encajara con el suyo y que sirviera para mejorarlo. En este sentido, estas dos razones son parecidas a las que obtuvieron Van Meter *et al*. (1994) y Guasch y Castelló (2002) en su estudio sobre las concepciones de los alumnos acerca de la toma de apuntes y el modo en que evolucionaban sus procesos de toma de apuntes ("ensayo-error": cambio de métodos no efectivos para el alumno y mantenimiento y refinamiento de métodos que sí lo son).

VI.4. ANÁLISIS GLOBAL DE LAS ENTREVISTAS: CONCEPCIONES Y PERFILES DE UTILIZACIÓN DEL CUADERNO ENTRE EL ALUMNADO PARTICIPANTE

Una vez que se ha hecho un análisis pormenorizado de las respuestas dadas por los alumnos participantes en cada uno de los seis bloques de la entrevista, y en los que se han detectado las principales ideas y contrastes que se evidencian en sus respuestas, se ha buscado realizar una interpretación conjunta de esas ideas y contrastes, y las posibles relaciones e influencias existentes. Es decir, se ha pasado a la tercera etapa de análisis de entrevistas indicada por Cohen *et al*. (2000), en el que se da el salto del análisis pormenorizado de diferentes unidades de significado a un análisis conjunto, que permita clarificar la relación entre las diferentes unidades de significado y, en este caso, las ideas globales sobre elaboración y utilización del cuaderno de matemáticas resaltadas por cada estudiante participante.

Con ese propósito, se ha realizado una relectura de los resultados del apartado anterior, teniendo en cuenta los principales pensamientos emergidos en cada bloque y las posibles diferencias en la opinión y el posicionamiento del alumnado participante respecto a algunos aspectos que se muestran como relevantes. Esa relectura y la comparación conjunta de las ideas fundamentales puestas de manifiesto han permitido obtener más información sobre cuál es el rol que tiene el cuaderno de matemáticas para cada alumno, cómo lo utilizan, qué razones subyacen en esos modos de utilización y de qué forma pueden influir esos usos en la elaboración del cuaderno.

Es interesante recordar que Badanelli y Mahamud (2007) asociaban el potencial pedagógico del cuaderno al uso que se hace del mismo, indicando que es una herramienta que termina siendo lo que tanto el profesor como el alumno hacen de él. No obstante, consideramos que aquí han sido los propios estudiantes la variable fundamental, puesto que son ellos mismos los que han determinado y decidido cómo utilizar su cuaderno de matemáticas. En este caso, todos los docentes de Bachillerato que han tenido los estudiantes han seguido una metodología muy similar[70] y todos ellos han dado libertad a los alumnos en relación al cuaderno, sin que se realizara ninguna revisión de los mismos. Es decir, los cuadernos han pertenecido aquí al *dominio privado* de los estudiantes, en términos de Fried y Amit (2003). En este sentido, Neubert y Schlindwein (2014) alertaban sobre la ausencia casi absoluta de trabajos de investigación en Educación que trataran de estudiar los diferentes usos de los cuadernos hechos por los alumnos cuando se situaban en el *dominio privado* de los estudiantes, así como las decisiones que subyacían a la adopción de dichos usos.

El proceso de análisis global de las entrevistas y de las ideas y contrastes emergidos en cada bloque ha culminado con la propuesta de cinco perfiles diferentes de concepción y utilización del cuaderno de matemáticas dentro del alumnado participante en las entrevistas, perfiles que tienen algunos aspectos comunes pero también diferencias que se consideran relevantes. Presentamos a continuación estos cinco perfiles (uno por subapartado), con sus características en relación al rol del

[70] Recordamos que la metodología seguida por todos los docentes de Bachillerato de los estudiantes participantes estuvo basada en una exposición relativamente personal de los contenidos por parte del docente, seguida del planteamiento, resolución y corrección de actividades.

cuaderno para el estudiante y la utilización del mismo. Los perfiles se han presentado en un orden progresivo desde la mayor a la menor dependencia que muestra el alumno con respecto a este instrumento. En el último apartado se hace un cruzamiento entre estos perfiles obtenidos y los perfiles de elaboración obtenidos en el Capítulo V de la tesis doctoral.

VI.4.1. PERFIL 1: CUADERNO COMO "CYPHERING BOOK" QUE ARTICULA EL ESTUDIO DE LA ASIGNATURA

Para ilustrar mejor las características de este primer perfil nos hemos servido de los *cyphering books* (Clements & Ellerton, 2012), puesto que el rol y la utilización del cuaderno que se evidencia en los alumnos aquí situados ha sido muy parecida al papel que tenían estas herramientas utilizadas en Norteamérica en el aprendizaje de las matemáticas en los siglos XVII, XVIII y primera parte del XIX. Recordemos que un *cyphering book* estaba compuesto por entradas en las que los estudiantes exponían un determinado tópico y lo acompañaban de la resolución de problemas asociados, que únicamente eran incluidos cuando el profesor daba el visto bueno a los mismos.

Los cuadernos de los alumnos de este Perfil 1 están compuestos, por una parte, por contenidos teóricos, siendo el cuaderno la herramienta utilizada para el estudio de los mismos (en detrimento del libro de texto); y, por otra parte, por las actividades planteadas por el docente. Sin embargo, hay un comportamiento clave en relación con el modo en que elaboran la parte práctica, que caracteriza a los alumnos de este perfil. Estos alumnos recogen las actividades en su cuaderno una vez que creen haberse asegurado de que están bien hechas, o que se ha realizado su corrección en el aula, buscando que quede un registro claro, ordenado y sin errores. Esto lleva aparejado que los primeros intentos de resolución de las tareas, en los casos donde no tienen una idea preconcebida de cómo poder resolverlas, se realicen fuera del cuaderno o utilizando lápiz, para poder borrar y ocultar procesos o cálculos erróneos. Es decir, al igual que sucedía en los *cyphering books*, los estudiantes únicamente incluyen las actividades en su cuaderno cuando o bien ellos mismos o bien el docente (durante la corrección de la actividad en el aula) dan el visto bueno a su resolución.

Este comportamiento muestra la presencia de restricciones importantes en la elaboración del cuaderno, decididas y asumidas por los propios estudiantes, que están relacionadas con el uso posterior que hacen del instrumento al estudiar la asignatura. Para preparar una evaluación, estos alumnos no sólo estudian la teoría existente en su cuaderno, sino que revisan o intentan rehacer todas o gran parte de las actividades que están en su cuaderno, comparando sus intentos de resolución con los registrados en el cuaderno, que hacen el papel de "plantilla" de referencia de lo que debe hacerse. Estos alumnos, en ningún caso, recurren a la realización de actividades distintas de las ya hechas y corregidas en clase para preparar una prueba de evaluación. Por tanto, el cuaderno de matemáticas y su contenido determinan completamente el estudio de la materia que realizan estos estudiantes, lo que lleva también aparejada una alta responsabilidad del estudiante en la elaboración de este instrumento de referencia a lo largo del desarrollo del tema.

Los participantes en las entrevistas que han evidenciado este rol y utilización del cuaderno de matemáticas han sido A3, A27, A31, A36 y A38. A excepción del alumno A3, las otras cuatro estudiantes son alumnas. Esto pudiera indicar una mayor preferencia dentro de las alumnas por esta forma de trabajo con el cuaderno, y por asignar al cuaderno un rol como el indicado, aunque el número de alumnos entrevistados es demasiado reducido para poder afirmarlo con mayor rotundidad. Todos los estudiantes de este perfil indican en la entrevista que este modo de elaborar el cuaderno ha sido más o menos uniforme a lo largo de los cursos, existiendo poca influencia de variables externas que les hagan cambiar esos patrones. En particular, A31 y A36 indicaron que son modos de trabajo con el cuaderno que tienen ya muy interiorizados, y que no los han cambiado dado que han tenido un buen rendimiento en la asignatura.

A pesar de que el contexto del aula sitúa el cuaderno dentro de un *dominio privado* del estudiante, los propios alumnos no parecieran permitir en sus cuadernos algunas de las acciones que Fried y Amit (2003) destacan como características de este dominio, como son las de poder explorar, conjeturar, dar marcha atrás o poder reflexionar libremente sobre los contenidos matemáticos o en la realización de las tareas. Por el contrario, existen ataduras impuestas por los propios estudiantes que serían propias de la situación del cuaderno dentro de un *dominio público,* quizá derivado de que, para ellos, el cuaderno tiene un papel real de "libro de texto" o de "manual" de lo realizado en el aula (que consta de la teoría del tema más un conjunto ilustrativo de ejercicios correctamente resueltos) que es utilizado como referencia en su estudio de la asignatura.

Estas restricciones derivadas de su uso posterior hacen que los alumnos eviten que el cuaderno recoja tentativas de resolución de actividades, exploraciones o que pudiera albergar procesos incompletos o erróneos de resolución de tareas, que pudieran dar lugar a hipotéticos problemas durante su estudio de la asignatura. Así, el cuaderno no ofrece aspectos propios de la construcción del conocimiento o de los planteamientos posibles al resolver una tarea, sino que el contenido y conocimiento que alberga es conocimiento ya construido y validado. Esto hace perder al cuaderno una riqueza importante desde el punto de vista de la construcción de aprendizajes propia de una perspectiva constructivista (Grilles *et al*., 1996). Además, esto puede mostrar que estos alumnos trabajan de facto con una visión muy limitada de lo que significa “hacer matemáticas”, centrada en la creencia de que los problemas tienen una única solución válida y en que deben ser capaces de elegir y de aplicar el procedimiento o algoritmo transmitido por el docente que resulta el adecuado para el ejercicio planteado, una visión que es habitual, como se indicó en los antecedentes (Borasi & Rose, 1989; Schoenfeld, 1989; Countryman, 1992).

VI.4.2. PERFIL 2: CUADERNO COMO INSTRUMENTO QUE RECOGE LA TEORÍA Y EL TRABAJO CORREGIDO DEL ESTUDIANTE Y QUE ARTICULA EL ESTUDIO DE LA ASIGNATURA

Este segundo perfil que se ha evidenciado en el análisis global de las entrevistas realizadas tiene algunas características compartidas con el perfil anterior, pero también alguna diferencia fundamental. Los estudiantes situados en el Perfil 2 también utilizan el cuaderno de matemáticas y su contenido como el instrumento fundamental que articula su estudio de la asignatura, a través de la realización de las mismas acciones indicadas en el Perfil 1. Es decir, estudian el contenido teórico a partir de su cuaderno, y revisan o repiten todas o gran parte de las tareas de su cuaderno, comparando sus intentos de resolución con los registrados en él, y sin que se intenten realizar otras tareas distintas de las allí contenidas. El uso principal del cuaderno y de su contenido para el estudio de la asignatura hace que el proceso de elaboración del cuaderno sea un proceso con una alta responsabilidad para estos alumnos.

Sin embargo, existe una diferencia fundamental en el modo en que los estudiantes recogen las actividades en su cuaderno. A diferencia de los estudiantes del perfil anterior, los alumnos de este Perfil 2 sí que intentan resolver directamente las actividades en su cuaderno, sin que el uso posterior del cuaderno para estudiar la asignatura tenga influencia en el modo en el que se desarrollan esos intentos. Es decir, estos alumnos sí que muestran un mayor desarrollo del cuaderno como instrumento dentro del *dominio privado* del estudiante (Fried & Amit, 2003), en el que se permite la reflexión e indagación de las tareas propuestas sin restricciones.

Los alumnos de este perfil destacan más el papel del cuaderno como lugar para hacer los ejercicios que la utilización posterior de ese trabajo que queda registrado. No obstante, estos alumnos indican como hecho clave que sus intentos de resolución sean validados y que se hayan corregido todos los posibles errores cometidos, a través de la corrección de las tareas en el aula. La corrección del trabajo práctico realizado por el estudiante en su cuaderno se destaca como la cualidad fundamental que debe tener dicho instrumento.

Cinco estudiantes han sido ubicados en el Perfil 2: A6, A13, A14, A24 y A28. Estos alumnos, en mayor o menor medida, han evidenciado durante la entrevista su visión del cuaderno como un instrumento personal del alumno. La presencia tanto de sus procesos de resolución de las actividades como de su posible compleción o corrección durante la realización de las tareas en el aula muestra etapas propias de la construcción y evolución del conocimiento del estudiante a lo largo del tema. A diferencia del perfil anterior, la presencia de estos procesos pueden permitir al alumno reflexionar sobre esa evolución de su aprendizaje, por lo que el cuaderno es más rico como herramienta dentro de una perspectiva constructivista (Grilles *et al*., 1996), aunque su utilización para el estudio siga limitándose a la reproducción de lo ya realizado.

VI.4.3. PERFIL 3: CUADERNO COMO INSTRUMENTO PARA RECOGER EL CONTENIDO TEÓRICO, HACER ACTIVIDADES Y SERVIR DE APOYO AL ESTUDIO

En este Perfil 3 hemos incluido a estudiantes que evidencian una elaboración del cuaderno con patrones similares a los que se indicaban en el perfil anterior, pero que realizan acciones distintas durante la preparación de una prueba de evaluación en matemáticas, que conllevan una dependencia menor del contenido existente en su cuaderno.

El cuaderno de estos alumnos también contiene el contenido teórico fundamental expuesto en el aula, y los intentos de resolución de las actividades por parte de los estudiantes. De nuevo, la corrección de esas tareas y de los posibles errores cometidos se destaca como un factor importante por los estudiantes de este perfil. Éstos indican que el cuaderno es un lugar en el que hacer actividades, pero existe una primera diferencia con el Perfil 2: suelen acotar la realización en el cuaderno de las actividades a aquellas tareas planteadas por el docente, pudiendo intentar la resolución fuera del cuaderno de otras tareas no planteadas.

Por tanto, el contenido del cuaderno de estos alumnos es similar, en los aspectos fundamentales, al del perfil anterior. Sin embargo, hay diferencias importantes en el rol del cuaderno para estudiar matemáticas. El cuaderno sí que es utilizado por estos alumnos para el estudio del contenido teórico, aunque en complementación con otras herramientas como el libro de texto, y generalmente a través de la realización de pequeños resúmenes o esquemas en los que se recoge la teoría fundamental, a modo de repositorio.

Además, la mayor diferencia está en que el cuaderno pasa a tener un rol secundario en la preparación del contenido práctico, siendo un instrumento de apoyo. Los alumnos de este perfil prefieren realizar otras actividades distintas de las existentes en el cuaderno (y, por ende, de las que se han planteado en clase). Consideran que esta forma de actuar les brinda una mejor preparación para las pruebas de evaluación, a través de pensar cómo resolver ejercicios a los que no se han enfrentado antes, y evitando la tendencia a recordar aspectos de su corrección en el aula frente al proceso de plantear y resolver una actividad que sea nueva para ellos (aunque pueda ser similar a otras que ya hayan podido hacer). No obstante, valoran el hecho de tener la solución de estas actividades para poder comprobar (por ejemplo, actividades cuya resolución puede encontrarse en el CD adjunto al libro de texto).

Todas estas actividades para preparar la evaluación son hechas fuera del cuaderno de matemáticas. En esa tesitura, el cuaderno únicamente es utilizado como instrumento para revisar algunas actividades que los alumnos recuerden como especialmente dificultosas para ellos o que sean muy específicas. En ese caso sí asignan mayor valor al registro desarrollado en el cuaderno. Así, la utilización del cuaderno para el estudio de la asignatura se centra, sobre todo, en aspectos teóricos.

Hay tres alumnos participantes en las entrevistas que responden a este Perfil 3: A10, A12 y A39. Estos alumnos sí que valoran más el cuaderno como un instrumento propio del *dominio privado* del alumno, en el que realizar sus planteamientos y tentativas de resolución de las actividades, y donde recoger los posibles errores o la corrección de las mismas. Por tanto, el cuaderno sí que muestra las etapas propias de la construcción y evolución del conocimiento del estudiante a lo largo del tema, como en el caso del perfil 2. Pero, a diferencia del perfil anterior, valora también la importancia de estas tentativas y exploraciones para plantear y resolver una actividad como hecho diferencial en la preparación de una prueba de evaluación, yendo más allá de un estudio basado en aspectos reproductivos, con una visión más desarrollada de lo que significa “hacer matemáticas”.

VI.4.4. PERFIL 4: CUADERNO COMO MERO ACUMULADOR DEL TRABAJO PRÁCTICO REALIZADO DURANTE UN TEMA

Los alumnos que hemos ubicado en este Perfil 4 presentan similitudes en algunos aspectos con los del Perfil 3, pero también una diferencia importante asociada al rol del cuaderno en el estudio de los contenidos teóricos. El título que hemos dado al perfil proviene de uno de los estudiantes que han sido aquí ubicados, que definió con esas palabras lo que supone el cuaderno para él, y que pensamos que describe adecuadamente el rol y el papel que tiene este instrumento para estos alumnos.

Los estudiantes en este Perfil 4 ven el cuaderno principalmente como un lugar en el que intentar la resolución de actividades, en particular las actividades propuestas por el docente. En ese sentido, en el cuaderno se va recogiendo y acumulando todo el trabajo práctico realizado por el estudiante. Este hecho es coincidente con el perfil anterior. Sin embargo, sí que existen diferencias asociadas al rol que tienen los contenidos teóricos en la elaboración y la utilización del cuaderno. Los alumnos de este perfil no utilizan el cuaderno como herramienta para estudiar los contenidos teóricos, sino que optan por utilizar el libro de texto para ello. Únicamente valoran el papel del cuaderno como medio para recoger algún aspecto concreto que saben que no viene recogido en el libro de texto, o, especialmente, para anotaciones directamente vinculadas a los aspectos prácticos y de aplicación de la teoría.

Estos estudiantes muestran una utilización muy reducida y secundaria del cuaderno en su estudio de la asignatura. Se limitan a usarlo para revisar puntualmente algunas actividades más específicas o que hayan resultado más problemáticas para ellos. De nuevo, y al igual que los alumnos del Perfil 3, únicamente en esos casos ponen en valor el papel de registro y revisión de ese trabajo acumulado. Para prepararse de cara a una prueba de evaluación, los alumnos optan por hacer otras actividades distintas de las ya realizadas en clase, aunque relacionadas con los contenidos y los procesos trabajados en el tema, por lo que muestran una visión más desarrollada de lo que significa “hacer matemáticas”.

Dos de los estudiantes participantes en las entrevistas han dado respuestas congruentes con estas características: los alumnos A16 y A21. En resumen, estos alumnos muestran un rol y una utilización del cuaderno similar a los del Perfil 3 desde el punto de vista de los contenidos prácticos, pero muestran una mayor independencia del cuaderno en el estudio de los contenidos teóricos, utilizando el libro de texto como manual de referencia para ello.

VI.4.5. PERFIL 5: CUADERNO COMO LUGAR DONDE RECOGER ASPECTOS PRÁCTICOS DIFICULTOSOS PARA EL ESTUDIANTE

El alumno restante participante en la entrevista, A2, ha sido ubicado en este Perfil 5, que muestra una mayor independencia con respecto al cuaderno en su trabajo en la asignatura y en la preparación de pruebas de evaluación. Este alumno indica la utilización del cuaderno en la clase únicamente para recoger aquellos aspectos prácticos o aquellas actividades que él considera como más importantes, más específicas, o en las que el alumno ha tenido más dificultades.

Ese registro se realiza en la propia clase, durante la corrección de las tareas. Todos los intentos de resolución de actividades del propio alumno, hayan sido o no propuestas por el docente, se realizan fuera del cuaderno (en hojas sueltas, de sucio…), y son inmediatamente descartadas, sin que queden recogidas o almacenadas en ningún sitio. El alumno no da ningún valor al registro de aspectos como las tentativas de planteamiento y resolución de las tareas, reflexiones, exploraciones o conjeturas, que serían características de las actividades pertenecientes a un *dominio privado* del estudiante, de acuerdo con Fried y Amit (2003). El estudiante justifica su comportamiento al considerar que si ha sabido resolver una actividad en un determinado momento, sabrá resolver una similar en el futuro, por lo que no es necesario que se acumulen esos intentos de resolución. Además, el alumno se considera más libre para explorar si esos intentos se realizan fuera del cuaderno. Esto puede mostrar que se estén asociando de forma implícita algunas ataduras propias del cuaderno como instrumento del *dominio público*, a pesar de que no exista ninguna revisión por parte del docente del trabajo que en él realiza.

Además, el estudiante tampoco considera necesario anotar nada en su cuaderno con respecto a la teoría impartida por el docente, utilizando el libro de texto como manual de referencia para el estudio de la asignatura. Para preparar los aspectos prácticos, el alumno realiza más actividades distintas de las hechas en clase. Por tanto, el rol del cuaderno se reduce a recoger de la corrección en el aula aquellos aspectos prácticos que el alumno considera más importantes o más difíciles. Este instrumento tiene una utilización muy secundaria en la preparación de pruebas de evaluación, puesto que supone un apoyo puntual para el estudiante para revisar, si lo considera necesario, estos aspectos.

La Tabla VI.2 recoge los cinco perfiles que se han detectado en esta investigación y sus características principales en relación al rol del cuaderno para el alumno y la utilización del mismo, a modo de resumen y para facilitar la comparación entre ellos.

Si nos fijamos en la distribución en los cinco perfiles obtenidos en relación con la clase de la que provenían los alumnos, se observa cómo no hay ningún perfil que contenga a los cuatro alumnos entrevistados de una misma clase. Los alumnos de una misma aula se distribuyen entre dos perfiles distintos, tres o incluso cuatro (caso del Docente 1). La mayor homogeneidad se presenta en la clase de Ciencias Sociales del Docente 3, con tres alumnas (A31, A36 y A38) situadas en el Perfil 1, lo que pudiera ser fruto tanto del hecho de que son chicas como de que estén en un Bachillerato de Ciencias Sociales (con una visión de las matemáticas entre el alumnado que podría favorecer el papel del cuaderno en un estudio memorístico o reproductivo) o de la posible influencia de la Docente 3 y su hábito regular de plantear actividades como “deberes” todos los días y que eran corregidas en el aula en todo caso, el día o los días posteriores.

Perfil	Aspectos teóricos: Rol y utilización	Aspectos prácticos: Rol durante el tema	Aspectos prácticos: Ante una prueba de evaluación…
Perfil 1: Cuaderno como "cyphering book" que articula el estudio de la asignatura	Recogida de aspectos teóricos y estudio de los mismos a través del cuaderno.	Registro de actividades una vez corregidas y/o validadas, de forma clara y sin errores.	Se rehacen o se revisan las actividades del cuaderno, que es usado como "referencia".
Perfil 2: Cuaderno como instrumento que recoge la teoría y el trabajo corregido del estudiante y que articula el estudio de la asignatura	Recogida de aspectos teóricos y estudio de los mismos a través del cuaderno.	Lugar donde hacer las tareas planteadas, corrigiendo después los posibles errores cometidos.	Se rehacen o se revisan las actividades del cuaderno, que es usado como "referencia".
Perfil 3: Cuaderno como instrumento para recoger el contenido teórico, hacer actividades y servir de apoyo al estudio	Recogida de aspectos teóricos. Estudio complementando estos aspectos con el libro de texto.	Lugar donde hacer las tareas planteadas, corrigiendo después los posibles errores cometidos.	Se realizan actividades distintas de las del cuaderno. Revisión puntual de tareas específicas del cuaderno (específicas, o más dificultosas).
Perfil 4: Cuaderno como mero acumulador del trabajo práctico realizado durante un tema	Recogida de aspectos vinculados a la práctica. Estudio a través del libro de texto.	Lugar donde se hacen las tareas planteadas.	Se realizan actividades distintas de las del cuaderno. Revisión puntual de tareas específicas del cuaderno (específicas, o más dificultosas).
Perfil 5: Cuaderno como lugar donde recoger aspectos prácticos dificultosos para el estudiante	No recogen aspectos teóricos. Estudio a través de libro de texto.	Lugar donde se recogen aquellos aspectos que se muestran como más importantes o dificultosos en las tareas corregidas en el aula.	Se realizan actividades distintas de las del cuaderno. Revisión puntual de tareas específicas del cuaderno (específicas, o más dificultosas).

Tabla VI.2. Tabla resumen de los cinco perfiles detectados en relación al rol y uso del cuaderno y sus características fundamentales.

VI.4.6. CONFRONTACIÓN DE LOS PERFILES DE UTILIZACIÓN OBTENIDOS CON LOS PERFILES DE ELABORACIÓN Y CON EL RENDIMIENTO ACADÉMICO

El análisis de las entrevistas nos ha permitido detectar cinco perfiles entre el alumnado participante en las entrevistas que muestran un rol y una utilización muy diferente del cuaderno de matemáticas.

En las entrevistas participaron cuatro alumnos de cada clase, por lo que fueron entrevistados 16 de los 41 participantes en la investigación global sobre los cuadernos. No tenemos información sobre el rol y la utilización del cuaderno en todos los estudiantes, sino sólo en estos 16 alumnos entrevistados. Por tanto, nos tendremos que restringir a estos alumnos para poder comparar el rol y el uso del cuaderno emergido con las características detectadas en la elaboración del mismo (Capítulo V). Además, es necesario tener en cuenta que las entrevistas se realizaron un curso académico después de la recogida de los cuadernos para fotocopiarlos, por lo que se está comparando la elaboración detectada en un bloque concreto (Análisis Matemático) con las ideas emergidas en la entrevista, que tuvo un carácter general (sin circunscribirse a aspectos o momentos concretos).

No obstante, consideramos de interés realizar este cruzamiento entre los cinco perfiles detectados en la entrevista y los perfiles de elaboración (Capítulo V, con seis grupos teóricos, dos grandes grupos prácticos y los diferentes subgrupos en estos dos GGP) en los 16 alumnos. Para ello, se utilizan como base las Tabla V.33 y V.38, en las que se mostraba en qué grupo teórico y en qué gran grupo práctico (o subgrupo de éste) quedaba encuadrada la elaboración del alumno para cada uno de los temas del bloque de análisis matemático después de la realización de los análisis clúster.

A partir de la Tabla V.33, se ha eliminado la información de todos los alumnos no entrevistados y la información sobre el sexo de los estudiantes. Además, se ha añadido un código para distinguir el perfil en que ha sido ubicado cada estudiante según el rol y la utilización del cuaderno emergida en la entrevista: se utiliza la negrita para identificar a los alumnos del Perfil 1, la cursiva para identificar a los del Perfil 2, el color rojo para los del Perfil 3, el color verde para los del Perfil 4 y, por último, el color azul para señalar el único alumno del Perfil 5 (alumno A2). La Tabla VI.3 muestra esta información concreta para los 16 alumnos entrevistados.

	GT1	GT2	GT3	GT4	GT5	GT6
GGP1	*A24 (T2)* **A27 (T1)** **A31 (T1)**	*A14 (T1)* A39 (T1)	A16 (T1)	*A6 (T1)* A16 (T2, T3) **A36 (T1)** **A38 (T1)**	**A3 (T2)** *A6 (T2)*	**A3 (T1)** *A13 (T2)* *A14 (T3)* **A31 (T2, T3)** **A36 (T3)**
GGP2	*A24 (T1)*	A12 (T2) A21 (T2) **A36 (T2)** **A38 (T3)** A39 (T2, T3)		A12 (T1, T3)	A2 (T1, T2)	A10 (T1, T2) *A13 (T1, T3)* *A14 (T2)* **A27 (T2)** *A28 (T1, T2)* **A38 (T2)**
Sin UP asocia -da		*A6 (T3)* A10 (T3)			A2 (T3) **A3 (T3)**	

Tabla VI.3. Tabla cruzando el perfil de elaboración de los alumnos en cada tema y el perfil de utilización del cuaderno emergido en la entrevista.

La Tabla VI.3 evidencia que no se presentan correspondencias demasiado marcadas entre el perfil de elaboración y el de utilización. No obstante, sí que se aprecian algunas agrupaciones con cierta concentración, que se comentan a continuación.

Los Perfiles 1 y 2 fueron los más numerosos (con cinco alumnos cada uno). En la Tabla VI.3 puede verse que en el GT1 y especialmente en el GT6 hay una concentración muy alta de unidades teóricas de estudiantes de ambos perfiles pertenecientes a estos dos grupos teóricos.

En concreto, las unidades del GT1 se caracterizaban por ser unidades completas, sobre todo en el registro de ejemplos, representaciones gráficas, observaciones y comentarios del docente, con cierta precisión en las transcripciones y una buena presentación y ortografía. Estas características de elaboración son congruentes con el rol del cuaderno para los estudiantes de estos dos primeros perfiles, para los cuales es el instrumento clave en su estudio de la asignatura, tanto de los contenidos teóricos como de los aspectos prácticos. En concreto, las tres unidades con una combinación GT1-GGP1, si descendemos a los subgrupos de los grupos prácticos, presentan la combinación GT1-GGP1S4. Esta combinación también indica la presencia de unas unidades prácticas muy completas, con un alto número de ejercicios que se revelan como intentados y con un registro elevado de comentarios, aclaraciones y explicaciones de los pasos y procesos seguidos. La compleción de las unidades prácticas también es una característica necesaria si luego va a utilizarse su contenido como referencia para el estudio, a través de la revisión o la repetición de todos o gran parte de los ejercicios existentes en los cuadernos. No obstante, las unidades de las alumnas A27 y A31, que pertenecían al Perfil 1 (“Cuaderno como *cyphering book* que articula el estudio de la asignatura”), sí que mostraban evidencias de que las actividades habían sido intentadas por las alumnas. Pudiera ser que las alumnas hayan incorporado en el cuaderno sus intentos de resolución de las actividades (resueltos de una forma que no coincide exactamente con la desarrollada en la corrección en el aula), una vez que son validadas por la propia alumna o por la docente (como indica la alumna A27 en la entrevista).

También hay una alta concentración de unidades teóricas de alumnos pertenecientes a los Perfiles 1 y 2 en el grupo teórico GT6. Estas unidades se caracterizaban por ser muy completas en todos los aspectos, aunque con una presentación mejorable. La completitud es una característica importante para la utilización posterior del cuaderno como instrumento de referencia para el estudio de los contenidos teóricos, un hecho presente en los estudiantes de los Perfiles 1 y 2.

Las unidades prácticas de los alumnos que han sido ubicados en los Perfiles 1 y 2 se alternan entre los dos GGP. El rendimiento de los estudiantes ubicados en estos dos perfiles también varía de unos estudiantes a otros. Por ejemplo, mientras que alumnos como A24 (Perfil 2), A28 (Perfil 2) y A31 (Perfil 1) han presentado un alto rendimiento en este bloque de contenidos[71], otros estudiantes como A3 (Perfil 1), A27 (Perfil 1) o A13 (Perfil 2) han tenido unos resultados académicos muy decepcionantes. Es decir, estos dos perfiles se adaptan de forma desigual a los hábitos de estudio y a las necesidades específicas de cada uno de los alumnos.

Con respecto al Perfil 3 (alumnos en color rojo en la Tabla VI.3), hay una mayor concentración de unidades teóricas dentro del grupo teórico GT2. Estas unidades se caracterizaban por transcribir sobre todo ejemplos y representaciones gráficas, con una presencia muy baja de enunciados y de comentarios de tipo verbal, poca precisión de las representaciones gráficas y una mala presentación. Recordemos que los alumnos del Perfil 3 mostraban una utilización complementaria de cuaderno y libro de texto para preparar los contenidos teóricos de una prueba de evaluación. Así, estos estudiantes parecen valorar más que el cuaderno contenga elementos que pueden no estar tal cual en el libro de texto, como son los ejemplos desarrollados por el docente

[71] Estos valores tomados como referencia para el rendimiento se expusieron en el apartado V.5 de esta memoria de tesis doctoral; en concreto, en la Tabla V.39

en la clase o algunas representaciones gráficas; frente a otros elementos (enunciados, fórmulas, teoremas) que sí que es probable que estén en el libro de texto.

También hay una mayor concentración de unidades asociadas a alumnos del Perfil 3 dentro del gran grupo práctico GGP2. Estas unidades se caracterizaban por ser poco completas, con un número bajo de actividades registradas e intentadas, un bajo número de comentarios y explicaciones, y sin que suelan rehacerse ejercicios cuya resolución es intentada por el estudiante de forma poco satisfactoria. Esta última característica sí que es congruente con el rol posterior del cuaderno para el estudio del alumno, puesto que estos estudiantes no recurrían a la revisión de estas actividades del cuaderno (salvo casos muy específicos) para preparar una prueba de evaluación, sino que hacía otras actividades distintas. Sin embargo, el bajo número de actividades registradas e intentadas no concuerda demasiado con las características emergidas en las entrevistas, en las que los alumnos indicaban que sí que intentaban resolver las actividades planteadas directamente en el cuaderno. Pudiera ser que estos alumnos no realicen todas ellas o que alguna sea intentada fuera del cuaderno de matemáticas.

Conjeturamos que la presencia de esos intentos de resolución fuera del cuaderno, y en consecuencia de un mayor trabajo práctico del alumno, puede ser también un hecho diferencial entre los estudiantes que se han ubicado en este perfil de utilización, si atendemos al rendimiento académico que tuvieron en este bloque, que se muestra desigual. Mientras que el alumno A10 destacó por su rendimiento dentro de los resultados mediocres obtenidos en esa clase, la alumna A12 tuvo unas calificaciones aceptables mientras que el alumno A39 obtuvo unas calificaciones muy pobres, lejanas al aprobado. El alumno A10 también comentó en la entrevista que intenta anticiparse a lo que el docente va a considerar más importante y seleccionar mejor su trabajo en la asignatura, una variable que también le podría estar ayudando a conseguir mejores resultados.

En relación al Perfil 4, las unidades aparecen en distintas configuraciones de grupo teórico y gran grupo práctico. Por último, los dos temas completos del alumno A2, único integrante del Perfil 5, presentaban una combinación GT5-GGP2. En concreto, si descendemos a los subgrupos de los grandes grupos prácticos, la combinación en ambos temas es GT5-GGP2S1. Esta combinación se caracteriza por una elaboración del cuaderno que es muy selectiva al registrar elementos. El registro de contenido teórico es poco completo, sobre todo ejemplos y representaciones gráficas; y la presencia de actividades también es baja. No obstante, en estas unidades sí que existían algunas anotaciones de carácter personal o de tipo expresivo (sobre su proceso de comprensión o sus dudas, Britton *et al*., 1975), así como intentos de resolución de las pocas actividades registradas.

Si comparamos las características detectadas en la elaboración con el rol y la utilización emergida en las entrevistas, la elaboración en las unidades teóricas sí que corresponde con lo que el alumno A2 indicó en la entrevista, al no utilizar el cuaderno como un instrumento para el estudio de la teoría. El alumno A2 opta por utilizar el libro de texto. En relación a las unidades prácticas, existe información discordante, puesto que sí fueron detectadas algunas actividades intentadas en su cuaderno, a pesar de que el alumno indicaba que todos sus intentos de resolución de actividades se hacían fuera de él, recogiendo en el cuaderno únicamente aspectos de la corrección de actividades en el aula que le resultaban más interesantes o complicados. Esto pudiera indicar que es el propio alumno el que, en algunas ocasiones, intente la resolución de estas actividades en su cuaderno durante su propia corrección en el aula, además de recoger algunas anotaciones de interés para el alumno en aspectos que considere más importantes o difíciles.

Según podemos ver en la Tabla V.37, este alumno tuvo un rendimiento aceptable en esta bloque de contenidos (5’5 en una escala de 0 a 10), lo que sí que puede indicar la existencia de ese trabajo matemático fuera del cuaderno, y la presencia de cierta facilidad del estudiante hacia las matemáticas que le induce a fiarse de sus propias capacidades. Consideramos que un trabajo algo más ordenado de este alumno y poniendo en mayor valor el rol del cuaderno tanto en las clases como en su trabajo matemático puede serle de utilidad para ayudarle a desarrollar y a aprovechar mejor sus capacidades y su interés por la asignatura.

CAPÍTULO VII

ANÁLISIS ESPECÍFICO DE ALGUNOS ASPECTOS DE INTERÉS. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El desarrollo del análisis de los cuadernos que se ha realizado, y la cumplimentación de las plantillas de análisis para todas las unidades de registro en que se ha dividido el material analizado (fotocopias de los cuadernos de los alumnos), hacen que el EI disponga de una gran cantidad y variedad de información sobre diferentes aspectos asociados a las dimensiones, variables e indicadores considerados en el marco de análisis. Además de las valoraciones numéricas de los indicadores, que se han utilizado en el desarrollo del análisis cuantitativo explicado en el capítulo V, existe mucha información asociada a las explicaciones de las valoraciones de cada indicador, y que detalla muchos aspectos sobre el contenido y las características de las unidades analizadas.

El séptimo capítulo de esta tesis doctoral tiene por objetivo presentar varios análisis sobre algunos aspectos específicos de interés, y que han sido desarrollados a partir de la información anterior. En cada uno de estos análisis se explican los resultados obtenidos y su discusión en el marco de la investigación global. Los aspectos que se han mostrado como más interesantes para hacer un análisis más específico han emergido durante el propio desarrollo del análisis de las unidades de registro, y en relación con los antecedentes leídos y las ideas teóricas de referencia consideradas. En particular, se presentan tres análisis distintos, cada uno de ellos en un apartado de este capítulo, junto con un apartado de síntesis y reflexión final conjunta. Los tres buscan conocer mejor qué es lo que los alumnos deciden registrar en sus cuadernos en el contexto de la presentación expositiva de tópicos especialmente relevantes, y cómo es ese registro, así como la posible escritura de otros comentarios o aspectos que el alumno considera como suficientemente relevantes para ser anotados.

Los dos primeros apartados se dedican a dos análisis relacionados con la toma de apuntes de los estudiantes en la presentación de dos tópicos específicos del bloque de análisis matemático. El apartado VII.1 se centra en el tópico de reglas y técnicas de derivación. Además de por ser la derivada un tópico clave del análisis matemático, se ha escogido este tópico para el desarrollo del análisis puesto que fue el tópico dentro del cual los docentes participantes desarrollaron un mayor número de justificaciones; en concreto, de las diversas reglas de derivación. Tanto estas justificaciones como las aplicaciones de varias reglas distintas en la derivación de algunos tipos de funciones hizo que aparecieran diferentes tipos de relaciones entre el contenido presentado, frente a otros tópicos en los que los conceptos fueron desarrollados de un modo más aislado. Por todo ello, se considera importante estudiar detalladamente cómo son los apuntes que toman los estudiantes ante un contenido concreto, la posible presencia e influencia que tiene en la toma de apuntes los diferentes tipos de contenido matemático considerado y las relaciones establecidas entre ellos.

El apartado VII.2 también está centrado en la toma de notas, pero en el contexto de una presentación expositiva de carácter intuitivo del concepto de límite de una función. El concepto de límite es un concepto central en el desarrollo del análisis matemático y, como se ha comentado en los antecedentes, uno de los conceptos cuya comprensión resulta más difícil para los alumnos y cuya introducción es bastante complicada para los docentes. Así, en este segundo análisis específico van a estudiarse con detalle las notas tomadas por los estudiantes en las presentaciones del concepto de límite que realizaron los cuatro docentes participantes, una perspectiva desde la cual apenas existen estudios, y que puede tener una influencia importante en el desarrollo del aprendizaje en los alumnos de este concepto.

El apartado VII.3 presenta un análisis específico de un tipo de elementos concretos que pueden aparecer en el cuaderno de los alumnos y a los que en esta investigación nos estamos refiriendo como *comentarios*[72]. Entendemos por comentario todo aquello que puede aparecer en el cuaderno del estudiante más allá de la toma de contenidos teóricos expuestos por el docente y de la escritura de pasos y procesos en las actividades, y que tenga el propósito de aportarle información. Generalmente serán aspectos de tipo verbal. El desarrollo de la investigación ha permitido detectar una

[72] En nuestro marco de análisis de los cuadernos (Capítulo IV), dentro de la Dimensión 3 y su única variable, el primer indicador estaba enfocado en el estudio de la frecuencia de aparición de este tipo de comentarios y observaciones en el cuaderno del alumno.

tipología de *comentarios* muy variada en los cuadernos, enfatizando aspectos diferentes y con un propósito que también está influido por los modos de uso y el rol del cuaderno para los alumnos. Por ese motivo, se ha decidido realizar un análisis detallado de este tipo de elementos para conocer más sobre lo que posiblemente han sido las únicas muestras de escritura propias de los alumnos en el desarrollo de sus cuadernos.

Por último, en el apartado VII.4 se realiza una reflexión final conjunta de las investigaciones específicas presentadas en este apartado en el marco de la investigación sobre los cuadernos que se ha llevado a cabo.

VII.1. APUNTES DE LOS ESTUDIANTES: INFLUENCIA DE LOS ELEMENTOS MATEMÁTICOS Y SUS RELACIONES

Este primer análisis específico que se presenta está centrado en el estudio de las notas teóricas que han tomado los estudiantes durante la presentación de las reglas y técnicas de derivación por parte de los docentes. Las razones para justificar la elección de este tópico para desarrollar un análisis específico se han explicado en la presentación del capítulo. Este análisis específico ha sido publicado en Arce, Conejo y Ortega (2016).

Este apartado se divide en tres subapartados. En el primero se presenta y explica información adicional sobre el desarrollo de este análisis específico. En el segundo se recogen los resultados obtenidos en el análisis de los datos. Por último, en el tercer subapartado se presenta una discusión de los resultados obtenidos en relación a antecedentes de estudios relacionados y al desarrollo de la investigación global.

VII.1.1. INFORMACIÓN ADICIONAL SOBRE EL DESARROLLO DEL ANÁLISIS ESPECÍFICO

El tópico en el que se centra este estudio es el de reglas y técnicas de derivación. Siguiendo a Courant y Robbins (1964), vamos a llamar *regla de derivación* a aquella que puede obtenerse a partir de la definición de derivada de manera directa (como, por ejemplo, las reglas para derivar funciones elementales); y *técnica de derivación* a un conjunto de reglas y transformaciones que permiten derivar una función con una estructura o propiedad determinada, como la técnica de derivación logarítmica, para derivar funciones del tipo $f(x)^{g(x)}$, o la de la función recíproca[73].

Este estudio se enmarca dentro del último de los objetivos planteados en esta tesis doctoral, “Examinar qué aspectos son considerados por los alumnos como “dignos de anotar” o de escribir en su cuaderno en un contexto de clase determinado (Pimm, 1999)”. Así, la investigación específica presentada en este apartado pretende analizar las características que tienen los apuntes que toman los estudiantes participantes para el tópico concreto de reglas y técnicas de derivación, con técnicas de análisis basadas en los tipos de elementos matemáticos expuestos y en las relaciones establecidas entre ellos. El objetivo anterior se concreta, aquí, en los siguientes objetivos específicos:

- Establecer semejanzas y diferencias en el contenido impartido por los tres docentes participantes, de acuerdo al marco teórico adoptado.
- Detectar diferentes comportamientos en el alumnado al transcribir ese contenido, a través de un estudio similar de las notas que escriben.
- Identificar relaciones entre los elementos y relaciones expuestas, los comportamientos de los alumnos al transcribir y el papel que tienen las notas para ellos.

Este contenido forma parte del tema de derivadas, tercer tema del bloque de análisis matemático. Por tanto, este contenido teórico forma parte de las unidades teóricas UT3 de los alumnos. Este tema, por falta de tiempo, no llegó a ser desarrollado en el aula Científico-Tecnológica de la Docente 3, pero sí que tenemos mucha información de las tres aulas restantes. Disponemos de UT3 de un total de 26 alumnos entre esas tres aulas, que serán los estudiantes participantes en este estudio específico: los alumnos A1 a A4, y A6 a A10[74] en el caso del Docente 1; los alumnos A11 a A17[74] en el aula del Docente 2; y los estudiantes A31 a A39 y A41[74] en el aula de Ciencias Sociales del Docente 3.

Para realizar este análisis detallado tanto del contenido expuesto por los docentes como del transcrito por los alumnos, se ha utilizado como base el marco teórico de

[73] Llamamos función recíproca a la función simétrica para la composición de funciones. En muchas ocasiones, la función tal recibe el nombre de *función inversa*, lo cual provoca confusión con la simétrica para el producto de funciones.
[74] De los alumnos A5, A18 y A40 únicamente disponemos de la parte correspondiente al primer tema, funciones elementales. En el caso de la alumna A30, tan sólo disponemos de la parte correspondiente a los dos primeros temas, pero no al tema de derivadas.

análisis del contenido matemático de Rico y colaboradores[75]. Este marco diferencia tres grandes categorías para analizar un contenido matemático escolar: la *estructura conceptual*, la *fenomenología* y los *sistemas de representación*. No obstante, hemos hecho alguna adaptación específica que explicamos a continuación.

Dentro de la estructura conceptual de la derivada, consideramos que las reglas y técnicas de derivación forman un *foco conceptual*, es decir, una "agrupación específica de conceptos, estrategias y estructuras, que adquiere importancia especial ya que expresa, organiza y resume agrupamientos coherentes de los contenidos" (Rico *et al.*, 2008, p. 11).

En nuestro marco de análisis de los cuadernos (Capítulo IV), habíamos considerado dos grandes grupos de contenidos dentro de la estructura conceptual[76]. El primero era el formado por las definiciones, resultados teóricos, las fórmulas y las justificaciones. Dadas las características específicas del contenido expuesto dentro del tópico de reglas y técnicas de derivación, aquí se ha dividido el gran grupo en dos: por una parte, los *enunciados* de las reglas y técnicas de derivación; y, por otra parte, las *justificaciones* de dichas reglas y técnicas. Estas últimas permiten construir, organizar, fundamentar y sistematizar la estructura matemática que organiza el foco conceptual, así como relacionarlo con la estructura conceptual. El segundo gran grupo de contenido, las *observaciones o comentarios de interés realizados por el docente*, se han mantenido en este estudio específico. Por simplificar, llamaremos *comentarios* a este tipo de elementos.

Dentro de la fenomenología consideraremos, al igual que hacíamos en el marco de análisis de los cuadernos, los ejemplos. En este caso, los *ejemplos de aplicación*, en funciones concretas, de las reglas y técnicas presentadas.

Para la tercera de las categorías, los *sistemas de representación*, en este análisis específico haremos un estudio transversal de los sistemas de representación que se han utilizado al presentar y referenciar los elementos que forman el contenido, que han sido: verbal oral y escrito, simbólico y gráfico.

Para poder reconocer y analizar el contenido asociado a las reglas y técnicas de derivación tanto desarrollado por cada docente como escrito por cada estudiante, se van a construir *mapas de elementos y relaciones*, similares a los planteados por Rico *et al.* (2008) al analizar y planificar un contenido escolar. Estos mapas nos permitirán

[75] Este marco se detalla en el subapartado III.3.1 de esta tesis doctoral.
[76] Esta parte del marco, correspondiente a la Dimensión 2 de análisis para las unidades teóricas, se detalla en el subapartado IV.3.1 de esta memoria de tesis doctoral.

visualizar los cuatro tipos de elementos considerados (enunciados, justificaciones, comentarios, ejemplos), así como las conexiones o relaciones establecidas entre ellos. Distinguiremos dos tipos de relaciones: las asociadas a *procesos de aplicación* directa de enunciados en ejemplos ilustrativos o en la obtención de casos particulares de reglas, y relaciones asociadas a *procesos de justificación* de reglas y técnicas de derivación a partir de reglas previas u otros conceptos o resultados. El mapa incluye también los sistemas de representación utilizados. La comparación de los diferentes mapas asociados a la exposición de cada profesor y la transcripción realizada por cada alumno, por un lado, nos permitirá mostrar diferentes niveles de desarrollo de los contenidos y, por otro, determinar la cantidad y la naturaleza de las relaciones establecidas entre elementos y de los procesos seguidos. Ambos aspectos son considerados como aspectos clave para desarrollar y manifestar la comprensión de un concepto (Harel, Selden & Selden, 2006).

Los mapas se han elaborado con la ayuda de todos los datos recogidos en la investigación y utilizando el programa CmapTools. Para cada uno de los docentes, se ha construido un mapa conceptual de elementos y relaciones, que está asociado a la exposición teórica sobre el foco de reglas y técnicas de derivación que se ha llevado a cabo. La comparación de estos mapas nos permitirá responder al primer objetivo específico de este estudio. Por otra parte, también se ha construido un mapa del mismo tipo para la transcripción de cada estudiante, que se ha complementado con el análisis de las unidades de registro y de las entrevistas realizadas a varias parejas de estudiantes (Capítulo VI de la tesis doctoral).

VII.1.2. RESULTADOS OBTENIDOS EN EL DESARROLLO DEL ANÁLISIS

Vamos a presentar los resultados separando la parte del análisis que corresponde al contenido expuesto por los docentes de la parte asociada a las transcripciones realizadas por los alumnos.

La Figura VII.1 muestra la leyenda para identificar los distintos elementos en los *mapas de elementos y relaciones* asociados a cada desarrollo teórico, bien expuesto por los docentes o bien transcrito por los alumnos en sus cuadernos. Hemos usado diferentes tipos de recuadros para los contenidos expuestos, incluidos los ajenos al foco conceptual. Las justificaciones han sido representadas con flechas, que parten de los resultados utilizados durante la demostración y llegan al enunciado demostrado, conectando diferentes enunciados y resultados. Las relaciones asociadas a procesos de aplicación son indicadas con flechas de trazo discontinuo, bien al derivar funciones en ejemplos ilustrativos o bien al obtener derivadas de funciones particulares a partir de una general (por ejemplo, la derivada de y=ln(x) a partir de $y=\log_a(x)$). Además, en cada recuadro con elementos del foco se han añadido los sistemas de representación utilizados, bien en su exposición o bien en su transcripción: verbal (distinguiendo, en el caso de la exposición de los docentes, entre discurso hablado o dictado explícito), simbólico (distinguiendo tres notaciones diferentes utilizadas para la derivada) y gráfico.

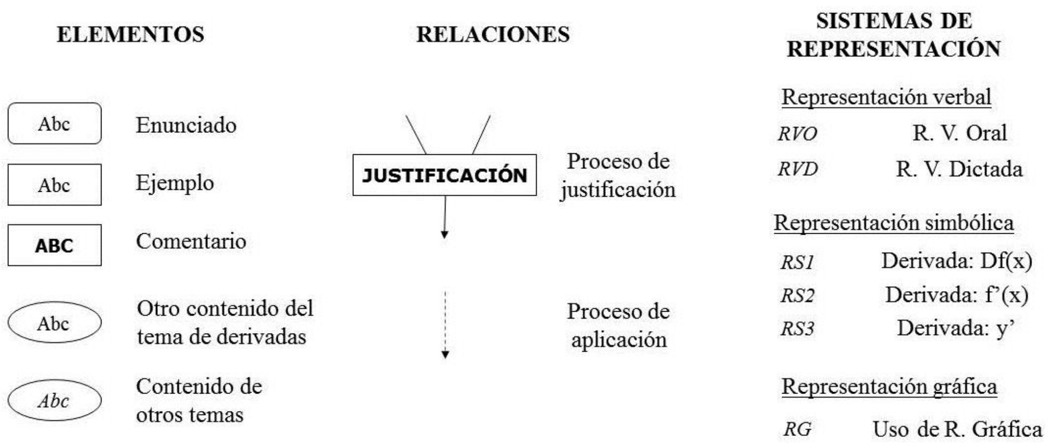


Figura VII.1. Leyenda para identificar los elementos y relaciones de los mapas conceptuales.

En todos los mapas conceptuales, y dadas las limitaciones de notación del programa CmapTools, la notación exponencial se ha sustituido por su notación equivalente en programas informáticos (por ejemplo, la función $f(x)=x^2$ se denotará como f(x)=x^2).

Desarrollo teórico de los docentes sobre reglas y técnicas de derivación

Las Figuras VII.2, VII.3 y VII.4 muestran los mapas conceptuales de elementos y relaciones asociados al desarrollo teórico del Docente 1, el Docente 2 y el Docente 3, respectivamente. Estos mapas, junto con la información complementaria recogida, nos han permitido detectar semejanzas y diferencias entre las exposiciones teóricas de los tres docentes, que se comentan después de las figuras.

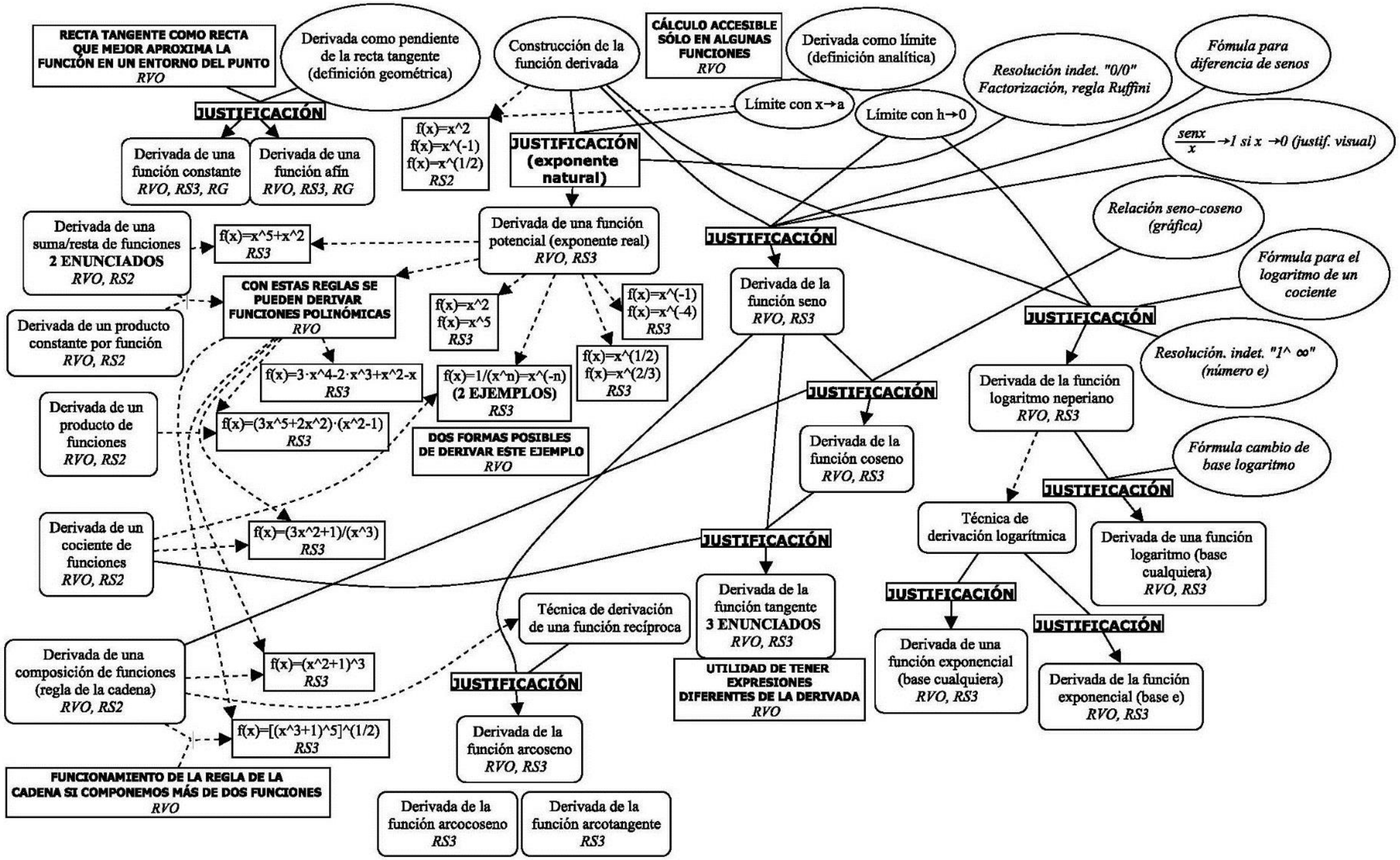


Figura VII.2. Mapa conceptual de elementos y relaciones asociado a la exposición del Docente 1 (Leyenda en Figura VII.1).

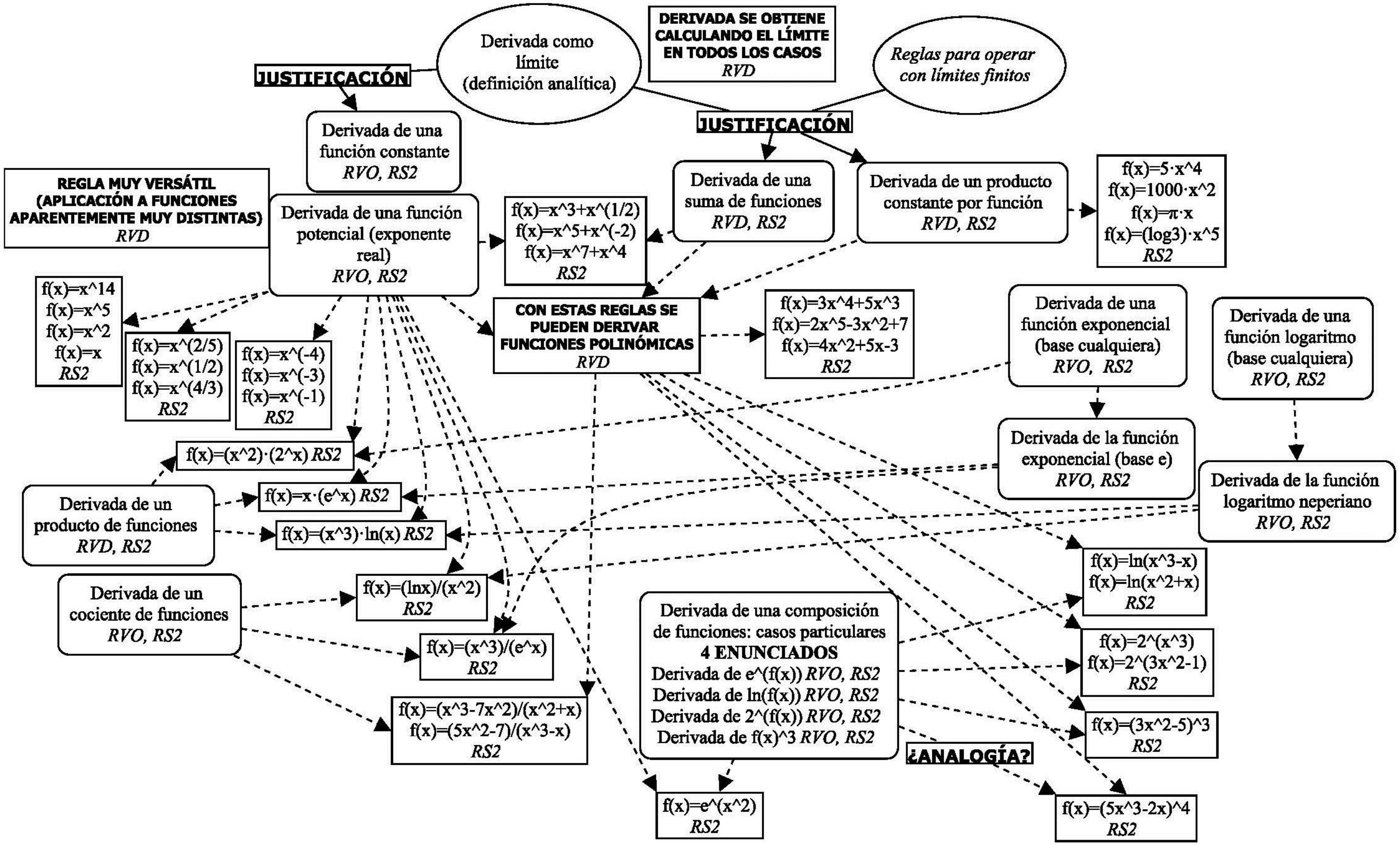


Figura VII.3. Mapa conceptual de elementos y relaciones asociado a la exposición del Docente 2 (Leyenda en Figura VII.1).

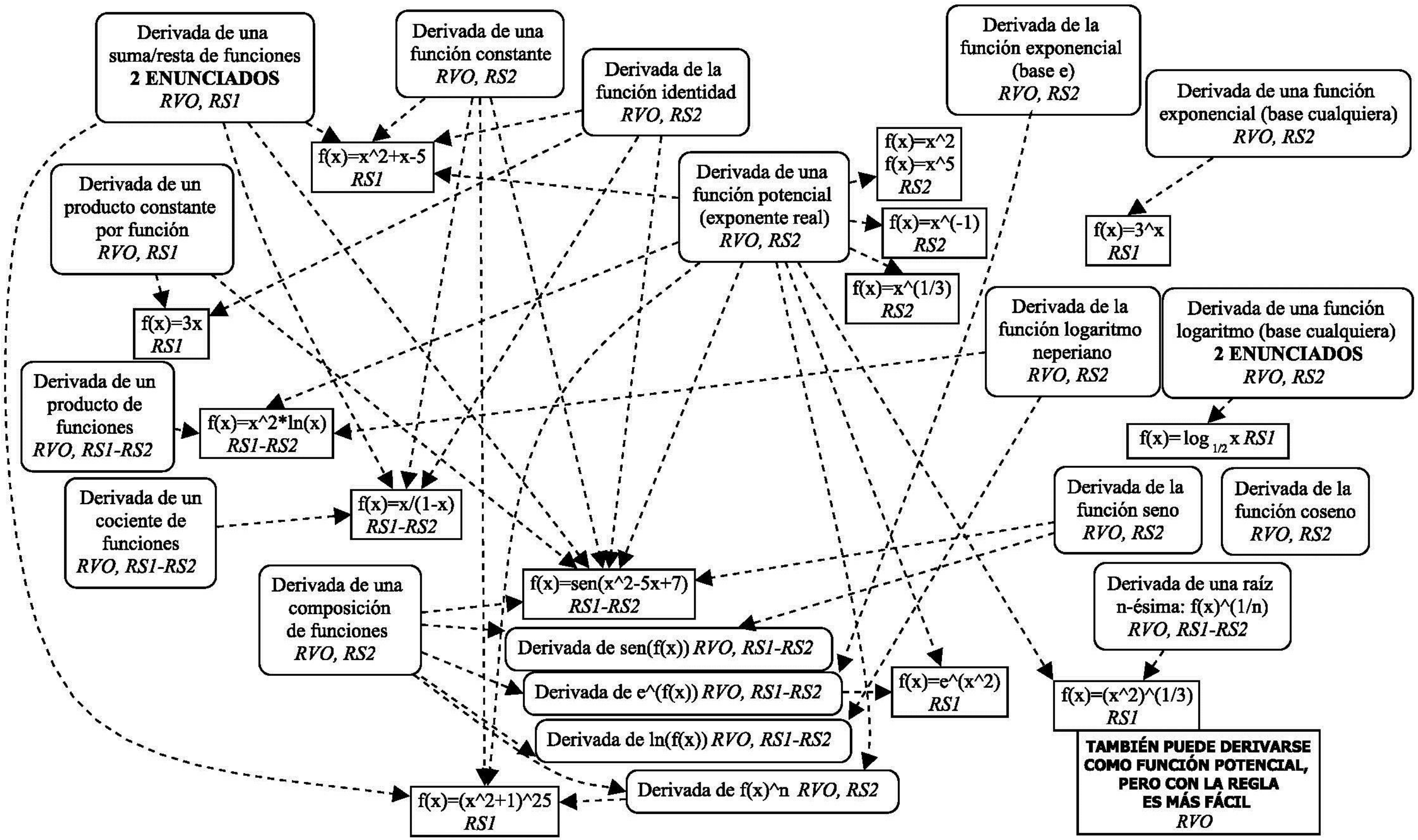


Figura VII.4. Mapa conceptual de elementos y relaciones asociado a la exposición del Docente 3 (Leyenda en Figura VII.1).

El primer elemento de comparación que hemos utilizado es el número de elementos de cada tipo que expuso cada uno de los tres docentes, que se muestran en la Tabla VII.1.

Profesor	Enunciados	Ejemplos	Comentarios	Justificaciones
Docente 1	23	17	6	11
Docente 2	14	34	3	3
Docente 3	21	14	1	0

Tabla VII.1. Elementos expuestos por cada docente en la presentación de la teoría.

Con respecto a los enunciados, varias de las reglas fueron desarrolladas por los tres docentes participantes: la regla para derivar funciones constantes, potenciales, exponenciales, logarítmicas y las reglas para derivar operaciones con funciones. El Docente 2 fue el profesor que expuso un menor número de enunciados, presentando las reglas para derivar las funciones exponencial y logarítmica de base “e” como un ejemplo de aplicación de las reglas para base cualquiera (que no justifica). La Docente 3 añadió a las anteriores las reglas para derivar las funciones seno y coseno, así como alguna regla particular no necesaria, como la “regla para derivar la raíz enésima de una función”, cuando ese tipo de funciones ya podían derivarse con las reglas previas expuestas por la docente. El Docente 1 realizó el desarrollo más completo de los enunciados, incluyendo todas las funciones trigonométricas, y es el único docente que expone dos técnicas de derivación: logarítmica y de la función recíproca.

En relación a los ejemplos de aplicación, los tres docentes ejemplificaron la derivada de una función potencial, abarcando tanto exponentes naturales, como enteros negativos y racionales, y las reglas para derivar operaciones con funciones. Sin embargo, mientras que el Docente 2 planteó tres o más ejemplos por regla, los otros dos docentes únicamente hicieron uno o dos como mucho (véanse la Tabla VII.1 y las Figuras VII.2, VII.3 y VII.4). Este hecho, y la mayor variedad de funciones que utilizó el Docente 2 en los ejemplos que expuso, hacen que exista un abundante número de flechas asociadas a procesos de aplicación en la Figura VII.3. Los ejemplos del Docente 3 tendieron a ser ejemplos de aplicación directa, de mayor sencillez. Además, únicamente el Docente 1 desarrolló tres ejemplos (con funciones potenciales) donde calculó la derivada a partir de la definición analítica, rehaciéndolos posteriormente aplicando la regla. Otra diferencia es que el Docente 2 tendió a obviar el desarrollo de cálculos posteriores para simplificar la expresión de la derivada una vez aplicada la regla, algo que sí fue destacado por los Docentes 1 y 3, indicando ambos que estos cálculos permiten facilitar la obtención de información sobre la función.

Los comentarios de los tres profesores se centraron en enfatizar la estructura de algunas reglas o funciones, la aplicabilidad o consecuencias de algunas reglas o las diferentes posibilidades de aplicación de éstas al derivar algunas funciones. En este último tipo, ha existido algún juicio de valor discutible sobre cómo calcular la derivada, como ha sido el único comentario expuesto por la Docente 3 (ver Figura VII.4). El Docente 1 expuso un mayor número de comentarios, incluyendo un resultado teórico importante, como es la caracterización de la recta tangente desde una concepción leibniziana (ver Figura VII.2), que permitió justificar las reglas para derivar funciones constantes y afines. Hay un comentario común a los Docentes 1 y 2: la posibilidad de derivar funciones polinómicas aplicando reglas que habían sido expuestas anteriormente por los docentes. El Docente 3 no explicitó este hecho, lo que provoca la aparición de muchas flechas de aplicación en la Figura VII.4, asociadas a las reglas parciales usadas para derivar funciones polinómicas.

Los procesos de justificación supusieron un gran contraste entre los tres profesores. Estos procesos fueron abundantes en el caso del Docente 1, escasos en el aula del Docente 2 e inexistentes para el Docente 3. El Docente 1 afirmó en una conversación informal con el docente que él desarrolla estos procesos de justificación para repasar y recordar otros conceptos o técnicas presentes en ellos (que pueden verse en los numerosos recuadros elípticos de la Figura VII.2), sin que atribuyera el distinto número de justificaciones a la diferente modalidad de matemáticas. En todo caso, las justificaciones han estado fuera de las *expectativas de aprendizaje* (Lupiáñez, 2009) que los tres docentes fijaron para sus alumnos.

El mapa del Docente 1 muestra la presencia de dos bloques de relaciones muy diferenciados en su exposición. Por una parte, se justificaron casi todas las reglas para derivar funciones elementales, mientras que se ejemplificaron, sin justificar, las reglas correspondientes a las operaciones con funciones. Este docente recurrió en sus demostraciones a diferentes definiciones de derivada en un punto: dos definiciones analíticas (límites del cociente incremental cuando $x \to a$ y cuando $h \to 0$) y la definición geométrica como pendiente de la recta tangente en un punto. El Docente 2 siempre utilizó en sus justificaciones el límite del cociente incremental cuando $x \to a$, pero no explicitó la necesaria construcción de la función derivada a partir de la derivada puntual, reflejándose la problemática detectada por Badillo *et al*. (2011) para diferenciar entre la derivada en un punto y la función derivada, que pasó desapercibida para sus alumnos. En este sentido, el Docente 3 también omitió la construcción de la función derivada. Únicamente el Docente 1 presentó explícitamente esta construcción y la aplicó correctamente en sus justificaciones.

El orden del enunciado y la justificación también ha supuesto otra diferencia importante entre profesores. El Docente 2 expuso primero la regla y después desarrolló la demostración. Sin embargo, el Docente 1 utilizó la demostración como un medio para obtener la regla, que era posteriormente institucionalizada.

En los desarrollos de la regla de la cadena que hicieron los tres docentes subyacen los niveles de comprensión de la misma indicados por Clark *et al.* (1997). El Docente 2 hizo un desarrollo muy limitado debido a que no había trabajado previamente, en el bloque de análisis matemático, la composición de funciones. Este profesor se limitó a escribir y a ilustrar la regla en cuatro casos particulares, indicando cuál era la derivada en cada caso: $e^{f(x)}$, ln(f(x)), $2^{f(x)}$ y $[f(x)]^3$. No obstante, añadió un ejemplo con una función del tipo $[f(x)]^4$ (ver Figura VII.3), con la intención, quizá, de aplicar un razonamiento por analogía con respecto a la regla para derivar $[f(x)]^3$. El Docente 3 primero enunció y posteriormente ejemplificó la regla de la cadena, pero después lo complementó con la exposición de cuatro casos “particulares” de funciones compuestas: sen(f(x)), $e^{f(x)}$, $[f(x)]^n$ y ln(f(x). Con ello, este docente pareció querer abarcar tanto la situación en la que los alumnos hubieran comprendido la estructura subyacente a la regla como la situación de los que no lo consiguieran. Este hecho de proporcionar reglas “directas” de derivación de funciones frente a la posible aplicación de una regla general para una estructura determinada se muestra como una característica de este profesor. Por último, el Docente 1 presentó la regla general para derivar una composición de funciones junto con su nombre, y realizó dos ejemplos de aplicación. En el segundo ejemplo se utilizó una función compuesta de tres, con el que pretendió generalizar la estructura subyacente a la regla de la cadena a más de dos funciones, lo cual se enfatiza además a través de un comentario verbal.

En relación a los sistemas de representación, todas las reglas, ejemplos y justificaciones se escribieron simbólicamente en la pizarra. Además, las reglas, junto con los comentarios, se indicaron verbalmente en el discurso oral. El Docente 2, a diferencia de los otros, dictó explícitamente algunas reglas de derivación y todos sus comentarios. Los docentes han usado diferentes notaciones simbólicas para la derivada. El Docente 2 siempre ha optado por utilizar f’(x) o [f(x)]’ (que hemos denotado como RS2). El Docente 3 alternó la notación anterior con la de operador (RS1). El Docente 1 prefirió la notación y’ o y’(a) (RS3), y es el único docente que utilizó la representación gráfica, al representar funciones genéricas constantes y afines para justificar su derivada utilizando la definición geométrica del concepto.

En resumen, el Docente 1 realizó la exposición más completa de este foco conceptual, con un mayor número de enunciados, de comentarios y de procesos de justificación. Debido a la cantidad similar de tiempo que emplearon los tres docentes en exponer la teoría de este tópico, este hecho muestra un ritmo global de exposición superior en el Docente 1. El desarrollo de este docente ha mezclado una visión de la aplicación práctica de las reglas, al tratar la derivada de operaciones con funciones, con otra visión más centrada en la fundamentación y la sistematización de reglas en la parte sobre funciones elementales, utilizando la demostración como un proceso para obtener las reglas de derivación. El Docente 2 hizo un desarrollo limitado en número de enunciados, pero enfatizó su aplicación a través de abundantes ejemplos de cada tipo. El número de justificaciones de este docente fue reducido, con el problema implícito en todas ellas de la ausencia de construcción de la función derivada. Por último, la Docente 3 llevó a cabo un desarrollo centrado en la exposición de enunciados y en los procesos de aplicación de éstas a través, generalmente, de un ejemplo ilustrativo. No existieron procesos de justificación de las reglas, caracterizándose el desarrollo de esta docente por intentar proporcionar a sus alumnos reglas de aplicación inmediata, tendiendo a evitar el proceso de reconocimiento de estructuras al aplicar reglas.

Transcripciones de los alumnos y relación con el contenido desarrollado por los docentes

Hemos construido el *mapa de elementos y relaciones* asociado al registro de la exposición teórica que ha realizado cada alumno en su cuaderno. Estos mapas tienen la misma estructura que los anteriormente construidos, añadiendo tan sólo el grado de completitud de la transcripción de cada elemento, distinguiendo entre: *transcripción completa* (de ahora en adelante, TC), *transcripción incompleta* (de ahora en adelante, TI) y *ausencia de transcripción* (de ahora en adelante, AT). Además, se ha estudiado la posible presencia de otros elementos añadidos por cada alumno.

La Tabla VII.2 muestra el número de enunciados transcritos por cada alumno, añadiendo en las dos últimas filas la frecuencia y el porcentaje de transcripción globales por aula. La tabla muestra un comportamiento muy homogéneo en los alumnos de los Docentes 2 y 3, que transcriben los enunciados casi en su totalidad salvo algunos casos especiales (como los casos particulares de composición de funciones o una regla con varias expresiones para la derivada). Por el contrario, el porcentaje de transcripción es menor y más variable entre los alumnos del Docente 1. En el aula de este docente encontramos desarrollos completos (A6) frente a otros muy insuficientes (A2, A7 y A8), y una transcripción muy escasa de las técnicas de derivación (sólo A6 transcribe la de la función recíproca).

Aula **Docente 1** Enunciados: 23				Aula **Docente 2** Enunciados: 14				Aula **Docente 3** Enunciados: 21			
Nº Est.	Enu. TC	Enu. TI	Enu. AT	Nº Est.	Enu. TC	Enu. TI	Enu. AT	Nº Est.	Enu. TC	Enu. TI	Enu. AT
A1	8	1	14	A11	12	0	2	A31	21	0	0
A2	3	0	20	A12	10	0	4	A32	21	0	0
A3	13	0	10	A13	12	0	2	A33	21	0	0
A4	12	1	10	A14	13	0	1	A34	19	0	2
A6	23	0	0	A15	10	0	4	A35	17	0	4
A7	0	0	23	A16	12	0	2	A36	20	0	1
A8	3	1	19	A17	14	0	0	A37	18	1	2
A9	19	0	4					A38	20	0	1
A10	16	3	4					A39	17	0	4
								A41	19	0	2
Frec	97	6	104	Frec	83	0	15	Frec	193	1	16
%	46’9	2’9	50’2	%	84’7	0	15’3	%	91’9	0’5	7’6

Tabla VII.2. Número de enunciados (Enu.) transcritos por estudiante (Est.) y aula.

Además, existen algunas transcripciones incompletas de enunciado y justificación, como la mostrada en la Figura VII.5, en la que no se escribe la construcción de la función derivada ni la institucionalización de la regla. Esto puede ser reflejo de dificultades para percibir la diferencia entre derivada en un punto y función derivada.

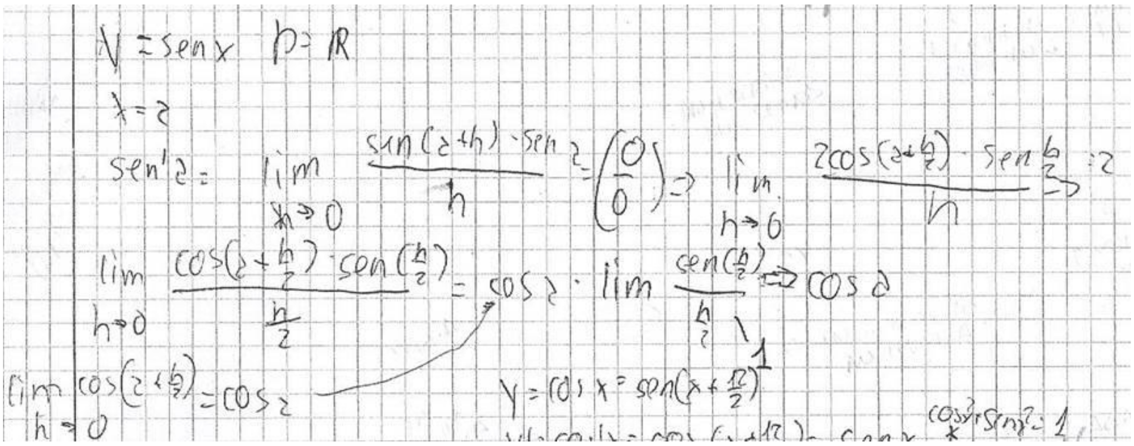


Figura VII.5. Transcripción incompleta (enunciado y justificación) de la derivada de la función seno (A10).

La Tabla VII.3 muestra el número de ejemplos transcritos por cada alumno y los datos globales por aula, utilizando una estructura similar a la de la Tabla VII.2.

Aula **Docente 1** Ejemplos: 17				Aula **Docente 2** Ejemplos: 34				Aula **Docente 3** Ejemplos: 14			
Nº Est.	Eje. TC	Ej. TI	Ej. AT	Nº Est.	Eje. TC	Eje. TI	Eje. AT	Nº Est.	Eje. TC	Eje. TI	Eje. AT
A1	3	0	14	A11	20	0	14	A31	14	0	0
A2	2	0	15	A12	21	0	13	A32	13	1	0
A3	5	2	10	A13	34	0	0	A33	14	0	0
A4	5	1	11	A14	32	0	2	A34	14	0	0
A6	16	0	1	A15	16	0	18	A35	4	0	10
A7	2	1	14	A16	27	0	7	A36	14	0	0
A8	0	1	16	A17	34	0	0	A37	10	2	2
A9	4	2	11					A38	14	0	0
A10	7	0	10					A39	13	0	1
								A41	10	0	4
Frec	44	7	102	Frec	184	0	54	Frec	120	3	17
%	28’8	4’6	66’7	%	77’3	0	22’7	%	85’7	2’1	12’1

Tabla VII.3. Número de ejemplos (Eje.) transcritos por estudiante (Est.) y aula.

La Tabla VII.3 evidencia la mayor diferencia existente entre los porcentajes globales de transcripción en las clases de los Docentes 2 y 3 con respecto a la del Docente 1, aunque los porcentajes de transcripción de los ejemplos son algo menores en las tres aulas, y se detecta una mayor diversidad entre los estudiantes participantes.

El análisis cruzado de las transcripciones ha permitido detectar diferentes patrones de comportamiento en los alumnos al transcribir las reglas ejemplificadas. En cada una, consideramos que el estudiante puede tener un comportamiento *exhaustivo*, si transcribe tanto la regla como todos sus ejemplos ilustrativos (sean uno o varios); un comportamiento *selectivo-estratégico*, si recoge al menos uno pero no todos los ejemplos expuestos; o puede haber una *ausencia de relaciones* de aplicación asociadas a la regla, si se transcribe la regla sin tomar ninguno de los ejemplos ilustrativos, un ejemplo sin la regla que pretende ilustrar o no se transcribe ninguno. Con esta diferenciación, y según el comportamiento predominante en cada alumno, hemos encontrado varios perfiles de comportamiento entre el alumnado:

- Ocho alumnos han mostrado un *comportamiento exhaustivo siempre*, registrando todas las reglas y sus ejemplos ilustrativos, es decir, todos los procesos de aplicación. Son A6, A17, A31, A32, A33, A34, A36 y A38, una mayoría de ellos pertenecientes al aula del Docente 3.

- Cuatro alumnos han exhibido un *comportamiento exhaustivo en la mayoría de los casos*, registrando la mayoría de procesos de aplicación salvo alguno puntual. Son A13, A14, A16 y A39. La falta de exhaustividad se concentra en la regla para derivar una suma de funciones (donde se da un comportamiento selectivo-estratégico, quizá por su sencillez) o en alguna regla “particular” de composición de funciones, en la que se registra el ejemplo sin la regla.

- Cinco alumnos tuvieron un *comportamiento exhaustivo en las reglas ilustradas con un ejemplo y selectivo-estratégico en las reglas ilustradas con varios ejemplos.* Las relaciones de aplicación abarcan todos los elementos así relacionados. Son A11, A12, A15, A37 y A41, siendo más marcado en los alumnos del Docente 2 (que expuso más ejemplos por regla). La Figura VII.6 contrasta el comportamiento selectivo-estratégico de un alumno en una regla profusamente ejemplificada (cuatro ejemplos) frente a un alumno exhaustivo.

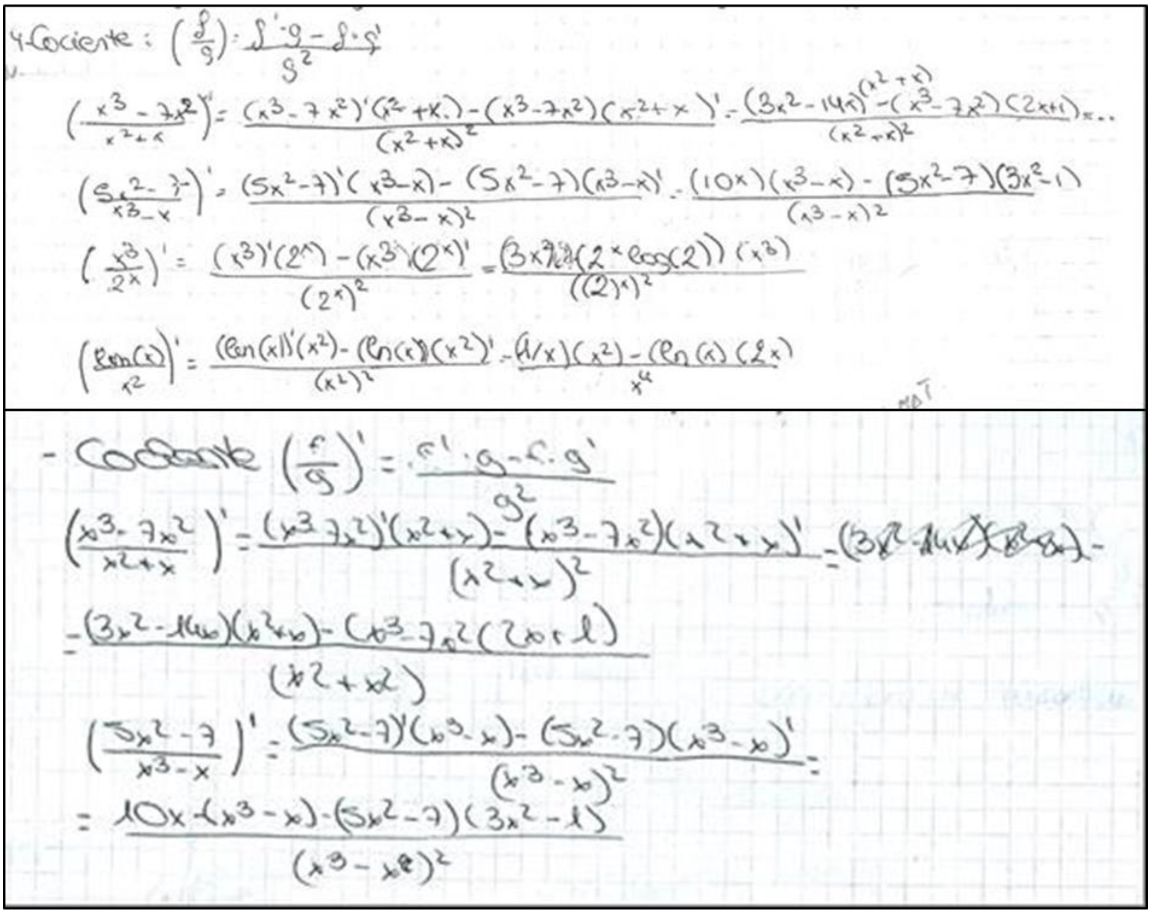


Figura VII.6. Estudiante exhaustivo (A14, arriba) y selectivo-estratégico (A11, abajo) para la misma regla (cociente de funciones).

- Un alumno, A3, tuvo un *comportamiento variable* (exhaustivo, selectivo-estratégico, transcripción sólo de la regla), con una presencia parcial de relaciones asociadas a procesos de aplicación.

- Tres estudiantes, A9, A10 y A35, fueron mayoritariamente *selectivo-estratégicos en las reglas ilustradas con varios ejemplos, pero no ejemplifican las reglas ilustradas con un único ejemplo*. Así, existe en ellos una baja presencia de procesos de aplicación. Pudiera ser que, para estos alumnos, que un docente realice más de un ejemplo de aplicación de una regla sea interpretado como una “marca de importancia” de ésta, y, en ese caso, sí decidan registrar alguno de los ejemplos desarrollados. La Figura VII.7 muestra este comportamiento en A9. En este caso, el Docente 1 expuso dos ejemplos para la derivada del cociente y uno para las restantes (ver Figura VII.2).

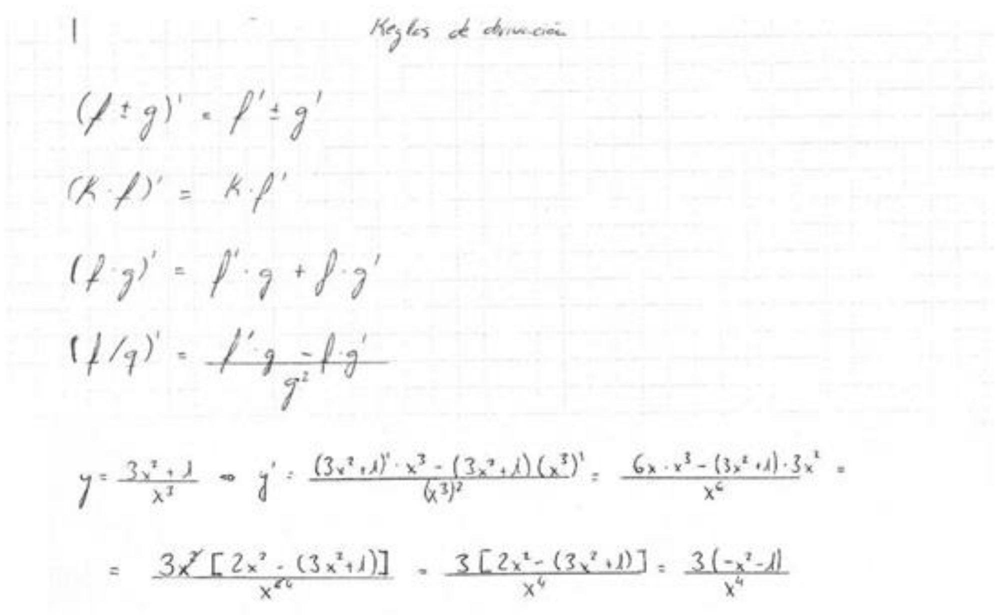


Figura VII.7. Escaneo de A9 donde se muestra el comportamiento indicado.

- Los cinco alumnos restantes (todos del Docente 1) recogieron un *número muy reducido o inexistente de procesos de aplicación*. A1, A2 y A4 fluctúan entre el registro de la regla sin ejemplos, del ejemplo sin la regla o no registran nada. La Figura VII.8 muestra un extracto de A1, donde se evidencia el registro de varios ejemplos sin copiar la regla. Por último, los alumnos A7 y A8 no anotaron ni reglas ni ejemplos.

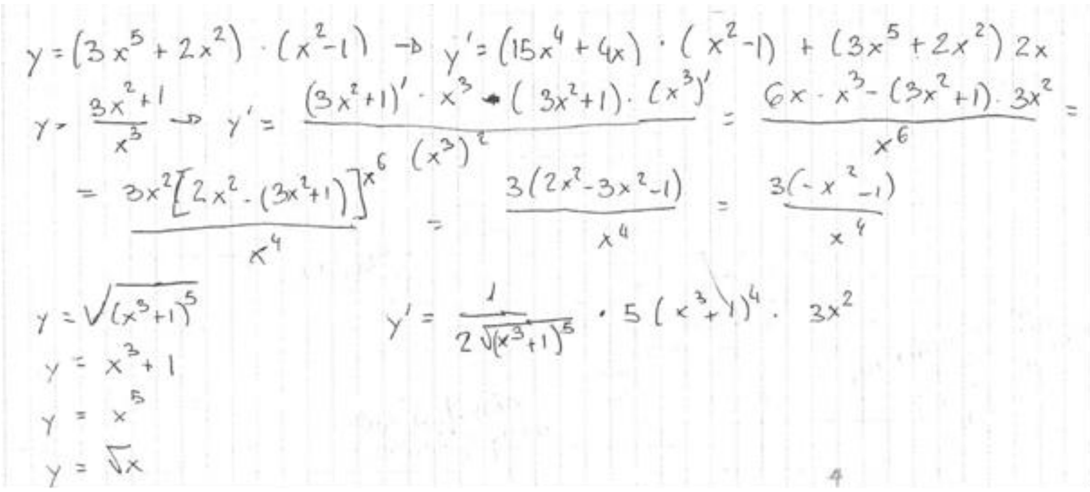


Figura VII.8. Registro de ejemplos sin tomar la regla ilustrada (A1).

La Tabla VII.4, similar a las Tablas VII.2 y VII.3, muestra el número de justificaciones transcritas por cada alumno de las dos aulas en que han existido demostraciones: las aulas de los Docentes 1 y 2. Se muestran los datos por alumno y los totales por aula.

Aula **Docente 1** Justificaciones: 11				Aula **Docente 2** Justificaciones: 3			
Nº Est.	Just. TC	Just. TI	Just. AT	Nº Est.	Just. TC	Just. TI	Just. AT
A1	4	2	5	A11	0	1	2
A2	1	0	10	A12	1	0	2
A3	3	0	8	A13	1	1	1
A4	7	1	3	A14	1	1	1
A6	9	2	0	A15	1	0	2
A7	0	0	11	A16	1	0	2
A8	1	1	9	A17	1	1	1
A9	0	2	9				
A10	5	5	1				
Frec	30	13	56	Frec	6	4	11
%	30’3	13’1	56’6	%	28’6	19’0	52’4

Tabla VII.4. Número de justificaciones (Just.) transcritas por estudiante (Est.) y aula.

Los porcentajes globales de transcripción en ambas aulas son similares y son bajos. Una de las razones de este bajo porcentaje puede ser que estas justificaciones no formen parte de las *expectativas de aprendizaje* (Lupiáñez, 2009) establecidas por los docentes para sus alumnos. También encontramos un número apreciable de transcripciones incompletas, lo que puede estar provocado por la mayor complejidad para simultanear el seguimiento del proceso y su registro en el cuaderno, además de por la problemática ya comentada sobre las derivadas puntual y global.

De nuevo, se presenta mayor variabilidad en el aula del Docente 1, y más homogeneidad entre los alumnos del Docente 2, aunque en esta clase el número de justificaciones sea poco significativo. Analizamos más en profundidad los comportamientos de los estudiantes del Docente 1, comparando su conducta al transcribir justificaciones y ejemplos.

En el caso del estudiante A6, se refuerza su carácter exhaustivo, al transcribir todos los procesos de justificación. Sólo en dos casos se considera que lo hace de forma parcial, al no tomar la caracterización de la recta tangente utilizada para demostrar la derivada de las funciones constante y afín. Los estudiantes A4 y A10 registraron gran parte de los procesos de justificación y las relaciones asociadas a ellos, omitiendo sólo unas pocas reglas. Este hecho contrasta con su transcripción mucho más incompleta de los procesos de aplicación. En particular, A4 presentó dos comportamientos muy distintos, que pueden verse en el mapa de elementos y relaciones construido a partir de su transcripción, y que se muestra en la Figura VII.9. El alumno A4 transcribió y justificó la mayoría de las reglas de derivación de funciones elementales; pero no transcribió las reglas para derivar operaciones con funciones, tomando sólo algunos ejemplos aislados, que provocan inconsistencias en su desarrollo.

El alumno A9 se caracterizó por transcribir las reglas sin que apenas registre sus demostraciones (muy baja incidencia de procesos de justificación), al igual que sucedía con los procesos de aplicación. Así, A9 tiene un cuaderno cuyo contenido, en este tópico, se asemeja a una colección o repositorio incompleto de reglas expuestas. El alumno A1 presenta un comportamiento heterogéneo: registró reglas justificadas, reglas sin justificar, omitió reglas e, incluso, encontramos dos transcripciones inacabadas de demostraciones sin que se escribiera la regla.

Tres estudiantes, A2, A3 y A8, transcribieron un número reducido de reglas justificadas, pero casi siempre con su demostración. Esta incompletitud provoca inconsistencias en los pocos procesos de justificación recogidos, al faltar reglas previas que son utilizadas en el transcurso de esas demostraciones. La Figura VII.10 muestra este hecho en el mapa de elementos y relaciones de A3. El estudiante A3, al contrario que A4, parece preferir anotar procesos de aplicación frente a justificaciones, lo cual se refrenda al comparar sus mapas (Figuras VII.9 y VII.10). Las transcripciones de A2, A7 y A8 fueron muy incompletas en todo tipo de elementos, registrando sólo retazos aislados.

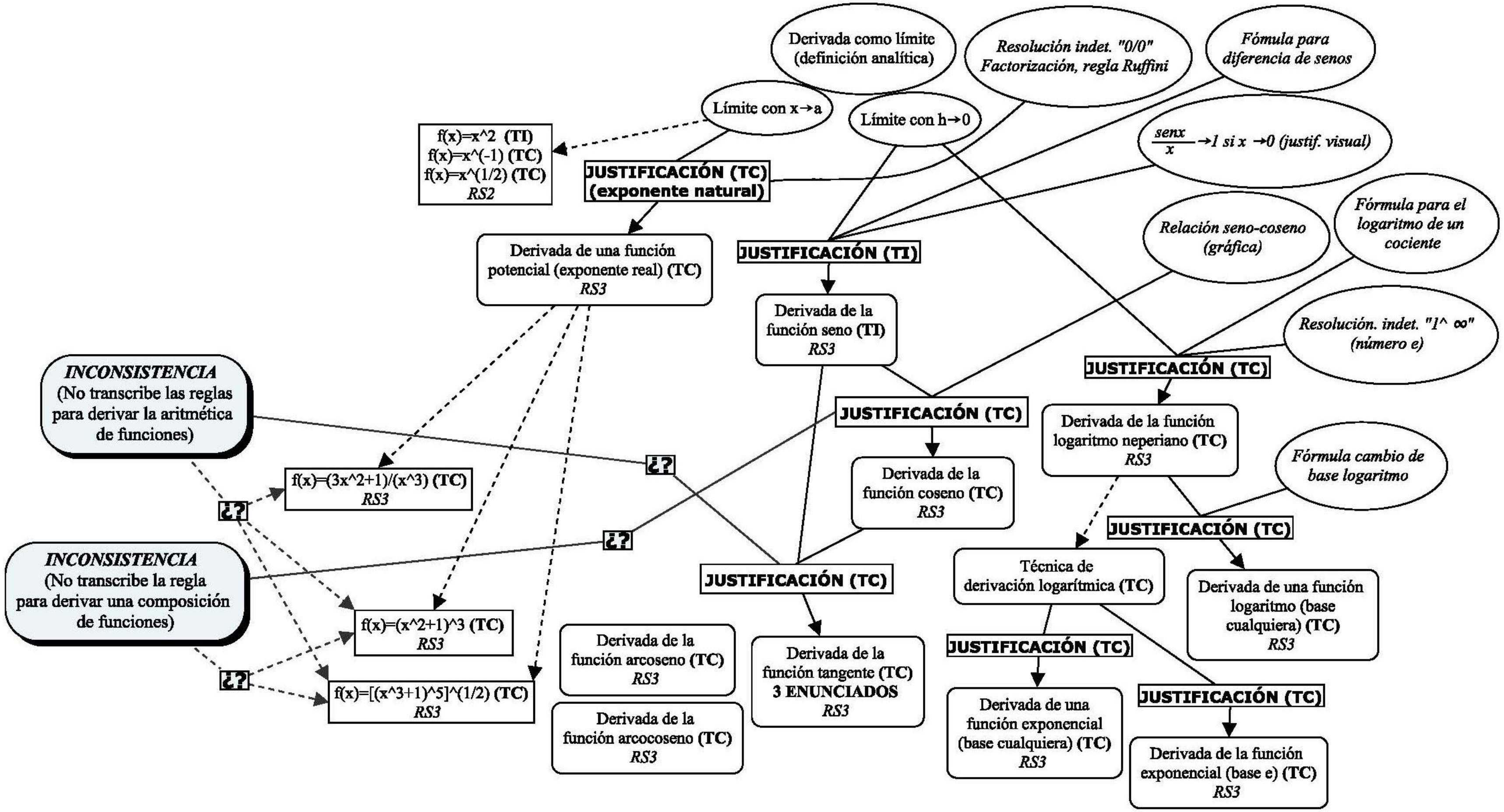


Figura VII.9. Mapa conceptual de elementos y relaciones asociado a la transcripción de A4 (Leyenda en Figura VII.1).

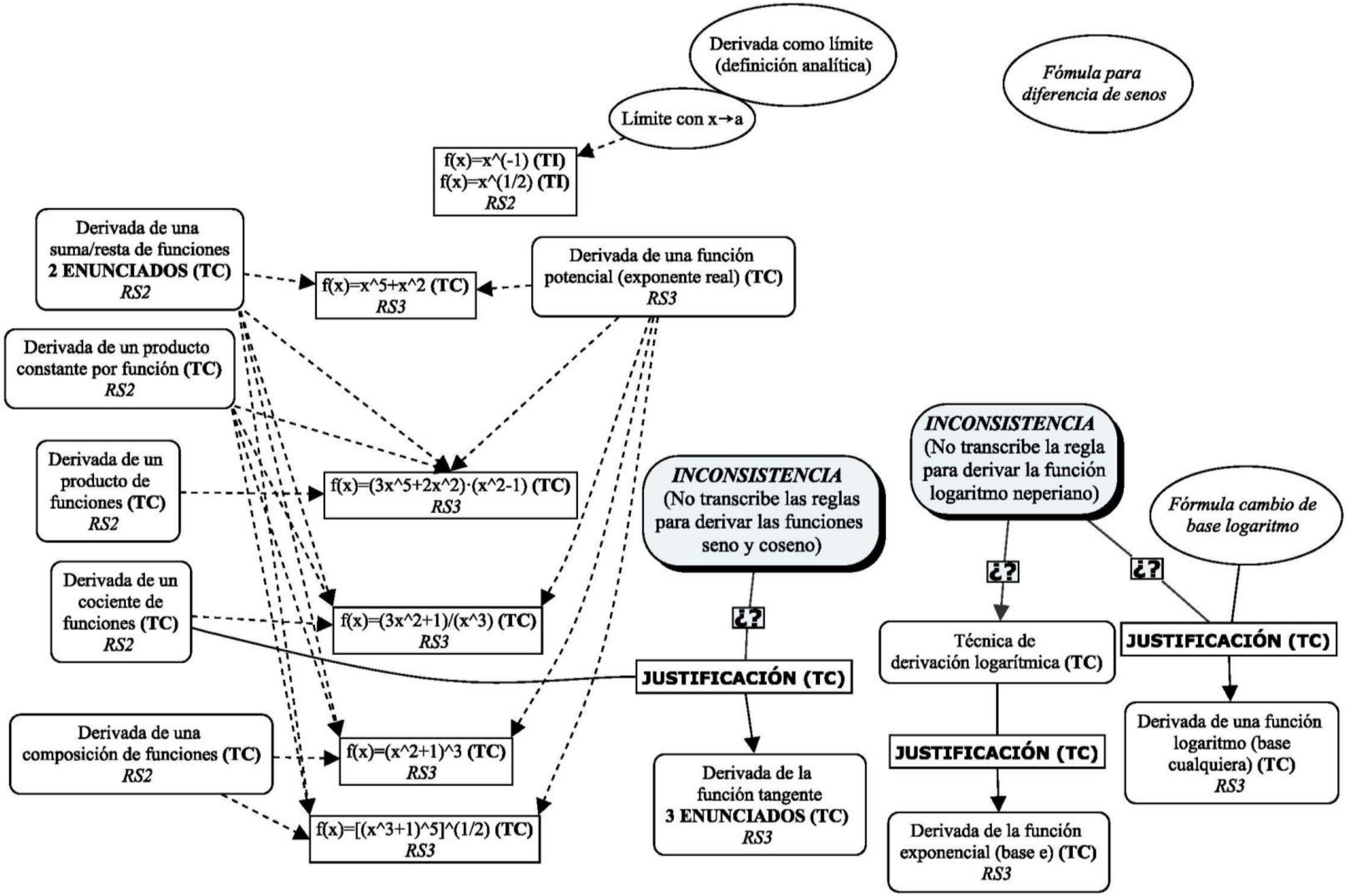


Figura VII.10. Mapa conceptual de elementos y relaciones asociado a la transcripción de A3 (Leyenda en Figura VII.1).

El dictado verbal de los comentarios por el Docente 2 ha provocado una diferencia muy acusada en la transcripción de estos elementos. Mientras que existió una anotación total de estos elementos en todos los alumnos del Docente 2, la escritura de estos elementos es casi nula entre los estudiantes de las otras dos aulas. En particular, parece que los alumnos no dan importancia a los comentarios que tienen por objetivo relacionar reglas o indicar la posibilidad de aplicar diferentes reglas para derivar una función, anotaciones que favorecerían un aprendizaje más relacional y menos memorístico de dichas reglas. Su transcripción es casi inexistente. En sentido contrario, la alumna A33 escribió una aclaración propia de tipo simbólico (Figura VII.11) en la que pretende relacionar dos reglas de derivación que fueron tratadas de forma independiente en el aula: las reglas para derivar la función identidad y cualquier función potencial.

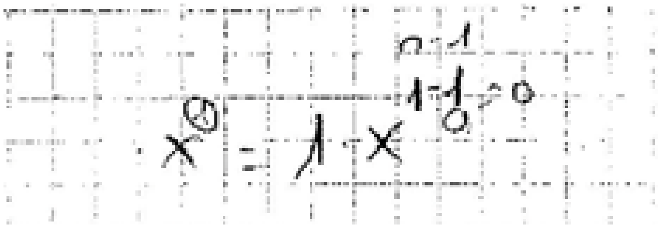


Figura VII.11. Comentario de carácter relacional, propio de la alumna A33.

No se ha encontrado ninguna anotación personal más de tipo relacional. Sí que existieron *aclaraciones o ayudas propias* en algunos alumnos que apoyaban la transcripción de elementos del contenido teórico. Hemos encontrado ayudas de tipo simbólico al desarrollar cálculos de límites en justificaciones, generalmente para indicar explícitamente la tendencia de alguna función, muy abundantes en el caso del alumno A10 (véase la Figura VII.5). Únicamente A6 añadió una aclaración de tipo verbal, recordando la caracterización de la derivada utilizada al justificar la derivada de las funciones constante y afín: “Derivada: Pendiente de las rectas tangentes de f(x)”.

En los ejemplos también existieron algunas aclaraciones, con dos propósitos principales. Uno de ellos fue hacer explícita cuál es la regla de derivación que se está aplicando, a través de flechas, asteriscos o números. En particular, siete alumnos suelen indicar explícitamente la sustracción de una unidad en el exponente al aplicar la regla para derivar una función potencial. El otro propósito fue hacer explícita la derivada de cada una de las funciones que aparecen al derivar operaciones con funciones. Los Docentes 1 y 3 lo detallaron en algunos casos, pero hay cuatro alumnas del Docente 3 (A31, A33, A34 y A38) que generalizaron este hábito en las notas tomadas, añadiendo incluso una aclaración verbal: “(5)’=0 porque es una constante". Tres alumnos de Docente 1 realizaron aclaraciones al aplicar la regla de la cadena: diagramas con flechas detallando la composición (A10) o composiciones parciales obteniendo cada uno de los factores cuyo producto es la derivada de la composición (A6 y A9).

En relación a los *sistemas de representación*, casi todos los alumnos optaron por registrar los enunciados, ejemplos y justificaciones de forma simbólica, transcribiendo el simbolismo escrito por los profesores en la pizarra. La transcripción verbal de reglas por los alumnos sólo se produjo en los alumnos del Docente 2, en aquellas que dictó explícitamente, aunque algún alumno sustituyó palabras por símbolos o por abreviaturas (ver Figura VII.12, con un escaneo de A13). En las otras dos aulas únicamente un alumno, A35, transcribió de forma verbal una de las reglas.

Los alumnos tampoco escribieron verbalmente el tipo de función u operación cuya derivada se presentaba. Este comportamiento fue esporádico, a excepción de tres alumnos en los que fue más habitual (A9, A33 y A35).

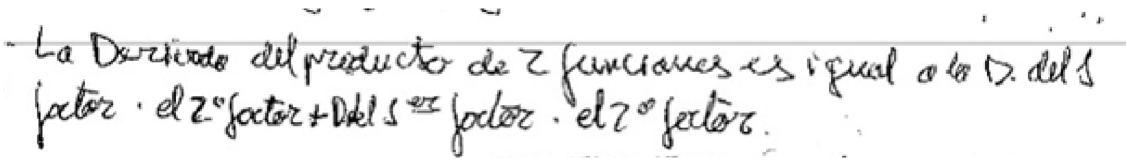

- La Derivada del producto de 2 funciones es igual a la D. del 1 factor · el 2º factor + D del 1er factor · el 2º factor.

Figura VII.12. Transcripción verbal, errónea, de una regla por parte de A13.

Tan sólo el Docente 1 hizo uso en su presentación teórica de representaciones gráficas, en tres justificaciones. El estudiante A6 fue el único que recogió todas esas representaciones, mientras que A10 anotó únicamente dos (las asociadas a las funciones constante y afín). No se ha encontrado ninguna representación gráfica en el resto de alumnos participantes, por lo que la incidencia de este tipo de representaciones también ha sido muy reducida o nula.

VII.1.3. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados obtenidos en este análisis específico evidencian la existencia de diferencias significativas entre los apuntes de un estudiante y otro, incluso a pesar de las similitudes metodológicas existentes entre los tres profesores, con un enfoque "tradicional", e incluso dentro de los estudiantes de una misma clase. Es cierto que existió algún matiz metodológico, como el dictado verbal utilizado por el Docente 2 en algunos momentos, que provocó algunas diferencias importantes. También podría apelarse a posibles diferencias que se deriven de la existencia de diferentes niveles de atención entre el alumnado. Pero, como verbalizan muchos de los alumnos participantes en las entrevistas (Capítulo VI), los alumnos toman decisiones propias y conscientes al realizar las transcripciones, que están influidas en muchos casos por la naturaleza del contenido matemático presentado, por la metodología seguida por el docente durante el curso y por el medio de exposición utilizado. Mostraremos en este subapartado varias evidencias en este sentido.

Todos los antecedentes leídos sobre toma de apuntes que pretendían estudiar los diferentes modos de tomar apuntes existentes entre el alumnado han reportado la presencia de alumnos cuyo objetivo es el de "grabar" fielmente la clase, copiando todo lo expuesto. En este análisis específico se han detectado ocho estudiantes participantes (alrededor de un 30%) que han mostrado un comportamiento *copista* o *exhaustivo* al tomar los enunciados de las reglas y técnicas de derivación y sus ejemplos de aplicación. En las tres aulas ha existido algún alumno con este comportamiento, aunque es mayoritario entre los alumnos del aula del Docente 3 (seis de diez). El análisis del contenido expuesto por el docente puede ayudar a explicar este hecho, puesto que esta profesora basaba su exposición en una colección de reglas acompañadas de ejemplos de aplicación directa (ver Figura VII.4). Sin embargo, la exhaustividad de estos alumnos no se mantiene al considerar las justificaciones y, sobre todo, los comentarios (a excepción del aula del Docente 2, por el matiz metodológico del dictado). Tan sólo A38 tomó el único comentario expuesto por la Docente 3; mientras que A6, que anota todos los enunciados, ejemplos y justificaciones, sólo transcribe uno de los seis comentarios del Docente 1.

En las entrevistas, y como ya hemos comentado en el capítulo VI, algunos alumnos indicaron que intentaban tener un comportamiento *copista* o *exhaustivo*, y que pretendían anotar todo lo hecho en clase. Sin embargo, en muchos alumnos emergieron algunas marcas, en presentaciones teóricas de este tipo, que les hacían destacar y valorar como más importantes algunos aspectos o contenidos frente a otros. En particular, son frecuentes las alusiones a la mayor importancia dada al registro de ejemplos y de fórmulas de aplicación, y también al contenido escrito en la pizarra, destacando la escritura en este medio frente al discurso oral del docente. Así, en ocasiones, parecen tener en cuenta sólo el medio de exposición y no la naturaleza del contenido expuesto, como se deduce de esta frase de A3, compartida por otros alumnos: "A algo que el profesor dé mucha importancia, lo escribe en la pizarra; si no le da tanta, pues lo dice oralmente".

Nogueira (2005) señala la disyuntiva de los estudiantes inexpertos en la toma de apuntes al tener que decidir entre sistemas semióticos simultáneos, como son la escritura en la pizarra y el discurso oral, indicando cómo prevalece generalmente el primero. También indica la dificultad para que los alumnos identifiquen conexiones orales entre elementos que sirven para complementar la escritura en la pizarra. Ambos comportamientos se reafirman en esta investigación específica, donde se anotan mayoritaria y simbólicamente tanto las fórmulas como los ejemplos de la pizarra, siendo apenas recogidos los comentarios orales destinados a relacionar diferentes reglas entre sí o a indicar la posibilidad de aplicar diferentes reglas de derivación a una misma función. Las justificaciones, que permiten tanto relacionar enunciados como sistematizar de forma lógica su desarrollo, son generalmente poco transcritas. Todo ello refleja una visión de las matemáticas en la que prima una comprensión instrumental frente a una relacional (en términos de Skemp, 1976) y una concepción operacional (Sfard, 1991). Esta visión fue reforzada a través de una evaluación por parte de los docentes de los alumnos participantes que, en muchos casos, se basó principalmente en aspectos de carácter procedimental, basados en relaciones de aplicación.

Así, los apuntes tomados por los alumnos sobre este foco conceptual presentan características similares a las expuestas por Shield y Galbraith (1998) en su estudio sobre la escritura expositiva de los alumnos: predominio del aspecto algorítmico de las matemáticas y una baja presencia de justificaciones, observaciones o explicaciones sobre la utilización o no de reglas y procedimientos. Es cierto que algunos estudiantes acompañaron su transcripción con anotaciones personales que completaron sus apuntes, pero la mayoría de ellas tuvieron un marcado carácter procedimental, siendo ayudas esencialmente de carácter práctico y de apoyo. Estos elementos son destacados en la entrevista por estudiantes como A27, A31, A36 o A38, que buscan con ellos facilitar el estudio a través de la revisión de su cuaderno de clase, que, como hemos visto en el capítulo VI, se mostraba como el instrumento clave para articular dicho estudio (Perfiles 1 y 2, apartado VI.4), tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Tan sólo A33 hizo una anotación con carácter relacional (que se muestra en la Figura VII.11), que supuso, prácticamente, la única muestra en este foco conceptual de escritura propia del dominio privado (en términos de Fried y Amit, 2003) de los estudiantes, con la que la alumna busca reflexionar y externalizar sus pensamientos a través de la escritura en su cuaderno.

El desarrollo más completo del foco conceptual por parte del Docente 1, utilizando un mayor número de enunciados, de justificaciones y de comentarios expuestos, ha dado lugar a comportamientos muy distintos entre sus alumnos, detectándose una amplia gama de perfiles intermedios característicos, más allá de perfiles extremos de tipo "todo" o "nada". Por una parte, dos alumnos (A4 y A10) han optado mayoritariamente por registrar los procesos de justificación frente a los de aplicación, por lo que pueden considerar que los primeros son de mayor importancia, aunque A10 indique en la entrevista que tiende a "copiar todo". El alumno A3 ha mostrado el comportamiento contrario. El estudiante A9 basó su anotación en los enunciados de las reglas, por lo que su transcripción ha resultado una yuxtaposición de reglas inconexas, sin apenas relaciones de aplicación y justificación, y que podría jugar el papel de repositorio de reglas o de resumen teórico. En varios alumnos de los Docentes 2 y 3 se ha detectado otro perfil destacable: estudiantes que anotan al menos un ejemplo en todas las reglas ejemplificadas, pero que no suelen tomar todos cuando se hacen varios.

Apuntamos tres hechos que pueden haber contribuido a las grandes diferencias entre alumnos y la menor transcripción de enunciados detectada en el aula del Docente 1: la utilización de la justificación como un proceso para obtener y, posteriormente, institucionalizar una regla; el desarrollo más completo y con un mayor ritmo por parte de este docente; y la posible dificultad de los estudiantes para distinguir entre los diferentes elementos y procesos matemáticos y su papel (Ibañes y Ortega, 2003). No obstante, son necesarios estudios específicos que clarifiquen la posible influencia de cada uno de estos hechos.

Esos diferentes comportamientos al transcribir los elementos y relaciones dan lugar a inconsistencias en los desarrollos registrados por varios alumnos: ejemplos sin haber anotado la regla que ilustran (que pueden verse en la Figura VII.9) o la ausencia de enunciados que son usados más tarde en demostraciones que se registran (Figura VII.10). A estas inconsistencias se une la frecuente presencia de errores de transcripción (como el mostrado en la Figura VII.12). Ambas circunstancias dificultan el papel del cuaderno como herramienta para ayudar en el estudio y el aprendizaje de los contenidos teóricos. Especialmente en esos alumnos de los Perfiles 1 y 2 (apartado VI.4) en los que todo el estudio se articula en torno al cuaderno, explicando que tiene una mayor proximidad con lo desarrollado y lo realizado por el docente en la clase, postergando el papel del libro de texto.

En resumen, este estudio específico ha evidenciado la presencia de comportamientos muy diferentes en el alumnado al transcribir en sus cuadernos la exposición teórica de un tópico, como el de reglas y técnicas de derivación, que tiene un marcado carácter procedimental. Estos comportamientos son reflejo de las diferentes visiones hacia las matemáticas de los alumnos, el contenido expuesto por el profesor, la forma de exposición y el distinto rol del cuaderno para estudiar la asignatura.

El cuaderno se ha mostrado como una herramienta básica de estudio para muchos alumnos, donde escriben y hacen matemáticas, reflexionan y resuelven problemas, aunque también con un diferente nivel de aceptación de este hecho entre unos y otros. La integración de nuevas tecnologías en el aula puede hacer cambiar el soporte físico de este instrumento, pero no deben eliminarse sus funciones. En este momento de transición hacia una revolución tecnológica en las aulas, estudiar cómo los alumnos elaboran y usan su cuaderno es esencial para plantear transiciones adecuadas. Las nuevas tecnologías fomentan entornos de trabajo más dinámicos y constructivos que una exposición teórica (generalmente unidireccional y con contenido ya construido), lo que provoca la presencia de más puntos posibles de atención para el alumno (profesor, software, compañeros). Esto puede ser un punto importante de conflicto puesto que, como sucedió en Nogueira (2005) y ha sucedido en nuestro estudio, únicamente con dos variables de atención (pizarra y discurso oral del docente), muchos estudiantes tienden a centrar su atención tan sólo en un medio, teniendo poco en cuenta la naturaleza e importancia del contenido presentado. En parte esto puede estar favorecido porque no se hayan dejado momentos entre estas explicaciones destinados a que los alumnos puedan desarrollar una escritura de notas más reflexiva, cuando tengan una mayor comprensión y una visión más completa de lo que se está desarrollando, en lugar de tener que desarrollar esas anotaciones en paralelo y de forma simultánea a las exposiciones del docente en diferentes medios. Algunas investigaciones sobre toma de apuntes indicadas en los antecedentes de la tesis doctoral ya han destacado el efecto positivo de prácticas de ese tipo para conseguir una integración mejor y más reflexiva y elaborada de los contenidos presentados cuando se utilizan diferentes medios para ese propósito.

VII.2. APUNTES DE LOS ESTUDIANTES: ANÁLISIS DE LAS NOTAS TOMADAS EN LA INTRODUCCIÓN INTUITIVA DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Este segundo análisis específico también está centrado en las notas teóricas tomadas por los estudiantes en sus cuadernos. En este caso, el estudio se centra en el tópico de límite de una función, dentro del segundo tema del bloque de análisis matemático. En concreto, se van a analizar las notas tomadas durante la presentación intuitiva del concepto de límite que hace cada uno de los docentes. Consideramos que este primer acercamiento, de naturaleza intuitiva, al concepto de límite tiene una influencia importante en el desarrollo de la comprensión y el aprendizaje del concepto por parte de los estudiantes, como también ponen de manifiesto la revisión de antecedentes (Apartado I.4). Una versión preliminar del análisis presentado en este apartado puede leerse en Arce y Ortega (2015).

Este apartado se divide en tres subapartados. En el primero presentaremos y explicaremos información adicional sobre el desarrollo de este análisis específico. En el segundo se recogen los resultados obtenidos al analizar los datos. Por último, en el tercer subapartado se presenta una discusión de los resultados obtenidos en relación a antecedentes de estudios sobre el concepto de límite y al desarrollo de esta investigación global sobre los cuadernos.

VII.2.1. INFORMACIÓN ADICIONAL SOBRE EL DESARROLLO DEL ANÁLISIS ESPECÍFICO

Como ya hemos mostrado en los antecedentes, existen bastantes estudios en Didáctica de la Matemática centrados en el concepto de límite y en el desarrollo y los problemas de su comprensión por parte de los alumnos. Sin embargo, no hemos encontrado estudios con un enfoque como el que aquí se plantea, relacionado con las líneas abiertas de investigación sobre la escritura en el aula de matemáticas señalados por Pimm (1999, p. 195): ¿Qué les parece a los alumnos digno de anotar (en un contexto determinado)? Este aspecto está relacionado con el último de los objetivos planteados en esta tesis doctoral. En este caso, el contexto es la presentación intuitiva del concepto de límite por parte de los docentes participantes en esta investigación, en la que los alumnos se enfrentan, por primera vez, al concepto de límite.

En los antecedentes ya se comentó la relevancia que puede tener este primer acercamiento intuitivo al concepto de límite en el desarrollo posterior de su aprendizaje, así como los diversos factores asociados que pueden influir en él. En nuestro caso, además, y como han puesto de manifiesto las entrevistas a parte del alumnado participante en esta investigación, las notas tomadas por los alumnos participantes suponen una importante herramienta en su estudio y aprendizaje de las matemáticas, por lo que consideramos de interés el análisis pormenorizado de las mismas. El objetivo general se concreta aquí en los siguientes objetivos específicos:

- Detectar qué elementos son considerados por los alumnos como relevantes en una presentación intuitiva del concepto de límite, basándonos en su decisión de anotarlos o no en sus cuadernos.

- Analizar y clasificar qué anotaciones o marcas relacionadas con el significado del concepto de límite son registradas por los alumnos, considerando registros verbales, simbólicos o gráficos.

- Reflexionar sobre algunas situaciones detectadas en los registros de los alumnos que pueden influir en su aprendizaje del concepto de límite.

La presentación intuitiva del concepto de límite forma parte del segundo tema del bloque de análisis matemático, por lo que el contenido a analizar está en las unidades teóricas UT2 de los alumnos. Este tema sí que fue desarrollado en las cuatro aulas participantes. En concreto, disponemos de UT2 en 37 de los alumnos participantes: los alumnos A1 a A4, y A6 a A10[77] en el caso del Docente 1; los estudiantes A11 a A17[77] en el aula del Docente 2; la alumna A19 y los estudiantes A21 a A29[77] en el aula Científico-Tecnológica de la Docente 3 y, por último, los estudiantes A31 a A39 y A41[77] en el aula de Ciencias Sociales de la Docente 3.

Para realizar este análisis detallado de las notas teóricas vamos a utilizar el marco propuesto por Gómez (2007) y Rico (2012) para analizar el significado de un concepto matemático escolar[78], quienes distinguían tres dimensiones para analizar este significado: la *estructura conceptual*, la *fenomenología* y los *sistemas de representación*. Debido a las características de la presentación realizada por los docentes, que explicamos en este mismo subapartado, el estudio específico va a centrarse en los aspectos de la estructura conceptual que los estudiantes deciden anotar, así como en los sistemas de representación que utilizan para ello.

Es claro que las notas de los alumnos no nos permiten inferir una comprensión real de lo escrito, puesto que los alumnos pueden anotar sin comprender. No obstante, para caracterizar el nivel de desarrollo del concepto de límite que pueden reflejar esas anotaciones, se han tomado como referencia las descomposiciones genéticas (de ahora en adelante, DG) propuestas por Cottrill *et al*. (1996) y Valls *et al*. (2011), que describen cómo puede desarrollarse la comprensión del concepto de límite en el alumnado. Se recuerdan y comparan en la Tabla VII.5 las dos DG, que ya fueron presentadas en los antecedentes (apartado I.4).

[77] De los alumnos A5, A18, A20 y A40 únicamente disponemos de la parte correspondiente al primer tema, funciones elementales.

[78] Este marco sobre el significado de un concepto matemático escolar fue expuesto en el subapartado III.3.1 de esta tesis doctoral.

DG de Cottrill *et al*. (1996)	**DG de Valls *et al*. (2011)**
1. Acción de evaluar *f* en un punto	
2. Acción de evaluar *f* en varios puntos que se aproximan a *a* **3.** Construcción del esquema de coordinación: d. Proceso en el que *x* se aproxima a *a* e. Proceso en el que *y* se aproxima a *L* f. Coordinación de 3ª. y 3b. vía *f*	**2.** Idea de aproximación en el dominio y en el rango: c. Proceso en el que *x* se aproxima a *a* d. Proceso en el que *f(x)* se aproxima a *L* **3.** Coordinación en la concepción dinámica vía *f*: cuando *x* se aproxima a *a*, sus imágenes *f(x)* se aproximan a *L*
4. Encapsulación de 3.: objeto límite **5.** Reconstrucción de 3c. en términos de intervalos y desigualdades	**4.** Coordinación en la concepción métrica: encontrar en cada caso un *x* *suficientemente cerca* de *a* tal que el valor de *f(x)* sea lo *suficientemente próximo* a *L*
6. Cuantificación de 5.: obtención de definición ε-δ **7.** Aplicación de la definición ε-δ	**5.** Consciencia sobre la existencia del límite *L*: escritura simbólica

Tabla VII.5. Descomposiciones genéticas para el concepto de límite de una función *f* en un punto x=*a.*

Es importante tener presente la diferencia entre los términos *aproximar* y *tender.* La sucesión 1, 1’9, 1’99, 1’999,…, se aproxima a 3; pero no tiende a 3, sino que tiende a 2. El concepto de tendencia debe entenderse como una aproximación que es capaz de mejorar cualquier otra (Blázquez y Ortega, 2002). La revisión de las dos DG que se presentan en la Tabla VII.5 muestra la utilización del término “aproximaciones” en la concepción dinámica del concepto de límite. Sin embargo, mientras que la DG de Valls *et al*. (2011) sí parece aludir a tendencias en el punto 4 (aproximaciones “suficientemente cercanas”), la de Cottrill *et al*. (1996) conjetura el salto directo a la concepción métrica a través de la cuantificación de las distancias.

Introducción del concepto de límite en las cuatro aulas

Vamos a explicar a continuación, de forma breve, cuáles fueron las características propias de la introducción del concepto de límite que realizó cada profesor en cada una de las cuatro aulas participantes en esta investigación. En todas las aulas, las presentaciones de este concepto se extendieron durante una sesión de clase.

En el caso del Docente 1, la presentación del concepto de límite comenzó con una definición general del concepto, de tipo intuitivo y dinámico: “A lo que tienden las imágenes de la función, f(x), cuando la variable independiente, x, tiende a algo”, definiendo *tender* como "estar cada vez más cerca de" (por lo que se identifica erróneamente tendencia con aproximación monótona). Tras esto, el docente explicó con detalle la notación simbólica asociada a los límites en un punto (límites laterales) y en el infinito. Durante la exposición se desarrollaron cuatro ejemplos ilustrativos, utilizándose en todos ellos funciones definidas simbólicamente, y añadiéndose en dos la representación gráfica de las mismas.

El Docente 2 dividió en dos partes la presentación del concepto de límite. Primero trató los límites en el infinito y, posteriormente, los límites en un punto. La presentación de los límites en el infinito se hizo a través de siete ejemplos. En cada uno de ellos se utilizó una función diferente y definida de forma gráfica, escribiendo simbólicamente en el resultado y explicándolo verbalmente. Se desarrollaron ejemplos con tendencias de la x a $+\infty$ y a $-\infty$, con resultados $+\infty$, $-\infty$ y un valor finito en ambos casos. Además, hubo un ejemplo con un límite cuando $x \to +\infty$ que no existía (en una función oscilante). Así, esta introducción tuvo un marcado carácter *ostensivo*, presentándose el concepto de límite a través de ejemplos particulares que sirven como "modelos" del mismo (Lacasta y Wilhelmi, 2010). Además, este docente remarcó la idea de límite infinito cuando se puede superar cualquier cota. Posteriormente, para explicar el concepto de límite en un punto, mostró dos ejemplos en funciones definidas simbólicamente, explicó su cálculo y lo completó con la representación gráfica de cada una de las dos funciones en un entorno del punto.

La presentación del concepto de límite fue similar en las dos aulas del Docente 3. En ambos casos, la profesora partió de una función definida gráficamente. En la Figura VII.13 se muestra la función utilizada en cada aula. A partir de esta función, se presentó el concepto de límite desarrollando seis ejemplos de límites de dicha función. En cada ejemplo se explicó la notación simbólica y el resultado obtenido, a través de descripciones basadas en aproximaciones dinámicas de las variables. Al igual que en el caso del Docente 2, en las dos aulas del Docente 3 se evidenció una presentación *ostensiva* del concepto de límite, repitiéndose la estructura y los "ejemplos modelo" en ambas presentaciones: límite infinito en $+\infty$, límite finito en $-\infty$, dos límites en un punto que existen y dos que no (con saltos finito e infinito en el punto).

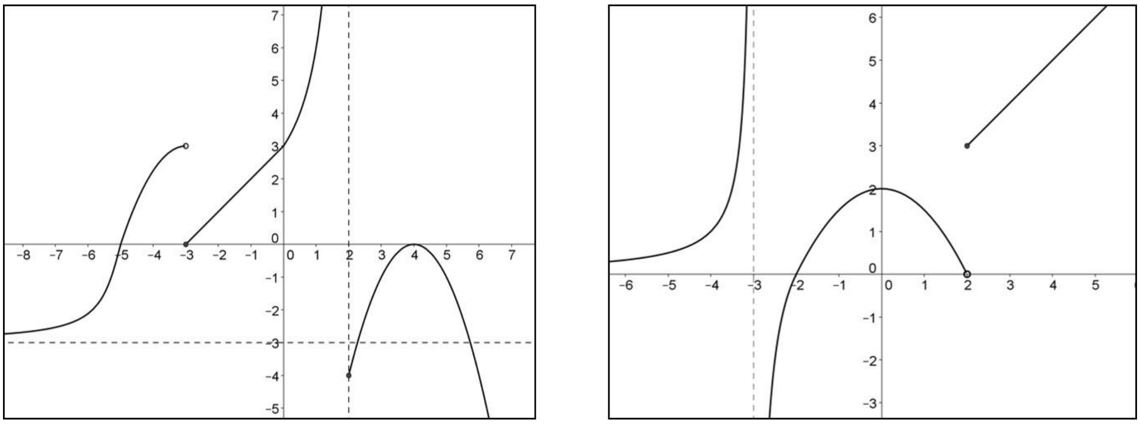


Figura VII.13. Funciones usadas por el Docente 3 para introducir el concepto de límite. Izda.: Aula C-T, límites en $\pm\infty$, 0, -5, 3 y 2. Dcha.: Aula CCSS, límites en $\pm\infty$, -1, -6, 2 y 3.

Como aspectos comunes de interés a los tres docentes, es necesario destacar que ningún profesor utilizó funciones definidas numéricamente en esta introducción, y tampoco se recurrió a ninguna situación que diera origen al concepto o que le dotara de sentido (es decir, *fenomenología* en el sentido de Rico, 2012). El resto del tema se dedicó mayoritariamente a un cálculo de límites (resolución de indeterminaciones) sin apenas referencias al significado del concepto de límite.

Ejemplo de análisis específico de las anotaciones tomadas por los alumnos en la presentación del concepto de límite

Las notas tomadas por cada alumno durante la presentación del concepto de límite están dentro de la unidad de registro UT2. Estas notas han sido reanalizadas, utilizando como base los marcos teóricos antes indicados (marco de significado de un concepto matemático escolar y las dos DG del concepto de límite).

El registro tomado por cada estudiante durante la presentación ha sido dividido en segmentos de análisis, que llamaremos *partes* de la presentación. Ejemplos de partes pueden ser cada uno de los ejemplos ilustrativos expuestos por cada profesor, las definiciones descriptivas sobre el concepto de límite o las explicaciones asociadas a la notación simbólica. Ejemplificamos el análisis realizado mostrando el mismo en un fragmento de lo anotado por la alumna A29. Este fragmento se muestra en la Figura VII.14. En él se registran tres partes (tres de los ejemplos del concepto de límite) de la presentación del Docente 3 en el aula Científico-Tecnológica.

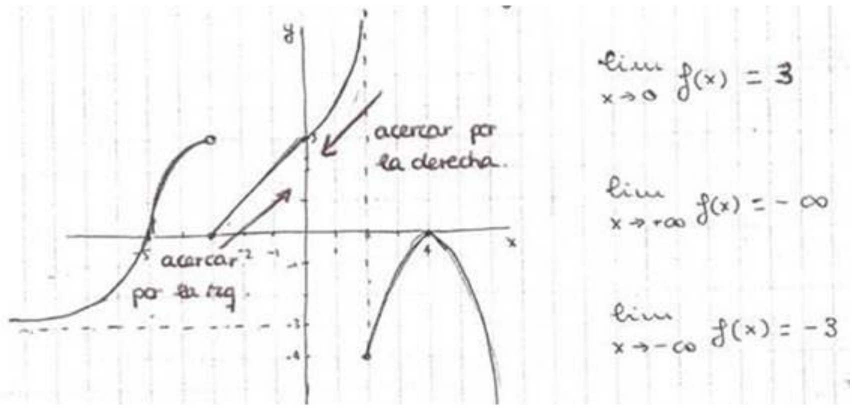


Figura VII.14. Registro de A29 con tres partes de la presentación (tres ejemplos).

Primero hemos estudiado qué partes ha decidido registrar cada estudiante y qué sistemas de representación utiliza para ello. En este caso, A29 toma la representación gráfica de la función, que es común a todos los ejemplos, la representación simbólica de los tres límites y únicamente hay anotaciones verbales en uno de los tres ejemplos: el límite cuando $x \to 0$.

Posteriormente, se han analizado qué aspectos de la estructura conceptual del concepto de límite han quedado registrados por el alumno en sus notas, tomando como referencia las DG de la Tabla VII.5 para estudiar su nivel de desarrollo. En este fragmento, en los límites cuando $x \to \pm\infty$ no existen anotaciones relacionadas con la estructura conceptual del concepto de límite, únicamente la notación simbólica y una marca en la gráfica sobre la existencia de asíntota horizontal. Consideramos que sí que se han registrado aspectos de la estructura conceptual en el límite cuando $x \to 0$. Las anotaciones verbales tomadas (“acercar por la izquierda/derecha”) muestran un proceso dinámico de aproximación en la variable independiente (punto 3ª. en la DG de Cottrill *et al*., 1996), aunque sin especificar verbalmente a qué valor, y sin mencionar la variable dependiente. Estas notas se han complementado con dos marcas en la representación gráfica, dos flechas hacia x=0, que pudieran indicar una aproximación recorriendo la gráfica de la función, sin explicitarse la aproximación en cada variable y tampoco su coordinación para obtener el valor del límite.

Los resultados de este análisis se han complementado con las entrevistas a varias parejas de alumnos participantes en la investigación global sobre los cuadernos (capítulo VI de la tesis doctoral).

VII.2.2. RESULTADOS OBTENIDOS EN EL DESARROLLO DEL ANÁLISIS

Van a presentarse los resultados en tres partes. Primero, vamos a mostrar los resultados asociados a la primera fase del análisis: las partes registradas y los sistemas de representación usados para ello. Posteriormente, se exponen los resultados obtenidos al analizar la estructura conceptual del concepto de límite que ha quedado registrada en las notas, distinguiendo el análisis de las anotaciones verbales y el de las representaciones gráficas. Las representaciones de tipo simbólico se han reducido a la notación del límite y al registro de los resultados de los ejemplos anotados, sin que existieran marcas simbólicas que mostraran aspectos asociados a la estructura conceptual del concepto de límite.

Partes de la presentación registradas y sistemas de representación utilizados

La Tabla VII.6 muestra el número de partes de la presentación de cada docente que fueron anotadas por cada alumno, así como los sistemas de representación utilizados en ese registro. En la primera fila de la tabla se indica el total de partes existente en la presentación del concepto de límite realizada por el docente.

Docente 1 C-T (7P : 7V, 7S, 2G)		**Docente 2 CCSS** (9P : 9V, 9S, 9G)		**Docente 3 C-T** (6P : 6V, 6S, 1G)		**Docente 3 CCSS** (6P : 6V, 6S, 1G)	
Est.	P (V/S/G)	Est.	P (V/S/G)	Est.	P (V/S/G)	Est.	P (V/S/G)
A1	1P (1/1/0)	A11	8P (0/8/6)	A19	6P (1/6/1)	A30	6P (1/6/1)
A2	0P	A12	0P	A21	6P (1/6/1)	A31	6P (4/6/1)
A3	6P (2/6/1)	A13	9P (2/8/9)	A22	6P (5/6/1)	A32	6P (6/6/1)
A4	3P (2/3/0)	A14	9P (1/8/9)	A23	6P (0/6/1)	A33	6P (4/6/1)
A6	7P (2/7/0)	A15	8P (0/8/7)	A24	6P (4/6/1)	A34	6P (1/6/0)
A7	5P (2/5/0)	A16	5P (1/5/3)	A25	6P (4/6/1)	A35	5P (4/5/1)
A8	0P	A17	9P (1/8/9)	A26	6P (0/6/1)	A36	6P (0/6/1)
A9	1P (1/1/0)			A27	6P (5/6/1)	A37	6P (0/6/0)
A10	5P (3/5/1)			A28	0P	A38	6P (2/6/1)
				A29	6P (2/6/1)	A39	6P (0/6/1)
						A41	6P (0/6/1)
Total	28P (13/28/2)	Total	48P (5/45/43)	Total	54P (22/54/9)	Total	65P (22/65/9)

Tabla VII.6. Número de partes (P) anotadas por estudiante (Est.) y sistemas de representación utilizados: verbal (V), simbólico (S) o gráfico (G).

El primer dato destacable de la tabla es que, de los 37 alumnos participantes, hay cuatro, A2, A8, A12 y A28, que no anotaron nada en esta presentación. La participación en las entrevistas de A2 y A12 nos permitió conocer más acerca de este hecho, obteniendo justificaciones distintas. El alumno A2 nos indicó su preferencia por estudiar la teoría a través del libro de texto, aunque difiera de la presentación del docente, lo que justifica esa falta de anotación en las presentaciones teóricas. Sin embargo, A12 no asistió a clase el día de esta presentación, y nos reconoció en la entrevista que no suele tomar ninguna medida para tener el contenido presentado por el docente en un día en el que no asiste a clase, hecho que se pone de manifiesto en este contenido concreto.

En las tres aulas donde la introducción del concepto de límite se redujo al desarrollo de ejemplos particulares (la del Docente 2 y las dos del Docente 3), la transcripción de estos ejemplos fue muy alta: una media del 88'4%, y un total de 22 de los 28 estudiantes en estas aulas transcribieron todos los ejemplos. Por el contrario, en el aula del Docente 1, en la que existió una "definición" general inicial del concepto de límite y los ejemplos ilustraban dicha definición, la transcripción de ejemplos fue muy inferior (media del 33'3%). Así, cuando la presentación del concepto de límite se ha basado exclusivamente en el desarrollo de "ejemplos modelo" los alumnos han mostrado una mayor necesidad de anotar dichos ejemplos, tendiendo a anotarlos todos. Los alumnos del Docente 1 han mostrado comportamientos opuestos: mientras que A1 y A9 únicamente anotaron la "definición" intuitiva del concepto de límite, la alumna A7 no la escribió pero sí recogió tres de los cuatro ejemplos.

En casi todos los ejemplos que fueron registrados, los alumnos han anotado simbólicamente el resultado del mismo. Así ha sucedido en todos los casos en las aulas de los Docentes 1 y 3. También con todos los ejemplos en el aula del Docente 2, salvo con el límite que no existía en tres alumnos (A13, A14 y A17), que han registrado la circunstancia verbalmente pero no simbólicamente.

El papel de las representaciones gráficas ha provocado diferencias importantes en la incidencia de su registro en las notas de los alumnos. Cuando la función fue definida de forma gráfica, la transcripción ha sido mayoritaria, al ser requisito indispensable para poder dotar de sentido las notas tomadas. No obstante, los estudiantes A34 y A37 transcribieron ejemplos de límites sin haber registrado la gráfica de la función, lo que imposibilitaba que pudieran dar sentido a sus notas de esta introducción del concepto de límite. Sin embargo, en los casos en que la función se definió simbólicamente y, posteriormente, se realizó su gráfica (cuatro ejemplos, dos del Docente 1 y dos del Docente 2), la transcripción fue mucho menor, únicamente en la tercera parte de estos casos. Así, muchos alumnos no parecieron valorar este hecho, y optaron por registrar la función utilizando únicamente un sistema de representación.

También han existido diferencias importantes en las anotaciones de tipo verbal. En los registros de los estudiantes en las aulas de los Docentes 1 y 2, la presencia de estas anotaciones, en general, fue reducida. Las notas verbales de los alumnos del Docente

1 se centraron en registrar la definición intuitiva del concepto de límite y en los límites laterales en un punto. En el caso del Docente 2, la mayoría se limitaron a indicar que no existía el límite en +∞ en una función oscilante. Sin embargo, en las aulas del Docente 3 existió un alto contraste entre alumnos: algunos sí que anotaron un registro verbal en todos o casi todos los ejemplos, mientras que en otros alumnos este tipo de notas apenas existieron.

Destacamos dos hechos más. Sólo tres de los alumnos del Docente 2 registraron el ejemplo de límite que no existía. Este hecho, en comparación con la transcripción del resto de ejemplos en esta aula, puede manifestar cierta resistencia de los alumnos a aceptar esta situación o a considerarla como relevante. Además, otro alumno de este aula, A16, registró los ejemplos de límites en +∞ pero no en -∞, lo que pudiera reflejar un comportamiento selectivo al transcribir los ejemplos, algo que ya hemos detectado en el análisis específico de las notas tomadas para el tópico de reglas y técnicas de derivación.

Aspectos de la estructura conceptual del concepto de límite reflejados en las notas de los alumnos: anotaciones verbales

Mostramos aquí los resultados obtenidos al analizar qué aspectos de la estructura conceptual del concepto de límite han reflejado los alumnos en las anotaciones verbales tomadas durante la presentación efectuada por los docentes del concepto. Tomando como base las DG de la Tabla VII.5, hemos detectado cinco tipos de anotaciones que reflejan, de forma progresiva, un significado más cercano al concepto de límite. Presentamos a continuación los cinco tipos:

- Anotaciones que indican el *nombre* de elementos o *cómo se lee* una notación, pero sin hacer mención a su significado. En la Figura VII.15 se muestra un ejemplo de anotación de este tipo, del alumno A35: “Se lee: límite cuando x tiende a infinito de f(x)”.

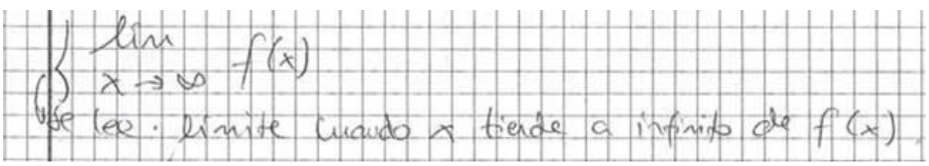


Figura VII.15. Anotación especificando cómo se lee la notación del límite (A35).

- Anotaciones de *hechos concretos* o *convenios* sobre el límite sin que éstos se expliquen y/o se justifiquen. Un ejemplo es la mera escritura de la no existencia de un límite (Figura VII.16). Otro ejemplo es: “Un límite existe cuando es un número”, de A7, que escribió un convenio introducido por el Docente 1.

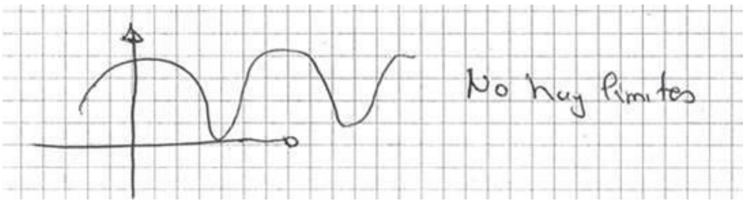


Figura VII.16. Indicación verbal, sin justificar, de la no existencia de límite en $+\infty$ (A17).

- Anotaciones que aluden a un *proceso dinámico tan sólo en la variable independiente* (punto 3ª. en la DG de Cottrill *et al.*, 1996; punto 2ª. en la DG de Valls *et al.*, 2011), sin referencias ni a la imagen ni a la variable dependiente.

Algunas de las anotaciones de este tipo, de forma más o menos explícita, han reflejado únicamente un movimiento en los valores de la variable independiente, sin que se precise a qué valor concreto nos “acercamos”. Un ejemplo es la anotación verbal reflejada en la Figura VII.14, aunque en ese caso la alumna A29 ligó el registro verbal con las flechas en la gráfica de la función, que parecían inducir un movimiento sobre ella. Otro ejemplo puede verse en la Figura VII.17, en una anotación de A7 (con una falta de ortografía).

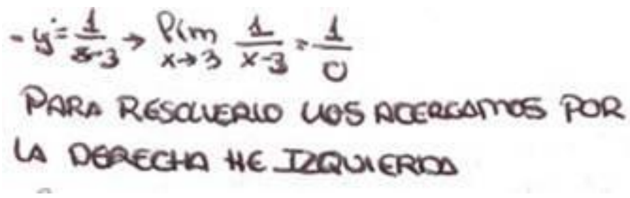


Figura VII.17. Anotación dinámica en la variable “x” sin indicar a dónde “se acerca” (A7).

Otras anotaciones de este tipo sí que han precisado el valor concreto de la variable independiente al que se produce el acercamiento. La Figura VII.18 muestra un ejemplo de anotación de este tipo, de A24: “la x se acerca a 0”.

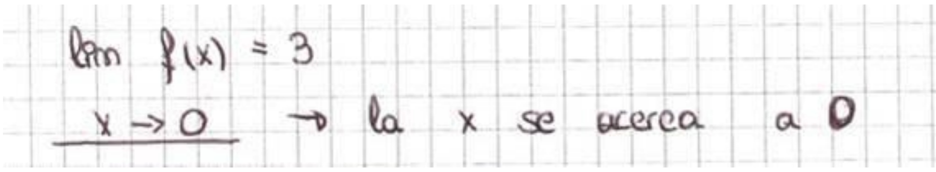


Figura VII.18. Anotación dinámica en la variable “x” indicando dónde “se acerca” (A24).

- Anotaciones que aluden a un *proceso dinámico tan sólo en la variable dependiente* (punto 3b. en la DG de Cottrill *et al*., 1996; punto 2b. en la DG de Valls *et al.*, 2011), sin referencias a la variable independiente.

Hemos detectado la misma diferenciación que en el caso anterior. Han existido anotaciones que sí que indicaban el valor de la imagen al que nos “aproximamos”, mientras que otras no lo hacían. Entre todas ellas destaca la nota de A13 (Figura VII.19), que reflejó la superación de cualquier cota de comparación en un límite infinito (lo cual sería más cercano al concepto de tendencia), pero sin mencionar los valores de *x*: “Los valores de f(x) pueden superar cualquier valor”.

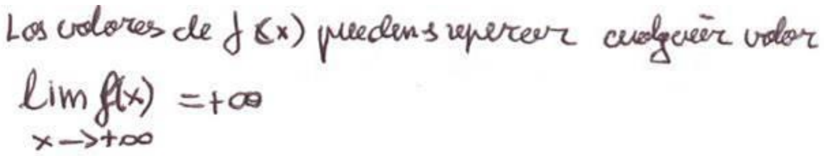


Figura VII.19. Idea de superación de cualquier cota en un límite infinito (A13).

- Anotaciones que aluden a un *proceso dinámico en ambas variables*, mostrando incipientes coordinaciones entre variables (punto 3c. en la DG de Cottrill *et al*., 1996; punto 3 en la DG de Valls *et al*., 2011).

Incluimos aquí las transcripciones de la definición intuitiva del concepto de límite de seis alumnos del Docente 2, en algún caso subrayando los términos clave (ver Figura VII.20). Únicamente hay otros cuatro alumnos que escribieron alguna anotación verbal con este significado, pero todas ellas fueron poco precisas, sin explicitar claramente las variables o a qué valor se “acercan”. Dos ejemplos, ambos en límites infinitos en +∞, son: “Estas imágenes son cada vez más grandes según avanzas la x” (del alumno A35) o “Cuanto mayor es la x, más baja” (alumna A25).

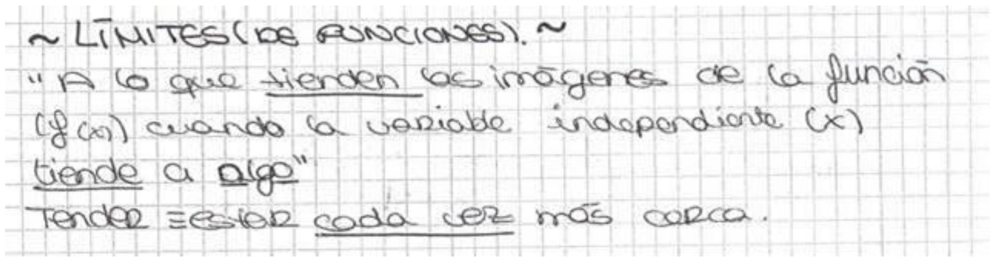


Figura VII.20. Transcripción de la definición general intuitiva del concepto de límite del Docente 1 (A6).

Además, existieron otras anotaciones relacionadas con el significado del concepto de límite. Entre ellas están las que explicaban la no existencia del límite de una función en un punto si no coinciden los dos límites laterales. La siguiente anotación, de la alumna A33, es un ejemplo: “No existe este límite porque los límites laterales no coinciden”. No obstante, no todas son correctas, como pone de manifiesto una nota de la alumna A38, en la que se atribuye la no existencia de límite al cambio en la definición de la función: “No existe porque recorre dos funciones”.

Otra anotación a resaltar fue tomada por el alumno A35, con la que pretendía indicar la no relación existente entre el límite de una función en un punto y el valor de la función en dicho punto (ver Figura VII.21). Sin embargo, tal como se escribe, la anotación es muy poco clara: “Cuando hay un punto blanco, le quitamos y del límite no cambia nada pero ese punto no afectaría al Dom f(x)”.

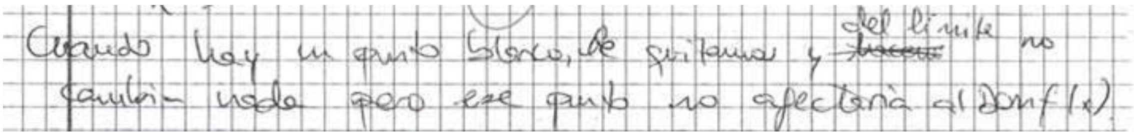


Figura VII.21. Nota sobre la no influencia en el límite del valor de la función en el punto (A35).

Por último, destacamos dos anotaciones en ejemplos de límites en el infinito con un comportamiento asintótico. En ellas, se hace una aclaración explícita sobre el proceso de acercamiento a la asíntota horizontal o al valor de la imagen de ésta, pero sin llegarla a tocar o a alcanzar dicho valor. Un ejemplo es este comentario anotado por A31: “las imágenes de la x se van haciendo cada vez + pequeñas y se acercan a 0 sin llegar a tocarlo”. La enfatización de este hecho puede provocar un obstáculo en el desarrollo de la comprensión del concepto de límite, como justificaremos en el subapartado VII.2.3.

Aspectos de la estructura conceptual del concepto de límite reflejados en las notas de los alumnos: representaciones gráficas

Explicamos aquí los resultados obtenidos en el análisis de los aspectos de la estructura conceptual del concepto de límite que quedan reflejados en las representaciones gráficas realizadas por los alumnos en sus cuadernos. En algunas de esas gráficas, además de la función, se han añadido marcas más o menos relacionadas con la estructura conceptual del concepto de límite. Estas marcas han sido analizadas tomando las DG de la Tabla VII.5 como referencia, lo que nos ha permitido detectar tres tipos de marcas que manifiestan progresivamente un significado más cercano al concepto. A continuación se describen los tres tipos de marcas y los distintos registros que se han detectado en cada tipo:

- Marcas que destacan *información de la propia función.* Dentro de estas marcas ubicamos aquellas que destacan uno o varios puntos de la función en su representación gráfica o el dibujo de una asíntota horizontal y/o vertical, en caso de que exista.

En relación con los puntos de la función, se ha detectado mucha variedad entre las representaciones registradas. En los límites en un punto generalmente se ha destacado únicamente dicho punto y/o sus coordenadas (una o las dos), en ocasiones para proporcionar información sobre si la función está definida o no en ese punto. La Figura VII.14 muestra ejemplos de este comportamiento, en los límites cuando x tiende a -3 y a 2. Estos hechos pueden relacionarse con el paso 1 de las DG de Cottrill *et al*. (1996) y de Valls *et al*. (2011), aunque por sí solos pueden suponer un obstáculo para el desarrollo de la comprensión del concepto de límite, como indicaremos en la discusión de los resultados.

En algunos registros sobre límites en el infinito de los alumnos del Docente 2 se han destacado varios puntos de la gráfica, como se observa en la Figura VII.22, perteneciente a la alumna A16. Un registro de este tipo pareciera estar más próximo al paso 2 de la DG de Cottrill *et al*. (1996), "Acción de evaluar *f* en varios puntos que se aproximan a *a*". No obstante, no se evidencia el proceso de aproximación ni se relacionan entre sí los tres puntos, que además son denominados de la misma forma.

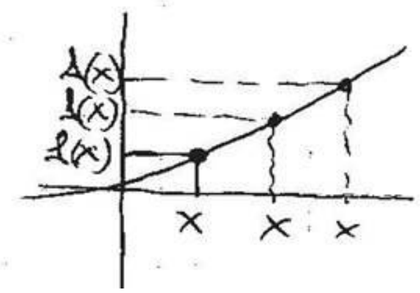


Figura VII.22. Gráfica en la que se marcan varios puntos de la función (A16).

En otros casos, y también marcando información sobre la propia función, se suelen trazar las asíntotas vertical y/o horizontal, en caso de que éstas existan. Normalmente se ha utilizado un trazo discontinuo, y en ocasiones se marca el valor de la abscisa o de la ordenada asociada. Este hecho ayuda a entender el comportamiento de la función que se dibuja, algo que muchas veces no se consigue debido a las deficiencias en su trazado (Arce y Ortega, 2013). Sin embargo, el mero trazado de la asíntota en sí mismo tampoco induce explícitamente ningún aspecto sobre la estructura conceptual del concepto de límite.

- Trazado de *flechas que parecen indicar un movimiento o un sentido de recorrido* en la función, bien sobre la propia gráfica o bien en alguna de las variables.

No obstante, pensamos que no todas las flechas encontradas en las gráficas de los estudiantes tienen la misma naturaleza o el mismo propósito. Por una parte, encontramos flechas directamente sobre la propia gráfica (o paralelas a la misma) cuyo propósito principal interpretamos que es la indicación de un movimiento o de un sentido de recorrido sobre la misma. Un ejemplo puede verse en la Figura VII.14, en el límite cuando x tiende a 0. Otro ejemplo es el escaneo de la Figura VII.23, perteneciente al alumno A13, donde la flecha parece ligada al movimiento en la gráfica de un punto destacado en la misma.

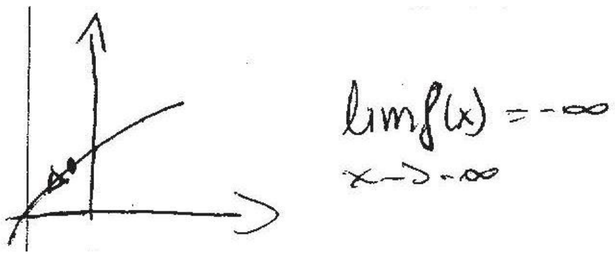


Figura VII.23. Flecha que parece inducir el movimiento de un punto sobre la propia gráfica (A13).

En ocasiones, la flecha se dibujó al finalizar el trazado de la gráfica, asociado a límites en el infinito. Interpretamos que este tipo de flecha, además de inducir un movimiento o un sentido de recorrido, añade la idea de la continuidad de la gráfica que se deja de dibujar. La Figura VII.24 presenta un ejemplo, de la alumna A14. Tanto en las flechas anteriores como en estas últimas, parece estar induciéndose un dinamismo sobre la propia gráfica, pero no hay ninguna marca que traslade ese dinamismo a cada una de las dos variables ni a la coordinación de ambas. Por tanto, estas marcas están lejanas de registrar aspectos propios de la estructura conceptual del concepto de límite.

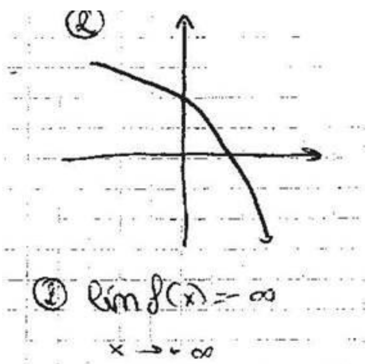


Figura VII.24. Flecha que parece inducir la continuidad de la gráfica (A14).

Sí que hemos encontrado una gráfica donde las flechas no parecen asociarse a la propia gráfica sino a la variable independiente. Así, interpretamos que estas flechas sí que marcarían un proceso de aproximación a 0 en la variable independiente (punto 3ª. de la DG de Cottrill *et al*., 1996; punto 2ª. en la de Valls *et al*., 2011), por izquierda y derecha, pareciendo mostrarse una correspondencia entre el dinamismo en la gráfica y el eje de abscisas (Ortega y Pecharromán, 2014). Además, se acompaña de una anotación verbal con ese mismo significado. Dicha gráfica, registrada por A32, se muestra en la Figura VII.25.

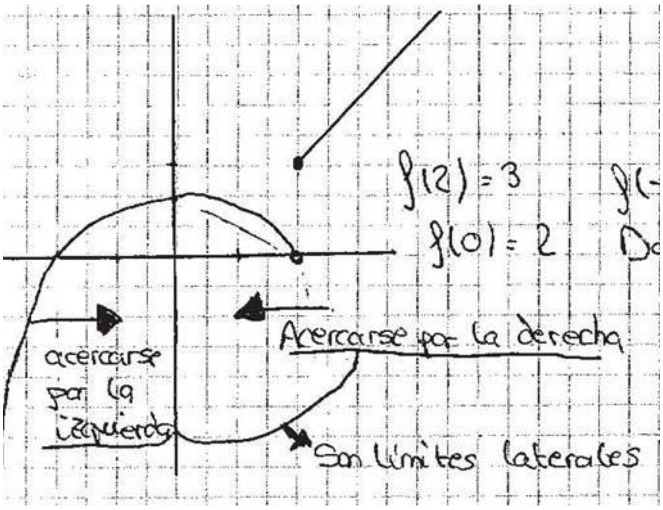


Figura VII.25. Flechas que parecen marcar un proceso de aproximación (a 0) en la variable independiente (A32).

- Marcas que reflejan la *superación de una cota fijada en la variable dependiente*, evidenciando aspectos del significado más próximos al concepto de tendencia y a una coordinación en la concepción métrica del concepto de límite (punto 4 de la DG de Valls *et al*., 2011).

Hemos encontrado un único conjunto de dos gráficas con marcas de este tipo, pertenecientes al alumno A17 (que se muestran en la Figura VII.26), y que se recogen de la presentación del concepto por parte del Docente 2. En ellas, se observa cómo A17, en una función con límite $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, sitúa una cota “K” en el eje de ordenadas, y marca las coordenadas de varios puntos. El punto de la segunda gráfica marca la superación de la cota por la función, marcando las dos coordenadas de dicho punto. No obstante, esta representación no se acompañó de otras anotaciones verbales o marcas simbólicas que reforzaran ese significado.

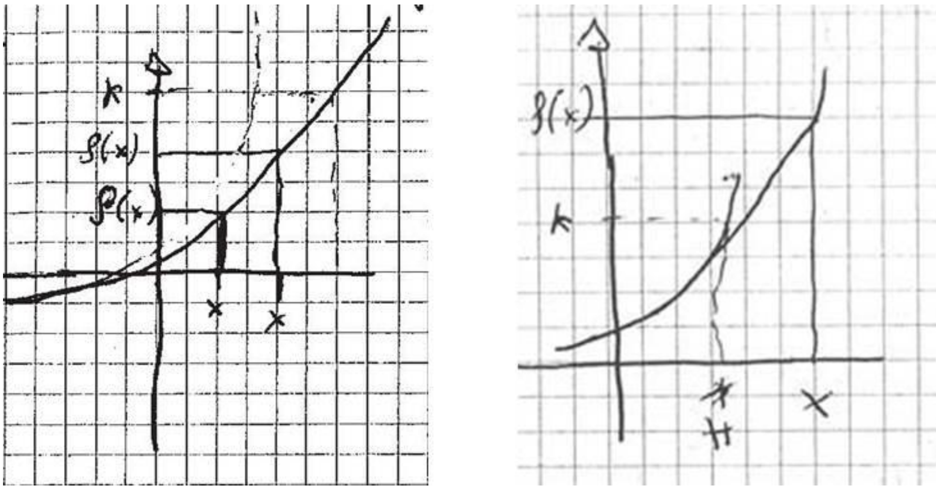


Figura VII.26. Dos representaciones gráficas relacionadas que reflejan la superación de una cota por una función con límite infinito (A17).

Por último, vamos a destacar una marca en la representación gráfica de la estudiante A25, asociada al ejemplo del límite de la función cuando $x \to 0$ en la clase científico-tecnológica del Docente 3. El análisis de las anotaciones tomadas ha puesto de manifiesto que la idea de coordinación en la aproximación de la variable dependiente e independiente ha estado poco presente en las notas de los alumnos. Sin embargo, en esta gráfica observamos la realización de una coordinación errónea al asociarse la aproximación a 0 de la variable independiente con la aproximación al punto (0,0), cuando el límite de la función en ese punto es 3. La gráfica de la Figura VII.27 revela esta asociación. Además de dibujar la bola de radio 1 en $\mathbb{R}^2$, esa coordinación errónea se refuerza con una anotación verbal: “cuando la x se acerca al valor 0, punto (0,0)” (anotación que está fuera de la Figura VII.27).

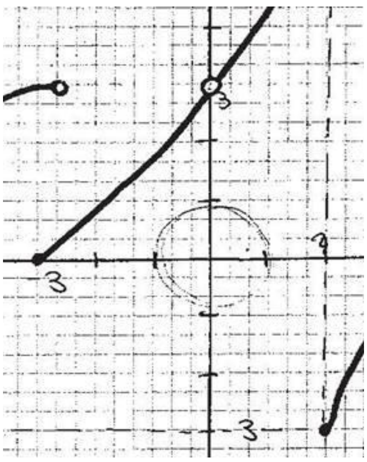


Figura VII.27. Marca que induce una coordinación errónea de las dos variables (A25).

VII.2.3. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Vamos a presentar la discusión de los resultados obtenidos tomando como referencia los tres objetivos específicos propuestos y la relación de estos resultados con la investigación global sobre los cuadernos.

En relación al primer objetivo de este análisis específico, se ha detectado un porcentaje de transcripción mucho mayor de los ejemplos en las tres aulas donde la introducción del concepto de límite tuvo un carácter *ostensivo*, es decir, basado en la presentación de ejemplos "modelo", y sin una definición intuitiva general. En el aula del Docente 1, que comenzó la presentación con una "definición" general, la transcripción de ejemplos ha sido reducida. El diferente papel de los ejemplos (ejemplos como "muestra" del concepto de límite en el primer caso, o como aplicación o ilustración del mismo en el segundo) puede ayudar a explicar este hecho. Atendiendo al porcentaje de transcripción, los alumnos parecen dar mucha más relevancia a los ejemplos en la primera situación. Haciendo uso de los constructos *concepto definición* y *concepto imagen* de Tall y Vinner (1981), la ausencia de *concepto definición* del concepto de límite en las presentaciones de los Docentes 2 y 3 parece aumentar la necesidad de sus alumnos de recoger los ejemplos, para contribuir a fortalecer y hacer más amplio su *concepto imagen* sobre el concepto de límite.

El registro o no de anotaciones verbales en las notas tomadas durante la presentación del concepto de límite supone la mayor diferencia entre estudiantes, especialmente en las dos aulas del Docente 3. Así, la importancia y la relevancia que los alumnos asignan a estas anotaciones parece diferir mucho de unos a otros. Además, y en relación al segundo objetivo planteado, el análisis de la estructura conceptual del concepto de límite reflejado por los registros de tipo verbal, simbólico y gráfico ha evidenciado que son los registros verbales los que, principalmente, han recogido aspectos que se consideran asociados a esa estructura.

El análisis y clasificación de las anotaciones verbales ha permitido detectar un hecho no presente en las DG de Cottrill *et al*. (1996) y de Valls *et al*. (2011): la existencia de anotaciones que manifiestan únicamente un movimiento en una variable o en las dos, o en una dirección, pero sin explicitar el valor al que nos estamos aproximando. Un ejemplo es la nota de la Figura VII.17. La presencia de varias anotaciones de este tipo muestra que los alumnos parecen enfatizar más el hecho de que exista un movimiento o un proceso de acercamiento que el valor concreto al que nos aproximamos, un hecho ya detectado por Kidron (2011).

También en relación al segundo objetivo, se han detectado bastantes anotaciones verbales que únicamente hacían referencia al proceso dinámico de aproximación en una de las dos variables. Existe un número muy reducido de anotaciones donde se haya explicitado la coordinación de ambos procesos de aproximación, y las existentes son poco precisas. Varias investigaciones como la de Blázquez y Ortega (2001) y la de Valls *et al*. (2011) evidencian el valioso papel de la utilización de funciones representadas numéricamente para facilitar el desarrollo de la relación entre las variables y la coordinación de las aproximaciones en dominio y rango. Ninguno de los docentes en las aulas participantes hizo uso de funciones definidas numéricamente durante la presentación del concepto de límite, sino que utilizaron funciones dadas de modo simbólico y, sobre todo, gráfico. Este hecho contextual ha podido suponer una dificultad para que esas coordinaciones se hicieran explícitas en las notas registradas por los alumnos. Pero, también, el uso mayoritario de funciones definidas gráficamente para introducir el concepto de límite y el análisis de las marcas que los alumnos añaden a esa representación (como las flechas en el propio trazado de la gráfica) muestran una tendencia a destacar un movimiento y un proceso de aproximación sobre la propia gráfica a un punto, y no de cada una de las dos variables (de las dos coordenadas de dichos puntos).

Así, el análisis muestra cómo algunos aspectos importantes asociados al concepto de límite y al desarrollo del concepto no han sido registrados por bastantes alumnos, aspectos que no han sido suficientemente enfatizados por los docentes y/o no han sido considerados por los alumnos como relevantes o como dignos de anotar (Pimm, 1999) en sus cuadernos. La situación contraria también se ha producido en algunos casos. Así, algunos estudiantes han enfatizado ciertos aspectos que pueden producir una asociación inapropiada de propiedades al concepto de límite. Un ejemplo es el comentario de A31: “las imágenes de la x se van haciendo cada vez + pequeñas y se acercan a 0 sin llegar a tocarlo”, que puede hacer que el estudiante añada al valor del límite la propiedad de no alcanzabilidad de éste, un hecho que se presenta comúnmente en los estudiantes (Fernández-Plaza *et al*., 2013, 2015).

En relación al tercer objetivo, la falta de anotaciones y marcas evidenciando los procesos de aproximación en dominio y rango y su coordinación puede mostrar una ausencia de concienciación sobre este doble proceso de aproximación. Esto puede provocar un desarrollo insuficiente de la concepción dinámica del concepto de límite. Este hecho, como indican Cottrill *et al*. (1996), dificulta el paso posterior a la concepción métrica, lo que puede comprometer el desarrollo de aprendizajes posteriores sobre el concepto de límite en estos alumnos o, incluso, la necesidad para ellos de esa concepción métrica. Como muestra, el Docente 2 fue el único que presentó la idea de superación de cualquier cota en el eje de ordenadas cuando un límite es infinito, aspecto del que tan sólo dos alumnos de ese aula consideraron su registro como relevante (A13 verbalmente y A17 gráficamente, Figuras VII.19 y VII.26, respectivamente).

El análisis de los registros de los alumnos no nos da información suficiente para poder conocer la comprensión que éstos tienen del concepto de límite, puesto que pueden transcribir sin comprender. No obstante, estas notas sí que pueden contener o manifestar errores en la comprensión del concepto, como la nota verbal de A38 en la que se identifica el cambio en la definición de la función con la no existencia de un límite en un punto; o la coordinación errónea de la alumna A25 (ver Figura VII.27), que parece identificar la aproximación a x=0 con la aproximación al punto (0,0).

No obstante, las decisiones de los alumnos sobre qué aspectos registrar y de qué forma nos permiten conjeturar qué idea del concepto de límite están plasmando y qué idea pueden inferir los alumnos a partir de sus notas. Esto es especialmente importante en contextos como el de este estudio, donde muchos de los alumnos, en las entrevistas sobre la utilización del cuaderno, han señalado al cuaderno como el instrumento alrededor del cual pivota todo su estudio y aprendizaje de la asignatura, siendo determinante el contenido que presenta el mismo (sobre todo en los alumnos entrevistados que se han ubicado en los Perfiles 1 y 2, apartado VI.4).

Así, bajo esta perspectiva la responsabilidad del alumno al tomar notas es alta. Sin embargo, y como ya detectamos en el análisis presentado en el apartado VII.2, los alumnos tienden a fiarse más del medio utilizado por el profesor en la exposición (privilegiando lo registrado en la pizarra del aula frente al discurso oral) que del tipo de contenido expuesto. En este estudio, 12 de los 33 alumnos que han tomado alguna nota no han registrado ningún aspecto que consideremos asociado a la estructura conceptual del concepto de límite. Estos alumnos se han limitado a transcribir ejemplos, indicando simbólicamente el resultado y, si acaso, destacando en la gráfica información asociada a la función (puntos de la función, asíntotas) o marcando un sentido de recorrido en la propia gráfica utilizando flechas. En estos casos, la combinación de registros de este tipo con la utilización de estas notas como referente en su estudio del concepto de límite puede fomentar el desarrollo en los alumnos de un significado muy ligado a las diferentes situaciones o “modelos” posibles de límite, de los que pueden inducir reglas de actuación para obtener el resultado, generalmente ligadas a una representación concreta (Pecharromán, 2013). Este significado sería cercano a una comprensión de tipo instrumental (Skemp, 1976), muy alejada de una conceptualización adecuada del concepto de límite y, además, no exenta de errores. Una idea inferida sobre este concepto que podrían desarrollar con registros de este tipo es la destacada por Przenioslo (2004), que la detecta con cierta frecuencia incluso en estudiantes universitarios de matemáticas: la combinación de la acción de sustituir la función en el punto (si existe) con la de recorrer la gráfica para obtener el límite cuando dicho valor no existe o cuando hay un salto.

En resumen, el estudio de las notas tomadas por los alumnos en una presentación intuitiva del concepto de límite, en relación a los aspectos del significado del concepto que se evidencian en ellas, ponen de manifiesto que estas notas pueden condicionar fuertemente el aprendizaje del concepto por parte del alumno, y el *concepto imagen* que de dicho concepto desarrolla cada alumno. Esto puede ser un obstáculo para cursos posteriores y para la evolución de una concepción dinámica del concepto de límite a una concepción métrica.

VII.3. ANÁLISIS DE LOS COMENTARIOS QUE ANOTAN LOS ESTUDIANTES EN SUS CUADERNOS: TIPOLOGÍA Y PROPÓSITOS

Este tercer y último análisis específico está centrado en uno de los tipos de elementos que pueden o no aparecer en los cuadernos de los alumnos, tanto en las UT como en las UP, y a los que nos hemos referido en esta investigación como *comentarios*.

En el capítulo IV de la tesis doctoral (apartado IV.4) ya hicimos mención a qué iba a ser para nosotros en el transcurso de esta investigación un *comentario* en un cuaderno. En sentido amplio, se considera como comentario a todo aquello que aparezca en el cuaderno de un estudiante y que vaya más allá de la toma de los contenidos teóricos expuestos por el docente, generalmente en la pizarra (definiciones, enunciados, fórmulas, justificaciones, ejemplos o gráficas[79]), de la resolución de actividades y de la posible escritura de los pasos y procesos seguidos en esa resolución. Generalmente, los comentarios serán de tipo verbal, pero también consideraremos excepcionalmente marcas simbólicas y gráficas que tengan el propósito de aportar información al estudiante.

[79] Es decir, aspectos asociados a tres de los cuatro tipos en que hemos dividido el contenido teórico en esta investigación (apartado V.3 de la tesis doctoral). Dejamos fuera al cuarto tipo, las *observaciones o comentarios de interés realizados por el docente*, que sí que consideraremos en este análisis de los comentarios, al tener un mayor carácter explicativo y relacional y formar parte, generalmente, del discurso oral del docente.

Con esta conceptualización, conjeturábamos en los Capítulos III y IV que el análisis de este tipo de elementos podía tener una amplia importancia en la investigación, puesto que pueden aparecer comentarios con una tipología muy variada, y que enfaticen aspectos diferentes, que pueden también estar relacionados con los distintos roles del cuaderno para los alumnos y con los modos diversos en que dicen utilizarlo, incluso con sus diferentes visiones hacia lo que son las matemáticas. Es decir, todos esos aspectos pueden influir en lo que los estudiantes consideran como digno de ser anotado en un determinado momento (Pimm, 1999). Además, en el contexto de las aulas en que se ha desarrollado la investigación, la ausencia de actividades propuestas por parte de los docentes que conlleven la elaboración de textos escritos por parte de los estudiantes (como podía ser la escritura de pequeños informes, por ejemplo) hace que estos comentarios puedan ser los únicos rasgos de escritura propia de los alumnos en sus cuadernos.

Así, en la Dimensión 3 del marco que hemos desarrollado para analizar cuadernos de matemáticas, titulada "Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o la revisión posterior por parte del alumno", se consideraron dos indicadores de especial importancia para poder estudiar estos comentarios[80]:

- El primer indicador tanto en las UT como en las UP, titulado "Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad", pretendía recoger información sobre la frecuencia con la que un estudiante escribía anotaciones de este tipo y cuáles eran estas anotaciones.

- El tercer indicador en las UT y el cuarto en las UP, con nombre "Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en la unidad", pretendía estudiar las posibles marcas o anotaciones hechas por un estudiante en su cuaderno y relacionadas con aspectos personales sobre su comprensión de los diferentes aspectos y sobre posibles dudas. Es decir, más próximos a lo que sería una escritura expresiva (Britton *et al.*, 1975).

El análisis pormenorizado de todas las unidades de registro realizado por el EI nos permitió obtener gran cantidad de información asociada a esos dos indicadores. Esta información no se reduce únicamente a la asignación de una valoración numérica al grado de desarrollo del indicador (en la escala 1-5), que sirve de base para el análisis cuantitativo desarrollado (Capítulo V), sino también a las explicaciones y justificaciones

[80] En las Tablas IV.12 e IV.13 se recogían los indicadores finalmente considerados para la única variable de la Dimensión 3 en las UT y en las UP, respectivamente.

asociadas a cada una de esas valoraciones, a partir del análisis del contenido existente en las fotocopias analizadas[81].

Toda esa información se ha reanalizado aquí de manera pormenorizada para llevar a cabo un análisis específico de los comentarios que los estudiantes han escrito en sus cuadernos. Presentamos los resultados de ese análisis, junto con una clasificación de los diferentes comentarios encontrados. Para ello, se han utilizado como base las ideas sobre escritura en matemáticas recogidas en el subapartado III.3.4 de la tesis doctoral (especialmente las expuestas por Shield y Galbraith, 1998), las ideas sobre el significado de un concepto matemático de Gómez (2007) y Rico (2012), las ideas sobre *análisis cognitivo* y sus categorías de Lupiáñez (2009) y las ideas de Skemp (1976) sobre una *comprensión relacional* o *instrumental* de las matemáticas.

De acuerdo a esas ideas, se ha realizado una clasificación de los comentarios encontrados en los cuadernos en cinco grandes grupos. Dedicamos un subapartado a presentar cada uno de estos grandes grupos, mostrando algunos ejemplos concretos, y discutiendo el papel de los mismos en los cuadernos de los alumnos. Los comentarios asociados al indicador “Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad” han sido divididos en cuatro grupos distintos, de acuerdo a su propósito principal y al aspecto que se enfatiza con su registro. Estos grupos son presentados y discutidos en los subapartados VII.3.1 a VII.3.4. El quinto grupo es el formado por las anotaciones y marcas asociadas al indicador “Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en la unidad”. Estas anotaciones han sido muy escasas pero tienen una singularidad importante con respecto a los demás, puesto que explicitan aspectos sobre el desarrollo del aprendizaje y la comprensión del propio estudiante que elabora el cuaderno. Estas anotaciones se muestran y discuten en el subapartado VII.3.5.

VII.3.1. COMENTARIOS ASOCIADOS A ASPECTOS TEÓRICOS DE LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL

En este primer grupo se han incluido aquellos comentarios cuyo contenido y significado recoge aspectos propios de la estructura conceptual teórica de un determinado contenido matemático. La recogida de este tipo de comentarios puede mostrar o favorecer el desarrollo de una comprensión de las matemáticas más cercana a la *comprensión relacional* indicada por Skemp (1976), aunque únicamente sea

---

[81] Algunas muestras de plantillas de análisis rellenas, con la codificación de cada indicador y la explicación y la justificación de la valoración otorgada por el EI se recogen en el bloque C de los Anexos (CD adjunto a la memoria de tesis).

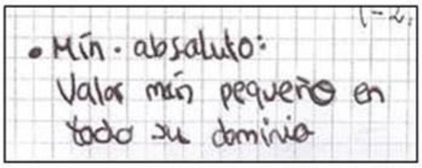
porque un alumno considere la anotación de un comentario de este tipo como algo “digno de ser recogido” en su cuaderno en el contexto de un aula (Pimm, 1999).

Dentro de este primer grupo hemos situado distintos tipos de comentarios que tenían ese propósito general, pero que enfatizaban diferentes aspectos teóricos relacionados con la estructura de un concepto. Presentamos a continuación estos tipos, con algunos ejemplos concretos y una discusión general de su significado, su incidencia en los cuadernos de los alumnos y lo que representa su escritura en un cuaderno.

Comentarios en los que se recuerda y/o explica el nombre dado a un concepto o se recuerda su definición

Hemos incluido aquí aquellos comentarios asociados a algún concepto concreto. En este sentido, los comentarios que consideramos más básicos son los que se limitan únicamente a recordar explícitamente el nombre de un concepto, su forma general, o a indicar qué representa algún símbolo o número, sin añadir nada más. Generalmente, este recuerdo ha estado relacionado con conceptos propios del bloque de Análisis Matemático, aunque no siempre. Ejemplos de comentarios de este tipo pueden ser la escritura de que f(x) es “la imagen” (A3), el registro de los nombres de los dos ejes cartesianos (abscisas y ordenadas) en la representación de alguna función (A14, A20, A31), el recuerdo de la forma general de una función cuadrática (A20) o la escritura de “punto singular” al lado del punto en el que se anula la derivada de una función (A13).

Existen otros comentarios más completos que los anteriores, puesto que añaden más información sobre el concepto, además de la escritura del nombre. Por ejemplo, encontramos comentarios en los que, con mayor o menor precisión, se intenta escribir la definición de ese concepto recordado. Se han encontrado anotaciones de este tipo asociadas tanto a conceptos propios de Análisis Matemático ya tratados previamente como a conceptos de otros bloques de contenidos. En la Figura VII.28 se escanean dos comentarios de este tipo. En la parte izquierda, se muestra una anotación con rotulador de la alumna A31 donde recuerda la definición de mínimo absoluto (un concepto que se había visto previamente en ese mismo tema). Hemos reescrito la anotación en negro para que pudiera verse nítidamente en el escaneo, puesto que la alumna había escrito tal anotación con un rotulador. En la parte derecha, se enseña una anotación del alumno A13 en la que recuerda la definición de valor absoluto de un número, en la presentación de la función valor absoluto, f(x)=|x|.



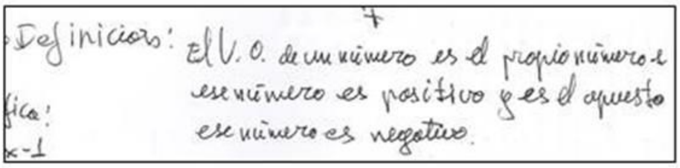


Figura VII.28. Escaneos con comentarios en los que se recuerdan definiciones de conceptos previos (Izda.: Alumna A31; Dcha.: Alumno A13),

El registro de comentarios como los reflejados en la Figura VII.39, que no son demasiado frecuentes, permiten que en el cuaderno quede constancia de aspectos relacionados con el significado de un concepto (Rico, 2012), bien previo o bien propio del bloque, y de una forma más o menos precisa. Este hecho puede resultar de utilidad para el alumno, no tan sólo en el momento en el que decide registrar una anotación así, sino para posteriores revisiones del cuaderno, especialmente si lo utiliza como herramienta base para estudiar la asignatura (en las entrevistas hemos visto que un grupo importante de estudiantes así lo hacía). Este tipo de anotaciones han sido más frecuentes entre el alumnado de la clase de Ciencias Sociales de la Docente 3, y más esporádicas en las otras tres aulas.

Por último, también hay otro tipo de anotaciones que no se limitan a indicar o a recordar el nombre de un elemento o la realización de una asignación, sino que además explican o justifican el porqué del nombre o de la asignación. En ambos casos también queda registrada información que ayuda a un mayor desarrollo del significado de un concepto y de la estructura teórica asociada al mismo. En la Figura VII.29 se recogen dos escaneos con dos comentarios de este tipo. En el de la parte superior, la alumna A32 explica por qué la función f(x)=-3 recibe el nombre de función constante. En el comentario del escaneo inferior, la alumna A5 intenta explicar por qué una función exponencial es trascendente, evidenciando la presencia de un proceso de paso al límite al pretender calcular la imagen de la función para valores irracionales.

Este tipo de comentarios muestran un lenguaje que Van Dormolen (1985, citado en Shield & Galbraith, 1998) denominó como *lenguaje descriptivo*, en el que se establece el significado de una idea o se explica la aparición de un determinado objeto matemático. Estas anotaciones sí que han tenido cierta presencia en los cuadernos, especialmente en el cuaderno del alumno A3 y en algunos estudiantes del aula de Ciencias Sociales de la Docente 3. No obstante, hay que tener en cuenta que en esta última aula fue en la que más espacio temporal se dedicó al desarrollo de este bloque de Análisis Matemático, lo que hace que exista una mayor cantidad de contenido en los cuadernos asociado a estos contenidos y, por tanto, una mayor posibilidad de que haya más comentarios de diferentes tipos.

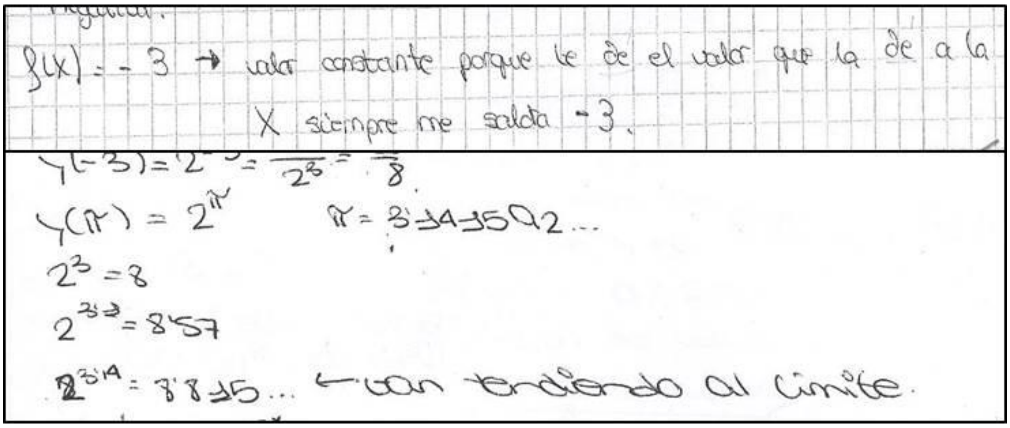


Figura VII.29. Escaneos con comentarios en los que se explica o justifica el porqué de un nombre o asignación (Arriba: Alumna A32; Abajo: Alumna A5).

Comentarios en los que se anticipa la existencia de un concepto o técnica que se presentará posteriormente y/o su necesidad

Los comentarios de este tipo se caracterizan por recoger algún aspecto sobre un concepto o una técnica que va a ser presentada y desarrollada posteriormente en el bloque de Análisis Matemático, generalmente mostrando para ello la insuficiencia de los conceptos y los procedimientos conocidos hasta ese momento para resolver algunos problemas o situaciones.

Es decir, estos comentarios evidencian la necesidad de construir estructuras conceptuales más amplias y desarrolladas, ayudando también a crear relaciones entre diferentes conceptos y procedimientos conocidos con otros sobre los que posteriormente se profundizará, además de dotar de sentido la introducción de los mismos. Los alumnos que consideran digno de anotar un comentario así parecen considerar valioso el registro y desarrollo de una *fenomenología* asociada al concepto, que es considerado por Rico (2012) como uno de los tres pilares en el desarrollo del significado de un concepto matemático escolar. Por esa razón estos comentarios merecen ser destacados, sobre todo si se tiene en cuenta que los docentes han propiciado pocas situaciones en las aulas que dieran lugar a anotaciones de este tipo, y que, en ese caso, han sido recogidas de forma muy reducida por los alumnos.

Estos comentarios han tenido más incidencia entre los alumnos del Docente 1, que sí que ha recurrido en más ocasiones a la realización de este tipo de anticipaciones o a la presentación de situaciones que permitieran dotar de sentido la introducción de nuevos conceptos. Los alumnos A3 y A10 son los que recogen más comentarios.

En la Figura VII.30 se recogen dos escaneos de alumnos del Docente 1. En el de la parte superior, la estudiante A6 intenta evidenciar la imposibilidad de estudiar el comportamiento de una función racional, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, con las mismas técnicas utilizadas para estudiar funciones racionales que son cocientes de polinomios de primer grado y cuya representación es una hipérbola; e indica para ello la necesidad del concepto de derivada y de los procedimientos asociados a ella. En el escaneo de la parte inferior, el alumno A10 anota la explicación relacionada con una técnica para resolver un límite que el docente anticipó durante la presentación intuitiva del concepto de límite, para mostrar la necesidad de técnicas específicas que permitieran resolver situaciones “complicadas” (con indeterminaciones). Este estudiante intenta explicar el porqué del resultado del límite a partir de la diferente rapidez de crecimiento de los polinomios según su grado: “el denominador pesa más por el cuadrado”.

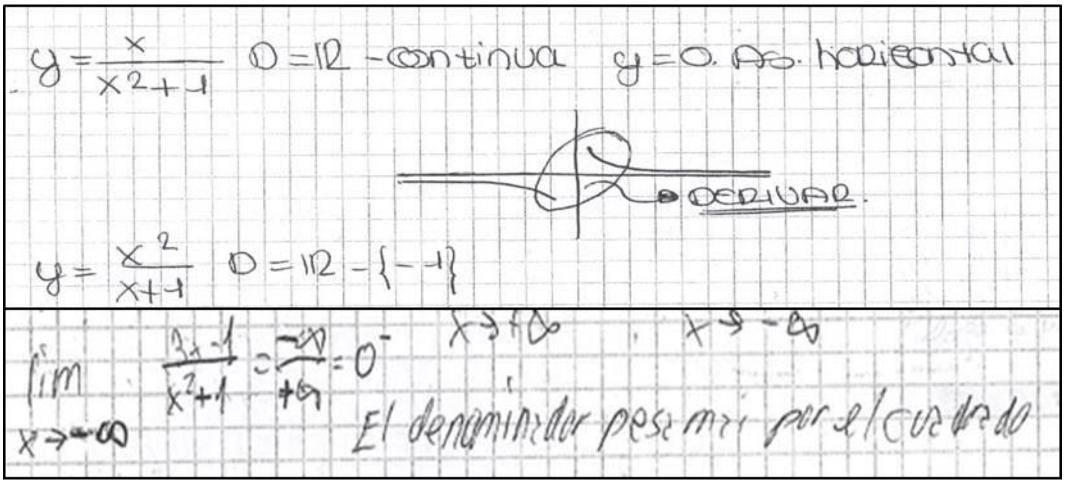


Figura VII.30. Escaneos con comentarios que explican la necesidad de un concepto o técnica (Arriba: Alumna A6) o que anticipan su introducción (Abajo: Alumno A10).

Comentarios en los que se presenta una relación entre diferentes conceptos u objetos matemáticos

Los comentarios aquí incluidos son aquellos que reflejan la existencia de relaciones entre dos conceptos u objetos matemáticos distintos. Estas relaciones pueden ser entre objetos propios del análisis matemático, entre un concepto del bloque con otro de bloques anteriores, o con conocimientos previos que, hipotéticamente, ya debieran ser dominados por el alumno. Valoramos la presencia de estos comentarios como algo muy positivo, puesto que permiten mostrar y dejar evidencia de relaciones entre conceptos que, potencialmente, permiten construir estructuras conceptuales mucho más desarrolladas, con una mayor interconexión entre los conceptos frente a un registro aislado de conceptos. El registro de tales comentarios puede potenciar el desarrollo de una mayor comprensión relacional (en los términos de Skemp, 1976) y de un aprendizaje más significativo (Ausubel, Novak y Hanesian, 1989). Este tipo de comentarios también están entre los aspectos enriquecedores de un texto expositivo matemático que son especialmente destacados por Shield y Galbraith (1998).

Algunas de las relaciones que se han detectado en los cuadernos de los alumnos son las relaciones entre conceptos u objetos propios del bloque de Análisis Matemático. La escritura de comentarios con relaciones de este tipo ha tenido cierta frecuencia, generalmente ligada a que los alumnos consideraran como relevantes y dignos de anotar aspectos propios del discurso oral desarrollado por los profesores al presentar los conceptos (entre ellas, algunas de las *observaciones o comentarios de interés* detectados en el contenido impartido por los docentes en cada tema).

La Figura VII.31 contiene tres ejemplos de escaneos con comentarios de tipo relacional. En la parte izquierda se muestra un escaneo de A31 con un comentario donde se relacionan las asíntotas oblicuas y horizontales de una función, indicando que no pueden darse ambas simultáneamente. En la parte central y derecha aparecen dos comentarios tomados del cuaderno de A3, en los que se relacionan los tipos de simetría de una función con los grados de los monomios en funciones polinómicas: "$y=x^4+x^2$ Es par si todas las pot [sic] de x son pares" en el de la parte central y "$y=3x^3-x$ Es impar si todas las pot [sic] de x son impares" en el de la derecha.

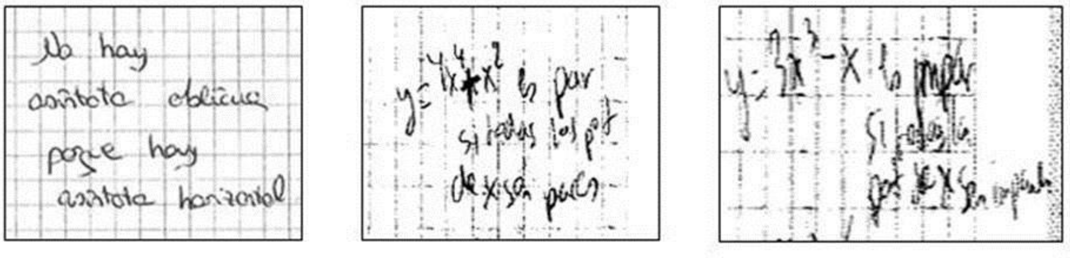


Figura VII.31. Escaneos de varios comentarios donde se escriben relaciones entre diferentes objetos matemáticos (Izda.: Alumna A31; Central y Dcha.: Alumno A3).

Comentarios en los que se indica o se justifica el cumplimiento de condiciones o de características necesarias para poder aplicar o simplificar un proceso

Este último tipo de comentarios incluidos en este subapartado tienen como propósito principal indicar o justificar que se cumplen las condiciones necesarias para poder llevar a cabo un proceso o para poder simplificar éste de algún modo. Utilizando la terminología de Shield y Galbraith (1998) para referirse a los diferentes aspectos matemáticos que pueden estar presentes en un texto matemático, estos comentarios estarían cercanos a recoger *aspectos lógicos*, a un nivel muy elemental.

Por tanto, estos comentarios se asocian más a los procesos matemáticos, pero el foco no está en los propios procesos, sino en el modo en que se estos procesos se ligan con la estructura conceptual para explicar y justificar su aparición. Las anotaciones de este tipo han tenido cierta frecuencia en los cuadernos, sobre todo en el aula de Ciencias Sociales del Docente 3. Algunos ejemplos de comentarios de este tipo son:

- "Las exponenciales son siempre positivas", comentario de la alumna A19 para simplificar el estudio de la posición de la rama asintótica de la función $f(x)=3^{2x+1}$ en relación a la asíntota horizontal $y=0$, razonando directamente a partir de esta propiedad de la función.

- "Ahí no hay un producto. Es una composición", comentario de la alumna A31 para justificar la aplicación de la regla de la cadena al derivar la función $f(x)=sen(x^2-5x+7)$.

VII.3.2. COMENTARIOS ASOCIADOS A ASPECTOS PRÁCTICOS Y CON UN MARCADO ÉNFASIS PROCEDIMENTAL

En este segundo gran grupo de comentarios hemos incluido aquellos comentarios cuyo propósito principal está relacionado con la aplicación de procesos o con aspectos meramente procedimentales asociados a los conceptos y las técnicas trabajadas en el bloque de Análisis Matemático. A grandes rasgos, este tipo de comentarios buscan facilitar y clarificar la aplicación de estas técnicas, y de los diferentes procesos involucrados en ellas. Utilizando la terminología de Shield y Galbraith (1998), serían comentarios propios de *aspectos algorítmicos*, asociados a algún método o los pasos a seguir en él, y con un lenguaje de tipo procedimental (Van Dormolen, 1985; citado en Shield y Galbraith, 1998).

La recogida excesiva de este tipo de comentarios pueden mostrar o favorecer el desarrollo en el alumno de una comprensión más cercana a lo que Skemp (1976) llama *comprensión instrumental*, en la que el alumno enfatiza aspectos asociados a la aplicación satisfactoria de reglas y métodos, frente a la posición que estos ocupan dentro de la estructura conceptual de un tópico, o a la explicación o justificación del porqué de estos procesos.

En este segundo gran grupo hemos situado diferentes tipos de comentarios que tenían ese propósito general de enfatizar y clarificar la aplicación de procedimientos prácticos. Presentamos a continuación esos tipos, junto con una discusión de los mismos y algunos ejemplos concretos.

Comentarios recordando procesos, reglas o pasos concretos asociados a técnicas del bloque de análisis matemático ya tratadas con anterioridad

Hemos incluido aquí aquellos comentarios realizados por los estudiantes en sus cuadernos que muestran el propósito de recordar procesos, reglas o pasos clave asociados a técnicas propias del contenido del bloque de Análisis Matemático que ya han sido trabajadas previamente. Es decir, estos comentarios buscan recordar y facilitar la aplicación de técnicas usuales que ya han sido ampliamente trabajadas, con el fin de reforzar su aplicación satisfactoria y su asimilación por parte del estudiante.

Generalmente, estos comentarios han estado ligados a algunas de las técnicas que han sido más profusamente trabajadas durante este bloque de contenidos, como son el cálculo de dominios de funciones, la resolución de indeterminaciones en el cálculo de límites o las técnicas para estudiar las características y para representar funciones elementales de diferentes tipos (polinómicas, exponenciales, logarítmicas, racionales e irracionales sencillas). En concreto, destacamos la presencia de algunos pequeños recordatorios en los que los alumnos agrupan los pasos clave para calcular el dominio de diferentes tipos de funciones (A30) o para resolver indeterminaciones (A1, A2, A3, A4, A10, A31, A33). Estos recordatorios pueden servir como ayuda para el estudiante en un estudio posterior que tenga como base la revisión del contenido del cuaderno. Otro comportamiento destacado es el del alumno A39, que anota en varias ocasiones en los márgenes los pasos clave para estudiar un tipo de función: en una función cuadrática escribe “Vértice” y “Puntos de eje con el vértice [sic]”, en otra función escribe “Dominio”, “Imagen”, “Monotonía”, “Curvatura” y “Extremos”.

Comentarios recordando propiedades aritmético-algebraicas que se aplican en el desarrollo de procesos propios del bloque de análisis matemático

En las tres aulas, el tratamiento del bloque de Análisis Matemático y las actividades planteadas han tenido una fuerte componente algebraica (un problema ya comentado en los antecedentes), con muchas actividades basadas en la manipulación de expresiones algebraicas: cálculo de dominios en funciones racionales e irracionales, cálculo de límites con diferentes indeterminaciones, cálculo de derivadas aplicando las reglas de derivación. Este hecho ha sido especialmente visible en las dos aulas de la Docente 3, con un volumen muy elevado de actividades de este tipo.

Este deslizamiento docente ha provocado la aparición de anotaciones cuyo propósito principal ha sido el de recordar alguna propiedad aritmética o algebraica que se ha aplicado en el transcurso de los ejemplos desarrollados por el docente, o en las actividades. Este tipo de anotaciones se ha detectado con mayor frecuencia en algunos alumnos: A3, A20, A22, A23, A31, A33, A34 y A35. Salvo el primero, todos estos estudiantes pertenecen a alguna de las dos aulas de la Docente 3. Los alumnos A3 y A31 indicaron en las entrevistas la utilización del contenido del cuaderno como herramienta determinante en su estudio y aprendizaje de las matemáticas (ambos alumnos fueron ubicados en el Perfil 1[82]), a partir de la revisión de lo que contiene. Estas anotaciones, especialmente valoradas por A31 en la entrevista, pudieran tener como propósito principal mejorar el papel del cuaderno dentro de ese rol, y facilitar y clarificar esa revisión.

En la Figura VII.32 se muestran dos escaneos con dos ejemplos de anotaciones consideradas de este tipo. El de la parte superior pertenece al cuaderno de la alumna A12 y en él, de forma escueta, se intenta resaltar que si una fracción es igual a 0 entonces el numerador es el que debe ser igual a 0 (dentro del cálculo de los puntos en los que se anula la derivada de una función). En la parte inferior puede observarse un escaneo de la alumna A20, con un comentario verbal que tiene el propósito de aclarar que puede calcularse la raíz de índice impar de cualquier número ("se pueden calcular todas las raíces"), lo que además se ilustra con tres ejemplos concretos. La alumna utiliza este hecho como base para obtener el dominio de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

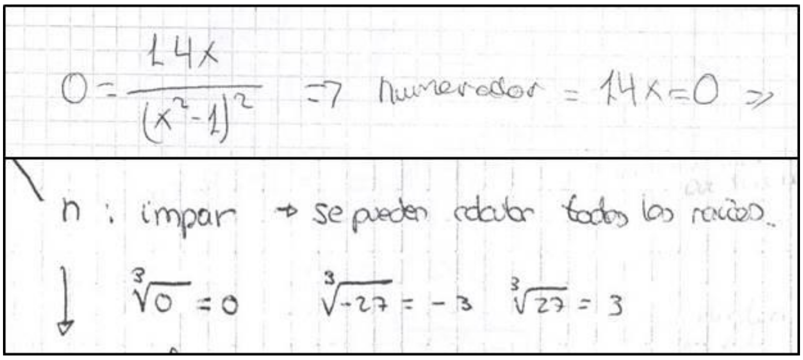


Figura VII.32. Escaneos de varios comentarios donde se recuerdan propiedades aritmético-algebraicas que son aplicadas (Arriba: Alumna A12; Abajo: Alumna A20).

[82] Los cinco perfiles detectados en los alumnos entrevistados según el diferente rol y uso que hacen del cuaderno de matemáticas se detallan en el apartado VI. 4 de esta memoria.

Comentarios o marcas para aclarar cálculos aritmético-algebraicos que aparecen en el desarrollo de procesos propios del bloque de análisis matemático

En este apartado se han incluido aquellos comentarios verbales o marcas simbólicas cuyo objetivo principal ha sido el de aclarar o clarificar algún cálculo aritmético-algebraico de los que se han desarrollado durante la aplicación de procedimientos propios del bloque de Análisis Matemático. Al igual que ha sucedido con el tipo de comentarios inmediatamente anterior, la aparición y mayor incidencia de este tipo de comentarios ha sido favorecida por una metodología docente donde han abundado las actividades fuertemente basadas en cálculos y manipulaciones algebraicas.

Este tipo de comentarios se han presentado tanto de forma verbal, aclarando cuál era el paso o el cálculo concreto que se estaba realizando en un determinado momento, o con marcas simbólicas con ese mismo propósito. Ha existido una incidencia desigual de este tipo de anotaciones, tanto verbales como simbólicas, entre los alumnos participantes. En particular, ha destacado sobremanera la presencia frecuente de las mismas en las unidades de la alumna A31, tanto de marcas como de comentarios verbales. Esta alumna fue una de las entrevistadas, comentándonos el papel importante que para ella juegan este tipo de anotaciones, que llega a calificar como un poco “tontas”, pero que le ayudan mucho cuando revisa tanto la teoría del cuaderno como las actividades en él realizadas para estudiar la asignatura. Es decir, el propósito de estas anotaciones para esta alumna parece directamente relacionado con la utilización posterior del cuaderno como instrumento cuyo contenido determina el estudio, y condicionado por dicha utilización (más que por el efecto aclaratorio que pueden tener las mismas en el propio momento en que se anotan).

En la Figura VII.33 se muestran dos escaneos de A31 en los que aparecen anotaciones y marcas de este tipo. En el de la izquierda se observa la realización de varias flechas para aclarar cómo operar con una fracción en la que tanto el numerador como el denominador son también razones algebraicas. En el de la parte derecha se puede ver cómo la alumna destaca una operación a la que añade una aclaración verbal sobre el cálculo realizado: “simplifico”.

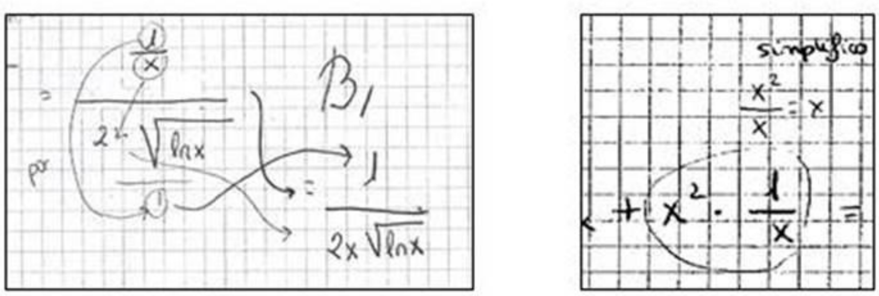


Figura VII.33. Escaneos con anotaciones y marcas de la alumna A31 destinadas a aclarar cálculos aritmético-algebraicos en el desarrollo de procesos.

El alumno A10 también presenta algunas marcas que pretenden aclarar algunos de los cálculos realizados en el desarrollo de procesos, aunque en mucha menor medida que la alumna A31 y utilizando sobre todo marcas de tipo simbólico. Un ejemplo puede verse en la Figura VII.5 (dentro del apartado VII.1) con un escaneo de este alumno, en el que, por ejemplo, se indica explícitamente que simplifica el numerador y el denominador de las razones algebraicas entre 2 en uno de los pasos seguidos en el cálculo del límite del cociente incremental de la función f(x)=sen(x), desarrollado por el Docente 1 para justificar la obtención de la derivada de la función seno.

VII.3.3. COMENTARIOS QUE RECOGEN ASPECTOS ASOCIADOS AL ANÁLISIS COGNITIVO DE LOS CONTENIDOS DEL BLOQUE REALIZADO POR EL DOCENTE

En el subapartado III.3.3 de esta tesis doctoral exponíamos algunas ideas principales de lo que el grupo de investigación FQM-193 (Universidad de Granada) llama el *análisis cognitivo* realizado por un docente para “tratar de organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico” (Rico, 2013, p. 23), en el momento en que planifica una unidad y sus sesiones. Lupiáñez (2009) y Rico (2013) distinguen tres categorías fundamentales que estructuran un análisis de este tipo: las *expectativas de aprendizaje* (qué espera el docente que los alumnos aprendan), las *limitaciones de aprendizaje* (las dificultades y posibles errores que pueden presentarse en ese proceso de aprendizaje) y la *demanda cognitiva* (tareas planificadas para conseguir desarrollar ese aprendizaje de forma satisfactoria).

En el marco de una clase, un profesor puede introducir en su discurso comentarios en los que haga explícito alguno de esos aspectos anteriores. En el análisis de los cuadernos se han detectado algunas anotaciones de los alumnos que recogen ese tipo de comentarios realizados por el docente. Pensamos que estas anotaciones, que en general han sido bastante esporádicas, pudieran servir de ayuda a los estudiantes para guiar los contenidos que el profesor considera como referencia para las pruebas de evaluación, así como para alertar sobre contenidos que el profesor considera más complejos o que pueden dar lugar a mayores dificultades. Se presentan a continuación algunos ejemplos de comentarios, que se han dividido en cuatro grupos de acuerdo con el diferente propósito e información que reflejan.

Comentarios en los que se recogen aspectos complementarios del contenido o que están fuera de las expectativas de aprendizaje marcadas por el docente

En este grupo hemos incluido aquellos comentarios en los que el estudiante recoge información sobre algún contenido concreto que el profesor comenta en el aula a modo de ampliación, generalmente de forma puntual, pero que está fuera de las expectativas de aprendizaje que el docente ha considerado para ese tema y nivel educativo. Los alumnos que anotan este tipo de comentarios pueden estar mostrando una mayor curiosidad e interés por conocer más aspectos relacionados con el tópico desarrollado, aunque también puede ser que sean anotados por el estudiante sin que éste sea consciente de su carácter como contenido de ampliación.

Estos comentarios se han detectado en un número muy reducido de cuadernos, siendo difícil que haya más de un alumno en cada clase que decida recoger elementos así, lo que evidencia que son aspectos que muy pocos alumnos han considerado como dignos de anotar. Los alumnos con alguna anotación de este tipo son A1, A3, A4, A10, A20, A22, A33 y A38. La Figura VII.34 refleja dos ejemplos. En el escaneo de la parte izquierda se muestra una anotación del alumno A3 en la que escribe la definición de "función idempotente", indicando además que se trata de una característica muy poco frecuente entre las funciones. En la parte derecha se muestra un comentario de la alumna A33 donde se introduce el término "extrapolación lineal" como comparación con el de interpolación lineal, que es el tratado en el currículo.

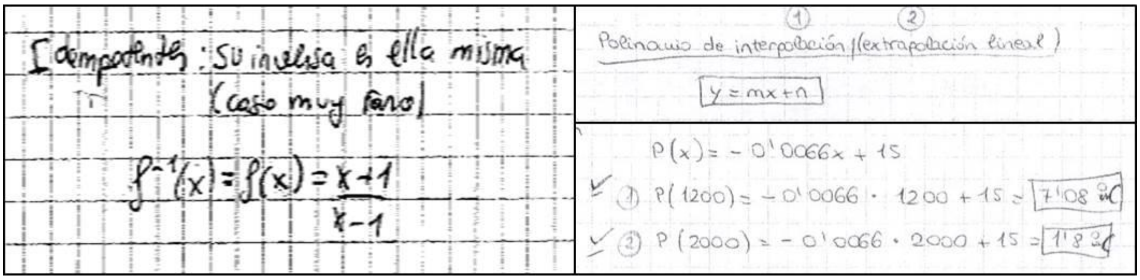


Figura VII.34. Escaneos con reseñas que reflejan aspectos de ampliación, fuera de las expectativas de aprendizaje del docente (Izda.: Alumno A3, Dcha.: Alumna A33).

Comentarios en los que se recogen aspectos curriculares o decisiones curriculares del docente relacionadas con el bloque de contenidos

Dentro de este grupo se han incluido aquellos comentarios escritos por los alumnos en los que pretenden reflejar aspectos curriculares acerca del bloque de contenidos de Análisis Matemático en 1º de Bachillerato o decisiones asociadas a ese análisis y planificación curricular realizada por el docente.

Por una parte, hay dos alumnos (A3 y A10) que han recogido un comentario del Docente 1 al iniciar el bloque de Análisis Matemático, en el que se explica de forma somera cuáles son los temas que van a componer el bloque en este curso y cuál es el objetivo final del mismo. Únicamente estos dos alumnos han considerado como digno de anotar un comentario así, que consideramos útil para que los estudiantes posean de una referencia siempre presente de la estructura y la planificación del bloque de contenidos, lo que facilitará el desarrollo y la ubicación de las diferentes estructuras conceptuales que lo componen. La Figura VII.35 muestra el escaneo de A3 con dicho comentario, recogido de un modo muy escueto (únicamente los nombres de los temas, destacando el último, y el objetivo final marcado por el docente: ser capaz de representar gráficamente funciones utilizando las herramientas trabajadas).

Figura VII.35. Anotación que recoge la estructura del bloque de Análisis (A3).

Por otro lado, encontramos algunas anotaciones en los cuadernos en las que se registra información sobre decisiones curriculares del docente, generalmente para indicar aspectos que no se trabajarán en el curso actual. En la mayoría de casos únicamente se registra un comentario con esa información (como el recogido en la Figura VII.36, de la alumna A25, sobre la resolución de indeterminaciones del tipo $(\to 1)^{\to\pm\infty}$). En algún caso, además, se indica el motivo de la decisión docente, generalmente ligada a la consideración de que supondría una demanda cognitiva demasiado elevada (aspecto demasiado complejo) para los alumnos del curso actual.

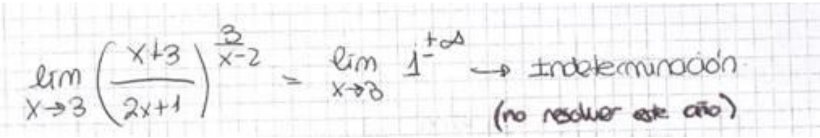


Figura VII.36. Comentario que recoge información sobre una decisión curricular adoptada por el docente (Alumna A25).

De nuevo, las anotaciones de este segundo tipo han sido muy reducidas, y han aparecido únicamente en algunos alumnos en concreto: A10, A23, A25, A31 (en varias ocasiones) y A38.

Aunque sea de forma tangencial, en este grupo también pueden incluirse las anotaciones que realizan algunos alumnos en las que se recogen las referencias de las actividades que el docente plantea para realizar fuera del aula (como “deberes”). Encontramos este comportamiento especialmente en cinco alumnos: A20, A21, A34, A37 y A39; y de forma más esporádica en A31 y A38. En general, estos alumnos parecen preferir anotar estas referencias en su cuaderno frente a otras posibilidades como, por ejemplo, una agenda. En particular, el alumno A39, en la entrevista en la que participó, nos comentó que prefería hacerlo así porque siempre utiliza el cuaderno como referencia para ver si tiene o no tareas pendientes de la asignatura.

Comentarios en los que se recogen aspectos relacionados con el análisis de las limitaciones y las dificultades de aprendizaje destacadas por el docente

En este último grupo hemos situado aquellos comentarios escritos por los estudiantes en sus cuadernos que recogían información y señales de alerta proporcionadas por el docente sobre aspectos o procesos que él o ella consideran más difíciles o complejos, así como algunos comentarios específicos para intentar facilitar algunos de ellos.

Estos comentarios han estado ligados en su mayoría a aspectos procedimentales y se han detectado específicamente en una de las aulas: el aula de Ciencias Sociales de la Docente 3. Esta profesora, en una entrevista informal con ella, nos indicó la especial dificultad que ella consideraba que tenían los contenidos de este bloque para los alumnos de esta modalidad de Ciencias Sociales. Esta dificultad puede haber dado lugar a la presencia de estas alertas ante procesos más complejos y, también, a la presencia de algunos comentarios que busquen facilitar esos procesos. No obstante, un abuso de este tipo de “trucos” o “comentarios útiles” podría derivar en que los estudiantes desarrollaran de forma satisfactoria los procesos a través de esquemas siguiendo una relación de pasos, pero sin entender qué es lo que realmente están haciendo. Es decir, en el desarrollo de una comprensión más *instrumental* que *relacional*, utilizando la terminología de Skemp (1976), basada en la memorización y reproducción de reglas y pasos a seguir. Este hecho entronca con que tres de los cuatro alumnos entrevistados de esta aula hayan mostrado un rol y una utilización del cuaderno muy basada en la revisión y en la reproducción tanto de la teoría como de las actividades prácticas existentes en su cuaderno. Hemos encontrado comentarios con ambos propósitos en seis de los doce alumnos de esta aula: A31 (en esta alumna son más frecuentes), A34, A35, A36, A38 y A41.

En la Figura VII.37 se muestra un ejemplo de anotación, tomada del cuaderno de A31, en el que la alumna, de forma destacada, recoge la dificultad que tiene el trazado adecuado de la curvatura de una rama de hipérbola, en una función definida a trozos en la que, además, indica el nombre que recibe la gráfica de cada uno de los dos trozos (recta e hipérbola).

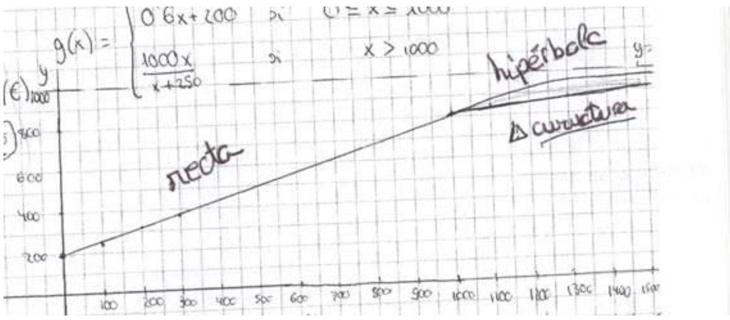


Figura VII.37. Anotación acompañada de una marca con la que la alumna A31 destaca un aspecto considerado por la Docente 3 como más dificultoso.

Por otra parte, la Figura VII.38 recoge un escaneo del alumno A35 en el que se observa la escritura de una regla de actuación, a modo de “truco”, que proporcionó la docente para conseguir realizar representaciones gráficas correctas de funciones de proporcionalidad inversa, a partir de una tabla de valores con “valores adecuados”. En este caso concreto, se recomienda utilizar tres valores positivos y tres negativos.

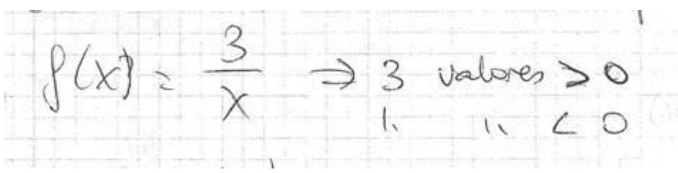


Figura VII.38. Comentario del alumno A35 en el que recoge un “truco” proporcionado por la Docente 3 para representar funciones de proporcionalidad inversa.

VII.3.4. COMENTARIOS DIRECTAMENTE ASOCIADOS CON LA EVALUACIÓN DE LA ASIGNATURA

En este cuarto gran grupo se recogen aquellas anotaciones cuyo propósito principal es el de registrar en el cuaderno información directamente relacionada con la evaluación de la asignatura, información que es comentada por el docente en el transcurso de las clases. Generalmente, esta información está relacionada con las pruebas escritas de evaluación que se realizaron, en todas las aulas, como base para evaluar al alumnado.

Es necesario indicar que este tipo de comentarios han sido muy reducidos. Únicamente se ha encontrado alguna anotación con este propósito en cuatro de los 41 estudiantes participantes: A1, A3, A11 y A31. Por ejemplo, en el cuaderno de la alumna A11 encontramos un comentario indicando la fecha de una prueba de evaluación y los temas del bloque que entran en el mismo. Sorprende el hecho de que únicamente un estudiante haya decidido hacer una anotación de este tipo en su cuaderno. Pareciera que para recoger esta importante información los estudiantes no confiaran en su cuaderno, al contrario de lo que sucedía en algunos alumnos que sí que apuntaban con frecuencia las actividades que se planteaban como “deberes” para su realización fuera del aula.

En la Figura VII.39 se muestran dos escaneos con comentarios destacados sobre la evaluación de la asignatura. En el de la parte izquierda, el alumno A1 recoge un comentario del docente que parece indicar la mayor probabilidad de que existan preguntas sobre un determinado tópico (en este caso, la composición de funciones) en un examen. En la parte derecha se presenta un escaneo de A31 con un comentario que intenta recoger la preferencia que la docente muestra en la clase con respecto a la forma en la que debe hacerse referencia a las asíntotas horizontales en el examen, escribiendo el nombre completo en lugar de una abreviatura como “A.H.”.

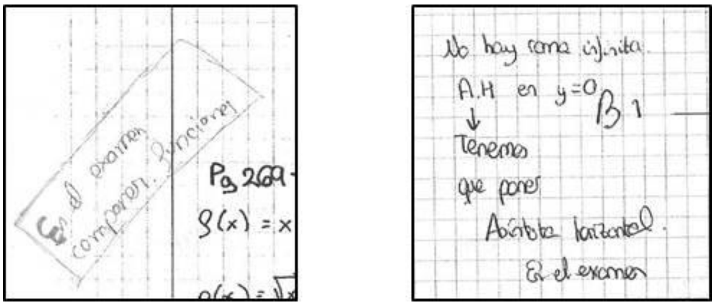


Figura VII.39. Comentarios relacionados con la evaluación de la asignatura que son registrados por los alumnos (Izda.: Alumno A1, Dcha.: Alumna A31).

VII.3.5. COMENTARIOS DE LOS ALUMNOS QUE EXTERNALIZAN ASPECTOS PERSONALES SOBRE SU PROPIA COMPRENSIÓN Y EL DESARROLLO DEL TEMA

En este quinto y último gran grupo de comentarios hemos recogido aquellas anotaciones, que presentan una diferencia muy importante con respecto a cualquiera de los cuatro grupos anteriores. Mientras que los comentarios anteriores estaban basados en el discurso y la información proporcionada por el profesor o en propio contenido matemático en sí mismo, en las anotaciones incluidas en este grupo son los propios estudiantes los que externalizan y deciden dejar constancia en sus cuadernos algún aspecto personal. Estos aspectos, generalmente, están relacionados con su propia comprensión y aprendizaje de los tópicos tratados, o con futuras acciones que el propio estudiante se aconseja a sí mismo para progresar en esta comprensión. Por tanto, serían comentarios que se enmarcarían dentro de un dominio privado (Fried & Amit, 2003) y con una escritura de tipo expresivo (Britton *et al*., 1975), por el bien del propio escritor.

Estas anotaciones han tenido una incidencia desigual en los estudiantes. En un gran número de alumnos no se ha detectado ninguna anotación con el propósito anterior. Únicamente en 9 de los 41 estudiantes sí que se ha encontrado algún comentario así, y con cierta frecuencia en algunos alumnos: A17, A31, A32, A33, A35 y A38. Todos estos estudiantes pertenecen a clases de la modalidad de Ciencias Sociales. La mayor frecuencia de anotaciones de este tipo en alumnos de esta modalidad pudiera mostrar una mayor inseguridad sobre su capacidad para comprender los conceptos matemáticos tratados, o una mayor necesidad para externalizar esos aspectos relacionados con la comprensión de los conceptos y sus posibles dudas.

Otra característica general que han presentado las anotaciones de este tipo es que éstas han tenido un carácter muy escueto cuando se han producido: alguna marca, palabra o frase aislada. Además, en ocasiones son marcas con lápiz o mucho menos marcadas que resto del texto. Este hecho pudiera indicar que, a pesar de que los profesores no han revisado los cuadernos de sus alumnos y dichos cuadernos han permanecido dentro del *dominio privado* del estudiante (en términos de Fried y Amit, 2003), los alumnos han podido manifestar ciertas reticencias por hacer demasiado explícitos en su cuaderno estos aspectos personales sobre su propia comprensión y aprendizaje. En cierto modo, la utilización que hacen muchos estudiantes de su cuaderno, como un instrumento que tiene el contenido de referencia para estudiar la asignatura, y la preferencia que se muestra en muchos de ellos porque el cuaderno esté compuesto por contenido terminado y validado (como los alumnos del Perfil 1[83]), hacen que algunos alumnos puedan llegar a ver incluso como un obstáculo la escritura de comentarios de este tipo, o que decidan evidenciar de alguna manera que se trata de anotaciones personales. Este último ha sido el caso de las alumnas A31 y A38, que han reflejado anotaciones de este tipo utilizando lápiz o un color diferente al del resto.

Dentro de este gran grupo, existen dos tipos de anotaciones más frecuentes, además de otras anotaciones aisladas de interés que también destacaremos.

Por una parte, han existido varios comentarios, sobre todo del alumno A17, pero también de A33 y de A35, en las que se escribe una acción verbal, generalmente en infinitivo. Interpretamos estas marcas verbales como acciones que el propio estudiante se aconseja a sí mismo como acciones de interés o recomendadas en el marco de su estudio y aprendizaje del tema tratado. Algunas de ellas, como “Revisar”, “Repasar”, “Estudiar” o “Mirar” parecen estar relacionadas con la necesidad de estudiar o de repasar posteriormente el contenido registrado o trabajado. En otras como “Hacer” el estudiante parece indicar la conveniencia de intentar resolver alguna actividad en concreto; generalmente porque la misma se ha transcrito directamente de su corrección en el aula, o porque algún intento de resolución se ha dejado incompleto. Por último, en el alumno A17 encontramos varias veces escrita la palabra “Preguntar”. En la Figura VII.40 se recoge un escaneo con una anotación tal, asociada al registro de la teoría sobre la ecuación punto-pendiente para una recta. Con esa anotación, el alumno pareciera querer evidenciar que no ha comprendido bien el contenido o que tiene alguna duda al respecto, pero sin que éstas lleguen a explicitarse.

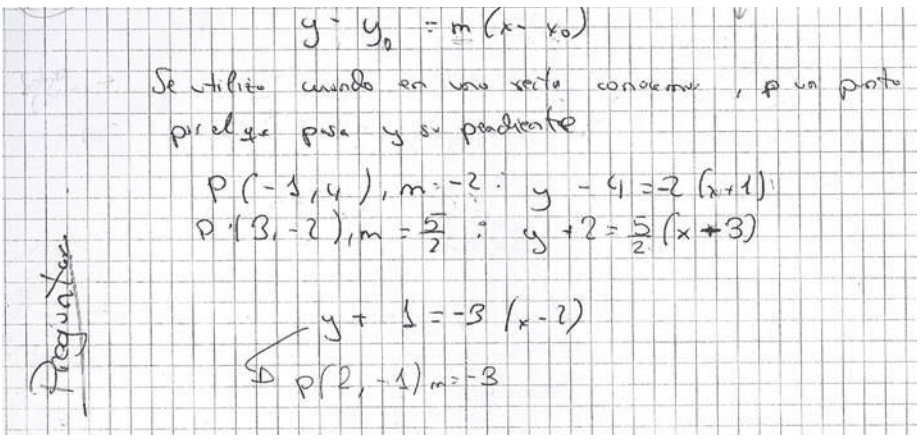


Figura VII.40. Comentario en el margen con el que el alumno parece evidenciar la falta de comprensión de algún aspecto de su registro teórico (A17).

[83] Los perfiles detectados según el diferente rol y uso del cuaderno que presentan los alumnos entrevistados se explican con detalle en el apartado VI.4 de esta memoria de tesis doctoral.

Por otra parte, han existido también marcas en varios alumnos que hemos asociado a la presencia de posibles dudas o de problemas en la comprensión de algunos contenidos teóricos o prácticos, o del resultado obtenido al final de un proceso. En muchos casos, estas marcas se han limitado a la escritura explícita de un signo de interrogación por parte del estudiante, sin mayor explicación ni concreción. Se han detectado marcas así en los estudiantes A13, A17, A20, A31, A32, A33 y A34. Además, salvo en el caso de A31 y A34, el cuaderno no recoge ninguna evidencia de que los alumnos hayan tomado alguna acción al respecto para superar esa posible complicación o duda. La Figura VII.41 muestra un escaneo de la alumna A31 en la que da respuesta a la duda que le surge en su intento de resolución de la actividad. En concreto, la duda estaba relacionada con la interpretación del resultado del límite en un punto en términos de la existencia o no de asíntotas verticales.

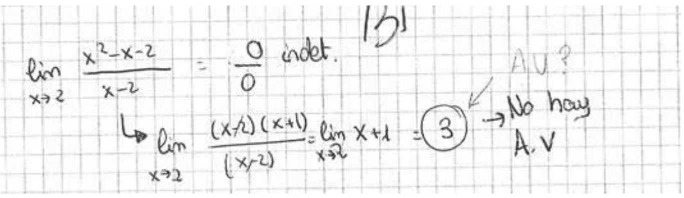


Figura VII.41. Comentario junto con un signo de interrogación que expresa una duda de la alumna, que es resuelta durante la corrección de la actividad (A31).

En algún caso esporádico, estos signos de interrogación se han sustituido o combinado con signos de exclamación (en A35 y A38), que parecen tener un propósito similar, pero marcando una mayor sorpresa e incredulidad de los estudiantes. Generalmente, han aparecido asociados a resultados inesperados o ante la aplicación de un proceso que resulta erróneo para resolver una tarea.

Como puede deducirse de los párrafos anteriores, muchas de las marcas y anotaciones de los estudiantes son muy escuetas cuando intentan reflejar la presencia de una duda o de un aspecto que no están comprendiendo bien. En algún caso aislado sí que se anota algo verbalmente, como la alumna A33 que escribe “No sé si está bien” en un gráfico que realiza y en el que duda de la corrección del mismo.

Destacamos por último otro tipo de marcas que se han presentado en algún estudiante de forma aislada. El alumno A35 escribe hasta en dos ocasiones comentarios negativos en los que alude a la imposibilidad para él, en ese momento, de resolver la actividad propuesta: “No sé hacerlo” o “No sé hacer derivadas”. La alumna A38 escribe un comentario personal en el que, de forma muy escueta, destaca la mayor dificultad que tiene para ella un proceso concreto. Por último, la alumna A31 escribe un comentario con el que externaliza que no entiende cómo ha obtenido un resultado en una actividad que resulta ser el correcto.

VII.4. SÍNTESIS Y REFLEXIÓN CONJUNTA DE LAS INVESTIGACIONES PRESENTADAS EN ESTE CAPÍTULO

En los capítulos anteriores (Capítulos V y VI) se desarrolló un análisis, desde una perspectiva global, de las diferentes formas de elaborar y utilizar el cuaderno de matemáticas entre el alumnado participante. A través del análisis pormenorizado de la parte de los cuadernos generada en el bloque de Análisis Matemático y a través de entrevistas, se han detectado varios perfiles de elaboración del cuaderno y varios modos de utilización, también relacionados con la concepción sobre el cuaderno que tienen los estudiantes y el rol que juega para ellos. Todo ello se presentó en los capítulos V y VI. Este capítulo VII, y las investigaciones específicas que lo componen, han pretendido servir como complemento para el análisis global presentado en los capítulos V y VI. Estas investigaciones nos han permitido detectar aspectos y comportamientos particulares o más concretos, tanto por el tema tratado como por el contexto o las situaciones a las que hacen referencia.

El análisis pormenorizado de las unidades de registro existentes en los cuadernos ha generado una gran cantidad de información de interés sobre diferentes aspectos y dimensiones contenidas en el marco de análisis, información que se refleja en las plantillas resultantes de la aplicación de ese marco y rellenadas por el EI. Además de las valoraciones numéricas de los indicadores (que han supuesto la base del análisis presentado en el Capítulo V), existe mucha información contenida en las explicaciones o justificaciones de esas valoraciones. Algunos aspectos particulares de esas explicaciones detalladas se han tratado en este capítulo VII. Toda esta información nos ha servido para ratificar nuestra concepción inicial sobre la potencialidad del cuaderno de matemáticas como un instrumento muy útil tanto para el docente como para la investigación en Educación Matemática, un hecho ya reflejado en los antecedentes (Masingila *et al*., 1997; Fried & Amit, 2003).

En concreto, y dentro de las muchas posibilidades existentes, en este capítulo VII se han presentado tres investigaciones específicas en las que se ha buscado conocer más acerca de cuáles son los aspectos que los estudiantes deciden registrar en sus cuadernos. Por una parte, los dos primeros apartados contienen investigaciones orientadas a examinar cómo son los apuntes tomados por los estudiantes en las exposiciones teóricas de los docentes, en situaciones concretas del bloque de Análisis Matemático que se han considerado como especialmente interesantes: el foco conceptual de las reglas y técnicas de derivación (debido a las características de la exposición docente, con un mayor número de justificaciones y de relaciones entre los elementos) y la introducción a los alumnos de un concepto clave, como el concepto de límite, desde un punto de vista intuitivo. Estas dos situaciones también se diferencian en que el foco de la primera situación tiene un mayor peso procedimental que conceptual, al contrario que lo que sucede en el segundo. El tercer apartado recoge un análisis detallado de aquellos comentarios, generalmente verbales, que los estudiantes han considerado como suficientemente relevantes en el marco del contexto del aula para recogerlos en sus cuadernos, estudiando su tipología y el diferente propósito para el estudiante que pueden tener.

En primer lugar, estos análisis en profundidad, especialmente los presentados en los dos primeros apartados, nos han permitido conocer mejor y con una mayor concreción algunas características asociadas a la metodología y al contenido presentado por los tres docentes participantes, a través de un análisis comparativo. Aunque los tres profesores hayan desarrollado una presentación de la teoría de tipo expositivo, se han detectado varias diferencias entre el Docente 1 y los otros dos Docentes, 2 y 3. Estos últimos han presentado más afinidades entre ellos.

Los análisis específicos presentados en este Capítulo VII han mostrado que el Docente 1 ha dado una mayor importancia a los aspectos conceptuales que los otros dos docentes, con una mayor preocupación por la estructura matemática subyacente y por mostrar algunos aspectos de la práctica matemática a sus alumnos. Por ejemplo, ha sido el único docente que ha introducido una “definición general”, de tipo descriptivo, del concepto de límite al presentar el mismo, ha recurrido en más ocasiones a la anticipación de conceptos o técnicas que posteriormente iban a tratarse en la clase o a mostrar su necesidad de éstos, y ha desarrollado un mayor número de justificaciones, especialmente en el foco de las reglas y técnicas de derivación y utilizando la justificación como medio para obtener la regla a partir de otras o a partir del cálculo del límite del cociente incremental. Además, este docente también ha tenido un ritmo de exposición más alto que el de los otros dos profesores, al menos en la parte sobre reglas y técnicas de derivación, como muestra la comparación de los mapas de conceptos y relaciones y el contenido expuesto en el foco de reglas y técnicas de derivación, teniendo en cuenta que los tres docentes dedicaron un mismo número de sesiones a la exposición teórica de este contenido.

Por el contrario, los Docentes 2 y 3 han mostrado una preocupación mucho mayor por el desarrollo de ejemplos, con una docencia más enfocada en aspectos procedimentales y de aplicación práctica del contenido. Dos de las aulas de estos docentes pertenecían a la modalidad de Ciencias Sociales, lo que puede ayudar a explicar este hecho, pero el comportamiento de la Docente 3 fue trasladable al Bachillerato Científico-Tecnológico que también participó en esta investigación. El Docente 2 expuso un número mucho mayor de ejemplos al presentar las reglas de derivación, el Docente 3 ejemplificó también todas ellas. También, ambos docentes optaron por presentar el concepto de límite a sus alumnos a través de diferentes ejemplos “modelo”, con situaciones particulares en las que se explicaba el resultado y con las que se intentaba cubrir “todas las opciones posibles” (presentación con un marcado carácter *ostensivo*, Lacasta y Wilhelmi, 2010), pero sin que existiera una definición descriptiva general del concepto, a diferencia de lo sucedido en el aula del Docente 1.

Entre los Docentes 2 y 3 también existieron algunas diferencias, puesto que la Docente 3 hizo una mayor enfatización de las dificultades y de los pasos a seguir en los procedimientos, con una mayor tendencia al tratamiento de “situaciones particulares” (por ejemplo, en la forma de tratar la regla de la cadena, con un enunciado general y, posteriormente, el tratamiento de una serie de “composiciones usuales”) y con una mayor presencia de “trucos” o de “comentarios útiles” (especialmente en el aula de Ciencias Sociales), con los que más que tratar las dificultades asociadas a algunos conceptos y procedimientos, se tiende en ocasiones a esquivar o a soslayar éstas a través de la reproducción de una serie de pasos y procedimientos, que pueden fomentar el desarrollo de una comprensión meramente instrumental (Skemp, 1976).

Así, y en resumen, mientras que el Docente 1 ha intentado combinar una concepción operacional con algunos aspectos estructurales (en palabras de Sfard, 1991) sobre los conceptos introducidos cuando había ocasión, en los otros dos docentes ha predominado una concepción operacional (que, como indica Sfard, 1991, suele ser la primera concepción que desarrollan los estudiantes), aunque con un énfasis excesivamente procedimental y de aplicación directa en el caso de la Docente 3, especialmente en el aula de Ciencias Sociales. No obstante, y en líneas generales, los diarios de clase (Anexos B.2 a B.5) ponen de manifiesto que las tareas desarrolladas en las cuatro aulas participantes se han caracterizado por la presencia de un alto volumen de cálculos de tipo algebraico, o de aplicación de reglas o fórmulas, con un tratamiento muy somero de aspectos conceptuales, prácticamente inexistentes en las tareas y, también, en las pruebas de evaluación a las que hemos tenido acceso y que han sido propuestas por los profesores en las cuatro aulas.

El análisis detallado de las notas tomadas por los estudiantes en las dos situaciones que se han estudiado en profundidad ha mostrado la existencia de una alta diversidad en los apuntes y sus características. Esa diversidad ha sido especialmente apreciable entre los alumnos del Docente 1 en la presentación del foco de reglas y técnicas de derivación y en los aspectos verbales recogidos durante la presentación del concepto de límite por parte de los estudiantes de las dos aulas del Docente 3.

En líneas generales, cuando el tópico ha tenido un mayor carácter procedimental (foco de las reglas y técnicas de derivación), los enunciados se han tomado en un porcentaje muy alto en gran parte del alumnado participante, lo cual concuerda con los aspectos comentados por algunos alumnos en las entrevistas en las que destacaban las fórmulas y los aspectos de aplicación de la teoría como los más destacados para su registro. La excepción a este comportamiento se ha encontrado en bastantes estudiantes de la clase del Docente 1, donde la transcripción de estos enunciados ha sido mucho menor y con una mayor variabilidad. Pensamos que esto puede deberse no tanto a que los estudiantes tengan una concepción distinta de qué aspectos son los destacados como al matiz metodológico de que el docente institucionalizara el enunciado de las reglas con posterioridad al desarrollo de su justificación para obtener las mismas (lo cual se aleja de la presentación habitual, primero enunciado y posteriormente ejemplo y/o justificación) y, también, a la dificultad de los alumnos para reconocer los diferentes elementos y procesos matemáticos y su papel (Ibañes y Ortega, 2003). Han existido también diferencias importantes en la transcripción de justificaciones, en muchos casos incompletas (relacionado con la problemática del salto de la derivada puntual a la función derivada, una dificultad detectada y estudiada por Badillo *et al*., 2011) y con errores al transcribirlas que marcan una dificultad de los estudiantes en su seguimiento o en su transcripción simultánea a la exposición, y que supone una limitación para el registro del enunciado de la regla.

Ante un contenido con una mayor carga conceptual, como es la introducción del concepto de límite (aunque sea desde un punto de vista intuitivo), se ha detectado una transcripción muy reducida de aspectos que estuvieran relacionados con la estructura conceptual del concepto de límite y que son claves en él, como son la idea de tendencia, de superación de una cota, o la coordinación de las aproximaciones en las variables independiente y dependiente. Es cierto que varios alumnos del Docente 1 sí que recogen la definición descriptiva inicial del concepto, y que algunos estudiantes de las aulas de la Docente 3 recogen aspectos verbales asociados a la estructura del concepto, pero estos últimos tienden a ser incompletos (por ejemplo, se recogen aspectos sobre la aproximación únicamente en una variable, y en ocasiones sin indicar el valor al que se produce esa aproximación). Los alumnos han parecido valorar menos la recogida de este tipo de aspectos conceptuales frente a otros procedimentales, o a la mera transcripción de diferentes “ejemplos modelo” en situaciones que involucran al concepto de límite, que ha sido muy elevada entre muchos alumnos en las aulas de los Docentes 2 y 3, pero sin explicar los resultados de los ejemplos recogidos simbólicamente.

Estos hechos también pueden ser una consecuencia de los aspectos que los docentes han enfatizado en el desarrollo de las clases y en la evaluación de la asignatura. Por ejemplo, muchos alumnos en las entrevistas destacaron una visión de la pizarra como un medio en el que el docente refleja los aspectos que él cree más importantes, y que terminan siendo transcritos con una incidencia mucho mayor entre el alumnado frente a, por ejemplo, el discurso oral. Así, para muchos alumnos la decisión del docente sobre qué medio de exposición utilizar ya supone una discriminación en la importancia que éste otorga a unos contenidos frente a otros. En estas investigaciones específicas del Capítulo VII, la pizarra se ha utilizado para la escritura de fórmulas y el desarrollo de ejemplos, pero no para explicar éstos ni para justificar los resultados en los “ejemplos modelo” sobre el concepto de límite. Así, el comportamiento docente al tratar y evaluar el contenido puede influir y reforzar ese rol predominante otorgado a los aspectos procedimentales, así como generar y reforzar algunas concepciones en los propios alumnos sobre qué son las matemáticas y en qué consiste la actividad matemática (actividad matemática como la elección y la aplicación de un procedimiento adecuado para resolver una actividad), concepciones que emergieron en la entrevista a algunos alumnos participantes (Capítulo VI). Por tanto, es necesario que los docentes sean conscientes del papel implícito que juegan todas estas variables en su docencia, así como la resistencia o las dificultades que pueden tener algunos estudiantes para entender correctamente cambios metodológicos que vayan más allá de la presentación de una “matemática ya terminada” y de una enfatización de facto de los aspectos procedimentales y de aplicación directa.

Además, las entrevistas a los alumnos (Capítulo VI) pusieron de manifiesto la presencia de dos perfiles (Perfiles 1 y 2) en los que el contenido teórico de referencia para el estudio y aprendizaje de los alumnos ha sido el que ellos tenían recogido en sus cuadernos, siendo muy dependientes de este instrumento y de su contenido. En esos casos, parece existir una especie de “efecto túnel” en relación al cuaderno, en el que lo que no está recogido en él, no existe, sin considerar otras posibles fuentes de información y de conocimiento. Además, muchos de los alumnos de estos perfiles, en las entrevistas, han verbalizado hábitos de estudio de tipo memorístico o reproductivo. En los estudiantes con estos hábitos, el modo en que éstos recogen los contenidos teóricos supone un factor determinante para su aprendizaje de los conceptos y el *concepto imagen* (Tall & Vinner, 1981) de ellos que construyen, por lo que su responsabilidad en la toma de notas y el modo en que ésta se desarrolla es muy alta. En relación a los estudios específicos presentados en este capítulo, la investigación sobre la toma de apuntes en la presentación del concepto de límite evidenció que bastantes estudiantes (12 de los 33 que tomaron alguna nota) no recogieron ningún aspecto que se considerara relacionado con la estructura conceptual del concepto de límite, y únicamente recogieron ejemplos de "situaciones modelo" sin explicaciones. Este hecho puede llegar a hacer que los estudiantes respondan adecuadamente en tareas de evaluación que correspondan a esos "modelos", pero es muy improbable que faciliten el desarrollo de una comprensión del concepto de límite más allá de la instrumental (Skemp, 1976), como se discute en el subapartado VII.2.

La preferencia mayoritaria por los aspectos y contenidos de tipo procedimental y la influencia del medio de exposición (como la utilización de la pizarra) también han provocado una transcripción muy reducida en muchos alumnos de comentarios de los docentes que tuvieran la pretensión de relacionar diferentes aspectos, de observaciones de tipo teórico o de aspectos lógicos asociados al cumplimiento o no de condiciones para poder aplicar un proceso o un resultado teórico. Pensamos que el déficit de comentarios de este tipo, que suelen formar parte del discurso oral del docente, puede indicar su menor valoración y consideración como aspectos relevantes por los propios estudiantes, además de poder dificultar el desarrollo en los alumnos de estructuras conceptuales más amplias alrededor de los conceptos matemáticos trabajados. Todo ello puede suponer una limitación para transitar desde una concepción operacional de los conceptos matemáticos hacia una concepción estructural (Sfard, 1991), en futuros cursos.

En relación a los ejemplos, el primer estudio específico (Apartado VII.1) ha evidenciado una alta transcripción, en general, de estos elementos. Este hecho estaría en consonancia con la mayor importancia concedida a los aspectos procedimentales. No obstante, se han detectado varios perfiles de comportamiento selectivos en esa transcripción. Entre ellos están los alumnos que sí recogieron al menos un ejemplo de cada regla, pero que en aquellas reglas con varios ejemplos no recogieron todos. También destacan los alumnos que han tendido únicamente a registrar algún ejemplo de aplicación de una regla en el caso en que el profesor hiciera más de un ejemplo. En el estudio sobre la presentación intuitiva del concepto de límite, también se ha detectado la menor transcripción de algunos ejemplos en situaciones que ofrecen cierta resistencia a ser aceptadas entre los alumnos, como los ejemplos de límites de una función que no existen. Es decir, el estudio en profundidad de las anotaciones de los alumnos ha permitido detectar diferentes situaciones asociadas a la transcripción de ejemplos, por lo que los alumnos no parecen dar el mismo valor o asignar la misma relevancia a todos los ejemplos.

La situación del cuaderno en las aulas investigadas dentro del *dominio privado* del estudiante (en términos de Fried y Amit, 2003), sin que exista responsabilidad de lo realizado en él ante el docente y los compañeros, podría haber posibilitado la construcción del cuaderno como un instrumento para los estudiantes de reflexión sobre su aprendizaje y sobre el desarrollo de su comprensión y de sus conocimientos. Sin embargo, en el cuaderno hemos encontrado una presencia muy escasa de muestras de *escritura expresiva* (en el sentido de Britton *et al*., 1975), a través de la cual el propio estudiante buscara externalizar y clarificar sus pensamientos. El análisis presentado en el Apartado VII.3 muestra que únicamente en 9 de los 41 alumnos participantes hay alguna señal o alguna marca verbal con ese propósito. Además, generalmente éstas han sido muy escuetas (signo de interrogación para marcar una duda, una palabra aislada como “Repasar”, “Estudiar”…), con poco desarrollo y generalmente evidenciando de algún modo que se trata de una anotación personal (uso de lapicero, o de otro color de bolígrafo…) La anotación más destacada es la que se muestra en la Figura VII.11, con una anotación de tipo relacional de la alumna A33 con la que externaliza sus pensamientos y llega a relacionar la regla para derivar la función identidad con la regla para derivar cualquier función potencial, que la Docente 3 había tratado por separado en su exposición.

Pensamos que la presencia muy reducida de marcas y señales personales del alumno (sobre su comprensión o dudas, o externalizando sus pensamientos o conjeturas) muestra la existencia de ciertas reticencias en los alumnos a que quede constancia de aspectos de este tipo en su cuaderno. Esas reticencias no se derivan únicamente de la posibilidad hipotética de que el profesor revisara los cuadernos, sino del uso del cuaderno que hacen muchos estudiantes, que ven este instrumento como un “manual” de referencia de la asignatura que se construye en el desarrollo de la misma, y que es el instrumento base para el estudio de la asignatura a través de su revisión (por ejemplo, los alumnos entrevistados que han sido situados en los Perfiles 1 y 2, Capítulo VI). Esta visión puede hacer que vean estas anotaciones personales como un posible obstáculo para el desarrollo de esa revisión posterior, al no ser este último un contenido “validado” en el aula. Esa visión del cuaderno como “manual”, en cierto modo equivalente a lo que sería un libro de texto, imposibilita que el cuaderno sea visto como un lugar donde los alumnos exploren y reflexionen sobre el contenido matemático (Fried & Amit, 2003), aunque podrían hacer esta exploración y reflexión en otro lugar. Además, y como han constatado los estudios específicos desarrollados en este capítulo VII, ese cuaderno como “manual” no está exento de contener errores (aunque el alumno no sea consciente de ellos) y alberga un contenido que no siempre refleja adecuadamente los tópicos desarrollados en el aula, lo que supone una limitación muy importante del cuaderno y su funcionalidad dentro de esa visión y perfil de utilización.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES DE LA TESIS DOCTORAL, APORTACIONES, FORTALEZAS, DIFICULTADES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

En este octavo y último capítulo de la memoria de tesis doctoral, se presentan las conclusiones de la investigación realizada a partir de la discusión de los resultados obtenidos con respecto a los objetivos inicialmente planteados. Además, se presentan una serie de aspectos derivados de un análisis retrospectivo y de una reflexión de la investigación expuesta. Con ello se pretende servir de punto de partida para el planteamiento de nuevas investigaciones relacionadas con la que aquí se presenta.

Así, este último capítulo se compone de cuatro apartados. El primero de ellos recoge cuáles son las principales conclusiones extraídas del desarrollo de esta investigación centrada en el cuaderno de matemáticas. Como ya se han ido comentando y discutiendo los diferentes resultados obtenidos en el transcurso de la memoria (Capítulos V, VI y VII), en las conclusiones se exponen los principales resultados obtenidos en relación con los objetivos inicialmente planteados en este trabajo, para poder valorar y contrastar su grado de cumplimiento.

En el segundo apartado se destacan las principales aportaciones que pensamos que hace esta tesis doctoral, teniendo en cuenta tanto los instrumentos generados en su transcurso como su aportación a la rama de Didáctica de la Matemática.

El tercer apartado recoge un análisis de los principales puntos fuertes y débiles que merecen subrayarse en relación con la planificación y el desarrollo de este trabajo.

Por último, en el cuarto apartado, se explican varios aspectos que quedan como problemas abiertos asociados a esta investigación, así como una perspectiva de futuro indicando posibles vías para continuar la investigación sobre el cuaderno de matemáticas que aquí se presenta.

VIII.1. CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN REALIZADA

La investigación desarrollada nos ha permitido reafirmarnos en algunas de nuestras ideas e hipótesis iniciales sobre el cuaderno de matemáticas.

Este trabajo ha mostrado el potencial que tiene el cuaderno como un instrumento o un documento para la investigación en Educación Matemática, un potencial ya indicado por Masingila *et al*. (1997) y por Fried y Amit (2003). El cuaderno contiene una gran cantidad de información sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sobre lo desarrollado en el aula, y sobre los modos y hábitos de trabajo matemático de los alumnos. No obstante, también hay que tener presentes las limitaciones propias del instrumento, como son el hecho de que no recoja todo lo que ha podido suceder en un aula (oralidad, gestualidad), la posibilidad de que el contenido (por ejemplo, la resolución de una actividad) pueda ser elaborado por el propio estudiante o pueda ser transcrito de otro medio, o la posibilidad de que el alumno pueda trabajar en otros lugares distintos al cuaderno. En este sentido, el cuaderno de matemáticas es un instrumento de investigación muy potente si se combina con otros instrumentos de recogida de información, como pueden ser observaciones o entrevistas, que permitan conocer e interpretar mejor el cuaderno y su contenido. Esto es lo que hemos intentado conseguir en esta investigación, a través de la información sobre el desarrollo de las clases (diarios en los Anexos B.2 a B.5, CD adjunto) y en las entrevistas sobre el cuaderno de matemáticas a algunos participantes.

La hipótesis principal que manteníamos al comienzo de la investigación es que existían diferencias importantes en el modo en que los estudiantes concebían, elaboraban y utilizaban su cuaderno de matemáticas en su estudio y aprendizaje de la materia. El avance de la investigación y los resultados obtenidos concuerdan con esa hipótesis, al menos en un entorno en el que los docentes han dado libertad a los alumnos para trabajar con el cuaderno, que se ha mantenido dentro del *dominio privado* de los estudiantes (Fried & Amit, 2003), y en un curso relativamente avanzado, como el de 1º de Bachillerato, en el que los estudiantes ya pueden haber desarrollado ciertos hábitos de trabajo con el instrumento a lo largo de su historial escolar. Por tanto, a pesar de que el cuaderno sea un instrumento que se considere como naturalizado e intrínseco al aula de matemáticas (como indican Villarreal y Borba,

2010) y no se cuestione generalmente ni su presencia ni las diferentes formas posibles de utilizarlo (al contrario de lo que sucede con las TIC o con las calculadoras), los resultados obtenidos en el desarrollo de la investigación han mostrado la pertinencia de plantearse ese mismo cuestionamiento en el caso del cuaderno de matemáticas. En definitiva, el cuaderno supone un medio más que transforma y que reorganiza los modos en los que un estudiante de matemáticas produce conocimiento y desarrolla su aprendizaje de la materia (un proceso al que Villarreal y Borba se refieren con el nombre genérico de "*humans-with-media*").

En este sentido, esta investigación ha aportado información acerca de los modos de elaboración y de utilización del cuaderno entre los estudiantes, y el modo en el que lo integran en su estudio y en su aprendizaje matemático, por lo que consideramos que esta investigación supone un avance importante en relación al conocimiento de un instrumento sobre el que apenas existen estudios en Didáctica de la Matemática.

A lo largo de los diferentes capítulos de esta memoria se han presentado los resultados obtenidos en el desarrollo de la investigación, junto con una discusión de los mismos en relación a otros resultados, variables contextuales y otros estudios previos. Así, en este apartado de conclusiones vamos a analizar el modo en que se han cumplido los objetivos planteados inicialmente[84] a partir de la investigación que aquí se expone y los resultados obtenidos en la misma.

En esta investigación de tesis doctoral se formuló un objetivo general y principal, enunciado en los siguientes términos:

> *OP. Detectar y caracterizar diferentes perfiles de elaboración y modos de uso del cuaderno como instrumento para el estudio y el aprendizaje de las matemáticas entre el alumnado de 1º de Bachillerato.*

La investigación nos ha permitido cumplir este objetivo principal propuesto inicialmente, encontrando una diversidad de perfiles de elaboración y de utilización del cuaderno entre el alumnado participante en este estudio.

Por una parte, se han detectado diferentes modos de elaboración tanto de las unidades que hemos llamado unidades teóricas (que recogen el contenido teórico de un tema) como de las unidades prácticas (con las actividades y tareas del tema, ya sean intentadas por el alumno o transcritas). Estos modos de elaboración han sido el resultado de la aplicación de un análisis de tipo cuantitativo (un análisis de

[84] Tanto el objetivo principal de esta investigación de tesis doctoral como los objetivos restantes derivados del mismo se enunciaron en el Capítulo 0 de esta memoria ("Introducción")

componentes principales seguido de un análisis clúster de tipo jerárquico y *aglomerativo*) a las valoraciones numéricas dadas por el EI a los indicadores de todas las variables. Se han implementado dos análisis paralelamente: uno para las UT y otro en las UP. Posteriormente, se han cruzado los modos de elaboración teórico-práctica asociados a un mismo tema y alumno, lo que ha dado lugar a una serie de perfiles de elaboración del cuaderno con una mayor incidencia y presencia en esta investigación.

El análisis cuantitativo en las unidades teóricas ha revelado seis modos diferentes de elaborar las UT entre el alumnado participante, dando lugar a seis grupos teóricos distintos, numerados como GT1 a GT6. La tabla VIII.1 recoge las características principales de cada uno de ellos.

GT	Características de la elaboración de las UT
GT1	Completitud, sobre todo en el registro de ejemplos, gráficas, observaciones y comentarios del docente. Cierta precisión en las transcripciones. Buena presentación y ortografía. Cierta personalización en la elaboración.
GT2	Completitud al registrar ejemplos y gráficas, pero presencia muy baja de elementos verbales. Pobre presentación. Gráficas poco precisas.
GT3	Estilo propio del alumno muy marcado en la organización y en la presentación. Gráficas precisas. Pobre ortografía y puntuación del texto.
GT4	Buena presentación, unidad continua en su desarrollo. Presencia muy baja de comentarios y observaciones de todo tipo. Pobre ortografía y puntuación. Errores de transcripción.
GT5	Registro muy bajo de ejemplos y de aspectos simbólicos y gráficos. Presencia de anotaciones personales y escritura expresiva. Buena puntuación y ortografía. Mala organización.
GT6	Completitud, gran número de elementos teóricos de todo tipo (cercano a un registro exhaustivo[85]). Precisión de las gráficas. Pobre presentación.

Tabla VIII.1. Características de los seis modos de elaboración de las UT detectados.

El grupo GT3 ha sido minoritario (sólo dos UT han sido ubicadas aquí en el desarrollo del análisis clúster), mientras que los modos de trabajo asociados a los grupos GT2, GT4 y GT6 se han mostrado como los más frecuentes. Son diversos los factores que han diferenciado unos grupos de otros. Uno de los principales es la diferente incidencia en el registro de los tipos de contenidos matemáticos considerados. Hay grupos que destacan por su completitud (GT1 y, sobre todo, GT6), pero en otros hay

[85] Considerando la terminología utilizada por algunos estudios de toma de apuntes (apartado I.2).

algunos tipos de contenidos que tienen mayor incidencia (como es el caso de GT2 o GT5, con cierta oposición entre sí). Otros factores en esta discriminación intergrupal han sido la incidencia y la precisión de los diferentes tipos de representaciones de los elementos matemáticos (verbal, simbólica, gráfica), la presencia de elementos o anotaciones personales, la presentación, la ortografía o la puntuación.

El análisis cuantitativo en las unidades prácticas ha deparado la existencia de dos grandes grupos de UP; denotados como GGP1 y GGP2, que, en general, evidencian una diferencia en la cantidad de trabajo plasmada por los alumnos en su cuaderno. Esos grandes grupos se han obtenido como unión de otros en el avance del análisis clúster, con algunas diferencias entre ellos, y en los que se aprecian de forma más o menos marcada las características globales del gran grupo. La Tabla VIII.2 recoge las características del GGP1 y sus diferentes subgrupos.

GGP	**Características globales de elaboración de este gran grupo de UP**
GGP1	Mayor número de tareas intentadas (lo que puede provocar más errores). Mayor número de explicaciones y comentarios. Presentación buena. Se rehacen las tareas resueltas de forma menos satisfactoria.
Subgru-pos	**Características particulares de elaboración de las UP**
GGP1S1	Algunas actividades a mayores. Buena presentación y organización. Representaciones verbales y gráficas escasas pero precisas. Se rehacen tareas. Falta de corrección de algunos errores.
GGP1S2	Completitud, muchos intentos de resolución, aunque con muchos errores. Buena presentación. Cierta personalización y escritura expresiva. Pocos comentarios y explicaciones sobre el desarrollo de las tareas.
GGP1S3	Muchas actividades a mayores de las propuestas. Bastantes comentarios y explicaciones de pasos y procesos. Pobre presentación. Falta de precisión en los elementos transcritos.
GGP1S4	Completitud en los ejercicios registrados e intentados. Alto número de comentarios, observaciones y explicaciones. Cierta personalización y precisión de los elementos transcritos. No siempre se corrigen los errores.

Tabla VIII.2. Características del GGP1 y sus subgrupos, de acuerdo a los modos de elaboración de las UP detectados.

De un modo similar, la Tabla VIII.3 recoge las características globales del GGP2 y de sus diferentes subgrupos.

GGP	**Características globales de elaboración de este gran grupo de UP**
GGP2	Menor número de tareas intentadas. Bajo número de explicaciones y comentarios. Pobre presentación. No suelen rehacerse las tareas resueltas de forma menos satisfactoria.
Subgru-pos	**Características particulares de elaboración de las UP**
GGP2S1	Pocas actividades recogidas, pero sí que son intentadas por el alumno, y de forma bastante satisfactoria. Indicación clara de los errores. Suelen rehacerse las tareas peor resueltas. Pocos comentarios y explicaciones.
GGP2S2	Cierta presencia de ejercicios registrados e intentados, generalmente de modo satisfactorio. No se rehacen actividades. Pobre presentación y puntuación. Pocos comentarios verbales. Simbolismo poco preciso.
GGP2S3	Bastantes actividades registradas e intentadas. Muchos errores en la resolución y transcripción, que suelen corregirse. No se rehacen tareas. Buena puntuación. Mala organización. Pocos elementos personales.
GGP2S4	Pocos intentos de resolución y poco satisfactorios. No se indican los errores de forma clara. Poco texto verbal, aunque suele ser preciso.
GGP2S5	Pocos ejercicios registrados e intentados, y de forma poco satisfactoria. No se rehacen tareas. Cierta presencia y precisión de comentarios y explicaciones verbales. Buena presentación.
GGP2S6	Bajo registro de actividades, casi siempre transcritas. Intentos de resolución casi inexistentes. Presencia de errores no corregidos.

Tabla VIII.3. Características del GGP2 y sus subgrupos, de acuerdo a los modos de elaboración de las UP detectados.

El grupo GGP2 tiene un número de unidades algo mayor que el GGP1, pero la presencia de ambos tipos de unidades ha sido bastante equilibrada. Si se consideran todos los subgrupos, GGP1S3 y GGP1S4 han sido los subgrupos con un mayor número de unidades dentro del GGP1. En el GGP2 todos los subgrupos han tenido una incidencia similar, salvo GGP2S5 y GGP2S6, donde la frecuencia ha sido menor.

Además de la detección de diversos modos de elaboración de las UT y de las UP, estos grupos se cruzaron para estudiar cómo se han relacionado en este trabajo las elaboraciones teóricas y prácticas correspondientes a un mismo tema y alumno. Ese cruzamiento (cuyo resultado se presenta en la Tabla V.33) nos ha permitido detectar la presencia de siete perfiles relevantes, que destacamos en la Tabla VIII.4 junto con sus características principales. Los seis primeros corresponden a las combinaciones más repetidas (se ordenan comenzando por la que se ha encontrado con mayor frecuencia), mientras que el séptimo ha tenido menor incidencia pero merece ser destacado por sus características.

Perfil	Características del perfil de elaboración
GT6-GGP2	Contraste entre la completitud de las UT (bastante exhaustivas) y las UP (menos completas). Pobre presentación. Mayor incidencia de GT6-GGP2S1 y GT6-GGP2S3: cierto carácter selectivo en las actividades que registran (de ahí la menor completitud), aunque sí que suelen intentar las tareas y corregir los errores cometidos.
GT2-GGP2	Baja presencia de registros de tipo verbal. Pobre presentación. Desigual registro de elementos en las UT (predominio de ejemplos y gráficas), relativamente pocos intentos de resolución de las tareas en las UP.
GT4-GGP2	Baja presencia de comentarios y explicaciones. Contraste entre la buena presentación de las UT y la mala de las UP. Bajo número de actividades intentadas.
GT4-GGP1	Buena presentación. Alto número de actividades intentadas. Contraste entre el número de observaciones y explicaciones (escasas en las UT, más abundantes en las UP).
GT1-GGP1	Completitud de las unidades, con un alto número de actividades intentadas. Buena presentación. Cierta personalización de las UT.
GT6-GGP1	Unidades muy completas, con un alto número de elementos y muchas actividades intentadas. Destaca la incidencia de GT6-GGP1S4, en el que se enfatizan aún más las características anteriores.
GT5-GGP1	Alta presencia de anotaciones, en ocasiones de tipo personal y expresivo. Combinación de UT muy incompleta (especialmente ejemplos y gráficas) con la alta presencia de actividades intentadas.

Tabla VIII.4. Características de los perfiles de elaboración detectados más relevantes, al cruzar las unidades teóricas y prácticas.

Además de detectar los modos de elaboración y los perfiles que marcan la presencia de algunos patrones de elaboración del cuaderno que se han repetido más entre el alumnado participante, también ha existido un contraste entre los alumnos que han tenido una elaboración más uniforme del cuaderno (misma combinación en todos sus pares de unidades UT-UP, incluso al considerar los subgrupos de las UP) y los que han tenido una elaboración más variable, y que parece más pendiente del contexto, la metodología y el contenido del tema. Los estudiantes con una mayor uniformidad en la elaboración han sido A2 (combinación GT5-GGP2S1), A7 (GT4-GGP2S6), A10 (GT6-

GGP2S1), A11 (GT4-GGP2), A19 (GT1-GGP2S1), A23 (GT2-GGP2S2), A25 (GT1-GGP1S4), A29 (GT1-GGP1), A34 (GT4-GGP1S3) y A35 (GT5-GGP1).

Una vez comentados los perfiles de elaboración que se han encontrado, la realización de entrevistas por parejas a parte del alumnado participante (16 de los 41 alumnos) nos ha permitido completar el cumplimiento del objetivo principal. Se han detectado cinco perfiles muy distintos de utilización del cuaderno entre el alumnado entrevistado, que evidencian una diferente dependencia de este instrumento en su estudio y aprendizaje de las matemáticas. Los nombres que hemos dado a los cinco perfiles, que se han ordenado de una mayor a una menor dependencia del instrumento, son los siguientes:

- **Perfil 1 de utilización**: Cuaderno como "cyphering book[86]" que articula el estudio de la asignatura.
- **Perfil 2 de utilización**: Cuaderno como instrumento que recoge la teoría y el trabajo corregido del estudiante y que articula el estudio de la asignatura.
- **Perfil 3 de utilización**: Cuaderno como instrumento para recoger el contenido teórico, hacer actividades y servir de apoyo al estudio.
- **Perfil 4 de utilización**: Cuaderno como mero acumulador del trabajo práctico realizado durante un tema.
- **Perfil 5 de utilización**: Cuaderno como lugar donde recoger aspectos prácticos dificultosos para el estudiante.

La Tabla VIII.5 muestra las características de cada uno de los cinco perfiles descubiertos, según el rol que tenga el cuaderno (diferenciando el contenido teórico y el contenido práctico) para el alumno durante su trabajo a lo largo del tema y el modo en que lo utilice para el estudio de la asignatura y la preparación de pruebas de evaluación. La estructura de la tabla ayuda a clarificar los posibles aspectos comunes entre perfiles y las diferencias entre unos y otros.

[86] Por su similitud con esta herramienta educativa histórica (Clements & Ellerton, 2012), que se explica en los antecedentes y se recuerda en el Capítulo VI.

<table>
<tr><th>Perfil</th><th>Aspectos teóricos: Rol y uso para el estudio</th><th>Aspectos prácticos: Rol durante el tema</th><th>Aspectos prácticos: Uso para el estudio</th></tr>
<tr><td>Perfil 1</td><td rowspan="2">Se recogen los aspectos teóricos. Estudio a través del cuaderno.</td><td>Se registran las tareas una vez corregidas y/o validadas, de forma clara y sin errores.</td><td rowspan="2">Se rehacen o revisan las actividades del cuaderno. Cuaderno como “contenido de referencia”.</td></tr>
<tr><td>Perfil 2</td><td rowspan="2">Lugar donde hacer las tareas planteadas, corrigiendo después los posibles errores.</td></tr>
<tr><td>Perfil 3</td><td>Se recogen los aspectos teóricos. Estudio complementando libro de texto y cuaderno.</td><td rowspan="3">Se realizan otras actividades distintas de las del cuaderno. Revisión puntual de tareas específicas del cuaderno.</td></tr>
<tr><td>Perfil 4</td><td>Se recogen aspectos vinculados a la práctica. Estudio a través del libro de texto.</td><td>Lugar donde hacer las tareas planteadas.</td></tr>
<tr><td>Perfil 5</td><td>No se recogen aspectos teóricos. Estudio a través de libro de texto.</td><td>Lugar donde recoger los aspectos más importantes o dificultosos de las tareas corregidas.</td></tr>
</table>

Tabla VIII.5. Características de los perfiles de utilización del cuaderno detectados en las entrevistas.

Los Perfiles 1 y 2 han sido los perfiles que han aparecido asociados a un mayor número de alumnos entrevistados (cinco cada uno), mientras que el alumno A2 es el único representante del Perfil 5. Al comparar estos perfiles de utilización obtenidos a partir de sus respuestas en las entrevistas con los modos de elaboración detectados al analizar sus cuadernos, se ha detectado que los alumnos de los Perfiles 1 y 2 presentan modos de elaboración de las UT muy completos (sobre todo GT1 y GT6), lo cual es una característica importante para la utilización posterior del cuaderno como instrumento de referencia para el estudio teórico. Por el contrario, ha existido más variedad en las UP dentro de estos perfiles, existiendo unidades tanto de tipo GGP1 como GGP2. Algunos alumnos sí que han tenido unidades prácticas muy completas, con muchos ejercicios y muchas explicaciones y observaciones (combinación GT1-GGP1S4), lo cual puede ayudar en su utilización posterior también como “instrumento de referencia” para revisar los aspectos prácticos, pero no ha sido así en otros estudiantes que luego dicen tener esa utilización del cuaderno.

Entre las UT de los alumnos del Perfil 3 han abundado las de tipo GT2, que recogían mayoritariamente ejemplos y gráficas, y, en menor medida, aspectos verbales. Este hecho puede ser congruente con el estudio posterior complementando el libro de texto con el cuaderno, pudiendo valorar más los ejemplos desarrollados por el docente y las gráficas como aspectos que es menos probable que se encuentren tal cual en el libro de texto. En relación a las UP, en los alumnos del Perfil 3 han predominado las de tipo GGP2, con una menor carga de trabajo del estudiante que no concuerda con las características que verbalizan en el debate (dicen intentar las actividades propuestas en su cuaderno), aunque pudieran intentar tareas fuera del cuaderno u otro tipo de tareas, como hacen en la preparación de una prueba de evaluación, teniendo en cuenta que luego el cuaderno no supone un instrumento de referencia para ellos en la preparación y en el estudio de aspectos de tipo práctico.

Entre los alumnos del Perfil 4 no se han detectado relaciones claras entre la utilización y los perfiles de elaboración. En el caso del alumno A2, único alumno del Perfil 5, éste presentaba una elaboración del cuaderno muy selectiva (GT5-GGP2S1). La poca completitud de sus UT concuerda con la preferencia por utilizar el libro de texto para estudiar los aspectos teóricos (por esa razón tiende a no registrarlos en el cuaderno). En su cuaderno sí que se han detectado algunos intentos de resolución de las tareas, a pesar de que no verbaliza ese aspecto en las entrevistas, que pudieran corresponder con intentos de resolución simultáneos a la corrección de tareas en el aula y a la recogida de aspectos que considera más interesantes o dificultosos sobre dichas actividades.

En resumen, la recogida de información sobre el cuaderno por medio de dos vías distintas (fotocopias de los cuadernos de los alumnos y entrevistas a parte del alumnado) ha permitido al EI detectar y caracterizar una serie de perfiles tanto de elaboración como de utilización del cuaderno, así como algunas congruencias que permiten detectar la influencia de la utilización posterior en el modo en que construyen y trabajan con el instrumento en el transcurso de los temas.

Una vez comentados los avances y resultados de la tesis en relación al objetivo principal establecido en la misma, pasamos a comentar los resultados obtenidos en relación al resto de objetivos de la tesis y el grado en que los mismos han sido alcanzados.

> *OS1. Desarrollar un marco de análisis de los cuadernos de matemáticas específico para la situación de esta investigación.*

Uno de los problemas con los que se encontró el EI en el comienzo de la investigación fue la ausencia, hasta donde conocieron los investigadores, de algún marco que permitiera analizar un cuaderno de matemáticas desde una perspectiva investigadora. Esto hizo que se planteara la construcción de un marco de este tipo para poder llevar adelante la investigación propuesta. Este aspecto se recogía en el objetivo arriba indicado.

El trabajo exploratorio (Capítulo II) y la planificación y el desarrollo del análisis pormenorizado de los cuadernos han dado lugar a un marco completo para analizar cuadernos de matemáticas, adaptado a las circunstancias específicas de esta investigación, y que supone uno de los aportes de esta tesis doctoral, como comentaremos en el siguiente apartado. El proceso de construcción del marco de análisis hasta su formulación final ha seguido tres etapas, que se explican en la Figura III.2 (Capítulo III). Inicialmente se partió del marco construido en el trabajo exploratorio, marco que ha sido reformulado antes de comenzar el análisis propio de la tesis doctoral con la inclusión de algunas ideas teóricas de referencia[87] y de una lectura "superficial de los cuadernos", y que se ha refinado durante el transcurso del análisis (inclusión o concreción de aspectos no previstos o no contemplados, eliminación de ambigüedades detectadas) y la presentación del marco en congresos y seminarios de investigación. El marco final se ha obtenido una vez completado un ciclo de saturación reanalizando todas las unidades sin que se detectara la necesidad de modificación alguna.

La versión final del marco se presenta en el Capítulo IV de la tesis doctoral. En realidad, se han creado dos marcos de análisis, uno para las UT y otro para las UP, con partes comunes entre sí, pero también aspectos específicos propios del tipo de contenido a analizar. En ambos casos, el marco consta de las siguientes cinco dimensiones de análisis:

- Dimensión 1: Estructura, orden y presentación de la unidad
- Dimensión 2: Completitud de la unidad
- Dimensión 3: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

[87] Dichas ideas teóricas se han presentado en el apartado III.3, y son algunas de las partes de las técnicas de *análisis didáctico* (análisis de contenido matemático, análisis cognitivo; Rico y colaboradores), ideas sobre los sistemas de representación de los objetos matemáticos y sobre la escritura matemática de los alumnos.

- Dimensión 4: Riqueza y corrección del lenguaje natural utilizado en la unidad
- Dimensión 5: Nivel de corrección matemática de la unidad: errores existentes

Cada una de las dimensiones consta de una serie de variables asociadas a ellas, y cada variable está compuesta por una serie de indicadores relacionados con el nivel de desarrollo de la variable en la unidad analizada. El grado de desarrollo de cada indicador se mide a través de una escala 1-5, existiendo una leyenda explicativa de codificación que indica cómo realizar la asignación del valor numérico en la escala, y cuyo propósito es hacer que esa valoración sea objetiva y replicable. Las Tablas IV.22 e IV.23 recogen la estructura de los marcos para las UT y las UP, respectivamente.

El propio proceso de construcción del marco ha buscado la optimización de éste para su aplicación en este contexto de investigación, con una importante componente inductiva, y que nos ayudara a discriminar diferentes características en los cuadernos analizados, base para la determinación posterior de perfiles de elaboración. Por tanto, este marco puede ser un buen punto de partida para analizar cuadernos en contextos similares al aquí recogido, pero es posible que en otros contextos o con otras metodologías docentes sea necesario realizar alguna modificación del mismo o añadir algún otro aspecto de interés que aquí no se han considerado como aspectos relevantes.

> *OS2. Encontrar “prácticas de éxito” con el cuaderno de matemáticas, que aparezcan asociadas a un mayor rendimiento académico en la asignatura.*

Para cumplir este objetivo, y poder conocer cuáles han sido los modos de elaboración del cuaderno que, al menos en este trabajo, se han ligado con mejores rendimientos académicos en el bloque de contenidos analizado, hemos llevado a cabo un análisis estadístico, basado en contrastes de medias, que se explica en el subapartado V.5.

En relación a los modos de elaboración de las UT, no se han detectado diferencias estadísticamente significativas en el rendimiento asociado a las mismas, pero sí una media de calificaciones superior en alumnos con las unidades que eran más completas, del tipo GT1 y GT6. Por el contrario, las medias más bajas se han asociado a unidades del tipo GT4 y GT5. Si pasamos a la UP, tampoco han existido diferencias significativas asociadas al rendimiento en los dos grandes grupos prácticos, GGP1 y GGP2, pero sí en algunos subgrupos. Las unidades asociadas a un mayor éxito académico han sido las de tipo GGP1S4 y GGP2S1, que destacan ambas por la presencia de un alto número de intentos de resolución de las actividades, enfatizándose además en las primeras la completitud y la alta presencia de anotaciones y observaciones, y en las segundas el carácter correcto del contenido existente (corrección clara de los posibles errores, rehacimiento de tareas). Por el contrario, han aparecido ligadas a un peor rendimiento académico las unidades de tipo GGP2S6, con un nulo trabajo personal del alumno, y GGP1S3. Estas últimas destacan por contener un alto número de actividades a mayores y de anotaciones, en lo que puede subyacer una falta de seguridad del alumno en su trabajo o una falta de pertinencia del mismo.

Al realizar este análisis estadístico considerando los perfiles obtenidos al cruzar las elaboraciones teóricas y prácticas, no se obtienen diferencias que sean estadísticamente significativas. No obstante, se ha evidenciado que la media es superior en la combinación GT1-GGP1. Así, y en resumen, parece que las características teórico-prácticas de elaboración que han aparecido ligadas en esta investigación a un mejor rendimiento académico han sido el desarrollo de un registro más o menos completo en el cuaderno, con bastante información, con una alta presencia de observaciones, comentarios y explicaciones, y con una alta carga de trabajo propia del alumno, intentando que el contenido resultante sea correcto (corrección de errores, rehacimiento de actividades). Estos resultados obtenidos tienen cierta lógica, puesto que todas esas características que se indican pueden considerarse como características positivas, y que muestran una mayor implicación del alumno en su trabajo en la asignatura y en la elaboración de su cuaderno.

Si en lugar de fijarnos en los perfiles de elaboración nos fijamos en los modos de utilización, la conclusión general es que el rendimiento ha sido variable en los cinco perfiles detectados, sobre todo en los perfiles más numerosos (Perfiles 1, 2 y 3), en los que se han combinado estudiantes que han tenido un rendimiento muy bueno con otros en la situación contraria. Así, puede decirse que los modos de utilización encontrados se adaptan de forma desigual a los hábitos de estudio y a las necesidades específicas de cada uno de los alumnos. También puede existir una mayor o una menor carga de trabajo de los estudiantes exterior al cuaderno que explique este resultado (por ejemplo, una mayor presencia de intentos de resolución previos al registro del ejercicio en el cuaderno entre los estudiantes del Perfil 1, o una mayor resolución de actividades fuera del cuaderno en los Perfiles 2 a 5) y del cual no haya quedado constancia en el propio cuaderno.

Además, aunque los Perfiles 1 y 2 hayan mostrado un comportamiento más tendente a un estudio de la asignatura de tipo memorístico o reproductivo, tomando como "contenido de referencia" el recogido en sus cuadernos, para algunos estudiantes (especialmente entre los de la Docente 3) este estudio se muestra como suficiente para poder superar la asignatura, en parte debido a la presencia de una evaluación basada en actividades prácticas y de aplicación similares a las realizadas en el aula. Por el contrario, los alumnos de los Perfiles 3, 4 y 5 verbalizan un estudio de la asignatura basado en la realización de actividades distintas de las trabajadas en clase y recogidas en su cuaderno, desapareciendo esa componente memorística o reproductiva (al menos en lo referente a los aspectos prácticos) y con una visión más cercana a la necesidad de "hacer matemáticas" para prepararse para una prueba de matemáticas. Sin embargo, el rendimiento entre los alumnos también ha sido muy dispar, lo que puede evidenciar que no todos los alumnos entienden igual este proceso, o que todos tengan la seguridad y la autocrítica suficiente para poder evaluar sus producciones matemáticas y desarrollar un aprendizaje adecuado a partir de las mismas.

> *OS3. Averiguar qué concepciones de las matemáticas subyacen en los modos de trabajo con el cuaderno que muestran los alumnos, a partir de la manera en que justifican los mismos.*

Las entrevistas a parte del alumnado participante nos han ayudado a conocer mejor cuáles son los hábitos de trabajo y de estudio en matemáticas que tienen los estudiantes y cuál es el rol que tiene el cuaderno en esos hábitos. En las entrevistas no se ha preguntado explícitamente a los alumnos sobre su concepción de lo que son las matemáticas para ellos. No obstante, en sus respuestas y en los modos de justificar sus hábitos y el papel del cuaderno en ellos sí que están implícitas diferentes formas de concebir y de entender las matemáticas en el alumnado, que también pueden estar influenciadas por su historial escolar y por su relación académica con la asignatura.

En el trabajo exploratorio (Capítulo II), en un entorno metodológico donde el cuaderno tuvo mayoritariamente un contenido basado en actividades, el debate con los alumnos hizo surgir dos posiciones diferentes entre el alumnado: "cuaderno como lugar para registrar ejercicios" frente al "cuaderno como lugar para hacer ejercicios". El planteamiento de esta dicotomía en las entrevistas propias de la tesis doctoral, junto con el resto de bloques de la misma, ha permitido refinar esas dos posiciones y completar la visión con lo que sucede para los aspectos teóricos.

En relación al contenido teórico, las entrevistas han evidenciado diferentes roles para el cuaderno y el libro de texto entre el alumnado, dentro de una metodología docente que se ha basado en exposiciones de la teoría relativamente personales por parte de los profesores en las cuatro aulas. Estos roles pueden verse en la Tabla VIII.5, y muestran una diferencia de pensamiento entre el alumnado en relación con la influencia que puede tener la acción del docente sobre la teoría expuesta. Algunos alumnos indican su preferencia por anotar la teoría expuesta por el docente y por utilizar ésta como referencia para el estudio, y lo argumentan verbalizando que suele contener lo que es más importante para el docente o del modo que a él más le gusta. Estos alumnos parecen otorgar un mayor valor a la acción humana sobre el contenido matemático (al menos en su presentación), concibiendo la posibilidad de que exista cierta personalización en su desarrollo. Por contraposición, los estudiantes que indican sus preferencias por el libro de texto pueden estar otorgando un menor valor a esa acción transformadora o dar una mayor legitimidad al contenido del libro de texto frente a la figura del docente.

En relación al proceso de estudio y aprendizaje de los contenidos teóricos, ya sea a través del libro de texto o del cuaderno, las entrevistas han puesto de manifiesto la presencia de los dos modos de procesamiento indicados por Espino (2012): un uso *reproductivo/mecánico*, donde se busca la reproducción memorística directa del contenido recogido, o un uso *constructivo/estratégico*, donde la teoría recogida en el cuaderno o en el libro de texto se trata de forma previa a su estudio (realización de resúmenes, esquemas…).

En relación a las actividades prácticas, las entrevistas han servido para detectar diferencias importantes tanto en el modo de realizar esta actividad en el transcurso de un tema como en sus hábitos de trabajo para preparar una prueba de evaluación. Por una parte, es destacable el comportamiento del Perfil 1, que únicamente registran las actividades en sus cuadernos una vez que tienen garantías de que la actividad está bien resuelta (corrección o validación del docente). Así, a pesar de que la metodología docente sitúa el cuaderno dentro del *dominio privado* del estudiante (Fried & Amit, 2003), los alumnos de este perfil se autoimponen unas restricciones en la elaboración del cuaderno que no permiten que sea el lugar para reflexionar, indagar y hacer matemáticas, sino que tendría un papel más cercano a lo que sería un “libro de texto” con lo desarrollado en el aula (teoría más un conjunto de ejercicios resueltos claramente y sin errores). La concepción del cuaderno de estos alumnos sería similar a una de las visiones del instrumento que Blochs (2012) encuentra entre los docentes: cuaderno como lugar que recoge la *obra* desarrollada en la clase.

Los Perfiles 2, 3 y 4 sí que tienen una mayor visión del cuaderno como lugar en el que el alumno lleva a cabo sus intentos de resolución de las actividades, y donde reflexiona, conjetura y hace matemáticas, total o parcialmente. Es decir, hay una mayor visión del cuaderno como un instrumento personal de trabajo y de aprendizaje para el alumno, situándose realmente, en ese sentido, dentro del dominio privado (Fried & Amit, 2003). Además, en los Perfiles 2 y 3 se valora especialmente que exista una corrección de las actividades y de los posibles errores cometidos. No obstante, el rol posterior que tiene ese cuaderno construido en el estudio del alumno difiere entre unos perfiles y otros.

Los Perfiles 1 y 2 han mostrado una gran dependencia del cuaderno y de su contenido para estudiar la asignatura, considerando el cuaderno como un “instrumento de referencia”, a través de la revisión o de la repetición de actividades ya realizadas, que se comprueban con la ayuda del cuaderno. Estos alumnos evidencian una tendencia al estudio memorístico o reproductivo de los contenidos y de las técnicas. La visión de matemáticas subyacentes es muy limitada: las matemáticas son vistas como la capacidad de elegir y aplicar un procedimiento o algoritmo adecuado para la resolución de un ejercicio planteado (visión comentada por Borasi & Rose, 1989; Schoenfeld, 1989 y Countryman, 1992), similar a otros anteriores. En algunos casos, alumnos como A13 acompañan esta visión y estos hábitos de estudio con la verbalización de un autoconcepto muy negativo hacia sus capacidades matemáticas.

Por el contrario, los alumnos de los Perfiles 3, 4 y 5, según verbalizan en las entrevistas, priorizan el hecho de “hacer matemáticas” para preparar una prueba de evaluación. Estos estudiantes prefieren enfrentarse a otras actividades y problemas distintos de los hechos en clase, para ver si son capaces de plantear y resolver los mismos. En este comportamiento subyace una visión de las matemáticas más cercana a las matemáticas como una actividad mental y de pensamiento. En estos perfiles, los alumnos son muchos menos dependientes del cuaderno, puesto que estas actividades preparatorias suelen intentarse fuera del mismo. El rol del cuaderno se limita a ser un instrumento de apoyo para algunas actividades que el estudiante recordara como especialmente problemáticas.

Por tanto, y en resumen, se han apreciado perspectivas muy diferentes en el alumnado sobre el papel y el rol del cuaderno en su estudio y aprendizaje matemático, y los hábitos de trabajo de los estudiantes. En ellas están implícitas visiones muy distintas de lo que para los alumnos son las matemáticas y la actividad matemática, y que pueden llegar a suponer una limitación importante en su aprendizaje matemático, especialmente cuando tengan que enfrentarse a situaciones en las que no baste con tener un listado de procedimientos aprendidos y de situaciones de aplicación de los mismos (por ejemplo, ante un problema matemático, y no meros ejercicios de aplicación que respondan a patrones similares ya trabajados con anterioridad).

> *OS4. Detectar relaciones entre los perfiles encontrados y las diferencias metodológicas y de contenido existentes en la docencia de los profesores de las aulas participantes.*

En relación a los diferentes modos y perfiles de elaboración, la distribución de estos perfiles en las cuatro aulas no ha sido uniforme, como atestiguan las Tablas V.33 y V.38. En ese sentido, hay perfiles que han sido predominantes en algunas de las aulas, lo que se ha relacionado con algunos aspectos sobre la metodología de los docentes y sobre el contenido tratado que ha podido favorecerlos. Estos aspectos han sido detectados tanto en las observaciones de las clases como en el análisis más exhaustivo de algunas partes (foco conceptual de las reglas y técnicas de derivación, introducción del concepto de límite) que se ha realizado en el Capítulo VII.

En el aula del Docente 2 han sido mayoritarias las unidades teóricas de tipo GT4 y GT6, el desarrollo de estas últimas (más “exhaustivas”) ha podido estar favorecido por el uso del dictado y de la pizarra por parte de este profesor. Gran parte de las unidades de tipo GT5 (que eran menos completas y con una mayor personalidad y expresividad en la escritura) se han detectado en el aula del Docente 1, caracterizado por tener un rito de exposición algo mayor, menos estructurado y por dar mayor importancia y presencia a aspectos conceptuales. Las exposiciones del Docente 3, cortas y enfatizando los ejemplos y la aplicación práctica de procedimientos, han podido favorecer la mayor presencia de unidades de tipo GT2, que destacaban por la mayor recogida de ejemplos y gráficas y la baja presencia de aspectos verbales.

Las diferencias entre los docentes en los hábitos de planteamiento de tareas (planteamiento diario por parte del Docente 3, concentrado en breves espacios en el Docente 2 y sin un planteamiento explícito de tareas por parte del Docente 1) pueden haber influido en que en las aulas del Docente 3 hayan predominado las unidades prácticas de tipo GGP1 (y especialmente de las de tipo GGP1S2 y GGP1S4, que destacan por su completitud y por la presencia de muchos intentos de resolución de las actividades), mientras que en las de los otros dos profesores sean mayoritarias las unidades de tipo GGP2. En particular, el Docente 2 nos alertó del poco trabajo de las tareas por parte de sus alumnos, lo que concuerda con una existencia mayoritaria de unidades de tipo GGP2S4. En el caso del Docente 1, se combinan alumnos que han sido selectivos en la realización de actividades (subgrupo GGP2S1) con otros que no se han planteado su realización, al menos en el cuaderno (GGP2S6).

La combinación de los modos de elaboración del contenido teórico y práctico evidencia la presencia de dos perfiles, GT1-GGP1 y GT4-GGP1, en los que todas o la mayoría de las parejas de unidades han correspondido a estudiantes de la Docente 3. En las aulas del Docente 1 y 2 ha existido una mayor variedad de combinaciones (Tabla V.33), sin que existan perfiles donde se concentren únicamente alumnos de una de estas aulas.

En relación a los perfiles de utilización, dado que el número de alumnos entrevistados es inferior (un total de 16, cuatro estudiantes de cada una de las cuatro aulas), es más complicado extraer alguna relación clara entre perfiles de utilización y aulas. No obstante, ha existido una mayor presencia de estudiantes correspondientes a aulas de la Docente 3 entre los alumnos ubicados en los Perfiles 1 y 2, que se caracterizaban por una mayor dependencia del cuaderno en el estudio de las matemáticas, y por un estudio con una mayor componente memorística o de reproducción de actividades.

En resumen, la investigación sí que ha mostrado la existencia de posibles relaciones, especialmente entre los modos de elaboración del cuaderno que muestran los alumnos y las características de la exposición de los docentes o el modo en que éstos han planteado las tareas al alumnado.

Aunque no estaba entre los objetivos del estudio, también se han detectado algunas diferencias significativas en el predominio de unos perfiles de elaboración u otros según cuál sea el sexo de los estudiantes, especialmente entre las unidades de tipo teórico. En líneas generales, la inmensa mayoría de alumnas entre las unidades del tipo GT4, y también en las de tipo GT1 parecen indicar que la buena presentación y organización del contenido teórico es una de las características que es especialmente valorada por las alumnas, al contrario de lo que sucede entre los alumnos (mayoría de unidades de tipo GT2 y GT6). La presencia mayoritaria de alumnos entre las unidades de tipo GT2 y GT5 puede indicar diferentes preferencias entre los estudiantes de sexo masculino, configurando el cuaderno más en torno al registro de ejemplos y gráficos (como es el caso de GT2) o cuadernos más incompletos pero con presencia de escritura personal y expresiva (GT5). Así, los perfiles GT1-GGP1, GT4-GGP1 y GT4-GGP2 se han asociado mayoritariamente a alumnas, y las combinaciones GT2-GGP2 y GT5-GGP1 a alumnos. En relación a los perfiles de utilización, hay una presencia mayoritaria de alumnas en los Perfiles 1 y 2, pero las alumnas también eran mayoría en las dos aulas de la Docente 3, por lo que no podemos afirmar si la mayor prevalencia de estos perfiles de utilización ha podido ser favorecida por la metodología de la docente, esté influenciada por el sexo del estudiante o pueda responder a ambas causas.

> *OS5. Examinar qué aspectos son considerados por los alumnos como "dignos de anotar" o de escribir en su cuaderno en un contexto de clase determinado (Pimm, 1999).*

Los análisis específicos desarrollados y presentados en el Capítulo VII han tenido por objeto entender mejor qué aspectos son los que los alumnos consideran como más relevantes o como dignos de escribir o de reflejar en su cuaderno.

Dado que los contenidos teóricos han sido presentados por los propios docentes, se ha examinado con profundidad cómo son los apuntes tomados por los estudiantes en dos contextos específicos, seleccionados por su especial interés en el marco del estudio (el foco de las reglas y técnicas de derivación, con mayor carga procedimental, pero con una amplia presencia de relaciones entre los elementos; y la presentación intuitiva del concepto de límite, con mayor carga conceptual). Muchos alumnos de los entrevistados verbalizaron una alta dependencia del cuaderno para estudiar los contenidos teóricos, sin confiar en otras fuentes posibles de conocimiento, un hecho al que en el capítulo anterior nos hemos referido como el "efecto túnel" asociado al contenido del cuaderno. En un contexto así, estos estudios específicos se convierten en estudios especialmente relevantes.

Los análisis concretos reflejados en los apartados VII.1 y VII.2 han evidenciado una anotación mucho mayor, en líneas generales, de enunciados de tipo procedimental (como las reglas de derivación) que de aspectos e ideas conceptuales como las asociadas a la estructura conceptual del concepto de límite. En este último caso, estas ideas no han sido apenas recogidas por los alumnos o lo han sido de forma parcial (por ejemplo, indicando aproximaciones sólo en una de las dos variables, o sin explicitarse el valor al que se realiza la aproximación), lo que puede producir dificultades en el desarrollo del aprendizaje del concepto de límite, o un aprendizaje que se reduzca a la reproducción de la actuación en diferentes "situaciones modelo" proporcionadas por los ejemplos, aspectos que sí fueron recogidos mayoritariamente por gran parte del alumnado.

Ambos estudios y las entrevistas al alumnado también han mostrado la mayor relevancia que dan los alumnos a los elementos anotados en la pizarra, un aspecto ya recogido por otros estudios tanto en matemáticas como en otras materias (Van Meter *et al.*, 1994; Guasch y Castelló, 2002; Rensaa, 2014). Generalmente, la pizarra suele recoger el desarrollo de ejemplos, la escritura de fórmulas de aplicación (como pueden ser las reglas de derivación), además de la resolución de actividades. El docente debe ser consciente de este hecho que, junto con una evaluación demasiado basada en aspectos algorítmicos, procedimentales o de aplicación directa, produce un círculo vicioso en el desarrollo matemático de los estudiantes del que ya alerta Artigue (1995), y que dificulta que los alumnos valoren el hecho de comprender los conceptos y los métodos de pensamiento matemático y que puedan alcanzar o desarrollar una comprensión satisfactoria de los mismos. Previamente hemos comentado la situación detectada en el apartado VII.2, con una escritura muy reducida en los cuadernos de las ideas clave asociadas al concepto de límite, que fueron expuestas verbalmente por los docentes durante la presentación intuitiva del concepto en las cuatro aulas.

La transcripción de los ejemplos, en general, ha sido bastante alta, siendo un elemento destacado como especialmente valorado por los estudiantes en las entrevistas. De hecho, en los modos de elaboración de las UT también se obtuvo un grupo, el GT2, que privilegiaba el registro de ejemplos y gráficas frente a aspectos verbales. No obstante, el estudio específico sobre las notas tomadas en el foco de las reglas y técnicas de derivación nos ha permitido descubrir una gran variedad de comportamientos selectivos al recoger los ejemplos, que son valorados de distinta forma por los alumnos según la situación y la mayor o menor ejemplificación de la regla por parte del docente.

El estudio de los comentarios que los alumnos deciden anotar en sus cuadernos (subapartado VII.3) ha evidenciado una tipología muy variada de comentarios, aunque en general su presencia haya sido reducida entre el alumnado. Se han encontrado comentarios asociados al contenido teórico (y que ayudarían al desarrollo de una comprensión más relacional, en términos de Skemp, 1976), como apoyo para los aspectos prácticos y procedimentales, asociados a un análisis cognitivo del tópico que realiza y explicita el docente en la clase, sobre la evaluación de la asignatura y, por último, comentarios que externalizan aspectos personales del alumno sobre su propio aprendizaje y comprensión del tema. En particular, estos últimos han sido especialmente escasos, inexistentes en 32 de los 41 estudiantes en todo el bloque analizado, y únicamente en seis alumnos existe cierta frecuencia en su escritura. Además, en esos casos, han sido marcas muy escuetas, poco desarrolladas y en las que el estudiante evidencia de algún modo que es una anotación de tipo personal, para diferenciarlo del resto de elementos. Es decir, los alumnos parecen tener reticencias a considerar plenamente el cuaderno como un instrumento propio del dominio privado (Fried & Amit, 2003), que recoja el desarrollo de su aprendizaje y de su comprensión y los posibles problemas en ese proceso. De hecho, los alumnos con un rol del cuaderno como un “manual de referencia” (Perfiles 1 y 2 de utilización) pueden llegar a catalogar este tipo de anotaciones como un obstáculo para ese propósito o como un aspecto que debe ser externo al cuaderno.

Como resumen final de este apartado, consideramos que la investigación desarrollada ha cumplido con los objetivos que se propusieron en la misma, tanto el objetivo principal como los objetivos secundarios asociados a él, a partir de la recogida de datos de diferentes tipos (fotocopias de los cuadernos, entrevistas a los alumnos, diarios de clase, información contextual a partir de la observación) y del análisis de los mismos. Este análisis nos ha permitido encontrar resultados sobre el rol, la elaboración y la utilización del cuaderno en el alumnado, y sus posibles relaciones con el rendimiento académico, la metodología docente, el contenido impartido o el modo en que valoran este último.

VIII.2. PRINCIPALES APORTACIONES DE ESTA TESIS

Pensamos que la investigación recogida en esta tesis doctoral hace una aportación importante para un mejor conocimiento de un instrumento bastante usual en las clases de matemáticas, como es el cuaderno del alumno, y sobre el que la investigación en Didáctica de la Matemática apenas había mostrado atención, quizá por esa naturalidad de su presencia y la ausencia de cuestionamiento del mismo que indican Villarreal y Borba (2010). En este sentido, este trabajo puede servir para abrir diferentes líneas de investigación asociadas a este instrumento, su relación con las metodologías docentes y su integración con otros posibles recursos que pueden ser utilizados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como comentaremos en el último apartado de este capítulo.

En primer lugar, esta investigación aporta una serie de instrumentos para poder analizar el cuaderno de matemáticas y su contenido desde una perspectiva investigadora. Uno de ellos es el marco de análisis de los cuadernos, marco obtenido y consolidado en el propio transcurso de la investigación y que se presenta en el capítulo IV. Se considera que este marco es una herramienta útil y valiosa para realizar un análisis completo de un cuaderno de matemáticas, cubriendo todo tipo de contenido (aspectos teóricos y aspectos prácticos) y dimensiones muy diversas.

En esta investigación, se ha tratado que el marco desarrollado se ajustara de la mejor manera posible a la metodología de los docentes participantes, así como al contenido y a los aspectos considerados de mayor interés que se detectaron en los cuadernos, buscando optimizar su propósito para esta investigación concreta. No obstante, consideramos que el marco puede ser un buen punto de partida para ser trasladado o adaptado a otras situaciones. Además, no tiene por qué ser aplicado globalmente, sino que puede aplicarse únicamente la parte correspondiente a las dimensiones en las que se tenga interés. Por último, consideramos que este marco también puede suponer un instrumento útil para los docentes, para poder conocer mejor los cuadernos de matemáticas de sus alumnos y detectar puntos débiles en los mismos que le ayuden a proponer acciones encaminadas a su superación, y que repercutan en un mejor trabajo matemático de los alumnos.

En el apartado VII.1, además, se ha mostrado un marco específico para poder analizar el contenido matemático de una exposición. Este marco está basado en diferentes tipos de contenido matemático y de relaciones entre ellos (relaciones basadas en procesos de aplicación o de justificación). La utilización de este marco ha dado lugar a *mapas de elementos y relaciones* asociados a un determinado contenido escolar, similares a los propuestos por Rico *et al*. (2008), y que suponen un instrumento útil para comparar entre diferentes presentaciones de contenido matemático o entre una presentación y el contenido reflejado por los alumnos en sus cuadernos.

Aparte de estos instrumentos, los resultados obtenidos en esta investigación han mostrado la necesidad de cambiar esa sensación indicada por Villarreal y Borba (2010) del cuaderno como algo intrínseco e incuestionable en un aula, que pareciera no tener influencia en los hábitos de trabajo y de estudio, y en el aprendizaje de los alumnos, y con el que todos los alumnos trabajaran igual. En ese sentido, se ha encontrado una amplia variedad de perfiles de elaboración y de utilización del cuaderno de matemáticas entre el alumnado participante, distribuido en cuatro clases, en las que, hasta cierto punto, ha existido cierta similitud en la metodología docente (de tipo tradicional), y en las que el cuaderno se ha situado dentro de un dominio privado de los alumnos (sin revisiones ni supervisión del profesor).

Así, consideramos que una de las principales aportaciones de este trabajo, más allá de esas categorizaciones de diferentes perfiles de elaboración y utilización, y las relaciones que aquí se han detectado con la metodología docente, con el contenido expuesto o con el rendimiento académico, es la puesta en valor del cuaderno como un instrumento y un documento de investigación en Didáctica de la Matemática, sobre el cual no se ha prestado atención suficiente, y en el que es necesario conocer mucho mejor cuáles son las concepciones que del mismo tienen profesores y alumnos, y cuál es el papel o los diferentes papeles que desempeña en el estudio y el aprendizaje de los estudiantes. En ese sentido, esta investigación pretende ser un punto de partida sobre el cual proseguir y profundizar, proponiéndose algunas vías de continuidad en el último apartado de este capítulo.

VIII.3. FORTALEZAS Y DEBILIDADES

En cualquier trabajo de investigación, especialmente si es dilatado en el tiempo, una visión retrospectiva del trabajo realizado nos ayuda a reflexionar sobre cuáles han sido las fortalezas o los puntos fuertes que merecen ser destacados, y cuáles han sido aquellos aspectos que se consideran como debilidades o limitaciones del mismo. Dedicamos este apartado a tratar ambos aspectos.

Entre los puntos fuertes o las fortalezas del trabajo, subrayamos las siguientes:

- El modo en que se planificó la investigación, considerando la no intervención del EI en la planificación y en el desarrollo de las clases en las aulas participantes, ha permitido detectar modos naturales de elaboración del cuaderno entre el alumno. Del mismo modo, pensamos que la realización de las entrevistas en un ambiente privado y distendido ha favorecido que los estudiantes se involucraran activamente en las mismas y se obtuvieran respuestas sinceras, que estuvieran más cercanas a sus pensamientos reales (frente a posibles respuestas “políticamente correctas”).

- El seguimiento de un método de trabajo sistemático para analizar los cuadernos de matemáticas recogidos y el gran volumen de información contenido en esos cuadernos. El método de trabajo seguido y la tenacidad y minuciosidad en su desarrollo han permitido la extracción de una gran cantidad de información relevante contenida en los cuadernos.

- El marco para analizar cuadernos de matemáticas que ha resultado de todo el proceso seguido integra diferentes ideas teóricas y aspectos de interés asociados a este instrumento, y puede ser una herramienta útil para el desarrollo de investigaciones sobre el cuaderno de matemáticas, pero también para los docentes de matemáticas. Además, el marco admite ser aplicado total o parcialmente.

- La recogida de información y datos provenientes de varias fuentes, no únicamente los propios cuadernos de los estudiantes, sino también diarios de clase de los docentes, observaciones presenciales en las aulas y entrevistas a los alumnos sobre el cuaderno de matemáticas. Todas estas fuentes nos han permitido triangular la información existente y proponer interpretaciones e inferencias más ajustadas al contexto del estudio y a los alumnos participantes.

- La heterogeneidad existente en el alumnado participante en su concepción sobre el cuaderno, y en los modos en que lo elaboran y dicen utilizarlo han posibilitado la detección de una riqueza de perfiles distintos asociados a la elaboración y al uso del instrumento entre el alumnado, con diferencias muy importantes entre unos perfiles y otros.

Consideramos que este trabajo de investigación presenta algunas limitaciones o puntos débiles, que en algunos casos también están relacionadas con alguna de los aspectos previamente comentados en las fortalezas.

- La dependencia de la metodología docente de los profesores participantes, en aulas que han sido escogidas por disponibilidad y en las que no se ha intervenido en la planificación e intervención docente. La metodología de los profesores que han participado se puede catalogar como *tradicional*, habiendo existido en algunos casos un planteamiento excesivo de tareas basadas en aspectos algorítmicos o procedimentales, muy similares entre sí. Por ejemplo, no se han planteado apenas actividades que realmente puedan considerarse un problema, o actividades que dieran lugar al desarrollo de una escritura reflexiva en sus cuadernos. Conjeturamos que este tipo de actividades hubieran potenciado el papel del cuaderno como un instrumento para favorecer la indagación, reflexión y descubrimiento por parte de los alumnos.

- El desarrollo simultáneo del bloque de análisis matemático en algunas de las aulas participantes, la distancia entre los centros y la facultad, y las obligaciones docentes del doctorando y del director imposibilitaron observar un mayor número de sesiones de clase en las cuatro clases participantes.

- La amplitud del marco elaborado, el amplio tamaño de las unidades de registro y la necesidad de conocer el contexto en el que se han elaborado los cuadernos, ha dificultado la posibilidad de haber contado con un equipo más grande de personas (además de doctorando y director) que colaborara en el análisis de las UT y de las UP, lo que hubiera contribuido a reforzar la fiabilidad del análisis de contenido realizado (mayor desarrollo del nivel de *reproducibilidad* o de “acuerdo intersubjetivo entre codificadores”, Krippendorff, 1990).

- El análisis de las unidades de registro se ha llevado a cabo íntegramente de forma manual, puesto que cuando se tuvo conocimiento de posibles adquisiciones de softwares de apoyo para la implementación del análisis de contenido ya se había avanzado bastante en dicho análisis. La utilización de este tipo de softwares hubiera facilitado el desarrollo del mismo.

- La limitación temporal que supuso tener que realizar las entrevistas a los alumnos en el periodo de recreo (media hora), hizo que en algunas entrevistas hubiera que adaptar la amplitud de la misma al tiempo disponible.

VIII.4. LÍNEAS ABIERTAS DE INVESTIGACIÓN Y PERSPECTIVA DE FUTURO

La investigación que se presenta en esta memoria de tesis doctoral ha realizado un estudio en profundidad del cuaderno de matemáticas, su elaboración y utilización en cuatro aulas de 1º de Bachillerato, con una metodología docente de tipo tradicional, y centrándose en el desarrollo de los contenidos propios del bloque de Análisis Matemático. En ese sentido, en todo momento, el objetivo ha sido la obtención del máximo conocimiento posible de la situación en este entorno concreto en el que se ha desarrollado la investigación, a través de la recogida y el análisis de la información.

Los resultados aquí obtenidos no son generalizables a un aula cualquiera, pero la ausencia de otras investigaciones similares o parecidas con las que comparar dificulta conocer realmente cuál puede ser la representatividad de estos perfiles aquí detectados y la posible incidencia de los mismos en otros contextos, o el posible descubrimiento de nuevos perfiles relevantes.

Por tanto, consideramos como un problema abierto la realización de investigaciones similares a la que aquí se ha llevado a cabo, pero en las que cambie alguna o varias de las variables contextuales. Esto nos permitiría conocer mejor cuál es la posible influencia que tienen estas variables contextuales (bloque de contenido seleccionado, curso académico en el que se desarrolla el estudio, metodología docente) en la elaboración, en el rol y en el uso que hacen los estudiantes del cuaderno de matemáticas, entendido en el sentido amplio en el que lo hemos conceptualizado en esta investigación. En particular, sería interesante llevar a cabo un estudio similar en un contexto en el que, al contrario de lo que ha sucedido aquí, los profesores sí que plantearan tareas basadas en la elaboración y el desarrollo de escritura reflexiva o en las que el producto final fuera un texto escrito (por ejemplo, la elaboración de un pequeño informe, individual o grupalmente, como solución a un problema), para ver cuál es el rol que tiene el cuaderno para los alumnos en ese caso, y en la preparación del producto final.

A través de las entrevistas y de las intervenciones de los estudiantes en ellas hemos podido encontrar diferentes roles que tiene el cuaderno para los alumnos, asociados a los diferentes perfiles de utilización. Sin embargo, consideramos de interés la realización de un estudio más en profundidad, a un mayor número de alumnos, sobre las diferentes concepciones del instrumento que pueden existir entre el alumnado. Del mismo modo, pensamos que esta misma investigación puede tener también interés entre los docentes de matemáticas, para ver cómo conciben este instrumento. En los antecedentes hemos hecho mención a algún estudio de este tipo (como el de Santos, 2002; o el de Blochs, 2012), pero el número de estudios de este tipo es escaso. Así, queda como problema abierto la realización de investigaciones destinadas a conocer las concepciones del cuaderno entre docentes de matemáticas y alumnos (por ejemplo, en Secundaria o en Bachillerato, donde los alumnos ya tienen cierta madurez y pueden haber desarrollado ciertos hábitos de trabajo con el cuaderno), a través del diseño, la construcción y la validación de cuestionarios, y su cumplimentación por parte de muestras representativas de docentes y estudiantes.

En la parte de las conclusiones que hace mención al objetivo secundario OS3 hemos indicado algunas relaciones entre los modos de trabajo de los alumnos con su cuaderno y las concepciones de las matemáticas que parecen subyacer en esos modos, pero no hemos preguntado explícitamente a los alumnos sobre sus concepciones acerca de las matemáticas, ni sobre su perfil afectivo-emocional hacia la asignatura, ni hemos recogido información sobre ello utilizando algún instrumento. Consideramos que podría ser interesante profundizar en el estudio de las relaciones existentes entre el modo en que los alumnos elaboran y utilizan el cuaderno de matemáticas, y el modo en que conciben las matemáticas o el perfil afectivo-emocional que presentan hacia éstas.

Aunque no era uno de los objetivos iniciales de la investigación, en el desarrollo de la misma se ha advertido la presencia de algunas diferencias en la elaboración de los cuadernos según el sexo de los estudiantes. En este sentido, también queda como problema abierto profundizar en las posibles diferencias al elaborar y utilizar el cuaderno que pueden existir entre alumnos y alumnas y las diferentes características del mismo que pueden destacar o tener más en consideración.

La diversidad de perfiles de elaboración y de utilización que hemos encontrado en esta investigación tiene como corolario la falta de adecuación en que el docente "imponga" ciertos modos de elaboración y de utilización de este instrumento entre el alumnado, algo que hacían investigaciones como la de Porras (1994) o la de Price *et al*. (1997). Sobre todo en cursos superiores, como el de 1º de Bachillerato, en el que los alumnos tienen hábitos de trabajo y estudio, que han verbalizado en las entrevistas como bastante consolidados. La detección del modo en que los estudiantes elaboran y utilizan su cuaderno sí puede servir para detectar posibles carencias o aspectos que sean considerados como "puntos débiles", y que puedan ir potenciándose a través de una guía y una monitorización adecuada del trabajo del estudiante. No obstante, estudios como los de Waywood (Waywood, 1992, 1994; Clarke *et al.*, 1993) pusieron de manifiesto que este tipo de guías y de monitorizaciones funcionan mejor si se trabajan de forma longitudinal, a lo largo de varios cursos, y a largo plazo. Así, podría ser útil la realización de una investigación de tipo longitudinal, a lo largo de varios cursos, en la que se guiara y monitorizara el modo en que los estudiantes de una clase (pudiera ser un número pequeño) elaboran y utilizan su cuaderno de matemáticas, haciendo propuestas personalizadas y planteando tareas que posibilitaran o que potenciaran una utilización real del cuaderno como un instrumento de trabajo matemático del alumno y de reflexión sobre el desarrollo de dicho trabajo, su comprensión y sus posibles dificultades.

Consideramos que las propuestas anteriores son una muestra del camino de investigación que puede recorrerse ligado a este instrumento, sobre el que existe un déficit de investigaciones que se centren en su figura y en su papel. Bajo nuestro punto de vista, este tipo de estudios resulta especialmente importante en un momento como el actual, en el que la entrada cada vez mayor y más universal de las TIC en las aulas puede llevar a los docentes a eliminar un instrumento como el cuaderno, que pueden ver como algo "obsoleto", sin haberse planteado previamente qué aporta este instrumento a sus estudiantes o cómo afecta a su práctica matemática. Parece claro que, tarde o temprano, el cuaderno como instrumento físico tenderá a desaparecer, pero no ocurre lo mismo con sus funcionalidades, como puede ser la existencia de un lugar en el que los alumnos trabajen con información recogida de varias fuentes, un lugar donde exploren, conjeturen o intenten la resolución de actividades y problemas, o un lugar donde recojan el trabajo que han desarrollado en la asignatura. Un mayor conocimiento de esos modos de elaboración y trabajo con el cuaderno de los alumnos permitirá el diseño y la creación de propuestas en las que se integren de forma adecuada recursos TIC y el cuaderno, teniendo en cuenta que, como indican Villarreal y Borba (2010), unos u otros tienden a privilegiar o a favorecer actividades de distinto tipo (los recursos o softwares TIC actividades de visualización y de exploración, los cuadernos actividades de expresión y escritura reflexiva de la información). También ayudaría a plantear transiciones o sustituciones adecuadas de un cuaderno físico a un cuaderno digital, que podría tener diversos "componentes" (carpeta o portafolio de actividades, resúmenes de teoría o mapas conceptuales, blog o diario de aprendizaje del estudiante…), teniendo en cuenta la influencia provocada por la transformación de unos medios en otros.

Un reto de investigación a largo plazo podría ser el diseño y la creación de propuestas de "cuaderno digital" y de utilización del mismo en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y en los que se considere el potencial que tienen para el aprendizaje actividades como el desarrollo de un diario de aprendizaje del estudiante o actividades basadas en escritura de tipo reflexivo, unas actividades que, desgraciadamente, no han existido en la metodología de las aulas participantes en esta investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andréu, J. (2001). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. Documento de trabajo. Disponible en: http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf

Arce, M. (2013). Análisis de los cuadernos de un grupo de alumnos (1). *SUMA, 74*, 45-53.

Arce, M. (2014). Análisis de los cuadernos de un grupo de alumnos (y 2). *SUMA, 75*, 51-59.

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2016). ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 149-172.

Arce, M., Conejo, L., Ortega, T. y Pecharromán, C. (2016). Conocimiento matemático del concepto de límite en alumnos del Máster de Secundaria (Matemáticas). En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 199-207). Granada: Comares.

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA, 8*(2), 61-73.

Arce, M. y Ortega, T. (2015). ¿Qué anotan los estudiantes durante una presentación intuitiva del concepto de límite? Relación con el significado del concepto. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 133-141). Alicante: SEIEM.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. Nueva York, EEUU: Springer.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). The development of student's connections between a function and its derivative. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Astolfi, J.P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla: Díada.

Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1989). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *UNO, 4*, 53-61.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 135-149.

Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M. T. y Moreno, M. (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. La Laguna, Tenerife: Servicio de Publicaciones de la ULL.

Badanelli, A. M. y Mahamud, K. (2007). Posibilidades y limitaciones del cuaderno escolar como material curricular. Un estudio de caso. *Avances en supervisión educativa, 6*. Disponible en: http://www.adide.org/revista/index.php?option=com_content&task=view&id=201&Itemid=47.

Badger, R., White, G., Sutherland, P. & Haggis, T. (2001). Note perfect: an investigation of how students view taking notes in lectures. *System, 29*, 405-417.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia: la derivada, un concepto a caballo entre la matemática y la física*. Tesis doctoral no publicada. Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191-206.

Badillo, E., Trigueros, M. y Font, V. (2015). Dos aproximaciones teóricas en didáctica del Análisis Matemático: APOE y EOS. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M. T. González y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 31-51). La Laguna, Tenerife: Servicio de Publicaciones de la ULL.

Baker, B., Cooley, L & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 557-578.

Barberà, E., Castelló, M. y Monereo, C. (2003). La toma de apuntes como sistema de autorregulación del propio aprendizaje. En C. Monereo y J. I. Pozo (Eds.), *La universidad ante la nueva cultura europea: enseñar y aprender para la autonomía* (pp. 93-109). Madrid: Síntesis.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Akal (2ª ed.).

Baxter, J. A., Woodward, J. & Olson, D. (2005). Writing in Mathematics: An Alternative Form of Communication for Academically Low-Achieving Students. *Learning Disabilities Research & Practice, 20*(2), 119-135.

Bell, E. S. & Bell, R. N. (1985). Writing and mathematical problem solving: arguments in favour of synthesis. *School Science and Mathematics, 85*(3), 210-221.

Berciano, A., Ortega, T. y Puerta, M., (2015) Aprendizajes de las interpolaciones gráficas y algebraicas. Análisis comparativo. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 43-58.

Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME, 12*(1), 145-168.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME, 4*(3), 219-236.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30*, 67-82.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, N. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *RELIME, 9*(2), 189-210.

Blochs, B. (2009). *La place du cahier de cours dans les apprentissages mathématiques en classe de 4e. Pratiques et conceptions de professeurs et d'élèves*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Paris Diderot (Paris 7), París, Francia.

Blochs, B. (2012). Le cahier de cours au collège: une oeuvre du professeur? Un instrument pour l'élève? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 32*(2), 159-193.

Borasi, B. & Rose, B. J. (1989). Journal writing and mathematical instruction. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 347-365.

Britton, J., Burgess, T., Martin, N., McLeod, A. & Rosen, H. (1975). *Schools Council Research Studies Series. The Development of Writing Abilities 11-18*. Londres, Reino Unido: MacMillan Education Ltd.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Bruner, J. S., Goodnow, J. J. y Austin, G. A. (2001). *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid: Narcea.

Burks, R. (2010). The Student Mathematics Portfolio: Value Added to Class Preparation? *PRIMUS, 20*(5), 453-472.

Cáceres, M. P., Hinojo, F. J. y Aznar, I. (2007). Evolución histórica de la inspección educativa a través de los principales referentes legales. *Avances en supervisión educativa, 6*. Disponible en: http://www.adide.org/revista/index.php?option=com_content&task=view&id=191&Itemid=47.

Caraballo, R. M., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2013). Cambios conceptuales en el marco teórico competencial de PISA: El caso de las matemáticas. *Profesorado: Revista de currículum y formación del profesorado, 17*(2), 225-241.

Castelló, M. (1999). El conocimiento que tienen los alumnos sobre la escritura. En J. I. Pozo y C. Monereo (coords.), *El aprendizaje estratégico. Enseñar a aprender desde el currículo* (pp. 197-217). Madrid: Aula XXI, Santillana.

Castillo, A. (2010). Los cuadernos escolares a la luz de la Historia de la cultura escrita. En J. Meda, D. Montino y R. Sani (Eds.), *School Exercise Books: a complex source for a History of the Approach to Schooling and Education in the 19th and 20th Centuries* (pp. 3-10). Florencia, Italia: Polistampa.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ICE- Horsori.

Chartier, A. M. (2002). Um dispositivo sem autor: cadernos e fichários na escola primária. *Revista Brasileira da História da Educação, 3*, 9-26.

Chartier, A. M. (2007). *Práticas de leitura e escritura: história e atualidade*. Belo Horizonte, Brasil: Ceale/Autêntica.

Chartier, A. M. (2009). Los cuadernos escolares: ordenar los saberes escribiéndolos. *Cultura escrita & Sociedad, 8*, 163-182. (Traducción de una ponencia presentada en el VIII Congreso Internacional de Historia de la Cultura Escrita, celebrado en la Universidad de Alcalá del 5 al 8 de julio de 2005).

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule? *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 345-364.

Clarke, D. J., Waywood, A. & Stephens, M. (1993). Probing the structure of mathematical writing. *Educational Studies in Mathematics, 25*, 235-250.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2014). Marco teórico y metodológico para el estudio del límite. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 19-32). Salamanca: SEIEM.

Clements, M. A. & Ellerton, N. F. (2012). Early history of school mathematics in North America 1607-1861. En *Proceedings of ICME-12, 12th International Congress on Mathematical Education*. Seúl, Corea del Sur: ICMI.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education*. Londres, Reino Unido: Routledge Falmer (5ª ed.).

Colera, J. y García, R. (2008a). *Matemáticas I. 1º de Bachillerato*. Madrid: Anaya.

Colera, J. y García, R. (2008b). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. 1º de Bachillerato*. Madrid: Anaya.

Conejo, L. (2015). *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la Ley General de Educación a la Ley Orgánica de Educación*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

Conejo, L., Arce, M. & Ortega, T. (2015). A case study: How textbooks of a Spanish publisher justify results related to limits from the 70's until today. En K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *CERME 9 - Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 107-113). Praga, República Checa: ERME.

Conejo, L. y Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *NÚMEROS, 87*, 5-23.

Consejería de Educación de Castilla y León (2007). Decreto 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León, Suplemento al Nº99, de 23 de mayo de 2008* (pp. 2-88).

Consejería de Educación de Castilla y León (2008). Decreto 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León 111, de 11 de junio de 2008* (pp. 11306-11380).

Contreras, A. (2001). La enseñanza del análisis matemático en el Bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde las teorías de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N.

Climent y M. Sierra (Eds.) *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (71-85). Huelva: Universidad de Huelva.

Contreras, A. y García, M. (2015). Investigaciones sobre límites. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M. T. González y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 81-95). La Laguna, Tenerife: Servicio de Publicaciones de la ULL.

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012). Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *BOLEMA, 26*(42B), 667-690.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic. D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Countryman, J. (1992). *Writing to learn mathematics: strategies that work*. Portsmouth, EEUU: Heinemann.

Courant, R. y Robbins, H. (1964). *¿Qué es la Matemática?* Madrid: Aguilar (4ª ed.).

Cueto, S., Ramírez, C. & León, J. (2006). Opportunities to learn and achievement in mathematics in a sample of sixth grade students in Lima, Peru. *Educational Studies in Mathematics, 62*(1), 25-55.

Davison, D. M. & Pearce, D. L. (1990). Perspectives on writing activities in the mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal, 2*(1), 15-22.

Davison, D. M. & Pearce, D. L. (1992). The influence of Writing Activities on the mathematical learning of native American students. *The Journal of Educational Issues of Language Minority Students, 10*, 147-157.

De la Fuente, S. (2011a). *Análisis de conglomerados*. Documento docente. Madrid: UAM.

De la Fuente, S. (2011b). *Análisis factorial*. Documento docente. Madrid: UAM.

Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO, 4*, 6-16.

Dias, C. & Santos, L. (2013). Reflective portfolio of mathematics as a tool for regulating assessment in the learning of maths students of high school. En A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volumen 2, pp. 233-240). Kiel, Alemania: IGPME.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *RELIME, 7*(3), 195-218.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Edwards, B. S., Dubinsky, E. & Mc Donald, M. A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15-25.

El Bouazzaoui, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. Tesis doctoral no publicada. Université de Bordeaux I, Burdeos, Francia.

Espino, S. (2012). *La toma de apuntes, su uso y enfoque de aprendizaje en estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Barcelona.

Everitt, B. S. & Dunn, G. (2001). *Applied Multivariate Data Analysis*. Reino Unido: John Wiley & Sons Ltd.

Everitt, B. S., Landau, S., Leese, M. & Stahl, D. (2011). *Cluster Analysis: 5th Edition*. Reino Unido: John Wiley & Sons Ltd.

Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: continuidad y prototipos. *RELIME, 3*(2), 207-230.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L. & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2013). Concept of finite limit of a function at a point: meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 699-710.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 211-229.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA, 7*(3), 117-131.

Figueiredo, C. A., Contreras, L. C. y Blanco, L. J. (2015). Concepto de función: definición, representación y ejemplificación en la enseñanza y aprendizaje. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M. T. González y M. Moreno (Eds.), *Didáctica* *del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 67-80). La Laguna, Tenerife: Servicio de Publicaciones de la ULL.

Fonseca, C. y Gascón, J. (2002). Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la Enseñanza Secundaria. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín y L. Blanco (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 205-223). Logroño: SEIEM.

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *UNO, 25*, 21-40.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno simposio de la SEIEM* (pp. 111-128). Córdoba: SEIEM.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(3), 405–418.

Forsman, S. (1985). Writing to Learn is Learning to Think. En A. R. Gere (Ed.), *Roots in the Sawdust: Writing to Learn across the disciplines* (pp. 162-174). Illinois, EEUU: National Council of Teachers of English.

Fried, M. & Amit, M. (2003). Some reflections on mathematics classroom notebooks and their relationship to the public and private nature of student practices. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 91-112.

Garbín, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales del infinito. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(1), 87-113.

García Hoz, V. (1988). *La práctica de la educación personalizada*. Madrid: Rialp.

Gil, L., Ávila, V. y Ferrer, A. (2012). Toma de notas en lectura de textos múltiples: análisis de diferencias individuales. *Infancia y Aprendizaje, 34*(4), 449-464.

Godino, J., Contreras, Á. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

González, M. J., Gómez, P. y Restrepo, A. M. (2015). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación, 370*, 71-95.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115-141.

Grilles, J. M., Llorens, J. A., Madalena, J. I., Martínez, A. M. y Souto, X. M. (1996). *Los cuadernos de los alumnos. Una evaluación del currículo real*. Sevilla: Díada.

Guasch, T. y Castelló, M. (2002). Aproximación a la enseñanza de la toma de apuntes en la Educación Secundaria Obligatoria: un estudio descriptivo. *Infancia y Aprendizaje, 25*(2), 169-181.

Gvirtz, S. (1997). *Del currículum prescripto al currículum enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Gvirtz, S. y Larrondo, M. (2010). El cuaderno de clase como fuente primaria de investigación. Alcances y límites teóricos y metodológicos para su abordaje. En J. Meda, D. Montino y R. Sani (Eds*.), School Exercise Books: a complex source for a History of the Approach to Schooling and Education in the 19th and 20th Centuries* (pp. 11-22). Florencia (Italia): Polistampa.

Habre, S. & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 57-72.

Harel, G., Selden, A. & Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 147-172). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Hartley, J. & Davies, I. K. (1978). Note-taking: A critical review. *Programmed Learning and Educational Technology, 15*, 207-224.

Hawkins, S., Coney, M. B. & Bystrom, K. E. (1996). Incidental Writing in the Engineering Classroom. *Journal of Engineering Education, 85*(1), 27-33.

Hébrard, J. (2001). Por uma bibliografia material das escritas ordinárias: o espaço gráfico do caderno escolar (França – Séculos XIX e XX). *Revista brasileira de história da educação, 1*, 115-141. (Traducción al portugués de Laura Hansen).

Hidalgo, S., Maroto, A., Ortega, T. y Palacios, A. (2013). Actitudes y estrategias en el aprendizaje de las Matemáticas. *UNO, 63*, 89-97.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 49-64.

INECSE (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Iversen, S. M. (2013). Writer identity as an analytical tool to explore students' mathematical writing. En B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1496-1505). Ankara, Turquía: Middle East Technical University.

Jackson, J. E. (1991). *A User's Guide to Principal Components*. Estados Unidos: John Wiley & Sons.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Londres, Reino Unido: Lawrence Erlbaum Associates.

Jefatura del Estado (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado 106, del 4 de mayo de 2006* (pp. 17158-17207).

Job, P. & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM – Mathematics Education, 46*(4), 635-646.

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 407-431.

Kaiser, H. F. (1974). An index of factorial simplicity. *Psychometrika, 39*, 31-36.

Kemper, B. (2003). Writing across the curriculum: a review of the literature. *The Campbellsville Review, 2*, 41-57. Disponible en: http://www.campbellsville.edu/writing-across-the-curriculum-a-review-of-the-literature

Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(6), 1261-1279.

Kiewra, K. A. (1987). Note-taking and review: The research and its implications. *Instructional Science, 16*, 233-249.

Kiewra, K. A., Dubois, F. N., Christian, D., McShane, A., Meyerhoffer, M. & Roskelley, D. (1991). Note-taking functions and techniques. *Journal of Educational Psychology, 83*(2), 240-245.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica.* Barcelona-Buenos Aires-México: Paidós.

Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 379-394). Lleida: SEIEM.

Lacerda, N. M., Alves, D., Magalhães, M. L. y Mendes, L. (2014). O caderno de uma professora-aluna e as propostas para o ensino da aritmética na escola ativa (Minas Gerais, Década de 1930). *Revista História da Educaçao, 18*(42), 9-35.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Leme, M. C. & Rodrigues, W. (2009). Students' notebooks as a source of research on the history of mathematics education. *International Journal for the History of Mathematics Education, 4*(1), 51-63.

Lester, F. K. (2010). On the Theoretical, Conceptual and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. En B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education. Seeking new frontiers* (pp. 67-85). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI: Revista de Educación, 4*, 167-179.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-101). Granada: Comares.

Masingila, J. O., Nigam, P. y Domínguez, A. (1997). Evaluación: una herramienta para enseñar y para aprender. *UNO, 11*, 33-41.

Maz-Machado, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

McCormick, K. (2010). Experiencing the Power of Learning Mathematics through Writing. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal, 4*. Disponible en: http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/4.curriculum/mccormick01/article.pdf

McDonnell, L. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 17*(3), 305-322.

McLeod, S. & Soven, M. (Eds.) (1992). *Writing across the curriculum: A guide to developing programs*. Newbury Park, EEUU: Sage Publications.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *Boletín Oficial del Estado 293, del 8 de diciembre de 2006* (pp. 43053-43102).

MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado 5, del 5 de enero de 2007* (pp. 677-773).

MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *Boletín Oficial del Estado 266, del 6 de noviembre de 2007* (pp. 45381-45477).

Méndez, R. A. (2015). *El concepto de excelencia docente: una aproximación multidimensional inductivo-deductiva desde la Teoría Fundamentada, el Mapeo de la Ciencia y el Análisis Cualitativo de Contenido*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

Mercado, A. I. (2003). La toma de apuntes y la resolución de problemas en educación secundaria. *Épsilon, 55*, 63-72.

Mevarech, Z. R. & Kramarsky, B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 229-263.

Mohr, J. A., Raisor, J. M. & Thomas, J. A. (2014). The impact of notebooking on teacher candidates' construction of knowledge. *International Electronic Journal of Elementary Education, 6*(3), 385-394.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Monereo, C., Carretero, R., Castelló, M., Gómez, I. y Pérez Cabaní, M. L. (1999). Toma de apuntes en estudiantes universitarios: descripción de las condiciones de un escenario específico. En J. I. Pozo y C. Monereo (coords.), *El aprendizaje estratégico. Enseñar a aprender desde el currículo* (pp. 219-236). Madrid: Aula XXI, Santillana.

Monereo, C. y Pérez Cabaní, M. L. (1996). La incidencia de la toma de apuntes sobre el aprendizaje significativo. *Infancia y Aprendizaje, 73*, 65-86.

Monlau, P. F. (1856). *Diccionario etimológico de la lengua castellana*. Madrid: Manuel Rivadeneyra. Versión recuperada disponible en: http://www.etimonlau.com/

Monterrubio, M. C. (2007). *Modelos de valoración de manuales escolares de Matemáticas*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA, 5*(3), 105-127.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación de un modelo exhaustivo de análisis de textos escolares matemáticos. *Revista de Educación, 358*, 471-496.

Morales, F. (2004). Evaluar la escritura, sí… Pero, ¿qué y cómo evaluar? *Acción pedagógica, 13*(1), 38-49.

Morgan, C. (1995). *An analysis of the discourse of written reports of investigative work in GCSE Mathematics*. Tesis doctoral no publicada. Instituto de Educación, Universidad de Londres, Reino Unido.

Morgan, C. (1996). "The Language of Mathematics": Towards a Critical Analysis of Mathematics Texts. *For the Learning of Mathematics, 16*(3), 2-10.

Morgan, C. (2001). Mathematics and human activity: representation in mathematical writing. En C. Morgan & K. Jones (Eds.), *Research in Mathematics Education Volume 3: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp. 169-182). London: British Society for Research into Learning Mathematics.

Morgan, C. (2013). Language and mathematics: a field without boundaries. En B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 50-67). Ankara, Turquía: Middle East Technical University.

Morgan, C. (2014). Understanding practices in mathematics education: structure and text. *Educational Studies in Mathematics, 87*(2), 129-143.

NCTM (1992). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales". (Traducción de la edición original en inglés, de 1989).

NCTM (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales". (Traducción de la edición original en inglés, de 2000).

Nesher, P. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.), *Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 109-123). Barcelona: Graó.

Neubert, C. G. C. y Schlindwein, L. M. (2014). Cadernos escolares e práticas pedagógicas. *Actas del Congresso de Educaçao Básica COEB 2014*. Brasil: Florianópolis.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of Mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis & S. Papastavrides (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 116-124). Atenas, Grecia: Hellenic Mathematical Society. Comunicación disponible en: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1213/docs/KOMkompetenser.pdf

Nogueira, S. (2005). Efectos del uso de la pizarra en la toma de apuntes de estudiantes universitarios. *Cultura y Educación, 17*(4), 373-385.

Ntenza, S. P. (2006). Investigating forms of children's writing in Grade 7 Mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 321-345.

OCDE (2004). Marcos teóricos de PISA 2003. *Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: INECSE. (Traducción de la edición original en inglés, de 2003). Disponible en: http://www.oecd.org/pisa/39732603.pdf

OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (Traducción de la edición original en inglés, de ese mismo año). Disponible en: http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Opsal, H. (2013). *Bruk av elevbøker i matematikk på ungdomsskulen: ein kasusstudie.* [Use of student-books in mathematics at lower secondary school: a case study]. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Adger, Noruega.

Ortega, T. (2010). *Dificultades y errores de aprendizaje*. Documento interno. Universidad de Valladolid.

Ortega, T. (2016). *Entre la intuición y el formalismo. El concepto de límite*. Conferencia virtual en la Universidad de los Andes (Colombia). Disponible en: http://ued.uniandes.edu.co/Difusión/Conferenciasvirtuales.aspx

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación, 12*(2), 209-221.

Ortega, T. y Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 32*, 87-115.

Orton, A. (1983). Students' understanding on differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 235-250.

Orts, A., Llinares, S. y Boigues, F. J. (2015). Una descomposición genética para el concepto de recta tangente. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 459-467). Alicante: SEIEM.

Patton, M. Q. (1980). *Qualitative Evaluation Methods*. California, EEUU: Sage Publications.

Pecharromán, C. (2008). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 121-134.

Pérez Serrano, G. (1994). *Investigación Cualitativa. Retos e Interrogantes. II: Técnicas y análisis de datos.* Madrid: La Muralla.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1982). *Psicología del niño.* Madrid: Morata.

Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892).* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Picado, M. y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA, 6*(1), 11-27.

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Cultura y Ediciones Morata.

Piñuel, J. L. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Estudios de Sociolingüística, 3*(1), 1-42.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de Bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Porras, D. (1994). Do your students digest mathematics like ice cream or like steak? *Mathematics and Computer Education, 28*(1), 6-15.

Porta, L. y Silva, M. (2003). *La investigación cualitativa: el análisis de contenido en la investigación educativa.* Documento de trabajo. Disponible en: http://anthropostudio.com/wp-content/uploads/2015/04/PORTA-Luis-y-SILVA-Miriam-2003.-La-investigaci%C3%B3n-cualitativa.-El-An%C3%A1lisis-de-Contenido-en-la-investigaci%C3%B3n-educativa..pdf

Porter, M. K. & Masingila, J. O. (2002). Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 165-177.

Pozo, M. M. y Ramos, S. (2001). El cuaderno de clase como instrumento de acreditación de saberes escolares y control de la labor docente. En *La acreditación de saberes y competencias. Perspectiva histórica. XI Coloquio Nacional de Historia de la Educación* (pp. 481-501). Oviedo: Sociedad Española de Historia de la Educación.

Price, J. J., Canarecci, M., Conrad, J., Ehresman, D., Foster, C., Harris, M. D., Martin, K., Mullendore, T., Rice, T. K. & Wrighthouse, P. (1997). Mathematics notebooks in Middle School and Junior High School. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(1), 34-38.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 103-132.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. París, Francia: Armand Colin.

Radatz, H. (1979). Error analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*, 163-172.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132-150.

RAE (2001). *Diccionario de la Lengua Española, 22ª edición.* Madrid: Espasa. Disponible en línea en: http://www.rae.es/recursos/diccionarios/diccionarios-anteriores-1726-2001/diccionario-de-la-lengua-espanola-2001

RAE (2014). *Diccionario de la Lengua Española, 23ª edición. Edición del Tricentenario*. Madrid: Espasa-Calpe. Disponible en línea en: http://dle.rae.es/

Reeves, C. & Major, T. (2012). Using students notebooks to measure opportunities to learn in Botswana and South African classrooms. *Prospects, 42*(4), 403-413.

Rensaa, R. J. (2014). The impact of lecture notes on an engineering student's understanding of mathematical concepts. *Journal of Mathematical Behavior, 34*, 33-57.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*(1), 39-63.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNIÓN, 33*, 11-27.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA, 58*, 7-23.

Saint-Onge, M. (1997). *Yo explico, pero ellos… ¿aprenden?* Bilbao: Mensajero.

Salgado-Horta, D. y Maz-Machado, A. (2013). Toma de apuntes y aprendizaje de estudiantes en Educación Superior. *Revista Complutense de Educación, 24*(2), 341-358.

Salinas, T. M. (2004). Effects of reflective notebooks on perceptions of learning and mathematics anxiety. *PRIMUS, 14*(4), 315-327.

Sánchez, C. (1997). *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Sánchez-Compaña, T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Sánchez-Matamoros, G. (2010). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de Universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto).* Sevilla: Edición Digital @tres.

Sánchez-Matamoros, G. y García, M. (2015). Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M.

T. González y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 97-108). La Laguna, Tenerife: Servicio de Publicaciones de la ULL.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la Matemática. *RELIME, 11*(2), 267-296.

Sanchidrián, C. y Arias, B. (2013). La labor del maestro en los cuadernos escolares: un estudio de casos. *Bordón: Revista de Psicología, 65*(3), 131-147.

Santos, A. A. C. (2002). *Cadernos escolares na primeira série do ensino fundamental: funções e significados.* Trabajo final de la Maestría en Psicología, trabajo no publicado. Universidad de São Paulo, Brasil.

Santos, L. & Semana, S. (2015). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics, 88*, 65-87.

Schmidt, D. (1985). Writing in Math Class. En A. R. Gere (Ed.), *Roots in the Sawdust: Writing to Learn across the disciplines* (pp. 104-115). Illinois, EEUU: National Council of Teachers of English.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 338-355.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Shepard, R. G. (1993). Writing for Conceptual Development in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 287-293.

Shield, M. (1996). Evaluating Student Expository Writing in Mathematics. En P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education. Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 502-509). Melbourne: MERGA.

Shield, M. & Galbraith, P. (1998). The analysis of student expository writing in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 29-52.

Shield, M. & Swinson, K. (1994). Stimulating student elaboration of mathematical ideas through writing. En J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th*

International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1351-1358). Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-41.

Sierra, M., González, M. T y López, C. (1998). Funciones: Traducción entre representaciones. *Aula, 10*, 89-104.

Sierra, M., González, M. T y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad. *RELIME, 3*(1), 71-85.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE-Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, Tenerife: SEIEM.

Sole, M. A. (2014). The Mathematics Portfolio: An Alternative Tool to Evaluate Students' Progress. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 3*(1), 66-71.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (Eds.) *Handbook of Qualitative Research* (3ª ed.) (pp. 443-466). Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 24-33.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23*(1), 39-50.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Teng, H. C. (2011). Exploring Note-taking strategies of EFL listeners. *Procedia: Social and Behavioral Sciences, 15*, 480-484.

Valle, J. y Manso, J. (2013). Competencias clave como tendencia de la política educativa supranacional de la Unión Europea. *Revista de Educación, Número Extraordinario de 2013*, 12-33.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338.

Van Meter, P., Yokoi, L. & Pressley, M. (1994). College students' theory of note-taking derived from their perceptions of note-taking. *Journal of Educational Psychology, 86*(3), 323-338.

Villarreal, M. & Borba, M. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and … notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 42*(1), 49-62.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Viñao, A. (2006). Los cuadernos escolares como fuente histórica: aspectos metodológicos e historiográficos. *Annali di Storia dell'Educazione e delle Istituzioni Scholastiche, 13*, 17-35.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Paidós.

Waywood, A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics, 12*(2), 34-43.

Waywood, A. (1994). Informal writing-to-learn as a dimension of a student profile. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 321-340.

Zandieh, M. J. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivative*. Tesis doctoral. Oregon State University, Oregón, Estados Unidos.

Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education, 8*, 103–122.

Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES, SOCIALES Y DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL:

ANÁLISIS DE LOS CUADERNOS DE MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS DE BACHILLERATO: PERCEPCIONES, PERFILES DE ELABORACIÓN Y UTILIZACIÓN Y RENDIMIENTO ACADÉMICO

ANEXOS

Presentada por Matías Arce Sánchez para optar al grado de Doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:
Dr. D. Tomás Ortega del Rincón

-AÑO 2016-

ÍNDICE DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

SIGLAS, ACRÓNIMOS Y ABREVIATURAS

ACD	Actividad creada por el docente
ACP	Análisis de componentes principales
AELT	Actividad extraída del libro de texto
Anº	Código para los alumnos en el desarrollo de la investigación propia de la tesis doctoral
ARLT	Actividad reformulada del libro de texto
C-T	Modalidad Científico-Tecnológica (Bachillerato)
Ca	Abreviatura de los indicadores asociados a la cualidad “Calidad”
CCSS	Modalidad Ciencias Sociales (Bachillerato)
CM	Cuaderno de Matemáticas (en las entrevistas)
D1V2Ind5	Indicador número 5 de la segunda variable de la Dimensión 1 (ejemplo para ilustrar el significado)
DT	Desviación Típica (en las tablas con información estadística)
Enº	Código para los estudiantes en el trabajo exploratorio (Capítulo II)
EAEM	Escala Afectivo-Emocional hacia las Matemáticas
EI	Equipo investigador
Ej.	Ejercicio
ESO	Enseñanza Secundaria Obligatoria
Est. / Estud.	Abreviaturas de “Estudiante”
et al.	et alii (y otros)
ev.	Evaluación
GGP	Gran Grupo Práctico (en el desarrollo del análisis clúster)
GGPnº	Gran Grupo Práctico (1 ó 2, en el desarrollo del análisis clúster)

GGP1S3	Subgrupo 3 del Gran Grupo Práctico 1 (ejemplo para ilustrar los subgrupos de los GGP, en el desarrollo del análisis clúster)
GGT	Gran Grupo Teórico (en el desarrollo del análisis clúster)
GGTnº	Gran Grupo Teórico número (1, 2 ó 3, en el desarrollo del análisis clúster)
gl	Grados de libertad
GT	Grupo Teórico (en el desarrollo del análisis clúster)
GTnº	Grupo Teórico número (1, 2, 3, 4, 5 ó 6, en el desarrollo del análisis clúster)
Imp	Abreviatura de Importante
Inv.	Abreviatura de Investigador
M	Media aritmética (en las tablas con información estadística)
N	Número de elementos (en las tablas con información estadística)
p.	Página
Pág.	Página (cuando se hace referencia a ejercicios del libro de texto)
PAU	Pruebas de Acceso a la Universidad
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
Signif.	Significatividad
UP	Unidad Práctica
UPnº	Unidad Práctica número (1, 2 ó 3 según el tema al que pertenezca)
UT	Unidad Teórica
UTnº	Unidad Teórica número (1, 2 ó 3 según el tema al que pertenezca)

INTRODUCCIÓN

En este CD adjunto a la tesis doctoral presentamos una serie de Anexos que complementan algunos de los capítulos que forman parte de la memoria. Es el caso de los capítulos II, III, IV, V y VI. Así, se han estructurado los Anexos en cinco bloques, un bloque para los Anexos correspondientes a cada uno de los capítulos.

A continuación se explica de una forma somera cuál es el contenido de cada uno de esos cinco bloques de Anexos, a los que se hará referencia utilizando las letras mayúsculas del abecedario por orden alfabético.

El Anexo A se ha titulado *Anexos relacionados con el trabajo de exploración (Capítulo II)* y, como indica el título, contiene información complementaria relacionada con el desarrollo del trabajo de exploración que sirvió como precursor de la tesis doctoral, trabajo que se expone en el Capítulo II. En concreto, en este anexo se recoge el análisis detallado de los cuadernos que se realizó en el trabajo exploratorio, la escala EAEM (Hidalgo *et al*., 2013) utilizada para obtener información sobre el perfil afectivo-emocional hacia las matemáticas de los alumnos participantes, y la transcripción del debate con los estudiantes sobre los cuadernos de matemáticas realizado en el aula.

El Anexo B se ha titulado *Anexos con información sobre el desarrollo de las clases (Capítulo III)*. En este bloque se ha recogido información detallada sobre el desarrollo de las clases de matemáticas en las cuatro aulas participantes en esta investigación. En concreto, contiene el guion elaborado por el equipo investigador (EI) para recoger información de relevancia sobre las clases con la ayuda del docente. Posteriormente, se incluye información detallada sobre el desarrollo de las clases correspondientes al bloque de Análisis Matemático, a modo de diario, en cada una de las cuatro clases. La información incluida en los diarios procede de los diarios desarrollados por los propios docentes, de nuestra observación con algunas sesiones o de información extraída a partir de la comparación de los cuadernos de matemáticas de una misma clase.

El Anexo C tiene por título *Anexos relacionados con el proceso de análisis de los cuadernos (Capítulo IV)*. En este bloque se han recogido algunos ejemplos de los datos recogidos (fotocopias de los cuadernos) y el análisis desarrollado en ellas, las plantillas vacías para analizar tanto las unidades teóricas como las unidades prácticas, así como varios ejemplos de plantillas rellenas, a modo de muestra: las unidades UT1 y UP1 de la alumna A14, y las unidades UT2 y UP2 del alumno A10.

El Anexo D se ha titulado *Anexos asociados al desarrollo del análisis cuantitativo (Capítulo V)*. En este bloque se recoge información detallada sobre dos de los pasos seguidos en el tratamiento de los indicadores sin valoración numérica (apartado V.1 de la memoria de tesis doctoral). También se recoge información complementaria propia del desarrollo del análisis cuantitativo que no se ha incluido en la memoria para no recargar el capítulo con un número excesivo de tablas.

El Anexo E tiene por título *Anexos con la transcripción de las entrevistas (Capítulo VI)* y, como indica el título, contiene las transcripciones de las ocho entrevistas realizadas a ocho parejas de alumnos participantes, en relación con el modo en que elaboran y utilizan el cuaderno de matemáticas y cuál es el rol que tiene el cuaderno para estos estudiantes.

ANEXO A

Anexos relacionados con el trabajo de exploración (Capítulo II)

En este conjunto de anexos se recoge información complementaria relacionada con el desarrollo del trabajo exploratorio de investigación, trabajo que sirvió como precursor de la tesis doctoral, y que se presenta en el Capítulo II de la memoria de tesis doctoral. En concreto, el Anexo A consta de tres anexos específicos:

- En el Anexo A.1 se muestra el análisis detallado del cuaderno de matemáticas de cada uno de los estudiantes participantes en este trabajo exploratorio.
- En el Anexo A.2 se recoge la escala EAEM (Hidalgo *et al*., 2013), que fue utilizada en este trabajo exploratorio para recoger información sobre el perfil-afectivo emocional hacia las matemáticas de los estudiantes participantes.
- En el Anexo A.3 se recoge la transcripción completa del debate sobre los cuadernos de matemáticas que se realizó con los alumnos participantes, en el marco de dicho trabajo exploratorio.

ANEXO A.1

En este anexo incluimos el análisis que se ha realizado de las fotocopias de los cuadernos de matemáticas de cada uno de los alumnos participantes en este estudio que hace las veces de trabajo exploratorio previo a la investigación propia de la tesis doctoral. Se presenta el análisis conjunto de las dos tandas de fotocopias, alumno por alumno, teniendo en cuenta las dimensiones y variables de análisis, y los indicadores considerados en cada variable (todo ello se presenta en el apartado II.3 de la memoria).

Este análisis que aquí se detalla, con la diversa y abundante información obtenida, supuso el germen para la generación de los diferentes perfiles de elaboración del cuaderno de matemáticas en la clase en la que se desarrolló esta investigación.

Cuaderno de E1

VARIABLE 1: En el cuaderno de este alumno aparecen mezclados los ejercicios de números complejos con el tema de funciones y sus ejercicios. No se indica de ninguna manera dicha circunstancia. Además, ni siquiera puede encontrarse en el cuaderno un título claro para indicar el comienzo del tema de funciones: el alumno escribe un comentario confuso, además con letras de un tamaño muy pequeño: "Pag. 185 Analítica. Inecuaciones, funciones e intervalos. Fotocopias y proyeciones" (sic).

En el cuaderno de este alumno hay un ejercicio, de representación de funciones de la forma y=|f(x)| (valor absoluto), cuya resolución está partida en dos trozos separados: el de representación de funciones con valores absolutos. Encontramos ejercicios resueltos de forma completa en el cuaderno del alumno, pero faltan otros muchos ejercicios de los cuales tan sólo encontramos, como mucho, el enunciado del mismo (en el caso de que hayan sido dictados por su profesor).

La presentación del cuaderno de este alumno es regular, y puede considerarse como pobre en ocasiones. En la parte de cálculo de límite vemos varios tachones que afean la presentación. Además, pueden encontrarse varios dibujos sin relación con la asignatura y con el contenido presentado en los márgenes de algunas hojas. Hay un abuso de espacios en blanco, especialmente en la primera tanda de fotocopias, en las que se dejan muchas hojas a medio utilizar. Los gráficos que aparecen son correctos, aunque algunos de ellos están poco explicados.

La letra tiene un tamaño variable, a veces es muy grande y a veces es muy pequeña, y además se realiza sin demasiado esmero. Por otra parte, el alumno no sigue las líneas del cuaderno al escribir cadenas de igualdades, resultando una escritura de éstas desigual y desordenada.

No se aprecia un estilo distintivo y propio del alumno en su cuaderno, más allá de un cierto aire desordenado en el desarrollo del mismo, lo cual se piensa que puede suponer un obstáculo para la utilización del mismo.

VARIABLE 2: En relación a la teoría registrada en el cuaderno, en él pueden encontrarse algunas de las definiciones sobre los diferentes tipos de funciones, pero faltan otras y, además, faltan todos los ejemplos y contraejemplos sobre los diferentes tipos de funciones que fueron expuestos en clase. Las definiciones han sido registradas usando un tamaño de letra muy pequeño.

Dentro de las actividades que aparecen en su cuaderno, pueden encontrarse bastantes de las que fueron realizadas o corregidas en la clase. Pero no están todas las actividades de este tipo: faltan muchas de las actividades sobre cálculo de dominios de funciones, y varias del tema de números complejos. Entre las actividades propuestas por el docente de la clase y no corregidas en el aula, este alumno sí que intenta la resolución de las actividades de composición de funciones, pero no aquellas del tema de límite de una función. Tampoco encontramos ninguna actividad en el cuaderno que sea distinta de las actividades propuestas en el aula.

En cuanto a la resolución de actividades por parte del alumno, del análisis de su cuaderno y de la observación de las clases en el aula interpretamos que este alumno ha combinado la transcripción de actividades resueltas en la pizarra con intentos propios de resolución de las mismas durante su corrección en el aula. Este comportamiento provoca que, en ocasiones, los ejercicios de su cuaderno presenten una resolución inconexa, incompleta y muy desordenada, en la que no suelen llegar a escribirse las conclusiones finales obtenidas de la resolución de cada ejercicio.

En cuanto a la corrección de las tareas, el alumno no indica claramente la presencia de errores en sus intentos de resolución de las actividades. En ocasiones, el alumno rehace la actividad en la que ha cometido errores a continuación, pero en otros casos sólo llega a registrar el resultado correcto de la tarea.

VARIABLE 3: Se considera que no existe intención en el alumno de poder utilizar su cuaderno como instrumento de apoyo para su aprendizaje. Por ejemplo, interpretamos que el alumno no intenta la mayoría de los ejercicios que se proponen, algo que le permitiría comprobar si entiende y domina los conceptos tratados y reflexionar sobre ellos. Como ya hemos dicho, parece que el alumno intenta resolver durante la propia clase los ejercicios resueltos. Esto hace que la resolución resultante en el cuaderno sea muy desordenada y deslavazada, además de no tomar nota de los procesos mentales seguidos o de las notas o comentarios que el profesor añade durante la corrección del ejercicio en el aula. Por todo ello, consideramos que su cuaderno es una herramienta que puede resultar de poca utilidad al alumno, por ejemplo, para revisiones posteriores del mismo en su estudio de la asignatura.

VARIABLE 4: Este alumno no copia muchos de los enunciados de los ejercicios, y tampoco hay prácticamente notas o aclaraciones a mayores, por lo que el resultado es la presencia de muy poco lenguaje verbal en el cuaderno del alumno. No obstante, en la escritura de los enunciados que sí toma encontramos varias faltas de ortografía, como “Escrive” o “Proyeciones”, y también palabras mal escritas, como “calcural” o "varoles". Otro ejemplo de expresión deficitaria es "Cuando x tiende 0" (omite la preposición "a"). Además, faltan una gran cantidad de signos de puntuación y muchísimas de las tildes en las palabras que las necesitan.

VARIABLE 5: Encontramos en el cuaderno de este alumno un error en la utilización de un término que consideramos un error de tipo conceptual: el alumno usa el concepto "punto de inflexión" con un significado diferente al significado de este término en análisis matemático, para referirse al mínimo que poseen las funciones del tipo y=|x±a|. Otros errores en notación simbólica que pueden denotar un déficit en la comprensión de algunos conceptos son igualdades como "$\lim_{x\to 0} 0'0001 = 0$" (concepto de límite), "$\sqrt[6]{-1} = 1$" o "$\sqrt{-1} = 1$" (raíces de índice par con radicando negativo). También existe un error al resolver un límite en cuya resolución aparece el número e, puesto que explicita en su cuaderno que el siguiente límite es igual al número e (error también cometido por el alumno E7): $\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{-3}{3x-2}\right]^{\frac{-3}{3x-2}}$.

En los ejercicios de números complejos hay algunos errores de cálculo en sus intentos de resolución. Un ejemplo es el siguiente producto de números complejos: "$(-1-i)\cdot(3-i) = -3+i-3-1$". También se detectan errores asociados a la transcripción de la pizarra de las resoluciones de ejercicios sobre números complejos.

Los errores más frecuentes y repetidos en el cuaderno de este alumno son los asociados a la carencia en la utilización adecuada del lenguaje matemático. Se destacan varios errores que consideramos de mayor importancia: la utilización de "implicaciones" ($\Longrightarrow$) en lugar de "iguales" (=) en las cadenas de igualdades obtenidas al resolver ejercicios de números complejos o cálculos de límites en los que existan indeterminaciones, se omiten los iguales entre el nombre y la expresión de la función al definir y trabajar con funciones definidas a trozos, se omite el nombre de las funciones con las que se trabajan en bastantes ocasiones. Además, se utilizan muchas notaciones incorrectas, tanto para denotar las composiciones de funciones (utiliza "f(g)" y "g(f)" en lugar de $f \circ g$ y $g \circ f$, respectivamente), como la notación del límite de una función ("$\lim x \to 1$" o "$\lim x \to 2$", colocando indebidamente la tendencia de la variable independiente en el símbolo del límite) o utilizando abreviaturas erróneas, como cuando se refiere al dominio de una función con la abreviatura "conj". Además, este alumno omite constantemente el símbolo del límite, $\lim_{x\to}$, en las cadenas de igualdades resultantes al aplicar las técnicas de resolución de límites en los que existen indeterminaciones, y justamente comienza a utilizarlo cuando ya no debe hacerse, es decir, cuando ya ha eliminado la indeterminación en el límite y va a indicar el resultado del mismo.

Cuaderno de E2

VARIABLE 1: En el cuaderno de este alumno se mezclan los ejercicios de números complejos con la parte de funciones, sin que se indique de ninguna manera el cambio de un tema a otro.

No encontramos en este cuaderno ejercicios cuya resolución esté partida en varios trozos separados. Los ejercicios que fueron propuestos por el profesor en el aula están resueltos de manera completa en su cuaderno. Únicamente encontramos algún ejercicio inacabado correspondiente a ejercicios que el alumno intenta en su cuaderno a mayores de los propuestos por su docente.

La presentación de este cuaderno es mala, está muy poco cuidado y escasa atención por parte del alumno, e interpretamos que no concede demasiada importancia a este aspecto. En este cuaderno pueden encontrarse un gran número de tachones, asociados a los diferentes fallos y errores que el alumno va cometiendo en sus intentos de resolución de los ejercicios y que va detectando. En parte, la aparición de estos tachones es debida a que el alumno intenta resolver las actividades con bolígrafo, a diferencia de muchos de sus compañeros que utilizan el lápiz para sus intentos de resolución. Esto provoca que la limpieza de la unidad sea bastante mala, con partes muy emborronadas. Los gráficos que el alumno realiza son de pobre calidad. Además, en algunas ocasiones apelotona y junta demasiado diferentes cálculos realizados. Por último, también indicamos el poco cuidado y esmero detectado en la caligrafía de la letra, los números y los signos matemáticos, con tendencia a hacerse "de cualquier manera", lo que puede dificultar su lectura e interpretación posterior.

VARIABLE 2: En el cuaderno de este alumno no hay registrado ningún aspecto propio de la teoría impartida. Las definiciones teóricas de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva, que fueron expuestas por el profesor y que no estaban recogidas en los apuntes fotocopiados proporcionados por éste, fueron tomadas y registradas por el alumno en los propios apuntes fotocopiados.

En relación a las actividades existentes en su cuaderno, no están registradas algunas de las tareas que se hicieron o que se corrigieron durante las clases, en particular, en la parte sobre números complejos. Por el contrario, sí que aparecen resueltas en su cuaderno otras actividades que no fueron propuestas. Todas las actividades propuestas en la parte de composición de funciones y de cálculo de límites de funciones se detecta que han sido intentadas por el propio alumno en su cuaderno, y, además, se encuentran un gran número de ejercicios sobre cálculo de dominios, de límites y de asíntotas que han sido intentados por el alumno en su cuaderno por iniciativa propia. Muchos de estos ejercicios a mayores que aparecen resueltos en su cuaderno se corresponden con ejercicios planteados en el libro de texto que los alumnos tienen como apoyo y que, como ya hemos comentado, no es seguido explícitamente por su profesor.

Por tanto, el análisis del cuaderno de este alumno nos permite afirmar que todos los ejercicios que podemos encontrar en el mismo han sido intentados por el propio estudiante, salvo aquellos ejercicios que se realizan directamente en el transcurso de la clase, a modo de ejercicio resuelto. Además, en ocasiones encontramos la presencia de métodos alternativos o diferentes a los trabajados o proporcionados en la clase en actividades intentadas por el estudiante, generalmente, son más complejos. En el caso de que un ejercicio en esta situación haya sido corregido posteriormente en el aula, el alumno no complementa su resolución con el registro de la resolución efectuada en el aula.

VARIABLE 3: El análisis del cuaderno del alumno muestra que el cuaderno es, para él, un instrumento que le sirve para reforzar su aprendizaje de las matemáticas desde un ámbito privado (en el sentido de Fried y Amit, 2003), donde lo que pretende es el repaso, la reflexión y la consolidación de los conceptos presentados en la clase. Esto sucede con contenidos como los números complejos, el cálculo de dominios de una función, el cálculo de límites de funciones o el cálculo de asíntotas, incluso en algún caso adelantándose a la presentación del contenido por parte del profesor en la clase.

No obstante, hay que decir que interpretamos la presencia de cierta precipitación en la resolución de los ejercicios por parte del estudiante. Se observa la presencia de muchos descuidos que provocan errores en sus intentos de resolución, o la inadvertencia de algunas condiciones o datos que se proporcionan en el enunciado de los ejercicios.

En general, podemos decir que descuida el posible papel del cuaderno dentro del dominio público, o como una posible herramienta de revisión en su estudio de la asignatura, puesto que no explicita en ningún caso los procesos mentales seguidos en la resolución de las actividades, ni lo completa con posibles notas o aclaraciones que pudieran ser de utilidad para esa revisión. Tampoco escribe nunca los enunciados de los ejercicios que hace: tan sólo escribe el número del mismo en el libro de texto, sin registrar tampoco la página en la que está, lo que complicaría la localización de los enunciados de los mismos en una hipotética revisión posterior.

VARIABLE 4: Debido a que, como acabamos de comentar, el alumno no escribe los enunciados de los ejercicios (a excepción de aquellos que dicta oralmente el docente), el lenguaje verbal tiene una presencia muy reducida en el cuaderno de este alumno. No obstante, la escritura descuidada y rápida que ya ha sido comentada en la variable 1 de análisis, contribuye a que, en ocasiones, el alumno omita letras o signos de puntuación, o escriba tan solo de manera parcial algunos enunciados.

VARIABLE 5: En relación a la transcripción de elementos de la pizarra, encontramos varios fallos al tomar los enunciados de los ejercicios, generalmente al registrar los datos (omitir una potencia al cuadrado, o confundir algunos números con otros, como los seises y los ceros), lo que puede hacer que el ejercicio cambie radicalmente (por ejemplo, al tomar la expresión simbólica de una función en el cálculo de un límite con indeterminación).

Encontramos algunos errores de tipo conceptual en los ejercicios de cálculo de dominios. Por ejemplo, este alumno no quita los puntos en los que la función tangente no existe, ni los puntos en los que se anula la función del denominador en un cociente de funciones.

Existen varios errores relacionados con la resolución de inecuaciones y de desigualdades, un aspecto que fue trabajado en el primer trimestre del curso. Encontramos implicaciones erróneas al resolver inecuaciones de segundo grado, como son: "$x^2>1 \Rightarrow x>1$" y "$x^2<1 \Rightarrow x<1$", o se aplica erróneamente que el producto de dos factores sea positivo sólo cuando los dos factores lo sean. También se encuentran expresiones ambiguas e incorrectas, como "$x^2>9 \Rightarrow x>\pm 3$". Además, también hay errores al operar en la resolución de algunos límites, dando resultados erróneos. Varios ejemplos se presentan a continuación:

$$\frac{-1-0}{0+0} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{3^x}{2^x} = \frac{-\infty}{-\infty} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^5+1}{3x^7-1} = \frac{2x^2+\frac{1}{x^7}}{3-\frac{1}{x^7}} = \frac{2x^2+0}{3+0} = +\infty$$

En cuanto al lenguaje matemático de su cuaderno, existen muestras en el cuaderno que hacen ver el interés de este alumno por intentar utilizar correctamente el lenguaje matemático. En general, el nivel de lenguaje simbólico matemático que encontramos en el cuaderno de este alumno es más alto que el de sus compañeros. En la primera parte del tema de límites existen muchas deficiencias en la escritura simbólica del límite (por ejemplo, escribe "f(x) $\Rightarrow$ L" sin indicar el valor de la variable independiente al que se tiende, o hay una omisión constante del signo $\lim_{x\to}$ en las cadenas de igualdades donde se resuelven límites de funciones). Sin embargo, estas deficiencias en la utilización del lenguaje simbólico asociado al límite se van corrigiendo y subsanando a medida que avanza el tema, sobre todo cuando el profesor les insiste en que no deben omitir el signo $\lim_{x\to}$ cuando es necesario utilizar éste. Otro error que aparece repetidas veces es el de hacer el símbolo de no existe con la E del derecho, en lugar de la "E" escrita al revés.

Cuaderno de E3

VARIABLE 1: En el cuaderno de este alumno no se separan los temas de números complejos y de funciones, sino que los ejercicios de números complejos se encuentran a lo largo del tema de funciones, sin que se indique de ninguna manera esta circunstancia, ni tampoco cuando se vuelve al tema de funciones. Es decir, en este cuaderno se mezclan ejercicios de ambos temas sin indicar de ninguna manera los cambios de uno a otro.

No encontramos en este cuaderno ejercicios cuya resolución esté partida en varios trozos separados entre sí. Este alumno deja espacios en blanco destinados a terminar aquellas actividades cuya resolución no es completada en el aula, pero posteriormente no completa las mismas. Esto se traduce, también, en la presencia de muchos ejercicios incompletos en su cuaderno (aquellos que su docente no completa en la clase), especialmente en el tema de funciones.

La presentación de este cuaderno es muy mala, muy descuidada, existiendo un gran número de tachones a lo largo del cuaderno, sobre todo asociados a equivocaciones del alumno al realizar cuentas en sus intentos de resolución de las actividades. El alumno no respeta los márgenes del cuaderno, especialmente el margen superior y el inferior. Las representaciones de funciones que realiza son correctas, pero no se explican (por ejemplo, no se acompaña la representación con el nombre de la función y/o su expresión simbólica). La letra es mala, difícilmente legible y realizada con poco cuidado, no siguiendo además las líneas que marca el cuaderno para escribir. También se realizan de manera descuidada los números y los símbolos matemáticos, dando lugar, incluso, a algunas confusiones entre ellos al identificarlos. En general, la impresión general del cuaderno de este alumno es poco agradable para la vista.

El alumno muestra un estilo muy desaliñado y poco cuidado al trabajar con su cuaderno, lo que creemos que complica el uso del mismo como instrumento para su aprendizaje de las matemáticas.

VARIABLE 2: En relación a los contenidos teóricos, en el cuaderno de este alumno encontramos registradas las definiciones de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva, pero no se registran los ejemplos y contraejemplos que utilizó el profesor para ilustrar estos conceptos.

En relación a las actividades que pueden encontrarse en el cuaderno, se detecta un diferente comportamiento del alumno según el tema trabajado. En el tema de números complejos sí que se detecta que el alumno intenta resolver por él mismo las actividades planteadas que se dejan pendientes, incluso también se intenta algún ejercicio a mayores de los propuestos. En estos ejercicios, además, encontramos indicios de que la resolución ha podido realizarse en clases particulares, puesto que encontramos anotaciones extrañas que no son propias del alumno, sus compañeros o de su profesor. Sin embargo, en la parte de funciones tan sólo encontramos las actividades que se han realizado o corregido en la clase, y sin que se detecten intentos de resolución del alumno en ninguna de ellas.

En relación a la corrección de las tareas intentadas, el alumno no corrige los errores cometidos en sus intentos de resolución. No lo hace en los ejercicios de números complejos, y tampoco en las pocas actividades del tema de funciones que intenta. Por ejemplo, el alumno no corrige una representación de una función del tipo $y=|f(x)|$ que realizó erróneamente y que se corrigió posteriormente en la clase.

VARIABLE 3: Consideramos que la intención que muestra el alumno para utilizar el cuaderno como instrumento en su estudio y aprendizaje de las matemáticas es distinta en función de los temas. Como ya hemos comentado, en el tema de números complejos sí se detecta una intención del alumno en este propósito, puesto que sí que intenta resolver las actividades propuestas e, incluso, hay actividades a mayores de las propuestas. No obstante, no se encuentran notas de apoyo, comentarios del profesor, comentarios del alumno o la escritura de los procesos mentales seguidos que hubiera contribuido a una mejor utilización posterior del cuaderno como herramienta para el estudio de la materia. Sin embargo, en el tema de funciones se mantiene la falta de comentarios y escritura de procesos mentales pero, además, el alumno ya no intenta resolver las actividades planteadas, por lo que tampoco se aprecia una utilización del cuaderno propia del dominio privado, como herramienta para el repaso o la reflexión de los contenidos trabajados.

VARIABLE 4: En el cuaderno de este alumno encontramos muy poco texto escrito. El alumno no escribe los enunciados de los ejercicios, a excepción de que éstos sean dictados por el docente. En el poco texto verbal no encontramos faltas de ortografía, pero sí que faltan algunas tildes, también faltan algunos puntos al final de frases. Además, hay palabras mal escritas (como “conmutivo” en lugar de conmutativo), o frases mal construidas, como “Pensar no utilizando las razones trigonométricas de suma de ángulos” (sic).

VARIABLE 5: Encontramos un error asociado a la representación de una función con valor absoluto que muestra una falta de asimilación del efecto del valor absoluto y de la expresión afectada por el valor absoluto. El estudiante representa la función $y=|x|-3$

como si fuera la función y=|x-3|, puede ser que dejándose llevar por la representación realizada previamente de funciones como y=|x+5| o y=|x+1|. Como ya se ha comentado en la variable 2, el alumno no corrigió este error.

Existe un abundante número de errores y deficiencias en la utilización adecuada de la notación y del lenguaje simbólico matemático a lo largo de todo el cuaderno. Exponemos a continuación algunos errores que son más generalizados en el cuaderno de este alumno:

- En todos los ejercicios de números complejos se repite sistemáticamente una escritura incorrecta de los mismos: escribe el número entre paréntesis, como si tuviera dos coordenadas, escribiendo en la primera componente la parte real y en la segunda la parte imaginaria (incluyendo la i). Por ejemplo, escribe "$(\frac{6-x}{10}, \frac{2i+3xi}{10})$". El alumno no corrige este error a lo largo de todo el tema, incluso después de que el profesor le recalcara la incorrección de la notación después de salir a resolver un ejercicio a la pizarra.

- El alumno omite los iguales necesarios al definir y trabajar con funciones definidas a trozos, encadenándose las llaves que definen la expresión simbólica de la función sin poner los signos igual necesarios entre medias.

- El alumno escribe deficientemente la notación asociada al límite, especialmente en el signo que indica el mismo. Por ejemplo, encontramos notaciones inadecuadas como: "$\text{limite}_{x \to 2^+}$ ", "$\lim x \to \infty$", "$\lim \frac{f(x)}{x \to 2}$", "limites $x \to 1$ y $x \to 2$". Este símbolo también es omitido en otros casos, o se escribe cuando ya no es necesario.

- Este alumno omite muchísimos signos igual en las cadenas de igualdades que conducen a la resolución de límites, incluso en ocasiones los sustituye con flechas.

Cuaderno de E5

VARIABLE 1: En el cuaderno de esta alumna se mezclan los ejercicios de números complejos con la parte de funciones, sin que se indiquen de ninguna forma los cambios de tema producidos. De hecho, no encontramos ninguna marca que explicite el comienzo del tema de funciones.

En general, esta alumna siempre deja un hueco en blanco para realizar los ejercicios que se intentan y que no se terminan de resolver en el aula. Así, no encontramos ningún ejercicio cuya resolución esté partida en varios trozos separados a excepción de un ejercicio de representación de funciones (en el que encontramos el enunciado en una hoja y su solución dos hojas después). Existen algunos ejercicios inacabados en el cuaderno de esta alumna, de ejercicios que el docente plantea pero no corrige en el aula, y cuya resolución no llega a completar la alumna en sus intentos de resolución.

La presentación del cuaderno de esta alumna es muy buena. En general, este cuaderno tiene un aspecto muy agradable para la vista. Está muy limpio, no tiene ningún tachón; la alumna utiliza correctamente los espacios del cuaderno y respeta los márgenes. Los gráficos que encontramos en el cuaderno son realizados con cuidado, están muy bien hechos, y la letra y los signos que se realizan son muy claros, y fácilmente legibles.

Así, puede decirse que esta alumna posee un estilo muy cuidadoso en la realización de su cuaderno, con una presentación que pensamos que ayuda a una mejor utilización posterior del mismo en el estudio de la materia.

VARIABLE 2: En el cuaderno de esta alumna encontramos registrados varios aspectos teóricos. Se registra la definición de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva (las tres que el docente estableció en clase a mayores de los apuntes fotocopiados suministrados), y también se registran los ejemplos y contraejemplos realizados, salvo el ejemplo de función suprayectiva. Esta parte de teoría se introduce utilizando un título para identificarla, pero el título no es completo, puesto que escribe “Funciones inyectiva, suprayectiva y” (*sic*, omite la mención a las funciones biyectivas).

En relación a las actividades que encontramos en el cuaderno, están bastantes de las que el docente ha realizado o corregido en el aula, pero no todas (faltan todos los ejercicios sobre cálculo de dominios de funciones). La alumna intenta en su cuaderno las actividades que el docente propuso sobre composición de funciones y cálculo de límites. No existe ninguna actividad a mayores de las propuestas.

En los ejercicios sobre números complejos, la alumna intentó resolver algún ejercicio, pero copia tal cual de la pizarra la resolución de los ejercicios realizada en el aula (aunque acompañados de notas aclaratorias). En la parte de ejercicios sobre funciones la alumna también copia todos aquellos que fueron propuestos y corregidos posteriormente en el aula, pero sí que intenta realizar los ejercicios planteados por su profesor y no corregidos en el aula.

En cuanto a la corrección de los ejercicios, la alumna rehace algún ejercicio que se ha corregido en clase aunque ella lo tuviera bien resuelto. Es decir, prefiere siempre copiar cómo se ha resuelto el ejercicio en la clase. También en ocasiones escribe en su cuaderno si las actividades fueron corregidas o no en el aula, y, en caso de que no estén resueltas en el mismo lugar en el que se copió el enunciado, se indica la fecha en la cual puede encontrarse su resolución en el cuaderno.

VARIABLE 3: En el cuaderno de esta alumna sí que se observa la intención de utilizarlo como instrumento para su estudio y aprendizaje de la asignatura. Por ejemplo, en la parte de funciones sí que se intentan resolver las actividades que se plantean y se dejan pendientes. Además, en aquellas actividades cuya resolución copia de su corrección en el aula, la alumna añade aquellos comentarios o notas que han sido especialmente enfatizados por el docente durante la resolución. Por el contrario, no observamos notas asociadas a la escritura de los procesos mentales seguidos en la resolución de los ejercicios.

VARIABLE 4: Esta alumna no copia en su cuaderno los enunciados de los ejercicios, a excepción de aquellos que son dictados por el docente, por lo que hay muy poco texto en este cuaderno. El poco lenguaje verbal que encontramos está correctamente escrito, sin faltas de ortografía. No obstante, se observa que la alumna, en algunas ocasiones, acorta algunas palabras y escribe abreviaturas de las mismas (por ejemplo, escribe “conj.” en lugar de conjuntos). También faltan algunos signos de puntuación, como algunos puntos al final de frase o algún signo de interrogación.

VARIABLE 5: No existen apenas errores derivados de la transcripción errónea de elementos de la corrección de actividades en el aula, salvo la escritura errónea de un número complejo en su forma módulo-argumento: $-1_{180^{\circ}}$ (se escribe incorrectamente un signo menos en el módulo, algo que no tiene sentido).

En el cuaderno de esta alumna se detecta una falta de comprensión sobre cómo afecta el valor absoluto, y la definición y representación de funciones en las que interviene algún valor absoluto. La alumna representa erróneamente todas las funciones de la forma y=|f(x)| que intenta graficar. También hay un error grave al definir como función a trozos una función de este tipo:

$$y = \frac{|x|}{2} = \begin{cases} \frac{x}{2}, si\ x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{-x}{2}, si\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Encontramos varios errores en la aplicación de técnicas para resolver límites con indeterminaciones:

- En un límite con indeterminación $(\to \infty)$-$(\to \infty)$, se divide por x intentar eliminarla, sin ser consciente de que al dividir por x la función, está cambiando la misma.
- En la indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, la alumna divide por x en el numerador y denominador sin que esto elimine la indeterminación (en un límite donde los polinomios en numerador y denominador eran de grado 2).

Encontramos dos errores en cálculos algebraicos. Uno de ellos es un error al que es difícil encontrar sentido: "1+(1+3x)-1=1+$\frac{1}{3x}$". El otro error parece estar relacionado con una aplicación incorrecta de la linealidad en la raíz cuadrada (posiblemente asociada a un obstáculo con la asociación de linealidad al cuadrado de una suma): "$\sqrt{x^2+4} = x + 2$".

También existen varios errores relacionados con una utilización incorrecta del lenguaje simbólico matemático. Por ejemplo, esta alumna no utiliza el signo igual al definir y trabajar con funciones definidas a trozos, utiliza la misma notación inadecuada del alumno E3 para denotar a los números complejos, iguala indebidamente el número e y su definición con la resolución de un límite en el que hay una indeterminación del tipo $(\to 1)^{\to\infty}$ y continúa escribiendo el signo del límite, "$\lim_{\mathrm{x}\to}$ " cuando ya va a escribir el resultado, y sin escribir la función (es decir, escribe "$\lim_{x\to} = valor$"). Además, encontramos un déficit en la utilización del lenguaje matemático, al llamar exponente a un coeficiente en un polinomio.

Cuaderno de E6

VARIABLE 1: La alumna intenta separar totalmente en su cuaderno los ejercicios de números complejos del tema de funciones. Para ello, deja algunas hojas en blanco antes de comenzar el tema de funciones para registrar allí los ejercicios pendientes de números complejos. Sin embargo, no tiene espacio suficiente para todos los ejercicios, y hay dos de ellos, los dos últimos que dictó el docente, que están dentro del tema de funciones. La alumna indica adecuadamente este hecho. Además, escribe los títulos de los temas de modo destacado, en tamaño grande y decorando las letras.

La alumna también deja los espacios necesarios para completar los ejercicios que no se hayan terminado de resolver en el aula o hayan sido propuestos. Por lo tanto, no encontramos en su cuaderno ejercicios cuya resolución esté partida en varios trozos separados. Los únicos ejercicios inacabados que encontramos son aquellos propuestos y no corregidos por el profesor en los que la alumna intenta su resolución pero no completa la misma.

La presentación es bastante buena, muy limpia. No encontramos ningún tachón en el cuaderno, si la alumna se equivoca hace una pequeña y discreta raya para indicarlo. En este cuaderno se respetan los márgenes y hay una adecuada utilización de los espacios. Los gráficos se realizan con mucho cuidado; por ejemplo, puede destacarse que la alumna realice los ejes coordenados con regla en la representación de funciones. Estos gráficos también están bien integrados en el cuaderno, aunque alguno de ellos puede inducir algún error, como se comentará en la Variable 5. La letra utilizada es fácilmente legible, así como los números y los símbolos matemáticos.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, tan sólo encontramos en el cuaderno una pequeña introducción realizada por el docente al comenzar el tema de funciones y presentar el concepto de función. La alumna no copia en su cuaderno la teoría sobre las funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas que el docente añadió con respecto a los apuntes fotocopiados suministrados, por lo que interpretamos que copió la teoría sobre estos conceptos en los propios apuntes fotocopiados.

En el cuaderno de esta alumna podemos encontrar todas las actividades que se han hecho o que se han corregido en la clase. Además, se detecta que la alumna ha intentado resolver todos los ejercicios de composición de funciones y de cálculo de límites que fueron propuestos por el docente pero que no se corrigieron en el aula. No encontramos ningún ejercicio a mayores de los propuestos por su profesor.

Como acabamos de comentar, la alumna sí que intenta resolver los ejercicios sobre composición y cálculo de límites planteados. En relación al resto de ejercicios, en la parte de números complejos hay algunos ejercicios que sí son intentados por la alumna con anterioridad a su corrección en el aula, pero hay otros que son copiados directamente de esa corrección.

La alumna corrige todas aquellas tareas que resuelve de forma errónea. La alumna resuelve a lápiz los ejercicios que intenta, por lo que para corregir sus errores lo que hace es borrar aquello que hace mal y corregirlo copiando encima la resolución realizada en la pizarra.

VARIABLE 3: En el análisis se detecta la existencia de una clara intención por parte de la alumna para que el cuaderno se constituya en un instrumento que le ayude en su aprendizaje de las matemáticas. Interpretamos la existencia de esta intención por varios motivos. Uno de ellos es que intente resolver las actividades que el docente plantea y deja pendiente su corrección, para poder saber si ha comprendido o no los conceptos y técnicas tratadas en clase. Pero una característica distintiva de esta alumna es la presencia de una gran cantidad de aclaraciones y de anotaciones tomadas en su cuaderno junto con la resolución de las actividades, tanto de anotaciones escritas durante la corrección de actividades en el aula como anotaciones propias de la alumna, de apoyo o ayuda para ella misma. Este aspecto lo comparte con otras alumnas de la clase como E14 y E20, pero la frecuencia de las anotaciones es mucho mayor en esta alumna E6, remarcando incluso aquellas que considera especialmente importantes o que le van a ser de mayor utilidad (uso de rotulador para enmarcarlas y enfatizarlas, o escritura de advertencias como “OJO” al lado de la anotación).

Además, encontramos varios signos de interrogación (?) a lo largo del cuaderno de la alumna, al lado de varias dudas que la alumna hace explícitas en su cuaderno (comportamiento que también tiene la alumna E14). Sin embargo, la alumna nunca ha preguntado en la clase esas dudas al docente, al menos durante el periodo en que duró el *Practicum* y estuvimos presentes en el aula.

VARIABLE 4: Esta alumna siempre copia los enunciados de todos los ejercicios, lo que unido a la presencia de bastantes anotaciones y aclaraciones hace que exista cierta cantidad de texto en el cuaderno de esta alumna. La sintaxis que aparece en las frases de su cuaderno es normal, correcta. En relación a las faltas de ortografía, encontramos un abuso de palabras con escritura sincopada, es decir, la presencia de un lenguaje más típico de SMS o de redes sociales. Por ejemplo, la alumna escribe en varias ocasiones "xa" en lugar de para, "xke" en lugar de porque o "=s" en lugar de iguales. Además, encontramos una falta de ortografía en la escritura de la palabra bisectriz ("bisectrid"). Además, existe una deficiencia importante en el uso de signos de puntuación, puesto que la alumna omite el signo de exclamación inicial en las frases exclamativas (también puede existir aquí cierta influencia del lenguaje SMS o de redes sociales).

VARIABLE 5: En el cuaderno de esta alumna podemos encontrar varios errores que consideramos de tipo conceptual, asociados a un conocimiento deficiente o incompleto de algunos conceptos y su repercusión en la aplicación de algunas técnicas:

- Existe un error generalizado en la escritura de números reales negativos como números complejos utilizando la notación módulo-argumento, debida a que escribe el propio número como valor del módulo del mismo (en lugar de su valor absoluto). Algunos ejemplos son: "-1_{180°", "-4_{180°" y "-4_{π}".
- En varias ocasiones se asocia la presencia de simetría par en una función a la presencia de simetría con respecto a cualquier eje vertical.
- En la representación de funciones de la forma $y=|f(x)|$, una vez escritas como funciones a trozos, no tiene en cuenta los dominios de los trozos y construye tablas de valores para ambos trozos sin preocuparse si los valores de la variable independiente están o no dentro del dominio del trozo. Esto ocasiona la presencia de varias gráficas donde hay puntos con varias imágenes. La alumna corrige este error cuando el ejercicio se resuelve en la clase.
- Mismo error que la alumna E5 al dividir por x el numerador y denominador en un límite con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ en el que tanto el polinomio del numerador como el del denominador tenían grado 2.
- Representación de ramas de parábola absolutamente verticales en la representación de funciones cuadráticas (algo incompatible con que lo representado sea la gráfica de una función).
- Problemas en la asimilación de la operación composición de funciones: tras componer dos funciones, la alumna eleva sistemáticamente al cuadrado la composición obtenida e indica este cuadrado como resultado, en lugar de la composición real.

Existen algunos errores de cálculo en este cuaderno. Uno de ellos es el error al dividir dos números (al dividir -40 entre 20 indica que el resultado de la división es 20). También hay un error al indicar la indeterminación existente en un límite: en el límite $\lim_{x\to 0}[1+3x]^{\frac{2}{x}}$ escribe la existencia de una indeterminación del tipo $(\to\infty)^{\to 0}$.

En el cuaderno también se encuentran algunos errores de transcripción al copiar la resolución de los ejercicios de la pizarra, especialmente en las actividades sobre números complejos. Estos errores dan lugar a transcripciones sin sentido, donde da la sensación que la alumna no está entendiendo lo que copia, algo que puede afectar en la posterior utilización del cuaderno como herramienta de estudio. Un ejemplo paradigmático son las siguientes igualdades al escribir un producto de números complejos:

$$z\cdot z' = p_{\alpha}\cdot\varphi_{\alpha'} = [\varphi\cdot\varphi']_{0+0}$$

En relación al lenguaje matemático utilizado en el cuaderno, se cometen algunos errores en su utilización, pero no demasiados. Encontramos algunas expresiones verbales mejorables, como son "x^2-4 se halla xa los puntos de corte con el eje de abscisas" (sic) o "es positivo, con los cuernos para arriba, x es positivo". También hay algunas deficiencias en el lenguaje simbólico, asociadas al signo igual: se iguala un límite que no existe al símbolo matemático de no existencia, $\nexists$; y se sustituyen los iguales por implicaciones ($\Rightarrow$) al definir funciones definidas a trozos y trabajar con ellas.

Cuaderno de E7

VARIABLE 1: El alumno intenta dejar una serie de hojas en blanco al final del tema de números complejos para realizar en ellas los ejercicios y que este tema no se mezcle con el siguiente tema de funciones. Sin embargo, no deja las hojas suficientes, por lo que al final terminan mezclándose ambos temas. En la parte de funciones no pone un título como tal para indicar el comienzo de tema, sino que escribe “Introducción a la simetría en funciones. Concepto de dominio y simetría” (escribe aparentemente como título del tema un apartado del mismo). Encontramos, a lo largo de los temas, ejercicios relacionados con contenidos de las evaluaciones anteriores o de temas posteriores: hay ejercicios con contenidos de la 2ª evaluación (interpretamos que para preparar el examen de recuperación de esa evaluación, que tiene suspensa), así como ejercicios de límites de funciones con anterioridad a que el tema fuera visto en clase. Así, existe una mezcolanza de ejercicios de diferentes temas en el cuaderno de este alumno sin que se indique de ninguna manera.

Debido a que el alumno deja espacio en blanco para completar aquellos ejercicios que no se terminan al realizarlos en la clase o en sus intentos de resolución, no encontramos ningún ejercicio partido en varios trozos a lo largo del cuaderno. Tampoco hay ningún ejercicio que esté incompleto. No obstante, no toma nota de muchos de los ejercicios que el profesor propone en la clase (como comentaremos en la siguiente variable.

Consideramos que la presentación del cuaderno de este alumno es pasable, pero podría mejorarse. Es cierto que el cuaderno está limpio y, en líneas generales, no existen tachones. Sin embargo, realiza con muy poco esmero la letra, con un tamaño demasiado grande y de forma bastante descuidada, lo mismo sucede también con los números y los signos matemáticos. En ocasiones, el alumno apelotona demasiado los cálculos realizados (sobre todo al resolver límites con indeterminaciones). Los gráficos realizados son correctos y están bien integrados, aunque en algunos casos son demasiado pequeños o existe poca atención en su realización.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, en el cuaderno de este alumno encontramos registradas las definiciones de los distintos tipos de funciones (inyectiva, suprayectiva, biyectiva) que el docente añadió a la teoría de los apuntes suministrados. Sin embargo, este alumno no copia ni los ejemplos ni los contraejemplos ilustrando estos conceptos que fueron realizados en la clase.

En este cuaderno encontramos registradas casi todas las actividades que se hacen o se corrigen en la clase, a excepción de algunos límites propuestos para su cálculo. No se encuentran en el cuaderno las actividades sobre composición de funciones y cálculo de límites de funciones que su docente propuso pero que, posteriormente, no corrigió en el aula. Sin embargo, en este cuaderno sí que pueden observarse un gran número de actividades intentadas a mayores de las propuestas, que interpretamos como actividades realizadas en clases particulares. El contenido de estas actividades es muy variado. Existen bastantes actividades de recuperación de los contenidos de la segunda evaluación (sobre trigonometría y geometría analítica en el plano), que aparecen debido a que el alumno tiene suspensa esta evaluación y el examen de recuperación se realizó durante las fechas del *Practicum*. Además, también hay actividades de representación de funciones a mayores de las planteadas por el docente, así como actividades de cálculo de límites antes de que el docente introdujera este contenido en el aula.

En resumen, en relación a la resolución de actividades puede decirse que en este cuaderno hay una mezcla de actividades copiadas de la pizarra con actividades cuya resolución se intenta en clases particulares, estas últimas generalmente diferentes de las que el docente propone en el aula.

En relación a la corrección de actividades, el alumno no corrige algunos fallos de cálculo que pueden encontrarse en sus intentos de resolución de actividades sobre números complejos.

VARIABLE 3: Encontramos la presencia de una intención por parte del estudiante de utilizar su cuaderno como una herramienta en su aprendizaje de las matemáticas. En este cuaderno encontramos un gran número de actividades a mayores de las propuestas por el docente en el aula, que el alumno intenta resolver. El objeto principal de estas actividades es que el alumno compruebe si tiene o no el dominio suficiente de conceptos o técnicas propias de evaluaciones anteriores para poder enfrentarse a un examen de recuperación. Por tanto, el alumno utiliza el cuaderno como herramienta para comprobar este dominio a través del repaso de ejercicios de temas anteriores.

No obstante, la intencionalidad del cuaderno como herramienta para el estudio y aprendizaje de las matemáticas sería mayor si se añadieran en los ejercicios aquellos procesos mentales, notas o aclaraciones de ayuda propias o del docente, puesto que no encontramos ningún elemento de este tipo en el cuaderno. Pensamos que estos elementos permitirían reforzar ese repaso de conceptos de temas anteriores, así como el estudio de conceptos propios de los temas actuales en la clase.

VARIABLE 4: Este alumno sí que copia en su cuaderno los enunciados de todos los ejercicios que realiza en él. Sin embargo, en muchos casos aparecen abreviaturas de las palabras o palabras acortadas. Por ejemplo, el alumno escribe en los enunciados "dom" en lugar de dominio, "lim" en lugar de límite, "nº" en lugar de número, "img" en lugar de imagen o "h" en lugar de altura.

No encontramos faltas de ortografía en el texto escrito en el cuaderno, pero sí que se omite alguna tilde necesaria, y en una ocasión se omite el signo de interrogación necesario en el comienzo de una pregunta.

VARIABLE 5: Encontramos un comportamiento en el alumno que pudiera estar relacionado con la presencia de un conocimiento conceptual deficiente: el alumno siempre recurre a las tablas de valores para representar gráficamente cualquier función, sin recurrir o utilizar las propiedades o características del tipo de función que está representando (por ejemplo, lineales, cuadráticas o funciones del tipo y=|f(x)|). También relacionado con las representaciones gráficas de funciones, el alumno representa las funciones cuadráticas con unas ramas completamente verticales o que, incluso, "vuelven" hacia valores de la variable independiente que ya tenían imagen; lo que es incompatible con que lo representado sea una función.

Por último, el alumno también presenta una comprensión deficiente del número e y su utilización para resolver límites con indeterminaciones del tipo $(\rightarrow 1)^{\rightarrow\infty}$, puesto que indica que el límite $\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{-3}{3x-2}\right]^{\frac{-3}{3x-2}}$ es igual al número e.

Existen varios errores en cálculos aritméticos y algebraicos a lo largo del cuaderno del alumno que no son corregidos. Dos ejemplos de errores sin corregir son: "$\sqrt{2080}=4\sqrt{520}$" (error al extraer un factor de la raíz cuadrada sin aplicar ésta) y "2+3x=0⇒x=2/3" (error al no cambiar el signo al trasponer un sumando).

Existen un gran número de errores asociados a un mal uso del lenguaje matemático simbólico. En particular, encontramos bastantes problemas asociados al uso de los signos igual y de la implicación, que en ocasiones se intercambian cuando no son, en absoluto, signos equivalentes. Podemos observar una falta de comprensión de lo que significa la implicación. Un ejemplo es la siguiente expresión: "$x^2-9=0\Rightarrow x^2-9<0$". Otro ejemplo es el siguiente, en el que se sustituye el signo igual por la implicación: "2a+3⇒+1" (en lugar de 2a+3=+1). Además, en las cadenas de igualdades que se obtienen en el proceso de resolución de límites con indeterminaciones, el alumno sustituye en ocasiones los signos igual por implicaciones, y también por flechas (→).

En relación al signo igual, también es necesario comentar que se omite el uso de los mismos al definir y trabajar con funciones definidas a trozos.

Otro foco de problemas en el lenguaje simbólico matemático es el signo del límite, "$\lim_{x\to}$ ". Este simbolismo se utiliza indebidamente en las cadenas de igualdades de resolución de límites una vez que la indeterminación ya ha sido eliminada y se procede al cálculo del límite (generalmente sustituyendo). También hay un uso indebido de este signo (omite la función) al indicar la presencia de una indeterminación: "$\lim_{x\to 2}\left[\frac{0}{0}\right]$".

Cuaderno de E9

VARIABLE 1: En el cuaderno de este alumno encontramos mezclados los ejercicios de números complejos con la teoría del tema de funciones, sin que se indique de ninguna manera esta circunstancia (mezcla de temas).

En este cuaderno tan sólo hay un ejercicio cuya resolución esté partida en varios trozos separados: es un ejercicio de representación de funciones que constaba de dos partes, donde se hace cada una en un sitio distinto, aunque escribiendo el enunciado de la parte en ambos sitios. En ocasiones, aunque no siempre, este alumno deja espacio para poder completar los ejercicios cuya realización no se completa en la clase, o que se dejan pendientes (que no siempre son realizados, como indicaremos en la variable 2).

La presentación del cuaderno es bastante buena, el cuaderno está muy limpio y no encontramos ningún tachón en su desarrollo. Además, en el cuaderno hay una adecuada utilización de los espacios en blanco y se respetan los márgenes. Los gráficos elaborados por este alumno están muy bien hechos (incluso utiliza la regla para trazar los ejes o las funciones lineales) y son muy claros, además de estar bien integrados en su cuaderno. La letra es clara y fácilmente legible, algo que también es trasladable tanto a los números como a los símbolos matemáticos existentes en su cuaderno. Este alumno tiene un estilo peculiar de escritura, puesto que suele escribir cada carácter de letra por separado en las palabras (una escritura del mismo estilo que la que produce una máquina de escribir o un procesador de textos en un ordenador).

VARIABLE 2: En relación a la teoría, en el cuaderno de este alumno no encontramos registradas las definiciones de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva, que el docente añadió a la teoría suministrada en los apuntes fotocopiados. Tampoco registra ninguno de los ejemplos y contraejemplos ilustrando estos conceptos. No obstante, sí que encontramos registrados dos aspectos teóricos contenidos en los apuntes fotocopiados que su docente escribió en la pizarra al impartirlo en la clase: la definición simbólica de composición de funciones y de función recíproca de una dada.

En cuanto a las actividades registradas en el cuaderno de este alumno, observamos un cambio en el comportamiento dependiendo de los días. En la primera parte del tema de funciones el alumno sí que realiza los ejercicios propuestos por su docente, junto con algunos ejercicios a mayores, de cálculo de dominios y estudio de simetrías en funciones. En los ejercicios de números complejos se combina la presencia de ejercicios resueltos por él mismo con ejercicios cuya resolución fue directamente copiada de la pizarra. Y en la última parte, con ejercicios sobre composición de funciones y cálculo de límites, el alumno tan sólo copia literalmente aquellas actividades que se han hecho o se han corregido en el aula, sin intentar la resolución de los mismos. Así, se detecta como, en líneas generales, los intentos de resolución de actividades por parte del alumno han ido disminuyendo a medida que avanzaba el análisis del cuaderno.

En relación a la corrección de las tareas cuya resolución se intenta, hay un ejercicio de números complejos de los que intenta que el alumno resuelve mal y que cuyo intento de resolución no corrige durante la revisión de esta actividad en el aula.

VARIABLE 3: Encontramos una evolución en la intención detectada en el cuaderno como instrumento para el estudio y el aprendizaje del alumno. En las primeras fotocopias sí que se observa una intencionalidad como instrumento de ayuda para su aprendizaje, dado que intenta resolver las actividades propuestas por el docente e, incluso, realiza actividades a mayores, por lo que a través de las actividades intentadas en su cuaderno busca el repaso y consolidación de los conceptos tratados en la clase. No obstante, el alumno no escribe procesos mentales, aclaraciones, notas de ayuda o comentarios durante sus intentos de resolución ni tomados de la corrección de estas actividades por parte del docente.

Sin embargo, en la segunda parte de las fotocopias desaparece esa intencionalidad del cuaderno, puesto que no se intentan las actividades propuestas y sigue sin tomarse nota de procesos, comentarios o aclaraciones de interés.

VARIABLE 4: En el cuaderno de este alumno existe cierta cantidad de texto verbal, puesto que el alumno sí que escribe los enunciados de los ejercicios. El lenguaje que se utiliza es correcto, sin faltas de ortografía, aunque sí que falta algún signo de puntuación, como algún punto al final de frase o algún signo de interrogación al inicio de una pregunta.

VARIABLE 5: No encontramos en este cuaderno ningún error que consideremos como error conceptual. Sí que encontramos un error de cálculo, al operar un producto de números complejos (error en el signo de dos sumandos).

Donde sí que encontramos un abundante número de errores y de deficiencias es en el lenguaje matemático existente a lo largo del cuaderno, tanto en sus intentos de resolución de las actividades, como, también, en la transcripción de ejercicios durante su corrección en el aula. Los mayores problemas de este alumno están asociados a la utilización del signo igual, lo que puede denotar una falta de comprensión del significado del mismo. El alumno omite la utilización del signo igual en muchas de las cadenas de igualdades resultantes en la manipulación de expresiones con números complejos o en la resolución de límites con indeterminación: en lugar de utilizar el signo igual utiliza los puntos y coma para separar expresiones, incluso en algún caso utiliza la implicación o la coma. Un ejemplo paradigmático de ese comportamiento es el siguiente, al transformar la expresión de un número complejo:

$$\text{“}z = \frac{-a+i}{2-i}; \ \frac{(-a+i)\cdot(2+i)}{4-(-1)}; \ \frac{-2a-ai+2i+i^2}{5}\text{”}$$

El signo igual también se omite al definir y trabajar con funciones a trozos. Por el contrario, hay un uso indebido del signo igual para igualar expresiones que no son iguales. Un ejemplo es la siguiente cadena errónea de igualdades obtenida al intentar escribir el módulo de un número complejo genérico a+ib:

$$\text{“}\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}} = a^2+b^2 = \frac{1}{a^2+b^2}\text{”}$$

Otro ejemplo de uso indebido es el siguiente extracto, donde, además de utilizar el punto y coma en lugar de la implicación, escribe indebidamente un signo igual en lugar de un mayor o igual (que era lo que correspondía): “$2x-5 \geq 0; x = 5/2$”.

También existe alguna deficiencia simbólica más: no utiliza el símbolo para la unión de conjuntos, puesto que utiliza una “u” minúscula en lugar del símbolo ∪. Además, el alumno omite indicar el nombre o la expresión de la función al escribir la solución de los límites (por ejemplo, escribe expresiones como “$lim_{x\to-2} = \frac{8}{3}$”).

Por último, existe alguna frase verbal en la que el lenguaje matemático utilizado es mejorable. Por ejemplo, escribe “Parte imaginaria sin la i” (cuando la parte imaginaria de un número complejo no contiene la i).

Cuaderno de E10

VARIABLE 1: En el cuaderno de este alumno no se mezclan los ejercicios de diferentes temas. Esto es debido a que el alumno deja unas pocas hojas en blanco, con anterioridad al comienzo del tema de funciones, para desarrollar los ejercicios sobre números complejos. Estas hojas que deja son suficientes para registrar en ellas todos los ejercicios. El alumno comienza el tema de funciones con la palabra "ANALÍTICA", por lo que la indicación del nuevo tema es poco clara. En resumen, el cuaderno del alumno no sigue un orden cronológico como tal, sino un orden cronológico dentro de cada uno de los temas, que se ubican por separado.

En el cuaderno de este alumno no hay ejercicios cuya resolución aparezca partida en varios trozos separados, puesto que el alumno siempre deja el espacio en blanco necesario para completarlo en el caso de que no se termine en la clase, o que sea planteado por el docente. No obstante, como comentaremos en la siguiente variable, el alumno no termina de resolver los ejercicios en esta circunstancia, por lo que encontramos varios ejercicios inacabados en este cuaderno.

La presentación de este cuaderno es muy buena, el cuaderno está muy limpio, sin que exista ningún tachón. El alumno respeta los márgenes y hace una utilización y gestión adecuada de los espacios en blanco. Los gráficos que realiza este alumno están muy bien hechos, muy cuidados, son claros y están bien integrados en el cuaderno. La letra está muy cuidada, existe un esmero en la caligrafía de la misma; lo mismo puede indicarse de los números y los signos matemáticos. Así, en líneas generales, el cuaderno tiene una presentación muy agradable para la vista.

Puede deducirse que este alumno mantiene un estilo muy cuidadoso y muy organizado dentro del cuaderno, conservándolo a lo largo del mismo. Consideramos que este estilo es muy adecuado para el cuaderno, puesto que potencia sus cualidades como herramienta para el estudio y aprendizaje de las matemáticas.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, este alumno registra en su cuaderno las definiciones que el profesor dictó y que no estaban en los apuntes fotocopiados suministrados: funciones inyectiva, suprayectiva y biyectiva. Este alumno también recogió los ejemplos y contraejemplos realizados, registrando de manera adecuada los gráficos aclaratorios utilizados en estos ejemplos y contraejemplos.

En el cuaderno de este alumno pueden encontrarse la mayoría de las actividades que se hicieron durante las clases, así como las actividades pendientes que son corregidas posteriormente en el aula. Tan sólo faltan algunas actividades sobre cálculo de dominios de funciones, correspondientes a un día que faltó a clase y que, como podemos observar, no ha copiado de algún compañero o por otro medio. En las actividades que el profesor propone y que posteriormente no corrige no existen intentos de resolución del alumno. De hecho, el alumno no recoge en su cuaderno ni el enunciado de algunas de estas actividades dictadas. Tampoco encontramos en el cuaderno intentos de resolución de actividades diferentes de las propuestas por su profesor.

Se detecta que las actividades que están registradas en el cuaderno de este alumno están literalmente copiadas de su resolución en la clase por parte del profesor o de alguno de sus compañeros. En este último caso, además, hemos observado que el alumno espera a que su profesor dé el visto bueno a la resolución propuesta por su compañero para copiarla en el cuaderno. Tan sólo encontramos un mínimo intento de resolución propio en un ejercicio de números complejos. El intento de resolución, simultáneo a la corrección del ejercicio en el aula, es rápidamente abandonado por el alumno, añadiendo al lado del mismo un lacónico “NO”. Esta es la única muestra de corrección de errores de la que podemos hablar en su cuaderno, dado que no hay más intentos de resolución de actividades que sean propios del alumno.

VARIABLE 3: Encontramos algunos indicadores que nos hacen pensar en la intención del alumno para utilizar su cuaderno de matemáticas como instrumento para el estudio y el aprendizaje de las mismas. Por una parte, en el cuaderno de este alumno se escriben los pasos y procesos seguidos en la resolución de las actividades que copia de la pizarra. Además, acompaña la escritura de estos pasos y procesos con la anotación de comentarios enfatizados por el docente durante su resolución, así como anotaciones propias de ayuda. Estas anotaciones suyas tienen una temática común: parece que este alumno siempre está buscando “recetas” que le sirvan para la resolución de los ejercicios. Tres ejemplos de anotaciones son los siguientes:

- El alumno explicita qué representa cada una de las letras que aparecen en la fórmula para calcular las raíces de un número complejo, añadiendo la palabra “¡Atención!” al lado de la fórmula y de esas explicaciones.

- “Para módulo, pin pan pum y raíz” (comentario de tipo personal, suponemos que significativo para el alumno, al lado de un número complejo del que había que calcular su módulo).

- “Para comprobar números complejos en ecuación: resolver ésta” (“receta” para resolver una actividad en la que le pidan comprobar si unos números concretos son o no solución de una ecuación).

Todas estas notas y aclaraciones están escritas con lápiz, y en un tono muy claro, de manera que pasan prácticamente desapercibidas en las fotocopias.

Así, encontramos una intencionalidad del cuaderno para ser utilizado posteriormente por el propio alumno, desde un dominio que podría considerarse como público (en el sentido de Fried y Amit, 2003). Esto es así dado que es cierto que el lector al que va dirigido el texto creado es el propio alumno, pero la utilidad del registro no está en el propio momento del registro (puesto que no hay una componente de repaso, trabajo o reflexión del propio alumno sobre los conceptos trabajados), sino que es posterior, como herramienta a utilizar en el estudio de la materia, por ejemplo, previamente a un examen.

VARIABLE 4: La escritura utilizada por el alumno en el cuaderno es correcta, sin faltas de ortografía y con un adecuado uso de los signos de puntuación. Tan sólo podemos destacar una frase donde la forma verbal utilizada es mejorable: en una frase en la que indica las soluciones de una ecuación escribe “las soluciones serían”, cuando sería más propio decir “las soluciones serán” o “las soluciones son”.

VARIABLE 5: Existen varios errores derivados de la transcripción incorrecta de los ejercicios que su profesor resuelve en la pizarra. Estos errores pueden indicar una falta de atención del alumno en esta transcripción. Encontramos errores como el cambio o el “baile” de algunos signos (+/-) o la omisión de otros (como raíces cuadradas que desaparecen y luego vuelven a aparecer). Estos errores hacen que los cálculos transcritos no sean coherentes en algunas ocasiones, lo que puede dificultar o resultar confuso en una posible revisión posterior.

Algunos de estos errores de transcripción pueden resultar de mayor gravedad, dado que pueden indicar o provocar deficiencias en la comprensión de algunos conceptos. Uno de ellos es la escritura indebida de un signo menos al representar un número real negativo como un número complejo en la notación módulo-argumento: escribe “$-1_{180º}$”. Este error de transcripción también pudiera indicar una falta de comprensión del significado de la notación modulo-argumento, y de la imposibilidad de que el módulo de un número sea negativo (es el módulo de un vector). Otro error está en la transcripción del dictado de la definición de función biyectiva, donde escribe indebidamente la palabra “inyectiva” en lugar de biyectiva, lo que puede provocar una confusión en el alumno entre estos términos. El alumno escribe que: "Para que una función y=f(x) sea inyectiva (en lugar de poner biyectiva) es necesario que sea simultáneamente inyectiva y suprayectiva"

Como todo lo que aparece en su cuaderno es transcripción de lo que se hace en clase, no hay lugar a que aparezcan errores debido a un aprendizaje deficiente o incompleto de conceptos más allá de los que pudieran inducir o provocar estos errores de transcripción anteriormente comentados.

El lenguaje matemático utilizado por este alumno en su cuaderno es el propio de la corrección de las actividades en el aula. No obstante, hay algún error de vocabulario matemático, al llamar "pirámide" al triángulo de Tartaglia/Pascal. Además, indicamos que faltan algunos signos igual al escribir la expresión simbólica de funciones definidas a trozos y al trabajar con ellas.

Cuaderno de E12

VARIABLE 1: En el cuaderno de esta alumna encontramos totalmente mezclados los ejercicios de números complejos y los ejercicios del tema de funciones, intercalándose unos y otros en el desarrollo sin que se indique de ninguna manera esta circunstancia. Además, esta alumna no indica de ninguna forma el comienzo del tema de funciones. Por tanto, la organización de su cuaderno (especialmente de la primera tanda de fotocopias, donde se produce esta mezcolanza) es bastante mala, algo que se agrava debido a la no escritura de los enunciados de los ejercicios (que tan sólo se indican con un número o con un signo de estrella cuando se comienza una nueva actividad).

El ejercicio de representación de funciones con valores absolutos, de la forma $y=|f(x)|$ está partido en el cuaderno en dos trozos separados entre sí. Esto no sucede en el resto de ejercicios. Además, existen varios ejercicios de números complejos cuya resolución está inacabada en el cuaderno, algo que explicaremos con mayor detalle en la variable 2 de esta alumna E12.

La presentación del cuaderno es excelente, muy buena. El cuaderno está muy limpio, sin que existan tachones. La alumna respeta siempre los márgenes y existe un uso adecuado de los espacios en blanco, aunque en alguna ocasión la alumna deja demasiado espacio para intentar resolver los ejercicios que el docente propone, por lo que en algún caso quedan espacios en blanco sin utilizar en el cuaderno. Los gráficos que realiza la alumna son muy cuidados, muy claros, utilizando la cuadrícula de la hoja para establecer las unidades de las variables dependiente e independiente, aunque quizá los gráficos pecan de ser poco explicativos. La letra es redonda y muy clara, algo que también sucede con los números y signos matemáticos, que son grandes y claros. En resumen, el cuaderno da una sensación agradable para la vista al revisarlo.

En el cuaderno de esta alumna se detecta la presencia de cierto estilo propio en la presentación. Un ejemplo de ello es el uso de estrellas para denotar aquellos ejercicios que no han sido extraídos del libro o de una hoja de ejercicios proporcionada por el docente (por ejemplo, los que dicta el docente).

VARIABLE 2: En relación a la teoría, no encontramos ningún contenido teórico registrado en el cuaderno de esta alumna, tampoco las definiciones de los tipos de funciones que el docente dictó en la clase y que no estaban en los apuntes suministrados, así como los ejemplos y contraejemplos sobre estas definiciones.

Encontramos en el cuaderno de esta alumna todos los ejercicios que se hicieron o se corrigieron en la clase en los días en los que la alumna estuvo presente en la clase.

Esta alumna faltó a clase varios días y las actividades correspondientes a esos días no están. Un ejemplo son los ejercicios sobre composición de funciones.

Sí que se encuentran resueltas en su cuaderno las actividades sobre cálculo de límites propuestas por el docente y no corregidas en el aula. Además, hay algunos ejercicios intentados más a mayores de los propuestos, tanto sobre números complejos, como de estudio del dominio o la simetría de una función o cálculos de límites de funciones.

Se observa, especialmente en la parte de números complejos, que la alumna no suele intentar los ejercicios propuestos por el docente con anterioridad a la sesión de corrección, sino que intenta resolverlos simultáneamente a su corrección en la pizarra. Así, además de los ejercicios a mayores que ya hemos comentado, intenta por ella misma los ejercicios planteados, pero con esta peculiaridad. Esto provoca que, en algunas ocasiones, los ejercicios queden registrados de forma inacabada (especialmente cuando le surge alguna dificultad en su resolución), aunque sí que copia en esos casos la solución del ejercicio en el margen, para tenerlo como referencia en próximos intentos de resolución.

Como la realización de los ejercicios de números complejos es simultánea a su corrección en clase, y de los demás ejercicios pendientes no se ha corregido ninguno, no tiene sentido hablar de la corrección de las tareas realizada por esta alumna.

VARIABLE 3: Hay algunos indicadores que nos hacen ver la presencia de intención en la alumna por utilizar su cuaderno como instrumento en su aprendizaje de las matemáticas. Por una parte, encontramos bastantes ejercicios a mayores de los propuestos por su docente, en temas como números complejos, cálculo de dominios y de límites de funciones y estudio de simetría en funciones. Algunos de los ejercicios que intenta resolver se corresponden con aspectos menos trabajados en la clase, por lo que parece que busca comprender bien si ha entendido todos los conceptos y técnicas a través de la realización de estos ejercicios. Además, completa algunos ejercicios con la escritura de notas aclaratorias o notas de ayuda, generalmente propias, que escribe en los márgenes de los ejercicios. En esas notas suele recordar fórmulas o aspectos que le sean de interés en el ejercicio. Por ejemplo, recuerda cómo se calcula el módulo de un número complejo o el argumento para escribir la notación módulo-argumento; o los diferentes resultados posibles para límites de funciones racionales con indeterminaciones del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ según el grado de los polinomios de numerador y denominador. No obstante, hay otros ejercicios donde no encontramos estas notas de ayuda o aclaraciones, por lo que su presencia también es selectiva.

VARIABLE 4: En el cuaderno de esta alumna encontramos poco texto escrito, puesto que tan sólo toma los enunciados de aquellos ejercicios que dicta el docente, y el texto restante lo encontramos en las notas aclaratorias existentes. La sintaxis del poco texto verbal registrado es correcta. No sucede lo mismo con la ortografía: faltan varias tildes y existen varias faltas de ortografía que consideramos de gravedad: la alumna escribe "haya" en lugar de halla (forma verbal del verbo hallar) o escribe "a ver" en lugar del infinitivo del verbo haber en la frase "Si es un número real no puede a ver i" (sic).

A modo de anécdota, se escribe incorrectamente el matemático francés cuya fórmula se utiliza para calcular potencias de números complejos: la alumna escribe "Fórmula de Mua" en lugar de fórmula de Moivre.

VARIABLE 5: Se detectan varios errores que consideramos derivados de una comprensión deficiente o incompleta de algunos conceptos, especialmente en la primera parte de las fotocopias. Estos errores son los siguientes:

- En la resolución de un ejercicio sobre números complejos, cambia el signo de la parte imaginaria al hallar el argumento (es decir, si z=a+bi, escribe que arg(z) es la tangente de –b/a, en lugar de la de b/a). Es curioso, puesto que sólo realiza este cambio en este ejercicio, aunque lo repite en todos sus apartados.

- La alumna, indebidamente, quita los puntos donde el radicando es negativo al calcular el dominio de una función de la forma $y = \sqrt[3]{f(x)}$ (raíz con un índice impar). Este fallo lo encontramos relacionado con una nota mal tomada en su cuaderno, en la que no especifica que la restricción del radicando no negativo sólo tiene sentido en aquellas raíces con índice par.

- Esta alumna asocia la simetría par en una función con la presencia de una simetría con respecto a un eje vertical cualquiera. Además, esta asociación le lleva a escribir igualdades con valores absolutos que no comprueba, pero que dice que se cumplen por ser la función simétrica par. Ejemplos: "$|(-x) - 3| = |x - 3|$" o "$|(-x) + 5| = |x + 5|$".

- Existe un error al escribir un número real negativo como número complejo en la notación módulo-argumento, error que es común a otros alumnos: escribe el número -1 como "-1_{180°", por lo que parece no haber asimilado de manera adecuada que ese número representa el módulo del vector y que, como longitud, es siempre mayor o igual que cero.

Existen varios errores asociados a una transcripción incorrecta de elementos en los ejercicios de cálculo de límites que se hacen en la propia clase: se acortan o alargan algunas raíces, o se cambian indebidamente algunos signos. Esto puede llevar a equívocos o confusiones al revisar estos ejercicios.

Encontramos un error en un contenido algebraico que la alumna ya debería dominar en este nivel educativo. El error está relacionado con la resolución de inecuaciones, un contenido tratado en el primer cuatrimestre del curso. La alumna escribe que para que el producto x·(x-6) sea mayor que cero, entonces debe ser x>6 (es decir, omite la posibilidad de que ambos factores sean negativos). Además, encontramos un límite en el que se la alumna hace una interpretación errónea: en un límite propuesto de la forma $f(x)^{g(x)}$, al estudiar el comportamiento de la base y ver que tendía a 1 en el punto pedido, inmediatamente presupone que el exponente tiende a infinito, sin comprobarlo (es decir, presupone erróneamente la existencia de indeterminación sin comprobarlo).

En relación con el lenguaje matemático, encontramos algunas deficiencias en el cuaderno de esta alumna. Se omiten en varias ocasiones los signos igual al definir y trabajar con funciones a trozos. Además, existen deficiencias en la escritura simbólica de límites y en la utilización del símbolo $\lim_{x\to}$: omisión de la primera parte del símbolo en cadenas de igualdades o de la escritura de la función al indicar una indeterminación (“$\lim_{x\to 2} = \frac{0}{0}$”), escritura conjunta del símbolo y de la flecha de tendencia (ejemplos: “$\lim \frac{k}{x} \Rightarrow 0$” ó “$\lim \frac{k}{x^2} \Rightarrow 0$”). También se utiliza deficientemente el lenguaje matemático al escribir un comentario de ayuda recordando los posibles casos en el límite de una función racional donde se presenta una indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$:

$$\frac{a}{b} \ \left(\lim = \frac{\infty}{\infty}\right) \ \begin{cases} a = b \ \Rightarrow \lim = 1 \\ a < b \ \Rightarrow \lim = 0 \\ a > b \ \Rightarrow \lim = \infty \end{cases}$$

Cuaderno de E14

VARIABLE 1: En el cuaderno de esta alumna se mezclan los ejercicios relativos a números complejos con el tema de funciones. Sí que se indica el paso de funciones a la resolución de ejercicios de números complejos, pero no la vuelta al tema de funciones.

En los ejercicios de números complejos sí que encontramos algunos cuya resolución está partida en varios trozos separados del cuaderno, o que aparecen varias veces a lo largo del cuaderno. Esto es debido a que en varias ocasiones la alumna separa su intento de resolución de la actividad del registro de la corrección de la misma efectuado en el aula, o a que no deja el espacio en blanco suficiente para completar su intento de resolución. Existen algunos ejercicios inacabados en este cuaderno, en intentos de resolución de actividades que no son completados por la alumna, en tareas que luego no son corregidas en el aula.

La presentación del cuaderno es buena, clara, agradable, muy limpia. La alumna utiliza correctamente los espacios y respeta los márgenes. Los gráficos que hace son claros y están bien integrados en el cuaderno. En cuanto a la letra que utiliza, ésta es fácilmente legible, al ser redondeada y grande. Lo mismos sucede con los números y signos matemáticos, salvo el número “9”, cuya grafía es la más dudosa (posible dificultad para identificarlo).

Se observa la presencia de un estilo propio de la alumna al trabajar y desarrollar su cuaderno de matemáticas, puesto que tiende a resaltar sobremanera aquellas cosas que considera más importantes. Así, encontramos comentarios de ayuda o aclaraciones escritas con rotulador y utilizando un tamaño muy grande, y que además son remarcadas, para que destaquen rápidamente sobre todo lo demás en una revisión del cuaderno. Además, también remarca de forma muy clara las soluciones obtenidas en los ejercicios.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, encontramos un apunte inicial registrado en el cuaderno sobre qué es una función (al comienzo del tema de funciones). No obstante, este apunte contiene un error, puesto que se afirma en lo registrado, erróneamente, que hay que quitar el 0 en el dominio de una función. Además, encontramos registradas las definiciones de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva que el docente dictó a mayores de los apuntes suministrados, pero no todas las formas en que estas definiciones se enunciaron. Además, sí que registra los ejemplos que ilustran una función inyectiva y una suprayectiva, pero no se registran los contraejemplos de estos conceptos que también se realizaron.

En este cuaderno encontramos registradas todas las actividades que se han hecho o que se han corregido durante las clases. Además, están registradas también las actividades propuestas por el docente pero que éste deja pendientes de corregir, actividades que sí que son intentadas por la alumna. Además, se detecta que la alumna también intenta los ejercicios de números complejos con anterioridad a su corrección en la clase, aunque parece que con la ayuda de otra persona (profesor particular) en algunas ocasiones y, en otros casos, en colaboración con la alumna E20, su compañera de pupitre. No existe registro en este cuaderno de actividades que sean distintas de las propuestas por el docente.

En cuanto a los intentos de resolución de actividades, las actividades de números complejos son intentadas por la alumna, aunque de manera pobre. La alumna copia la resolución de estos ejercicios realizada en la pizarra, registrándolo a continuación de sus intentos de resolución. Es decir, más que corregir sus errores en los intentos de resolución, lo que hace es rehacer bien el ejercicio a través del registro de su corrección en el aula. En la parte de funciones, la alumna sí intenta los ejercicios planteados por el docente y que no han sido corregidos.

VARIABLE 3: Hay varios indicadores presentes que hacen que se detecte la presencia de una clara intención por parte de esta alumna de utilizar el cuaderno como instrumento en su estudio y aprendizaje de las matemáticas. Un indicador claro de esta intencionalidad es la presencia de una gran cantidad de anotaciones, tanto comentarios y aclaraciones realizados por el profesor como comentarios propios de ayuda, generalmente para clarificar las definiciones o para recordar algunas fórmulas o algunas reglas de interés.

No obstante, esas notas se caracterizan por su pobre precisión y utilización del lenguaje, y además alguna de ellas contiene errores, lo que puede hacer que estas anotaciones pierdan parte de su intencionalidad y de su efectividad para la alumna. Ejemplos de anotaciones son: “No se puede en las funciones raíces de índice par y números negativos” (restricción del dominio en funciones con radicales de índice par), “Conjugado: Es lo contrario pero de la parte imaginaria” (como aclaración de lo que significa un número complejo conjugado), “Si se queda una imagen sin dominio ya no es suprayectiva” (aclaración sobre la definición de función suprayectiva) o “Es positivo, con los cuernos para arriba porque x es positivo” (asociando indebidamente la orientación de una parábola con el carácter positivo de la variable independiente).

Además, también observamos la presencia de interrogaciones o de asteriscos en aquellas cosas que parece no entender o en las que tiene dudas, pero estas dudas nunca son consultadas o preguntas a su profesor en las clases.

VARIABLE 4: Como ya hemos anticipado en la variable anterior, el lenguaje verbal que encontramos en el cuaderno de esta alumna, generalmente en las aclaraciones teóricas o comentarios, es bastante mediocre. La sintaxis de alguna de sus anotaciones personales es mejorable. Existe alguna falta grave de ortografía (escribe "haya" en lugar de "halla", forma verbal del verbo hallar) y también falta alguna tilde. Pero el problema más repetido es el abuso de la alumna de escritura sincopada, típica de mensajes SMS o de redes sociales, donde se sustituyen algunas palabras comunes por iniciales o abreviaturas. Como ejemplos, la alumna escribe "x" en lugar de por o "xq" en lugar de porque. Ejemplo de una anotación con este tipo de lenguaje: "Luego se dan valores como es par, pues solo a un lado xq el otro es simétrico, si fuese impar, se darían x los dos lados".

VARIABLE 5: Encontramos bastantes errores que denotan la presencia de conocimientos deficientes o incompletos en conceptos importantes de los temas tratados. Los explicamos a continuación:

- Existen varios problemas sobre en qué puntos no pueden definirse varios tipos de funciones (y, por tanto, es necesario su estudio para eliminarlos del dominio). En las funciones con radicales de índice par quita los puntos del dominio que anulan el radicando (en lugar de aquellos en los que el radicando es negativo). En las funciones exponenciales quita aquellos puntos en los que se anula el exponente (un error que también comete su compañera de pupitre, E20).

- Como ya hemos comentado anteriormente, hay una anotación teórico errónea al principio del tema de funciones en la que indica que el 0 no puede formar parte del dominio de una función (puede ser un comentario que haya provocado errores como los anteriores).

- La alumna asocia, en una función, simetría par con la presencia de simetría con respecto a cualquier eje vertical.

- No entiende que el resultado de componer dos funciones sea otra función y parece tener la necesidad de dar una solución numérica a los ejercicios de ese tipo: en varias ocasiones iguala a 0 la composición obtenida y da como solución esos puntos en los que se anula la composición.

- En la representación de funciones cuadráticas, relaciona la orientación de la parábola con el carácter positivo de la variable independiente (ya comentado en la variable 3). Además, realiza las ramas de las parábolas totalmente verticales, lo cual es incompatible con que lo representado sea una función.

Además, hay algunos problemas al representar funciones de la forma y=|f(x)|, puesto que se representan como si no estuvieran afectadas por el valor absoluto (es decir, realmente se representa la función y=f(x), sin hacer nada posteriormente a esta representación).

Encontramos varios errores de la alumna al transcribir la corrección de ejercicios realizada por el docente (raíces que se acortan o que se alargan en cálculos), lo que puede causar algunos malentendidos o equívocos en la revisión posterior de estos ejercicios.

Al igual que su compañera E12, hay un límite de la forma $f(x)^{g(x)}$ en la que, tras calcular que la base tiende a 1, presupone que el exponente tiende a +∞ sin comprobarlo (realmente no era así), para aplicar directamente el método para resolver indeterminaciones del tipo $(\to 1)^{\to\infty}$.

Los errores de cálculo son muy abundantes en los intentos de resolución de esta alumna, que muestran la presencia de importantes deficiencias en sus conocimientos matemáticos previos de tipo procedimental, lo que provocan una inseguridad muy grande en la alumna. Existen errores al operar algebraicamente con identidades notables, y con fracciones numéricas y algebraicas, manipulaciones que deberían ser ya dominadas por un estudiante de 1º de Bachillerato. Esta gran inseguridad de la alumna y la alta presencia de errores provocan que el cuaderno pierda parte de su intencionalidad como instrumento para el estudio de la alumna. Algunos ejemplos de errores:

"$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 = \frac{1}{x^4+1}$" o "$(x-1)^2 = x^2+2x+1$" (problemas con las identidades notables, y aplicación errónea de la linealidad en una suma de cuadrados)

"$\frac{-6\pm\sqrt{-4}}{2} = -3 \pm \sqrt{-4}$" (error provocado por no entender que el denominador afecta a ambos sumandos)

"$\frac{2kx^2-7x+5}{7x^2-3} = -1 \Rightarrow \frac{2kx^2-7x+5}{7x^2} = (-1)\cdot(-3)$" (error con ciertas similitudes al anterior, al no entender que un término debe ser factor común de todos los sumandos del numerador o denominador para poder trasponerlo al otro miembro de la igualdad).

Por último, existen carencias importantes relacionadas con la utilización del lenguaje matemático simbólico en el cuaderno. Muchos de ellos están relacionados con el signo igual. Este signo se omite al definir y trabajar con funciones definidas a trozos, sustituyéndose por implicaciones en algunas ocasiones. Lo mismo sucede, también en cadenas de igualdades (omisión en algunos casos, sustitución por la implicación en otros). En general, parece que la alumna no tiene muy claro el papel del signo igual cuando se están realizando transformaciones o manipulaciones en expresiones que no cambian. Además, también lo utiliza indebidamente al igualar expresiones que no son iguales. Dos ejemplos:

$$\text{“}e = \lim_{Pepe\to\infty}\left[1+\frac{1}{Pepe}\right]^{Pepe} = 1^{\infty}\text{”}$$

$$\text{"}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{5}{x}} = 1 = e\text{"}$$

Cuaderno de E15

VARIABLE 1: En el cuaderno de este alumno se mezclan los ejercicios de números complejos con la parte de funciones, indicándose esta circunstancia tan sólo en una ocasión (en la que escribe "Funciones", subrayado), y sin marcarse en el resto de los casos. Esta mezcolanza de temas se ve agravada por la omisión de la escritura de los enunciados de los ejercicios por parte del alumno. Como aspecto curioso sobre la organización de la unidad, encontramos una raya en la segunda tanda de fotocopias que puede estar asociada a un cambio en el comportamiento del alumno: por encima de esa raya el alumno copia los enunciados de los ejercicios, pero ni intenta ni registra su resolución; por debajo sí que copia tanto el enunciado como la resolución de los mismos.

Encontramos tan sólo un ejercicio en la unidad cuya resolución está partida en dos trozos separados entre sí: un ejercicio de representación de funciones de la forma $y=|f(x)|$ en la que por un lado aparece escrito el enunciado y, más adelante, registra su resolución. En relación a la presencia de ejercicios inacabados, encontramos una presencia muy alta de ejercicios en los cuales sólo se registra el enunciado, tanto de ejercicios que son realizados en clase como otros que son propuestos por el docente y no se corrigen posteriormente. En muchos casos, además, el propio alumno no deja espacio para intentar la resolución de estos ejercicios cuyo enunciado registra.

La presentación del cuaderno es regular. Consideramos que la presentación puede mejorarse, puesto que encontramos varios tachones a lo largo de la parte fotocopiada y, además, la escritura con un boli tipo "pilot" hace que haya partes con un exceso de tinta, lo que repercute negativamente en la presentación del cuaderno. El alumno respeta, generalmente, los márgenes, y existe una correcta utilización de los espacios.

Existen pocos gráficos en la unidad de este alumno, que se caracterizan por ser muy básicos y tener un déficit de información. La letra del alumno es clara, aunque con un tamaño demasiado pequeño y con una inclinación hacia la derecha que parece característica de la caligrafía de este alumno. En ocasiones los números se remarcan demasiado, lo que hace que algunos queden muy destacados con respecto a otros.

No encontramos ningún rasgo de estilo propio en el cuaderno del alumno, más allá de esa caligrafía especial de la letra, que tiende a estar inclinada hacia la derecha.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, el alumno copia varias de las definiciones que el profesor dictó, a mayores de los apuntes suministrados, sobre los conceptos función inyectiva, suprayectiva y biyectiva, aunque sólo están registradas utilizado lenguaje verbal. No se recogen las definiciones utilizando lenguaje simbólico que fueron escritas en la pizarra. Este alumno tampoco recoge ninguno de los ejemplos y de los contraejemplos que se hicieron para ilustrar estos conceptos.

En el cuaderno de este alumno se registran algunas de las actividades que se hicieron durante las clases o que fueron planteadas y posteriormente corregidas. Sin embargo, hay otras en las que tan sólo copia el enunciado (pero no registra su resolución) y, por último, en algunas de ellas ni tan siquiera registra el enunciado. Este alumno no intenta ninguna de las actividades propuestas por el profesor y posteriormente no fueron corregidas en el aula (como mucho, copia el enunciado dictado). Tampoco aparecen actividades a mayores de las planteadas.

Así, en relación a la resolución de actividades, se detecta que prácticamente todo lo que aparece en su cuaderno sobre ejercicios ha sido copiado literalmente de las correcciones y resoluciones de las tareas realizadas en el aula. Tan sólo encontramos un intento de resolución en un ejercicio sobre composición de funciones, que es tachado por el propio alumno. En ese intento de resolución, el alumno comete un error en el orden de las funciones al componer éstas (las compone en el orden inverso al que debería).

No podemos preguntarnos cómo corrige el alumno sus errores en las tareas que intenta, puesto que su único intento de resolución se produjo en una tarea que, posteriormente, no fue corregida en clase por su profesor.

VARIABLE 3: En el cuaderno de este alumno no existe ningún indicador que nos haga detectar la presencia de una intención del alumno por utilizar su cuaderno como instrumento que le sirva en su estudio y aprendizaje de las matemáticas. Como ya hemos comentado en la variable anterior, ni siquiera llega a tomar nota de las actividades que se hacen y corrigen en la propia clase, o lo hace de modo incompleto. Tampoco encontramos escrito ningún proceso mental ni ninguna nota de aclaración, ayuda o comentario realizada por su docente o elaborada por él mismo durante la resolución de los ejercicios, lo que ayudaría a completar la transcripción literal de los mismos.

VARIABLE 4: La presencia de texto en el cuaderno de este alumno es muy reducida, puesto que el alumno sólo copia los enunciados de los ejercicios cuando éstos son dictados por su docente, no haciéndolo en los casos restantes. Además, ya hemos comentado en la variable anterior la ausencia de explicaciones y anotaciones o la escritura de pasos y procesos en los ejercicios resueltos. El lenguaje que encontramos es correcto, aunque se observa la omisión de un número importante de puntos al final de las frases.

VARIABLE 5: Como ya hemos comentado en la variable 2, tan sólo hay un pequeño intento de resolución propio del alumno en uno de los ejercicios. En ese ejercicio, encontramos la presencia de un conocimiento deficiente e incompleto de la composición de funciones, puesto que compone las funciones en el orden inverso al que se debe seguir (quizá influido por el orden que induce la notación, sin asimilar adecuadamente la definición de la misma y el proceso en que actúan ambas funciones). El alumno tacha esta composición, pero no se corrige y explica el error cometido.

Encontramos un número apreciable de errores en la transcripción realizada de los ejercicios resueltos en el aula. Sobre todo se concentran en los ejercicios sobre números complejos: se omiten cuadrados, incógnitas… Deducimos que el alumno presta poca atención en la transcripción de estos elementos, sin que se denote un seguimiento real de lo que está copiando. Un ejemplo significativo que justifica la afirmación anterior es que, en un ejercicio, confunde un “2” con una “z” al escribir las soluciones de una ecuación de segundo grado en z, dando como soluciones los números “z+i” y “z-i” en lugar de 2+i y 2-i. Estos errores son una fuente de equívocos y confusiones para el alumno en una posible revisión del contenido de su cuaderno.

El lenguaje matemático que encontramos en el cuaderno también es el transcrito de la corrección de las actividades realizada. No obstante, existen varios errores en este lenguaje transcrito, especialmente en la escritura de cadenas de igualdades asociadas a la resolución de límites con indeterminaciones del tipo $(\to 1)^{\to\infty}$ en los que aparece involucrado el número e. El alumno iguala directamente el número e a la resolución del límite con una indeterminación de este tipo, apareciendo y desapareciendo el número e durante el proceso de resolución (también asociado a una transcripción deficiente de los ejercicios resueltos en el aula, como ya hemos comentado previamente).

Cuaderno de E16

VARIABLE 1: En el cuaderno de este alumno se mezclan los ejercicios de números complejos con los del tema de funciones. Sólo en algunos casos se hace una pequeña indicación en los ejercicios explicitando la temática del ejercicio, muy escueta (escribe "COMPLEJOS" o "LÍMITES" como encabezado del ejercicio, en pequeño tamaño). Este alumno no indica de ninguna manera el comienzo del tema de funciones.

Encontramos dos ejercicios en el cuaderno de este alumno cuya resolución aparece partida en varios trozos separados entre sí. En uno de ellos, vuelve a reescribir el enunciado y rehace el ejercicio completo al retomar el mismo; pero en el otro no copia el enunciado. Encontramos varios ejercicios inacabados en el cuaderno de este alumno, sobre todo los últimos ejercicios que se hicieron en el tema de números complejos. Además, están sin hacer todos los ejercicios sobre composición de funciones y cálculo de límites propuestos por su docente y no corregidos posteriormente (únicamente encontramos el enunciado de los mismos).

La presentación del cuaderno es buena, agradable en líneas generales. El cuaderno está muy limpio y no existen apenas tachones. El alumno respeta los márgenes y hay una adecuada utilización de los espacios, salvo la presencia de espacios en blanco correspondientes a los ejercicios propuestos por el docente y no intentados por el alumno (deja un espacio en blanco, que se supone que está destinado para su resolución). Los gráficos que realiza el alumno son claros, están bien hechos y bien explicados, además de estar muy bien integrados en su cuaderno. La letra, aunque es bastante pequeña, es muy clara, fácilmente legible, al igual que números y símbolos matemáticos.

No se detecta en este cuaderno ninguna peculiaridad o particularidad propia del alumno que nos haga considerar que existe un estilo propio del alumno en su elaboración.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, únicamente encontramos en el cuaderno las definiciones de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva que el docente dictó en la clase a mayores de la teoría suministrada en los apuntes fotocopiados. Sin embargo, el alumno no copia ni los ejemplos ni los contraejemplos ilustrando estos conceptos que fueron realizados por el docente en la pizarra.

En el cuaderno de este alumno están registradas todas las actividades que se hicieron o que fueron corregidas en la propia clase. Sin embargo, en los ejercicios propuestos por el docente pero no corregidos (sobre composición de funciones y cálculo de límites) tan sólo encontramos el registro de su enunciado, sin que existan intentos de resolución propios del alumno. Tampoco existe ningún ejercicio a mayores de los propuestos por su docente.

El alumno intenta la resolución de varios de los ejercicios de números complejos propuestos, pero encontramos algunas señales que nos hacen pensar que, en ocasiones, estos intentos de resolución son simultáneos a la corrección de los mismos realizada en el aula. Así, el registro final de los ejercicios en su cuaderno mezcla la copia de la pizarra con sus intentos parciales de resolución simultáneos. Incluso hay un ejercicio en el que encontramos dos formas diferentes de resolverlo, ambas aparecidas durante su corrección en el aula (aunque sólo una de ellas fuera desarrollada en la clase). Ese comportamiento se mantiene en el resto del cuaderno a excepción de las fotocopias finales. En la segunda parte del tema de funciones el alumno se limita a copiar la resolución de aquellos ejercicios que se corrigen, sin que exista ningún intento de resolución propio del alumno.

Debido a que sus intentos de resolución son prácticamente simultáneos a la corrección de los ejercicios en el aula, no hay lugar a poder hablar de la corrección de los errores en sus intentos de resolución, puesto que opta por copiar la resolución cuando se atasca o no sabe proseguir en su “intento simultáneo”.

VARIABLE 3: No puede apreciarse una especial intencionalidad del alumno en hacer de su cuaderno un instrumento que le facilite en su estudio y aprendizaje de las matemáticas. Esto es debido a que, como ya hemos comentado, el alumno intenta resolver sólo una pequeña parte de los ejercicios propuestos; y, además, lo hace de forma simultánea a su corrección en el aula. Así, al guiarse o apoyarse en la corrección realizada en el aula al mínimo problema, el alumno no llega a alcanzar una reflexión o un estudio profundo sobre los conceptos y técnicas tratadas en los diferentes ejercicios propuestos. Además, no se añade prácticamente ninguna nota, aclaración, comentario o la escritura de pasos y procesos mentales seguidos en la resolución de los ejercicios. La presencia de este tipo de anotaciones es testimonial. Únicamente podemos destacar que indicara el carácter racional o irracional de dos cocientes de funciones en límites con una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$.

VARIABLE 4: Este alumno sólo copia en su cuaderno los enunciados de los ejercicios dictados por el docente, no lo toma en otra situación. Además, como hemos comentado, hay muy poco texto derivado de la toma de anotaciones o de explicaciones en las resoluciones de los ejercicios, por lo que hay muy poco texto en este cuaderno. El poco texto que hay es correcto gramaticalmente (aunque, en su mayoría, está tomado del dictado del docente), a excepción de la omisión de alguna tilde necesaria.

VARIABLE 5: Aunque no hay muchos intentos de resolución de actividades, encontramos dos errores que pensamos que muestran un conocimiento deficiente e incompleto de algunos conceptos. Uno de los errores, repetido en varios estudiantes, es la escritura errónea de un número real negativo como un número complejo en la notación módulo-argumento (escribe el número -1 como "$-1_{180^{\circ}}$"). Esta escritura puede denotar una falta de asimilación de esta representación y lo que significa, puesto que módulo del vector representa una longitud, y como tal debe ser siempre mayor o igual que cero. Además, hay un error más en una gráfica de función realizada por el alumno: indica gráficamente que la función tiene dos valores distintos en x=0, lo cual es incompatible con que lo representado sea una función. Por último, en un ejercicio parece confundir la presencia de una simetría respecto del eje vertical y=0 con una simetría respecto del (0,0), sin ser consciente de que son distintos tipos de simetría (par/impar, una axial y la otra central).

Encontramos varios errores en los cálculos algebraicos presentes en sus intentos de resolución. Por ejemplo, hay un error en el cálculo del dominio de la función $f(x) = \frac{3}{x^2+4}$, puesto que quita los puntos -2 y 2 del dominio (error en el cálculo de las soluciones de esa ecuación de segundo grado, posiblemente en la trasposición del signo). Otro error que se detecta está al sustituir en una función x por –x (en el estudio de su simetría): indica que si $f(x) = x^2 - 9$, entonces $f(-x) = -x^2 - 9$. Este error puede mostrar una falta de dominio en el cálculo de potencias de números enteros. Ambos errores muestran deficiencias en el cálculo algebraico, en aspectos que ya debieran ser dominados por un alumno de 1º de Bachillerato.

No existen demasiados fallos derivados de una transcripción incorrecta de la corrección de los ejercicios, pero alguno de ellos sí puede ser determinante para la comprensión del ejercicio: en un límite omite un cubo en una potencia, algo que cambiaría el resultado final del límite de un cociente de funciones con una indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ (lo que puede complicar o causar confusión en una posible revisión posterior del cuaderno).

Se observa un importante déficit en la utilización del vocabulario geométrico asociado a la simetría de una función. En particular, el alumno no hace uso de los términos simetría par e impar, sustituyéndolos por el significado de dichos términos. Por ejemplo, escribe “simétrica respecto del eje de ordenadas” (en lugar de utilizar la palabra designada para esa situación: simetría par) o “simétrica respecto del (0,0)” (con la confusión anteriormente comentada, en realidad existía una simetría par). Sin embargo, sí se indica correctamente la simetría respecto de un eje vertical en otras funciones que no tienen simetría par (por ejemplo, “simetría respecto a x=5”).

En general, en el cuaderno de este alumno hay una utilización bastante pobre y deficiente del vocabulario simbólico matemático. El alumno omite en reiteradas ocasiones el signo igual cuando este se necesita, como al dar la expresión simbólica de funciones definidas a trozos (incluso omite también la llave), o en los ejercicios basados en la manipulación de expresiones con números complejos. En estos casos, sustituye frecuentemente de forma errónea los signos igual por implicaciones (⇒).

Además, también hay un uso incorrecto del signo igual en otras ocasiones, en las que se igualan elementos erróneamente. Es decir, parece que el alumno manifiesta problemas con el significado de este signo y su papel. Por ejemplo, se iguala el número e y su definición como límite de una sucesión a la resolución de límites con indeterminaciones del tipo $(\rightarrow 1)^{\rightarrow\infty}$. También iguala un límite de una función que no existía con el símbolo de no existencia (∄).

Una deficiencia más, de otro tipo: el alumno omite la flecha de tendencia al indicar el valor al que tiende la variable independiente al escribir el signo del límite (escribe “$\lim_{x-2} \dots$” en lugar de “$\lim_{x\rightarrow -2} \dots$”.

Cuaderno de E17

VARIABLE 1: En el cuaderno de este alumno están mezclados los ejercicios del tema de números complejos con los del tema de funciones, sin que se indique de ninguna manera el cambio de tema. De hecho, ni siquiera se escribe un título al empezar el tema de funciones para indicar su comienzo. Además, en el cuaderno de este alumno también encontramos algunos ejercicios intentados de física o de contenidos de matemáticas de trimestres anteriores, sin que se indique tal circunstancia. En resumen, el cuaderno es una mezcla de ejercicios de diferentes temas sin que se marquen de modo alguno los cambios de tema.

En este cuaderno no encontramos ningún ejercicio cuya resolución esté partida en varios trozos separados entre sí. Sí que encontramos un gran número de ejercicios inacabados, cuya resolución no se completa; así como un número apreciable de ejercicios cuya resolución no se intenta (tan sólo se transcribe el enunciado dictado).

La presentación es bastante pobre. El alumno tiene la tendencia de dejar muchas de las hojas que constituyen el cuaderno a medio escribir, puesto que tiene cierta tendencia de comenzar una cara nueva para la realización de un nuevo ejercicio (lo que constituiría una característica propia del estilo del alumno en la elaboración de su cuaderno). El resultado es la presencia de una gran cantidad de espacios en blanco, infrautilizándose las hojas del mismo. La limpieza del cuaderno también es muy pobre, puesto que se encuentran muchos tachones que emborronan el cuaderno y afectan negativamente a su limpieza. Los gráficos que el alumno realiza son poco cuidadosos y no están explicados. La letra es legible, normal, así como los números y los símbolos matemáticos. No existen problemas en su lectura aunque tampoco exista demasiado esmero en su realización.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, no encontramos ningún contenido teórico a lo largo de las fotocopias del cuaderno. Entendemos que el alumno tomó nota de las definiciones dictadas por el docente, a mayores de la teoría suministrada en los apuntes, en los propios apuntes fotocopiados.

En relación a los ejercicios, las actividades del tema de funciones que se hicieron durante las clases sí que están registradas en su cuaderno, a excepción de las de composición de funciones (día en el que faltó a clase, sin que posteriormente tomara nota de lo realizado). De los ejercicios de números complejos tan sólo hay registro de uno de ellos, y parcialmente; faltando los intentos de resolución o la transcripción de la corrección de todos los demás. En relación a las actividades propuestas por su docente pero no corregidas en el aula, no intenta la resolución de ninguna de ellas, hallando únicamente el enunciado de algunas de ellas (tampoco de todas). Sí que encontramos algunas actividades a mayores de las propuestas pero, como ya hemos comentado en la Variable 1, son actividades no relacionadas con los temas tratados en ese momento en el aula, sino que son actividades de física o de recuperación de matemáticas (con contenidos propios del primer cuatrimestre del curso). Además, aparecen rasgos que nos hacen sospechar de la realización de estas actividades en clases particulares.

El análisis de los ejercicios existentes en el cuaderno nos indica que el alumno, en muchas ocasiones, intenta resolver las actividades en su cuaderno de forma simultánea a la corrección de las mismas en el aula. Es decir, en lugar de transcribir la corrección, intenta la resolución del ejercicio en ese momento, lo que hace que se encuentren un gran número de ejercicios incompletos, en los que no se llega al final de la resolución, puesto que no se completan esos intentos simultáneos.

También sospechamos que el alumno utiliza la resolución de ejercicios en otros lugares diferentes del cuaderno, puesto que sí que participa en la corrección en clase de algunas tareas, proponiendo resoluciones alternativas, en ejercicios de los cuales no hay ningún registro en su cuaderno.

Debido a que no hay intentos de resolución de las actividades en su cuaderno que sean anteriores a la corrección de las mismas realizada en el aula, no podemos hablar sobre la posible corrección del alumno de sus tareas y los posibles errores cometidos.

VARIABLE 3: En el cuaderno de este alumno no encontramos ninguna anotación relacionada con los pasos o procesos mentales seguidos en la resolución de las actividades, notas, comentarios o aclaraciones sobre los mismos. Sí que encontramos intentos de resolución de los ejercicios en su cuaderno pero, como ya hemos comentado en la variable anterior, los intentos son simultáneos a la corrección de los mismos efectuada en el aula.

Así, parece que el alumno intenta hacer un uso dentro del dominio privado de su cuaderno, como herramienta para explorar y reflexionar sobre los conceptos y las tareas planteadas. Pero no lo hace en el momento temporal más adecuado (que sería fuera del aula o en momentos que el docente establezca para ello), sino durante la propia corrección, lo que afecta a la duración y la calidad de esa exploración y reflexión, además de perder el potencial posterior para una posible revisión del cuaderno que supondría la corrección y compleción de posibles intentos erróneos.

VARIABLE 4: Este alumno no copia los enunciados de los ejercicios en su cuaderno, a excepción de los ejercicios dictados por su docente, ni hay ninguna nota, comentario o aspecto teórico. Así, en el cuaderno de este alumno hay muy poco texto escrito. En los enunciados que copia, la sintaxis puede mejorarse, puesto que acorta o elimina palabras que considera que no le proporcionan información nueva, o por comodidad. El siguiente enunciado es un ejemplo de ello: "sen 7α y cos 7α en función del cos α y el sen α sin razones trigonométricas". No encontramos ninguna falta de ortografía en el texto escrito.

VARIABLE 5: Encontramos varios errores en los apuntes relacionados con un conocimiento deficiente o incompleto de determinados conceptos. Se detecta una falta de comprensión de cómo se define las funciones del tipo y=|f(x)|, puesto que parece que ha adquirido una especie de "receta", errónea, para definirlas (el cambio en la definición de la función no se produce en los puntos donde f(x)=0, sino en x=0, cambiando el signo en los x<0). Dos ejemplos pueden verse a continuación:

$$y = |x-3| = \begin{cases} x-3, & si\ x \geq 0 \\ -x+3, & si\ x < 0 \end{cases} \qquad y = |x+5| = \begin{cases} x+5, & si\ x \geq 0 \\ -x-5, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Otro error que muestra un conocimiento deficiente o incompleto es representar una función que es cociente de funciones cuadráticas (la función $y = \frac{x^2-4}{x^2+1}$) como una parábola (es decir, supone erróneamente que la representación de una función que es cociente de funciones con gráficas parabólicas es también una parábola).

También hay errores de este tipo asociados a los números complejos y a la comprensión de lo que son la parte real y la parte imaginaria del mismo: observamos que el alumno confunde el hecho de igualar a cero la parte real o la parte imaginaria para que el número complejo sea real o imaginario puro, también escribe la parte imaginaria de un número complejo con la unidad imaginaria, i.

Como ya hemos comentado anteriormente, las transcripciones que realiza de los ejercicios suelen ser incompletas, puesto que generalmente omite tomar el resultado o las conclusiones finales del ejercicio (por ejemplo, si existe o no un límite que se pide estudiar). Además, a esto se añaden varios errores derivados de la poca atención que se presta a esta transcripción: cambios indebidos de signo o cambios en números.

En líneas generales, se detecta en este cuaderno un déficit muy grande en la utilización del lenguaje simbólico matemático. En varias ocasiones se utilizan notaciones personales para referirse a conceptos, en lugar de utilizar la notación simbólica más estandarizada. Dos ejemplos de esto es referirse al módulo de un número complejo como "Md." y al argumento como "Ag.". Además, en ocasiones se omite escribir el nombre de las funciones con las que se está trabajando, se omiten los iguales al definir y trabajar con funciones a trozos o se omite la indicación del punto en el que se está calculando el límite de una función. Por último, no se indica claramente la aparición del número e en la resolución de límites con indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$.

Cuaderno de E18

VARIABLE 1: En el cuaderno de este alumno observamos cómo se mezclan, sin indicar la circunstancia de ninguna manera, los ejercicios del tema de funciones con los ejercicios pendientes del tema de números complejos.

No encontramos en este cuaderno ningún ejercicio cuya resolución esté partida en varios trozos separados entre sí. Sí que encontramos ejercicios inacabados en el cuaderno de este alumno, tanto ejercicios cuya resolución en el aula no se termina de copiar, como ejercicios propuestos de los cuales tan sólo toma nota del enunciado.

La presentación del cuaderno es bastante buena, muy agradable para la vista. El cuaderno está muy limpio y no hay tachones. El alumno respeta los márgenes del cuaderno y hace un uso adecuado de los espacios. Los gráficos están correctamente realizados, bien explicados, aunque a veces son demasiado pequeños para su propósito. La letra utilizada es muy clara, muy redondeada, fácilmente legible, al igual que los números y los símbolos matemáticos.

No encontramos ningún rasgo característico del alumno que nos haga pensar en la presencia de un estilo propio del alumno en la elaboración u organización de su cuaderno.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, en el cuaderno de este alumno están registradas las definiciones de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva que el docente añadió a la teoría suministrada en los apuntes. Sin embargo, no encontramos registrados los ejemplos y contraejemplos para ilustrar estas definiciones que fueron aportados también por el docente. Además, hay que añadir que es el único alumno de la clase que copió un ejemplo de cálculo de la función recíproca de una dada, ejemplo desarrollado por su docente en el aula.

Las actividades que encontramos registradas en su cuaderno son aquellas que se van haciendo en el transcurso de la clase o que se corrigen en el aula. No obstante, no están todas las actividades de este tipo que se realizaron, y, además, algunas de las registradas tampoco están completas. En relación a las actividades propuestas por el docente pero no corregidas posteriormente en el aula, tan sólo encontramos, en el mejor de los casos, el enunciado de las mismas. No existen intentos de resolución de las mismas. Tampoco existe registro de ninguna actividades a mayores desarrollada por este estudiante.

En relación a la resolución de las actividades, éstas son transcritas literalmente de su corrección en el aula, sin que se detecte ningún intento de resolución propio del alumno a lo largo de su cuaderno. Por lo tanto, no hay opción de hablar de cómo corrige este alumno las tareas que intenta, al no haber ningún intento propio de resolución.

VARIABLE 3: En el cuaderno de este alumno no encontramos ningún intento de resolución propio del estudiante, por lo que no existe una utilización de esta herramienta como un medio para poder repasar, trabajar y reflexionar de forma autónoma con los conceptos y técnicas propias del tema, ni para evaluar su comprensión de las mismas.

Este alumno sí que toma nota de alguna aclaración o comentario, pero en reducidas ocasiones. Por ejemplo, indica si las funciones en forma de cociente de las que se pide calcular algunos límites son racionales o irracionales. También hay una indicación que recuerda cuál es la representación gráfica de funciones usuales (rectas para funciones lineales, parábolas para funciones cuadráticas), aunque hay un error derivado de una intervención errónea de una estudiante en el aula (escribe indebidamente que la gráfica de una función polinómica de grado tres es una hipérbola, en lugar de una cúbica). La presencia reducida de estas anotaciones y la presencia de errores en alguna de ellas dificultan tanto su papel de ayuda en una posible revisión posterior del cuaderno como la intención de que sirva como instrumento para su aprendizaje de las matemáticas.

VARIABLE 4: El alumno copia los enunciados de los ejercicios de funciones, pero no hace lo propio con los ejercicios sobre números complejos. Esto, junto al escaso número comentarios, hace que la cantidad de lenguaje verbal encontrada en el cuaderno sea relativamente reducida. El lenguaje que el alumno utiliza es correcto, bien transcrito, utilizando adecuadamente los signos de puntuación. No obstante, hay alguna expresión mejorable, como cuando escribe: “Función inversa a una función dada” (cuando sería más correcto decir función inversa de una función dada). Además, indicamos también la omisión de alguna tilde necesaria.

VARIABLE 5: Debido a que no existen intentos propios de resolución en el cuaderno de este alumno, los errores que encontramos son achacables a una transcripción errónea de la corrección de los mismos que se realizó en el aula. Alguno de esos errores puede provocar o inducir un aprendizaje deficiente en el alumno, como el error, ya comentado en la variable 3, al escribir en una nota aclaratoria que la representación gráfica de una función polinómica (en concreto, de grado 3) era una hipérbola. Este aspecto fue comentado, erróneamente, por una alumna durante el transcurso de la clase, lo que es síntoma de una baja atención y seguimiento del alumno del transcurso de la clase.

También existen algunos errores derivados de una transcripción incorrecta del lenguaje simbólico matemático, bien igualando expresiones que no son tales o escribiendo relaciones o implicaciones sin sentido. Ejemplos de ello son las siguientes transcripciones del cuaderno de este alumno:

$$\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \sqrt{\left[\frac{a}{a^2+b^2}\right]^2 + i\left[\frac{-b}{a^2+b^2}\right]^2}$$

$$(gof)(x) = \sqrt{\frac{4x^4+8x^2+5}{x^4+2x^2+1}} \rightarrow Im(f) \subset Dom(g)$$

$$\beta = \frac{180+360k}{4} = \beta_1 = 45^{\circ}$$

Además, en varias cadenas de igualdades que se derivan del proceso de resolución de indeterminaciones en el cálculo de límites, el alumno omite el signo del límite, $\lim_{x\rightarrow}$ cuando éste es necesario. Tampoco indica claramente la aparición del número e en la resolución de varios límites con indeterminaciones de la forma $(\rightarrow 1)^{\rightarrow\infty}$.

Cuaderno de E19

VARIABLE 1: En la primera tanda de fotocopias observamos cómo la alumna deja una hoja en blanco destinada a la resolución de los ejercicios de números complejos, previa al comienzo del tema de funciones. Sin embargo, en esa hoja no puede registrar todos los ejercicios. Inicialmente sí que indica la presencia de ejercicios de números complejos mezclados con el desarrollo del tema de funciones, pero deja de hacerlo de un lugar en adelante. La alumna sí que indica claramente el comienzo del tema de funciones, con un título en gran tamaño y resaltado.

En el cuaderno de esta alumna encontramos un ejercicio cuya resolución está partida en dos trozos separados entre sí: el ejercicio de representación de funciones de la forma y=|f(x)|. Existen bastantes ejercicios inacabados a lo largo del cuaderno, en algún caso porque no terminar de copiar su resolución en la clase, en otros muchos casos porque copia el ejercicio de enunciados propuestos por el docente que luego no son corregidos y que tampoco son intentados por esta estudiante.

La presentación de este cuaderno es buena, el cuaderno está muy limpio y no existen tachones en su elaboración. La alumna respeta los márgenes y realiza un uso adecuado de los espacios, a excepción de algunos espacios en blanco resultantes de la ausencia de intentos de resolución en ejercicios propuestos para los que deja un espacio. Los gráficos que realiza esta alumna están bien hechos y bien integrados en el cuaderno, aunque sería deseable un tamaño algo mayor de algunos de ellos. La letra que utiliza es clara, fácilmente legible, así como números y símbolos matemáticos.

No existen rasgos que nos hagan detectar la presencia de un estilo propio en la organización o en la elaboración del cuaderno por parte de esta alumna.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, la única que encontramos registrada en el cuaderno corresponde con las definiciones que dictó el docente (a mayores de la teoría de los apuntes) de funciones inyectiva, suprayectiva y biyectiva. Además, también registra el ejemplo y el contraejemplo ilustrando el concepto de función suprayectiva. Sin embargo, no tiene el mismo comportamiento con el ejemplo y el contraejemplo de funciones inyectivas, que no son transcritos.

En el cuaderno de esta alumna se registran las actividades que se han hecho o que se han corregido en la clase, aunque no todas de forma completa. Sin embargo, en bastantes de esas actividades no existen intentos de resolución previos por parte de la alumna, sino que son directamente copiados de la corrección realizada en el aula. Hay algunos indicios de que los ejercicios que sí son intentados están realizados en clases particulares o bajo la supervisión de otra persona distinta a su profesor en el aula (presencia de otra letra distinta explicando algunos aspectos en ejercicios). En relación a los ejercicios propuestos por el docente y posteriormente no corregidos, la alumna no intenta ninguno de ellos en la parte sobre composición de funciones y cálculo de límites. Tampoco hay ninguna actividad a mayores de las propuestas por su docente.

La alumna no corrige una tarea de números complejos que realizó erróneamente y que posteriormente fue corregida en el aula. En esta tarea encontramos una gran cantidad de errores, que comentaremos en la variable 5.

VARIABLE 3: Ninguno de los indicadores que hemos considerado en esta variable presenta un desarrollo mínimo suficiente para que podemos considerar que existe la intención de utilizar el cuaderno como herramienta en el estudio y aprendizaje de las matemáticas. Como ya hemos comentado en la anterior variable, la alumna no intenta resolver la gran mayoría de los ejercicios propuestos, sino que en muchos casos se limita a transcribir su corrección de la pizarra. Además, en aquellos casos en que intenta su resolución, no corrige los errores cometidos, lo que dificulta la reflexión sobre su comprensión de los conceptos y técnicas trabajados.

Además, la presencia de escritura asociada a procesos mentales seguidos, aclaraciones o comentarios sobre las actividades es prácticamente inexistente, a excepción de alguna nota aislada y puntual que, pensamos, copia directamente del cuaderno de su compañera de pupitre, la alumna E6 (por ejemplo, escritura de la palabra “compuesta” para aclarar el signo de composición de funciones, o “Esto es R” para indicar que un número complejo debe ser real).

VARIABLE 4: Esta alumna no copia los enunciados de los ejercicios (salvo que sean dictados por su docente), y no toma apenas nota de comentarios o aclaraciones. Así, la cantidad de texto escrito presente en su cuaderno es reducida. El escaso texto que se encuentra está correctamente escrito. No se comete ninguna falta de ortografía, a excepción de la escritura de la palabra “cuando” siempre con tilde, independientemente de que sea interrogativo o no (caso en el que sería un error escribir la tilde).

VARIABLE 5: La gran mayoría de los errores de tipo conceptual o de cálculo que detectamos en el cuaderno de esta alumna están en la resolución de uno de los ejercicios de números complejos que intenta, errores que posteriormente no corrige.

Entre los errores que muestran un conocimiento deficiente o incompleto de conceptos, podemos comentar la presencia de un error al interpretar la condición para que un número complejo sea real (iguala la parte real a cero, en lugar de la parte imaginaria). Además, realiza la representación gráfica de funciones cuadráticas con parábolas cuyas ramas son totalmente verticales, lo cual es incompatible con el concepto de función. Por último, indicamos una falta de asimilación del límite que da lugar al número e, puesto que en un límite que el profesor pidió desarrollar en clase y que esta alumna comenzó a resolver, indica que el resultado del siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{-3}{3x-2}}\right]^{\frac{-3}{3x-2}}$$

es el número e (sin apreciar que el denominador de esa expresión no tiende a +∞, sino que tiende a 0.

Existen varios errores en cálculos algebraicos. Uno de ellos es un error al operar un producto de números complejos: “$2\text{-}(i+xi)\cdot(1+xi)=2\text{-}i^2+xi^2+x^2i^2$”. También hay un error al simplificar, indebidamente, un factor que no es común en el numerador y el denominador de una fracción algebraica (simplifica el x^2):

$$\frac{2+1-x-x^2}{1+x^2}=2+1-x$$

Consideramos que este error es de mayor gravedad, puesto que denota un déficit en el manejo de técnicas operacionales que deberían ser dominadas por una alumna de 1º de Bachillerato.

Encontramos varios errores ligados a una transcripción incorrecta de los ejercicios, especialmente en los signos, que en ocasiones se omiten o se cambian.

Existen a lo largo del cuaderno varios errores en la utilización del lenguaje matemático simbólico. Hay algunos errores relacionados con el signo igual: se iguala el número e con límites en los que existen indeterminaciones del tipo $(-1)^{\to\infty}$ o se omiten los iguales al manipular la expresión algebraica de funciones a trozos (se sustituyen esos iguales por la utilización de llaves de cierre, entre las cuales escribe la función). También hay deficiencias en el vocabulario matemático utilizado en algunos comentarios o frases escritas. Las siguientes expresiones, tomadas de su cuaderno, son ejemplo de ello:

- “No resolver la indeterminación cuando $\frac{\infty}{\infty}$ (en las 1^{∞})”.
- “La parte entera de x se define como el número entero, inmediatamente inferior a x o igual que E” (se confunde, y escribe “E”, símbolo para denotar la parte entera, en lugar de “él”).
- “Esto es *R*$\Rightarrow \frac{2ab}{a^2+b^2} \Rightarrow 2ab = 0$” (refiriéndose a qué debe suceder en un ejercicio para que el número complejo fuera real).

Cuaderno de E20

VARIABLE 1: En el cuaderno de esta alumna los ejercicios se encuentran en orden cronológico, por lo que durante el tema de funciones encontramos los ejercicios de números complejos pendientes intercalados. Sin embargo, la alumna sí que comienza una hoja nueva cuando se produce un cambio de tema (es decir, pasa a ejercicios de números complejos o vuelve a retomar el tema de funciones), indicándose al principio de la hoja la presencia de ejercicios de números complejos, no así con la hoja cuando vuelve al tema de funciones (hecho que no se indica de ninguna manera). La alumna indica de manera muy clara, con gran tamaño y de forma destacada, el comienzo del tema de funciones.

No encontramos ningún ejercicio en el cuaderno de esta alumna cuya resolución esté partida en varios trozos separados entre sí. Se observa cómo la alumna deja siempre un espacio en blanco para completar o intentar la resolución del ejercicio, en el caso de que esta resolución no sea completada en el aula o se deje pendiente. Muchos de los ejercicios en estas últimas situaciones están inacabados en este cuaderno, puesto que la alumna, por lo general, progresa muy poco en sus intentos de resolución; de otros tan sólo existe la transcripción de su enunciado.

La presentación del cuaderno de esta alumna es buena. El cuaderno es limpio, y no existen tachones en su desarrollo. La alumna respeta los márgenes del cuaderno. En relación al uso adecuado de los espacios, es necesario comentar la presencia de demasiados espacios en blanco, derivados de la no compleción o intento de resolución de los ejercicios que se dejan pendientes (y para los que deja un espacio destinado a su resolución). Los gráficos y dibujos realizados por la alumna son claros, están correctamente realizados y bien integrados en el cuaderno, pero pecan de no estar explicados (un ejemplo es un gráfico que se copió aludiendo a la composición de dos funciones, en el cual la explicación es fundamental para entender qué representa el mismo). La letra que utiliza esta alumna no es mala, aunque su legibilidad puede ser difícil en alguna parte concreta, dado que junta demasiado las letras y tiende a agrupar demasiado los diferentes caracteres. Los números y signos matemáticos sí que son realizados con claridad.

No puede deducirse que esta alumna posea características que muestren un estilo propio a la hora de organizar o elaborar su cuaderno.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, en el cuaderno de esta alumna encontramos registradas algunas de las definiciones que el profesor expuso a mayores de los apuntes suministrados. Encontramos una definición de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva, aunque se omiten otras posibles formulaciones de las definiciones que también se comentaron. Tampoco registra ninguno de los ejemplos ni los contraejemplos ilustrativos de estos conceptos que fueron desarrollados por el docente.

Encontramos registradas en el cuaderno todas las actividades que se hicieron en el aula o que fueron corregidas en la clase. De entre las actividades propuestas y no corregidas, hay algunas de ellas que sí que están en el cuaderno y son intentadas por la alumna (aunque sus intentos de resolución tienen bastantes errores y se progresa poco en la resolución de la tarea), de otros solamente se toma el enunciado. Ha de destacarse que esta alumna siempre copia los enunciados de las tareas, independientemente de que sean dictados por el docente o extraídos de los apuntes suministrados o del libro de texto. No existe ninguna actividad en este cuaderno a mayores de las propuestas.

En relación a los intentos de resolución de las actividades, en la parte de números complejos encontramos una hoja con intentos de resolución de algunas de las actividades y, posteriormente, otra hoja en la que se copian los ejercicios tal y como fueron corregidos en la pizarra. De nuevo, sus intentos de resolución, en general, son poco fructíferos. Ya hemos comentado que intenta algunas de las tareas que se proponen pero que luego no son corregidas, aunque no todas. Así, la alumna no corrige explícitamente los errores cometidos, sino que lo que hace es rehacer posteriormente las actividades, transcribiendo su corrección en el aula.

VARIABLE 3: En este cuaderno encontramos una gran cantidad de comentarios y de notas de aclaración, tanto de las realizadas por el docente durante la corrección de los ejercicios como propias de la alumna. El objetivo de estas notas parece ser el de ayudar a la alumna a seguir la resolución de los ejercicios en una posible revisión posterior. Con estas notas suelen recordarse o enfatizarse algunos aspectos en ejercicios que la alumna considera importantes en su resolución o aclarar algunos pasos. Ejemplos son indicaciones como el carácter positivo del módulo de un número complejo, que un número natural escrito como número complejo tiene argumento 0 o que el número $15i^2$ es igual a -15 y, por tanto, no tiene parte imaginaria. También se recuerda que $i^2=-1$ o que $y=\pm x$ son bisectrices de dos de los cuadrantes del plano (del primero y del tercero en el caso de $y=x$, y del segundo y el cuarto en el caso de $y=-x$). También se añaden, en algún ejercicio, los pasos o procesos de su resolución. Incluso en un caso se añade otra posible resolución alternativa para uno de los ejercicios.

Así, pareciera que la alumna tiene intención de que el cuaderno le sirva como un instrumento posterior de revisión de lo realizado, revisión facilitada por todos estos comentarios. Sin embargo, la alumna comete un gran número de errores en los ejercicios que intenta resolver, generalmente perseverando poco en sus intentos de resolución, lo que es muestra de inseguridad de la alumna y de poca capacidad para explorar y reflexionar sobre los conceptos trabajados. Además, la no corrección de esos errores hace que el cuaderno pierda parte de su intencionalidad como instrumento de revisión.

VARIABLE 4: Como ya hemos comentado anteriormente, la alumna anota todos los enunciados de los ejercicios, lo que, junto con la teoría, hace que exista cierta cantidad de texto en este cuaderno. No obstante, el lenguaje que utiliza la alumna en esos textos es mediocre, así como su ortografía. La sintaxis de alguna frase es mejorable. Encontramos alguna palabra escrita con lenguaje sincopado, típico de mensajes SMS o redes sociales. Por ejemplo, escribe “derexa” en lugar de derecha. También hay un mal uso de los signos de puntuación, lo que puede dar lugar a malentendidos: hay un uso indebido de la coma en la frase “No, es conmutativo!” que cambia completamente el significado de la misma (quería indicar que una composición de funciones no era conmutativa). En la frase también vemos la ausencia del signo de exclamación inicial. Por último, indicamos la práctica ausencia de las tildes necesarias.

VARIABLE 5: Existen un gran número de errores derivados de la transcripción incorrecta de las correcciones de los ejercicios realizadas en la pizarra. Esto es especialmente frecuente en los ejercicios de números complejos, escribiendo erróneamente las expresiones que involucran a éstos: aparece o desaparece la unidad imaginaria, se cambian signos, se omiten potencias… Así, consideramos que existe una falta de atención y/o de seguimiento de la alumna en relación a aquello que está copiando.

Como ya hemos comentado, la alumna progresa poco en sus intentos de resolución de actividades, abandonándolos rápidamente y existiendo un abundante número de errores. En particular, existen varios errores derivados de un conocimiento deficiente o incompleto de algunos conceptos. Estos errores se explican a continuación:

- En una función de la forma $f(x)^{g(x)}$, se quitan del dominio indebidamente aquellos puntos que hacen cero el exponente (posible confusión con otras reglas, derivado de una falta de significatividad de las mismas).

- Se produce una identificación incorrecta, presente en más alumnos, entre la presencia de una simetría respecto de un eje vertical y de una simetría par en una función.

- Existe una deficiente comprensión del modo en que actúa la función valor absoluto, puesto que cambia el signo de la expresión pero haciendo actuar sobre la variable independiente el valor absoluto, lo que le lleva a deshacer el cambio de signo en la x. Ejemplo:

$$y = |x-3| = \begin{cases} |x|-3, & si\ x-3 \geq 0 \\ -|x|-3, & si\ x-3 < 0 \end{cases}$$

- Hay un error generalizado al componer funciones: se componen en el orden contrario al debido (quizá influido por el orden que induce la notación, sin asimilar adecuadamente la definición de la misma y el proceso de actuación de ambas funciones).

- La alumna representa las funciones cuadráticas a través de parábolas cuyas ramas son completamente verticales, lo que es incompatible con que lo representado sea una función.

Existen, además, un gran número de errores en la manipulación de expresiones aritméticas y algebraicas, lo que muestra un déficit en el manejo y asimilación de una serie de técnicas y de conocimientos prácticos que debieran ser dominados por una alumna de 1º de Bachillerato. Existen errores al sumar o restar números a fracciones algebraicas con numerador 1 (puesto que se omite la presencia de este 1 al realizar denominador común):

$$\frac{1}{x^2+1}+1=\frac{x^2+1}{x^2+1}, \ \frac{1}{x^2+1}-1=\frac{-x^2-1}{x^2+1}$$

También hay un error grave al simplificar sumandos no comunes en el numerador y el denominador de una fracción algebraica, con el agravante de que, además, no son sumandos iguales:

$$\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}=\frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2+3x}}$$

Por último, indicamos también la presencia de bastantes deficiencias en la utilización de la notación simbólica matemática, que parecen inducir una falta de comprensión del significado de los signos y símbolos utilizados, así como del vocabulario matemático usado. En relación a la notación, se abusa de la utilización del signo igual, al igualar expresiones que no son tales o al querer relacionar aspectos. Un ejemplo de uso indebido sería el siguiente comentario de aclaración: “1^{∞} = (Buscar el nº e)”. También hay igualdades sin sentido, como la siguiente:

$$e = \lim_{x \to Pepe} \left[1 + \frac{1}{Pepe}\right]^{Pepe}$$

En uno de los primeros límites, realiza al revés la flecha de tendencia, puesto que en lugar de partir del elemento e indicarse a qué tiende, la flecha apunta hacia el elemento.

En relación al vocabulario matemático, también encontramos algunas deficiencias. Por ejemplo, la alumna escribe “simetría respecto al punto de ordenadas” (para explicar la simetría par, sería el origen de coordenadas) o “resolviendo el numerador” (para referirse a que iguala a cero el numerador).

Así, en resumen, el número de errores que se detectan en el cuaderno de esta alumna es muy grande. Además, algunos de ellos nos parecen graves.

Cuaderno de E21

VARIABLE 1: La organización del cuaderno de este alumno es mala, puesto que se mezclan los ejercicios de números complejos con el tema de funciones, sin que se indiquen de ninguna manera los cambios de tema cuando éstos se producen. Como mucho, observamos una raya horizontal separando ambas partes en algún caso. Tampoco se indica el comienzo del tema de funciones de ninguna manera, al no haber una marca o un título que lo haga explícito.

En este cuaderno se encuentran varios ejercicios cuya resolución está partida en varios trozos separados entre sí: un ejercicio de números complejos y el ejercicio de representación de funciones de la forma y=|x| (volviendo a copiar el enunciado en la segunda parte). No encontramos ejercicios inacabados, pero sí que encontramos tan sólo el enunciado (sin ningún intento de resolución) en los ejercicios propuestos por el docente, sobre composición de funciones y cálculo de límites, que no fueron posteriormente corregidos en el aula.

La presentación del cuaderno es buena, el cuaderno da una buena impresión en una revisión del mismo. El cuaderno está limpio, y prácticamente no existen tachones en su desarrollo. El alumno respeta los márgenes y existe una adecuada utilización de los espacios. Los gráficos que realiza el alumno están bien hechos (realiza con regla el trazado de los ejes o de las funciones cuya gráfica se compone de trozos rectos), aunque algunos pecan de ser demasiado pequeños. La letra también es clara, fácilmente legible, al igual que los números y símbolos matemáticos.

No apreciamos elementos característicos del alumno que nos hagan detectar la presencia de un estilo propio en la elaboración u organización del cuaderno.

VARIABLE 2: En relación a la teoría, en este cuaderno encontramos registradas las definiciones de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva que el profesor expuso en la clase a mayores de la teoría suministrada en los apuntes. Este alumno, además, copia el ejemplo ilustrativo para la función inyectiva, pero no hace lo propio con el ejemplo para la función suprayectiva, ni toma ninguno de los dos contraejemplos de estos conceptos que fueron desarrollados por el docente.

En el cuaderno de este alumno encontramos muchos de los ejercicios que fueron realizados en la propia clase o corregidos en el aula. No obstante, faltan los ejercicios correspondientes a dos días en los que el alumno faltó (no registra lo realizado a través, por ejemplo, del cuaderno de alguno de sus compañeros). El alumno registra algunos de los enunciados de los ejercicios propuestos por su docente y posteriormente no corregidos, pero no desarrolla intentos de resolución en ninguno de ellos. Tampoco existe ningún ejercicio en el cuaderno que sea distinto de los propuestos por su docente.

En relación a la resolución de actividades, hemos de decir que se han detectado muy pocos intentos de resolución de las tareas por parte del propio estudiante. El alumno transcribe la resolución de muchas de las tareas planteadas y corregidas en el aula, o bien de la resolución desarrollada por el docente, o bien del cuaderno de su compañero de pupitre, el alumno E16. Así, prácticamente no hay intentos propios de resolución y, por lo tanto, no tiene sentido plantearse cómo corrige el alumno los posibles errores cometidos en dichos intentos.

VARIABLE 3: En este cuaderno no se percibe un desarrollo de los indicadores de esta variable que nos permita indicar la presencia de una intención en el alumno en la utilización de su cuaderno como una herramienta en su estudio y aprendizaje de las matemáticas. Uno de los motivos es que apenas hay intentos de resolución de actividades, por lo que el cuaderno no se configura como un instrumento para repasar, trabajar, reflexionar o consolidar de un modo autónomo los conceptos y técnicas tratados en las clases. Además, a la transcripción de ejercicios que realiza no le añade la escritura de los procesos mentales seguidos, los comentarios, notas o las aclaraciones realizadas por el docente (o propias del alumno) que complementen esa transcripción. Tan sólo se encuentra alguna nota muy aislada indicando qué representa un número en un ejercicio de números complejos. Estas notas le ayudarían a aumentar la efectividad del cuaderno como herramienta de estudio en una hipotética revisión del mismo en la preparación de una prueba de evaluación.

VARIABLE 4: El alumno copia en bastantes ocasiones los enunciados de los ejercicios registrados, aunque en algún caso acorta el enunciado por comodidad. Tanto el lenguaje como la sintaxis utilizados son correctos (aunque es transcripción de los enunciados de los ejercicios o de la teoría del docente). En relación a la ortografía, la deficiencia fundamental es la ausencia de un gran número de las tildes necesarias a lo largo de toda la parte del cuaderno fotocopiada.

VARIABLE 5: Existen un gran número de errores derivados de una transcripción errónea de los ejercicios resueltos en la pizarra o de la resolución tomada por su compañero E16 en su cuaderno, lo que muestra poca atención en el seguimiento de las resoluciones y poca intención en realizar ese seguimiento, como denota el recurso de copiar directamente de lo transcrito por su compañero E16.

Algunos de esos errores consideramos que pueden incitar o provocar conocimientos deficientes o incompletos de conceptos, por lo que los consideramos de mayor importancia. Uno de ellos es la escritura errónea, en dos ocasiones, de la definición de la composición de funciones, puesto que escribe la composición de las funciones en el orden contrario al debido: "$[fog](x) = g[f(x)]$" y "$[gof](x) = f[g(x)]$". Esto puede provocar confusiones en el concepto de composición de funciones en una hipotética revisión del alumno de su cuaderno. También hay un error grave en una gráfica tomada, en la que al punto x=0 le asigna, gráficamente, dos imágenes, 1 y -1. Esta gráfica sería incompatible con que lo representado sea una función.

Otro error que se repite bastante está en la multiplicación por el conjugado en ejercicios con números complejos: en lugar de multiplicar por el conjugado en numerador y denominador, en varias ocasiones sustituye la multiplicación del conjugado por la del propio número en el denominador, o multiplica en el denominador por ambos números (el complejo y su conjugado). Llama la atención la repetición en varias ocasiones del error, lo que puede indicar una asimilación errónea del alumno de este proceso y lo que representa (el número no debe cambiar, por eso debe multiplicarse por el mismo número en numerador y denominador). Además, en otros muchos ejercicios se omiten paréntesis, iguales, se omiten o cambian signos u operaciones o se cambian desigualdades no estrictas por otras que sí lo son, lo que muestra una baja atención y un bajo seguimiento del alumno de aquello que está copiando. Un ejemplo más de transcripción con poco sentido es la siguiente:

$$\begin{array}{l} z_1 = 1_{90} \\ z_2 = 1_{210} \\ z_3 = 1_{330} \end{array} \Rightarrow z_i = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}$$

En relación al lenguaje matemático transcrito, también encontramos bastantes deficiencias asociadas a una pobre transcripción. En relación al vocabulario, el alumno no utiliza el término de simetría par, al explicar la simetría existente sin utilizar el término específico correspondiente: "simetría respecto del eje x=0 [OY]". Si nos fijamos en el lenguaje matemático simbólico, hay varios errores asociados al uso del signo igual: se utiliza indebidamente para igualar el límite de una función que no existía con el símbolo de no existencia (∄), también se iguala indebidamente un límite de una función exponencial con el límite de su exponente y viceversa en el transcurso de su desarrollo:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x^2}{3x-2}} = \frac{-\infty}{\infty} = e^{-\infty} = 0$$

También hay problemas con la omisión del signo igual cuando se trabaja y manipulan expresiones simbólicas de funciones definidas a trozos. Otras deficiencias son: escribir dos veces el nombre de una función al indicar su límite, hacer el símbolo de perteneciente (∈) como el símbolo el euro (€) y utilizar una notación ambigua al indicar las soluciones de una inecuación de segundo grado: “$x^2-9=0\Rightarrow x=\pm 3$”, e inmediatamente después escribir que la solución es el intervalo (-3,3), sin explicitar cómo se obtiene ese intervalo.

ANEXO A.2

En este anexo incluimos la escala EAEM, que fue utilizada para obtener información sobre el perfil afectivo-emocional hacia las matemáticas de los alumnos participantes en este estudio exploratorio. Esta escala, junto con otro amplio número de escalas más concretas relacionadas con aspectos afectivos y emocionales hacia las matemáticas, ha sido construida, desarrollada, validada y utilizada por investigadores de la Universidad de Valladolid. La versión final de esta escala puede encontrarse en Hidalgo *et al*. (2013).

Escala EAEM

Colegio/Instituto: ______________________ **número de clase:** ________

Nivel (6º Primaria-1º ESO,...) ______________ **Clase (6 A, 3C, 4B,...):** ________

Edad: ________ **años y** ________ **meses** **Hombre:** ______ **Mujer:** ______

	desacuerdo total	en desacuerdo	de acuerdo	bastante de acuerdo	acuerdo total
1.- Me gustan las matemáticas	0	1	2	3	4
2.- Me siento cómodo resolviendo problemas de matemáticas	0	1	2	3	4
3.- Me hace más ilusión tener un 10 en matemáticas que en cualquier otra asignatura	0	1	2	3	4
4.- Yo quiero aprender matemáticas.	0	1	2	3	4
5.- Cuando estudio matemáticas estoy más incómodo que cuando lo hago con otras asignaturas	0	1	2	3	4
6.- Las matemáticas no sirven para nada.	0	1	2	3	4
7.- Las matemáticas deberían estar presentes únicamente en la universidad, en las carreras científicas y técnicas	0	1	2	3	4
8.- Me resulta divertido estudiar matemáticas	0	1	2	3	4
9.- Las matemáticas son fáciles	0	1	2	3	4
10.- En matemáticas me quedo con la mente en blanco con frecuencia sin saber por dónde salir	0	1	2	3	4

	desacuerdo total	en desacuerdo	de acuerdo	bastante de acuerdo	acuerdo total
11.- Toca clase de matemáticas ¡Qué horror!	0	1	2	3	4
12.- Me será siempre difícil aprender matemáticas	0	1	2	3	4
13.- Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas	0	1	2	3	4
14.- Salvo en unos pocos casos, por mucho que me esfuerce no consigo entender las matemáticas	0	1	2	3	4
15.- Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida	0	1	2	3	4
16.- La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy interesante	0	1	2	3	4
17.-No soporto estudiar matemáticas, incluso las partes más fáciles	0	1	2	3	4
18.- Para mi futuro profesional las matemáticas son una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar	0	1	2	3	4
19.- Las matemáticas son una de las asignaturas más aburridas	0	1	2	3	4
20.- Si tuviera oportunidad me apuntaría a asignaturas optativas relacionadas con las matemáticas	0	1	2	3	4

	desacuerdo total	en desacuerdo	de acuerdo	bastante de acuerdo	acuerdo total
21.- Aprender matemáticas es cosa de unos pocos	0	1	2	3	4
22.- Siempre he tenido problemas con las matemáticas	0	1	2	3	4
23.- No tengo ni idea de qué van las matemáticas	0	1	2	3	4
24.- Mis padres se preocupan más de los resultados y notas en matemáticas que de las otras asignaturas	0	1	2	3	4
25.- Haga lo que haga, siempre saco notas bajas en matemáticas	0	1	2	3	4
39.- Cuando tengo alguna dificultad con las matemáticas suelo pedir ayuda a mi familia (padres, hermanos,…)	0	1	2	3	4
26.- Para mis maestros y profesores de matemáticas soy un buen alumno	0	1	2	3	4
27.- No sé estudiar las matemáticas	0	1	2	3	4
28.- Me suelo sentir incapaz de resolver problemas matemáticos	0	1	2	3	4
29.- En matemáticas me cuesta trabajo decidir qué tengo que hacer para aprobar	0	1	2	3	4

	desacuerdo total	en desacuerdo	de acuerdo	bastante de acuerdo	acuerdo total
30.- Puedo llegar a ser un buen alumno de matemáticas	0	1	2	3	4
31.- Las matemáticas son un "rollo"	0	1	2	3	4
32.- Soy una de esas personas que no nació para aprender matemáticas	0	1	2	3	4
33.- Soy bueno en matemáticas	0	1	2	3	4
34.- Me siento más torpe en matemáticas que la mayoría de mis compañeros de clase	0	1	2	3	4
35.- Las matemáticas me confunden	0	1	2	3	4
36.- Suelo tener dificultades con las matemáticas	0	1	2	3	4
37.- Se me da bien calcular mentalmente	0	1	2	3	4
38.- Puedo pasarme horas estudiando matemáticas y haciendo problemas; el tiempo se me pasa rapidísimo	0	1	2	3	4
39.- Cuando tengo que estudiar matemáticas voy a la tarea con cierta alegría	0	1	2	3	4

Con qué asocias la palabra «matemáticas»:

Qué son las matemáticas para tí:

ANEXO A.3

Este anexo contiene la transcripción íntegra del debate sobre el cuaderno de matemáticas mantenido con los alumnos en el aula. Se recogen tanto los comentarios verbales como aspectos sobre la gestualidad y el ambiente en la clase. Para identificar las intervenciones de los alumnos se utilizará el código con el que nos hemos referido a ellos en el resto del trabajo exploratorio (una E seguida de su número de clase), mientras que las intervenciones del moderador, en este caso el doctorando, serán indicadas con la etiqueta "Inv.".

En el debate se trataron diferentes temas de interés, por lo que puede considerarse que estuvo dividido en diferentes bloques. De ellos, hay siete bloques centrados en diferentes aspectos de interés derivados del marco teórico utilizado y del análisis llevado a cabo. Además, hay un último bloque más individualizado, en el que se preguntó sobre aspectos concretos encontrados en el análisis a algunos estudiantes. La transcripción del debate se realizará siguiendo estos bloques.

Dualidad del cuaderno como un instrumento dentro de un dominio público o un domino privado

1. Inv.: ¿Influye en algo en vuestra manera de hacer el cuaderno que vuestro profesor os los revise de manera periódica?
2. E12: No.
3. Inv.: (*Al ver que el resto de alumnos permanecían callados, aunque algunos como E1 o E19 hacían gestos claros de negación con la cabeza*) E1 dice que no muy claro pero, ¿los demás? ¿Nadie dice que sí?
4. E12: O sea, lo pones un poco más bonito y eso, pero nada más. Pero no…, vamos a ver.
5. Inv.: Entonces ya no es un no, ya es un bueno… (*en ese momento, algunos alumnos ríen*)
6. E12: Pero, o sea, lo que es los ejercicios y todo eso lo haría igual. Lo que influiría sería que eso, que a lo mejor lo pinto un poco más o… No sé. (La alumna E5 se ríe).
7. E1: Yo es que las notas las tengo aquí (*enseñando un folio doblado en cuatro partes, que siempre tenía de la mano en las clases*). En el cuaderno a lo mejor tengo algún ejercicio en sucio y poco más.
8. Inv.: Aparte de la presentación, ¿os influye en algo más? (*Tras unos segundos en los que nadie decidía decir nada más*) ¿Nadie más se anima a decir algo?
9. Inv.: (Pruebo a cambiar la formulación de la pregunta) Si supierais que no los va a revisar, ¿cambiaríais en algo vuestra manera de trabajar o escribir en el cuaderno?
10. E12: Sería igual.
11. E7: ¡No haría nada! (*Con mucha seguridad y en alto, muchos de sus compañeros se ríen al oír el comentario*).
12. E14: Sería igual.
13. E21: Ejercicios, yo copiaría los ejercicios, porque luego los voy a hacer yo, ¿sabes? Los ejercicios… Yo haría los ejercicios y fuera. Yo no les hago porque le parezca bien o algo (*Bajando mucho el tono de voz*).
14. Inv.: E7 decía que… ¿Qué ibas a hacer con el cuaderno?
15. E7: No haría los ejercicios. Si sé que no le mira… (*leísmo*) No hago.
16. E21: Hombre…
17. E12: Yo no… Porque, si eso… O sea, lo que hago en el cuaderno se supone que me sirve para los exámenes, para aprender y tal. No para ver si el profesor me lo mira o no, es para mí, no para… Es para mi bien no para su bien, entonces… (*Se calla*)

18. Inv.: (*Me dirijo a las cuatro alumnas del perfil P24, E5, E6, E14 y E20, que prácticamente no habían intervenido todavía*) ¿Vosotras cuatro? ¿Tenéis algo que aportar?
19. E14: No, lo mismo (*se ríen las cuatro*). Si tienes la costumbre de hacer todos los cuadernos así y tenerles siempre bien para poder estudiar... No tiene por qué influir que te lo miren o no te lo miren.
20. Inv.: (*Me dirijo ahora a otro alumno que no había intervenido, único representante en el debate del perfil P23*) ¿En tu caso, E3?
21. E3.: No. (*En este momento todos los alumnos se callan y nadie comenta nada más, por lo que decido cambiar a otro bloque de preguntas*)

Limpieza y orden en el cuaderno

1. Inv.: ¿Alguno de vosotros pasa a limpio las notas o ejercicios que toma en el cuaderno? ¿Por qué? (*Tras hacer la pregunta, algunos alumnos, como E5, niegan con la cabeza*).
2. E21: Yo sí. Yo paso las notas a limpio a veces.
3. E12: Yo escribo a lápiz y luego lo paso a boli. Para que quede más bonito.
4. E1: Yo ya lo he dicho. Yo los apuntes los paso a esta libreta, luego si no lo tengo aquí todo… (*Se calla*).
5. Inv.: ¿Nadie más lo pasa a limpio? Entonces, todos los demás lo hacéis sobre el cuaderno. (*Varios alumnos, como E16 o E19, asienten con la cabeza al oír esta afirmación*).
6. E17: Sí. Y como quede.
7. Inv.: (*Como nadie más intervenía, paso a preguntar las razones de su actuación, para que argumentaran sus posturas*). Los que pasáis a limpio las notas, ¿por qué lo hacéis?
8. E21: No sé, porque aquí en clase lo pones un poco rápido y luego después lo pones en casa para enterarte más y eso, ¿sabes?
9. E1: Pues tiro de esto (*volviendo a señalar la hoja doblada en cuatro partes*). De las notas. Si no, en el cuaderno, andar buscando todo… Es un *coñazo* (*sic, la alumna E19 se ríe al escucharlo*).
10. Inv.: Y los demás, lo hacéis directamente sobre el cuaderno.
11. Coro: Sí.
12. Inv.: ¿Os parece bien esa manera de hacerlo?
13. E16: Bien o mal, pero lo hacemos. (*Al oírle, algunas alumnas como E5 y E12 se ríen*).
14. Inv.: ¿Intentáis directamente los ejercicios en el cuaderno? ¿Qué ventajas o inconvenientes creéis que esto tiene?
15. E14: En el cuaderno.
16. E7: En el cuaderno.
17. E21: En el cuaderno.
18. E16: En el cuaderno.
19. E1: En el cuaderno.
20. E12: Hombre, si lo veo muy difícil y muy largo, lo hago en una hoja para no manchar el cuaderno y luego lo paso al cuaderno.
21. Inv.: ¿Alguien más hace eso?
22. E6: Yo. Igual que E12.

23. Inv.: ¿Todos los demás lo hacéis directamente sobre el cuaderno? (*al terminar la pregunta, la alumna E14 asiente con la cabeza*).
24. E17: Yo… Yo lo hago fuera del cuaderno, pero luego no lo paso (*risa generalizada en sus compañeros ante su comentario*).
25. Inv.: ¿Qué ventajas creéis que puede tener el hacerlo fuera y luego pasarlo al cuaderno?
26. E19: Que esté más ordenado.
27. E21: Que al final te enteras más de lo que estás haciendo, porque lo pones así…, bien, ¿sabes?
28. E19: Que está más ordenado (*vuelve a repetir lo mismo que dijo antes*).
29. E12: Pues claro. Si a lo mejor lo haces en una hoja, lo haces más como un poco aquí, otro por aquí o por aquí (*con su cuaderno abierto, mientras señalaba diferentes partes de una hoja*). Luego, cuando lo pones y cuando te enteras de cómo lo tienes que hacer, lo pones todo ordenado y seguido.
30. E21: Luego lo pones ordenado, claro.
31. E12: Ya sabes el espacio que te va a ocupar y todo eso.
32. Inv.: ¿Y qué inconvenientes tiene el hacerlo de esta manera?
33. E14: Que se tarda más.
34. E5: Que tardas más.
35. E12: Que pierdes tiempo. Que puedes hacer otro ejercicio del mismo estilo y así te queda…, tampoco…, más.
36. Inv.: (*Viendo que la participación se estaba concentrando en un pequeño número de alumnos*) Están participando más o menos siempre las mismas personas. Quiero que participéis todos, ¿vale? Aunque sea para decir, “Estoy de acuerdo con lo que ha dicho tal compañero”. Es importante que habléis todos.
37. Inv.: En caso de no hacer los ejercicios en el cuaderno, ¿dónde los realizáis? ¿Por qué los hacéis ahí en lugar de en el cuaderno?
38. E16: Yo, si eso, en folios. En folios, en alguna hoja suelta.
39. E14: Si es para copiar y eso…
40. Inv.: E16, en tu caso, ¿por qué los haces en folios en lugar de en el cuaderno?
41. E16: No sé… ¡Si yo lo hago en el cuaderno! (*risa generalizada de sus compañeros*) Yo lo he dicho para meter un poco de… Si lo hago a veces en folios es porque luego, al pasarlo, pues lo quedo más limpio, más ordenado. No sé.
42. Inv.: ¿Alguien más hace eso?

43. E6: Yo. ¿Por qué? No sé, es una manía que tengo. Escribir en folios…, y eso.
44. Inv.: ¿Y por qué lo haces así?
45. E6: No sé. El cuaderno no me… Para estudiar prefiero hacerlo en folios.
46. E4: Yo en folios, lo hago.
47. Inv.: ¿Y luego no lo pasas al cuaderno?
48. E4: No.
49. Inv.: ¿Alguien más lo hace así?
50. E5: Luego, en los exámenes. Cuando hay exámenes, tienes las distintas soluciones en el cuaderno y vas haciendo los ejercicios fuera.
51. Inv.: ¿Alguien más sigue esa forma de trabajar? (*Ante esta pregunta, las alumnas E6 y E14, compañeras de perfil de E5, asienten con la cabeza, pero nadie más dice nada*).

Utilidad del cuaderno de matemáticas

1. Inv.: ¿Para qué sirve tener un cuaderno de matemáticas? ¿Es necesario?
2. E21: (*De manera vehemente*) ¡Sí, *joder*! (*sic*).
3. Inv.: ¿Por qué?
4. E21: A saber… Bueno, si eres muy…, que sabes hacer todo y eso pues no te hace falta. Pero vamos, que yo, para mí me hace falta. (*Sus compañeros ríen*).
5. Inv.: ¿Y por qué te hace falta?
6. E21: Pues para tener aquí historias y luego pues… ¿Sabes? Y luego pues, saber, saber cómo van las cosas. (*Su compañero E16 se ríe al oírle*). O sea un ejercicio, por ejemplo, para saber luego si cae en el examen pues lo tienes aquí (*señalando su cuaderno*)… Pues si te lo sabes hacer y eso… Yo creo. ¿Me has entendido? Más o menos… (*Risa generalizada*).
7. Inv.: Ha quedado registrado lo que has dicho. ¿Estáis de acuerdo con lo que ha dicho E21?
8. E1: Sí.
9. E5: Sí (*mientras las alumnas E14 y E20 cuchichean entre ellas*).
10. Inv.: ¿Hay alguien que crea que no merece la pena tener un cuaderno de matemáticas? (*Tras la pregunta, todos se quedan callados unos segundos*).
11. E12: Que, si por ejemplo, estás mirando de cómo lo hace él en la pizarra, a lo mejor lo explica al principio del trimestre y al final ya se te ha olvidado, con lo cual tienes que estar pidiéndoselo a otro compañero y…, tú no lo tienes. Yo estoy a favor de usar el cuaderno.
12. Inv.: ¿Le veis al cuaderno alguna utilidad más que la de registrar los ejercicios que se hacen en clase?
13. E12: Cuando dice por ejemplo: “¡Pregunta de examen!”, pues lo apuntas (*se ríe después de decir esto, junto con otras chicas como E5, E14 y E20*).
14. E16: Hombre, si lo haces en hojas sueltas, luego se te pierden y no las encuentras… Luego está todo en el cuaderno, en el mismo sitio (*Mientras lo dice, coge su cuaderno de la mesa para indicarlo*).
15. E14: Y para estudiar es mucho más cómodo.
16. Inv.: Bajo vuestro punto de vista, ¿qué debe contener un cuaderno de matemáticas? ¿Qué no debe contener?
17. E6: Los ejercicios. Muchos ejercicios.
18. E12: Las fórmulas también, o sea, fórmulas y…, y las definiciones así también. Pero, o sea, muchos más ejercicios que fórmulas y definiciones.
19. Inv.: ¿Estáis todos de acuerdo?
20. E5: Sí.

21. Inv.: O sea, que un cuaderno de matemáticas es básicamente de ejercicios.

22. E14: Para entender las cosas sí. Ejercicios. Hombre, también alguna explicación que te digan “apuntar esto que es muy importante”. Y llegas y lo apuntas.

23. E16: Las notas que dice el profesor.

24. E12: Sí, pequeñas notas.

25. Inv.: ¿Y qué es lo que no debe contener? (*Ante esta pregunta, algunos estudiantes, como la alumna E14, pone cara de duda, extrañada por la pregunta*).

26. E21: No debe, pero siempre va a haber alguna historia. Un dibujo, por ejemplo (*el resto de sus compañeros se ríen*).

27. Inv.: ¿Tú crees que en un cuaderno de matemáticas no puede haber dibujos?

28. E21: Puede… O sea, no debe haber. Vamos, debe… Puede haber o no puede haber, depende también ¿no? (*Abre su cuaderno*). Bueno, sí puede haber… Mira tengo aquí… Una función, por ejemplo. Yo no sé si será un dibujo o no, pero eso.

29. Inv.: ¿El dibujo de una función debe estar en el cuaderno?

30. Coro: (*Especialmente las alumnas*) Sí.

31. Inv.: ¿Alguna cosa más que no pueda haber en un cuaderno de matemáticas?

32. E12: Pues tener… Una hoja de matemáticas, luego una de lengua, luego una de química… Tenerlo todo de matemáticas, sólo, no de otra asignatura más.

33. Inv.: ¿Alguien tiene en el cuaderno varias asignaturas?

34. E17: Yo (*risas entre sus compañeros*).

35. Inv.: ¿Y cómo lo organizas?

36. E17: Pues… No lo organizo, la verdad. (*Mientras habla, sus compañeros E7 y E15 hablan entre ellos, sin prestar atención al diálogo*). Alguna cosa de inglés, luego te sale física, luego te sale matemáticas… No sé.

37. Inv.: ¿Consideras que esa es una buena forma de hacerlo?

38. E17: Bueno, vas tirando.

39. E4: Yo también lo hago.

40. Inv.: ¿Alguien más sigue esta manera de hacerlo?

41. E14: En matemáticas no, porque ocupa mucho más lo de… Al final se me va a juntar lo de física con lo de lengua, o lo de matemáticas con lo de…, otra cosa.

42. Inv.: ¿Todos los demás tenéis un cuaderno separado de matemáticas?

43. E16: Sí. (*En ese mismo momento, otras alumnas como E5 y E6 también asienten con la cabeza*)
44. Inv.: A ver, E19, tú no has dicho nada. ¿Tú también?
45. E19: Sí. Yo sí.
46. Inv.: ¿Y os parece buena idea lo que hacen vuestros compañeros de juntar las asignaturas?
47. E12: Si lo organizan bien ellos… Yo no lo haría.
48. Inv.: (*Como nadie quería comentar nada más, decido cambiar a otra pregunta*) ¿El aprendizaje de las matemáticas depende de cómo sea el cuaderno, de la concepción que de él se tenga? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?
49. Inv.: (*Tras ver que aparecían respuestas en los tres sentidos: sí, no y depende; pregunto específicamente por cada respuesta*) ¿Quiénes opinan que sí?
50. E14: (*Había levantado la mano, junto con otras compañeras como E5, E6 y E12*) Cuanto más ordenado y más limpio esté pues mejor lo ves y… Te pones a ello, vamos. Porque si ves un cuaderno desordenado dices… ¡Puf, la que tengo montada aquí!
51. E12: Pues eso, que si lo tienes desordenado, luego a la hora de estudiar, pues te resulta más difícil el comprenderlo. Si lo tienes todo organizado, los títulos y todo pues…, es más fácil.
52. Inv.: (*Tras ver que nadie más de los que opinaban que sí quería añadir nada*) E18, me ha parecido ver antes que decías que en parte. ¿Por qué en parte?
53. E18: Porque…, si lo tienes ordenado a lo mejor tú te puedes quedar con cosas.
54. Inv.: También he oído a algunos que decían que no.
55. E17: Porque… Da igual, da igual como… Da igual. Las matemáticas se aprenden haciendo ejercicios, ¿sabes? Da igual que sea en el cuaderno de física, que en el de mate que… Aunque sea dibujo técnico, da igual, yo qué sé, es escribir y si tienes una fórmula pues la pones y lo haces. No sirve para más un cuaderno. Es para escribir.
56. Inv.: Cómo esté el cuaderno no te influye para nada.
57. E17: Lo importante es que se te queden las cosas. No que esté bonito ni que tengas un ejercicio de impresión artística, da igual (*frase expresada con mucha vehemencia*).
58. Inv.: No hace falta que te pongas así, es una opinión. Cada maestrillo tiene su librillo. ¿Alguien más opina como E17?
59. E3: Yo opino como E17. Lo que importa es escribirlo, lo que…, cómo esté escrito da igual. Haces los ejercicios y punto.
60. E21: Es tu cuaderno, mientras esté a tu gusto…

61. Inv.: ¿Utilizáis el cuaderno de matemáticas a la hora de estudiar para un examen?
62. Coro: (*Contestación de la mayoría de los alumnos de la clase*) ¡Sí!
63. Inv.: ¿Cómo lo utilizáis?
64. E14: Con hojas aparte vas haciendo ejercicios y por otra parte vas mirando el cuaderno.
65. Inv.: ¿Alguno más seguís ese método? (*Tras hacer la pregunta, levantan la mano varios estudiantes: E5, E6, E7, E12, E13 y E20, además de E14*).
66. E17: Yo lo hago en el cuaderno.
67. E12: Yo también. Yo lo hago en el cuaderno. Si no me acuerdo de un ejercicio, pues vuelvo a mirar en los ejercicios que tengo en el cuaderno.
68. Inv.: ¿Hay alguien más que haga eso? (*Tras hacer la pregunta, levantan la mano E18, E19 y E21; como veo que E3 no ha levantado la mano en ambos casos, le pregunto específicamente*). E3, ¿tú qué haces al estudiar un examen?
69. E3: Para estudiar para un examen, hago ejercicios. En cualquier lado. En la hoja más cercana.
70. Inv.: ¿Y no lo revisas con lo que se ha hecho en la clase?
71. E3: No suelo revisarlo. Lo hago…, y me fío de mí (*risas entre varios de sus compañeros*).
72. E21: Es que a ti te da la cabeza, porque eres muy listo. ¡Es que es muy listo!
73. Inv.: Bueno, cada uno es como es. Si él considera que no lo tiene que revisar, pues que no lo revise. E17, ¿tú qué habías dicho?
74. E17: Yo lo hago en el cuaderno y ya está… Se hace y como sea.
75. E12: Es que cuando se supone que tienes que hacer los ejercicios es diariamente, no el día antes del examen matarte a ejercicios. Si te lo pretendes meter todo antes del examen, no. Te lo tienes que ir metiendo día a día y con lo que se hace en clase.
76. Inv.: ¿Estáis de acuerdo con lo que dice E12?
77. Coro: Sí.
78. Inv.: ¿Y lo hacéis?
79. E7: Estamos de acuerdo, pero no.
80. Inv.: Además de E3, ¿hay alguien más que no utilice el cuaderno para el examen? (*Tras hacer esta pregunta, levantan la mano E4 y E18*).
81. E12: (*Al ver que E18, su compañero habitual de pupitre, levanta la mano*) ¡No estudia! ¡A ver! (*varios compañeros ríen*).
82. E4: Yo utilizo el libro, para hacer ejercicios…

83. Inv.: (*Aprovecho la circunstancia para preguntarle, puesto que era uno de los alumnos que no había participado con su cuaderno en el análisis*) ¿Tienes cuaderno de matemáticas?

84. E4: No.

85. Inv.: Entonces, ¿para ti no es necesario tener un cuaderno de matemáticas?

86. E4: Para mí no es necesario. Es necesario hacer ejercicios, pero para eso no hace falta un cuaderno.

87. E21: ¿Y dónde los haces?

88. E4: Pues no sé… En otro sitio los haré.

89. Inv.: ¿Alguien más no usa el cuaderno para estudiar para un examen? E15, tú estás muy callado…

90. E15: Yo no le uso. Realmente no uso nada… (*comentario que provoca las risas de sus compañeros*).

Presencia de comentarios, aclaraciones y notas de ayuda

1. Inv.: (*Presento el siguiente bloque del debate*) He detectado que varios de vosotros os limitáis a transcribir los ejercicios que se hacen en la pizarra, sin escribir anotaciones o comentarios que se hayan dicho en clase y que puedan ser de ayuda. Hay otros estudiantes que, aparte del ejercicio, de algunas notas o comentarios de ayuda, maneras de resolverlo, advertencias ante errores comunes…
2. Inv.: Me gustaría que defendierais vuestras posturas. (*Dirigiéndome a los estudiantes del primer grupo de perfiles, que eran los que no tomaban anotaciones de este tipo y se limitaban a la transcripción de los ejercicios*) ¿Por qué vosotros no tomáis notas y os limitáis a transcribir el ejercicio?
3. E16: Porque no me hará falta…, tomar esas notas. Si no nos hace falta… Si lo viéramos tan importante, pues sí lo apuntaríamos. Es lo que pienso.
4. Inv.: (*Al ver que los restantes alumnos de este grupo permanecían en silencio*). ¿Algo más queréis aportar?
5. E16: No lo consideramos importante… Vamos, tan importante. Puede venir en el libro, o lo puedes buscar en cualquier sitio.
6. Inv.: (*Dirigiéndome ahora a las cuatro chicas del perfil P24, que eran las chicas en las que más notas y aclaraciones en sus cuadernos hemos detectado*) A ver, vosotras sois las que soléis tomar notas al hacer los ejercicios. ¿Por qué tomáis nota, además de hacer el ejercicio, de posibles comentarios del profesor, notas propias de ayuda…?
7. E14: (*Tras abrir y ver su cuaderno de matemáticas*) Porque… Yo por lo menos lo necesito, porque luego a la hora de hacer los ejercicios digo… ¿Cómo ha hecho esto? Llego, lo apunto, y luego a la hora de hacerlo pues lo veo más fácil.
8. E6: Nos facilita el trabajo.
9. E5: (*Tras asentir ante el comentario de E6*) Porque luego, cuando vaya a hacer el ejercicio, caigo en eso. Por ejemplo, aquí no se puede simplificar y aquí sí. Y luego…, siempre simplifico donde no es. (*Tras este comentario se callan todas ellas*).
10. Inv.: Los demás estabais en un punto intermedio en este sentido. ¿Qué opináis? ¿Es beneficioso tomar notas aparte de hacer el ejercicio?
11. E17: No sé. Si eres una persona que te lías mucho pues te viene bien, pero si eres alguien que lo sabe hacer bien pues no le hace falta. Es una pérdida de tiempo vamos. Ponerte a apuntar lo que sabes hacer bien.
12. Inv.: ¿Alguien más piensa como E17?
13. E12: (*Tras ver que levantaban la mano E3 y E7*) ¡Siempre lo apoya! (*loísmo, refiriéndose a E3*).

14. E3: ¡Jope, es verdad! Pues eso, a mí no me hace falta poner notas… Te sale de la cabeza…, o de hacer mucho pues ya sabes cómo se hace. No te hace falta andar poniendo: pues aquí hay que hacer no sé qué, aquí para acá, sacando flechas por todos los sitios.
15. E14: Tampoco es tanto.
16. Inv.: A ver, E7, tú también levantabas antes la mano.
17. E7: Yo sí pongo muchas flechas de ¡ojo! por ahí, me lío más. Yo prefiero poner lo que pone en la pizarra y alguna nota importante, pero poco más. (*En este momento, varios alumnos abren sus cuadernos de matemáticas*).
18. E20: Que E3 es porque tendrá mucha memoria, pero si yo llego a un ejercicio y no sé…, no me acuerdo de lo que dijo, si lo tengo apuntado digo, ¡ah, vale! (*Mientras habla, su compañera de pupitre E14 asiente con la cabeza*).
19. E1: Hay cosas que bueno, sí, merece la pena apuntarlas porque son cosas muy…, importantes. Pero si lo hacemos para todos, y ponemos todos los paso, paso, paso, paso, paso… No hace falta tomar notas, porque es tan… (*hace un gesto, abriendo los brazos*).
20. E20: Sí, vamos haciendo… 1. Ahora simplificamos, 2. Ahora sacamos esto de aquí… ¿No, eh? (*comentario en un tono muy serio, sus compañeras de perfil se ríen por el tono utilizado*).
21. E21: Duro, duro… (*Tras este comentario se monta un pequeño revuelo, hablando todos a la vez. Como moderador corto el revuelo y doy la palabra a E14, que quería intervenir*).
22. E14: Es que algunos se piensan que no tenemos cabeza (*se señala la cabeza con el dedo*) y que apuntamos todo lo que hace. No, son cosas puntuales. Si ves que no te puedes acordar, vas y lo apuntas. Como el ejemplo que ha dicho E5, lo de simplificar, que siempre lo haces al revés. Pues llegas, lo coges, lo apuntas y ya está. Y ya no haces más.
23. E20: Pero no podemos todo lo que hace.
24. E14: ¡A ver!
25. E12: Pues sí, que pequeñas notas son necesarias siempre, pero no… O sea, no como dice E1, de no poner ninguna o poner… Está como todo, en su justa medida.
26. E1: Yo no he dicho eso.
27. E12: Bueno, E3, o quien lo haya dicho, quien sea.
28. Inv.: (Al ver que todos se callaban) Entonces, ¿cuál es la reflexión final que podríamos hacer?
29. E17: Pues que cada uno a lo suyo y ya está. Uno las puede tomar como un superdotado y otro como un tonto. Cada uno que lo haga como quiera y ya está.

30. E12: Y tú eres un superdotado, ¿no?

31. Inv.: ¿Alguien quiere decir algo más?

32. E3: Yo quiero hacer una pregunta. ¿Qué tiene que ver mi cuaderno con el de E9? (*los dos alumnos han sido asignados en el perfil P23*).

33. E12: Yo también. ¿Cómo les has dividido? (*leísmo*).

34. E3: Porque el cuaderno de E9 es…, el contrario al mío. Totalmente. De toda la vida. El mío está todo en sucio, él tiene todo ahí lleno de apuntes…

35. Inv.: Es que a lo mejor no me he fijado en eso. El cuaderno no sólo se basa en la presentación, si escribe muy bonito o qué mal escribe.

36. E3: Yo tengo una cuenta por ahí, otra por ahí…, tachones. E9 siempre tiene ahí apuntes y cosas… Yo veo que no tienen mucho que ver.

37. Inv.: Pues yo creo que sí. En algo os habéis parecido. También es cierto que no sabía muy bien dónde meteros y os he metido ahí… Pero bueno. Luego si queréis os lo explico, ¿vale? Que son grupos que he hecho yo porque he considerado ciertas cosas, pero puede venir otro y poneros de otra manera. (*Luego, desafortunadamente, no me dio tiempo a explicarles las claves que había considerado para la división por perfiles efectuada, lo cual fue un error derivado de la falta de tiempo al final del debate*).

38. Inv.: (*Reengancho con la siguiente pregunta que tenía pensada para el debate en este bloque*) Dentro de los que toman notas, he observado dos maneras de hacerlo. Una manera discreta (alumnos E5 y E10) y otra destacando dichas notas por encima del texto (alumnas E6 y E14). Explicad por qué lo hacéis así.

39. E14: Porque… Para que te llame la atención.

40. Inv.: Vamos a ir por orden. E5, ¿Por qué tomas las notas en pequeñito, para que no destaquen en general en lo que es el resto de la hoja?

41. E5: Porque…, cuando hagas ejercicios sepas qué es lo que tienes que hacer, pero que no sea lo primero, que no sea lo primero que te resalte.

42. Inv.: No está E10, la otra persona que tomaba notas también de esta forma… Si vosotros (dirigiéndome al resto de la clase) tomarais notas, ¿las tomaríais como las toma E5?

43. E13: Sí.

44. E16: No. Yo las tomaría como E14 y como…

45. E3: Yo sí que las tomaría como E5. Sí, pues, para qué vas a estar ahí poniendo… Porque al final acaba pareciendo el cuaderno un cuaderno de plástica, con un ¡ojo! ahí resaltado y recuadrado.

46. E14: No, pero vamos a ver, ¡es que todo lo lleva al extremo! Tú pones ojo o algo con un rotulador para que te llame la atención, porque al final si lo pones muy pequeño yo, por lo menos, no me aclaro. Ni lo veo y…, paso de ello.

47. E6: Ya que vas a tomar notas, pues las tomas bien grande, pues es algo que así puedes ver más fácilmente. Si las vas a tomar en pequeño… Pues para eso no lo hagas.
48. E14: Es que E3 quiere llevarlo todo al extremo. No tengo un cuaderno de colores.
49. Inv.: ¿Alguien más lo haría como E14 y como E6? E16, tú has dicho antes que tú sí que lo harías así.
50. E16: Yo sí, porque si lo pongo pequeño… Pues eso, lo que dice ella, luego al pasar las hojas ni lo ves, o si lo has apuntado porque lo consideras importante pues…, si lo subrayas o algo pues lo ves mejor. (*Mientras habla, E19 asiente con la cabeza*).
51. E7: Yo si tuviera ganas de copiar las notas también lo haría así. (*sus compañeros se ríen*).
52. Inv.: Has dicho "si tuviera ganas"…
53. E7: Es que, estar a las nueve de la mañana tomando notitas… De lo de la pizarra, pienso otra cosa, estoy a mi bola y copio. ¡Es que es un cacao!
54. E16: Lo de la pizarra… Siempre habrá tiempo de copiarlo (*algunos compañeros como E17, E19 y E21 se ríen ante su comentario).*
55. Inv.: Y los demás, ¿cómo lo haríais?
56. E18: Yo también lo haría como E14 y E6.
57. E12: Yo lo haría como E5. Y como E3.
58. E19: Yo como E14 y E6.
59. E18: Como E14.
60. E17: Yo no lo sé cómo lo haría. (*Risas*). El día que me ponga a tomar notas, pues ya veré cómo lo hago, pero ahora… Ponerme a pensar… Si lo haría grande, si lo haría pequeño... Eso el día que surja.
61. E1: Yo siempre, cuando tomo alguna nota, la tomo bien grande, para que se vea. Pero tampoco recuadrado… Normal.

Cuaderno de matemáticas y clases particulares

1. Inv.: ¿Quiénes de los que estáis aquí vais a clases particulares de matemáticas? (*Al hacer la pregunta, levantan la mano E3, E4, E7, E12, E13, E16, E17, E19, E21 y E22*). ¿Usáis el cuaderno de matemáticas en esas clases particulares?
2. E7: Como un cuaderno de…, normal. Yo hago los ejercicios que hago en clases aquí, en el cuaderno.
3. Inv.: ¿Alguien más hace lo mismo? Los ejercicios que hacéis en clases particulares, ¿los hacéis en el propio cuaderno?
4. E13: Sí.
5. E19: No.
6. E17: Yo sí. Yo en el mismo cuaderno los hago. Porque tres cuadernos para… Si te cabe todo en uno pues lo haces todo en uno. Está en el coste, nada más.
7. E12: Yo igual. Igual que yo. O sea, sí, eso, sí, que me he liado.
8. Inv.: ¿Hay alguien que lo haga fuera? Los que utilizáis otro cuaderno aparte, ¿por qué lo hacéis?
9. E4: Yo.
10. E16: Sí, yo sí.
11. Inv.: ¿Dónde lo haces?
12. E16: Pues… O en hojas sueltas o en otro cuaderno.
13. Inv.: ¿No usas el cuaderno de matemáticas de clase en clases particulares?
14. E16: No… El de clase, pues le uso para… Pues eso, si hago algún ejercicio y si tengo la solución, pues para mirarla o los apuntes estos que nos da el profesor, para mirarles. Pero lo hago en otro cuaderno.
15. E3: Yo hago como E16. Yo…, uso el cuaderno de CMC (*se refiere a la asignatura "Ciencias para el Mundo Contemporáneo"*) en clases. (*Sus compañeros se ríen*). ¡Porque no pone nada!

Teoría en el cuaderno de matemáticas

1. Inv.: (*Presento el siguiente bloque del debate*). Abrid los cuadernos. Durante estos días que hemos estado dando funciones ha habido un momento en el que vuestro profesor os mandó apuntar las definiciones de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva, e hizo algunos ejemplos en la pizarra.
2. Inv.: Varios de vosotros no lo tenéis escrito en el cuaderno.
3. E6: Yo lo tengo escrito en las fotocopias.
4. Inv.: Eso es lo que os quería preguntar. ¿Alguien más hizo lo mismo? Quienes no lo tenéis en el cuaderno, ¿dónde lo escribisteis?
5. E6: En las fotocopias (*el alumno E4 levanta la mano, queriendo indicar que en su caso también actuó así*).
6. E14: Yo es que lo tenía… Lo tenía apuntado en otro sitio. Porque lo tenía en unas fotocopias. (*El caso de esta alumna y de su compañera E20 es especial, puesto que el profesor les mandó que buscaran en Internet estas definiciones, y dio en la clase las definiciones que estas alumnas encontraron*).
7. Inv.: ¿Alguien más lo tiene apuntado en las fotocopias?
8. E12: Yo…, en los dos sitios.
9. Inv.: (*Aprovechando que la alumna E12 planteaba esta situación*) ¿Consideráis una pérdida de tiempo el hecho de tenerlo apuntado en los dos sitios?
10. E14: Yo también lo tengo así mejor.
11. E17: Es una pérdida de tiempo. Porque para tenerlo copiado en dos cuadernos distintos… Lo copias en uno y lo que tengas en un lado pues va a ser así. No tienes ni que apuntarlo en dos…, para tenerlo dos veces porque… (*se encoge de hombros, sin entender la decisión de apuntarlo dos veces*)
12. E16: Yo también opino lo mismo. Es una pérdida de tiempo.
13. Inv.: ¿Alguien cree que no es una pérdida de tiempo?
14. E12: A ver… Yo lo copié, cuando lo dictó, en el cuaderno. Y luego ya, como los apuntes y todo eso lo tengo en las hojas, pues lo pasé a las hojas.
15. E14: Yo también lo copié en los dos sitios, pero porque lo tenía en las fotocopias… Y lo copié aquí mientras el profesor lo dictaba.
16. Inv.: ¿Por qué tomáis nota de estos apuntes de teoría en el cuaderno o en los propios apuntes fotocopiados del profesor?
17. E6: En las fotocopias…, no sé…, porque venía ahí…, todo lo relacionado y por eso lo apunté ahí.
18. E14: Yo lo tenía en las fotocopias…, y en el cuaderno.
19. Inv.: ¿Alguien más quiere decir por qué?

20. E12: Pues porque así tienes todo, como ha dicho E6, todo lo relacionado ahí y entonces ves las cuadráticas o lo que sea y luego ves las funciones…, suprayectivas y todo eso…, junto.
21. Inv.: Los que tomasteis nota de ello en el cuaderno, ¿por qué lo hicisteis en el cuaderno?
22. E16: Porque es…, en el primer sitio donde estaba. Y lo mandaron.
23. E3: Dijo ¡copiar! Pues hala. (*señalando su cuaderno*)
24. E17: Dijo copiar. Copiar…, notas…, pues en el cuaderno.
25. E5: Yo porque lo tengo todo en el cuaderno. O sea lo de las fotocopias y ahí yo lo tengo todo en el cuaderno y ya está.
26. Inv.: ¿Y dónde creéis que es más adecuado? ¿Tomar nota de ello en las fotocopias o tomar nota en el cuaderno?
27. E16: Donde creas tú…, apropiado.
28. E17: Depende de cada persona.
29. E14: Y donde te acuerdes en ese momento.
30. Inv.: Y a vosotros, ¿dónde os parece más apropiado? ¿Lo que habéis hecho es lo que haríais en una situación general?
31. Coro: Sí.
32. E17: En el cuaderno siempre. Cuaderno, porque si no escribo muy torcido… En el cuaderno por lo menos está cuadriculado y escribes bien.
33. Inv.: Me ha sorprendido que muchos de vosotros tomarais nota de las definiciones pero no tomarais nota de los ejemplos que puso el profesor, con unos diagramas que escribió en la pizarra y un ejemplo donde la función sí era inyectiva, otro donde no lo era. Y lo mismo para función suprayectiva. Me gustaría preguntaros si le veis utilidad o no a los ejemplos.
34. E17: El ejemplo no sirve para nada (*risas entre sus compañeros*).
35. Inv.: ¿Alguien más opina lo mismos? E16, creo que tú no los escribiste…
36. E16: No, no, yo no puse nada. Yo eso no lo puse. Porque lo entendía bien y no me hacía falta… No me hacía falta apuntarlo.
37. E21: Yo sí que lo tengo… Yo sí que lo tengo eso.
38. Inv.: (*Recordaba que este alumno E21, en caso de haberlo tomado, no lo había hecho de forma completa*) ¿Tienes esto? ¿Seguro?
39. E21: (*Tras un rato buscando en su cuaderno*) Esto dices, ¿no? (*Me enseña su cuaderno*)
40. Inv.: ¡Pero tomaste sólo uno! (*este alumno tomó el ejemplo de función inyectiva, pero no el ejemplo de función suprayectiva ni ninguno de los dos contraejemplos*) ¿Y los demás? (*este alumno se queda buscando en su cuaderno, por si, de casualidad, los encontrara*).

41. Inv.: ¿Alguien más opina que los ejemplos no aportan nada?
42. E7: Yo es que no lo entendí de todas formas…
43. Inv.: ¿Y después de los ejemplos?
44. E7: No, no lo entendía.
45. E5: Hombre, yo creo que aunque sea para aclarar un poco ayudan.
46. Inv.: ¿A alguien le sirvieron para aclarar el concepto?
47. E5: Sí.
48. E14: Sí.
49. Inv.: Además, me he fijado que algunos de vosotros habéis pintado el ejemplo donde sí, pero luego el contraejemplo donde no lo era no lo habéis copiado. ¿Consideráis que el contraejemplo vale menos que el ejemplo?
50. E17: No… Si sabes cómo es que sí, pues sabes cómo es que no. No hace falta que lo copies. Si sabes cómo es pues sabes también cómo no es.
51. Inv.: ¿Estáis de acuerdo con lo que dice E17?
52. E16: Sí. Sí, si sabes cómo es…
53. E14: Depende del ejemplo, depende del ejercicio y depende de todo (*Tras esta intervención, todos se callan*).

Otros temas

1. Inv.: (*Presento el siguiente bloque del debate, en el que se tratarán algunas cuestiones variadas*). Vamos a empezar con una serie de temas más particulares. Empiezo con los alumnos E1 y E17 (*los alumnos del perfil P22*). Me ha parecido que en vuestro cuaderno no copiabais los ejercicios tal cual se hacían en la pizarra, sino que ibais intentando los ejercicios a medida que se iban haciendo en la clase. ¿Es esto cierto?
2. E1: Sí. (*Mientras estaba introduciendo la situación, este alumno ya estaba asintiendo continuamente con su cabeza*).
3. Inv.: E1, tú dices que sí. ¿E17?
4. E17: Sí. Yo también.
5. Inv.: ¿Creéis que esto es bueno?
6. E12: Sí, yo también lo hago a veces.
7. E7: Yo es que tardo mucho… (*Risas*).
8. E12: Intentas hacerlo por tu cuenta si lo sabes hacer; y luego, mientras lo van haciendo pues…, lo refuerzas. O si lo explica de otras maneras, pues lo pones también.
9. Inv.: ¿Alguien más que lo haga?
10. E14: Yo lo he hecho. Pero sólo si no lo entiendo muy bien.
11. Inv.: ¿Creéis que es mejor hacer lo que hacen vuestros compañeros o tomar nota de los ejercicios que se hacen?
12. E1: Es que… Para hacer los ejercicios que se hacen en clase… Se pueden hacer de muchas maneras distintas, y lo que hay que hacer es encontrar la que mejor se te da a ti.
13. E17: Sí, es lo que ha pasado. Las cosas siempre se pueden hacer de muchas maneras. Tú lo que tienes que hacer no es lo que ponga en la pizarra sino lo que has pensado.
14. Inv.: Entonces, ¿qué creéis que es mejor?
15. E12: Pues intentar los ejercicios por tu cuenta.
16. E17: Puedes hacerlo…, pues como te salga. Si te sale mejor copiándolo pues los vas a copiar y si no, pues lo haces tú solo y ya está.
17. Inv.: ¿Y creéis que eso puede influir a la hora de cómo queden los ejercicios reflejados en el cuaderno?
18. E1: Sí.
19. E3: Sí.
20. E17: Sí.
21. Inv.: ¿Cómo influye?

22. E17: Pues si lo haces tú sólo y te equivocas pues…, lo tachas tú. Pero si vas copiando y ves que se ha equivocado, pues…, antes de que lo copies pues ya…, ya lo tiene hecho. No tienes que tacharlo.
23. Inv.: ¿Algo más? ¿Creéis que el ejercicio puede quedar igual de explicado si lo hacéis por vuestra cuenta que si lo copiáis de la pizarra?
24. E1: Sí.
25. E21: Quedará mejor si lo copias de la pizarra. Luego ya lo pasas tú aparte, yo creo. Que ya él… El que te lo hace te lo intenta explicar para que entiendas cómo se hace y eso.
26. E12: Mmm… Pero puede que, a lo mejor, tú lo entiendas mejor si lo haces por tu cuenta.
27. E1: ¡Claro!
28. E12: Todo… O sea, depende, a lo mejor lo explica mejor el profesor o a lo mejor lo explicas tú mejor, haciéndolo por tu cuenta, con tu método y… Que sabes lo que haces, cómo simplificas y cómo…, todo. (*En este momento, todos se callan*).
29. Inv.: (*Paso a otro tema*) Imaginaos que un día faltáis a clase. ¿Creéis necesario copiar del cuaderno de un compañero lo que se haya hecho ese día en la clase?
30. E14: Hombre, sí.
31. E5: Sí.
32. E20: Sí.
33. Inv.: ¿Quiénes decís que sí? Levantad la mano. (*Tras esto, las cuatro chicas del perfil P24, junto con los alumnos E7 y E12 opinan que sí; mientras que E3, E16 y E21 opinan que depende, y el alumno E17 dice que no*). Los que decís que sí, ¿por qué lo creéis necesario?
34. E14: Porque te pierdes la explicación y si te has perdido toda la explicación luego cuando te pongas a estudiar no te vas a enterar de nada. Sin embargo, lo pides, lo copias y ya lo tienes ahí.
35. E12: Sí, y si luego no lo entiendes pues vas al compañero y le dices si..., si le importa explicártelo. (*Tras esto, ningún estudiante que defendía el sí quiso aportar más argumentos*).
36. Inv.: Los que decís que depende.
37. E16: Pues depende de lo que haya dado. Si es algo nuevo…, pues sí, se lo tienes que pedir porque…, no te vas a quedar sin ello. Pero, yo que sé, si está haciendo ejercicios de repaso… O cualquier historia de esas, pues la puedes hacer tú en casa tranquilamente. (*El alumno E3 asentía con la cabeza al oír a su compañero, e imitaba sus gestos*).

38. E15: Preguntas lo que sea de eso y… Si te merece la pena, lo copias; y si no, pues no.

39. Inv.: E17, tú decías que no…

40. E17: Pues, yo es que prefiero pues…, pues… (*E3 sigue imitando los gestos, ahora de E17*).

41. E3: (*Al ver que su compañero no acertaba a comenzar su argumento*) No sé. (*Risas*).

42. E17: Si te dicen pues…, hoy hemos hecho esto, pues lo miras tú en el libro cómo se hace y primero lo intentas hacer tú. Y si no, pues ya preguntas… Y que te lo dejen.

43. Inv.: (*Paso a otro tema*) Un compañero vuestro, E10, que hoy no está, separa completamente los temas en su cuaderno. Por ejemplo, "Números complejos", y aparece todo lo de números complejos, sin importar el día en que se haga. Y a continuación, "Tema de funciones", y escribe todo lo de funciones, sin importar el día en que se haga. Hay otros que lo hacéis por orden cronológico, de acuerdo con la fecha en que se haya hecho. ¿Qué manera de hacerlo creéis que es mejor?

44. E17: La propia de cada uno.

45. E16: Quizá por temas.

46. E12: Depende… Sí, por temas, pero es que es mucho…, es mucho lío porque si pones por ejemplo funciones, y dejas por ejemplo dos páginas y luego te pones con… O al revés, pones números complejos luego te pones con funciones y luego resulta que en funciones te sobra media hoja, pues queda esa media hoja que tienes… Eso lo puedes llenar, pero imagínate que te falta una hoja para llenar para números complejos, ¿qué haces? Lo pones al final, y luego te crees que lo tienes al principio y… Es mucho lío. Es mucho de si lo tienes totalmente cuadrado, pero si no lo tienes cuadrado…

47. Inv.: Entonces, ¿opináis que es bueno hacerlo así, o no os parece necesario? ¿O es demasiado trabajo hacerlo?

48. E5: Es mejor por temas pero es más difícil…, hacerlo bien. Entonces por orden cronológico lo haces… Y ya está. Luego ya lo miras tú.

49. Inv.: ¿Estáis de acuerdo con lo que dice E5?

50. E12: Sí. (*Además, el resto de alumnas que compartían perfil con E5 –E6, E14 y E20-, asienten con la cabeza*).

51. E1: Si no tienes cuaderno… Si por folios lo vas haciendo, pues mejor tenerlo por temas.

52. (*Como veo que todos se callan, paso a otro tema*) ¿Es necesario siempre copiar el enunciado del ejercicio que se va a resolver?

53. Coro: Sí (*una mayoría de alumnos contestan sí al oír la pregunta*).

54. E17: Nunca, nunca.

55. E14: Sí, si hay enunciado sí. Porque a la hora de…, de hacer los ejercicios para ponerte a estudiar dices, ¿de dónde ha sacado este ejercicio? Sin embargo lo copias, lees el enunciado y ya sabes cómo…, hacerlo.

56. Inv.: ¿Quiénes opinan como E14? (*E20 levanta la mano*). ¿Hay alguien que opine diferente?

57. E16: Depende.

58. E3: Yo creo que nunca.

59. E17: Nunca.

60. Inv.: ¿Por qué nunca se debe copiar el enunciado?

61. E3: A ver... Empieza…, yo qué sé, en física, "Tenemos un cañón que..." Pues no, tenemos un chisme y un chisme vuela, ya está, ¡para qué te vas a complicar!

62. E17: Ni siquiera un chisme que vuela sino… Lo importante es apuntar los datos. Te da igual que sea Pepito, que Juanito, que… Jorgito. Lo importante es apuntar los datos.

63. E3: Peso: no sé qué, velocidad: no sé qué… Y ya está.

64. Inv.: ¿Hay alguien que esté de acuerdo con la postura de E3 y E17?

65. E1: Pero… Es que así estás copiando el enunciado. Lo que pasa es que lo estás copiando…

66. E3: Los datos.

67. E17: Estás copiando los datos. Lo que pasa es que te ponen un enunciado de "Pepito tira un proyectil" o yo qué sé.

68. E12: El cociente de no sé pues tienes que… O sea te da… Tienes que hacerlo tú, o sea por ejemplo, si te dice "hállame los números seguidos…" o alguna cosa de ese tipo pues tienes que sacarlo tú por ti mismo, con lo cual te tienen que dar un enunciado. No tienen que darte la fórmula porque se supone que la fórmula para hallarlo tienes que hallarla…, tienes que tenerla…, tienes que…, hacerlas tú, vamos.

69. Inv.: Yo me refiero por ejemplo a…, estáis haciendo un ejercicio del libro y le vais hacer en el cuaderno. ¿Copiaríais el enunciado en ese caso?

70. E16: No.

71. E3: No.

72. E17: No.

73. E12: Si es del cuader… Si es del libro, no. Pones el número, la hoja y ya está.

74. E14: Yo sí. Yo lo copiaría.

75. E1: Vamos a ver. Yo veo un ejercicio que tiene un enunciado así (*indicando con gestos que es muy extenso*) y no lo copias, pero lo mismo copias "hallar el lado de este triángulo" y copias el triángulo. Tienes que hallar esto y tienes esto y esto.
76. E14: Ya, eso lo puedes hacer, pero…
77. E17: Dibujas el triángulo y pones x. Y ya sabes qué es lo que tienes que hallar.
78. E3: Pones lado y pones la longitud, y ya está.
79. Inv.: ¿Estáis de acuerdo?
80. E14: Yo lo copiaría.
81. E5: Yo del libro siempre pongo "Página la que sea y ejercicio el que sea".
82. E6: Yo también.
83. Inv.: ¿Y crees que es mejor hacerlo así o crees que es mejor copiar el enunciado?
84. E5: Yo es que como estudio con el libro pues… Como le tengo al lado lo puedo mirar.
85. E14: Yo no opino como E5. Yo necesito copiarlo porque yo el libro casi no le uso. Yo solo… Yo tengo todo en el cuaderno. Y a la hora de estudiar, pues, lo estudio por ahí. No tengo que estar mirando todo.

Preguntas más individualizadas (sobre aspectos extraños, o errores)

1. Inv.: (*Presento la primera cuestión perteneciente a este bloque del debate*). Os quiero preguntar sobre algunas cosas que he echado en falta en algunos cuadernos. Algunas cosas que se hacían en clase y no tenéis apuntadas. Intentad hacer un esfuerzo de memoria, si os acordáis, para saber por qué no lo apuntasteis en su momento.
2. Inv.: Por ejemplo, E5, los ejercicios que se hicieron en clase sobre dominios de funciones el 22 de Abril tú no los tienes, ¿te acuerdas de por qué?
3. E5: (*Sonriendo*) Ni idea. No me acuerdo.
4. Inv.: Hay más gente que no los tiene, como E10, que no ha venido hoy. E3, a ti también te faltan algunos. ¿Te acuerdas de por qué?
5. E3: No sé…, por vagancia (*riéndose*). O bueno, es que, por ejemplo, a lo mejor los domingos pues… En clases hice 35, y como ya sé de qué clase o de qué grupo es pues… Ni lo miro.
6. Inv.: E1, tú tampoco tienes los ejercicios estos de los que estamos hablando…
7. E1: Yo es que…, los de dominios…, es algo que no encontré…, yo siempre sabía que era eso, me lo habían explicado ya de cuarto y para una cosa que me sé…
8. E7: En cuarto, así que lo estudiaste en cuarto… (*Risas*)
9. Inv.: A ver, E12 y E17, os faltan los ejercicios que se hicieron de composición de funciones.
10. E12: Es que ese día yo no estuve.
11. Inv.: ¿Y E17?
12. E17: (*Tras encoger los hombros en un gesto de duda*) No sé, no estaría o… Si estaba, no estaba a lo que se estaba haciendo. Ni siquiera sé lo que estás diciendo. (*Tras esto, E3 le indica a qué ejercicios me refiero, pero no dice nada más*).
13. Inv.: Esta pregunta va para E15. He notado que, en el cuaderno, a veces copias los enunciados de los ejercicios que se hacen en clase, pero luego no copias la resolución. ¿Por qué lo haces?
14. E15: No sé. Porque yo que sé. Porque luego no me salen. Que no, que no hay razón.
15. Inv.: Bueno, alguna razón habrá. (*Este alumno se calla y no quiere añadir nada más. Como tengo una pregunta individual para él sobre un aspecto extraño, aprovecho para preguntárselo en este momento*). ¿Qué significa una línea que tienes en el cuaderno entre unos enunciados de límites, de los que copias el enunciado y no la resolución; de los siguientes, de los que sí copias

su resolución? (*esta raya horizontal puede observarse en la Figura II.1 del documento de tesis*).

16. E15: Porque… Como he dejado estos sin hacer pues…, para pasar a otro ejercicio pues… Tras, meto así una raya para no confundirme, ¿sabes?
17. Inv.: Me ha sorprendido que los ejercicios que tienes por encima no lo tengas resueltos y, justo a partir de la raya, sí que copias la resolución. ¿Tiene algún significado especial?
18. E15: No, no, no me doy cuenta.
19. Inv.: Así que no tiene un significado especial, sencillamente separa los ejercicios.
20. E15: Sí.
21. (*Paso a presentar otra cuestión*) He notado que tenéis muchos problemas con las cadenas de igualdades, por ejemplo en la resolución de un límite. El compañero vuestro que más me ha sorprendido es E9, que hoy no está, que en vez de iguales pone puntos y coma. No se pone punto y coma, se pone un igual. Muchos de vosotros, E1, E2, E3, E7, E14 y E16, a veces cambiáis los iguales por flechas. (*E7 y E14 se ríen*). ¿Por qué lo hacéis?
22. E1: Pues para diferenciar que…, que una igualdad es distinta a la otra. Que no sigue siendo esto es igual a esto y este trozo es igual… ¡No! Eso es esto, y de esto pasas a esto y de esto a esto otro.
23. Inv.: No, pero yo te estoy diciendo que lo haces a veces en cosas que son iguales. Tal igual a esto y en vez de un igual pones una flecha.
24. E1: No… Pero es un paso distinto. Es un paso distinto al resolver el ejercicio.
25. Inv.: Es un paso distinto, pero esto es igual a esto.
26. E1: Sí, bueno, pero es otro paso. Lo hago para diferenciar los pasos, las partes que voy haciendo del ejercicio.
27. Inv.: Cuando hay un salto importante en un ejercicio, aunque sean cosas iguales tú pones flecha.
28. E1: Sí. Bueno…
29. Inv.: Eso no se debería hacer. Se tiene que poner igual, y si quieres indicas que es un paso importante. ¿Alguien más hace lo que E1?
30. E14: Yo es que muchas veces no sé si es igual o es una cosa aparte... Voy con flechas y cuando sea el resultado pongo el igual y ya está.
31. E7: Yo es que pongo muchos iguales y bueno, de vez en cuando pongo alguna flecha. A ver…
32. Inv.: ¡Ya hay muchos iguales, ahora meto una flecha! (*a modo de chascarrillo*). Cuando son cosas que son iguales, que estamos transformando, como por ejemplo para el cálculo de límites, que vamos haciendo el proceso

que nos dice en la hoja para resolverlo, son todo cosas iguales así que tenemos que poner igual, igual, igual.

33. E14: Yo es que siempre que pongo igual, igual, igual al final termina siendo… Pongo una flecha o alguna cosa de esas.
34. Inv.: ¿Se terminan los iguales?
35. E14: No, que al final…, no es lo que era. No es lo que tenía que ser. Si pongo un igual, no es un igual.
36. Inv.: Y si pones una flecha, no es una flecha.
37. E14: (Sonríe) Pues eso, pongo flechas siempre y ya está.
38. Inv.: A ver, E3, tú también lo haces. Además, tú haces las flechas así (*las dibujo en la pizarra*), de una forma más original.
39. E3: No sé. De aquí paso a aquí, de aquí paso a aquí…
40. Inv.: Vale, de aquí pasas aquí, pero esto es igual a esto. Es importante que os acostumbréis a escribir los iguales en las cadenas de igualdades donde estamos transformando expresiones.
41. E1: Pero… Por ejemplo, muchas veces, cuando estás… Una función "equis más no sé qué igual a tres por no sé cuánto cuadrado" pues tienes un igual y luego pasas a otro que…, va a ser lo mismo, pero es la misma pareja.
42. Inv.: A ver, no sé si te he entendido. Tú te refieres a cuando tienes una ecuación por ejemplo, $x^2+1=17$, y nos piden que la resolvamos. En el proceso de resolución ahí sí que pones implica para pasar a un siguiente paso. Pero yo me refiero al cálculo de límites, al hacer la transformación de la función tenemos que ir poniendo siempre iguales. Cuando lo que vamos a escribir sigue siendo igual, tenemos que poner iguales. No os preocupéis, porque con el tiempo lo iréis cogiendo, pero tenéis que cogerlo bien.

En este momento se acabó la cinta de vídeo y hubo que cambiarla por otra, momento que aprovechamos para que los alumnos presentes rellenaran la escala EAEM. Tras esto y colocar una nueva cinta de vídeo, se reanudó el debate para las últimas cuestiones.

43. Inv.: Esta pregunta va dirigida a las alumnas E6 y E14. Al resolver un ejercicio donde había que componer dos funciones (*que escribo en la pizarra*), hacéis bien la composición, pero luego hacéis una cosa muy rara. En el caso de E6, elevas al cuadrado la función resultante. ¿Por qué haces eso? ¿Qué es lo que has hecho aquí?
44. E6: Quitar la raíz, supuestamente…
45. Inv.: ¿Y por qué quitas la raíz?
46. E6: No lo sé.
47. Inv.: ¿Creéis que tiene que quitar la raíz?

48. E16: Si quiere sí.

49. E17: Si quiere sí.

50. Inv.: ¿Aquí se puede elevar al cuadrado para quitar la raíz, creéis que sí se puede, que no se puede, que si queremos se hace y si no no…?

51. E1: No.

52. E12: No se puede.

53. Inv.: No se puede. La composición es la función que habías obtenido (*la señalo en la pizarra*). No podemos aquí elevar al cuadrado porque cambiamos la función. ¿La función y=x es igual que la función $y=x^2$? No, ¿verdad? Si elevamos al cuadrado cambia la función. Pues aquí (*señalo la función compuesta*) igual. No podemos elevar al cuadrado.

54. Inv.: (*Cambio a la otra alumna*) En el caso de E14, lo que haces es igualar la composición a cero. ¿Por qué lo haces?

55. E14: Para quitar la raíz.

56. Inv.: Para quitar la raíz… ¿Pero por qué lo igualas a cero?

57. E14: No sé.

58. Inv.: Si nos dicen "Componer dos funciones", esa es la composición y ya está el resultado. No podemos elevar al cuadrado porque cambiamos la función. No podemos igualar esto a cero porque la función es ésta. Si la igualamos a cero, eso ya no es una función. La función compuesta es ésta (*la señalo en la pizarra*).

59. Inv.: (*Cambio a otra cuestión*) Otra pregunta para vosotras, E6, E14 y E20. Muchas de las notas que tomáis en el cuaderno he visto que son iguales, escribís lo mismo. Notas de aclaración, notas de comentarios, de ayuda… Las tenéis prácticamente iguales. Quería saber si os copiáis las notas las unas de las otras o cómo lo hacéis para que, en muchos casos, las notas que tenéis sean iguales.

60. E14: Nosotras por ejemplo, a veces, si una…, si estamos copiando, yo que sé, un ejercicio y…, estamos más pendientes del ejercicio y luego dices, ¿qué ha dicho aquí? Pues llegas, lo preguntas y lo apuntas.

61. Inv.: ¿Soléis hacer siempre eso? ¿E6?

62. E6: También lo hago.

63. Inv.: ¿Hay alguna de vosotros que lleve la voz cantante, por así decirlo?

64. E6: No.

65. E14: No.

66. E20: No.

67. Inv.: ¿Cómo lo hacéis, entonces?

68. E6: Cada una a lo suyo.

69. E14: Luego, si no copias algo…
70. E6: Luego, si te falta algo se lo puedes preguntar por ejemplo a cualquiera de las dos (*señalando a sus dos compañeras, E14 y E20*).
71. E14: O algunas veces, que no hemos venido o algo, lo hemos…, pedido el cuaderno para ver si faltaba algo y lo hemos copiado.
72. Inv.: (*Paso a otra cuestión*) Esta pregunta va para E20. Hay un gráfico que tienes en el cuaderno, creo que en la parte de composición de funciones. Me gustaría que me explicaras qué quisiste reflejar con ese gráfico ¿Qué significa ese gráfico? ¿Sabrías decir lo que significa y por qué tomaste nota de él?
73. E20: Pues… No me acuerdo. A lo mejor es de lo de inyectiva y esto de las funciones, que cada valor de la x le corresponde uno de la y. (*No es eso, en él se pretende ilustrar la composición de dos funciones en un punto a partir de la representación gráfica de las dos funciones*)
74. Inv.: Con esto os quiero recalcar que, si tomáis un gráfico de la pizarra, explicad el gráfico. El día que lo tomáis os acordáis de lo que significa el gráfico pero, fijaros en lo que le ha ocurrido a E20. Dos semanas después… ¿Y este gráfico qué quiere decir? Con esto os quiero decir que expliquéis lo que significa el gráfico.
75. Inv.: Otra cosa para ti, E20. Quiero que me expliques esto, que he encontrado en tu cuaderno: “$e = \lim_{x \to Pepe} \left[1 + \frac{1}{Pepe}\right]^{Pepe}$” (*lo copio en la pizarra*).
76. E20: Sí. Eso lo escribió el profesor. Él así, lo pone…
77. Inv.: ¿Seguro que vuestro profesor escribió eso?
78. Coro: Sí (*toda la clase contesta que sí en un tono bastante alto, algunos entre risas*).
79. Inv.: ¿Seguro que escribió eso? Revisad el cuaderno…
80. E12: De fijo. Lo que pasa es que lo de Pepe ahí no tendría que estar. Lo del $x \to Pepe$ ahí no tendría que estar.
81. E14: Sí, porque lo tengo yo también.
82. E12: Lo escribió así, pero no es eso.
83. E14: Él pone lo de $Pepe \to \infty$.
84. E12: De fijo puso eso, porque yo me quedé con que Pepe de ahí no…
85. E14: Que sí, que sí, que puso eso.
86. Inv.: Pues yo sólo se lo he visto a E20…
87. E14: Que sí, que yo también lo tengo.
88. Inv.: Otros lo que tenéis es esto: "$e = \lim_{Pepe \to \infty} \left[1 + \frac{1}{Pepe}\right]^{Pepe}$" (*lo escribo en la pizarra*).

89. E16: Eso.
90. E14: Eso lo tengo yo.
91. Inv.: Esto sí (*señalando lo que acabo de escribir*). Pero lo de arriba no. ¿Qué es eso de que “x tienda a Pepe”? (*Risas*). ¿Dónde está Pepe?
92. Inv.: Una pregunta que os quiero hacer. ¿Realmente sabéis lo que el profesor quiere deciros cuando aquí pone Pepe?
93. E12: Sí. Que Pepe es cualquier cosa.
94. E16: Puede ser Pepe…, o Juan.
95. E12: Lo que sea.
96. E1: Pues que x puede ser x^2 +1, puede ser x^2 +1 partido dos, puede ser…
97. Inv.: ¿Todos lo tenéis claro? Cuando pone Pepe es porque aquí puede haber cualquier cosa que tienda a infinito. Lo último que os quiero comentar es que en algunos límites escribís “e=…” y a continuación seguís resolviendo el límite. Esto está mal. No podéis igualar la definición del número e con el límite que estáis resolviendo. La definición del número e iría aparte. Esto lo habéis puesto mucho, no lo pongáis.

En los últimos segundos, tanto su profesor de matemáticas como yo les agradecimos profundamente la colaboración que habían prestado para el desarrollo del trabajo, y que en una futura ocasión verían el DVD con la grabación, para ver cómo ha quedado.

ANEXO B

Anexos con información sobre el desarrollo de las clases (Capítulo III)

En este conjunto de anexos hemos recogido información detallada sobre el desarrollo de las clases de matemáticas en las cuatro aulas que han participado en esta investigación sobre los cuadernos de matemáticas. Esta información complementa la presentada en el apartado III.2 de la tesis doctoral.

En concreto, el Anexo B consta de cinco anexos específicos:

- El Anexo B.1 contiene el guion diseñado por el EI y que se proporcionó a los docentes para que recogieran la información más relevante de cada una de las clases desarrolladas. No obstante, este guion únicamente fue utilizado por la Docente 3, puesto que los otros docentes nos proporcionaron esa información en diarios personales.

- El Anexo B.2 contiene el desarrollo detallado de todas las clases del bloque de Análisis Matemático en el aula del Docente 1.

- El Anexo B.3 contiene el desarrollo detallado de todas las clases del bloque de Análisis Matemático en el aula del Docente 2.

- El Anexo B.4 contiene el desarrollo detallado de todas las clases del bloque de Análisis Matemático en el aula del Bachillerato Científico-Tecnológico de la Docente 3.

- El Anexo B.5 contiene el desarrollo detallado de todas las clases del bloque de Análisis Matemático en el aula del Bachillerato de Ciencias Sociales de la Docente 3.

ANEXO B.1

En este anexo incluimos el guion diseñado y elaborado por el EI y que tiene por objetivo que los docentes recojan la información más relevante de cada una de las clases desarrolladas en el bloque de Análisis Matemático. Como hemos comentado, la Docente 3 fue la única que hizo uso real de estos guiones, puesto que los otros dos docentes nos proporcionaron esa información relevante de cada clase en diarios personales, a partir de unas instrucciones básicas que les proporcionamos sobre cuál era la información que se constituía como información más relevante para nuestra investigación.

BREVE DESCRIPCIÓN DE LA CLASE DE MATEMÁTICAS

Curso, fecha y hora: ……………………………………………………………….

Indica aquí, ordenadas cronológicamente, los diferentes momentos que ha tenido la clase (exposición teórica, corrección de actividades, resolución de actividades en clase, otro tipo de situaciones…):

1. Exposición teórica *(rellenar esta parte en caso de que hubiera habido)*

Tema o conceptos explicados: ……………………………………………………..
………………………………………………………………………………………….

Tiempo de la clase dedicado a la exposición (aprox.): ………..

- La explicación de la clase se ha realizado:

☐ Siguiendo el libro de texto.

☐ Siguiendo unos apuntes elaborados por el profesor, que tienen los alumnos.

☐ Dictado o escritura en la pizarra de apuntes, para que los alumnos los tomen.

☐ Mediante exposición oral relativamente personal de aquello que considero más importante, con posible apoyo de la pizarra.

☐ Mediante explicación oral personal salpicada con el uso del libro de texto.

☐ Otro método. Explicar brevemente: ____________________________________
____

En caso de haberlo utilizado, explica brevemente cómo usas el libro de texto: ………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

En caso de dar apuntes, explica brevemente cómo los usas: ……………………
………………………………………………………………………………………....

- Uso de ejemplos durante la explicación:

☐ No he puesto ejemplos.

☐ Ejemplos tomados del libro y comentados oralmente de forma breve.

☐ Ejemplos tomados del libro y explicados de forma más detallada en la pizarra.

☐ Ejemplos personales, no tomados del libro, explicados (*elige una*): (a) De forma oral (b) Con ayuda de la pizarra (c) Utilizando otros medios

☐ Mezcla de ejemplos personales y tomados del libro, explicados (*elige una*): (a)De forma oral (b) Con ayuda de la pizarra (c) Utilizando otros medios

☐ Otra situación. Explicar brevemente: __________________________________
____

Si los hubiera en cada caso, indica los ejemplos tomados del libro (página) y brevemente los ejemplos personales:

- Uso de la pizarra en la exposición teórica:

☐ No he usado la pizarra a lo largo de la exposición teórica.

☐ Uso para escribir lo fundamental de la teoría (alguna definición, fórmula).

☐ Uso de la pizarra para hacer comprobaciones, justificaciones o demostraciones (si se marca esta opción, subrayar lo que se ha realizado).

☐ Escritura de gran parte de la teoría desarrollada en la pizarra.

☐ Otro uso. Explicar brevemente: ____
____

- En caso de que las haya habido, indica aquí el uso de otras herramientas durante la exposición (explicar brevemente):

2. Realización de ejercicios en clase por parte de los alumnos *(rellenar esta parte en caso de que hubiera habido)*

☐ Se ha propuesto algún ejercicio para su realización en el momento por parte de los alumnos en sus cuadernos y la corrección inmediatamente posterior del mismo.

☐ Se han propuesto ejercicios a los alumnos para que empezaran a realizarlos en clase, con la idea de que los completaran en casa como "deberes" y se corrigieran en días posteriores.

Ejercicios (<u>*marca una*</u>): (a) Tomados del libro (b) Propuestos por el profesor
En el caso (a), indica aquí el número del ejercicio y página, en el caso (b) sintetiza su enunciado o referencia del mismo:

En el caso de que se hayan corregido los ejercicios planteados en la misma sesión, la corrección se ha realizado de la siguiente manera:

☐ Corrección oral por parte del profesor.

☐ Corrección oral por parte de un alumno. ¿Quién? _________________

☐ Corrección oral entre profesor y alumnos.

☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el profesor.

☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) por un alumno. ¿Quién? _______________ ¿Lo copia de su cuaderno? Sí / No.

☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) entre profesor y alumnos.

☐ Otro modo. Explicar brevemente: ______________________________________

¿Has mandado a lo largo de la clase "deberes" para días posteriores? Sí / No. En caso afirmativo, indicar qué tareas: ……………………………………………… …………………………………………..…………………………………………..

3. Corrección de actividades pendientes de días anteriores *(rellenar en el caso de que hubiera habido)*

Rellena uno de los apartados que aparecen a continuación por cada uno de los ejercicios pendientes que se corrigieron en clase (todos los apartados son iguales).

Primer ejercicio corregido: *(a) Extraído del libro, pág. ____, número _____*
(b) Propuesto por el profesor. En este caso, síntesis de enunciado o referencia del mismo: ……………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………….

La corrección se ha realizado de la siguiente manera:

- ☐ Corrección oral por parte del profesor.
- ☐ Corrección oral por parte de un alumno. ¿Quién? _________________
- ☐ Corrección oral entre profesor y alumnos.
- ☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el profesor.
- ☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) por un alumno. ¿Quién? ________________ ¿Lo copia de su cuaderno? Sí / No.
- ☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) entre profesor y alumnos.
- ☐ Otro modo. Explicar brevemente: ______________________________________

¿Alguna incidencia destacable en el proceso de corrección?

Segundo ejercicio corregido: *(a) Extraído del libro, pág. ____, número _____*
(b) Propuesto por el profesor. En este caso, síntesis de enunciado o referencia del mismo: ……………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………….

La corrección se ha realizado de la siguiente manera:

- ☐ Corrección oral por parte del profesor.
- ☐ Corrección oral por parte de un alumno. ¿Quién? _________________
- ☐ Corrección oral entre profesor y alumnos.
- ☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el profesor.
- ☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) por un alumno. ¿Quién? ________________ ¿Lo copia de su cuaderno? Sí / No.
- ☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) entre profesor y alumnos.
- ☐ Otro modo. Explicar brevemente: ______________________________________

¿Alguna incidencia destacable en el proceso de corrección?

Tercer ejercicio corregido: *(a) Extraído del libro, pág. ____, número _____*
(b) Propuesto por el profesor. En este caso, síntesis de enunciado o referencia del mismo: …………………………………………………………………………….
…………………………………………………………………………………………….

La corrección se ha realizado de la siguiente manera:

☐ Corrección oral por parte del profesor.

☐ Corrección oral por parte de un alumno. ¿Quién? _________________

☐ Corrección oral entre profesor y alumnos.

☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el profesor.

☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) por un alumno. ¿Quién? _______________ ¿Lo copia de su cuaderno? Sí / No.

☐ Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) entre profesor y alumnos.

☐ Otro modo. Explicar brevemente: ______________________________________

¿Alguna incidencia destacable en el proceso de corrección?

Si se hubieran corregido más de tres ejercicios, indica aquí para los restantes la información fundamental, al estilo de los ejercicios anteriores:

4. Otros datos de interés.
Alguna otra situación que se haya producido durante la clase y quieras aquí indicar por considerarla relevante:

¿Están todos los alumnos? Sí / No. En caso negativo, ¿quién falta? ……………
…………………………………………………………………………………………….

Comportamiento general del alumnado en clase este día:

MUCHÍSIMAS GRACIAS POR TU COLABORACIÓN.

ANEXO B.2

En este anexo incluimos información detallada sobre el desarrollo de la docencia en el bloque de Análisis Matemático en el aula del Docente 1. En el caso de este docente, en una clase de 1º de Bachillerato de la modalidad Científico-Tecnológica, el profesor ha elaborado un diario en el que ha recogido brevemente los aspectos del desarrollo de las clases que le comunicamos como aspectos de mayor interés para nuestra investigación.

En esta clase se tratan tres temas dentro del bloque de Análisis Matemático: un primer tema sobre funciones, funciones elementales y operaciones con funciones; un segundo tema sobre el límite de una función y un tercer tema sobre la derivada de una función. El último tema es desarrollado de manera muy breve, en los últimos días del curso.

Presentaremos la información sobre cada una de las sesiones utilizando cuatro organizadores. El primero es la información proporcionada por el docente a través del diario personal que elabora. El segundo es la compleción de dicha información con otros aspectos de interés no recogidos por el docente e interpretados a través de los cuadernos de los alumnos o de conversaciones informales con el profesor.

El tercer organizador, denominado “Unidad Teórica”, sirve para indicar los diferentes contenidos teóricos tratados en la sesión correspondiente. Después del nombre se indicará el número de tema al que corresponde el contenido (UT1, UT2 o UT3). Se presentan utilizando la distinción en cuatro tipos de contenidos que se ha utilizado al analizar las unidades teóricas de los cuadernos (subapartado IV.3.1 de la tesis doctoral).

- Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones.
- Ejemplos.
- Dibujos, esquemas y gráficos.
- Observaciones o comentarios de interés.

Dentro de cada tipo de contenido, existe una numeración correlativa según su orden de exposición dentro de la unidad del tema correspondiente. Además, aquellos elementos que consideramos que el docente ha considerado como “prioritarios” o como más importantes dentro del tema, se han marcado escribiendo “(Imp)” (abreviatura de importante) después del número y antes del enunciado verbal del elemento.

El cuarto organizador, denominado “Unidad Práctica”, sirve para indicar aspectos relacionados con la propuesta y la corrección de actividades en la sesión considerada. En este caso existe una peculiaridad: en el último de los tres temas no existieron aspectos prácticos por la premura temporal con la que se desarrolló su contenido, limitándose el docente a exponer los principios teóricos fundamentales sobre la derivada de una función (concepto, derivada de las funciones más usuales y reglas de derivación). Así, tendremos este organizador únicamente en los dos primeros temas (UP1 y UP2). Se distinguen tres aspectos, relacionados con las variables utilizadas en el análisis de los cuadernos:

- Mejoras significativas durante la corrección de actividades.
- Actividades propuestas y posteriormente corregidas.
- Actividades propuestas y no corregidas posteriormente.

Al igual que con los contenidos teóricos, las mejoras y los dos tipos de actividades son numerados correlativamente dentro de cada tipo, según el orden en que son desarrolladas o propuestas dentro de la unidad del tema correspondiente. No obstante, en el caso de este docente existen algunas diferencias con los otros dos, por lo que son necesarias dos aclaraciones.

Este docente fue el único que proporcionó a los alumnos una hoja de ejercicios para cada tema, ejercicios creados por el docente, junto con sus soluciones (resultados).

Así, en las actividades seguiremos distinguiendo entre si son extraídas directamente del libro de texto (AELT), reformuladas a partir de actividades del libro de texto (ARLT) o son creadas directamente por el docente (ACD), pero haremos referencia a las hojas de ejercicios cuando sean extraídas de dichas hojas.

Además, este docente se caracteriza por no proponer explícitamente actividades concretas, a modo de deberes, para la siguiente sesión. Rara vez realizó esa propuesta explícita. El docente espera que los estudiantes vayan intentando la resolución de las tareas propias de los contenidos, tareas que les ha proporcionado en la hoja o que pueden encontrar en el libro, y que pregunten sus dudas sobre las mismas en la primera parte de las sesiones. Así, hemos adoptado el siguiente convenio: las actividades que fueron corregidas en el aula (aunque no se propusieran de manera explícita) serán consideradas en nuestro análisis como “actividades propuestas y posteriormente corregidas”. Dichas actividades aparecerán en la sesión en que fueron corregidas (en el caso de que no fueran explícitamente planteadas).

A continuación se presenta la información de cada una de las sesiones correspondientes al desarrollo del bloque de Análisis Matemático, por parte del Docente 1, en la clase de 1º de Bachillerato Científico-Tecnológico en la que imparte docencia.

Martes 20 de marzo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

No disponemos del diario personal elaborado por el docente hasta la sesión del martes 29/3/2012.

Información adicional de interés:

La información sobre los contenidos de la clase que se presenta a continuación ha sido obtenida a través de la interpretación e inferencia de lo que hemos encontrado en los cuadernos de los alumnos, por lo que el contenido de estos días ha de tomarse con una mayor cautela.

El docente comienza el bloque sobre análisis matemático haciendo un breve listado y comentario de los temas que en él van a tratarse. Tres temas: funciones (características y funciones elementales), límites y derivadas.

Comienza el primero de los temas explicando qué es una función y algunos conceptos asociados, como dominio, recorrido, variable independiente y variable dependiente. Se explica la notación simbólica y se plantean varios ejemplos de funciones en situaciones físicas y matemáticas.

Se ilustra la gráfica de una función, destacando un valor del dominio y su imagen. Se definen los conceptos de imagen y antecedente (o antiimagen).

Unidad teórica (UT1):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado “Observaciones o comentarios de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. (Imp) Definición de función.
2. (Imp) Definición de dominio de una función.
3. (Imp) Definición de recorrido de una función.
4. Concepto de variable dependiente e independiente.
5. Conceptos de antecedente e imagen.

Ejemplos:

1. Ejemplos de funciones que relacionan magnitudes físicas: velocidad y tiempo, tiempo y temperatura.
2. (Imp) Un ejemplo de función: lado del cuadrado y su área.

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. (Imp) Representación gráfica de una función, un punto en ella y sus coordenadas.

Unidad práctica (UP1):

En esta sesión no se planteó ni se corrigió ninguna actividad.

Jueves 22 de marzo de 2012 (Hora: 13:15 a 14:05)

Información transcrita del diario del docente:

No disponemos del diario personal elaborado por el docente hasta la sesión del martes 29/3/2012.

Información adicional de interés:

Según nos comenta el docente, se dedica esta clase a la resolución de dudas para el examen que está previsto en la siguiente clase, la del viernes 23/3/2012. El examen corresponde al bloque inmediatamente anterior al de análisis: geometría analítica en el plano.

Unidad teórica (UT1):

En esta sesión no se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta clase (relacionada con el bloque de Análisis Matemático).

Viernes 23 de marzo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

No disponemos del diario personal elaborado por el docente hasta la sesión del martes 29/3/2012.

Información adicional de interés:

En este día, como se acaba de comentar en el resumen de la clase anterior, se dedica toda la hora de clase a la realización del examen correspondiente al bloque de geometría analítica en el plano, bloque inmediatamente anterior al bloque de análisis.

Unidad teórica (UT1):

En esta sesión no se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta clase (relacionada con el bloque de Análisis Matemático).

Lunes 26 de marzo de 2012 (Hora: 8:15 a 9:05 h)

Información transcrita del diario del docente:

No disponemos del diario personal elaborado por el docente hasta la sesión del martes 29/3/2012.

Información adicional de interés:

La información sobre los contenidos de la clase que se presenta a continuación ha sido obtenida a través de la interpretación e inferencia de lo que hemos encontrado en los cuadernos de los alumnos, por lo que el contenido de estos días ha de tomarse con una mayor cautela. En esta clase se continúa con la presentación de la teoría sobre funciones y características de funciones.

Definición de dominio de una función.

Definición de algunos tipos de funciones usuales: funciones polinómicas o enteras (de forma verbal y simbólica), funciones fraccionarias (de forma verbal y simbólica) y funciones irracionales (de forma verbal). Se indica el dominio de las funciones de estos tipos y se presentan ejemplos de los diferentes tipos de funciones, calculándose también su dominio.

Realización de un cuadro donde se resumen y clasifican las tipos de funciones anteriores como diferentes tipos de funciones algebraicas (racionales: enteras y fraccionarias; e irracionales).

Funciones trascendentes: qué significa que una función sea trascendente. Ejemplos más usuales de funciones de este tipo: funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase existieron contenidos correspondientes únicamente a dos tipos: “Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones” y “Ejemplos”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

6. (Imp) Función polinómica o entera: definición y expresión general.
7. (Imp) Dominio de una función polinómica.
8. (Imp) Función fraccionaria: definición y expresión general.
9. (Imp) Domino de una función fraccionaria.
10. (Imp) Función irracional: definición.
11. (Imp) Dominio de una función irracional.
12. (Imp) Cuadro resumen de los diferentes tipos de funciones algebraicas (las vistas hasta ahora).
13. (Imp) Concepto de función trascendente.
14. (Imp) Tres tipos de funciones trascendentes: exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Ejemplos:

3. (Imp) Ejemplo de función polinómica o entera y cálculo de su dominio: $f(x)=x^2-4x+4$.
4. (Imp) Ejemplo 1 de función fraccionaria y cálculo de su dominio: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$.
5. (Imp) Ejemplo 1 de función irracional y cálculo de su dominio: $f(x) = \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$.
6. (Imp) Ejemplo 2 de función irracional y cálculo de su dominio: $f(x) = \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{2x^4-1}}$.
7. Ejemplo 3 de función irracional y cálculo de su dominio: $f(x) = x + \sqrt{x}$.
8. Ejemplo 4 de función irracional y cálculo de su dominio: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$.
9. (Imp) Ejemplo de funciones trascendentales usuales: $f(x)=2^x$, $f(x)=\log(x)$, $f(x)=\text{sen}(x)$.

Unidad práctica (UP1):

En esta sesión no se planteó ni se corrigió ninguna actividad.

Martes 27 de marzo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Este es el primer día que le comunico y solicito al docente que elabore un diario de clase con los aspectos más relevantes de lo sucedido en la clase cada día. Este día no lo elabora, puesto que asistimos a observar la clase.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase.

Asisten todos los alumnos a la clase.

El profesor comienza la clase entregando a sus alumnos unas hojas, denominadas “Funciones 1”, que contienen una colección de ejercicios sobre este primer tema del bloque de análisis.

Se recuerdan algunos de los tipos de funciones tratados en la clase del día anterior (a través de preguntas a los alumnos) y se hacen algunos ejemplos más de cálculo de dominios, dos de ellos a modo de ejercicio para los alumnos (dejándoles unos minutos para su resolución, y posterior corrección en la pizarra por parte del profesor). Durante esta parte, se recuerda la definición de logaritmo de un número y se introduce el límite de la sucesión (se anticipa una idea intuitiva de límite) que da lugar al número e.

Estudio del dominio y el recorrido de una función definida gráficamente y explicación de la notación utilizada en la hoja de ejercicios “Funciones 1” para identificar los puntos en que las funciones están o no definidas (uso de flechas en lugar de puntos “huecos”).

Concepto de monotonía de una función: función creciente y función decreciente (estrictamente o no). Función constante. Ejemplos gráficos.

La clase finaliza con la propuesta por parte del profesor, para que los vayan realizando los alumnos, del ejercicio 1 de la hoja “Funciones 1”, con 16 apartados, en el que se pide hallar el dominio de 16 funciones definidas de forma simbólica (algunos de estos apartados fueron corregidos, a petición de los alumnos, en las siguientes clases; otros no fueron corregidos en el aula). Este docente no tiene por costumbre mandar tareas específicas de un día para otro a sus alumnos, sino que les da libertad para que vayan intentando resolver ejercicios como tarea exterior a la clase, y suele preguntar, al inicio de cada clase, sobre la posible existencia de dudas o problemas en los ejercicios que hayan intentado, para que éstas sean resueltas grupalmente en el aula.

Se incluye al final de la información correspondiente a esta sesión los escaneos de las dos hojas de ejercicios que configuran "Funciones 1" (Figuras B.1 y B.2) junto con el solucionario de las mismas (Figura B.3), hojas que fueron proporcionadas por el Docente 1 a sus alumnos.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase existieron contenidos de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

15. Definición de logaritmo de un número y límite que da lugar al número e.
16. Estudio del dominio de una función a través de su representación gráfica.
17. Estudio del recorrido de una función a través de su representación gráfica.
18. Monotonía de una función: crecimiento y decrecimiento (estrictamente o no).
19. Concepto de función monótona.

Ejemplos:

10. Ejemplo 2 de cálculo del dominio de una función fraccionaria: $f(x) = \frac{x+1}{2x^2}$.
11. Ejemplo 5 de cálculo del dominio de una función irracional: $f(x) = \sqrt{x+1}$.
12. (Imp) Ejemplo de cálculo del dominio de una función: $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$.
13. (Imp) Ejemplo de obtención de dominio y recorrido de una función a partir de su representación gráfica.
14. (Imp) Ejemplo de obtención de la monotonía de una función a partir de su representación gráfica.

Dibujos, esquemas y gráficos:

2. (Imp) Gráfica que aclara la obtención del dominio y el recorrido de una función definida gráficamente.

3. Gráfica del ejemplo de cálculo de dominio y recorrido en una función definida gráficamente.
4. Gráfica de función monótona creciente.
5. Gráfica de función monótona decreciente.
6. Gráfica de función monótona constante.

Observaciones o comentarios de interés:

1. Contraposición del dominio de $f(x) = \sqrt{x+1}$ frente a la raíz cúbica de igual radicando.
2. La monotonía debe establecerse utilizando intervalos abiertos.
3. (Imp) Significado de las flechas en las funciones de los ejercicios representadas gráficamente.

Unidad práctica (UP1):

En esta clase sí que se propusieron explícitamente actividades, algunas de ellas fueron corregidas durante la propia sesión o en días posteriores, otras no. No hubo ninguna mejora significativa en los procesos de corrección.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

1. ACD: Calcula el dominio de $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-5x+6}$ (corregida durante la propia sesión).
2. ACD: Calcula el dominio de $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x-1}$ (corregida durante la propia sesión).
3. ACD: Hoja "Funciones 1", ej. 1, apartado c (cálculo del dominio de una función irracional, corregido en la sesión del lunes 2/4/2012).
4. ACD: Hoja "Funciones 1", ej. 1, apartado e (cálculo del dominio de una función racional, corregido en la sesión del lunes 2/4/2012).
5. ACD: Hoja "Funciones 1", ej. 1, apartado f (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 16/4/2012).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

1. ACD: Hoja "Funciones 1", ej. 1, apartado a (cálculo del dominio de una función racional).

2. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado b (cálculo del dominio de una función irracional).

3. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado d (mismo propósito anterior).

4. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado g (cálculo del dominio de una función irracional).

5. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado h (mismo propósito anterior).

6. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado i (cálculo del dominio de una función racional).

7. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado j (mismo propósito anterior).

8. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado k (cálculo del dominio de una función irracional).

9. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado l (mismo propósito anterior).

10. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado m (cálculo del dominio de una función logarítmica).

11. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado n (mismo propósito anterior).

12. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado o (cálculo del dominio de una función exponencial).

13. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 1, apartado p (cálculo del dominio de una función racional con valores absolutos).

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 1

1.- Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{7x-1}{x^3-3x^2+2x}$

b) $y=\sqrt{x^3-x}$

c) $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2-3x^2}$

d) $y=\sqrt{9-4x^2}$

e) $y=\dfrac{2x}{x^3+2x^2-x-2}$

f) $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+8}$

g) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

h) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

i) $y=\dfrac{x+1}{x+3}$

j) $y=\dfrac{1}{2x^2-5x+2}$

k) $y=\sqrt{x^2+x+1}$

l) $y=\sqrt[5]{2x^2-5x+2}$

m) $y=\log(2x-7)$

n) $y=\log_3(x^2)$

o) $y=2^x$

p) $y=\dfrac{|x|}{x}$

2.- Representa gráficamente las siguientes funciones e indica en cada caso el dominio y el recorrido:

a) $y=2x^2+3x-2$

b) $y=-x^2+2x+15$

c) $y=x^2+4x+4$

d) $y=x^3-6x^2-4x+24$

e) $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$

f) $y=|x-1|$

g) $y=|-x^2+2x+15|$

h) $y=2-3\sqrt{2-x}$

i) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0\\ x^2+x & \text{si } x\le 0\end{cases}$

j) $y=\begin{cases}x^2 & \text{si } x<2\\ 1 & \text{si } x=2\\ 4-x & \text{si } x>2\end{cases}$

k) $y=\begin{cases}1 & \text{si } x\le 1\\ x & \text{si } 1<x\le 3\\ -x+6 & \text{si } 3<x\le 6\\ 0 & \text{si } x>6\end{cases}$

l) $y=3^x$

m) $y=\log_3 x$

n) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

o) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

3.- Dadas las funciones $y=f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ e $y=g(x)=x^2-1$, halla las funciones siguientes así como sus respectivos dominios: $f+g,\ g-f,\ f\cdot g,\ \dfrac{g}{f},\ g\circ f$ y $f\circ g$.

4.- Averigua si las siguientes funciones son pares o impares:

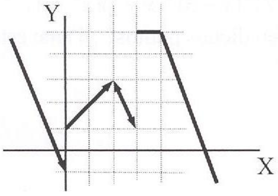
a) $y=x^3|x|$, **b)** $y=\dfrac{1}{x^2-x}$, **c)** $y=(x-1)^3(x+1)^3$.

5.- Completa la función siguiente para que sea impar y represéntala gráficamente:

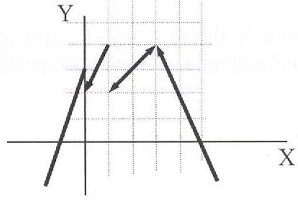
$$y=\begin{cases}x^2-3 & \text{si } x>0\\ ¿....? & \text{si } x<0\end{cases}$$

6.- En cada una de las gráficas siguientes, determina cuáles son los límites laterales en $a=0$, $a=1$, $a=2$, $a=3$ y $a=4$. ¿Existen los límites en dichos puntos? ¿Son infinitos?

a)



b)

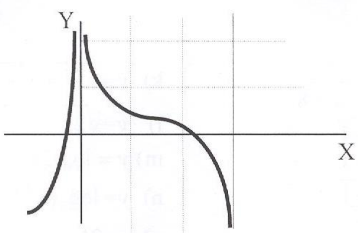


1

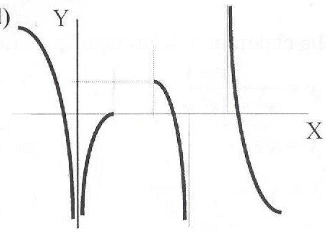
Figura B.1. Escaneo de la primera hoja de ejercicios de “Funciones 1”

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 1

c)



d)



7.- Dibuja la gráfica de una función $y = f(x)$ que verifique lo siguiente:

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$;

b) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -2$ y $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2 = f(4)$;

c) Es creciente en $(-\infty,1)$, es decreciente en $(1,4)$ y es constante en $(4,+\infty)$.

8.- Dibuja la gráfica de una función $y = f(x)$ que verifique lo siguiente:

a) No existe el $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -2$;

b) $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$;

c) La vertical $x = 6$ es una asíntota;

d) Es decreciente en $(2,6)$ y en $(6,+\infty)$;

e) Está acotada en $(-\infty,0)$.

9.- Se sabe que $\lim_{x\to a} f(x) = -2$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$, $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} k(x) = -\infty$. ¿Qué vale el límite cuando x tiende hacia a de las funciones $f - g$, $\frac{g}{f}$, $f + g$, $f \cdot h + g \cdot h$ y $\frac{h}{k}$?

10.- Dadas las funciones $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x}$ y $g(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 - 3x}$, calcula los siguientes límites: $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)\cdot g(x)$.

11.- Calcula h y k sabiendo que $\lim_{x\to +\infty}\left(hx + k - \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\right) = 0$.

12.- ¿Siendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18} & \text{si } x < 1 \\ mx + 7 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, qué valor deberá tener m para que exista $\lim_{x\to 1} f(x)$?

13.- Dada la función $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 + bx^2 - x + c}$, calcula b y c sabiendo que $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{3}{8}$.

14.- Se dice que una función $y = f(x)$ es un infinitésimo en $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Halla los puntos en los que la función $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 6x + 5}$, es un infinitésimo.

15.- Halla los límites laterales de la función $f(x) = \frac{(x-2)^2(x-3)(x^4 + x^2 + 1)}{(x-2)^3(x-3)^3(x+1)(x^2+1)}$ en los puntos de abcisa 2, 3 y -1. ¿Hay asíntotas verticales en dichos puntos? ¿Tiene esta función alguna asíntota horizontal?

2

Figura B.2. Escaneo de la segunda hoja de ejercicios de “Funciones 1”

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 1

SOLUCIONES

1.- a) $D = IR - \{0,1,2\}$,
b) $D = [-1,0] \cup [1,+\infty)$,
c) $D = \left[0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$,
d) $D = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$,
e) $D = IR - \{-2,-1,1\}$,
f) $D = IR$,
g) $D = [1,2)$,
h) $D = (-\infty,-1] \cup (0,+\infty)$,
i) $D = IR - \{3\}$,
j) $D = IR - \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$,
k) $D = IR$,
l) $D = IR$,
m) $D = \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$,
n) $D = IR - \{0\}$,
o) $D = IR$,
p) $D = IR - \{0\}$.

2.- a) $D = IR, R = \left[-\frac{25}{8}, +\infty\right)$;
b) $D = IR, R = (-\infty,16]$;
c) $D = IR, R = [0,+\infty)$;
d) $D = R = IR$;
e) $D = IR - \{1\}, R = IR - \{3\}$
f) $D = IR,\ R = [0,+\infty)$;
g) $D = IR,\ R = [0,+\infty)$;
h) $D = R = (-\infty,2]$;
i) $D = IR,\ R = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$;
j) $D = R = IR$;
k) $D = IR,\ R = [0,3]$;
l) $D = IR,\ R = (0,+\infty)$;
m) $D = (0,+\infty),\ R = IR$;
n) $D = IR,\ R = (0,+\infty)$;
o) $D = (0,+\infty),.\ R = IR$

3.- $(f+g)(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x+1}$ y $D = IR - \{-1\}$; $(g-f)(x) = \frac{x^3+x^2-2x}{x+1}$ y $D = IR - \{-1\}$; $f \cdot g(x) = (x-1)^2$ y $D = IR$; $\frac{g}{f}(x) = (x+1)^2$ y $D = IR$; $f \circ g(x) = \frac{x^2-2}{x^2}$ y $D = IR - \{0\}$.

4.- a) Impar; **b)** Ni par, ni impar; **c)** Par. **5.-** $3 - x^2$.

6.- a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$; No; No.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ **;** Sí, es 2; No.
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$; Sí, es 3; No.
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1,\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = 5$; No; No.
$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = 5$; Sí, es 5; No.

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$; No; No.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ **;** No; No.
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$; Sí, es 3; No.
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$; Sí, es 4; No.
$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$; Sí, es 2; No.

c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; No; Sí.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$ **;** Sí, es $\frac{1}{2}$; No.
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{3}$; Sí, es $\frac{1}{3}$; No.
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 3^+} f(x) =$ Nada ; No; No.
$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) =$ Nada ; No; No.

d) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$; No; Sí.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) =$ Nada **;** No; No.
$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ Nada, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$; No; No.
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 3^+} f(x) =$ Nada ; No; No.
$\lim_{x\to 4^-} f(x) =$ Nada, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$; No; No.

9.- $\lim_{x\to a}(f-g)(x) = -2$ **;** $\lim_{x\to a}\frac{g}{f}(x) = 0^-$ **;** $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = -2$ **;** $\lim_{x\to a}(f \cdot h + g \cdot h)(x) = -\infty$ **;** $\lim_{x\to a}\frac{h}{k}(x) = ?$ **.**

10.- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 1$. **11.-** $h = 1, k = 0$. **12.-** $m = -8$; **13.-** $b = -3, c = 3$.

14.- En $x = 0$ y en $x = 2$.

15.- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.
Sí. $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos sentidos.

3

Figura B.3. Escaneo del solucionario de los ejercicios de “Funciones 1”

Jueves 29 de marzo de 2012 (Hora: 13:15 a 14:05)

Información transcrita del diario del docente:

Huelga general (mía).

Información adicional de interés:

A partir de este día sí que disponemos del diario de clase elaborado por el docente, en él escribe los aspectos fundamentales del desarrollo de cada sesión. En particular, remarcamos que reflejara información sobre la asistencia de los alumnos a clase, los contenidos tratados, los ejercicios planteados y corregidos en el aula, y el modo de corrección de los mismos.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo, al no haber clase lectiva.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad, al no haber clase lectiva.

Viernes 30 de marzo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Asistieron todos.

Resolución y entrega del segundo control específico de Geometría (realizado la semana anterior).

Un alumno no participante con su cuaderno en el análisis planteó dudas sobre el recorrido de una función, y la alumna A6 sobre dominios. No dio tiempo a tratarlas.

Información adicional de interés:

Como nos indica el docente en su diario, la gran mayoría de la clase se dedicó a la resolución de los diferentes ejercicios que se planteaban en el examen del tópico anterior, y no se llegó a tratar ningún aspecto concreto propio del bloque de análisis matemático.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo durante esta sesión.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad propia del bloque de Análisis Matemático durante esta sesión de clase.

Lunes 2 de abril de 2012 (Hora: 8:15 a 9:05)

Información transcrita del diario del docente:

Asisten todos.

Dedicamos un rato a tratar las “quejas” que los alumnos tienen sobre la marcha de la asignatura, en especial sobre la dificultad de los controles (unos 20 minutos).

La alumna A6 preguntó por los apartados e) y f) del ejercicio 1 (obtención de dominios) de la colección Funciones 1. Un alumno no participante con su cuaderno en el análisis pidió aclaraciones para el apartado k) del ejercicio 2 de la misma colección (representación de una función definida a trozos lineales). Se realizaron con detalle todos esos ejercicios.

Se repasaron los conceptos de extremos relativos y absolutos haciendo especial hincapié en su interpretación gráfica.

Información adicional de interés:

Durante esta clase se corrigen dos de las actividades propuestas al final de la clase del martes 27/3/2012, a petición de los alumnos. Además, también se corrige otra actividad por este mismo motivo, pero que no había sido mandada explícitamente por el docente (característica de la metodología docente).

Durante la corrección del apartado k del ejercicio 2 de la hoja “Funciones 1” consideramos que el docente ha realizado una mejora significativa al contenido propio de la actividad, puesto que además de la representación de la función y el estudio de su dominio y recorrido también elabora una lista de características de la misma (monotonía, puntos de corte con los ejes, acotación, máximos y mínimos, continuidad), en algunos casos, anticipándose a conceptos que iban a ser tratados durante esta misma clase o en clases posteriores, a lo largo de este primer tema del bloque de análisis matemático.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase trataron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado “Observaciones o comentarios de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

20. (Imp) Extremos relativos o locales: concepto de máximo y mínimo relativo en una función.

21. Extremos absolutos: concepto de máximo y mínimo absoluto en una función.

Ejemplos:

15. (Imp) Ejemplo de función definida gráficamente con un máximo y un mínimo relativo.

16. (Imp) Ejemplo de función definida gráficamente sin extremos relativos.

Dibujos, esquemas y gráficos:

7. Gráfica de función con un máximo y un mínimo relativo.

8. Gráfica de una función sin extremos relativos.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase hubo mejoras significativas en la corrección de una actividad y actividades propuestas y corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

1. En la corrección del ej. 2, apartado k, de la hoja “Funciones 1”: elaboración de una lista de características de la función representada (además del dominio y el recorrido).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

6. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 2, apartado k (estudio y representación de una función polinómica a trozos, corregido durante la propia sesión).

Martes 3 de abril de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Se fueron todos (excepto la alumna A8, que no vino a clase) a una actividad extraescolar: "Ruta verde" (por Segovia).

Información adicional de interés:

Este día, como vemos en el diario del docente, no hubo clase de matemáticas. Durante esta clase y la próxima tuvieron lugar las vacaciones de Semana Santa de ese año 2012 (desde el jueves 5 de abril hasta el domingo 15, ambos inclusive).

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo, al no haber clase lectiva.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad, al no haber clase lectiva.

Lunes 16 de abril de 2012 (Hora: 8:15 a 9:05)

Información transcrita del diario del docente:

Asisten todos, pero el alumno A1 llega 5 minutos tarde y un alumno que no participa con su cuaderno en el análisis, 5 minutos después.

Un alumno no participante en el análisis pregunta por el apartado c) del ejercicio 1 (dominios) de la colección Funciones 1, y de forma más general por el cálculo de dominios cuando son varias y de distinto tipo las condiciones que tienen que verificar los elementos que lo forman. Se resuelve detalladamente el apartado mencionado y se añade algún ejemplo más.

Repasamos los conceptos de acotación, continuidad y tipos de discontinuidades, asíntotas y sus tipos y aprovecho para ir introduciendo la idea de límite.

Información adicional de interés:

Como resalta el docente en la parte final de su diario, éste aprovecha los dos ejemplos de estudio de la existencia de asíntota y discontinuidad para introducir la idea de límite a través de tablas de valores (evaluando la función en valores cercanos a izquierda y derecha del valor donde se estudia la función).

Unidad teórica (UT1):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no surgió ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

22. Acotación inferior: conceptos de cota inferior y extremo inferior.
23. Acotación superior: conceptos de cota superior y extremo superior.
24. Definición de función acotada.
25. (Imp) Definición intuitiva de continuidad de una función (representación sin levantar el lápiz del papel).
26. (Imp) Tipos de discontinuidad: discontinuidad evitable.
27. (Imp) Tipos de discontinuidad: discontinuidad inevitable (salto finito o infinito).
28. (Imp) Tipos de discontinuidad: discontinuidad esencial.
29. Definición intuitiva del concepto de asíntota.
30. (Imp) Tres tipos de asíntota: vertical, horizontal y oblicua.

Ejemplos:

17. Ejemplo de estudio de la acotación inferior: función $f(x)=x^2$.
18. Ejemplo de estudio de la acotación superior: función $f(x)=-x^2$.
19. (Imp) Ejemplo 1 de estudio de asíntota y discontinuidad: $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ en x=2.
20. (Imp) Ejemplo 2 de estudio de asíntota y discontinuidad: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ en x=-2.

Dibujos, esquemas y gráficos:

9. (Imp) Gráfica ilustrando una función con una discontinuidad evitable.
10. (Imp) Gráfica ilustrando una función con una discontinuidad inevitable de salto finito.
11. (Imp) Gráfica ilustrando una función con una discontinuidad inevitable de salto infinito.
12. (Imp) Gráfica ilustrando una función con una discontinuidad esencial.
13. Gráfica ilustrando una función con una asíntota vertical.
14. Gráfica ilustrando una función con una asíntota horizontal.

15. Gráfica ilustrando una función con una asíntota oblicua.

16. Gráfica ilustrando la asíntota vertical en el ejemplo ($f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ en un entorno de x=2).

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

No se planteó ninguna actividad durante esta clase, tampoco hubo mejoras significativas en la corrección de actividades planteadas en días previos.

Martes 17 de abril de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

<u>Información transcrita del diario del docente:</u>

Asisten todos.

Repasamos curvatura y puntos de inflexión, simetrías par e impar y cortes con los ejes.

Empezamos a repasar las funciones elementales, sus gráficas y sus características: constantes, lineales y afines.

<u>Información adicional de interés</u>: No.

<u>Unidad teórica (UT1)</u>:

En esta clase hubo contenidos de los cuatro tipos que estamos considerando en nuestro análisis.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

31. Curvatura de una función: idea de concavidad y convexidad.
32. Definición de punto de inflexión en una función.
33. (Imp) Simetría par de una función: definición verbal y simbólica.
34. (Imp) Simetría impar de una función: definición verbal y simbólica.
35. Idea de periodicidad de una función.
36. (Imp) Modo de cálculo de los puntos de corte de una función con los ejes.
37. (Imp) Función constante: expresión general, características y tipo de gráfica.
38. (Imp) Funciones afines y lineales: expresión general, características y tipo de gráfica.

Ejemplos:

21. Ejemplo de función periódica: función mantisa.
22. (Imp) Ejemplo de cálculo de puntos de corte de una función con los ejes: $f(x)=x^2-16$.
23. (Imp) Ejemplo de función constante: f(x)=2.
24. (Imp) Ejemplo de función lineal: f(x)=2x.
25. (Imp) Ejemplo de función afín: f(x)=2x-3.

Dibujos, esquemas y gráficos:

17. Gráfica ilustrando curvatura y punto de inflexión en una función.
18. (Imp) Gráfica de una función con simetría par.
19. (Imp) Gráfica de una función con simetría impar.
20. Gráfica de una función periódica.
21. Gráfica de la función mantisa (ejemplo de función periódica).
22. (Imp) Gráfica de la función constante tomada como ejemplo: f(x)=2.
23. (Imp) Gráfica de la función lineal tomada como ejemplo: f(x)=2x.
24. (Imp) Gráfica de la función afín tomada como ejemplo: f(x)=2x-3.

Observaciones o comentarios de interés:

4. Alerta sobre el comportamiento de la mantisa y la parte entera en números negativos.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión.

Jueves 19 de abril de 2012 (Hora: 13:15 a 14:05)

Información transcrita del diario del docente:

Adelantamos la hora de clase (de 6ª a 4ª, por ausencia de la profesora de Literatura). Faltó el alumno A9, que se lesionó un brazo.

Resolvimos los ejercicios 4 y 5 (sobre simetría par e impar de funciones) de la colección de ejercicios Funciones 1, a petición del alumno A2, la alumna A6 y otros dos alumnos que no participan con su cuaderno en el análisis.

Repasamos las funciones cuadráticas: sus gráficas y sus características.

Información adicional de interés:

Como nos indica el docente en su diario, la clase se adelantó al siguiente horario: de 11:25 a 12:15 horas. Además, en esta clase se corrigen dos actividades a petición de los alumnos, pero que no habían sido mandadas explícitamente por el docente (característica de su metodología): los ejercicios número 4 y 5 de la hoja “Funciones 1”.

Durante la corrección del ejercicio 4 de la hoja “Funciones 1”, consideramos que el docente ha realizado una mejora significativa al contenido propio de la actividad. El docente indica un método útil para descartar la existencia de simetría par o impar en funciones definidas simbólicamente: evaluar la función en valores opuestos de la variable independiente, o la simetría del dominio respecto a x=0 (por ejemplo, si la función está definida en x=1 y no en x=-1, entonces no puede tener simetría par ni impar).

Unidad teórica (UT1):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado “Observaciones o comentarios de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

39. (Imp) Funciones cuadráticas: expresión general, características y tipo de gráfica.

Ejemplos:

26. (Imp) Ejemplo de función cuadrática: $f(x)=3x^2+6x+1$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

25. (Imp) Gráfica ilustrando una función cuadrática genérica.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase hubo mejoras significativas en la corrección de una actividad y actividades propuestas y corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

2. En la corrección del ej. 4 de la hoja “Funciones 1”: indicación de un método útil para descartar la existencia o no de simetría, evaluando la función en valores opuestos.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

7. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 4 (estudio de simetría par o impar en funciones, corregida en esta misma sesión).

8. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 5 (compleción de la expresión analítica de una función para que sea simétrica impar, y representación; corregida en esta misma sesión).

Viernes 20 de abril de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

<u>Información transcrita del diario del docente:</u>

Asisten todos (incluso el alumno A9, con el brazo izquierdo en cabestrillo por una contusión).

Repasamos las funciones fraccionarias elementales (hipérbolas equiláteras). Aprovechamos para recordar los efectos gráficos de las transformaciones elementales (traslaciones y homotecias) en las fórmulas de las funciones.

Hoy por la tarde (excepto el alumno A4, las alumnas A7 y A8 y otro alumno que no participa con su cuaderno en el análisis) se van todos a Italia de viaje de estudios hasta el jueves 26 de abril.

<u>Información adicional de interés:</u>

Como nos comenta el docente en su diario, tras esta clase vuelve a existir un salto temporal en el diario, puesto que la siguiente clase de matemáticas es la correspondiente al viernes 27/4/2012 (una semana después).

<u>Unidad teórica (UT1):</u>

En esta sesión se trataron contenidos de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

40. (Imp) Funciones de proporcionalidad inversa: expresión general, caso f(x)=1/x y sus características.

41. Interpretación y efecto en la gráfica de una transformación del tipo f(x)+k o f(x)-k

42. Interpretación y efecto en la gráfica de una transformación del tipo f(x+k) o f(x-k)

43. Interpretación y efecto en la gráfica de una transformación del tipo k·f(x)

44. (Imp) Función fraccionaria: expresión general y representación (a partir de las transformaciones anteriores).

Ejemplos:

27. (Imp) Ejemplo de función fraccionaria y su representación: $f(x) = \frac{2-x}{2x+4}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

26. (Imp) Gráfica de la función f(x)=1/x (hipérbola equilátera).

27. (Imp) Gráfica de una función fraccionaria: $f(x) = \frac{2-x}{2x+4}$.

Observaciones o comentarios de interés:

5. Insuficiencia de la división para poder representar cualquier una función fraccionaria (necesidad de otras herramientas, como la derivada).

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión.

Viernes 27 de abril de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Asisten todos.

Volvemos a insistir, con más detalle, en los efectos gráficos de las transformaciones elementales en las expresiones analíticas de las funciones.

Repasamos las funciones irracionales elementales (mitades de parábolas horizontales).

Información adicional de interés:

Durante el estudio de la representación de las funciones irracionales que se ponen como ejemplo (ejemplos 2 y 3), el docente vuelve a insistir en la teoría dada en la clase anterior sobre la interpretación y efecto de las transformaciones elementales (en este caso, para la representación de funciones irracionales sencillas a partir de $f(x) = \sqrt{x}$).

Unidad teórica (UT1):

En esta sesión se trataron contenidos de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

45. (Imp) Funciones irracionales: caso sencillo $f(x) = \sqrt{x}$ y sus características
46. Función definida a trozos: función signo

Ejemplos:

28. (Imp) Ejemplo 1 de función irracional y su representación: $f(x) = \sqrt{x}$.
29. (Imp) Ejemplo 2 de función irracional y su representación: $f(x) = 2\sqrt{x-1} + 3$.
30. Ejemplo 3 de función irracional y su representación: $f(x) = 2 - \sqrt{2-x}$

Dibujos, esquemas y gráficos:

28. (Imp) Gráfica de una función irracional: $f(x) = \sqrt{x}$.
29. (Imp) Gráfica de una función irracional: $f(x) = 2\sqrt{x-1} + 3$.
30. Gráfica de una función irracional: $f(x) = 2 - \sqrt{2-x}$.
31. Gráfica de la función signo.

Observaciones o comentarios de interés:

6. Caracterización de la curvatura utilizando las rectas tangentes (por encima/debajo de la gráfica).

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión.

Lunes 30 de abril de 2012 (Hora: 8:15 a 9:05)

Información transcrita del diario del docente:

Asisten todos (aunque un alumno no participante en el análisis llegó tarde).

Insistimos nuevamente en las funciones definidas a trozos representando detalladamente y estudiando una función con dos trozos: un trozo de parábola y otro de hipérbola.

Repasamos las operaciones algebraicas de funciones y sus propiedades y definimos la composición de funciones.

<u>Información adicional de interés:</u>

La clase termina con la definición de composición de funciones y la explicación sobre la notación simbólica de la operación y cómo se lee esa expresión. En la clase siguiente, se continúa retomando la lectura de la expresión, las propiedades de la composición y algunos ejemplos.

<u>Unidad teórica (UT1):</u>

En esta clase se desarrollaron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

47. (Imp) Función definida a trozos: función valor absoluto.
48. Función definida a trozos: función escalonada.
49. Operaciones con funciones: definición de suma, resta, producto y cociente de funciones.
50. (Imp) Composición de funciones: definición de la operación, lectura verbal y expresión simbólica.

Ejemplos:

31. Ejemplo 1 de función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & si\ x \leq 3 \\ \frac{1}{x-5}, & si\ x > 3 \end{cases}.$
32. (Imp) Ejemplo 2 de función definida a trozos (valor absoluto): f(x)=|x-1|.
33. (Imp) Ejemplo 3 de función definida a trozos (valor absoluto): f(x)=2|x|-3.
34. Ejemplo 4 de función definida a trozos (ejemplo de función escalonada):

$$f(x) = \begin{cases} 2, & si\ x \leq -3 \\ 1, & si -3 < x < 2. \\ -1, & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

35. Ejemplo de una suma de funciones, con f(x)=$2x^2$+x e g(x)=$\frac{2x-1}{x^2-4}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

32. Representación gráfica de la función definida a trozos tomada en el Ejemplo 1.
33. Representación gráfica de la función definida a trozos tomada en el Ejemplo 4.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión.

Jueves 3 de mayo de 2012 (Hora: 13:15 a 14:05)

Información transcrita del diario del docente:

Asisten todos.

El alumno A9 pregunta en qué circunstancias se plantea el cálculo de límites laterales. Se lo explico someramente y aplazamos su estudio más detallado para cuando calculemos límites.

Nadie plantea más dudas sobre lo visto últimamente o sobre algún ejercicio que haya tratado de hacer.

Volvemos sobre la composición de funciones: concepto, nomenclatura y cálculo con varios ejemplos; propiedades, haciendo hincapié en la no conmutatividad.

Función recíproca (inversa para la composición): Concepto, condiciones para su existencia, forma de cálculo (cuando exista y la podamos calcular), interpretación geométrica.

Información adicional de interés: No.

Unidad teórica (UT1):

En esta sesión hubo contenidos correspondientes a los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

51. Propiedades de la composición de funciones: interna, asociativa, elemento neutro y función recíproca (si existe).
52. (Imp) Método de cálculo de la función recíproca (si existe) de una dada.
53. (Imp) Relación existente entre las representaciones gráficas de dos funciones recíprocas.

Ejemplos:

36. (Imp) Ejemplo 1 de composición de funciones: $g \circ f$, con f(x)=3x^2-2, g(x)=2x-3.

37. (Imp) Ejemplo 2 de composición de funciones: $f \circ g$, con f(x)=3x^2-2, g(x)=2x-3.

38. (Imp) Ejemplo de cálculo "artesanal" de la recíproca de una función: f(x)=2x-3.

39. (Imp) Ejemplo 1 de cálculo aplicando la regla de la recíproca de una función: f(x)=2x-3

40. Ejemplo 2 de cálculo aplicando la regla de la recíproca de una función: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (función idempotente).

41. Ejemplo 3 de cálculo aplicando la regla de la recíproca de una función: f(x)=x^2 (restricción en [0,+∞)).

42. Ejemplo 4 de cálculo aplicando la regla de la recíproca de una función: f(x)=x^3-1.

43. Ejemplo 5 de cálculo aplicando la regla de la recíproca de una función: f(x)=x^3-x (no existe).

44. (Imp) Ejemplo ilustrativo de la simetría existente en la representación gráfica de funciones recíprocas, con $f(x) = 2x - 3$ y $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

34. Gráfica de la función f(x)=x^2 (restringida, para que exista su recíproca).

35. (Imp) Gráfica mostrando la relación entre las representaciones gráficas de funciones recíprocas.

Observaciones o comentarios de interés:

7. (Imp) No conmutatividad de la composición de funciones (ejemplo donde se calculan las dos composiciones).

8. Intercambio entre el dominio y el recorrido en funciones recíprocas.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión.

Viernes 4 de mayo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Este día el docente no elabora su diario, puesto que asistimos como observadores a la clase.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase.

Asisten todos los alumnos a la clase. El docente comienza la clase fijando un examen de este primer tema de funciones elementales para el día 15/5/2012.

El alumno A10 comienza planteando una duda en el ejercicio 18 de la página 268 del libro de texto, ejercicio sobre composición de funciones, para que el profesor lo resolviera. Las tres composiciones son resueltas por el docente. Además, y como mejora significativa al contenido propio de la actividad durante la corrección de la misma, el docente se plantea el cálculo del dominio de las tres funciones compuestas que aparecen: $f(x) = cos\sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$, $f(x) = \sqrt[4]{x}$, analizando cuándo el coseno de un ángulo tiene signo positivo.

Volviendo a la teoría, el docente recuerda el concepto de función trascendente (señalando que la función coseno es un ejemplo de ello). El primer tipo de funciones trascendentes que desarrolla son las funciones exponenciales, $f(x) = a^x$. Aclara por qué son trascendentes (paso al límite en el cálculo cuando el exponente es un número irracional), y las restricciones (a>0, a≠1).

Desarrolla un ejemplo de función exponencial: $f(x)=2^x$, planteando la construcción de su gráfica a partir de una tabla de valores. Comenta el efecto en la gráfica de la base escogida, indicando la presencia de una diferencia según sea la base mayor o menor que 1. Propone a los alumnos realizar una tabla de valores y construir la gráfica para la exponencial de base ½, $f(x)=(1/2)^x$. Tras unos minutos, el alumno A10 sale a corregirlo a la pizarra, remarcando de nuevo la presencia de dos grandes "bloques" de funciones exponenciales, según sea el valor de la base.

En la parte final de la clase, el docente escribe las características de las funciones exponenciales, distinguiendo según el valor de la base en aquellos aspectos en que es necesario.

Unidad teórica (UT1):

En esta sesión hubo contenidos correspondientes a los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

54. (Imp) Funciones exponenciales: expresión general y características.

Ejemplos:

45. (Imp) Ejemplo de función exponencial: $f(x)=2^x$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

36. (Imp) Representación gráfica de una función exponencial: $f(x)=2^x$.

37. Gráfica que indica el efecto de la base (siendo a>1) en la representación gráfica de una función exponencial.

38. (Imp) Gráfica conjunta donde se representan las funciones exponenciales de base 2 y 1/2.

Observaciones o comentarios de interés:

9. Aclaración de la trascendencia de función exponencial.

10. (Imp) Justificación de las restricciones para la base en funciones exponenciales.

Unidad práctica (UP1):

En esta sesión existió una mejora significativa en la corrección de las actividades, así como actividades planteadas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

3. En la corrección del ej. 18 de la pág. 268: planteamiento y resolución del cálculo del dominio de las funciones compuestas que aparecen ($f(x) = cos\sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$, $f(x) = \sqrt[4]{x}$).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

9. AELT: Pág. 268, ej. 18 (composición de funciones, corregida en la propia sesión).

10. ACD: Representa gráficamente la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a partir de una tabla de valores (corregida en la propia sesión).

Lunes 7 de mayo de 2012 (Hora: 8:15 a 9:05)

Información transcrita del diario del docente:

Asistieron todos (aunque un alumno no participante en el análisis llegó 5 minutos tarde).

Nadie planteó dudas respecto a lo visto los días anteriores.

Representación y estudio de las funciones logarítmicas (como recíprocas de las exponenciales elementales), de la función seno y del arcoseno.

Información adicional de interés: No hay.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase hubo elementos propios de tres de los cuatro tipos considerados, todos salvo el tipo “Ejemplos”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

55. (Imp) Funciones logarítmicas como recíprocas de las exponenciales: características.
56. (Imp) Función seno: gráfica (tabla de valores) y características.
57. Función arcoseno como recíproca del seno (con dominio restringido): gráfica y características.

Dibujos, esquemas y gráficos:

39. (Imp) Gráfica de una función logarítmica de base a>1 (como recíproca de exponencial).
40. (Imp) Gráfica de una función logarítmica de base 0<a<1 (como recíproca de exponencial).
41. Gráfica que indica el efecto de la base (siendo a>1) en la representación gráfica de una función logarítmica.
42. (Imp) Representación gráfica de la función seno, f(x)=sen(x).
43. Representación gráfica de la función arcoseno, f(x)=arcsen(x).

Observaciones o comentarios de interés:

11. (Imp) En las funciones trigonométricas, la unidad de la variable independiente son radianes.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión.

Martes 8 de mayo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Asistieron todos.

No se plantean dudas.

Representamos y estudiamos detalladamente las funciones coseno, arcocoseno, tangente y arcotangente.

El alumno A10 preguntó por las inversas para el producto (cosecante, secante y cotangente). Les ilustro de manera somera cómo es la función cosecante.

Información adicional de interés: No hay.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase hubo elementos propios de dos de los cuatro tipos considerados: “Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones” y “Dibujos, esquemas y gráficos”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

58. (Imp) Función coseno: gráfica (trasladada de la función seno) y características.
59. Función arcocoseno como recíproca del coseno (con dominio restringido): gráfica y características.
60. (Imp) Función tangente: gráfica y características.
61. Función arcotangente como recíproca de la tangente (con dominio restringido): gráfica y características.

Dibujos, esquemas y gráficos:

44. (Imp) Representación gráfica de la función coseno, f(x)=cos(x).

45. Representación gráfica de la función arcocoseno, f(x)=arccos(x).
46. (Imp) Representación gráfica de la función tangente, f(x)=tg(x).
47. Representación gráfica de la función arcotangente, f(x)=arctg(x).

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión.

Jueves 10 de mayo de 2012 (Hora: 13:15 a 14:05)

Información transcrita del diario del docente:

Asistieron todos.

Se plantean dudas (por parte de los alumnos A2, A6, A10 y algún otro) sobre la interpretación gráfica de algunas tendencias (límites). Para aclararlo hicimos un par de ejercicios de la colección Funciones 1: el alumno A9 se prestó a salir a hacer el nº 7 y al alumno A10 le pedí que saliese a hacer el nº 8.

Información adicional de interés:

El profesor no reseña en su diario el planteamiento de un ejercicio más, que fue corregido poco después por el propio docente: la representación gráfica de algunas funciones elementales: f(x)=sen(2x), $f(x) = \log(x-1)$ e $f(x) = e^{2x} + 1$ (a partir del seno, logaritmo y exponencial, utilizando trasformaciones elementales).

Además, durante la corrección de esta actividad, el docente realiza una mejora significativa al contenido propio de la actividad, puesto que el docente comenta varias propiedades, como el periodo de la función f(x)=sen(2x) o el dominio de la función $f(x) = \log(x-1)$.

Unidad teórica (UT1):

En esta sesión no se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

En esta sesión existió una mejora significativa en la corrección de las actividades, así como actividades planteadas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

4. En la corrección del ejercicio de representación gráfica de funciones derivadas de las elementales: Indicación de algunas propiedades de las funciones resultantes (periodo de f(x)=sen(2x), dominio de $f(x) = \log(x-1)$).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

11. ACD: Representa gráficamente las funciones f(x)=sen(2x), $f(x) = \log(x-1)$ y $f(x) = e^{2x} + 1$ a partir de las funciones elementales correspondientes (corregida en la propia sesión).

12. ACD: Hoja "Funciones 1", ej. 7 (representar gráficamente una función que cumpla ciertas propiedades, corregida en la propia sesión).

13. ACD: Hoja "Funciones 1", ej. 8 (mismo propósito anterior, corregida en la propia sesión).

Viernes 11 de mayo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

<u>Información transcrita del diario del docente:</u>

Varios alumnos (más de la mitad) llegaron con bastante retraso (más de un cuarto de hora) a causa de un examen de Biología y Geología que han tenido en la hora anterior, incluido el recreo (me habían avisado del posible retraso).

El alumno A10 pregunta por el ejercicio 38 de la página 269 del libro (composición de funciones). También pregunta por los apartados d) e i) del ejercicio 2 de la colección Funciones 1 (representación de una función cúbica y otra definida a trozos).

Los alumnos A2 y A10 preguntan por el apartado g) del mismo ejercicio (representar una función compuesta con el valor absoluto).

<u>Información adicional de interés</u>:

El profesor no reseña en su diario el último de los ejercicios, cuya corrección empezó al final de la clase: el ejercicio 3 de la hoja "Funciones 1". De entre las operaciones que se piden con las dos funciones que se dan, únicamente da tiempo a calcular una de las composiciones.

<u>Unidad teórica (UT1):</u>

En esta sesión no se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

En esta sesión existió una mejora significativa en la corrección de las actividades, así como actividades planteadas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

5. En la corrección del ej. 2, apartado i, de la hoja “Funciones 1”: estudio del límite en x=0 de la función que se pide representar (anticipación del tema siguiente).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

14. AELT: Pág. 269, ej. 38 (composición de funciones, corregida en la propia sesión).

15. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 2, apartado d (representación, dominio y recorrido de una función polinómica; corregida en la propia sesión).

16. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 2, apartado g (representación, dominio y recorrido de una función polinómica afectada por un valor absoluto; corregida en la propia sesión).

17. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 2, apartado i (representación, dominio y recorrido de una función definida a trozos; corregida en la propia sesión).

18. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 3 (primera de las composiciones, composición de funciones, corregida en la propia sesión).

Lunes 14 de mayo de 2012 (Hora: 8:15 a 9:05)

Información transcrita del diario del docente:

No hay clase por el traslado de la fiesta de San Pedro Regalado.

Información adicional de interés: No.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo, puesto que no hubo clase lectiva este día.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad, puesto que no hubo clase lectiva este día.

Martes 15 de mayo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Examen de lo visto hasta ahora de funciones. Usamos también una buena parte del recreo anterior a la hora de clase.

Uno de los alumnos no participantes en el análisis, una vez finalizado el examen, no me entregó nada.

El docente me proporcionó las preguntas del examen de este primer tema del bloque de Análisis Matemático. Son tres preguntas, cada una con varios apartados. Cada pregunta fue valorada de 0 a 10 puntos, siendo la calificación del examen la media aritmética de las tres valoraciones.

Las tres preguntas del examen son las siguientes:

1. a) Halla los dominios de las funciones $y = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x+2}$ *e* $y = \frac{1}{x-\sqrt{x}}$ *.*

b) Dadas $y = f(x) = \frac{1}{x-3}$ *e* $y = g(x) = \sqrt{x+1}$ *halla las fórmulas de las funciones:* $y = (g \circ f)^{-1}\,(x)$ *e* $y = (f^{-1} \circ g^{-1})\,(x)$*.*

2. Representa las siguientes funciones con la mayor precisión y sencillez posibles y menciona sus características más relevantes:

a) $y=|x^2+2x-3|$.

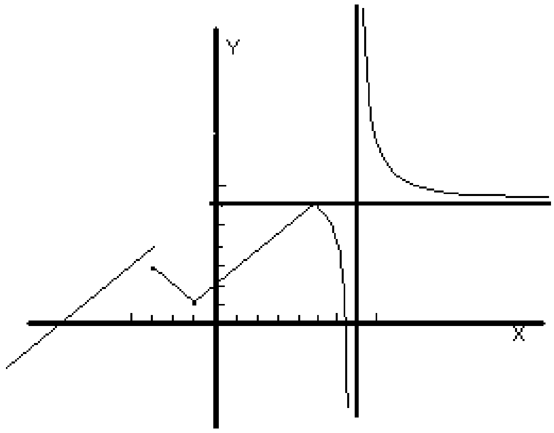
b) $y = 3 - \sqrt{4-2x}$.

c) $y = \begin{cases} -x-3, & si\ x < -3 \\ 9-x^2, & si -3 < x < 2. \\ x+3, & si\ x \geq 2 \end{cases}$

3. a) Representa gráficamente una función que verifique lo siguiente y completa el estudio de sus características.

Tiene asíntotas verticales en x=-2 y en x=1. Su recorrido es R=[-2,+∞). Es creciente en cada rama continua que la forma, pero no es monótona. Tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en x=2.

b) Estudia completamente la función y=f(x) cuya gráfica se muestra:



Información adicional de interés:

En este día se dedica toda la hora (y parte del recreo) a realizar este examen.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo durante esta sesión.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión (que pueda estar en el cuaderno de los alumnos).

Jueves 17 de mayo de 2012 (Hora: 13:15 a 14:05)

Información transcrita del diario del docente:

Asistieron todos.

Les entregué la segunda colección de ejercicios de funciones: “Funciones 2”. Son 107 límites para calcular y otros cuatro ejercicios para estudiar y clasificar discontinuidades de funciones.

Introducimos el concepto de límite de una función de manera intuitiva y gráfica (sin definición formal). Establecemos los distintos tipos (en un punto, en el infinito).

Mencionamos las propiedades de los límites respecto de las operaciones algebraicas y lo ilustramos con el cálculo de límites de funciones sencillas (polinómicas y fraccionarias sencillas).

Al final de la clase, el alumno A3 me dijo que se había quedado, por error, con un folio del examen del martes y que, al final de las clases, al no encontrar a nadie en el departamento, lo había introducido por debajo de la puerta.

Información adicional de interés:

En esta clase el profesor comienza el segundo de los temas del bloque de Análisis Matemático, sobre el límite de una función.

Se incluye al final de la información correspondiente a esta sesión los escaneos de las hojas correspondientes a los ejercicios de "Funciones 2" (Figuras B.4, B.5 y B.6) y de la hoja con las soluciones de dichos ejercicios (Figura B.7). Todas esas hojas fueron proporcionadas por el Docente 1 a sus alumnos al comienzo de esta clase.

Unidad teórica (UT2):

En esta sesión hubo contenidos correspondientes a los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. (Imp) Definición "informal/intuitiva" de límite de una función.
2. (Imp) Simbología matemática asociada al límite de una función.
3. (Imp) Límites laterales de una función en un punto: significado y notación.
4. Límite de una función en el infinito: significado y notación.
5. (Imp) Comportamiento del límite respecto de la suma de funciones.
6. (Imp) Comportamiento del límite respecto de la resta de funciones.
7. (Imp) Comportamiento del límite respecto del producto de funciones.
8. (Imp) Comportamiento del límite respecto del cociente de funciones.
9. Cálculo del límite en un punto de funciones polinómicas (reglas anteriores).
10. Cálculo del límite en $\pm\infty$ de funciones polinómicas y justificación del mismo.

Ejemplos:

1. (Imp) Límite de la función f(x)=2x en x=3 (ilustración de la "idea intuitiva" de límite).
2. (Imp) Ejemplo de límites laterales en un punto de una función: $f(x) = \frac{1}{x-3}$ en x=3.
3. Ejemplo 1 de límite en el infinito de una función: f(x)=2x en +∞.
4. (Imp) Ejemplo 2 de límite en el infinito de una función: $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$ en -∞ (anticipación de reglas posteriores).
5. Ejemplo 1 de límite en el infinito de un polinomio: $f(x)=3x^4+2x^2-x+12$ en +∞.

6. Ejemplo 2 de límite en el infinito de un polinomio: f(x)=-3x^5+7 en -∞.

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. (Imp) Representación gráfica de la función f(x)=2x en un entorno de x=3 (cálculo de límite).
2. (Imp) Representación gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-3}$ en un entorno de x=3 (cálculo del límite).

Observaciones o comentarios de interés:

1. (Imp) Anticipo de la resolución indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$: crecimiento de los monomios según el grado (Ejemplo 2 de límite en el infinito de una función).

<u>Unidad práctica (UP2)</u>:

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión.

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 2

1.- Calcula los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to -1}(x^2-5x+6)$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to 3}\frac{3x+5}{(x-3)^3}$

6) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}$

7) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$

8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-1}{x^2-3}$

9) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$

11) $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^2-1}$

12) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

13) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-6x+6}{x^2-2}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-1}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-4x}{x^3+3x}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{x^4-x^3}{3x^4-2x^3}$

18) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

19) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

20) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}$

21) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

22) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}$

23) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$

24) $\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^3+1}$

25) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

26) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

27) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$

28) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

29) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}$

30) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4-1}{x^2-1}$

31) $\lim_{x\to +\infty}\frac{(1+x)^2-1}{x^2}$

32) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^5-1}{x^7-1}$

33) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{5x^4+3x^3+2x^2}$

34) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{3x^3-2x^2+6x+1}$

35) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}-\frac{x^2-4}{x-2}\right)$

36) $\lim_{x\to \sqrt{5}}\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$

37) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$

38) $\lim_{x\to 2}\frac{-3}{(x-2)^2}$

39) $\lim_{x\to +\infty}\frac{1+2x-3x^3}{x^2+x^3-4}$

40) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{x^3}{x^2-1}\right)$

41) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

42) $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6x}{x^3-2x^2-4x+8}$

1

Figura B.4. Escaneo de la primera hoja de ejercicios de “Funciones 2”

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 2

43) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+4x^2+x+4}{x^2-16}$

44) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{6x^4+x^3}$

45) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

46) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

47) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

48) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+6x^2+3x}{x^3+x^2-x-1}$

49) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3-6x+5)$

50) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2-x+1)$

51) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^2+x+7)$

52) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3+x^2+10)$

53) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^3+x^2+10)$

54) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}}$

55) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$

56) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

57) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

58) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

59) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

60) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

61) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

62) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-3}$

63) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$

64) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$

65) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

66) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

67) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

68) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+25}-5}{x}$

69) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

70) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x}$

71) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}$

72) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

73) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\right]$

74) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x^3+1}\right)$

75) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)$

76) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$

77) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^3-x^2+1}-\sqrt{x^3-x+1}\right)$

78) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{(x+2)(x-3)}-x\right)$

79) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$

80) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-x\right)$

81) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)$

82) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3}\right)$

83) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)$

84) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

85) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x\right)$

86) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^3-x^2+4}-\sqrt{x^3-x+4}\right)$

87) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

2

Figura B.5. Escaneo de la segunda hoja de ejercicios de “Funciones 2”

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 2

88) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\right]$

89) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right)$

90) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x}+5x}{25x+6\sqrt{x}}$

91) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+2x^2+1}-x\sqrt{x}}{\sqrt{3x+2}}$

92) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-2}{5x+1}\right)^{\frac{6x}{3x+1}}$

93) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x^2}{2+x}\right)^{\frac{1}{2}}$

94) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$

95) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x}$

96) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

97) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^2+3}{2x^2+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

98) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)^{x}$

99) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-x+3}{3x^2+x-3}\right)^{\frac{x}{1-x}}$

100) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{4x-2}{x-3}\right)^{\frac{1}{x}}$

101) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{2x^3+5x+3}\right)^{x^2+x}$

102) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x-2}\right)^{\frac{x^3}{1-x^2}}$

103) $\lim\limits_{x\to+\infty}4^{\frac{3x^2}{x+1}}$

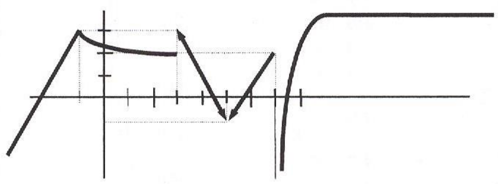
104) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x+5x^3}\right)^{\frac{2-3x^2}{4-x}}$

105) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x+1}{3x-3}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

106) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$

107) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

2.- Clasifica las discontinuidades de la función $y = f(x)$, cuya gráfica es la que se muestra:



3.- Si $f(x)=\frac{3x+4}{x^3+bx^2-6x}$ es discontinua en $x = 2$, halla b y clasifica sus discontinuidades.

4.- Averigua para qué valor de k es continua en $x = 0$ la función $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^4+3x^3}{5x^3+kx^3} & \text{si } x\neq0\\ \frac{2}{7} & \text{si } x=0\end{cases}$.

5.- Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x)=\sqrt{2+\frac{1}{(x-3)^2}}$, **b)** $g(x)=\begin{cases}\frac{3x+9}{x^2-9} & \text{si } x\leq0\\ \frac{3}{x^3-4x} & \text{si } x>0\end{cases}$.

3

Figura B.6. Escaneo de la tercera hoja de ejercicios de “Funciones 2”

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 2

SOLUCIONES

1.-

1) 12
2) ∞
3) $+\infty$
4) ∞
5) ∞
6) 2
7) 4
8) $\frac{13}{3}$
9) 2
10) 2
11) $\frac{5}{2}$
12) ∞
13) ∞
14) 1
15) -2
16) $-\frac{4}{3}$
17) $\frac{1}{2}$
18) ∞
19) ∞
20) 0
21) $-\frac{1}{2}$
22) $\frac{2}{3}$
23) ∞
24) $\frac{5}{3}$
25) $\frac{1}{4}$
26) 0
27) $\frac{1}{3}$
28) ∞
29) 0
30) $+\infty$
31) 1
32) 0
33) $\frac{1}{5}$
34) $+\infty$
35) $-\frac{15}{4}$
36) $\frac{\sqrt{5}}{10}$
37) $\frac{a-1}{2a}$
38) $-\infty$
39) -3
40) 0
41) ∞
42) ∞
43) $-\frac{17}{8}$
44) ∞
45) -1
46) -4
47) $\frac{a-1}{3a^2}$
48) $\frac{3}{2}$
49) $-\infty$
50) $+\infty$
51) $-\infty$
52) $-\infty$
53) $+\infty$
54) Nada
55) Nada
56) -2
57) $\frac{1}{4}$
58) $\frac{1}{2}$
59) $-\frac{1}{2}$
60) Nada
61) 0
62) 0
63) $-\frac{1}{12}$
64) $-\frac{1}{16}$
65) -1
66) $\frac{4}{3}$
67) 1
68) $\frac{1}{5}$
69) $3x^2$
70) ∞
71) $\frac{5}{6}$
72) $-\frac{1}{56}$
73) 1
74) $+\infty$
75) 0
76) 0
77) $-\infty$
78) $-\frac{1}{2}$
79) $-\frac{1}{2}$
80) 0
81) 0
82) 0
83) $-\infty$
84) 0
85) $+\infty$
86) $-\infty$
87) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
88) $\frac{1}{2}$
89) $+\infty$
90) $\frac{\sqrt{3}+5}{25}$
91) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
92) $\frac{16}{25}$
93) Nada
94) $\frac{1}{e^6}$
95) 1
96) $\frac{\sqrt[4]{e^3}}{e}$
97) $\frac{\sqrt{e}}{e}$
98) e
99) $\frac{3}{4}$
100) ∞
101) 0
102) 0
103) $+\infty$
104) 0
105) $\frac{\sqrt[3]{e}}{e}$
106) $\frac{1}{e^2}$
107) e^2

2.- En $x = 3$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito, en $x = 5$ una discontinuidad evitable ($f(5) = -1$) y en $x = 7$ una discontinuidad inevitable de salto infinito.

3.- $b = 1$. En $x = -3$, en $x = 0$ y en $x = 2$ hay discontinuidades inevitables de salto infinito.

4.- $k = \frac{11}{2}$

5.- a) En $x = 3$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito,
b) En $x = -3$ tiene una discontinuidad evitable y en $x = 0$ y $x = 2$ discontinuidades inevitables de salto infinito.

4

Figura B.7. Escaneo del solucionario de los ejercicios de "Funciones 2"

Viernes 18 de mayo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Asisten todos, un alumno no participante en el análisis me pregunta por su billetero, que se dejó olvidado en su pupitre el día anterior.

Recordamos el concepto de límite y sus tipos, que vimos el día anterior.

Mencionamos las propiedades del cálculo de límites respecto de las operaciones.

Comenzamos a calcular límites: límite de una función entera en un punto y "en el infinito".

Límite de una función fraccionaria en un punto y sus casos.

Límite de una función fraccionaria "en el infinito" y sus casos.

Interpretación gráfica de los distintos casos.

Límites y continuidad. Distintos tipos.

Información adicional de interés:

En esta sesión repasa bastantes de los contenidos tratados en la sesión previa (jueves 17/5/2012), para reforzar la introducción del concepto de límite de una función.

Unidad teórica (UT2):

En esta sesión hubo contenidos correspondientes a los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

11. Concepto de indeterminación.
12. (Imp) Explicación de cómo se resuelven los límites con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$.
13. (Imp) Explicación de cómo se resuelven los límites con "indeterminación" $\frac{\to k}{\to 0}$
14. (Imp) Explicación de cómo se resuelven los límites con indeterminación $\frac{\to \infty}{\to \infty}$
15. Relación entre la existencia de una asíntota vertical x=a en una función y el valor del límite en ese punto.
16. Relación entre la existencia de una asíntota horizontal y=b en una función y el valor del límite en +∞ y/o -∞.

17. (Imp) Definición analítica de continuidad en un punto de una función (utilizando límites: igualdad del límite de la función en el punto con el valor de la función en ese punto).

18. (Imp) Caracterización de la discontinuidad evitable utilizando límites.

19. (Imp) Caracterización de la discontinuidad inevitable utilizando límites.

20. (Imp) Caracterización de la discontinuidad inevitable de salto finito utilizando límites.

21. (Imp) Caracterización de la discontinuidad inevitable de salto infinito utilizando límites.

22. (Imp) Caracterización de la discontinuidad esencial utilizando límites.

Ejemplos:

7. (Imp) Límite de una función fraccionaria: $f(x) = \frac{x^2+3x-6}{(x-2)^2}$ en x=2.

8. (Imp) Ejemplo 1 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$: $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}$ en x=2.

9. (Imp) Ejemplo de límite con “indeterminación” $\frac{\to k}{\to 0}$ (en el desarrollo del límite anterior).

10. Ejemplo 2 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$: $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ en x=2.

11. (Imp) Ejemplo 1 de límite con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$: $f(x) = \frac{3x^3-2x^2-10x}{x^2+3x-2}$ en +∞.

12. (Imp) Ejemplo 2 de límite con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$: $f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{4x^5+7x^2-x}$ en -∞.

13. (Imp) Ejemplo 3 de límite con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$: $f(x) = \frac{3x^3-5x+2}{4x^3+7x^2-x}$ en -∞

14. Ejemplo 1 de estudio de la continuidad de una función: $f(x)=x^5$ en x=1.

15. (Imp) Ejemplo 2 de estudio de la continuidad de una función: función definida a trozos en x=1. Expresión de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & si\ x<1 \\ \frac{2x+1}{4-x}, & si\ x \geq 1 \end{cases}$.

16. (Imp) Ejemplo 3 de estudio de la continuidad de una función: otra función definida a trozos en x=1. Expresión de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & si\ x<1 \\ \frac{2x-1}{x-2}, & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Dibujos, esquemas y gráficos:

3. (Imp) Representación gráfica de la función a trozos en Ejemplo 2 de estudio de continuidad.
4. (Imp) Representación gráfica de la función a trozos en Ejemplo 3 de estudio de continuidad.

Observaciones o comentarios de interés:

2. (Imp) Explicación sobre por qué el límite de $\frac{k}{p \cdot x^n}$ cuando $x \to +\infty$ es cero.

Unidad práctica (UP2):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión

Lunes 21 de mayo de 2012 (Hora: 8:15 a 9:05)

Información transcrita del diario del docente:

Faltó el alumno A4 y un alumno no participante en el análisis llegó diez minutos tarde.

Hicimos detalladamente el examen del martes pasado (el último ejercicio no dio tiempo a completarlo) y se lo entregué para que lo revisaran y vieran su calificación.

Le comuniqué al alumno A3 que no había aparecido la hoja del examen que había introducido el martes por debajo de la puerta del departamento.

Información adicional de interés:

El docente dedicó este día de clase a la corrección de los ejercicios de que constaba el examen sobre el tema anterior al que actualmente se estaba impartiendo, y que fue realizado por los alumnos en la sesión del martes 15/5/2012. Algunos alumnos, como A1 y A3 sí que tomaron nota de la corrección de estos ejercicios en su cuaderno. No obstante, y debido a que estos ejercicios que se corrigen son propios del tema anterior al actual (y que serían considerados como ejemplos de la unidad teórica, a modo de ejercicio resuelto), no tendremos en cuenta estas correcciones en el análisis de los cuadernos.

Unidad teórica (UT2):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo propio de este tema durante esta sesión.

Unidad práctica (UP2):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad de este tema durante esta clase.

Martes 22 de mayo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Hice huelga.

Información adicional de interés:

Como nos comenta el profesor en su diario, este docente decidió secundar la huelga del sector educativo que se convocó para este día, martes 22/5/2012. Por tanto, este día no hubo clase de matemáticas.

Unidad teórica (UT2):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo, puesto que este día no hubo clase lectiva.

Unidad práctica (UP2):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad al no haber clase lectiva.

Jueves 24 de mayo de 2012 (Hora: 13:15 a 14:05)

Información transcrita del diario del docente:

Asisten todos.

Dedicamos un rato a fijar los exámenes que quedan antes del final, que será el 18 de junio. En principio fijamos el de límites para el 5 de junio y el de derivadas para el 12 de junio.

Hacemos detalladamente los ejercicios 11, 12 y 13 de la colección Funciones 1.

Información adicional de interés:

Finalmente, y como se reflejará en los diarios de los días siguientes al actual, el docente no pudo realizar ningún examen parcial más, ni correspondiente al tema de límite ni al de derivadas. La evaluación de esta parte se hizo directamente en el examen final de la asignatura.

El docente corrige durante esta sesión tres de los ejercicios de la hoja “Funciones 1” que, como habitualmente, no habían sido propuestos explícitamente a los alumnos, sino sólo de forma implícita. Durante la corrección de las actividades se considera que existe una mejora significativa al contenido de alguna de las actividades. En concreto, en el ejercicio 12 de la hoja “Funciones 1”, el profesor añade el estudio de la continuidad de la función definida a trozos en x=1, una vez calculado el valor del parámetro que se solicitaba. El docente indica la existencia de una discontinuidad evitable en x=1 en la función resultante.

Unidad teórica (UT2):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo en esta clase.

Unidad práctica (UT2):

En esta sesión existió una mejora significativa en la corrección de las actividades, así como actividades planteadas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

1. En la corrección del ej. 12 de la hoja “Funciones 1”: una vez calculado el parámetro, se estudió la continuidad de la función en el punto x=1

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

1. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 11 (cálculo de parámetros en una función para que el límite en un punto tenga un valor fijado, corregido en la propia sesión).
2. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 12 (cálculo de parámetros en una función definida a trozos para que exista el límite en un punto fijado, corregido en la propia sesión).
3. ACD: Hoja “Funciones 1”, ej. 13 (cálculo de parámetros en una función para que el límite en un punto tenga un valor fijado, corregido en la propia sesión).

Viernes 25 de mayo de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Este día el docente no elabora su diario, puesto que asistimos como observadores a la clase.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase.

Asisten todos los alumnos a la clase, aunque algunos llegan unos minutos tarde. La colocación es la habitual, salvo el alumno A3 que se ha cambiado a un pupitre de la fila más próxima a la ventana.

El profesor comienza la clase preguntando por la existencia de dudas en la resolución de límites con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ o $\frac{\to 0}{\to 0}$. Los alumnos indican dudas en la resolución de tres límites de la hoja "Funciones 2". Esos límites son: el nº 10 (con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$, y cuya resolución es realizada en la pizarra por el alumno A10), el nº 13 (con la misma indeterminación, y cuya resolución realiza el alumno A9 en la pizarra) y el nº 31 (con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, corregido por el alumno A3 en el encerado).

Tras resolver estos límites, el docente retoma la teoría, explicando el cálculo de límites en funciones irracionales. Se remarca la estabilidad del límite respecto de operaciones algebraicas y la necesidad de comprobar si el límite tiene sentido o no (según sea el dominio de la función). Se realizan y comentan varios ejemplos en los que no existe indeterminación.

Se plantea un ejemplo con una resta de expresiones irracionales en la que se obtiene una indeterminación no tratada hasta ahora: $(\to\infty) - (\to\infty)$. El ejemplo es $\text{lím}_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{2x^2-1})$. Existe un diálogo con los alumnos sobre cómo podría resolverse este límite. Se comentan las soluciones no válidas que proporcionan los alumnos, sin que ninguno llegue al método, que es comentado por el profesor: multiplicar y dividir por la expresión conjugada.

Se plantea un ejemplo con otra indeterminación nueva: $(\to 0)\cdot(\to\infty)$, que es resuelto por el docente indicando que es una indeterminación un poco artificial, puesto que en esos casos suele poder escribirse la expresión de otra forma para llegar a alguna de las indeterminaciones ya tratadas.

En la parte final de la clase se introduce algún límite en funciones exponenciales, remarcando la propiedad de estabilidad del límite que permite su resolución: "$\text{lím}_{x\to h} f(x)^{g(x)} = [\text{lím}_{x\to h} f(x)]^{g(x)}$". De nuevo, la clase concluye sin que se proponga ninguna actividad concreta a los alumnos a modo de deberes.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase hubo contenidos teóricos de tres de los cuatro tipos considerados (todos salvo “Dibujos, esquemas y gráficos”).

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

23. Resolución de límites en funciones irracionales (estabilidad del límite respecto de la raíz: $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$).

24. (Imp) Explicación de cómo se resuelven los límites con indeterminación $(\to\infty)-(\to\infty)$.

25. Explicación de cómo se resuelven los límites con indeterminación $(\to 0)\cdot(\to\infty)$.

26. (Imp) Resolución de límites en funciones exponenciales (estabilidad del límite en una expresión $f(x)^{g(x)}$).

Ejemplos:

17. Límite 1 de una función irracional: $f(x)=\sqrt{x+1}$ en x=-1 por la derecha.

18. Límite 2 de una función irracional: $f(x)=\sqrt{x+1}$ en x=-2 (no existe).

19. Límite 3 de una función irracional: $f(x)=\sqrt{x+1}$ en x=3.

20. Límite 4 de una función irracional: $f(x)=\sqrt{x+1}$ en +∞.

21. Límite 5 de una función irracional: $f(x)=\sqrt{x+1}$ en -∞ (no existe).

22. Límite 6 de una función irracional: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ en +∞.

23. Límite 7 de una función irracional: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ en x=-1.

24. Límite 8 de una función irracional: $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ en x=-2.

25. (Imp) Ejemplo 1 de límite con indeterminación $(\to\infty)-(\to\infty)$: $f(x)=(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2x^2-1})$ en +∞.

26. (Imp) Ejemplo de límite con indeterminación $(\to 0)\cdot(\to\infty)$: $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\sqrt{x^2+2x}$ en +∞.

Observaciones o comentarios de interés:

3. (Imp) Imposibilidad de calcular el límite de una función si ésta no está definida en un entorno reducido del punto.

4. (Imp) Recuerda la necesidad, en una función exponencial, de que la base sea positiva para que exista la función.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

4. ACD: Hoja "Funciones 2", ej. 1, límite nº 10 (límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$, corregido en la propia sesión).
5. ACD: Hoja "Funciones 2", ej. 1, límite nº 13 (mismo propósito anterior, corregido en la propia sesión).
6. ACD: Hoja "Funciones 2", ej. 1, límite nº 31 (límite con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, corregido en la propia sesión).

Lunes 28 de mayo de 2012 (Hora: 8:15 a 9:05)

Información transcrita del diario del docente:

Faltó uno de los alumnos no participante en el análisis.

Hacemos el ejercicio 14 (lo hago yo) y el 15 (sale el alumno A2) de la hoja Funciones 1.

Insistimos en las indeterminaciones $\infty - \infty$ con raíces cuadradas.

Volvemos sobre las indeterminaciones exponenciales.

Información adicional de interés:

Consideramos que el docente realizó una mejora significativa al contenido de una de las actividades corregidas. En particular, en el ejercicio número 15 de la hoja "Funciones 1" y tras realizar el cálculo de las asíntotas de la función racional que se proponía, el docente añade que la función se acerca a la asíntota horizontal y=0 por encima de dicha asíntota (tanto cuando $x \to +\infty$ como cuando $x \to -\infty$), aspecto que obtiene estudiando el signo con el que tiende a cero la función en ambos casos.

Al retomar la teoría sobre límites en funciones exponenciales, realiza varios ejemplos. Es interesante resaltar la utilización de una tabla de valores para obtener el valor del límite en el primero de ellos ($\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$), y el recuerdo de una de las observaciones y comentarios de interés ya introducidos en la sesión anterior, del viernes 25/5/2012 (la no existencia de la función y. por tanto. imposibilidad de calcular el límite, cuando la base de la función exponencial es negativa en un entorno reducido).

<u>Unidad teórica (UT2):</u>

En esta sesión se impartieron nuevos contenidos teóricos únicamente de uno de los cuatro tipos: "Ejemplos".

Ejemplos:

27. Ejemplo 2 de límite con indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$: $f(x) = x - \sqrt{x}$ en +∞.

28. Ejemplo 3 de límite con indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$: $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$ en +∞.

29. Ejemplo 1 de límite de función exponencial: $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ cuando $x \to 0^+$ (utilizando una tabla de valores).

30. Ejemplo 2 de límite de función exponencial: $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ en +∞.

31. Ejemplo 3 de límite de función exponencial: $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ en -∞.

32. Ejemplo 4 de límite de función exponencial: $f(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)^x$ en -∞.

<u>Unidad práctica (UP2)</u>:

En esta sesión existió una mejora significativa en la corrección de las actividades, así como actividades planteadas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

2. En la corrección del ej. 15 de la hoja "Funciones 1": indicación de la posición de la función con respecto de las asíntota horizontal y=0 existente (estudio del signo de la función).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

7. ACD: Hoja "Funciones 1", ej. 14 (búsqueda de los puntos en los que una función racional es un infinitésimo, es decir, en los que su límite es cero; corregido en la propia sesión).
8. ACD: Hoja "Funciones 1", ej. 15 (estudio de las asíntotas verticales y horizontales de una función racional, corregido en la propia sesión).

Martes 29 de mayo de 2012. Hora: 11:25 a 12:15 h.

Información transcrita del diario del docente:

Asistieron todos.

Dedicamos otro rato a charlar sobre el examen de límites y funciones. Lo fijamos definitivamente para el viernes 8 de junio. Les ha comunicado la Jefa de Estudios que entre el 4 y el 14 de junio (10 días antes de la semana de exámenes finales) no se pueden hacer exámenes.

Nos dedicamos a la indeterminación exponencial 1^{∞} y la forma de resolverla.

Información adicional de interés:

El profesor recuerda y remarca durante toda la clase cuál es el límite clave para resolver las indeterminaciones de tipo $(\to 1)^{\to\infty}$, derivado del límite a través del cual se define el número e. Dicho límite es: $\text{lím}_{f(x)\to+\infty}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$.

Unidad teórica (UT2):

En esta sesión hubo contenidos de dos de los cuatro tipos considerados, "Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones" y "Ejemplos".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

27. (Imp) Propiedad del número e que permite resolver límites con indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$.
28. (Imp) Explicación de cómo se resuelven los límites con indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$

Ejemplos:

33. Ejemplo 1 de límite con indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$: $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{x}$ en +∞.

34. Ejemplo 2 de límite con indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$: $f(x) = (1+\frac{1}{x^2})^{x^2}$ en +∞.

35. Ejemplo 3 de límite con indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$: $f(x) = (1+\frac{1}{\sqrt{x}})^{\sqrt{x}}$ en +∞.

36. Ejemplo 4 de límite con indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$: $f(x) = (1-\frac{1}{x})^{-x}$ en -∞.

37. Ejemplo 5 de límite con indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$: $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ en x=0.

38. (Imp) Ejemplo 6 de límite con indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$: $f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x^2}$ en +∞

39. (Imp) Ejemplo 7 de límite con indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$: $f(x) = \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x}$ en +∞.

Unidad práctica (UP2):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta clase.

Jueves 31 de mayo de 2012 (Hora: 13:15 a 14:05)

Información transcrita del diario del docente:

Faltó un alumno que no participa con su cuaderno en el análisis.

Les comunico que, por imposición de Jefatura de Estudios, no habrá examen de límites y derivadas antes del examen final.

Algunos alumnos (A2, A6, A10 y otro alumno no participante con su cuaderno en el análisis) preguntan por los límites número 37, 69, 41, 104, 98 y 96 del ejercicio 1 de la hoja Funciones 2. Se hacen todos detalladamente.

Información adicional de interés:

Como puede observarse en el diario que nos proporciona el docente, la clase se dedica a la corrección de ejercicios asociados al cálculo de límites de funciones en los que existe alguna indeterminación, todos ellos extraídos del ejercicio 1 de la hoja "Funciones 2".

Consideramos que el docente realizó varias mejoras significativas al contenido de las actividades corregidas. En particular, en el límite nº 37 (con una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$ y en el que hay un parámetro) se indica la existencia de asíntota vertical en x=a cuando a=0, mientras que para a≠0 el límite sí que existe y es finito. En el límite nº 41 también se indica la presencia de asíntota vertical en el punto en el que se está calculando el límite de una función (donde existía una indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$). Por último, en el límite nº 98 (con indeterminación del tipo $(\to 1)^{\to\infty}$) se indica la existencia de asíntota horizontal en la función cuando $x \to +\infty$.

Además, al terminar la corrección del límite nº 69, el docente realizó un comentario de interés, indicando la relación que existía entre el límite que se había resuelto y el concepto que se desarrollará en el tema siguiente: la derivada (el límite correspondía con el cociente incremental de la función $f(x) = x^3$).

Unidad teórica (UT2):

En esta sesión no se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP2):

En esta sesión existieron varias mejoras significativas en la corrección de las actividades, así como actividades planteadas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

3. En la corrección del ej. 1, límite nº 37, de la hoja “Funciones 2”: estudio e interpretación del resultado obtenido para el límite según cuál sea el valor del parámetro “a”.

4. En la corrección del ej. 1, límite nº 41, de la hoja “Funciones 2”: indicación de la existencia de una asíntota vertical ante el resultado obtenido en el límite.

5. En la corrección del ej. 1, límite nº 98, de la hoja “Funciones 2”: indicación de la existencia de una asíntota horizontal ante el resultado obtenido en el límite.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

9. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 37 (cálculo de un límite con una indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ y dependiente de un parámetro “a”, corregido en la propia sesión).

10. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 69 (mismo propósito anterior, corregido en la propia sesión).

11. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 41 (cálculo de un límite con una indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$, corregido en la propia sesión).

12. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 104 (cálculo de un límite en una función potencial-exponencial, de la forma $f(x)^{g(x)}$, corregido en la propia sesión)

13. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 98 (cálculo de un límite con una indeterminación $(\to 1)^{\to\infty}$, corregido en la propia sesión).

14. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 96 (mismo propósito anterior, corregido en la propia sesión).

Viernes 1 de junio de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Los alumnos A6 y A9, que estaban en un examen de Biología, llegan 15 minutos tarde.

Un alumno no participante en el análisis preguntó, y salió a hacer el límite número 36 del ejercicio 1 de Funciones 2.

Yo hago detalladamente los ejercicios 3, 4 y 5 de la misma colección, relativos al estudio de la continuidad y asíntotas de funciones, destacando la interpretación gráfica en todos ellos.

Información adicional de interés:

De nuevo, esta clase es dedicada de forma completa a la corrección de actividades de la hoja “Funciones 2”, que no habían sido propuestas explícitamente a los alumnos, pero sí implícitamente de modo general.

Consideramos que el docente realizó varias mejoras significativas al contenido de las actividades corregidas. En concreto, en el ejercicio 3 de la hoja “Funciones 2” indica explícitamente la existencia de asíntota vertical en los tres puntos en los que la función racional proporcionada tenía una discontinuidad (que era inevitable de salto infinito). Por otra parte, en los dos apartados del ejercicio 5 de esa misma hoja, reformula el enunciado para que, además de estudiar la continuidad de las dos funciones que se proporcionan, también se realice el estudio de las asíntotas horizontales y verticales existentes, así como la interpretación de la información para realizar un esbozo de la representación gráfica de las mismas.

Unidad teórica (UT2):

En esta sesión no se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP2):

En esta sesión existieron varias mejoras significativas en la corrección de las actividades, así como actividades planteadas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

6. En la corrección del ej. 3 de la hoja “Funciones 2”: indicación de las asíntotas verticales existentes en el cálculo de varios de los límites de la función racional.

7. En la corrección del ej. 5, apartado a, de la hoja “Funciones 2”: estudio de las asíntotas horizontales y verticales de la función irracional e interpretación gráfica de los resultados (esbozo de la representación gráfica de la función)

8. En la corrección del ej. 5, apartado b, de la hoja “Funciones 2”: estudio de las asíntotas horizontales y verticales de la función racional definida a trozos, e interpretación gráfica de los resultados (esbozo de la representación gráfica de la función)

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

15. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 36 (cálculo de un límite con una indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$, corregido en la propia sesión).

16. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 3 (cálculo de un parámetro para que una función racional sea discontinua en un punto y estudio de la discontinuidad existente, corregido en la propia sesión).

17. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 4 (cálculo de un parámetro para que una función definida a trozos sea continua en un punto, corregido en la propia sesión).

18. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 5, apartado a (estudio de la continuidad de una función irracional, corregido en la propia sesión).

19. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 5, apartado b (estudio de la continuidad de una función racional definida a trozos, corregido en la propia sesión).

Lunes 4 de junio de 2012 (Hora: 8:15 a 9:05)

Información transcrita del diario del docente:

Un alumno no participante en el análisis llegó 10 minutos tarde.

Nadie plantea dudas sobre lo visto hasta ahora.

Recordamos cómo se determinan las asíntotas verticales y horizontales de una función y dedicamos el resto de la clase a cómo localizar las asíntotas oblicuas de una función cuando existen.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase. Complemento a continuación con mayor detalle la información que escribió el docente en su diario sobre la localización de asíntotas oblicuas en una función.

En primer lugar, explica qué significa que una función tenga una asíntota oblicua, poniendo dos ejemplos de representaciones gráficas de funciones que la tienen (una de ellas cuando $x \to +\infty$ y la otra cuando $x \to -\infty$).

Utilizando como apoyo un ejemplo con una función racional ($f(x) = \frac{x^2}{x+1}$), el docente explica el modo de calcular tanto la pendiente como la ordenada en el origen de la asíntota oblicua (en caso de que exista), intentando ilustrar y justificar la obtención de las fórmulas (aspecto que se mostró complejo para los alumnos, que preguntaron bastantes dudas). Explica dos procedimientos para la obtención de la ordenada en el origen una vez calculada la pendiente de la asíntota oblicua. Posteriormente, realizó otro ejemplo más con otra función racional del mismo estilo que la anterior.

Durante estos dos ejemplos, salieron aspectos interesantes, como la imposibilidad de que exista a la vez asíntota horizontal y oblicua en un mismo lado (cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$) y la presencia de asíntota oblicua en funciones fraccionarias donde el numerador es un polinomio con un grado una unidad mayor que el denominador.

El docente propuso una función fraccionaria más para que los alumnos, durante la propia clase, estudiaran si tiene o no asíntota oblicua y cuál es su ecuación. La función fue $f(x) = \frac{3x^2+x}{1-x}$. Unos minutos después fue corregida por el docente.

La clase termina con otro ejemplo desarrollado por el docente, con una función fraccionaria en la que se realiza el estudio de su dominio y asíntotas: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1}$.

Unidad teórica (UT2):

En esta sesión hubo contenidos correspondientes a los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

29. (Imp) Fórmula para obtener la pendiente de una asíntota oblicua y=mx+n: $m = \text{lím}_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ (si el resultado es un número finito no nulo).

30. Justificación de la fórmula para obtener la pendiente de una asíntota oblicua.

31. (Imp) Una fórmula posible para obtener la ordenada en el origen de una asíntota oblicua y=mx+n (cálculo indirecto): imponiendo que $\text{lím}_{x\to\infty}\big(mx + n - f(x)\big) = 0$.

32. Justificación de la fórmula anterior para obtener la ordenada en el origen de una asíntota oblicua.

33. (Imp) Otra fórmula posible para obtener la ordenada en el origen de una asíntota oblicua y=mx+n (fórmula directa): $n = \text{lím}_{x\to\infty}(f(x) - mx)$.

34. Justificación de la fórmula anterior para obtener la ordenada en el origen de una asíntota oblicua.

Ejemplos:

40. (Imp) Cálculo de la pendiente de la asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

41. (Imp) Cálculo 1 de la ordenada en el origen de la asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ (utilizando que $\text{lím}_{x\to\infty}\big(mx + n - f(x)\big) = 0$).

42. (Imp) Cálculo 2 de la ordenada en el origen de la asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ (utilizando la fórmula $n = \text{lím}_{x\to\infty}(f(x) - mx)$).

43. Ejemplo de cálculo de la asíntota oblicua: función $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+4}$.

44. Ejemplo de cálculo del dominio y de las asíntotas: función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

5. (Imp) Gráfica de función con asíntota oblicua cuando x tiende a +∞.

6. (Imp) Gráfica de función con asíntota oblicua cuando x tiende a -∞.

7. (Imp) Gráfica de una recta para recordar la pendiente y su cálculo (en la justificación de la fórmula de la pendiente de una asíntota oblicua).

Observaciones o comentarios de interés:

5. (Imp) Imposibilidad de existencia a la vez de asíntota horizontal y oblicua (en un mismo lado).
6. (Imp) Existe asíntota oblicua en funciones fraccionarias cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

20. ACD: Estudia la existencia de asíntota oblicua en la función $f(x) = \frac{3x^2+x}{1-x}$ y, en caso afirmativo, indica su ecuación (corregida poco después en la misma sesión).

Martes 5 de junio de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Un alumno no participante en el análisis llegó más de 5 minutos tarde que la mayoría de los demás (que también llegaron algo tarde).

El alumno A3 preguntó, y salió a hacer, el límite número 93 del ejercicio 1 de Funciones 2.

Calculamos la asíntota oblicua de una función irracional.

Introdujimos el concepto de derivada de modo gráfico: como pendiente de la recta tangente a la función en un punto, a partir del hecho de que el signo de esa pendiente determina dónde es creciente o decreciente la función.

Información adicional de interés:

Como observamos en el diario escrito por el docente, durante esta clase se terminó el segundo tema de este bloque (límites y continuidad) y ya se empieza con la teoría del tercer y último tema (derivada de una función).

Durante la corrección de la actividad del tema de límites y continuidad, consideramos que el docente realizó una mejora significativa al contenido de la misma. La actividad proponía el cálculo del límite de una función, límite que no existía. El docente propuso el cálculo del dominio de la función cuyo límite cuando

$x \to +\infty$ se pedía calcular: en este caso se consideró, $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{2+x}}$, cuyo dominio es D=(-∞,-2)∪ $[-1{,}1]$, por lo que no está definida para valores mayores que x=1, lo que imposibilita la existencia de dicho límite.

Para aclarar qué partes corresponden a cada uno de los dos temas, separamos los contenidos propios de la unidad teórica y de la unidad práctica de ambos temas.

Unidad teórica (UT2):

En relación a los contenidos teóricos de este tema, durante esta sesión se desarrolló un ejemplo.

Ejemplo:

45. (Imp) Ejemplo de estudio de la continuidad y existencia de asíntotas: $f(x) = \frac{1-\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^2+2}}$.

Unidad teórica (UT3):

Hubo contenidos teóricos de tres de los cuatro tipos (todos salvo “Observaciones o comentarios de interés”) en la parte de la clase teórica dedicada al tema de la derivada de una función.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. (Imp) Fórmula de la pendiente de la recta tangente a una función en x=a (límite de las secantes).
2. (Imp) Explicación de la obtención de la fórmula de la recta tangente.
3. (Imp) El límite anterior recibe el nombre de derivada de la función en el punto.
4. (Imp) Relación entre la pendiente de recta tangente y la monotonía de la función.
5. (Imp) Notación de la derivada y dos límites para calcularla: $f'(a) = \text{lím}_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \text{lím}_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Ejemplos:

1. (Imp) Cálculo de la pendiente de la recta tangente en x=3 de la función $f(x)=x^2$.
2. (Imp) Cálculo de la pendiente de la recta tangente de la función $f(x)=x^2$ en un punto genérico.

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. (Imp) Representación gráfica de $f(x)=x^2$, rectas secantes y aproximación a la tangente en un punto.
2. (Imp) Gráfica que explica el segundo límite para definir la derivada (utilizando "h").

<u>Unidad práctica (UP2)</u>:

En relación a este tema, en esta clase hubo una mejora significativa en la corrección de la actividad planteada durante la misma.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

9. En la corrección del ej. 1, límite nº 93, de la hoja “Funciones 2”: estudio del dominio de la función cuyo límite se pide calcular y justificación de la no existencia de dicho límite.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

21. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 93 (cálculo de un límite en una función irracional con un radicando racional, corregido en la propia sesión).

Jueves 7 de junio de 2012 (Hora: 13:15 a 14:05)

<u>Información transcrita del diario del docente:</u>

Asistieron todos. Un alumno no participante en el análisis tuvo que irse 10 minutos antes para ir al dentista.

Realizamos los límites número 58, 59 y 63 de la hoja Funciones 2, a petición de los alumnos A3 y A9, entre otros.

Introducimos la derivada de una función en un punto como pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto. Previamente se menciona de modo gráfico la utilidad de la recta tangente como indicador del crecimiento y decrecimiento de la función. Ejemplos: función cuadrática elemental, función raíz cuadrada.

Función derivada: los mismos ejemplos que antes.

Información adicional de interés:

De nuevo, en esta clase existe una mezcla entre los temas segundo y tercero de este bloque, puesto que las actividades que se corrigen corresponden al tema anterior (tratan el cálculo de límites), y posteriormente se continúa con la teoría del tema tercero (derivadas). Por tanto, presentaremos por separado los contenidos propios de la unidad teórica y de la unidad práctica de ambos temas.

Además de los tres límites que el docente indica en su diario, también se propuso durante la clase y se corrigió un límite más, con una indeterminación de tipo $(\to\infty)-(\to\infty)$. Dicho límite fue $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$. Durante la corrección de actividades del tema de límites y continuidad, consideramos que el docente realizó dos mejoras significativas a los contenidos de la misma (que, en todos los casos, trataban el cálculo de límites de funciones con indeterminaciones de distinta índole). Las mejoras se corresponden a la resolución de los límites nº 63 y nº 59 del ejercicio 1 de la hoja "Funciones 2", en los que el docente, además de calcular el límite, indicó cuál era el dominio de las funciones que aparecían en esos límites.

Con respecto a la teoría sobre el tema de derivadas, se volvió sobre gran parte de los contenidos introducidos en la sesión anterior (martes 5/6/2012) antes de continuar con los contenidos de este tema. Debido a los pocos días que quedan para terminar el curso, el docente va a presentar la teoría fundamental sobre derivadas y reglas de derivación, sin que se proponga ni corrija ningún ejercicio durante estos días restantes del análisis (por lo que esta unidad de derivadas será íntegramente teórica, UT3, sin que exista UP3).

Unidad teórica (UT3):

En esta sesión hubo contenidos sobre el tema de derivadas de tres de los cuatro tipos considerados (todos salvo "Dibujos, esquemas y gráficos").

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

6. Construcción de la función derivada.
7. (Imp) Ilustración del cálculo de la expresión de la recta tangente en un punto a partir de la derivada.

Ejemplos:

3. Derivada de la función $f(x)=x^2$ (calculando el límite del cociente incremental).

4. (Imp) Derivada de la función f(x)=1/x (calculando el límite del cociente incremental).

5. (Imp) Derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ (calculando el límite del cociente incremental).

6. (Imp) Ejemplo de cálculo de la ecuación de la recta tangente: $f(x) = \sqrt{x}$ en x=4.

Observaciones o comentarios de interés:

1. (Imp) El cálculo del límite que nos da la derivada solo es accesible en algunas funciones.

Unidad práctica (UP2):

En esta sesión se plantearon y corrigieron varias actividades sobre el tema de límite de una función, existiendo además varias mejoras significativas durante la corrección de dichas actividades.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

10. En la corrección del ej. 1, límite nº 63, de la hoja “Funciones 2”: estudio y cálculo del dominio de la función cuyo límite en x=3 se pide calcular.

11. En la corrección del ej. 1, límite nº 59, de la hoja “Funciones 2”: estudio y cálculo del dominio de la función cuyo límite en x=0 se pide calcular.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

22. ACD: Cálculo del límite $\text{lím}_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}})$ (límite con indeterminación $(\to\infty) - (\to\infty)$, corregido en la propia sesión).

23. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 58 (cálculo de un límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$, corregido en la propia sesión).

24. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 63 (mismo propósito anterior, corregido en la propia sesión).

25. ACD: Hoja “Funciones 2”, ej. 1, límite nº 59 (mismo propósito anterior, corregido en la propia sesión).

Viernes 8 de junio de 2012 (Hora: 11:25 a 12:15)

Información transcrita del diario del docente:

Asistieron todos. Una alumna no participante en el análisis llegó más de 15 minutos tarde.

Les comento que el lunes próximo deberán traer el cuaderno (la parte de Análisis).

Les entrego una nueva colección de ejercicios (Funciones 3) sobre derivadas y sus aplicaciones. También un breve resumen con las derivadas elementales, las reglas de derivación y los procedimientos de derivación logarítmica y función recíproca.

Deducimos las derivadas de las funciones potenciales, usando la definición.

Introducimos las reglas de derivación con respecto a las operaciones algebraicas: derivadas de funciones enteras y fraccionarias.

Regla de la cadena: ejemplos.

Información adicional de interés:

A pesar de que el docente les entrega a los alumnos una hoja de ejercicios, titulada "Funciones 3", ninguna de estas actividades fue planteada ni corregida durante estos dos últimos días del análisis. Debido al inminente final de las clases para la preparación de los exámenes finales (que se celebraron en el centro durante la semana del 18 al 22 de Junio de 2012, siendo el último día de clase reglada el miércoles 13/6/2012, y el último día de clase de matemáticas el martes 12/6/2012), y la necesidad de un margen de un día para recoger los cuadernos de los alumnos, poder hacer las fotocopias y devolver dichos cuadernos a sus propietarios, la próxima sesión de clase (Lunes 11/6/2012) fue la última sesión que entra dentro de este análisis.

Se incluye al final de la información correspondiente a esta sesión los escaneos del resumen teórico sobre derivadas (dos hojas, Figuras B.8 y B.9), de las tres hojas de ejercicios que componen "Funciones 3" (Figuras B.10 a B.12), junto con las dos hojas con las soluciones de dichas actividades (Figuras B.13 y B.14). Todas estas hojas fueron proporcionadas en esta sesión por el Docente 1 a sus alumnos.

Unidad teórica (UT3):

En esta clase hubo contenidos teóricos de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

8. (Imp) Derivada de una función constante genérica, f(x)=k.
9. (Imp) Justificación de la derivada de una función constante (gráfica, a partir de la idea de recta tangente).
10. (Imp) Derivada de una función afín genérica, f(x)=mx+n.
11. (Imp) Justificación de la derivada de una función afín (gráfica, a partir de la idea de recta tangente).
12. (Imp) Derivada de una función potencial genérica, f(x)=x^n.
13. Justificación de la derivada de una función potencial (cálculo del límite del cociente incremental).
14. (Imp) Regla para la derivada de una suma/resta de funciones.
15. (Imp) Regla para la derivada del producto de una constante por una función.
16. (Imp) Regla para la derivada de un producto de funciones.
17. (Imp) Regla para la derivada de un cociente de funciones.
18. (Imp) Regla para la derivada de una composición de funciones (Regla de la cadena).

Ejemplos:

7. (Imp) Ejemplo de derivación de una suma de funciones: f(x)=x^5+x^2.
8. (Imp) Ejemplo de derivación de un polinomio: f(x)=$3x^4-2x^3+x^2-x$.
9. (Imp) Ejemplo de derivación de un producto de funciones: f(x)=$(3x^5+2x^2)\cdot(x^2-1)$.
10. (Imp) Ejemplo 1 de derivación de un cociente de funciones: $f(x)=\frac{3x^2+1}{x^3}$.
11. Ejemplo 2 de derivación de un cociente de funciones: $f(x)=\frac{1}{x^n}$.
12. Ejemplo 1 de derivación de una función potencial: $f(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$.
13. Ejemplo 2 de derivación de una función potencial: $f(x)=\frac{1}{x^4}=x^{-4}$.
14. Ejemplo 3 de derivación de una función potencial: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3}$.
15. (Imp) Ejemplo 1 de derivación de una función compuesta: f(x)=$(x^2+1)^3$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

3. (Imp) Gráfica de una función constante (para justificar su función derivada).
4. (Imp) Gráfica de una función afín (para justificar su función derivada).

Observaciones o comentarios de interés:

2. (Imp) Idea de recta tangente como recta que mejor aproxima a la función en el entorno de un punto.

3. (Imp) Utilidad de la fórmula derivación función potencial (exponente entero, fraccionario).

4. (Imp) Aplicación de la linealidad de la derivada para derivar funciones polinómicas.

5. (Imp) Posibilidad de aplicar dos reglas distintas para derivar una función: $f(x) = \frac{1}{x^n}$.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Tipo de operación	Función	Derivada
Suma y diferencia	$y=(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$y'=(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
	$y=(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$y'=(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$
Producto	$y=(k\cdot f)(x)=k\cdot f(x)$	$y'=(k\cdot f)'(x)=k\cdot f'(x)$
	$y=(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$	$y'=(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Cociente	$y=\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y'=\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Composición (Regla de la cadena)	$y=(g\circ f)(x)=g[f(x)]$	$y'=(g\circ f)'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)$

DERIVADAS ELEMENTALES

Tipo de función	Función	Derivada
Constante	$y=k$	$y'=0$
Identidad	$y=x$	$y'=1$
Potencial	$y=x^r,\ r\in IR$	$y'=r\cdot x^{r-1}$
Raíces	$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Logarítmicas	$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
	$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$
Exponenciales	$y=e^x$	$y'=e^x$
	$y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$
Trigonométricas	$y=\operatorname{sen} x$	$y'=\cos x$
	$y=\cos x$	$y'=-\operatorname{sen} x$
	$y=\operatorname{tg} x$	$y'=1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$
	$y=\operatorname{arcsen} x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y=\arccos x$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$

- 1 -

Figura B.8. Escaneo de la primera hoja con el resumen teórico de derivadas proporcionado por el Docente 1

PROCEDIMIENTOS DE DERIVACIÓN

De la función recíproca

Si queremos hallar la derivada de $y = f^{-1}(x)$ (si existe), compondremos con $y = f(x)$:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = x,$$

y derivaremos aplicando la regla de la cadena:

$$f'\left[f^{-1}(x)\right] \cdot \left(f^{-1}\right)'(x) = 1,$$

de donde se obtiene que:

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}}.$$

Por ejemplo, si queremos hallar la derivada de $y = \operatorname{arctg} x$, que es la recíproca de $y = \operatorname{tg} x$, componemos $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, y derivamos aplicando la regla de la cadena: $\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x) \cdot \operatorname{arctg}' x = 1$, de donde $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Derivación logarítmica

Para hallar la derivada de funciones de la forma $y = f(x)^{g(x)}$ aprovecharemos las propiedades y derivada del logaritmo neperiano aplicándolo a la igualdad anterior. Se obtendrá, entonces:

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x),$$

derivaremos en ambos extremos de la igualdad aplicando las reglas convenientes, llegando a:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x),$$

de donde se deducirá que:

$$\boxed{y' = \left[\ln f(x)^{g'(x)} + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right] \cdot f(x)^{g(x)}}$$

Por ejemplo, si queremos derivar la función $y = x^x$, aplicamos logaritmos neperianos a ambos miembros de la igualdad: $\ln y = \ln x^x = x \cdot \ln x$. Derivamos en ambos extremos de la igualdad y obtendremos: $\dfrac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot 1 = 1 + \ln x$, de donde se deduce que

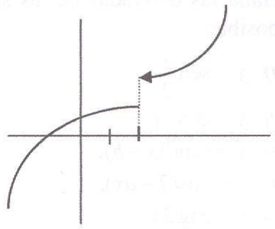
$$y' = (1 + \ln x) \cdot x^x.$$

- 2 -

Figura B.9. Escaneo de la segunda hoja con el resumen teórico de derivadas proporcionado por el Docente 1

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 3

1.- Dada la función $y = f(x)$, cuya gráfica es la que se muestra, averigua razonadamente si en el punto de abcisa $x = 2$ tiene derivada.



2.- Halla la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada en un punto genérico:

1) $y = 3x^2 + 5$; *2)* $y = x^3 - 3x^2$; *3)* $y = \dfrac{3}{x^2+1}$;

4) $y = e^x$; *5)* $y = \operatorname{tg} x$; *6)* $y = \sec x$;

3.- Halla las ecuaciones de las tangentes a las curvas correspondientes a las cuatro primeras funciones del ejercicio anterior en los puntos de abcisa x = -1, x = 0, x = 1 y x = 2, respectivamente.

4.- ¿Cómo pueden hallarse los puntos de la gráfica de una función en los cuáles la tangente es paralela al eje de abcisas? Aplícalo a la función $y = x^3 - 12x$.

5.- Dada la función $y = 2x^2 - 3x - 1$, halla las coordenadas de los puntos de su gráfica en los que la tangente forma con el eje de abcisas un ángulo de 45º.

6.- Halla las derivadas de las siguientes funciones, simplificándolas todo lo posible:

1) $y = \dfrac{x}{5}$,
2) $y = \dfrac{5}{x}$,
3) $y = \dfrac{x^3+2}{3}$,
4) $y = x^n$,
5) $y = x^{-n}$,
6) $y = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4$,
7) $y = \dfrac{6x^4}{11} - 5x^2 + \dfrac{2}{3}x + 4$,
8) $y = x^2(7 - x)$,
9) $y = (5x^2 - 3)(x^2 + x + 4)$,
10) $y = x^2 e^x$,
11) $y = \dfrac{x-a}{x+a}$,
12) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$,
13) $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 7x}{x}$,
14) $y = \dfrac{1}{3x^2}$,

7.- Haciendo uso de la regla de la cadena, cuando proceda, calcula las derivadas de las funciones siguientes, simplificándolas todo lo posible:

1) $y = (x-2)^2$,
2) $y = (ax^2 + b)^4$,
3) $y = (1 - x^2)^3$,
4) $y = \dfrac{x^5}{(1-x)^5}$,
5) $y = \sqrt{3x}$,
6) $y = \sqrt{2-x}$,
7) $y = \sqrt[3]{3x^2}$,
8) $y = x\sqrt{3x^2 - 1}$,
9) $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$,
10) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,
11) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,
12) $y = \dfrac{\ln x}{x}$,
13) $y = \ln(x-2)^2$,
14) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$,
15) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,
16) $y = \sqrt{\ln x}$,
17) $y = \ln\sqrt[4]{x^3}$,
18) $y = \log_a(1 + 2x)$,
19) $y = \log\dfrac{2-x}{2+x}$,
20) $y = \log\left(x\sqrt{1+x^2}\right)$,
21) $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$,
22) $y = e^{2x}\ln\dfrac{1}{x}$,
23) $y = \ln\dfrac{e^x}{e^x - 1}$,
24) $y = \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^3$,

1

Figura B.10. Escaneo de la primera hoja de ejercicios de “Funciones 3”

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 3

8.- Halla las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas, simplificándolas todo lo posible:

1) $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$,
2) $y = \cos 5x$,
3) $y = \operatorname{sen}(7x - b)$,
4) $y = \cos(7 - ax)$,
5) $y = 3\operatorname{tg} 2x$,
6) $y = \operatorname{sen}^2 x$,
7) $y = \cos^2(x^2+1)$,
8) $y = \operatorname{tg}^3 5x$,
9) $y = \operatorname{sen}^3 4x$,
10) $y = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$,
11) $y = \ln[\operatorname{tg}(1-x)]$,
12) $y = \operatorname{sen}\sqrt{\ln(1-3x)}$,
13) $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$,
14) $y = \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x$,
15) $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x+1)}{\cos(1-x)}$,
16) $y = \sec(5x+2)$,
17) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \cos^2(2x+1)$,
18) $y = \operatorname{cosec}^2(1-x)$,
19) $y = \dfrac{\cos 2x + \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x - \operatorname{sen} 2x}$,
20) $y = \operatorname{arcsen} 2x$,
21) $y = \arccos x^2$,
22) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{1-x}$,
23) $y = \operatorname{arcsen}\dfrac{x+1}{x-1}$.

9.- Aplicando la derivación logarítmica, calcula las derivadas de las siguientes funciones, simplificándolas todo lo posible:

1) $y = a^{5x^2}$,
2) $y = 8^{3x^2-1}$,
3) $y = e^{x^2}$,
4) $y = a^x \cdot x^a$,
5) $y = e^{\sqrt{x}}$,
6) $y = 2^{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$,
7) $y = x^{\frac{1}{x}}$,
8) $y = 5^{x^x}$,
9) $y = (\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$,
10) $y = \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{a^{\sqrt{x}}}$,
11) $y = x^{\operatorname{tg} x}$,
12) $y = 2^{\ln(\cos x)}$,
13) $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x}$,
14) $y = x^{\sec x}$,
15) $y = (x^2+4x-1)^x$,
16) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$,
17) $y = (\arccos x)^{x^2}$.

10.- Calcula las derivadas 1ª, 2ª, 3ª y 4ª de las funciones:

1) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$, *2)* $y = \dfrac{1}{x}$, *3)* $y = \operatorname{sen}(ax+b)$.

11.- Calcula las derivadas n-simas de las funciones:

1) $y = \dfrac{1}{x}$, *2)* $y = e^{ax}$, *3)* $y = a^{bx}$, *4)* $y = \ln(ax)$.

12.- Halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos cuya abcisa se indica:

1) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x+2}$, en sus ceros;
2) $y = x^3 + 3x^2 + 4$, en $x = -2$;
3) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, en $x = 2$;
4) $y = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, en $x = 2$;
5) $y = 2x^5 + \sqrt[3]{1+x}$, en $x = 0$;
6) $y = e^{\cos x}$, en $= \dfrac{\pi}{2}$;
7) $y = \dfrac{4}{3}(x^2+x-3)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$, en $x = \dfrac{1}{2}$;
8) $y = \sqrt{3x^2 + (x^2-1)^3}$, en $x = 1$;
9) $y = \dfrac{x(x-1)}{e^x}$, en $x = 0$.

13.- Halla el valor de a para que la derivada de la función $y = \dfrac{x^3+a}{3x}$ en $x = 4$ sea 2.

14.- Averigua si la derivada de la función $y = e^{-x}$ puede anularse en algún punto.

2

Figura B.11. Escaneo de la segunda hoja de ejercicios de “Funciones 3”

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 3

15.- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,2) y por el punto B(3,n), siendo n el valor de la derivada de la función $y = 3x^2 - 6x - 1$ en el punto de abcisa $x = 1$.

16.- Comprueba que no existe ningún valor de x en el que se anule la primera derivada de la función $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, y que en $x = 0$ se anula la derivada segunda.

17.- Determina el valor de h en cada caso:

1) $f(x) = \dfrac{x+h}{x-h}$ si $f'(0) = -2$; *2)* $f(x) = \dfrac{x^2+h}{x^2-h}$ si $f''(2) = 0$;

3) $f(x) = \mathrm{sen}\left[(h-1)x\right]$ si $f'''(0) = 0$.

18.- Calcula el valor de la constante k en cada caso sabiendo que en $x = 2$ la derivada es nula :

1) $f(x) = \dfrac{x^k}{e^x}$; *2)* $f(x) = \dfrac{e^x}{x^k}$; *3)* $f(x) = e^x x^k$; *4)* $f(x) = e^k x^k$.

19.- Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x}{3} + 1$ en el punto de abcisa $x = 2$.

20.- Determina m sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{mx+1}{2x+m}$ en el punto de abcisa $x = 1$ es -1.

21.- Halla la ecuación de la recta tangente a las curvas siguientes en los puntos que se indican:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^3+9}{4x-9}}$ en $x = 3$; *2)* $y = (x+2)(x-3)(x-5)$ en los cortes con el eje de abcisas.

22.- Averigua en qué puntos de la curva $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ la tangente tiene una inclinación de 45º.

23.- Halla m para que la tangente a la curva $y = \sqrt{25-x^2}$ en el punto de abcisa $x = 4$ sea perpendicular a la recta $y = mx$.

24.- ¿En qué puntos de la curva $y = x - 3x^2$ la tangente es paralela al eje de abcisas? ¿Y en qué puntos forma un ángulo de 45º con el eje de ordenadas?

3

Figura B.12. Escaneo de la tercera hoja de ejercicios de “Funciones 3”

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 3

SOLUCIONES

3.- $6x+y-2=0,\ y=0,\ 6x+2y-9=0$ y $e^2x-y-e^2=0$. **4.-** En $x = -2$ y en $x = 2$.

5.- En $x = 1$.

6.- *1)* $y'=\frac{1}{5}$, *2)* $y'=-\frac{5}{x^2}$, *3)* $y'=x^2$, *4)* $y'=nx^{n-1}$, *5)* $y'=-nx^{-n-1}$, *6)* $y'=8x^3+3x^2-2x$, *7)* $y'=\frac{24}{11}x^3-10x+\frac{2}{3}$, *8)* $y'=x(14-3x)$, *9)* $y'=20x^3+15x^2+34x-3$, *10)* $y'=(x^2+2x)e^x$, *11)* $y'=\frac{2a}{(x+a)^2}$, *12)* $y'=-\frac{2}{(x-1)^2}$, *13)* $y'=3(x^2-1)$, *14)* $y'=-\frac{2}{3x^3}$,

7.- *1)* $y'=2(x-2)$, *2)* $y'=8ax(ax^2+b)^3$, *3)* $y'=-6x(1-x^2)^2$, *4)* $y'=\frac{5x^4}{(1-x)^6}$, *5)* $y'=\frac{3}{2\sqrt{3x}}$, *6)* $y'=-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$, *7)* $y'=\frac{2}{\sqrt[3]{9x}}$, *8)* $y'=\frac{6x^2-1}{\sqrt{3x^2-1}}$, *9)* $y'=\frac{x-2}{(x-1)\sqrt{x-1}}$, *10)* $y'=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$, *11)* $y'=-\frac{1}{1-x^2}$, *12)* $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$, *13)* $y'=\frac{2}{x-2}$, *14)* $y'=\frac{2}{x^2-1}$, *15)* $y'=-\frac{1}{1-x^2}$, *16)* $y'=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$, *17)* $y'=\frac{3}{4x}$, *18)* $y'=\frac{2}{(1+2x)\ln a}$, *19)* $y'=\frac{-4}{(4-x^2)\ln 10}$, *20)* $y'=\frac{1+2x^2}{x(1+x^2)\ln 10}$, *21)* $y'=\frac{1-x\ln x}{xe^x}$, *22)* $y'=-e^{2x}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$, *23)* $y'=\frac{1}{1-e^x}$, *24)* $y'=\frac{3\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$.

8.- *1)* $y'=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, *2)* $y'=-5\operatorname{sen}5x$, *3)* $y'=7\cos(7x-b)$, *4)* $y'=a\operatorname{sen}(7-ax)$, *5)* $y'=6(1+\operatorname{tg}^2 2x)$, *6)* $y'=\operatorname{sen}2x$, *7)* $y'=-2x\operatorname{sen}(2x^2+2)$, *8)* $y'=15(1+\operatorname{tg}^2 5x)\operatorname{tg}^2 5x$, *9)* $y'=6\operatorname{sen}4x\cdot\operatorname{sen}8x$, *10)* $y'=\frac{\cos 2x}{\sqrt{\operatorname{sen}2x}}$, *11)* $y'=-[\operatorname{ctg}(1-x)+\operatorname{tg}(1-x)]$, *12)* $y'=-\frac{3\cos\sqrt{\ln(1-3x)}}{2(1-3x)\sqrt{\ln(1-3x)}}$, *13)* $y'=\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}$, *14)* $y'=3\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen}^4 x$, *15)* $y'=\frac{\operatorname{sen}(2x+1)[5\cos(x+2)+3\cos 3x]}{2\cos^2(1-x)}$, *16)* $y'=\frac{5\operatorname{sen}(5x+2)}{\cos^2(5x+2)}$, *17)* $y'=-\left[\frac{\cos^2(2x+1)}{\operatorname{sen}^2 x}+\operatorname{ctg}x\operatorname{sen}(4x+2)\right]$, *18)* $y'=\frac{2\cos(1-x)}{\operatorname{sen}^3(1-x)}$,

4

Figura B.13. Escaneo de la primera hoja del solucionario de “Funciones 3”

1º de BACHILLERATO
MATEMÁTICAS I
FUNCIONES 3

19) $y' = \dfrac{4}{1-\operatorname{sen} 4x}$,

20) $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$,

21) $y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$,

22) $y' = 0$,

23) $y = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}$.

9.- *1)* $y' = a^{5x^2} \ln a^{10x}$,

2) $y' = 8^{3x^2-1} \ln 2^{18x}$,

3) $y' = 2xe^{x^2}$,

4) $y = a^x \cdot x^{a-1}(\ln a^x + a)$,

5) $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$,

6) $y' = \dfrac{2^{\operatorname{sen}\sqrt{x}-1} \ln 2^{\cos\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$,

7) $y' = x^{\frac{1-2x}{x}}(1-\ln x)$,

8) $y' = (1+\ln x)5^{x^x} \ln 5^{x^x}$,

9) $y' = \dfrac{(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}\left[x\operatorname{ctg}x - \ln(\operatorname{sen} x)\right]}{x^2}$,

10) $y' = \dfrac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\sqrt{x} - \ln a^{\operatorname{tg} x}}{2\sqrt{x \operatorname{tg} x a^{\sqrt{x}}}}$,

11) $y' = x^{\operatorname{tg} x-1}\left[\ln x^{x(1+\operatorname{tg}^2 x)} + \operatorname{tg} x\right]$,

12) $y' = -2^{\ln(\cos x)} \ln 2^{\operatorname{tg} x}$,

13) $y' = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x}\left(\dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{ctg}x\right)$

14) $y' = x^{\sec x-1}(\cos x - \ln x^{x \sec x \operatorname{tg} x})$,

15) $y' = (x^2+4x-1)^{x-1}\left[2x^2+4x+\ln(x^2+4x-1)^{x^2+4x-1}\right]$,

16) $y' = (\operatorname{arctg} x)^{x-1}\left[\ln(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arctg} x} + \dfrac{x}{1+x^2}\right]$,

17) $y' = (\arccos x)^{x^2}\left[\ln(\arccos x)^{2x} - \dfrac{x^2}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}\right]$.

10.- *1)* $y' = 6x^2 - 30x + 36,\ y'' = 12x - 30,\ y''' = 12,\ y^{iv)} = o$;

2) $y' = -\dfrac{1}{x^2},\ y'' = \dfrac{2}{x^3},\ y''' = -\dfrac{6}{x^4},\ y^{iv)} = \dfrac{24}{x^5}$;

3) $y' = a\cos(ax+b).\ y'' = -a^2 \operatorname{sen}(ax+b),\ y''' = -a^3\cos(ax+b),\ y^{iv)} = a^4 \operatorname{sen}(ax+b)$.

11.- *1)* $y' = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, *2)* $y' = a^n e^{ax}$, *3)* $y' = b^n a^{bx}(\ln a)^n$, *4)* $y' = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

12.- *1)* $y'(1) = -1,\ y'(2) = \dfrac{1}{4}$;

2) $y'(-2) = 0$;

3) $y'(2) = \dfrac{2}{9}$;

4) $y'(2) = \dfrac{2}{3}$;

5) $y'(0) = \dfrac{1}{3}$;

6) $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$;

7) $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13\sqrt{3}}{4}$;

8) $y'(1) = \sqrt{3}$;

9) $y'(0) = -1$.

13.- $a = 32$. **14.-** No. **15.-** $n = 0$ y $x + y - 3 = 0$. **17.-** *1)* $h = -1$; *2)* $h = 0$ ó $h = -12$; *3)* $h = 1$.

18.- *1)* $k = 2$; *2)* $k = 2$; *3)* $k = -2$; *4)* $k = 0$. **19.-** $t: 7x - 3y - 5 = 0$ y $n: 3x + 7y - 27 = 0$.

20.- $m = -1$.

21.- *1)* $t: 2\sqrt{10}x - 5y - \sqrt{10} = 0$;

2) $t_{-2}: 35x - y + 70 = 0,\ t_3: 10x + y - 30 = 0$ y $t_5: 14x - y - 70 = 0$.

22.- En $x = -\sqrt{3},\ x = 0$ y $x = \sqrt{3}$. **23.-** $m = \dfrac{3}{4}$. **24.-** En $x = \dfrac{1}{6}$. En $x = 0$ y en $x = \dfrac{1}{3}$.

5

Figura B.14. Escaneo de la segunda hoja del solucionario de “Funciones 3”

Lunes 11 de junio de 2012 (Hora: 8:15 a 9:05)

Información transcrita del diario del docente:

Este día el docente no elabora su diario, puesto que asistimos como observadores a la clase.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase.

Asisten todos los estudiantes, salvo la alumna A7 y otro alumno que no participa con su cuaderno en el análisis.

Al preguntar a los alumnos sobre posibles dudas, el alumno A9 indica que no le quedó clara la última regla que se vio en la sesión anterior (viernes 8/6/2012): la derivada de una función compuesta. El docente la recuerda a través de un ejemplo, derivando la función $f(x) = \sqrt{(x^3+1)^5}$, donde pone de manifiesto cómo la estructura de la regla se mantiene si se componen más de dos funciones. Tras calcular la derivada, y a modo de repaso, se calcula el dominio de la función y de su derivada y se estudia el signo de esta última (relación con la monotonía de la función).

Continúa la teoría con la derivación de funciones trascendentes. Durante toda la clase siguió el mismo patrón: primero se planteó el cálculo de la derivada de la función que se pretendía (en algunos casos a través del límite del cociente incremental, en otros aplicando propiedades que relacionaban la función con otra o aplicando las reglas de derivación ya vistas) y, una vez obtenida, se institucionalizó el resultado como derivada de la función.

Las funciones tratadas fueron: la función f(x)=sen(x) (cálculo del límite del cociente incremental), f(x)=cos(x) (utilizando su relación con la función seno), f(x)=tg(x) (derivada como cociente), f(x)=ln(x) (cociente incremental), $f(x)=e^x$ (procedimiento de derivación logarítmica), $f(x)=\log_a x$ (fórmula de cambio de base de los logaritmos), $f(x)=a^x$ (derivación logarítmica) y f(x)=arcsen(x) (presentando a través de este ejemplo el procedimiento para derivar la función recíproca de una dada). Además, se escribe la derivada de dos funciones más: f(x)=arccos(x) y f(x)=arctg(x), pero sin justificar la expresión obtenida.

La clase finaliza con la recogida de los cuadernos de matemáticas de los alumnos para la realización de las fotocopias del bloque de Análisis Matemático. Nos lo pasaron nueve alumnos, pero hubo algunos que hicieron caso omiso a la indicación y, como ya se ha comentado al inicio de esta información de interés sobre la sesión, faltaba algún alumno. Así, acordamos con el profesor volver al día siguiente, martes 12/6/2012, para devolver los cuadernos recogidos e intentar recoger alguno más. Ese día nos lo pasó la alumna A7, pero los restantes alumnos no accedieron a proporcionarnos sus cuadernos, por lo que hay cuatro alumnos de esta clase que no nos permitieron recoger la información de su cuaderno para el análisis (alguno de ellos no seguía la asignatura o decía no tener cuaderno).

Unidad teórica (UT3):

En esta clase hubo contenidos teóricos de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

19. (Imp) Derivada de la función seno, f(x)=sen(x).
20. Justificación de la derivada anterior resolviendo el límite del cociente incremental.
21. (Imp) Derivada de la función coseno, f(x)=cos(x).
22. Justificación de la derivada anterior a partir de su relación con la función seno.
23. (Imp) Derivada de la función tangente, f(x)=tg(x).
24. Justificación de la derivada anterior aplicando la regla del cociente.
25. (Imp) Derivada de la función logaritmo neperiano, f(x)=ln(x).
26. Justificación de la derivada anterior resolviendo el límite del cociente incremental.
27. (Imp) Explicación e ilustración de la técnica de derivación logarítmica.
28. (Imp) Derivada de la función exponencial (de base e), $f(x)=e^x$.
29. Justificación de la derivada anterior aplicando la técnica de derivación logarítmica.
30. (Imp) Derivada de la función logaritmo (de base cualquiera), $f(x)=\log_a(x)$.
31. Justificación de la derivada anterior a partir de la fórmula de cambio de base de los logaritmos.
32. (Imp) Derivada de la función exponencial (de base cualquiera), $f(x)=a^x$.
33. Justificación de la derivada anterior aplicando la técnica de derivación logarítmica.

34. (Imp) Explicación e ilustración de la técnica de derivación de la función recíproca.

35. (Imp) Derivada de la función arcoseno (recíproca del seno), f(x)=arcsen(x).

36. Justificación de la derivada anterior aplicando la técnica de derivación de la función recíproca.

37. (Imp) Derivada de la función arcocoseno (recíproca del coseno), f(x)=arccos(x).

38. (Imp) Derivada de la función arcotangente (recíproca de la tangente), f(x)=arctg(x).

Ejemplos:

16. (Imp) Ejemplo 2 de derivación de una función compuesta: $f(x) = \sqrt{(x^3+1)^5}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

5. (Imp) Gráfica recordando la relación entre el seno y el coseno (en el cálculo de la derivada del coseno).

Observaciones o comentarios de interés:

6. (Imp) Conservación del patrón de la regla de la cadena con más de dos funciones.

7. (Imp) Estudio del dominio de función y derivada de la función $f(x) = \sqrt{(x^3+1)^5}$.

8. (Imp) Utilidad de tener diferentes expresiones posibles para la derivada (función f(x)=tg(x)).

ANEXO B.3

En este anexo incluimos información detallada sobre el desarrollo de la docencia correspondiente al bloque de Análisis Matemático en el aula del Docente 2. En el caso de este docente, en una clase de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales, el profesor ha elaborado un diario en el que recoge brevemente los aspectos del desarrollo de las clases que le comunicamos como aspectos de mayor interés para nuestra investigación.

En esta clase se tratan tres temas dentro del bloque de Análisis Matemático: un primer tema sobre funciones elementales, un segundo tema sobre límites y continuidad de una función y un tercer tema sobre la derivada y la representación gráfica de funciones.

Presentaremos la información sobre cada una de las sesiones utilizando cuatro organizadores. El primero es la información proporcionada por el docente a través de su diario. El segundo es la compleción de dicha información con otros aspectos de interés no recogidos por el docente e interpretados a través de los cuadernos de los alumnos o de conversaciones informales con el profesor.

El tercer organizador, denominado “Unidad Teórica”, sirve para indicar los diferentes contenidos teóricos tratados en la sesión correspondiente. Después del nombre se indicará el número de tema al que corresponde el contenido (UT1, UT2 o UT3). Se presentan utilizando la distinción en cuatro tipos de contenidos que se ha utilizado al analizar las unidades teóricas de los cuadernos (subapartado IV.3.1 de la tesis doctoral).

- Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones.
- Ejemplos.
- Dibujos, esquemas y gráficos.
- Observaciones o comentarios de interés.

Dentro de cada tipo de contenido, existe una numeración correlativa según su orden de exposición dentro de la unidad del tema correspondiente. Además, aquellos elementos que consideramos que el docente ha considerado como “prioritarios” o como más importantes dentro del tema, se han marcado escribiendo “(Imp)” (abreviatura de importante) después del número y antes del enunciado verbal del elemento.

El cuarto organizador, denominado “Unidad Práctica”, sirve para indicar aspectos relacionados con la propuesta y corrección de actividades en la sesión considerada. Después del nombre se indicará el número de tema al que corresponden las actividades (UP1, UP2 o UP3). Se distinguen tres aspectos, relacionados con las variables utilizadas en el análisis de los cuadernos:

- Mejoras significativas durante la corrección de actividades.
- Actividades propuestas y posteriormente corregidas.
- Actividades propuestas y no corregidas posteriormente.

Al igual que con los contenidos teóricos, las mejoras y los dos tipos de actividades son numerados correlativamente dentro de cada tipo, según el orden en que son desarrolladas o propuestas dentro de la unidad del tema correspondiente. Además, en las actividades distinguimos si son extraídas directamente del libro de texto (AELT), reformuladas a partir de actividades del libro de texto (ARLT) o son creadas directamente por el docente (ACD).

A continuación se presenta la información de cada una de las sesiones correspondiente al desarrollo del bloque de Análisis Matemático por parte del Docente 2 en la clase de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales en la que imparte docencia.

Lunes 12 de diciembre de 2011 (Hora: 12:20 a 13:10)

Información transcrita del diario del docente:

Este día el docente no elabora su diario, puesto que asistimos a observar la clase.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase.

Asisten todos los alumnos, salvo el alumno A18 y un alumno que no participa en el análisis.

Introducción de las funciones como relaciones entre variables. Funciones de dos variables: variable independiente y variable dependiente. Tres maneras de definir una función: a partir de una tabla de valores, de una gráfica o de una expresión analítica. Ejemplos, y estudio del paso de una representación a otra a través de un diálogo entre los alumnos.

Funciones elementales. Tipos (listado, se irán tratando en estos dos primeros temas): polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Funciones polinómicas de grado 1: rectas. Expresión general. Representación gráfica a través de un ejemplo: $f(x)=3x-2$. Concepto de pendiente y ordenada en el origen: definición verbal con la ayuda de una gráfica.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. (Imp) Definición de función como relación entre dos o más variables.
2. Definición de variable dependiente e independiente.
3. (Imp) Tres formas de definir una función: tabla de valores, gráficamente o a través de expresión analítica.
4. Explicación del paso de una función dada a partir de una tabla de valores a su representación gráfica.

5. Explicación del paso de una función dada a partir de una tabla de valores a su expresión analítica.

6. Concepto de función elemental.

7. (Imp) Listado de funciones elementales: polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas.

8. (Imp) Función polinómica de grado 1: expresión analítica general y tipo de representación gráfica.

9. (Imp) Pendiente de una recta: definición y modo de cálculo.

10. (Imp) Concepto de ordenada en el origen.

Ejemplos:

1. (Imp) Posibles variables para el estudio de los fenómenos naturales: espacio, tiempo, velocidad, altura sobre el nivel del mar, presión atmosférica, temperatura…

2. (Imp) Ejemplo de función definida a través de una tabla de valores.

3. (Imp) Ejemplo de función definida a través de una gráfica.

4. (Imp) Ejemplo de función definida a través de una expresión analítica.

5. Ejemplo de paso de una función definida a través de una tabla de valores a su representación gráfica.

6. Ejemplo de paso de una función definida a través de una tabla de valores a su expresión analítica.

7. (Imp) Ejemplo de función polinómica de primer grado: $f(x)=3x-2$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. (Imp) Gráfica para ilustrar cómo puede definirse a través de ella una función.

2. Gráfica en el ejemplo ilustrativo de paso de una función definida a través de una tabla de valores a su representación gráfica.

3. (Imp) Representación gráfica de $f(x)=3x-2$.

4. (Imp) Gráfica ilustrando el cálculo de la pendiente de una recta.

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión.

Martes 13 de diciembre de 2011 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Seguimos con y=mx+n. La interpretación de m (pendiente) y n (ordenada en el origen) permite representar la recta. Ejemplo: y=3x-2. Y, recíprocamente, dada la gráfica podemos obtener la ecuación. Ejemplo: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

La ecuación punto-pendiente. Su utilización. Paso de la ecuación a la gráfica y viceversa. Ejemplos y ejercicios de aplicación.

Polinomios de 2º grado: Parábolas. Orientación (ramas hacia arriba o hacia abajo). Corte con OX (dos puntos de corte / un punto de corte / ningún punto de corte).

Un alumno (de los no participantes en el análisis de los cuadernos) pregunta por el vértice y quiere saber la fórmula. No me gustan las fórmulas. Buscamos una solución "artesanal".

Información adicional de interés:

Al final de la sesión, se plantea como tarea la representación de la función polinómica $f(x)=-x^2+x+6$ (que no es corregida posteriormente en el aula).

Unidad teórica (UT1):

Hubo contenidos propios de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

11. Explicación sobre cómo representar una función polinómica de primer grado (dada analíticamente) a partir de la interpretación de "m" y "n".
12. Obtención de la expresión analítica de una función polinómica de primer grado a partir de su representación gráfica (obtención de "m" y "n").
13. (Imp) Ecuación punto-pendiente de una recta.
14. Explicación sobre cómo obtener la ecuación punto-pendiente de una recta dados dos puntos de la misma.
15. (Imp) Función polinómica de grado 2: expresión analítica general y tipo de representación gráfica.
16. Tres posibilidades según el número de puntos de corte de la función polinómica de segundo grado con el eje OX.

Ejemplos:

8. (Imp: recoger el menos alguno de los cuatro del número 8 al 11) Ejemplo 1 de representación gráfica a partir de interpretación coeficientes "m" y "n": f(x)=5x-3.

9. Ejemplo 2 de representación gráfica a partir de interpretación coeficientes "m" y "n": f(x)=4x-1.

10. Ejemplo 3 de representación gráfica a partir de interpretación coeficientes "m" y "n": f(x)=-2x+3.

11. Ejemplo 4 de representación gráfica a partir de interpretación coeficientes "m" y "n": f(x)=(3/2)·x-2.

12. (Imp: recoger al menos alguno de los tres del número 12 al 14) Ejemplo 1 de obtención de la expresión analítica de función polinómica de primer grado a partir de gráfica.

13. Ejemplo 2 de obtención de la expresión analítica de función polinómica de primer grado a partir de gráfica.

14. Ejemplo 3 de obtención de la expresión analítica de función polinómica de primer grado a partir de gráfica.

15. (Imp: recoger al menos uno de los números 15 y 16) Ejemplo 1 de cálculo de ecuación punto-pendiente de una recta dados un punto P(-1,4) y la pendiente (m=-2).

16. Ejemplo 2 de cálculo de ecuación punto-pendiente de una recta dados un punto P(3,-2) y la pendiente (m=5/2).

17. Ejemplo de obtención de un punto y pendiente de una recta a partir de ecuación punto-pendiente (y+1=-3(x-2)).

18. (Imp: recoger al menos uno de los tres del número 18 al 20) Ejemplo 1 de cálculo de ecuación punto-pendiente de una recta dados dos puntos (en gráfica).

19. Ejemplo 2 de cálculo de ecuación punto-pendiente de una recta dados dos puntos (A(-1,3) y B(4,2)).

20. Ejemplo 3 de cálculo de ecuación punto-pendiente de una recta dados dos puntos (A(1,-4) y B(2,5)).

21. (Imp) Ejemplo de función polinómica de segundo grado: $f(x)=x^2-3x-4$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

5. (Imp: recoger al menos una de los números 5 y 6) Gráfica en la que se representa f(x)=5x-3 para interpretar los coeficientes "m" y "n".
6. Gráfica en la que se representan los tres ejemplos restantes para interpretar los coeficientes "m" y "n".
7. (Imp) Diagrama cartesiano con los tres ejemplos de gráficas de rectas para obtener las expresiones analíticas.
8. (Imp) Gráfico con dos puntos para obtener la ecuación punto-pendiente de recta que pasa por ellos.
9. (Imp) Gráficas ilustrando la orientación de la parábola según el valor de a (positivo o negativo).
10. (Imp) Gráficas con las tres opciones posibles de parábola según el número de puntos de corte con el eje OX.
11. (Imp) Gráfica del ejemplo de función polinómica de segundo grado: $f(x)=x^2-3x-4$

Observaciones o comentarios de interés:

1. (Imp) Cálculo "artesanal" del vértice en una función cuadrática (completando cuadrados).

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo una actividad propuesta y no corregida posteriormente.

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

1. ACD: Representa gráficamente la función polinómica $f(x)=-x^2+x+6$.

Jueves 15 de diciembre de 2011 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Ejercicios para casa: pág. 110, ej. 1, apartados a y b (parábolas).

Polinomios de 3er grado: Cúbicas. Orientación (según sea a>0 ó a<0). Corte con OX (tres puntos de corte / dos puntos de corte / un punto de corte). Ejemplo: $y=x^3-x^2-6x$ (lo hacen los alumnos).

Funciones racionales: Solo una idea de las más sencillas: $\frac{1}{x}, \frac{1}{x-2}, \ldots$

Idea de asíntota.

Funciones con radicales: $y = \sqrt{x}$. Gráficas de funciones recíprocas. Propiedad gráfica: las gráficas de funciones recíprocas son simétricas respecto a y=x.

Funciones definidas a trozos. Ejemplos. Ejercicios 1 y 2, pág. 114 (propuestos). Funciones valor absoluto (para el próximo día).

<u>Información adicional de interés</u>: No.

<u>Unidad teórica (UT1)</u>:

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

17. (Imp) Función polinómica de grado 3: expresión analítica general y tipo de representación gráfica.
18. (Imp) Función racional: definición analítica y verbal (cociente de polinomios).
19. En casos sencillos (varios ejemplos), la gráfica de una función racional es una hipérbola.
20. (Imp) Idea de asíntota (horizontal o vertical, en las gráficas de hipérbolas).
21. (Imp) Indicación de la relación existente entre las gráficas de funciones recíprocas.
22. Definición de función definida a trozos.

Ejemplos:

22. (Imp) Ejemplo 1 de función racional: $f(x) = \frac{x^3-3x^2+2}{x^2-2x-1}$.
23. (Imp) Ejemplo 2 de función racional: $f(x) = \frac{1}{x}$.
24. Ejemplo 3 de función racional: $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
25. (Imp) Ejemplo 1 de función con expresión radical: $f(x) = \sqrt{x}$.
26. Ejemplo 2 de función con expresión radical: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
27. (Imp) Ejemplo de función definida a trozos (de un modo analítico).

Dibujos, esquemas y gráficos:

12. (Imp) Gráficas ilustrando la orientación de la cúbica según el valor de a (positivo o negativo).
13. (Imp) Gráfica con diferentes posiciones posibles, según el número de puntos de corte con OX, de cúbicas con a>0.
14. (Imp: recoger al menos una de los números 14 y 15) Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$.
15. Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
16. (Imp) Gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.
17. (Imp) Gráfica donde se evidencia la relación gráfica existente entre $f(x) = \sqrt{x}$ y $f(x)=x^2$ (recíprocas).
18. Gráfica de la función que se utiliza para ejemplificar las funciones definidas a trozos.

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

De los tres aspectos considerados, en esta clase se plantearon actividades tanto corregidas posteriormente como no corregidas en sesiones posteriores.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

1. ACD: Representa gráficamente la función $f(x)=x^3-x^2-6x$ (corregida en la misma sesión).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

2. AELT: Pág. 110, ej. 1, apartado a (representación de una función cuadrática).
3. AELT: Pág. 110, ej. 1, apartado b (mismo propósito anterior).
4. AELT: Pág. 114, ej. 1, apartado a (representación de una función definida a trozos).
5. AELT: Pág. 114, ej. 1, apartado b (mismo propósito anterior).
6. AELT: Pág. 114, ej. 2 (mismo propósito anterior).

Viernes 16 de diciembre de 2011 (Hora: 9:10 a 10:00)

Información transcrita del diario del docente:

Función valor absoluto: Definición y ejemplos. Lectura de los ejercicios resueltos de la pág. 116. Hacer los ejercicios propuestos 1 y 2.

Idea sobre interpolación lineal. Lectura del ejercicio resuelto (pág. 109), pero obteniendo "m" gráficamente, No por la fórmula de más arriba. Hacer los ejercicios propuestos 1 y 2 (pág. 109).

Leer los ejercicios resueltos 1, 2, 3, 4, 6 y 7 del final del tema, a partir de la pág. 119 (tarea para hacer a lo largo de una semana).

Información adicional de interés: No.

Unidad teórica (UT1):

En esta sesión se trataron contenidos propios de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

23. (Imp) Definición de función valor absoluto, $f(x)=|x|$.
24. (Imp) Concepto de interpolación (en particular, interpolación lineal).

Ejemplos:

28. (Imp) Ejemplo 1 de función valor absoluto: $f(x)=|x|$.
29. Ejemplo 2 de función valor absoluto: $f(x)=|2x-1|$.
30. Ejemplo 3 de función valor absoluto: $f(x)=|x^2-4|$
31. (Imp) Ejemplo gráfico y simbólico que ilustra la interpolación lineal de una función de la que se conocen dos puntos: A(40,30) y B(50,38).

Dibujos, esquemas y gráficos:

19. (Imp) Gráfica de ejemplo 1 de función valor absoluto: $f(x)=|x|$.
20. Gráfica de ejemplo 2 de función valor absoluto: $f(x)=|2x-1|$.
21. Gráfica de ejemplo 3 de función valor absoluto: $f(x)=|x^2-4|$.
22. (Imp) Gráfico ilustrando la idea de interpolar una función.
23. Gráfica con un ejemplo ilustrativo de interpolación lineal dados dos puntos.

Observaciones o comentarios de interés:

2. (Imp) Recuerdo sobre cómo se define el valor absoluto de un número.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase se plantearon actividades tanto si fueron corregidas posteriormente como si no se corrigieron en sesiones posteriores.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

2. AELT: Pág. 109, ej. 1 (aplicación de interpolación lineal para obtener información en situación hipotética, corregido en la sesión del lunes 19/12/2011).
3. AELT: Pág. 109, ej. 2 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 19/12/2011).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

7. AELT: Pág. 116, ej. 1 (representación de funciones afectadas por un valor absoluto).
8. AELT: Pág. 116, ej. 2 (mismo propósito anterior).

Lunes 19 de diciembre de 2011 (Hora: 12:20 a 13:10)

Información transcrita del diario del docente:

Corrijo los ejercicios 1 y 2 (pág. 109).

El resto de la clase de dedica a resolver dudas para el examen de mañana (examen sobre un tema anterior).

Información adicional de interés:

Como vemos en el diario, se corrigen dos de las actividades planteadas en la clase anterior a ésta. El día 20 estaba planificado un examen sobre el tema anterior a este primer tema de funciones (tema sobre polinomios, ecuaciones y sistemas de ecuaciones), lo que hace que el resto de la clase se dedicara a la resolución de dudas.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ninguna actividad en esta sesión, ni hubo mejoras significativas en la corrección de actividades pendientes.

Martes 20 de diciembre de 2011 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Examen sobre ecuaciones y sistemas de ecuaciones (tema anterior al tema de funciones).

Información adicional de interés:

Se dedica toda la clase a la realización de ese examen del tema anterior, sobre polinomios, ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad en esta sesión (que pueda estar en el cuaderno de los alumnos).

Lunes 9 de enero de 2012 (Hora: 12:20 a 13:10)

Información transcrita del diario del docente:

Propongo problemas “de plantear” del final del capítulo: ej. 27, 28 y 29. Dejo unos minutos para cada uno y los voy corrigiendo en el encerado.

Los alumnos están bastante “oxidados” y no recuerdan lo que vimos antes de vacaciones. Tengo que ir recordándoselo y haciendo sugerencias poco a poco.

Propongo pensar en casa los ejercicios 30, 31 y 32.

Información adicional de interés:

En el caso del ejercicio 29, los alumnos comienzan a resolverlo en el aula, pero no es corregido por el docente, ni durante esta clase ni en las posteriores.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

En esta sesión se proponen actividades a los alumnos, algunas de ellas fueron corregidas en sesiones posteriores y otras no. No hay mejoras significativas en la corrección de actividades.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

4. AELT: Pág. 125, ej. 27 (aplicación de interpolación lineal para obtener información y responder preguntas en situación hipotética, corregida en la propia sesión).
5. AELT: Pág. 125, ej. 28 (mismo propósito anterior, corregida en la propia sesión).
6. AELT: Pág. 125, ej. 30 (estudio de funciones lineales y cuadráticas para dar respuesta a situaciones modelizadas por una función, corregida en la sesión del martes 10/1/2012).
7. AELT: Pág. 125, ej. 31 (aplicación de interpolación lineal para obtener información y responder preguntas en situación hipotética, corregida en la sesión del martes 10/1/2012).
8. AELT: Pág. 125, ej. 32 (estudio de funciones lineales y cuadráticas para dar respuesta a situaciones modelizadas por una función, corregida en la sesión del martes 10/1/2012).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

9. AELT: Pág. 125, ej. 29 (aplicación de interpolación lineal para obtener información y responder preguntas en situación hipotética).

Martes 10 de enero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

<u>Información transcrita del diario del docente</u>:

Solo la alumna A14 ha pensado los problemas (30, 31 y 32). Los demás nada. Los resuelvo en la pizarra.

Propongo resolver los ejercicios 33, 34 y 35. Espero unos minutos. Veo que lo van haciendo.

Corrijo el ejercicio 33. Los otros dos los dejamos para casa.

Información adicional de interés:

En la corrección del ejercicio 32, consideramos que el docente realiza una mejora significativa al contenido de la actividad, puesto que aprovecha para indicar cómo puede obtenerse la abscisa del vértice en una función cuadrática que tiene dos puntos de corte con el eje OX, una vez que dichos puntos han sido hallados (simetría respecto a un eje vertical: equidistancia de la abscisa del vértice respecto de las abscisas de los dos puntos de corte con OX).

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

En esta sesión se proponen actividades a los alumnos que son corregidas en sesiones posteriores. También hay una mejora significativa en la corrección de una actividad.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

1. En la corrección del ej. 32 de la pág. 125: indicación sobre cómo puede calcularse la abscisa del vértice en una función cuadrática con dos puntos de corte con y=0 (utilizando la simetría de la función).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

9. AELT: Pág. 125, ej. 33 (aplicación y estudio de funciones cuadráticas en situaciones que están modelizadas por funciones así, corregido en la propia sesión).

10. AELT: Pág. 125, ej. 34 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del jueves 12/1/2012).

11. AELT: Pág. 125, ej. 35 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del jueves 12/1/2012).

Jueves 12 de enero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Reviso si han hecho los ejercicios 34 y 35. No los ha intentado nadie. Los corrijo en el encerado.

Propongo los ejercicios 36 y 37. Espero un rato.

Solo la alumna A14 está trabajando en ellos. Paso a explicarlos en el encerado.

Información adicional de interés: No.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

12. AELT: Pág. 126, ej. 36 (aplicación y estudio de funciones lineales y cuadráticas en situaciones que están modelizadas por funciones así, corregido en la propia sesión).
13. AELT: Pág. 126, ej. 37 (mismo propósito anterior, corregido en la propia sesión).

Viernes 13 de enero de 2011 (Hora: 9:10 a 10:00)

Información transcrita del diario del docente:

Pasamos al tema 5. Continuación de “funciones elementales”.

Funciones exponenciales. Partimos de tablas para $y=a^x$, $a>1$. Una vez representada, enunciamos propiedades que se deducen de la gráfica. Obtenemos la gráfica de $y=a^x$, con $0<a<1$; no con tablas, sino “dividiendo gráficas”. Justificamos que $y=a^x$ solo está definida para $a>0$.

Funciones logarítmicas. Partimos de la definición de logaritmo. Obtenemos su gráfica utilizando la propiedad de las gráficas de funciones inversas (simétricas respecto de $y=x$). Pido a los alumnos que enuncien ellos mismos las propiedades que se deducen de la gráfica. Espero unos minutos y paso a comentarlas yo.

Información adicional de interés: No.

Unidad teórica (UT1):

En esta sesión se trataron contenidos propios de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

25. (Imp) Función exponencial: expresión analítica general.

26. (Imp) Propiedades de función exponencial con base a>1 (a partir de la gráfica).

27. Explicación sobre obtención de gráfica de exponencial con base 0<a<1 a partir de a>1 (son inversas para el producto).

28. (Imp) Definición de logaritmo en base a de un número.

29. (Imp) Función logarítmica es la recíproca de la exponencial de misma base.

30. (Imp) Propiedades de función logarítmica con base a>1 (a partir de la gráfica).

31. Diferente crecimiento de las funciones logarítmicas, polinómicas y exponenciales.

Ejemplos:

32. (Imp) Ejemplo 1 de función exponencial: $f(x)=2^x$.

33. (Imp) Ejemplo 2 de función exponencial: $f(x)=(1/2)^x$.

34. (Imp) Ejemplo de función logarítmica: $f(x)=\log_2(x)$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

24. (Imp) Gráfica de la función $f(x)=2^x$ (a partir de tabla de valores).

25. Gráfica comparando el crecimiento de exponenciales con base a>1 según sea el valor de a.

26. (Imp) Gráfica de la función $f(x)=(1/2)^x$ (utilizando que el producto de esta con $f(x)=2^x$ es constante e igual a 1).

27. (Imp) Gráfica de la función $f(x)=\log_2(x)$ (como recíproca de la exponencial de base 2)

28. Gráfico comparando el crecimiento de funciones logarítmicas según base

29. Gráfico comparando el crecimiento de las funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.

Observación o comentario de interés:

3. (Imp) Ilustración sobre por qué debe ser a>0 para definir una función exponencial (raíz cuadrada de número negativo).

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión.

Lunes 16 de enero de 2012 (Hora: 12:20 a 13:10)

Información transcrita del diario del docente:

Propongo "problemas para resolver": página 144, ejercicios 25, 26…

Espero unos minutos y pongo orden. Están algo alterados. No hacen gran cosa. Corrijo el 25, a ver si se animan con el 26.

Solo trabaja A14. Los demás esperan que pase el tiempo. Corrijo el 26. Propongo el 27.

Parece que ahora se animan a pensar un poco más. Espero unos minutos. Y así sucesivamente. Llegamos hasta el 28.

Fijamos un examen de los temas 4 y 5 para el lunes 23.

Información adicional de interés:

En la corrección de los ejercicios 26 y 27 consideramos que el docente realiza una mejora significativa al contenido de la actividad: se realizan varios esquemas que ponen de manifiesto la aparición de la función exponencial en situaciones donde la tasa de crecimiento o decrecimiento es constante. Por otra parte, el primer apartado del ejercicio 28 sí que es corregido en el aula por el docente, pero no se corrigen los dos restantes apartados del ejercicio; por lo que en el análisis se consideran como ejercicios separados la parte corregida y la parte no corregida (al considerar relevante este hecho).

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

En esta clase se desarrollaron tanto mejoras en la corrección de actividades como el planteamiento de actividades (tanto posteriormente corregidas como no corregidas).

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

2. Durante la corrección de los ej. 26 y 27 de la pág. 144: realización de varios esquemas para poner de manifiesto la aparición de la función exponencial en situaciones con tasa de crecimiento o decrecimiento constante por unidad de tiempo.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

14. AELT: Pág. 144, ej. 25 (cálculo de parámetros y representación de una función exponencial, corregida durante la propia sesión).

15. AELT: Pág. 144, ej. 26 (estudio y aplicación de funciones exponenciales en situaciones modelizadas por este tipo de funciones, corregida durante la propia sesión).

16. AELT: Pág. 144, ej. 27 (mismo propósito anterior, corregida durante la propia sesión).

17. AELT: Pág. 144, ej. 28, apartado a (mismo propósito anterior, corregida durante la propia sesión).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

10. AELT: Pág. 144, ej. 28, apartados b y c (estudio y aplicación de funciones exponenciales en situaciones modelizadas por este tipo de funciones).

Martes 17 de enero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

<u>Información transcrita del diario del docente</u>:

Propongo el ejercicio 31. Dejo unos minutos y después lo corrijo en el encerado.

Para preparar el examen les propongo mirar los ejercicios resueltos: Página 119: ejercicios 1, 2, 3, 4, 6, 7. Página 139: ejercicios 2, 4, 5 y 6.

Hacer los ejercicios de “autoevaluación”: página 127 y página 145 (ejercicios 3, 4, 5, 7 y 8).

Trabajan el resto de la clase y deben hacerlo en casa para presentarlo el próximo día de clase (el 19).

<u>Información adicional de interés</u>: No.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

18. AELT: Pág. 144, ej. 31 (estudio y aplicación de funciones exponenciales en situaciones modelizadas por este tipo de funciones, corregida durante la propia sesión).
19. AELT: Pág. 127, ej. 1 de autoevaluación (cálculo del dominio de una función, corregido en la sesión del jueves 19/1/12).
20. AELT: Pág. 127, ej. 2 de autoevaluación (asociación de gráfica con expresión analítica de funciones, corregido en la sesión del jueves 19/1/12).
21. AELT: Pág. 127, ej. 3 de autoevaluación (representación de funciones de diversos tipos, corregido en la sesión del jueves 19/1/12).
22. AELT: Pág. 127, ej. 4 de autoevaluación (aplicación de interpolación lineal para obtener información y responder preguntas en situación hipotética, corregido en la sesión del jueves 19/1/12).
23. AELT: Pág. 127, ej. 5 de autoevaluación (estudio y aplicación de funciones a trozos para obtener información en una situación hipotética, corregido en la sesión del jueves 19/1/12).
24. AELT: Pág. 127, ej. 6 de autoevaluación (representación de funciones a partir de una función base representada gráficamente, corregido en la sesión del jueves 19/1/12).
25. AELT: Pág. 145, ej. 3 de autoevaluación (representación de la función recíproca de una dada de forma gráfica, corregido en la sesión del jueves 19/1/12).
26. AELT: Pág. 145, ej. 4 de autoevaluación (representación de funciones exponenciales y logarítmicas, corregido en la sesión del jueves 19/1/12).
27. AELT: Pág. 145, ej. 5 de autoevaluación (estudio y aplicación de funciones exponenciales en situaciones modelizadas por este tipo de funciones, corregido en la sesión del jueves 19/1/12).

28. AELT: Pág. 145, ej. 7 de autoevaluación (estudio y aplicación de funciones exponenciales en situaciones modelizadas por este tipo de funciones, corregido en la sesión del jueves 19/1/12)
29. AELT: Pág. 145, ej. 8 de autoevaluación (estudio y aplicación de funciones exponenciales en situaciones modelizadas por este tipo de funciones, corregido en la sesión del jueves 19/1/12).

Jueves 19 de enero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Resuelvo los problemas propuestos el día 17.

Pregunto si han leído los problemas resueltos del libro. No lo han hecho. Propongo que lo hagan en el tiempo que queda.

Información adicional de interés:

En la corrección del ej. 5 de la pág. 145 consideramos que el docente realiza una mejora significativa al contenido de la actividad: se realiza la representación gráfica de la función obtenida, $f(x)=(1/5)\cdot 2^x$ a partir de la representación de la función $f(x)=2^x$.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

En la sesión de hoy no se propone ninguna actividad. Sí que se realiza una mejora significativa en la corrección de una de las actividades pendientes.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

3. En la corrección del ej. 5 de la autoevaluación de la pág. 145: realización de la representación gráfica de la función obtenida, $f(x)=(1/5)\cdot 2^x$, tomando como base la representación de la función exponencial de base 2.

Viernes 20 de enero de 2011 (Hora: 9:10 a 10:00)

Información transcrita del diario del docente:

Los alumnos me preguntan dudas individualmente (el examen es el próximo día).

<u>Información adicional de interés</u>:

Como el día 23, siguiente día de clase, estaba planificado un examen sobre esta primera parte del bloque de análisis matemático (que se corresponde con los temas 4 y 5 del curso), el profesor dedica la clase a la resolución individual de dudas de los alumnos.

<u>Unidad teórica (UT1)</u>:

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

En la sesión de hoy no se propuso ni se corrigió ninguna actividad.

Lunes 23 de enero de 2012 (Hora: 12:20 a 13:10)

<u>Información transcrita del diario del docente</u>:

Examen (de los temas 4 y 5).

El docente nos proporcionó el examen. Se componía de cinco preguntas, calificadas de 0 a 10 cada una de ellas, siendo la nota final del examen la media aritmética de dichas calificaciones.

Los enunciados de las cinco preguntas se transcriben a continuación:

1. ¿Cómo son las gráficas de las funciones polinómicas? Descríbelas teniendo en cuenta su grado.

2. Por aparcar durante 12 minutos he pagado 0’20 € y aparcar durante 50 minutos cuesta 1’60 €. Escribe la ecuación de la correspondiente recta interpoladora. ¿Cuánto cuesta aparcar 35 minutos? ¿Cuánto cuesta aparcar 2 h?

3. Propiedades que se deducen de la gráfica de la función exponencial $y=a^x$, $a>1$*.*

4. He comprado un Volkswagen Golf por 24000 €. Cada año su valor se deprecia en un 8%. Escribe la expresión de una función que relacione el valor del coche con los años transcurridos desde su compra. ¿Cuánto valdrá un Golf dentro de seis años?

5. Una colonia de bacterias crece según la función $y=2+0'3\cdot 2^{0'6x}$*, donde “x” es el tiempo en días e “y” el número de bacterias en miles. a) ¿Cuál es la población inicial? b) ¿Cuánto tiempo tarda en duplicarse?*

Información adicional de interés:

Se dedica toda la clase a la realización del examen de esta primera parte del bloque de análisis matemático (temas 4 y 5, funciones elementales). El examen fue realizado por todos los alumnos a excepción de la alumna A12, que no pudo asistir, y quien el profesor aplazó el examen para el siguiente lunes, día 30/1/12.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP1):

En la sesión de hoy no se propuso ni se corrigió ninguna actividad (que pueda estar en el cuaderno de los alumnos).

Martes 24 de enero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Corrijo el examen en el encerado. Entrego los exámenes a los alumnos, se los dejo revisar durante unos minutos. Después los recojo.

Comienzo el tema 6: Límites y continuidad.

Explico de forma gráfica los límites cuando $x \to \pm\infty$.

Explico el comportamiento del límite respecto de las operaciones con funciones.

Información adicional de interés:

Las reglas sobre el comportamiento del límite respecto de las operaciones con funciones son dictadas verbalmente por el docente, además de ser escritas simbólicamente en la pizarra (de ahí que decidamos considerar por duplicado los registros de estas reglas, según sea un registro de la regla verbal y/o simbólica).

Unidad teórica (UT2):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado “Observaciones o comentarios de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. (Imp) Explicación de qué significa "límite cuando x tiende a $\pm\infty$".

2. (Imp) Explicación de qué significa que un límite de una función en el infinito sea $\pm\infty$.

3. (Imp) Explicación de qué significa que no exista el límite de una función en el infinito.

4. (Imp: recoger al menos uno de los números 4 y 5) Regla para calcular el límite en una situación k·f (con límite finito): dictado verbal.

5. Regla para calcular el límite en una situación k·f (con límite finito): enunciado simbólico.

6. (Imp: recoger al menos uno de los números 6 y 7) Regla para calcular el límite en una situación f+g (con límites finitos): dictado verbal.

7. Regla para calcular el límite en una situación f+g (con límites finitos): enunciado simbólico.

8. (Imp: recoger al menos uno de los números 8 y 9) Regla para calcular el límite en una situación f·g (con límites finitos): dictado verbal.

9. Regla para calcular el límite en una situación f·g (con límites finitos): enunciado simbólico.

10. (Imp: recoger al menos uno de los números 10 y 11) Regla para calcular el límite en una situación f/g (con límites finitos): dictado verbal.

11. Regla para calcular el límite en una situación f/g (con límites finitos): enunciado simbólico.

Ejemplos:

1. (Imp) Ejemplo (gráfico) de función con límite +∞ cuando x tiende a +∞.
2. (Imp) Ejemplo (gráfico) de función con límite -∞ cuando x tiende a +∞.
3. (Imp) Ejemplo (gráfico) de función con límite finito cuando x tiende a +∞.
4. (Imp) Ejemplo (gráfico) de función que no tiene límite cuando x tiende a +∞ (oscilante).
5. (Imp) Ejemplo (gráfico) de función con límite +∞ cuando x tiende a -∞.
6. (Imp) Ejemplo (gráfico) de función con límite -∞ cuando x tiende a -∞.
7. (Imp) Ejemplo (gráfico) de función con límite finito cuando x tiende a –∞.

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. (Imp) Gráfica de una función con límite +∞ cuando x tiende a +∞.

2. (Imp) Gráfica de una función con límite $-\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.
3. (Imp) Gráfica de una función con límite finito cuando x tiende a $+\infty$.
4. (Imp) Gráfica de una función que no tiene límite cuando x tiende a $+\infty$ (oscilante).
5. (Imp) Gráfica de una función con límite $+\infty$ cuando x tiende a $-\infty$.
6. (Imp) Gráfica de una función con límite $-\infty$ cuando x tiende a $-\infty$.
7. (Imp) Gráfica de una función con límite finito cuando x tiende a $-\infty$.

Unidad práctica (UP2):

En la sesión de hoy no se propuso ni se corrigió ninguna actividad.

Jueves 26 de enero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Cálculo de límites: Comportamiento del límite respecto de las operaciones con funciones, Expresiones que pueden interpretarse, Casos de indeterminación.

Resolución de indeterminaciones: Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase. Los diferentes casos y expresiones que pueden interpretarse fueron discutidos por los alumnos y explicadas, siempre teniendo en cuenta la idea de infinito como “números cada vez más grandes”. Es importante resaltar que los límites que sirven para ejemplificar el comportamiento del límite finito respecto a las operaciones con funciones son límites de funciones en un punto, cuando toda la clase introductoria había tratado sobre límites en el infinito, lo que supone un error didáctico, aunque facilita la posibilidad de ejemplificar estas reglas. Para comenzar a trabajar la indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, el profesor resuelve tres ejemplos de límites con esta indeterminación, dividiendo en los tres casos por “x”; pero no dicta la regla para la resolución aplicando lo que llama “procedimiento largo” en esta clase, sino en la siguiente.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado “Dibujos, esquemas y gráficos”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

12. Límite k·f. Casos que pueden interpretarse: k·(+∞), k·(-∞).
13. Límite f+g. Casos que pueden interpretarse: $l + \infty$, ∞+∞, -∞-∞.
14. Límite f·g. Casos que pueden interpretarse: l ·(+∞), l ·(-∞), (+∞)·(+∞).
15. Límite f/g. Casos que pueden interpretarse: l /(+∞), (+∞)/l.
16. Explicación de qué sucede en una situación de tendencia l/0.
17. (Imp) Explicación del concepto de indeterminación.
18. (Imp) Tres indeterminaciones que van a ser estudiadas en este tema: $(\to \infty) \cdot (\to 0)$, $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, $\frac{\to 0}{\to 0}$.

Ejemplos:

8. (Imp) Ejemplo de aplicación de la regla límite k·f (finito): $5 \cdot x^2$ cuando x tiende a 3.
9. (Imp) Ejemplo de aplicación de la regla límite f+g (finitos): x^2+x^3 cuando x tiende a 3.
10. (Imp) Ejemplo de aplicación de caso interpretable f+g (∞+∞): x^2+x cuando x tiende a +∞.
11. (Imp: recoger al menos dos de los tres del 11 al 13) Ejemplo 1 sobre concepto de indeterminación $(\to \infty) \cdot (\to 0)$: $x^3 \cdot (1/x)$ cuando x tiende a +∞.
12. Ejemplo 2 sobre concepto de indeterminación $(\to \infty) \cdot (\to 0)$: $x \cdot (1/x^3)$ cuando x tiende a +∞.
13. Ejemplo 3 sobre concepto de indeterminación $(\to \infty) \cdot (\to 0)$: $x \cdot (3/x)$ cuando x tiende a +∞
14. (Imp) Ejemplo 1 para ilustrar el procedimiento "largo" (división por potencia de x) en $\frac{\to\infty}{\to\infty}$: $\text{lím}_{x\to\infty} \frac{x^2+3x}{x+1}$.
15. (Imp) Ejemplo 2 para ilustrar el procedimiento "largo" (división por potencia de x) en $\frac{\to\infty}{\to\infty}$: $\text{lím}_{x\to\infty} \frac{-2x+3}{x^3-x}$.
16. (Imp) Ejemplo 3 para ilustrar el procedimiento "largo" (división por potencia de x) en $\frac{\to\infty}{\to\infty}$: $\text{lím}_{x\to\infty} \frac{3x+2}{5x+1}$.

Observaciones o comentarios de interés:

1. (Imp) Aclaración de que en "k/0" el denominador tiende a cero, no que sea cero

Unidad práctica (UP2):

En la sesión de hoy no se propuso ni se corrigió ninguna actividad.

Viernes 27 de enero de 2011 (Hora: 9:10 a 10:00)

Información transcrita del diario del docente:

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$:

- Procedimiento "largo": dividir por una potencia "conveniente" de "x". Llevar a cabo las dos opciones con el fin de interpretar distintas expresiones.
- Procedimiento "breve": aplicar la regla.

Información adicional de interés:

El profesor comienza la clase enunciando las dos "reglas" para resolverlo (que llama procedimiento "largo" y procedimiento "breve", consistente en comparar los grados de los polinomios de numerador y denominador para dar directamente un resultado). Posteriormente, plantea tres límites con esta indeterminación, que son resueltos por los alumnos durante la clase y corregidos al final de ésta.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase sólo hubo un tipo de elementos de los cuatro considerados: "definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

19. (Imp) Procedimiento "largo" de resolución indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$: división potencia "conveniente" de x.
20. (Imp) Procedimiento "breve" de resolución indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$: regla según los grados.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

1. ACD: Cálculo del límite $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x}{2x^2+1}$ (aplicando tanto el procedimiento "largo" como el "breve", corregido en esta misma sesión).
2. ACD: Cálculo del límite $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3}{x^2+x-2}$ (aplicando tanto el procedimiento "largo" como el "breve", corregido en esta misma sesión).
3. ACD: Cálculo del límite $\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{3x^2-5x}$ (aplicando tanto el procedimiento "largo" como el "breve", corregido en esta misma sesión).

Lunes 30 de enero de 2012 (Hora: 12:20 a 13:10)

Información transcrita del diario del docente:

Faltan A18 y otros dos alumnos no participantes en el análisis de sus cuadernos. La alumna A12 hace un examen (el que sus compañeros hicieron el día 23). La alumna A16 no atiende, y hace otras cosas.

Indeterminaciones $\infty - \infty$: Estudiamos un procedimiento en varios pasos:

- Casos en los que decide la "rapidez de crecimiento".
- Casos en los que se puede realizar la operación indicada.
- Casos especiales.

Información adicional de interés:

El profesor introduce los tres procedimientos posibles para la resolución con un carácter progresivo, es decir, indica la necesidad de pasar al siguiente método cuando los anteriores han fracasado o no nos proporcionan información en un límite concreto.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Dibujos, esquemas y gráficos".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

21. (Imp) Procedimiento 1 para resolver indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$: crecimiento de minuendo y sustraendo.

22. (Imp) Procedimiento 2 para resolver indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$: realizar la operación indicada.

23. (Imp) Procedimiento 3 para resolver indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$: casos especiales (expresiones con radicales).

Ejemplos:

17. (Imp: recoger al menos uno entre los números 17 y 18) Ejemplo 1 de resolución de $(\to \infty) - (\to \infty)$ analizando el crecimiento de minuendo y sustraendo: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x - x^2)$.

18. Ejemplo 2 de resolución de $(\to \infty) - (\to \infty)$ analizando el crecimiento de minuendo y sustraendo: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 2^x)$.

19. (Imp: recoger al menos uno entre los números 19 y 20) Ejemplo 3 de resolución de $(\to \infty) - (\to \infty)$ analizando el crecimiento de minuendo y sustraendo: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - x^2)$.

20. Ejemplo 4 de resolución de $(\to \infty) - (\to \infty)$ analizando el crecimiento de minuendo y sustraendo: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2} - x\right)$.

21. (Imp) Ejemplo 5 de resolución de $(\to \infty) - (\to \infty)$ analizando el crecimiento de minuendo y sustraendo: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2+3x} - \frac{x^4+x-1}{3x^2-1}\right)$.

22. (Imp: recoger al menos uno de los tres del número 22 al 24) Ejemplo 1 de resolución de $(\to \infty) - (\to \infty)$ realizando la operación (resta) indicada: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2+2}{x+1} - \frac{2x^2-x}{x+1})$.

23. Ejemplo 2 de resolución de $(\to \infty) - (\to \infty)$ realizando la operación (resta) indicada: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2-x}{x+1} - \frac{x^2+2}{x-1})$

24. Ejemplo 3 de resolución de $(\to \infty) - (\to \infty)$ realizando la operación (resta) indicada: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^3-3x}{x^2+2x} - \frac{2x^3+2}{x^2})$.

25. (Imp: recoger al menos uno entre los números 25 y 26) Ejemplo 1 de resolución de $(\to \infty) - (\to \infty)$ multiplicando y dividiendo por el conjugado (radicales): $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-1}\right)$

26. Ejemplo 2 de resolución de $(\to \infty) - (\to \infty)$ multiplicando y dividiendo por el conjugado (radicales): $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-x})$.

Observaciones o comentarios de interés:

2. (Imp) Progresividad de aplicación de los tres procedimientos de resolución de la indeterminación $(\to\infty)-(\to\infty)$.

Unidad práctica (UP2):

En la sesión de hoy no se propuso ni se corrigió ninguna actividad.

Martes 31 de enero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Límite de una función en un punto. Interpretación geométrica.

Indeterminación $\frac{0}{0}$

Continuidad: Significado geométrico. Definición (en un punto, en un intervalo). Discontinuidades. Tipos.

Faltan: A12, A18 y los dos alumnos no participantes en el análisis de sus cuadernos (algunos están en la "semana blanca").

Información adicional de interés: No.

Unidad teórica (UT2):

Hubo contenidos propios de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

24. (Imp) Explicación del cálculo del límite de una función en un punto.

25. (Imp) Procedimiento para resolver "indeterminación" $\frac{\to k\ (\neq 0)}{\to 0}$: resolución de los límites laterales.

26. (Imp) Procedimiento para resolver indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$: eliminación de factores comunes.

27. (Imp) Definición de función continua en un punto.

28. (Imp) Definición de discontinuidad evitable.

29. (Imp) Definición de discontinuidad de salto finito.

30. (Imp) Definición de discontinuidad de salto infinito.

31. (Imp) Definición de función continua en un intervalo.

Ejemplos:

27. Ejemplo de cálculo de límite de función en un punto: $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - x)$.

28. (Imp) Ejemplo para ilustrar el procedimiento de resolución de "indeterminación" $\frac{\to k}{\to 0}$: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x-2}$.

29. (Imp: recoger al menos uno entre los números 29 y 30) Ejemplo 1 para ilustrar el procedimiento de resolución de indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4}$.

30. Ejemplo 2 para ilustrar el procedimiento de resolución de indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2+2x-15}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

8. (Imp) Gráfica de la función del ejemplo de cálculo de límite de función en un punto (en un entorno).

9. (Imp) Gráfica de la función del ejemplo de límite con "indeterminación" $\frac{\to k}{\to 0}$ (en un entorno).

10. Gráfica de la función del ejemplo 1 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ (en un entorno).

11. (Imp) Gráfico que ilustra una función continua en un punto.

12. (Imp) Gráfico que ilustra una función con discontinuidad evitable en un punto.

13. (Imp) Gráfico que ilustra una función con discontinuidad de salto finito en un punto.

14. (Imp) Gráfico que ilustra una función con discontinuidad de salto infinito en un punto.

Observaciones o comentario de interés:

3. (Imp) Anticipación de lo que es una discontinuidad evitable, en el ejemplo 1 con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$.

Unidad práctica (UP2):

En la sesión de hoy no se propuso ni se corrigió ninguna actividad.

Jueves 2 de febrero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Estudio de la continuidad para funciones definidas a trozos: estudio gráfico y estudio analítico.

Se proponen varios ejemplos que cubren las distintas posibilidades.

Propongo los ejercicios 6 y 7c de la pág. 169.

Información adicional de interés:

El profesor modifica ligeramente el enunciado propuesto en esos dos ejercicios que propone al final de la clase: en ambos casos se proporciona la expresión simbólica de una función definida a trozos y se pide estudiar la continuidad en un punto. El profesor reformula la actividad: para esas funciones definidas a trozos que se proporcionan, pide el estudio de la continuidad en todos los reales, utilizando los dos métodos que ha explicado en la clase: el estudio gráfico (a partir de la gráfica de la función) y el estudio analítico (a partir de su expresión simbólica).

Unidad teórica (UT2):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

32. (Imp) Explicación del estudio gráfico de la continuidad en una función a trozos.
33. (Imp) Explicación del estudio analítico de la continuidad en una función a trozos.

Ejemplos:

31. (Imp: recoger al menos uno entre los números 31 y 33) Estudio gráfico de la continuidad de función a trozos: ejemplo 1, con función $f(x) = \begin{cases} -x+3, & si\ x \leq 2 \\ x^2+1, & si\ x > 2 \end{cases}$.

32. (Imp: recoger al menos uno entre los números 32 y 34) Estudio analítico de la continuidad de función a trozos: ejemplo 1 (misma función anterior).

33. Estudio gráfico de la continuidad de función a trozos: ejemplo 2, con función $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & si\ x < 1 \\ 2x+2, & si\ x \geq 1 \end{cases}$.

34. Estudio analítico de la continuidad de función a trozos: ejemplo 2 (misma función anterior).

Dibujos, esquemas y gráficos:

15. (Imp: recoger al menos una de los números 15 y 16) Gráfica en ejemplo 1 de estudio gráfico de continuidad en función a trozos.

16. Gráfica en ejemplo 2 de estudio gráfico de continuidad en función a trozos.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

4. ARLT: Pág. 169, ej. 6 (estudio de la continuidad de la función definida a trozos, corregido en la sesión del viernes 3/2/2012).

5. ARLT: Pág. 169, ej. 7, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del viernes 3/2/2012).

Viernes 3 de febrero de 2011 (Hora: 9:10 a 10:00)

Información transcrita del diario del docente:

Reviso los problemas propuestos ayer. Los han hecho A13, A14 y A17. Los demás, nada. Los corrijo en el encerado.

Propongo los ejercicios 37a y 37c de la pág. 172. La alumna A12 no trabaja, la alumna A16 hace los problemas que le han puesto en la academia; A15, A16 y A17 charlan animadamente… Solo trabaja la alumna A14.

Corrijo el 37a.

Ahora parece que trabaja alguno más. Corrijo el 37c.

Propongo el ejercicio 36. En este problema también hay que estudiar la continuidad de f(x), pero esta función contiene un parámetro.

Falta A18 y un alumno que no participa en el análisis de su cuaderno (Semana Blanca).

Información adicional de interés: No.

Unidad teórica (UT2):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

6. AELT: Pág. 172, ej. 37, apartado a (estudio de la continuidad de una función definida a trozos, corregido en la propia sesión).
7. AELT: Pág. 172, ej. 37, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la propia sesión).
8. AELT: Pág. 172, ej. 36, apartado a (cálculo del parámetro en una función a trozos para que ésta sea continua, corregido en la sesión del lunes 6/2/2012).
9. AELT: Pág. 172, ej. 36, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 6/2/2012).
10. AELT: Pág. 172, ej. 36, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 6/2/2012).

Lunes 6 de febrero de 2012 (Hora: 12:20 a 13:10)

Información transcrita del diario del docente:

Reviso el problema 36. Solo lo han pensado la alumna A14 y un alumno que no participa con su cuaderno en este análisis.

Lo corrijo en la pizarra (apartado a). Explico la interpretación geométrica. Propongo que hagan los apartados b y c.

Los corrijo en el encerado. El alumno A17 me pregunta por la interpretación geométrica en el caso b. Lo hago.

La alumna A12 se pregunta sobre el significado de la gráfica en el 36c y la validez de la expresión “simplificar”. Hablo sobre estas cuestiones.

Propongo los problemas “de plantear”: ejercicios 39 y 40.

Explico el 39. Me detengo bastante en la gráfica.

Dejamos el 40 para casa.

Falta A18 (estará descansando de la Semana Blanca. Han estado en el Pirineo y han pasado mucho frío).

Información adicional de interés:

Ante la falta de intentos de resolución de la actividad propuesta el día anterior (tres apartados del ej. 36 de la pág. 172), el docente, tras corregir y explicar el primer apartado, vuelve a dejar un tiempo a los alumnos para que intenten los otros dos apartados del mismo. Durante la corrección de los ejercicios consideramos que el docente realiza varias mejoras significativas al contenido propio de la actividad, que son explicadas en el organizador relativo a la unidad práctica en esta sesión.

Unidad teórica (UT2):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP2):

En esta clase se desarrollaron tanto mejoras en la corrección de actividades como el planteamiento de actividades (tanto posteriormente corregidas como no corregidas).

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

1. y 2. Durante la corrección del ej. 36, apartados a y b, de la pág. 172: explicación de la interpretación gráfica de la continuidad de la función a trozos dependiente de un parámetro (estudio de cómo afecta la variación del parámetro a la gráfica de la función.

3. Durante la corrección del ej. 36, apartado c, de la pág. 172: explicación de la validez de la expresión “simplificar” y de la relación entre una función que es cociente de polinomios y la función cuya expresión es el cociente de los polinomios anteriores, pero simplificando los factores comunes (que son ceros del denominador).

4. Durante la corrección del ej. 39 de la pág. 172: representación de la función no sólo en el intervalo pedido (el intervalo cerrado [0,30]), sino en toda la recta real (apareciendo así el estudio de una discontinuidad de salto infinito y la presencia de una asíntota vertical).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

11. AELT: Pág. 172, ej. 39 (estudio y aplicación de funciones definidas a trozos, su continuidad y su tendencia a infinito en situaciones modelizadas por funciones de este tipo, corregido en la propia sesión).

12. AELT: Pág. 172, ej. 40 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 7/2/2012).

Martes 7 de febrero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

<u>Información transcrita del diario del docente</u>:

Hoy me toca explicar.

Derivada de una función en un punto. Función derivada. Interpretación geométrica de la derivada. Relación entre derivabilidad y continuidad: explicación intuitiva y gráfica.

Cálculo de derivadas:

- Aplicando la definición.
- Plan de actuación para una derivación "mecánica": Tabla de derivadas inmediatas, reglas de derivación, métodos de derivación.

Al final de la clase, el alumno A17 me pide que explique el problema 40 de la pág. 172. Lo hago. Salvo él y la alumna A14, no me hace caso nadie.

<u>Información adicional de interés</u>:

El profesor presenta el "plan de actuación para una derivación mecánica", con los tres pasos progresivos que escribe en su diario, pero no comienza a desarrollar el plan en esta clase. La clase termina con la corrección del problema propuesto pendiente de la clase anterior (ej. 40 de la pág. 172).

Unidad teórica (UT3):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. (Imp) Derivada en un punto como límite de un cociente incremental (x tiende a "a").
2. (Imp) Derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.
3. Fórmula de la tasa de variación media y relación con la pendiente de la recta secante.
4. Ilustración de la obtención de la fórmula de la derivada (secantes se aproximan a tangente).
5. Concepto de función derivable en un intervalo.
6. Función derivable como función "suave", sin picos ni saltos.
7. (Imp) Derivabilidad implica continuidad, pero el recíproco no es cierto.
8. Tres métodos para conseguir derivar funciones (tabla de derivadas inmediatas, reglas y métodos de derivación).

Ejemplos:

1. (Imp) Derivada de la función $f(x)=x^2$ en $x=1$ (calculando el límite del cociente incremental).

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. Gráfica ilustrando la tasa de variación media como pendiente de la secante.
2. (Imp) Gráfica ilustrando el proceso de acercamiento de las secantes a la tangente.
3. (Imp) Gráfica dibujando la función $f(x)=x^2$ y la recta tangente en $x=1$.

Observaciones o comentarios de interés:

1. (Imp) La derivada siempre se puede obtener, en principio, calculando el límite.

Unidad práctica (UP2):

En la sesión de hoy no se propone ninguna actividad de este tema. Tampoco de aquí en adelante. Sí que se realiza una mejora significativa en la corrección de una de las actividades pendientes.

Unidad práctica (UP3):

En la sesión de hoy no se propuso ni se corrigió ninguna actividad del tema tercero (derivadas y representación gráfica de funciones).

Jueves 9 de febrero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Tabla de derivadas inmediatas. Partimos de una tabla “corta”. Explico su significado y sus posibilidades.

Reglas de derivación. Comportamiento de la derivada respecto de las operaciones con funciones.

- Justificación intuitiva.
- Enunciado simbólico y con lenguaje usual.
- Aplicaciones al cálculo.

Enuncio las relativas a la suma y al producto por una constante. Dejamos las otras operaciones para mañana.

Información adicional de interés:

El profesor realiza la justificación de la regla para derivar una función constante (utilizando el límite del cociente incremental), y plantea (sin detallarlo demasiado) cómo sería la justificación de la regla para la derivada de una suma/resta de funciones y para el producto de una constante por una función, escribiendo el cociente incremental resultante, y explicando la aplicación de la propiedad correspondiente del límite que nos permite llegar a la regla.

Unidad teórica (UT3):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado “Dibujos, esquemas y gráficos”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

9. (Imp) Derivada de la función constante.

10. Justificación de la expresión para la derivada de la función constante (utilizando el límite).

11. (Imp) Derivada de una función potencial (genérica).

12. (Imp) Derivada de la función exponencial (de base cualquiera).

13. (Imp) Caso particular: derivada de la función exponencial de base e.

14. (Imp) Derivada de la función logaritmo (de base cualquiera).

15. (Imp) Caso particular: derivada de la función logaritmo neperiano.

16. (Imp) Regla para la derivada de una suma/resta de funciones: dictado verbal de la regla.

17. (Imp) Regla para la derivada de una suma/resta de funciones: enunciado simbólico.

18. Justificación (intuitiva) de la regla para la derivada de una suma/resta de funciones.

19. (Imp) Regla para la derivada del producto de una constante por una función: dictado verbal de la regla.

20. (Imp) Regla para la derivada del producto de una constante por una función: enunciado simbólico.

21. Justificación (intuitiva) de la regla para la derivada del producto de una constante por una función.

Ejemplos:

2. (Imp: recoger al menos uno de los cuatro de los números 2 al 5) Ejemplo 1 de derivada de función potencial: $f(x)=x^{14}$.

3. Ejemplo 2 de derivada de función potencial: $f(x)=x^5$.

4. Ejemplo 3 de derivada de función potencial: $f(x)=x^2$.

5. Ejemplo 4 de derivada de función potencial: $f(x)=x$.

6. (Imp: recoger al menos uno entre el 6 y el 7) Ejemplo 5 de derivada de función potencial: $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$.

7. Ejemplo 6 de derivada de función potencial: $f(x) = \sqrt{x}$.

8. (Imp: recoger al menos uno de los cuatro de los números 8 al 11) Ejemplo 7 de derivada de función potencial: $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

9. Ejemplo 8 de derivada de función potencial: $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

10. Ejemplo 9 de derivada de función potencial: $f(x) = \frac{1}{x}$.

11. Ejemplo 10 de derivada de función potencial: $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$.

12. (Imp: recoger al menos uno de los tres de los números 12 al 14) Ejemplo 1 de derivada de una suma de funciones: $f(x)=x^3 + \sqrt{x}$.

13. Ejemplo 2 de derivada de una suma de funciones: $f(x)=x^5+\frac{1}{x^2}$.

14. Ejemplo 3 de derivada de una suma de funciones: $f(x)=x^7+x^4$.

15. (Imp: recoger al menos uno de los cuatro de los números 15 al 18) Ejemplo 1 de derivada de constante por función: $f(x)=5\cdot x^4$.

16. Ejemplo 2 de derivada de constante por función: $f(x)=1000\cdot x^2$.

17. Ejemplo 3 de derivada de constante por función: $f(x)= \pi\cdot x$.

18. Ejemplo 4 de derivada de constante por función: $f(x)=(\log 3)\cdot x^5$.

19. (Imp: recoger al menos uno de los tres de los números 19 al 21) Ejemplo 1 de derivada de función polinómica: $f(x)=3x^4+5x^3$.

20. Ejemplo 2 de derivada de función polinómica: $f(x)=2x^5-3x^2+7$,

21. Ejemplo 3 de derivada de función polinómica: $f(x)=4x^2+5x-3$,

Observaciones o comentarios de interés:

2. (Imp) Utilidad de la fórmula para derivar funciones potenciales (diferente tipología de exponentes).

3. (Imp) Es posible derivar funciones polinómicas aplicando las reglas de linealidad de la derivada.

Unidad práctica (UP3):

En la sesión de hoy no se propuso ni se corrigió ninguna actividad del tema tercero (derivadas y representación gráfica de funciones).

Viernes, 10 de febrero de 2011. Hora: 9:10 a 10:00 h.

Información transcrita del diario del docente:

Seguimos con las reglas de derivación:

- Producto.
- Cociente.
- Función compuesta. Ésta la presentamos de forma práctica, sin pararnos mucho en definir la operación.

En todas ellas insisto en: Cómo se obtiene (idea), enunciado simbólico y con lenguaje usual, aplicación al cálculo.

Información adicional de interés:

El profesor no ha definido, en los temas previos, qué es la composición de funciones. Por lo tanto, al presentar la regla de la cadena, se ve forzado a hacerlo con una presentación a través de ejemplos de composición usuales, como son $e^{f(x)}$, $\ln (f(x))$, $f(x)^3$ o $2^{f(x)}$, representando la posibilidad de poder utilizar cualquier función a través de la utilización de un recuadro vacío (en el que puede colocarse cualquier función –derivable). Posteriormente ejemplifica estas “estructuras usuales”, aunque en un ejemplo (que en el listado posterior aparece como “Ejemplo 5 de derivada de una composición de funciones”) el profesor parece hacer un uso implícito de la analogía, puesto que se aplica la regla en una situación del tipo $f(x)^4$ en lugar de $f(x)^3$ (la potenciación que ha presentado en la estructura).

Unidad teórica (UT3):

En esta clase consideramos que únicamente hubo contenidos de dos de los cuatro tipos: “Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones” y “Ejemplos”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

22. (Imp) Regla para la derivada del producto de funciones: dictado verbal de la regla.
23. (Imp) Regla para la derivada del producto de funciones: enunciado simbólico.
24. (Imp) Regla para la derivada del cociente de funciones: enunciado simbólico.
25. (Imp) Ilustración (a través de algunas estructuras usuales) de la derivada de una función compuesta.

Ejemplos:

22. (Imp) Ejemplo 1 de derivada de un producto de funciones: $f(x)=(x^2)\cdot(2^x)$.
23. (Imp) Ejemplo 2 de derivada de un producto de funciones: $f(x)=x\cdot(e^x)$.
24. (Imp) Ejemplo 3 de derivada de un producto de funciones: $f(x)=(x^3)\cdot\ln(x)$.
25. (Imp) Ejemplo 1 de derivada de un cociente de funciones: $f(x) = \frac{(x^3-7x^2)}{(x^2+x)}$.
26. (Imp) Ejemplo 2 de derivada de un cociente de funciones: $f(x) = \frac{(5x^2-7)}{(x^3-x)}$.
27. (Imp) Ejemplo 3 de derivada de un cociente de funciones: $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$.
28. (Imp) Ejemplo 4 de derivada de un cociente de funciones: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.
29. (Imp) Ejemplo 1 de derivada de una composición de funciones: $f(x) = e^{x^2}$.
30. (Imp) Ejemplo 2 de derivada de una composición de funciones: $f(x)=\ln(x^3-x)$.
31. (Imp) Ejemplo 3 de derivada de una composición de funciones: $f(x) = 2^{x^3}$.
32. (Imp) Ejemplo 4 de derivada de una composición de funciones: $f(x)=(3x^2-5)^3$.
33. (Imp) Ejemplo 5 de derivada de una composición de funciones: $f(x)=(5x^3-2x)^4$.
34. (Imp) Ejemplo 6 de derivada de una composición de funciones: $f(x) = 2^{3x^2-1}$.
35. (Imp) Ejemplo 7 de derivada de una composición de funciones: $f(x)=\ln(x^2+x)$.

Unidad práctica (UP3):

En la sesión de hoy no se propuso ni se corrigió ninguna actividad.

Lunes 13 de febrero de 2012 (Hora: 12:20 a 13:10)

Información transcrita del diario del docente:

Propongo obtener la derivada de algunas funciones “simples”. El alumno A18 y los dos alumnos que no participan con su cuaderno en el análisis no hacen nada. Tampoco la alumna A16. Los demás parece que lo intentan.

Pasados unos minutos, lo hago en el encerado.

Propongo derivar algunas funciones compuestas. El panorama es parecido. Ahora A16 sí trabaja.

Los corrijo en el encerado.

Propongo los ejercicios 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33 y 36 de la pág. 195.

Para casa: ejercicios 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34 y 37.

Información adicional de interés:

Dado que cada uno de los ejercicios propuestos del libro de texto se reducen a la derivación de una función expresada simbólicamente, hemos agrupado en actividades cada grupo de cuatro funciones, para que no exista un desequilibrio muy grande entre la carga de trabajo demandado por estas actividades y las actividades que el profesor propuso en la segunda parte de este tema de derivadas (asociadas al estudio sistemático y representación de funciones definidas simbólicamente).

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP3):

De los tres aspectos considerados, en esta clase sí hubo actividades propuestas, algunas de ellas fueron corregidas posteriormente y otras no.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

1. ACD: Calcula la derivada de las siguientes funciones “simples”: $f(x)=x^3+x^4$, $f(x)=5x^3-3x^2+2$, $f(x)=-3$, $f(x)=e^x$, $f(x)=4^x$, $f(x)=\ln(x)$, $f(x)=\log_5(x)$ (corregido en la propia sesión).
2. ACD: Calcula la derivada de las siguientes funciones “compuestas”: $f(x)=(x^3+x^4)^3$, $f(x)=(5x^3-3x^2+2)^{-2}$, $f(x) = e^{x^2+x}$, $f(x) = 4^{x^3-2x}$, $f(x)=\ln(x^2)$, $f(x)=\log_5(\frac{1}{x})$ (corregido en la propia sesión).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

1. AELT: Pág. 195, ej. 15, 18, 21 y 24 (cálculo de derivadas de funciones dadas simbólicamente).
2. AELT: Pág. 195, ej. 27, 30, 33 y 36 (mismo propósito anterior).
3. AELT: Pág. 195, ej. 16, 19, 22 y 25 (mismo propósito anterior).
4. AELT: Pág. 195, ej. 28, 31, 34 y 37 (mismo propósito anterior).

Martes 14 de febrero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Reviso los ejercicios propuestos. Solo los ha hecho la alumna A14. Los demás, nada.

Propongo los ejercicios 17, 20, 23, 26, 29, 32 y 35 de la pág. 195.

Resuelvo algunas dudas individualmente. Salvo A14, los demás trabajan poco. Están charlando y no hay forma de que paren.

Los corrijo en el encerado.

Información adicional de interés:

El profesor indica una revisión de los ejercicios propuestos el día anterior, pero lo hace de forma somera e individual (especialmente con la alumna que había progresado más en su resolución, A14), no realiza una corrección grupal. De nuevo, agrupamos las actividades propuestas (del mismo estilo de las de la clase anterior, del lunes 13/2/2016) en dos grupos, intentando equilibrar la carga de trabajo de las diferentes actividades propuestas durante el tema.

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP3):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

3. AELT: Pág. 195, ej. 17, 20, 23 y 26 (cálculo de derivadas, corregido en la propia sesión).
4. AELT: Pág. 195, ej. 29, 32 y 35 (mismo propósito anterior, corregido en la propia sesión).

Jueves 16 de febrero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Representación gráfica de funciones:

- Tabla de valores.
- Interpretación de las operaciones algebraicas como transformaciones geométricas: traslaciones (hacia arriba o abajo), traslaciones (hacia derecha o izquierda), contracciones y dilataciones, simetrías respecto a OX, composición de transformaciones.

Me detengo en estos procedimientos de interpretación: los explico y propongo ejercicios. Parece que lo hacen.

Información adicional de interés:

Durante la corrección del ejercicio planteado, consideramos que el docente ha realizado una mejora significativa al contenido propio de la actividad, puesto que representa en unos mismos ejes cartesianos las funciones cuya gráfica se obtiene a partir del mismo tipo de transformación a partir de la función base, $f(x)=x^3$. Por ejemplo, corrige la actividad representando en un mismo sistema cartesiano las funciones $f(x)=x^3+3$, $f(x)=x^3-2$, $f(x)=(x-2)^3$ e $f(x)=(x+3)^3$, para que pueda compararse la traslación que da lugar a la representación de la función a partir de la función de partida.

Unidad teórica (UT3):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

26. Método 1 para representar funciones: tabla de valores.
27. (Imp) Método 2 para representar funciones: interpretación de operaciones algebraicas. Tipo f(x)+k, f(x)-k. (Traslación arriba-abajo).
28. (Imp) Método 2 para representar funciones: interpretación de operaciones algebraicas. Tipo f(x+k), f(x-k). (Traslación izquierda-derecha).
29. (Imp) Método 2 para representar funciones: interpretación de operaciones algebraicas. Tipo k·f(x). (Dilatación/Contracción).
30. (Imp) Método 2 para representar funciones: interpretación de operaciones algebraicas. Tipo -f(x). (Simetría respecto eje OX).

31. (Imp) Método 3 para representar funciones: "procedimiento sistemático". Lista de pasos a seguir.

Ejemplos:

36. (Imp) Ejemplo 1 de interpretación de operaciones algebraicas: gráfica de $f(x)=2(x-1)^2$ a partir de $f(x)=x^2$.

37. (Imp) Ejemplo 2 de interpretación de operaciones algebraicas: gráfica de $f(x)=2(x-1)^2-1$ a partir de $f(x)=x^2$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

4. (Imp) Gráfica comparando $f(x)=x^2$, $f(x)=x^2+1$ e $f(x)=x^2-2$ (traslación arriba-abajo).

5. (Imp) Gráfica comparando $f(x)=x^2$, $f(x)=(x+2)^2$ e $f(x)=(x-1)^2$ (traslación izquierda-derecha).

6. (Imp) Gráfica comparando $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$ e $f(x)=(1/2)\cdot x^2$ (dilatación-contracción).

7. (Imp) Gráfica comparando $f(x)=x^2$, $f(x)=-x^2$ (simetría respecto a eje OX).

8. (Imp) Gráfica de ejemplo 1 de interpretación de operaciones algebraicas: $f(x)=2(x-1)^2$.

9. (Imp) Gráfica de ejemplo 2 de interpretación de operaciones algebraicas: $f(x)=2(x-1)^2-1$.

Unidad práctica (UP3):

En esta clase se desarrollaron tanto mejoras en la corrección de actividades como el planteamiento de actividades posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

1. Durante la corrección de la actividad de representación gráfica de funciones trasladadas de una función base: representación de las funciones por bloques, juntando aquellas que se obtienen a partir del mismo tipo de transformación de la función de partida, $f(x)=x^3$

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

5. ACD: Representa gráficamente las siguientes funciones a partir de la función base ($f(x)=x^3$), a través de la interpretación gráfica de las operaciones algebraicas realizadas: $f(x)=x^3+3$, $f(x)=x^3-2$, $f(x)=(x-2)^3$, $f(x)=(x+3)^3$, $f(x)=2x^3$, $f(x)=(1/3)\cdot x^3$, f(x)=-

x^3, $f(x)=-3x^3$, $f(x)=(-1/2)\cdot x^3$, $f(x)=2(x+1)^3$, $f(x)=2(x+1)^3-2$, $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^3$, $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^3+1$ (corregida durante la propia sesión).

Viernes 17 de febrero de 2011 (Hora: 9:10 a 10:00)

Información transcrita del diario del docente:

Seguimos con la representación gráfica de funciones: método sistemático (idea).

Desarrollo del método sistemático: Explico cada uno de los apartados, con ejemplos: dominio, corte con los ejes, signo, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos.

Información adicional de interés: No.

Unidad teórica (UT3):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado “Observaciones o comentarios de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

32. Definición de dominio de una función.
33. Cálculo de los puntos de corte de una función con los ejes OX y OY.
34. Ilustración gráfica del concepto de función creciente y decreciente.
35. (Imp) Relación entre la pendiente de la recta tangente y la monotonía: estudio de la monotonía utilizando la derivada.
36. (Imp) Definición de punto singular (puntos donde la derivada de la función se anula).
37. (Imp) Obtención de los extremos relativos a partir del estudio de la derivada primera.

Ejemplos:

38. Ejemplo 1 de cálculo del dominio: $f(x)=x^3-3x^2+x-1$.
39. (Imp: recoger al menos entre el 39 y el 40) Ejemplo 2 de cálculo del dominio: $f(x)=\frac{1}{x}$.
40. Ejemplo 3 de cálculo del dominio: $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$.

41. (Imp: recoger al menos entre el 41 y el 42) Ejemplo 4 de cálculo del dominio: $f(x) = \sqrt{x}$.

42. Ejemplo 5 de cálculo del dominio: $f(x) = \sqrt{x-3}$.

43. Ejemplo de cálculo de puntos de corte con los ejes: $f(x)=x^2+2x-3$.

44. Ejemplo de cálculo del signo de las imágenes y regiones que ocupa: $f(x)=x^2+2x-3$.

45. (Imp) Ejemplo de cálculo de monotonía y extremos relativos: $f(x)=x^2+2x-3$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

10. Gráfica representando unos ejes coordenados y sus ecuaciones.

11. Tabla de estudio signo de una función: $f(x)=x^2+2x-3$.

12. (Imp) Gráfica con puntos de corte con ejes y regiones de la función $f(x)=x^2+2x-3$.

13. Gráfica ilustrando una función creciente.

14. Gráfica ilustrando una función decreciente.

15. Gráfica ilustrando una función con tramos crecientes y decrecientes.

16. (Imp) Gráfica que muestra la relación entre una recta tangente con pendiente positiva y el crecimiento de una función.

17. (Imp) Gráfica que muestra la relación entre una recta tangente con pendiente negativa y el decrecimiento de una función.

18. Tabla de estudio monotonía de una función: $f(x)=x^2+2x-3$.

Unidad práctica (UP3):

En la sesión de hoy no se propuso ni se corrigió ninguna actividad.

Jueves 23 de febrero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Continuamos con el desarrollo del método sistemático: intervalos de convexidad y concavidad, puntos de inflexión, segundo criterio para extremos relativos.

Ejemplos de aplicación.

Gráfica de las funciones polinómicas:

- Corte con los ejes.

- Se traza un primer esquema.
- Se mejora el esquema obteniendo los extremos relativos.

Propongo representar gráficamente estas dos funciones: $y=x^2-x-2$, $y=x^3+7x^2-13x+15$.

La gente está bastante alterada y atendiendo poco (salvo la alumna de siempre). Algunos no toman notas.

Información adicional de interés:

En una de las dos funciones polinómicas propuestas por el docente como tarea para su representación (en concreto, la función cúbica), el cálculo del corte con los ejes es muy complicado puesto que no tiene ninguna raíz entera ni fraccionaria. El profesor se da cuenta de la circunstancia en la clase del siguiente día en que este ejercicio es tratado (la clase del lunes 27/2/2016), cambiando la expresión algebraica de la cúbica para que el cálculo de las raíces sea posible aplicando el Teorema del Resto y la Regla de Ruffini.

Unidad teórica (UT3):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado “Observaciones o comentarios de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

38. Ilustración gráfica de los conceptos de función cóncava y convexa.
39. (Imp) Definición de punto de inflexión.
40. (Imp) Obtención de la curvatura en una función a partir del estudio de la segunda derivada.
41. (Imp) Obtención de los extremos relativos utilizando el valor de la derivada segunda en el punto.
42. (Imp) Pasos a seguir para representar una función polinómica (de segundo o tercer grado).

Ejemplos:

46. Ejemplo de estudio de la curvatura de una función: $f(x)=(1/3)\cdot x^3-(3/2)\cdot x^2-5x+2$.
47. (Imp) Ejemplo de estudio de los extremos relativos (con f'') de una función: $f(x)=(1/3)\cdot x^3-(3/2)\cdot x^2-5x+2$.

48. (Imp) Ejemplo de estudio y representación de una función polinómica: $f(x)=x^3-2x^2-13x+10$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

19. (Imp) Gráfica ilustrando una función cóncava.
20. (Imp) Gráfica ilustrando una función convexa.
21. (Imp) Gráfica ilustrando una función con varios puntos de inflexión.
22. Gráfica que muestra la relación entre la concavidad/convexidad y el signo de f''.
23. Tabla de estudio curvatura de la función $f(x)=(1/3)\cdot x^3-(3/2)\cdot x^2-5x+2$.
24. Gráfica que muestra la relación entre el signo de f'' y los extremos relativos.
25. (Imp) Gráfica de la función polinómica $f(x)=x^3-2x^2-13x+10$.

Unidad práctica (UP3):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

6. ACD: Estudia y representa la función $f(x)=x^2-x-2$ (corregido en la sesión del lunes 27/2/2012).
7. ACD: Estudia y representa la función $f(x)=x^3+7x^2-13x+15$ (corregido en la sesión del lunes 27/2/2012, cambiando algún coeficiente de la expresión para que se puedan obtener las raíces por los métodos conocidos por los alumnos).

Viernes 24 de febrero de 2011 (Hora: 9:10 a 10:00)

Información transcrita del diario del docente:

No hay clase porque están de excursión.

Lunes 27 de febrero de 2012 (Hora: 12:20 a 13:10)

Información transcrita del diario del docente:

Reviso los ejercicios propuestos. Solo los alumnos A13 y A14 lo han intentado con el primero. Con este panorama, dejo unos minutos para que los hagan.

Hago el primero y dejo más tiempo para el segundo.

Corrijo el segundo para que salga bien: $y=x^3-3x^2-13x+15$. Les propongo hacerlo. Dejo unos minutos.

Propongo para casa $y=x^3+2x^2-5x-6$.

Información adicional de interés:

Ante la falta de intentos de resolución de las actividades propuestas el día anterior, el docente vuelve a dejar un tiempo durante esta clase para que los alumnos intenten o prosigan sus intentos de resolución de las tareas. Durante la corrección del primero de los ejercicios, el estudio y representación de la función $f(x)=x^2-x-2$, consideramos que el docente ha realizado una mejora significativa al contenido propio de la actividad, puesto que enfatiza dos formas posibles de comprobar que el punto singular es, en este caso, un mínimo (estudiando el signo de la derivada segunda y estudiando el signo de la derivada primera en un entorno del punto). Como ya hemos comentado en la información adicional correspondiente a la clase del jueves 23/2/2016, el docente cambió la expresión algebraica de la cúbica propuesta en dicha clase ante la dificultad de obtención de raíces de la cúbica utilizando métodos conocidos por los alumnos.

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP3):

En esta clase hay tanto mejoras en las corrección de las actividades como actividades planteadas corregidas y no corregidas posteriormente.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

2. En la corrección del estudio y representación de $f(x)=x^2-x-2$: enfatización de las dos formas posibles de comprobar que un punto es mínimo (utilizando tanto el signo de la derivada segunda como el de la derivada primera en un entorno del punto).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

7. (Reformulada) ACD: Estudia y representa la función $f(x)=x^3-3x^2-13x+15$ (corregido durante la propia sesión).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

5. ACD: Estudia y representa la función f(x)=x^3+2x^2-5x-6

Martes 28 de febrero de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Explico la representación gráfica de las funciones racionales. Para ello se estudia: 1. Dominio, 2. Corte con los ejes, 3. Asíntotas, 4. Trazamos un primer esquema, 5. Mejoramos el esquema obteniendo los extremos relativos.

Lo aplicamos a la función $y = \frac{x-2}{x^2-1}$.

Propongo para casa una similar: $y = \frac{x+1}{x^2-4}$.

Mi impresión es que no se enteran de nada: están distraídos, hablan, sacan papeles de otras cosas…

Información adicional de interés: No.

Unidad teórica (UT3):

En esta clase hubo contenidos propios de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

43. (Imp) Pasos a seguir para representar una función racional sencilla.
44. (Imp) Condición para la existencia de asíntotas verticales en una función.
45. (Imp) Obtención del comportamiento de la función en una asíntota vertical: estudio del signo en los límites laterales.
46. (Imp) Condición para la existencia de asíntotas horizontales en una función.
47. (Imp) Obtención del comportamiento de la función en una asíntota horizontal: estudio del signo de la diferencia de las imágenes entre función y asíntota horizontal

Ejemplos:

49. (Imp) Ejemplo de estudio y representación de una función racional: $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

26. (Imp) Gráfica ilustrando los diferentes tipos de asíntotas (vertical, horizontal, oblicua).

27. (Imp) Gráfica de la función racional $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$.

Observaciones o comentarios de interés:

4. (Imp) Observación sobre en qué puntos puede existir una asíntota vertical en una función.

5. (Imp) Explicación aclarando la regla para saber posición de función respecto a asíntota horizontal.

Unidad práctica (UP3):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

8. ACD: Estudia y representa la función racional $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ (corregido en la sesión del jueves 1/3/2012).

Jueves 1 de marzo de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Reviso si han trabajado con el problema propuesto. Solo lo ha pensado la alumna A14 (y poco, pues se está contagiando de la vagancia del ambiente).

Lo explico en el encerado: $y = \frac{x+1}{x^2-4}$. Se ve que no se acuerdan de lo que dije en la representación de $y = \frac{x-2}{x^2-1}$.

Propongo $y = \frac{2x^2-9}{x^2-1}$.

Información adicional de interés:

Durante la corrección del ejercicio, consideramos que el docente realiza una mejora significativa al contenido de la actividad, puesto que, a partir de la gráfica, deduce e indica la existencia de un punto de inflexión en la gráfica de la función.

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP3):

En esta clase hubo tanto una mejora significativa de la actividad corregida como la propuesta de actividades que fueron corregidas en días posteriores.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

3. Durante la corrección del estudio y representación de $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$: deducción a partir de la gráfica e indicación explícita de la existencia de un punto de inflexión en la gráfica de esta función.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

9. ACD: Estudia y representa la función racional $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$ (corregida en la sesión del viernes 2/3/2012)

Viernes 2 de marzo de 2011 (Hora: 9:10 a 10:00)

Información transcrita del diario del docente:

Ese día el docente no escribe en su diario puesto que asistimos como observadores a la clase.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase.

Asisten todos los alumnos a esta clase, salvo A13 y A17.

El profesor comienza revisando si los alumnos han intentado resolver el problema propuesto. El resultado es el habitual de días anteriores, puesto que tan sólo lo han intentado la alumna A14 y un alumno que no participa con su cuaderno en el análisis.

El profesor corrige en la pizarra el ejercicio: estudio y representación de la función $y = \frac{x-2}{x^2-1}$, comenzando por el estudio del dominio, de los puntos de corte con los ejes y de las asíntotas horizontales y verticales. La mayoría de alumnos están muy despistados, y no parecen acordarse de cómo se resuelven los límites que van apareciendo en el estudio de las asíntotas o del proceso para determinar la posición de la gráfica con respecto a las asíntotas.

Tras esto, el profesor deja un tiempo para que los alumnos intenten reunir la información hasta ahora obtenida, y hagan un primer esquema de gráfica (punto cuatro de su lista de pasos), pasándose por las mesas para ver qué es lo que hace cada uno. Posteriormente realiza el esquema en el encerado, indicándoles la aparición en el esquema de un mínimo relativo, que hay que determinar.

El profesor vuelve a dejar un tiempo a los alumnos para que estudien el mínimo existente utilizando la derivada, y de nuevo supervisa el trabajo individual realizado por cada alumno, sin corregirlo posteriormente de manera global.

El profesor finaliza la clase proponiendo dos funciones racionales más para realizar su estudio y representación: $y = \frac{3x^2-11}{x^2-9}$ e $y = \frac{x+3}{x^2-4}$, tarea que comienzan a realizar los alumnos en los últimos minutos de la clase.

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP3):

En esta clase se plantearon dos actividades que no fueron corregidas en días posteriores.

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

6. ACD: Estudio y representación de la función racional $f(x) = \frac{3x^2-11}{x^2-9}$.
7. ACD: Estudio y representación de la función racional $y = \frac{x+3}{x^2-4}$.

Lunes 5 de marzo de 2012 (Hora: 12:20 a 13:10)

Información transcrita del diario del docente:

Resolución individual de dudas para el examen del próximo día.

Información adicional de interés:

Como en las siguientes clases, días 6 y 8 de marzo de 2012, estaba planificada la realización del examen de esta segunda parte del bloque de análisis matemático (límites y continuidad y derivada de una función), el profesor dedica la clase a la resolución individual de dudas de los alumnos. Pocos alumnos tenían dudas específicas sobre el contenido tratado en estos temas. La mayoría de ellas correspondieron a las alumnas A12 y A14.

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP3):

En esta clase no se planteó ni se corrigió ninguna actividad.

Martes 6 de marzo de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Examen de los temas 6 y 7 (primera parte).

El docente nos proporcionó el examen. Los contenidos a evaluar en este examen eran los de los temas 2 y 3 del bloque: límites y continuidad, derivada de una función, y representación gráfica. Esta primera parte se componía de dos preguntas. Como en el anterior examen, cada pregunta fue calificada de 0 a 10 puntos por el docente, siendo la calificación final del examen la media aritmética de las mismas.

Las dos preguntas correspondientes a este día fueron:

1. *Representa gráficamente la función* $y=x^3-7x^2+7x+15$.
2. *Representa gráficamente la función* $y=\frac{x+3}{x^2-4}$.

Información adicional de interés:

El profesor decidió partir el examen de este bloque (dado que las preguntas sobre estudio y representación de funciones requerían bastante tiempo para su compleción) en dos días, dedicándose ambas sesiones completas para la realización del mismo. En cada uno de los días se propusieron dos preguntas.

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP3):

En esta clase no se planteó ni se corrigió ninguna actividad (que pueda estar en el cuaderno de los alumnos).

Jueves 8 de marzo de 2012 (Hora: 10:05 a 10:55)

Información transcrita del diario del docente:

Examen de los temas 6 y 7 (segunda parte).

De nuevo, el docente nos proporcionó las dos preguntas de esta segunda parte del examen. Dichas dos preguntas fueron:

3. Obtén razonadamente los límites:

a) $lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+18}{x^3+x}$

b) $lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-1}{-5x^2-x}$

c) $lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3-3x}}{x^2-10}$

d) $lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x^2+x}\right)$

e) $lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

Los apartados a, b y c por dos procedimientos.

4. Estudia gráfica y analíticamente la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x+8, & x \leq 1 \\ -(x-2)^2-2, & x > 1 \end{cases}$$

Información adicional de interés:

Todos los alumnos, a excepción de la alumna A12, realizan esta parte del examen. Al igual que en el examen de la primera parte de este bloque, la alumna A12 realizó el examen en una fecha distinta, al no acudir ese día a clase (el profesor dice estar con “la mosca detrás de la oreja” con el comportamiento de esta alumna). Esta alumna realizó la segunda parte del examen (con otras dos preguntas distintas) el lunes 12/3/2012.

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP3):

En esta clase no se planteó ni se corrigió ninguna actividad (que pueda estar en el cuaderno de los alumnos).

ANEXO B.4

En este anexo incluimos información detallada sobre el desarrollo de la docencia en el bloque de Análisis Matemático en el aula de la modalidad Científico-Tecnológica de la Docente 3. En esta aula disponemos de guiones cumplimentados por la profesora en la gran mayoría de las sesiones.

En esta clase se trataron dos temas dentro del bloque de Análisis Matemático, un primer tema sobre funciones elementales y un segundo tema sobre límites y continuidad de una función. No hubo tiempo para desarrollar el tema de derivadas. Haremos un desarrollo sesión por sesión. Para ello, utilizaremos tanto esa información proporcionada por la profesora en los guiones como la información obtenida en conversaciones informales con la propia docente o a partir de la interpretación del contenido de los cuadernos de los alumnos. Estos serán los dos primeros organizadores asociados al desarrollo de cada sesión.

El tercer organizador, denominado “Unidad Teórica”, sirve para indicar los diferentes contenidos teóricos tratados en la sesión o en el periodo considerado, añadiendo el número del tema al que corresponde el contenido en cada caso (UT1 o UT2). Se presentan utilizando la distinción en cuatro tipos de contenidos que se ha utilizado al analizar las unidades teóricas de los cuadernos (subapartado IV.3.1 de la tesis doctoral).

- Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones.

- Ejemplos.
- Dibujos, esquemas y gráficos.
- Observaciones o comentarios de interés.

Dentro de cada tipo de contenido, existe una numeración correlativa según su orden de exposición dentro de la unidad del tema correspondiente. Además, aquellos elementos que consideramos que el docente ha considerado como “prioritarios” o como más importantes dentro del tema, se han marcado escribiendo “(Imp)” (abreviatura de importante) después del número y antes del enunciado verbal del elemento.

El cuarto organizador, denominado “Unidad Práctica”, sirve para indicar aspectos relacionados con la propuesta y corrección de actividades en cada sesión, donde se añade el número del tema al que corresponden las actividades en cada caso (UP1 o UP2). Se distinguen tres aspectos, relacionados con las variables utilizadas en el análisis de los cuadernos:

- Mejoras significativas durante la corrección de actividades.
- Actividades propuestas y posteriormente corregidas.
- Actividades propuestas y no corregidas posteriormente.

Al igual que con los contenidos teóricos, las mejoras y los dos tipos de actividades son numerados correlativamente dentro de cada tipo, según el orden en que son desarrolladas o son propuestas dentro de la unidad del tema correspondiente. Además, en las actividades distinguimos si son extraídas directamente del libro de texto (AELT), reformuladas a partir de actividades del libro de texto (ARLT) o son creadas directamente por la docente (ACD).

A continuación se presenta la información sobre el desarrollo de cada sesión dentro del bloque de Análisis Matemático por parte de la Docente 3 en la clase de 1º de Bachillerato de la modalidad Científico-Tecnológica.

Miércoles 18 de Abril de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Funciones-descripción de fenómenos reales (pg. 246-247).

La explicación de la clase se ha realizado siguiendo el libro de texto: lectura y explicación de los diferentes ejemplos.

Información adicional de interés:

En esta clase el docente comienza el bloque de análisis matemático. En la primera parte de la clase, como refleja en el guion, utiliza la introducción del tema de funciones que se realiza en el libro de texto para motivar el estudio de este bloque. A través de la lectura y explicación oral de diferentes fenómenos donde se hace uso de las funciones para su modelización, se pone de manifiesto la necesidad de su estudio.

Antes de comenzar con la información sobre la segunda parte de la clase, es necesario indicar que el docente ya había introducido algunos aspectos sobre funciones polinómicas de primer y segundo grado en el bloque anterior, que versaba sobre geometría analítica en el plano, por lo que en este tema no hace un estudio detallado sobre este tipo de funciones.

En la segunda parte de la clase (aspecto que el docente no refleja en el guion, pero que interpretamos a partir de los cuadernos de los alumnos), se comienza con el estudio de la función exponencial, $f(x)=a^x$, con dos ejemplos (con bases 2 y 1/3) en los que se construye la gráfica a partir de una tabla de valores y se indican algunas características de ambas funciones. Durante el enunciado de estas características, se recuerdan algunos conceptos, como el de asíntota, el crecimiento o decrecimiento, y la curvatura (concavidad y convexidad).

Finalmente, se introducen las funciones logarítmicas, utilizando una tabla de valores para construir la gráfica de la función $f(x)=\log_2(x)$, aspecto que va siendo completado por los alumnos bajo la guía del docente.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado “Observaciones o comentarios de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. (Imp) Definición simbólica de función exponencial, $f(x)=a^x$.
2. (Imp) Idea de asíntota de una función.
3. Definición de función creciente.
4. Definición de función decreciente.
5. (Imp) Idea de función cóncava/convexa (curvatura de una función).
6. Características comunes en las funciones exponenciales (independientes del valor de la base).
7. Características diferentes en las funciones exponenciales (según sea la base $a>1$ ó $0<a<1$).
8. (Imp) Definición simbólica de función logarítmica, $f(x)=\log_a(x)$.

Ejemplos:

1. (Imp) Ejemplo 1 de función exponencial: $f(x)=2^x$.
2. (Imp) Ejemplo 2 de función exponencial: $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.
3. (Imp) Ejemplo 1 de función logarítmica: $f(x)=\log_2(x)$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. (Imp) Representación gráfica de la función exponencial de base 2, $f(x)=2^x$.
2. (Imp) Representación gráfica de la función exponencial de base 1/3, $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.
3. (Imp) Representación gráfica de la función logarítmica de base 2, $f(x)=\log_2(x)$.

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta clase.

Jueves 19 de Abril de 2012 (Hora: 11:45 a 12:40)

<u>Información tomada del guion rellenado por el docente</u>:

Momentos de la clase: Corrección de ejercicios, Teoría: Función – concepto – registros, Dominios: concepto; cálculo de f. polinómicas y f. racionales.

Representación de la función logarítmica, $f(x)=\log_2(x)$. Realizado en la pizarra por la alumna A20, utilizando su cuaderno.

Propuesta de la representación de la función $f(x)=\log_{1/2}(x)$, que va siendo realizado por los alumnos bajo la guía del docente, que lo realiza en la pizarra.

La explicación de la clase se ha realizado mediante exposición oral del docente, relativamente personal, de aquello que considera como más importante, con posible apoyo de la pizarra. Los ejemplos utilizados son personales, no tomados del libro de texto, y son desarrollados en la pizarra.

<u>Información adicional de interés</u>:

Completamos algunos aspectos que se desprenden del guion y de la interpretación de los cuadernos de los alumnos, pero que no son explicitados por el docente. En los dos ejemplos de funciones logarítmicas que se tratan, se indican algunas propiedades de estas funciones, entre ellas la propiedad de la simetría de la gráfica de la función logarítmica y la exponencial de la misma base (respecto de y=x).

Al definir y explicar el concepto de función, se proporcionan dos representaciones posibles de las mismas: su expresión analítica y su expresión gráfica. Posteriormente, en la parte sobre el dominio de una función, se desarrollan dos ejemplos de cálculo del dominio en funciones racionales.

La clase finaliza con la propuesta de actividades a los alumnos sobre cálculo de dominios para su realización fuera del aula, extraídas del libro de texto: Pág. 248, ej., 1, apartados i, j, g, h, k. Pág. 249, ej. 1.

<u>Unidad teórica (UT1)</u>:

En esta clase hubo contenidos correspondientes a los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

9. Características comunes en las funciones logarítmicas (independientes del valor de la base).
10. Características diferentes en las funciones logarítmicas (según sea la base a>1 ó 0<a<1).
11. (Imp) Definición de función
12. (Imp) Concepto de variables dependiente e independiente.
13. Una representación posible de una función: expresión analítica.
14. Otra representación posible de una función: expresión gráfica.
15. (Imp) Definición de dominio de una función.

16. (Imp) Función polinómica: expresión analítica genérica de una función de este tipo.

17. (Imp) Dominio de una función polinómica.

18. (Imp) Función racional: definición verbal y expresión analítica genérica de una función de este tipo.

19. (Imp) Dominio de una función racional.

Ejemplos:

4. (Imp) Ejemplo 2 de función logarítmica: $f(x)=\log_{1/2}(x)$.

5. Ejemplo de función y las dos representaciones explicadas: f(x)=x+1.

6. (Imp) Ejemplo 1 de función racional: $f(x) = \frac{3x+7}{x^2+9}$.

7. (Imp) Dominio de la función racional anterior (ejemplo 1 de función racional).

8. (Imp) Ejemplo 2 de función racional: $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$.

9. (Imp) Dominio de la función racional anterior (ejemplo 2 de función racional).

Dibujos, esquemas y gráficos:

4. (Imp) Representación gráfica de la función logarítmica de base 1/2, $f(x)=\log_{1/2}(x)$.

5. Representación gráfica de la función f(x)=x+1.

Observaciones o comentarios de interés:

1. (Imp) Simetría respecto y=x de las funciones exponenciales y logarítmicas de la misma base.

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

1. AELT: Pág. 248, ej. 1, apartados i, j, g, h y k (cálculo de dominios en funciones polinómicas y racionales, los agrupamos en una actividad para que todas las actividades tengan una carga de trabajo equilibrada) corregido en la sesión del viernes 20/4/2012).

2. AELT: Pág. 249, ej. 1 (representación de una función definida a trozos con trozos polinómicos, corregido en la sesión del viernes 20/4/2012).

Viernes 20 de abril de 2012 (Hora: 11:45 a 12:40)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección de ejercicios, Teoría: Dominios: f. irracionales, f. exponencial.

Corrección de actividades pendientes: Pág. 248, ej. 1, apartados i, j, g, h y k; corregido por la alumna A27, que lo copia de su cuaderno. Pág. 249, ej. 1; corregido por el alumno A28, que lo copia de su cuaderno.

La explicación de la clase se ha realizado mediante exposición oral del docente, relativamente personal, de aquello que considera como más importante, con posible apoyo de la pizarra. Los ejemplos utilizados son personales, no tomados del libro de texto, y son desarrollados en la pizarra. Ejemplos personales: “Calcula el dominio de $f(x) = \sqrt[4]{5x+85}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $h(x) = \sqrt[3]{3x^2+6x+1}$”.

Ejercicios propuestos (por el profesor) y corregidos durante la clase: los anteriores. Corregidos por el alumno A21, que lo copia de su cuaderno.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

Durante la corrección del ej. 1 de la pág. 249, consideramos que el docente realiza una mejora significativa al contenido de la actividad, puesto que añade el cálculo del dominio y el recorrido de la función definida a trozos que se pedía representar.

Con respecto a la teoría, se indica la expresión genérica de una función irracional, junto con algunos ejemplos y se indica cuál es el dominio (según el índice de la raíz). El cálculo del dominio de las funciones tomadas como ejemplos ha sido considerado dentro de la unidad práctica, puesto que se propone durante la clase como actividad su cálculo. Se sigue un esquema parecido para presentar el dominio de las funciones exponenciales, aunque, en este caso, los tres ejemplos de cálculo del dominio son directamente desarrollados por el docente.

De nuevo, la clase finaliza con la propuesta de actividades a los alumnos que son extraídas del libro de texto: Pág. 248, ej., 1, apartados a-f. Pág. 249, ej. 2.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase hubo contenidos de dos tipos: “definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones” y “ejemplos”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

20. (Imp) Función irracional: expresión analítica genérica.

21. (Imp) Dominio de una función irracional (con la distinción según sea el índice de la raíz par o impar).

22. (Imp) Dominio de una función exponencial.

Ejemplos:

10. (Imp) Ejemplo 1 de función irracional: $f(x) = \sqrt[4]{5x + 85}$.

11. (Imp) Ejemplo 2 de función irracional: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

12. (Imp) Ejemplo 3 de función irracional: $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 6x + 1}$.

13. (Imp: recoger al menos uno de los tres de los números 13 al 15) Ejemplo 1 de cálculo del dominio en una función exponencial: $f(x)=2^{-x}$.

14. Ejemplo 2 de cálculo del dominio en una función exponencial: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{x-2}}$.

15. Ejemplo 3 de cálculo del dominio en una función exponencial: $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase se produjo una mejora en la corrección de una actividad y hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

1. En la corrección del ej. 1 de la pág. 249: Indicación del dominio y el recorrido de la función definida a trozos que se representa.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

3. ACD: Cálculo del dominio en las funciones irracionales tomada para ejemplificar el tipo de función: $f(x) = \sqrt[4]{5x + 85}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 6x + 1}$ (corregido durante la propia sesión).

4. AELT: Pág. 248, ej. 1, apartados a al f (cálculo de dominios en funciones irracionales sencillas, corregido en la sesión del martes 24/4/2012).

5. AELT: Pág. 249, ej. 2 (representación de una función definida a trozos con trozos polinómicos, corregido en la sesión del martes 24/4/2012).

Martes 24 de abril de 2012 (Hora: 09:25 a 10:20)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Teoría: Dominio de la función logarítmica, Corrección ejercicios.

Tema o conceptos explicados en la exposición teórica: “dominio función logarítmica”. La explicación de la clase se ha realizado mediante exposición oral del docente, relativamente personal, de aquello que considera como más importante, con posible apoyo de la pizarra. Los ejemplos utilizados son personales, no tomados del libro de texto, y son desarrollados en la pizarra. Ejemplos personales: “Calcula el dominio de a) $f(x)=\log_2(x+14)$, b) $g(x)= \log_{1/7}(27-3x^2)$”. Escritura de gran parte de la teoría desarrollada en la pizarra.

Ejercicios propuestos (por el profesor) y corregidos durante la clase: los anteriores. Corregidos por los alumnos A23 y A19, que lo copian de su cuaderno.

Corrección de actividades pendientes: Pág. 249, ej. 2; corregido por la alumna A29, que lo copia de su cuaderno. Pág. 248, ej. 1, apartados a, b, c, d y e; corregidos por la alumna A27, que lo copia de su cuaderno. Pág. 248, ej. 1, apartado f; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el profesor.

Información adicional de interés:

Durante la corrección del ej. 1 de la pág. 248, consideramos que el docente realiza una mejora significativa al contenido de la actividad, puesto que añade la indicación de la aparición de dominios opuestos (conjuntos complementarios en la recta real) en varios apartados donde se pedía calcular el dominio de funciones irracionales con raíces cuadradas y radicandos opuestos (por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $f(x) = \sqrt{1-x}$).

De nuevo, y al igual que ocurrió en la sesión anterior con los ejemplos de funciones irracionales, los ejemplos de funciones logarítmicas se consideran como ejemplos propios del contenido teórico explicado por el docente, mientras que el cálculo del dominio en esos ejemplos, al ser propuesto y trabajado como actividad por los alumnos en el aula, se considera parte de la unidad práctica.

Un día más, la clase finaliza con la propuesta de actividades a los alumnos que son extraídas del libro de texto: Pág. 267, ej. 1, apartados b y f. Pág. 267, ej. 2, apartado c. Pág. 267, ej. 3, apartado d. Pág. 267, ej. 7; solicitando además el profesor el cálculo del dominio y el recorrido en las funciones que aparecían en esta actividad.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase hubo contenidos de dos tipos: “definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones” y “ejemplos”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

23. (Imp) Dominio de una función logarítmica.

Ejemplos:

16. (Imp: recoger al menos uno entre los números 16 y 17) Ejemplo 3 de función logarítmica: $f(x)=\log_2(x+14)$.

17. Ejemplo 4 de función logarítmica: $f(x)= \log_{1/7}(27-3x^2)$.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase se produjo una mejora en la corrección de una actividad y hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

2. En la corrección de los apartados a al f del ej. 1 de la pág. 248: indicación de la presencia de funciones irracionales con radicando opuesto entre los apartados, resultando tener estas funciones dominios complementarios.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

6. ACD: Cálculo del dominio en las funciones logarítmicas utilizadas como ejemplos: $f(x)=\log_2(x+14)$ y $f(x)= \log_{1/7}(27-3x^2)$ (corregido durante la propia sesión).

7. AELT: Pág. 267, ej. 1, apartados b y f (cálculo del dominio en funciones racionales, corregido en la sesión del viernes 27/4/2012).

8. AELT: Pág. 267, ej. 2, apartado c (cálculo del dominio en funciones irracionales, corregido en la sesión del viernes 27/4/2012).

9. AELT: Pág. 267, ej. 3, apartado d (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del viernes 27/4/2012).

10. ARLT: Pág. 267, ej. 7 (además de relacionar gráfica con expresión analítica, se añade el cálculo del dominio y el recorrido de cada una de las funciones, corregido en la sesión del viernes 27/4/2012).

Miércoles 25 de abril de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos este día de guion rellenado.

Información adicional de interés:

Dado que no disponemos del guion del docente, hemos interpretado el contenido y desarrollo de la clase a partir del contenido existente en los cuadernos de los alumnos (por tanto, hay que tener mayor cautela con esta interpretación).

La clase comienza con la exposición de teoría por parte del docente, que presenta y define dos funciones que presenta como “interesantes”: la función parte entera y la función parte decimal o mantisa (añadiendo su notación simbólica, gráfica y algunas características de interés). Posteriormente se tratan las operaciones con funciones, con especial énfasis en la composición de funciones (definición, notación, lectura verbal). Se ejemplifican todas las operaciones, utilizando como base las funciones f(x)=5x2-7x-14 y $g(x) = \frac{3}{x}$.

Como ocurre habitualmente, la clase finaliza con la propuesta de varias actividades a los alumnos. Una de ellas es el cálculo de la composición $(f \circ g)(1)$ (siendo f y g las funciones anteriores). También se proponen dos ejercicios, extraídos del libro de texto, sobre composición de funciones: Pág. 268, ej. 17, apartados b y d. Pág. 268, ej. 18.

Unidad teórica (UT1):

Este día se explican contenidos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

24. Función parte entera: definición verbal y expresión analítica.

25. Características de la función parte entera.

26. Función parte decimal o mantisa: definición verbal y expresión analítica.

27. Características de la función parte decimal.

28. (Imp) Operaciones con funciones: suma de funciones.

29. (Imp) Operaciones con funciones: resta de funciones.

30. (Imp) Operaciones con funciones: producto de funciones.

31. (Imp) Operaciones con funciones: cociente de funciones.

32. (Imp) Operación con funciones: composición de funciones.

33. (Imp) Notación simbólica y lectura verbal de la composición de dos funciones

34. (Imp) Dos maneras diferentes de calcular una composición de funciones (según qué expresión se sustituya primero).

Ejemplos:

18. Ejemplos de cálculo de imágenes en la función parte entera (en algunos números).

19. Ejemplos de cálculo de imágenes en la función parte decimal o mantisa (en algunos números).

20. Ejemplo de suma de funciones, con f(x)=5x^2-7x-14 y $g(x) = \frac{3}{x}$.

21. Ejemplo de resta de funciones, con f(x)=5x^2-7x-14 y $g(x) = \frac{3}{x}$.

22. Ejemplo de producto de funciones, con f(x)=5x^2-7x-14 y $g(x) = \frac{3}{x}$.

23. Ejemplo de cociente de funciones, con f(x)=5x^2-7x-14 y $g(x) = \frac{3}{x}$.

24. (Imp) Ejemplo 1 de composición de funciones: $(g \circ f)(1)$ (composición en punto), con f(x)=5x^2-7x-14 y $g(x) = \frac{3}{x}$.

25. (Imp) Ejemplo 2 de composición de funciones: $(g \circ f)(x)$, con f(x)=5x^2-7x-14 y $g(x) = \frac{3}{x}$.

26. (Imp) Ejemplo 3 de composición de funciones: $(f \circ g)(x)$, con f(x)=5x^2-7x-14 y $g(x) = \frac{3}{x}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

6. Representación gráfica de la función parte entera.

7. Representación gráfica de la función parte decimal o mantisa.

8. (Imp) Esquema explicando la composición de funciones.

Observaciones o comentarios de interés:

2. (Imp) Funciones parte entera y decimal son ejemplo de funciones definidas a trozos.

3. (Imp) Recuerdo: la gráfica de una función cuadrática es una parábola.

4. (Imp) Recuerdo: la gráfica de una función racional cociente de polinomios de primer grado es una hipérbola.

5. (Imp) Indicación sobre la posible no existencia de una composición de funciones en un punto (dominio).

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

11. ACD: Dadas las funciones f(x)=5x^2-7x-14 y $g(x) = \frac{3}{x}$, calcular $(f \circ g)(1)$ (corregida en la sesión del jueves 26/4/2012).

12. AELT: Pág. 268, ej. 17, apartados b y d (composición de funciones, corregida en la sesión del jueves 26/4/2012).

13. AELT: Pág. 268, ej. 18 (mismo propósito anterior, corregida en la sesión del jueves 26/4/2012).

Jueves 26 de abril de 2012 (Hora: 11:45 a 12:40)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección de ejercicios, Teoría.

Corrección de actividades pendientes: Pág. 248, ej. 17, apartados b y d; corregido por el alumno A23, que lo copia de su cuaderno. Pág. 268, ej. 18; corregido por la alumna A20, que lo copia de su cuaderno.

Tema o conceptos explicados en la exposición teórica: “Valor absoluto de una función”. La explicación de la clase se ha realizado mediante exposición oral del docente, relativamente personal, de aquello que considera como más importante, con posible apoyo de la pizarra. Dos ejemplos personales: f(x)=|x| y f(x)=$|x^2$-9|.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

Durante la primera parte de la sesión, dedicada a la corrección de ejercicios, también se corrige la composición que se dejó pendiente el día anterior, pero no tenemos información sobre quién realiza dicha corrección.

El docente vuelve a omitir en el guion la indicación de las tareas que propone como “deberes” para la siguiente sesión. En este caso, propone la escritura de la función f(x)=$|x^2$-9| como función definida a trozos, y dos ejercicios, extraídos del libro de texto, sobre representación de funciones con valor absoluto: Pág. 251, ejercicios 1 y 2.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado “Observaciones o comentarios de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

35. (Imp) Definición de la función valor absoluto, y=|x|.
36. Explicación sobre cómo representar y=|x| como función definida a trozos.
37. (Imp) Explicación sobre cómo representar y=|x| utilizando la simetría respecto OX de la parte con imagen negativa.

Ejemplos:

27. (Imp) Ejemplo de función con un valor absoluto: f(x)=$|x^2$-9|.

Dibujos, esquemas y gráficos:

9. Representación gráfica de y=|x| utilizando su expresión como función a trozos.
10. (Imp) Representación gráfica de y=|x| utilizando la simetría respecto a OX de la parte con imagen negativa.
11. (Imp) Representación gráfica de la función y=$|x^2$-9| (simetría de la parte con imagen negativa).

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

14. ACD: Escribe la función $f(x)=|x^2-9|$ como función definida a trozos (corregida en la sesión del viernes 27/4/2012).
15. (1ª parte de actividad) AELT: Pág. 251, ej. 1 (representación de una función afectada por un valor absoluto, corregida en la sesión del viernes 27/4/2012).
16. (1ª parte de actividad) AELT: Pág. 251, ej. 2 (mismo propósito anterior, corregida en la sesión del viernes 27/4/2012).

Viernes 27 de abril de 2012 (Hora: 11:45 a 12:40)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Este día el docente no rellena el guion con el resumen de la sesión, puesto que asistimos como observadores a la clase.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase.

Asisten todos los alumnos a la clase. Se dedica la sesión, principalmente, a la corrección de actividades propuestas en días anteriores que están pendientes de ser corregidas.

El primero de ellos es la escritura a trozos de la función $f(x)=|x^2-9|$, corregido por el propio docente. Posteriormente, la alumna A25 corrige el ej. 1 de la pág. 251, copiando la resolución de su cuaderno. En este momento, el docente aprovecha para revisar, alumno por alumno, si éstos han intentado o no resolver las tareas propuestas para hoy. Esta alumna hace la representación haciendo el simétrico respecto a OX de la parte con imagen negativa. La alumna A22 sale a corregir el ej. 2 de esa misma página. Tras la corrección de estos dos ejercicios, el profesor les pide como tarea para el próximo día, escribir las funciones de estos dos ejercicios como funciones a trozos (en nuestro análisis, consideraremos este nuevo requisito como una segunda parte de la tarea anterior, que analizaremos de forma conjunta).

Los alumnos le indican al profesor que no se han corregido algunos ejercicios de días anteriores. Dichos ejercicios son corregidos en este momento de la clase. Es el caso del ej. 1 de la página 267 (apartados b y f), que es corregido oralmente por la alumna A24 desde el pupitre (ejercicios sobre el cálculo del dominio de una función), recordando el docente el proceso a seguir para obtener dicho dominio. El apartado c del ej. 2 de esa misma página también es corregido por esta alumna, aunque haciéndolo en la pizarra (copiado de su cuaderno).

En el caso del ej. 3 (apartado d) de la pág. 267 (cálculo del dominio de una función irracional), tras comprobar que varios alumnos lo habían resuelto de forma errónea, es el propio docente el que lo corrige en la pizarra, enfatizando el proceso seguido. El último ejercicio pendiente es el ej. 7 de la pág. 267 (con la reformulación del docente anteriormente comentada, en la sesión del martes 24/4/2012), que es corregido oralmente por varios alumnos, como A19, A21 y A27.

A continuación, el profesor junto con los alumnos va resolviendo el ej. 8 de esa misma página, donde también había que unir gráficas con expresiones analíticas, repasando otros aspectos como el dominio, el recorrido o algunas características de las funciones que van apareciendo. Es por ello que consideramos este ejercicio como un ejemplo más del contenido teórico. Dentro de este ejemplo, el docente se detiene en cómo puede representarse gráficamente la función $f(x) = -\sqrt{-x}$ (una de las que aparecían en ese ejercicio) a partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ (efectos de los signos negativos), anticipando un contenido que se desarrollará con mayor profundidad en clases posteriores.

Como viene siendo habitual, la clase finaliza con el planteamiento de ejercicios para la siguiente sesión. Además de la escritura como funciones a trozos de las funciones de los ej. 1 y 2 de la pág. 251 (y que fusionamos con dichos ejercicios, como un segundo apartado de los mismos), el profesor propone un ejercicio extraído del libro de texto: el ej. 35 (apartado b) de la pág. 269.

<u>Unidad teórica (UT1)</u>:

En esta clase existieron contenidos correspondientes a dos de los cuatro tipos considerados: “Ejemplos” y “Dibujos, esquemas y gráficos”.

Ejemplos:

28. Ejercicio resuelto en clase a modo de ejemplo/recordatorio de aspectos: Ejercicio 8, pág. 267 (del libro de texto).

Dibujos, esquemas y gráficos:

12. (Imp: recoger al menos uno de los números 12 y 15) Gráfica que ilustra cómo obtener gráfica de $f(x) = -\sqrt{-x}$ a partir de $f(x) = \sqrt{x}$.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

15. (2ª parte de actividad) ARLT: Pág. 251, ej. 1 (escritura de una función afectada por un valor absoluto como una función definida a trozos, corregida en la sesión del miércoles 2/5/2012).
16. (2ª parte de actividad) ARLT: Pág. 251, ej. 2 (mismo propósito anterior, corregida en la sesión del miércoles 2/5/2012).
17. AELT: Pág. 269, ej. 35, apartado b (representación de una función definida a trozos con trozos cuadráticos, corregida en la sesión del miércoles 2/5/2012).

Miércoles 2 de mayo de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Composición de funciones.

Tema o conceptos explicados en la exposición teórica: “Repetición de la composición de funciones”. Uso de ejemplos personales, no tomados del libro, que son desarrollados con la ayuda de la pizarra: funciones $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x)=e^{-x}$.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

El profesor no comenta en su guion la corrección de actividades pendientes que se realizó en la primera parte de la clase: la escritura como función definida a trozos de las funciones $f(x) = |-x^2+4x+5|$ (función del ej. 1 de la pág. 251) y $f(x) = |\frac{x}{2} - 3|$ (función del ej. 2 de esa misma página), y la corrección del ej. 35, apartado b, de la pág. 269. No tenemos información sobre quién corrigió estas actividades.

No obstante, durante la corrección de este último ejercicio, consideramos que el docente realizó una mejora significativa al contenido de la actividad, puesto que añadió el estudio y la escritura de las propiedades (dominio, recorrido, monotonía) de la función a trozos que se pide representar en esta actividad.

Este centro tiene una dinámica especial por la que se habilitan algunos periodos del curso como periodos de exámenes y se suspenden las clases en dichos periodos. Desde el jueves 3/5/2012 hasta el martes 8/5/2012 se suspendieron las clases para realizar los exámenes parciales de la tercera evaluación, entre ellos el examen de matemáticas.

Así, al ser la última clase previa al examen, el resto de la clase se dedicó a repasar aspectos del bloque de Geometría plana y de los aspectos tratados hasta ahora del tema de funciones (contenidos del examen). Así, se repasaron algunos aspectos del tema de funciones, como el cálculo de dominios o la composición de funciones, de cara al inminente examen de la asignatura. Se realizaron varios ejemplos de cálculo de dominios y composición de funciones, utilizando las funciones $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x)=e^{-x}$. También se realizaron, a modo de repaso, algunos ejercicios de geometría plana.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase tan sólo hubo contenidos de uno de los cuatro tipos: “Ejemplos”.

Ejemplos:

29. (Imp) Ejemplos de repaso sobre composición de funciones.
30. (Imp) Ejemplos de repaso sobre cálculo de dominios.
31. Ejemplos de repaso sobre composición de funciones en puntos concretos.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo una mejora significativa en la corrección de actividades, sin que se planteara ninguna nueva.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

3. En la corrección del ej. 35, apartado b, de la pág. 269: Indicación de algunas propiedades de la función que se pedía representar.

Periodo de exámenes parciales (3ª ev.): del jueves 3/5/2012 al martes 8/5/2012

Información tomada del guion rellenado por el docente:

El docente nos proporcionó los enunciados de los ejercicios del examen. El examen constaba de ocho preguntas, cada una de ellas valorada sobre 1'25 puntos. Únicamente una de ellas, la última, tenía contenidos propios del bloque de análisis matemático. Las actividades restantes pertenecían al bloque de geometría plana.

El enunciado de la actividad correspondiente al bloque de análisis matemático fue la siguiente:

8. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, *g(x)=x*^{2}*-3x+2 y* $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & si\ x \leq 1 \\ 2, & si\ 1 < x \leq 3 \\ 8 - 2x, & si\ x > 3 \end{cases}$

(a) Calcula el dominio de $f \circ g$

(b) Representa la función h(x) y di cuál es su imagen.

Información adicional de interés:

No conocemos qué día de los destinados a exámenes fue el día en que se realizó el examen de matemáticas.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión (que pueda estar en el cuaderno de los alumnos).

Miércoles 9 de mayo de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Este día no disponemos de guion rellenado por el docente (de hecho, no volvemos a disponer de guiones hasta el 16/4/2012).

Información adicional de interés:

A través del cuaderno de los alumnos, interpretamos que este día se destinó a la corrección de los ejercicios del examen parcial que habían hecho durante el periodo de exámenes.

Como hemos comentado, de las ocho actividades del examen hay una con contenido propio del tema que se está desarrollando. Por ello, consideramos la realización de ese ejercicio en el aula como un ejercicio resuelto, a modo de ejemplo, propio del tema.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase tan sólo hubo contenidos de dos de los cuatro tipos: “Ejemplos” y “Dibujos, esquemas y gráficos”.

Ejemplos:

32. Resolución del ej. 8, apartado a, del examen parcial de la tercera evaluación.
33. Resolución del ej. 8, apartado b, del examen parcial de la tercera evaluación.

Dibujos, esquemas y gráficos:

13. Representación gráfica de la función del ejercicio 8, apartado b, del examen.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ninguna actividad en esta clase, ni se realizó ninguna mejora significativa en las actividades corregidas (ejemplos a modo de ejercicio resuelto).

Jueves 10 de mayo de 2012 (Hora: 11:45 a 12:40)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos de guiones rellenados hasta la sesión del 16/5/2012.

Información adicional de interés:

Información obtenida a través de la interpretación de los cuadernos de los alumnos (por lo que debe ser tomada con cautela). Los contenidos asociados a este día que aparecen en los cuadernos de los alumnos son escasos, por lo que pudiera haberse dedicado la primera parte de la clase a continuar con la revisión del examen parcial.

Volviendo a la teoría, el profesor comienza a exponer cuáles son los efectos en la representación gráfica de la función de algunas transformaciones elementales en la ecuación simbólica, como k·f(x) (dilatación o contracción de la gráfica de la función), -f(x) (simetría respecto al eje OX) o f(-x) (simetría respecto al eje OY). Se ilustra a través de varios ejemplos, un grupo partiendo de la función cuadrática elemental f(x)=x^2 y otro partiendo de la función irracional $f(x) = \sqrt{x}$ (se vuelve a un gráfico parecido al realizado en la sesión del viernes 27/4/2012).

Unidad teórica (UT1):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

38. (Imp) Explicación del efecto en la gráfica al representar k·f(x) a partir de f(x).
39. (Imp) Explicación del efecto en la gráfica al representar -f(x) a partir de f(x).
40. (Imp) Explicación del efecto en la gráfica al representar f(-x) a partir de f(x).

Ejemplos:

34. (Imp) Ejemplo 1 sobre efectos en la gráfica de las transformaciones elementales de una función: f(x)=kx^2.

Dibujos, esquemas y gráficos:

14. (Imp) Gráfica comparando los efectos al representar gráficas del tipo f(x)=kx^2.
15. Gráfica comparando los efectos al representar f(-x), -f(x) y -f(-x) tomando como $f(x) = \sqrt{x}$.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad en esta sesión.

Viernes 11 de mayo de 2012 (Hora: 11:45 a 12:40)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos de guiones rellenados hasta la sesión del 16/5/2012.

Información adicional de interés:

Información obtenida a través de la interpretación de los cuadernos de los alumnos (por lo que debe ser tomada con cautela).

Se retoma y repasa el contenido teórico tratado en la clase del día anterior, a través de ejemplos con funciones irracionales. Partiendo de la función $f(x) = \sqrt{x}$, se representa primero (explicando el proceso) la función $f(x) = -3\sqrt{x}$ y, posteriormente, las funciones $f(x) = -3\sqrt{x-2}$ y $f(x) = -3\sqrt{-(x-2)}$.

Posteriormente, se continúa con la exposición teórica explicando el estudio y representación de funciones racionales que son cocientes de polinomios de primer grado. Se estudia su representación tomando como base la hipérbola equilátera $f(x) = \frac{1}{x}$, a partir de transformaciones de éstas según sea el cociente y el resto obtenido al realizar la división de los polinomios de primer grado que componen la función racional (aplicando la regla de Ruffini y el Teorema del Resto). Todo ello se explica a través del ejemplo $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$.

Como tarea para la próxima sesión (martes 15/5/2012), se plantea el estudio y representación de la función racional $f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$.

<u>Unidad teórica (UT1)</u>:

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

41. (Imp) Explicación del efecto en la gráfica al representar f(x)+k o f(x)-k a partir de f(x).
42. (Imp) Explicación del efecto en la gráfica al representar f(x+k) o f(x-k) a partir de f(x).
43. (Imp) Método para estudiar y representar funciones racionales que son cociente de polinomios de primer grado.

Ejemplos:

35. (Imp) Ejemplo 2 sobre efectos en la gráfica de las transformaciones elementales de una función: $f(x) = -3\sqrt{x}$.
36. (Imp) Ejemplo 3 sobre efectos en la gráfica de las transformaciones elementales de una función: $f(x) = -3\sqrt{x-2}$.
37. (Imp) Ejemplo 4 sobre efectos en la gráfica de las transformaciones elementales de una función: $f(x) = -3\sqrt{-(x-2)}$.

38. (Imp) Ejemplo de estudio y representación de función racional cociente de polinomios de primer grado: $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

16. Gráfica representando diferentes funciones ($f(x) = -3\sqrt{x}$, $f(x) = -3\sqrt{x-2}$, $f(x) = -3\sqrt{-(x-2)}$) a partir de $f(x) = \sqrt{x}$.
17. (Imp) Representación gráfica de una función racional cociente de polinomios de primer grado: $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

18. ACD: Estudio y representación de la función racional $f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$ (corregida en la sesión del martes 15/5/2012).

Martes 15 de mayo de 2012 (Hora: 09:25 a 10:20)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos de guiones rellenados hasta la sesión del 16/5/2012.

Información adicional de interés:

Información obtenida a través de la interpretación de los cuadernos de los alumnos (por lo que debe ser tomada con cautela).

La clase se dedica a la corrección detallada del ejercicio planteado al final de la clase anterior: división de los polinomios, explicación de cómo se representa, representación y propiedades.

Además, durante la corrección de esta actividad, consideramos que el docente realizó una mejora significativa al contenido de ésta, puesto que hizo un estudio pormenorizado de los puntos de corte de la hipérbola resultante con los ejes de coordenadas y se construyó una tabla de valores con muchos puntos para hacer una representación más precisa de la hipérbola.

Al final de la clase, el docente propuso dos tareas como deberes para la sesión siguiente (miércoles 16/5/2012). Ambas estaban relacionados con la relación entre el traslado de la gráfica de una función y los cambios en la expresión analítica, aunque planteada a la inversa de como se había estado tratando en el aula.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en esta clase se produjo una mejora en la corrección de una actividad y hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

4. En la corrección del estudio y representación de $f(x)=\frac{2x+5}{x-2}$: estudio pormenorizado de los puntos de corte de la hipérbola con los ejes de coordenadas y representación con mayor precisión utilizando una amplia tabla de valores.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

19. ACD: Dada la función f(x)=x^2-1, representa la gráfica de la función trasladada de la anterior una unidad hacia la izquierda y dos unidades hacia arriba, y escribe su expresión analítica y sus características (corregido en la sesión del miércoles 16/5/2012).

20. ACD: Mismo enunciado anterior con la función $g(x)=-\frac{1}{x}$ (corregido en la sesión del miércoles 16/5/2012).

Miércoles 16 de mayo de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección ejercicios, Límites. Idea gráfica.

Corrección de actividad propuesta por el profesor: “$g(x)=-\frac{1}{x}$, trasladar 1 hacia la izquierda y dos hacia abajo. Expresión analítica. Características”. Corregida por el alumno A21 en la pizarra, no lo copia de su cuaderno.

Corrección de actividad propuesta por el profesor: "$f(x)=x^2-1$, trasladar 1 hacia la izquierda y dos hacia abajo. Expresión analítica. Características". Corregida por el profesor, combinando el uso de la pizarra con la explicación oral.

Exposición teórica: la explicación de la clase se ha realizado mediante una exposición oral relativamente personal de aquello que el profesor considera más importante, con el posible apoyo de la pizarra. Uso de ejemplos personales, no tomados del libro, y explicados con la ayuda de la pizarra.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

Como vemos en el guion del docente, en esta clase se produce un cambio en el tema, terminando el tema sobre funciones y sus características, y comenzando un nuevo tema, sobre límite de una función y continuidad. Se corrigen las dos actividades pendientes del tema que hoy finaliza, sin que se añada ningún contenido teórico ni se proponga ninguna actividad propia de ese tema.

En la parte de exposición teórica, el docente comienza a introducir la idea de límite. Lo hace a través de una función representada gráficamente, en la que se explica el cálculo de algunos límites, introduciendo la idea intuitiva del concepto. Se tratan los límites cuando $x \to \pm\infty$ y cuando x tiende a un punto: existencia o no, e idea de límites laterales.

En la parte final de clase, y como es costumbre, el docente plantea dos actividades extraídas del libro de texto. Son los ejercicios 8 y 9 de la pág. 296. En ambos, se plantea el cálculo de varios límites en una función a partir de su representación gráfica.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. (Imp) Idea de qué significa el límite de una función cuando x tiende a más infinito.

2. (Imp) Idea de qué significa el límite de una función cuando x tiende a menos infinito.

3. (Imp) Idea de qué significa el límite de una función en un punto.

4. Explicación de la notación simbólica para el límite de una función.

5. (Imp) Límite lateral por la izquierda: idea sobre el concepto y notación.

6. (Imp) Límite lateral por la derecha: idea sobre el concepto y notación.

7. (Imp) Condición de existencia/no existencia del límite de una función en un punto (límites laterales).

Ejemplos:

1. (Imp) Ejemplo 1 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x \to +\infty$.

2. (Imp) Ejemplo 2 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x \to -\infty$.

3. (Imp: recoger al menos uno entre los números 3 y 4) Ejemplo 3 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x \to 0$.

4. Ejemplo 4 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x \to -5$.

5. (Imp: recoger al menos uno entre los números 5 y 6) Ejemplo 5 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x \to -3$.

6. Ejemplo 6 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x \to 2$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. (Imp) Representación gráfica de una función para ilustrar la idea de límite y ejemplos de cálculo.

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

No hubo ninguna mejora significativa en las últimas actividades corregidas correspondientes al tema de funciones elementales.

<u>Unidad práctica (UP2)</u>:

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

1. AELT: Pág. 296, ej. 8 (cálculo de límites en funciones representadas gráficamente, corregida en la sesión del jueves 17/5/2012).
2. AELT: Pág. 296, ej. 9 (mismo propósito anterior, corregida en la sesión del jueves 17/5/2012).

Jueves 17 de mayo de 2012 (Hora: 11:45 a 12:40)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos en esta sesión de guion rellenado por el docente.

Información adicional de interés:

Dado que no disponemos del guion del docente, hemos interpretado el contenido y desarrollo de la clase a partir del contenido existente en los cuadernos de los alumnos (por tanto, hay que tener mayor cautela con esta interpretación).

En la primera parte de la clase, se realiza la corrección de las dos actividades propuestas en la sesión anterior, sobre cálculo de límites en funciones representadas gráficamente. No tenemos información sobre quién corrige las actividades.

Posteriormente, se retoma la teoría sobre límites. Primeramente se indica cuándo una función tiene asíntota horizontal y se indica la forma "usual" de calcular límites (sustituyendo). El docente tiende a utilizar la aritmética generalizada en la recta real con el infinito, remarcando varias reglas de cálculo que involucran al infinito.

Se pasa al cálculo de indeterminaciones. En particular, se comienza con la indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, indicando cómo se resuelve, haciendo un ejemplo y proponiendo a los alumnos dos límites con esta indeterminación para que sean resueltos en ese momento. Durante la corrección de los mismos, el docente realizó una mejora significativa a su contenido, puesto que indicó la existencia o no de asíntota horizontal en ambos casos. Tras esto, indicó cómo puede estudiarse la posición de la rama asintótica respecto de la asíntota (en caso de que exista), complementándolo con un ejemplo. La misma estrategia se siguió para presentar la indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ (explicación más ejemplo ilustrativo).

En la parte final de la clase, el docente propuso actividades para casa, extraídas del libro de texto. Una de ellas está relacionada con el cálculo de indeterminaciones de tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ y la existencia o no de asíntotas (Página 297, ej. 19, apartados b, d, f y h). Otra está relacionada con el cálculo de indeterminaciones de tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$ (Página 298, ej. 32, apartados a y b).

Unidad teórica (UT2):

En esta clase hubo contenidos de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

8. (Imp) Relación entre el valor del límite de una función en el infinito y la presencia o no de asíntota horizontal.
9. Cálculo numérico de límites (sin indeterminaciones, sustituyendo x por valor.
10. Regla práctica 1 para el cálculo de límites (involucrando al infinito): "∞+k=∞" e "∞-k=∞".
11. Regla práctica 2 para el cálculo de límites (involucrando al infinito): "k/∞=0".
12. Regla práctica 3 para el cálculo de límites (involucrando al infinito): "∞·k=∞" (si k>0).
13. Regla práctica 4 para el cálculo de límites (involucrando al infinito): "∞·k=-∞" (si k<0).
14. (Imp) Método para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$.
15. (Imp) Método para saber si una función se aproxima a una asíntota horizontal por encima o por debajo de ésta.
16. (Imp) Método para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$.

Ejemplos:

7. (Imp) Ejemplo de cálculo de asíntota horizontal utilizando el límite: con la función $f(x) = 3 + \frac{7}{x-5}$.
8. Ejemplo de cálculo de un límite (sustituyendo, hasta llegar a una indeterminación).
9. (Imp) Ejemplo de límite con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$: $f(x) = \frac{x-3}{2x+5}$ cuando $x \to +\infty$.
10. (Imp) Ejemplo de obtención de posición de gráfica respecto a asíntota horizontal: $f(x) = \frac{3x^2-2x+7}{x^3-x^2+1}$.

11. (Imp) Ejemplo de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ en x=1.

Dibujos, esquemas y gráficos:

2. Gráfica ilustrando las opciones de acercamiento de una rama asintótica a una asíntota horizontal.

3. (Imp) Gráfica anterior concreta, para la función $f(x) = \frac{3x^2-2x+7}{x^3-x^2+1}$.

Observaciones o comentarios de interés:

1. (Imp) Recuerdo sobre cómo se representa la función $f(x) = 3 + \frac{7}{x-5}$ (traslación de hipérbola).

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase se produjo una mejora en la corrección de una actividad y hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

1. En la corrección de los dos límites con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ propuestos durante la clase: interpretación del resultado en términos de existencia o no de asíntota horizontal.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

3. ACD: Cálculo del límite $\text{lím}_{x\to+\infty} f(x) \frac{3x^2-2x+7}{x^3-x^2+1}$ (corregido en la propia sesión).

4. ACD: Cálculo del límite $\text{lím}_{x\to+\infty} f(x) \frac{x^7-x^5}{4x^5-x^3+3}$ (corregido en la propia sesión).

5. ARLT: Pág. 297, ej. 19, apartados b, d, f y h (cálculo de límite más interpretación gráfica del resultado, corregido en la sesión del miércoles 23/5/2012).

6. AELT: Pág. 298, ej. 32, apartados a y b (cálculo de límites con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$, corregido en la sesión del jueves 24/5/2012).

Viernes 18 de mayo de 2012

Este día se celebra en el centro el “Día de la Familia”, por lo que no hubo clase de matemáticas este día.

Martes 22 de mayo de 2012 (Hora: 09:25 a 10:20)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Función inversa – teoría.

Tema o conceptos explicados: "Def. f. inversa y su cálculo". Tiempo de exposición (aproximado): 30 minutos. La explicación de la clase se ha realizado mediante una exposición oral relativamente personal de aquello que el profesor considera más importante, con el posible apoyo de la pizarra. Escritura en la pizarra de gran parte de la teoría desarrollada. Uso de ejemplos personales durante la explicación, no tomados del libro de texto, y desarrollados con la ayuda de la pizarra.

Ejercicios propuestos por el profesor a los alumnos y corregidos posteriormente en la misma clase: "Cálculo de la inversa: una f. racional, una polinómica de 3er grado".

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

El docente hizo énfasis en los elementos neutros y los simétricos para las diferentes operaciones con funciones: suma, producto, composición. No obstante, no llama "recíproca" a la simétrica para la composición, sino "inversa" (mismo nombre que para la función simétrica para el producto, lo que puede generar una confusión en los estudiantes entre las simétricas de ambas operaciones).

En la actividad propuesta durante la clase, el docente no propone dos funciones (como indica en el guion que nos proporciona) para el cálculo de la función recíproca, sino tres: recíproca de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, g(x)=x^3-1 y $h(x) = \frac{2x-1}{x+5}$. Además, como tarea que deja pendiente (y que no es corregida posteriormente, ni ese día ni en días posteriores), les pide a los estudiantes que comprueben que la función obtenida en cada caso, efectivamente, es la función recíproca.

Además, durante la corrección para la última función, consideramos que el docente realizó una mejora significativa del contenido de la actividad, puesto que desarrolla el cálculo de asíntotas horizontales y verticales en la función $h(x) = \frac{2x-1}{x+5}$ y en su recíproca, lo que permite ver cómo se intercambian éstas (al producirse un intercambio entre el dominio y el recorrido de una función y su recíproca).

En la parte final de la clase, el profesor propone como tarea para casa una actividad: el cálculo de la función recíproca en dos casos más (para las funciones

$f(x) = 1 + \frac{3}{2x-1}$ y g(x)=3^x). La actividad fue corregida en la siguiente sesión (miércoles 23/5/2012).

<u>Unidad teórica (UT2)</u>:

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

17. Suma de funciones: elemento neutro y simétrico (opuesto).
18. Producto de funciones: elemento neutro y simétrico (inverso).
19. Elemento neutro para la composición: función identidad.
20. (Imp) Definición de función recíproca de otra función dada (el docente denomina como "función inversa" a la función recíproca, lo que puede provocar dificultades en los alumnos con la inversa para el producto –operación en la que se utiliza este nombre para la función simétrica).
21. (Imp) Pasos a seguir para calcular la función recíproca de una función dada.
22. (Imp) Simetría respecto de la función identidad entre la gráfica de una función y la de su recíproca.

Ejemplos:

12. Ejemplo que ilustra que la función identidad es el elemento neutro composición: con f(x)=3x-2.
13. (Imp) Ejemplo 1 de cálculo de la función recíproca: f(x)=3x-2.
14. Comprobación en el ejemplo anterior de la relación de reciprocidad existente entre funciones (f(x)=3x-2 y la recíproca que se acaba de calcular, se hacen las dos composiciones).

Dibujos, esquemas y gráficos:

4. Representación gráfica de la función identidad, i(x)=x.
5. Diagrama de una función y su recíproca en valores concretos (inversión de los valores).
6. (Imp) Representación gráfica de la función f(x)=3x-2, su recíproca y la función identidad (simetría).

Unidad práctica (UP2):

Existen tanto mejoras en la corrección de una actividad como actividades propuestas (corregidas posteriormente y no corregidas)

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

2. Durante la corrección del cálculo de la función recíproca de las tres funciones propuestas en la clase: estudio de las asíntotas horizontales y verticales existentes e intercambio de las expresiones en funciones recíprocas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

7. ACD: Cálculo de la función recíproca de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, g(x)=x^3-1 y $h(x) = \frac{2x-1}{x+5}$ (corregido en la propia sesión).

8. ACD: Cálculo de la función recíproca de las funciones $f(x) = 1 + \frac{3}{2x-1}$ y g(x)=3^x (corregido en la sesión del miércoles 23/5/2012).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

1. ACD: Comprobación de que las funciones obtenidas (en el ejercicio propuesto y corregido con el número 7), efectivamente, son las recíprocas de las funciones dadas.

Miércoles 23 de mayo de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección de ejercicios.

Corrección de actividades pendientes: Calcular la inversa de $f(x) = 1 + \frac{3}{2x-1}$; corregido por la alumna A26, pero no lo copia de su cuaderno (lo tenía mal hecho). Calcular la inversa de g(x)=3^x; corregido por el alumno A21, que lo copia de su cuaderno. Pág. 297, ej. 19 (apartados b, d, f y h); corregido por la alumna A25, que lo copia de su cuaderno.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

Después de la corrección del cálculo de la función recíproca (actividad propuesta durante la sesión anterior, martes 22/5/2012), el docente introduce contenido teórico: definición de función inyectiva y necesidad de que una función sea inyectiva para que exista su recíproca. Estudio de la función $f(x)=x^2$. Tras esto, se continúa con la corrección de actividades pendientes (ej. 19 de la pág. 297, junto con el estudio de la existencia de asíntotas horizontales y la situación de la rama respecto a la asíntota, en caso de existir).

El docente, al finalizar la clase, manda dos actividades para casa. Una de las actividades trata el cálculo de la función recíproca (pág. 269, ej. 37, apartados b y c). La otra trata el estudio de una función cuadrática en una situación hipotética de modelización (pág. 270, ej. 48). Ambas actividades son corregidas en la sesión posterior (jueves, 24/5/2012).

Unidad teórica (UT2):

En esta clase existieron contenidos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

23. Definición de función inyectiva.
24. (Imp) La función recíproca de una dada sólo existe si dicha función es inyectiva.
25. Estudio del cálculo de la función recíproca en las dos ramas de la función cuadrática $f(x)=x^2$ (raíces positiva y negativa).

Ejemplos:

15. Ejemplo 2 de cálculo de la función recíproca: las dos ramas inyectivas de $f(x)=x^2$ (para $x\geq 0$ y $x<0$).

Dibujos, esquemas y gráficos:

7. (Imp) Representación gráfica de la función $f(x)=x^2$, ilustrando la no inyectividad de la misma.
8. (Imp) Representación gráfica de la función $f(x)=x^2$, sus dos ramas (para $x\geq 0$ y $x<0$) y las recíprocas de cada rama.

Observaciones o comentarios de interés:

2. (Imp) Funciones inyectivas usuales: funciones cuya gráfica es una recta o una hipérbola.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

9. AELT: Pág. 269, ej. 37, apartados b y c (cálculo de la función recíproca, corregida en la sesión del jueves 24/5/2012).

10. AELT: Pág. 270, ej. 48 (estudio de una función cuadrática en un contexto de modelización funcional, corregida en la sesión del jueves 24/5/2012).

Jueves 24 de mayo de 2012 (Hora: 11:45 a 12:40)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección de ejercicios.

Corrección de actividades pendientes: Pág. 269, ej. 37, apartado b (F. inversa); corregido por la alumna A26, que lo copia de su cuaderno. Pág. 269, ej. 37, apartado c (F. inversa); corregido por el alumno A28, que lo copia de su cuaderno. Pág. 270, ej. 48; corregido por el docente, combinando el uso de la pizarra con la explicación oral del mismo. Pág. 298, ej. 32, apartados a y b; corregido por la alumna A27, que lo copia de su cuaderno.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

Durante la corrección del ej. 48 de la pág. 270, consideramos que el docente realizó una mejora significativa del contenido de la actividad, puesto que, además de calcular el beneficio máximo (que era lo que pedía la actividad), plantea y resuelve una pregunta adicional: el número de unidades del producto que debe vender para no perder dinero (beneficio positivo).

En el último ejercicio que se corrige, los dos apartados del ej. 32 de la pág. 298, el proceso de resolución de las indeterminaciones de tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$ da lugar, en ambos casos, a una situación del tipo $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$. En este momento, el docente introdujo cómo se resuelve una situación de este tipo: a través del cálculo de los límites laterales, para determinar el signo de la tendencia a infinito.

Como actividades para el próximo día, en la parte final de la sesión propone la resolución de los ej. 31 y 32 (apartados c y d) de la pág. 298, que tratan la resolución de indeterminaciones $\frac{\to 0}{\to 0}$ en cocientes de polinomios (incluyendo la aparición de situaciones $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$ en el proceso de resolución). Además, el profesor añade, en el ej. 32, la interpretación gráfica del resultado obtenido en los límites.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase existieron contenidos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

26. (Imp) Método para resolver una situación con "indeterminación" $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$.

Ejemplos:

16. (Imp) Ejemplo de límite con "indeterminación" $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$: $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x}$ en x=0.

Dibujos, esquemas y gráficos:

9. (Imp) Representación gráfica ilustrando qué pasa en un entorno de x=0 en la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x}$.

Observaciones o comentarios de interés:

3. (Imp) Relación entre la "indeterminación" $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$ y las presencia de asíntotas verticales.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados en esta clase, se produjo una mejora en la corrección de una actividad y hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

3. En la corrección del ej. 48 de la pág. 270: cálculo de la horquilla de número de unidades necesarias a vender para no perder dinero (en la situación de modelización funcional planteada).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

11. AELT: Pág. 298, ej. 31 (cálculo de límites con indeterminaciones $\frac{\to 0}{\to 0}$ y $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$, corregido en la sesión del viernes 25/5/2012).
12. ARLT: Pág. 298, ej. 32, apartados c y d (cálculo de límites más interpretación de los resultados, corregido en la sesión del viernes 25/5/2012).

Viernes 25 de mayo de 2012 (Hora: 11:45 a 12:40)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección ejercicios.

Corrección de actividades pendientes: Pág. 298, ej. 31; corregido por la alumna A20, que lo copia de su cuaderno. Pág. 298, ej. 32; corregido por la alumna A29, que lo copia de su cuaderno.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion. En este caso, la interpretación de la información obtenida de los cuadernos parece indicar que en esta clase también existió una componente de explicación de aspectos teóricos, en la segunda parte de esta sesión. Comentamos a continuación los aspectos no tratados por el docente en el guion rellenado que nos proporcionó.

Una vez corregidas esas dos actividades, se propuso para su realización en el aula (y se corrigió posteriormente) la resolución de otro límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$: $\text{lím}_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{9-x^2}$.

Retomando la teoría, se trató el cálculo de límites en funciones de tipo potencial-exponencial (de la forma $f(x)^{g(x)}$), explicando el método y aplicándolo en varios ejemplos.

En la parte final de la clase, se propusieron varias actividades a modo de deberes. Una de ellas fue el cálculo de un límite propuesto por el docente, en el que existía una indeterminación de tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$, pero que contenía expresiones con radicales (el docente explica el paso clave que deben seguir en su resolución: la multiplicación y división por la expresión conjugada de la resta de radicales que aparecía). Además, también les propone la resolución de todos los apartados del ej. 28 de la pág. 297, aunque no de forma completa. Se propone el estudio de la existencia o de asíntota horizontal en los apartados a, b, d y f. Por otro lado, se propone el estudio de la existencia o no de asíntota vertical en algunos puntos en el apartado c (estudio en x=1) y el apartado e (estudio en x=-2 y x=2).

Unidad teórica (UT2):

En esta clase existieron contenidos de todos los tipos, a excepción de "Dibujos, esquemas y gráficos".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

27. Resolución de límites en funciones de tipo potencial-exponencial (sin indeterminación).
28. Regla para calcular el resultado de una potencia cuando la base tiende a un número y el exponente tiende a infinito.

Ejemplos:

17. (Imp: recoger al menos uno de los tres de los números 17 al 19) Ejemplo 1 de cálculo de límite en una función potencial-exponencial (hasta llegar a $(\to 1)^{\to\infty}$, indeterminación cuya resolución no se trabajó en este curso): $f(x) = \left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}}$ en x=2.
18. Ejemplo 2 de cálculo de límite en una función potencial-exponencial: $f(x) = \left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}}$ en +∞.
19. Ejemplo 3 de cálculo de límite en una función potencial-exponencial: $f(x) = \left(\frac{3x-1}{5x+6}\right)^{x^2-2}$ en +∞.

Observaciones o comentarios de interés:

4. Resolución de la indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ en un cociente que contiene expresiones con radicales.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

13. ACD: Calcula el límite $\text{lím}_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{9-x^2}$ (corregido en la misma sesión).

14. ACD: Calcula el límite $\text{lím}_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$ (corregido en la sesión del miércoles 30/5/2012).

15. ARLT: Pág. 297, ej. 28, apartados a, b, d y f (estudio de asíntotas horizontales cuando $x \to +\infty$ en funciones racionales e interpretación del resultado, corregido en la sesión del martes 29/5/2012).

16. ARLT: Pág. 297, ej. 28, apartados c y e (estudio de asíntotas verticales en funciones racionales e interpretación, corregido en la sesión del martes 29/5/2012).

Martes 29 de mayo de 2012 (Hora: 09:25 a 10:20)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección ejercicios.

Corrección de actividades pendientes: Pág. 297, ej. 28, apartado a; corregido por la alumna A24, que lo copia de su cuaderno. Pág. 297, ej. 28, apartado b; corregido por la alumna A22, que lo copia de su cuaderno. Pág. 297, ej. 28, apartado c; corregido por la alumna A29, que lo copia de su cuaderno. Pág. 297, ej. 28, apartado d; corregido por el alumno A28, que lo copia de su cuaderno. Pág. 297, ej. 28, apartado e; corregido por la alumna A19, que lo copia de su cuaderno.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion. En este caso, la interpretación de la información obtenida de los cuadernos parece indicar que en esta clase también existió una componente de explicación de aspectos teóricos, en la segunda parte de esta sesión. Comentamos a continuación los aspectos no tratados por el docente en el guion rellenado que nos proporcionó.

El apartado restante del ej. 28 de la pág. 297 también fue corregido, aunque no tenemos datos sobre quién lo corrigió. Además, en este apartado consideramos que el docente realizó una mejora significativa del contenido de la actividad, puesto que también realiza el estudio sobre la existencia o no de asíntota horizontal y, también, de asíntota vertical en x=1 (la función era $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$).

Retomando la teoría, se trató la resolución de límites cuando $x \to -\infty$, indicando el profesor un método particular para resolverlos: realizar un cambio de variable (y=-x) para transformarlos en límites con $x \to +\infty$ en el caso de que el límite inicial tuviera una indeterminación. Ilustración con ejemplos.

En la parte final de la clase, y como es habitual, el docente propone actividades para realizar fuera del aula, todas ellas extraídas del libro de texto y relacionados con el cálculo de límites cuando $x \to -\infty$ y su interpretación en términos de existencia o no de asíntota horizontal. De la pág. 298, propone todos los apartados (a al f) del ej. 33 (los consideramos como dos actividades, en dos grupos de tres, para que la carga de las actividades sea equilibrada). Además, de esa misma página, propone los apartados b y d del ej. 37.

<u>Unidad teórica (UT2):</u>

En esta clase se trataron contenidos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

29. (Imp) Método para resolver límites con indeterminación cuando $x \to -\infty$ (cambio de variable).

Ejemplos:

20. Ejemplo 1 de cálculo de límites cuando $x \to -\infty$ (sin cambio de variable: $f(x)=3^{2x+1}$).
21. (Imp) Ejemplo 2 de cálculo de límites cuando $x \to -\infty$ (con cambio de variable, en una función racional: $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x^3-2x+3}$).

Dibujos, esquemas y gráficos:

10. Representación gráfica ilustrando el comportamiento de $f(x)=3^{2x+1}$ cuando $x \to -\infty$.

Observaciones o comentarios de interés:

5. El cambio de variable (en los límites cuando $x \to -\infty$) solo debe hacerse si hay indeterminación.
6. (Imp) Recuerdo de contenido previo: posición de la curva respecto de la asíntota horizontal en $f(x)=3^{2x+1}$ (cuando $x \to -\infty$).

7. (Imp) Recuerdo de contenido previo: posición de la curva respecto de la asíntota horizontal en $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x^3-2x+3}$ (cuando $x \to -\infty$).

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase se produjo una mejora en la corrección de una actividad, y hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

4. En la corrección del ej. 28, apartado e, de la pág. 297: indicación y justificación de por qué la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ no tiene asíntota vertical en x=1.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

17. ARLT: Pág. 298, ej. 33, apartados a, b y c (cálculo de límites cuando $x \to -\infty$ de las funciones e interpretación, corregido en la sesión del miércoles 30/5/2012).

18. ARLT: Pág. 298, ej. 33, apartados d, e y f (mismo propósito anterior, lo dividimos en dos actividades con tres apartados cada una para que las actividades tengan una carga de trabajo equilibrada, corregido en la sesión del miércoles 30/5/2012).

19. ARLT: Pág. 298, ej. 37, apartados b y d (cálculo de límites cuando $x \to -\infty$, corregido en la sesión del miércoles 30/5/2012).

Miércoles 30 de mayo de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Este día el docente no rellena el guion con el resumen de la sesión, puesto que asistimos como observadores a la clase.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase.

Asisten todos los alumnos a la clase, aunque la alumna A22 llega un poco más tarde.

La primera parte de la sesión se dedica a la corrección de actividades propuestas en días anteriores, pendientes de ser corregidas. Los apartados a, b y c del ej. 33 de la pág. 298 son corregidos por el alumno A28, copiándolo de su cuaderno, y corrigiéndose un error existente en la interpretación del apartado c (dibuja la rama asintótica cuando $x \to +\infty$ en lugar de cuando $x \to -\infty$). Los apartados d, e y f de ese mismo ejercicio son corregidos por la alumna A25, que también lo copia de su cuaderno. Posteriormente, pasan a corregirse los apartados b y d del ej. 37 de la pág. 298, algo que realiza el alumno A23 en la pizarra, copiando la resolución de su cuaderno.

Varias alumnas comentan al profesor que hay un ejercicio más pendiente de corrección: el cálculo de límite propuesto como tarea en la sesión del viernes 25/5/2012: $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$. El ejercicio es corregido en la pizarra por el propio docente, recordando el método de resolución "especial" en este caso (existencia de expresiones con radicales en una indeterminación de tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$). Además, durante la corrección consideramos que el docente realizó una mejora significativa del contenido de esta tarea, puesto que también realizó la interpretación del resultado del límite en términos de la representación gráfica de la función, dibujando ésta en un entorno de x=-2.

Posteriormente, se retoma la teoría, explicando cómo se calculan límites en funciones definidas a trozos: explicación del método e ilustración a través de varios ejemplos. Como los alumnos pedían más ejemplos, el profesor propuso la realización de una actividad (que fue corregida oralmente poco después) donde se pedía calcular varios límites en una función definida a trozos. Durante la corrección de la actividad, consideramos que el docente realizó una mejora significativa a su contenido, puesto que indicó la existencia de un salto en la función en x=0, derivado de la existencia de límites laterales finitos pero de diferente valor (anticipación del contenido de la sesión siguiente, del martes 5/6/2012). Además, el docente también propuso la representación gráfica de dicha función definida a trozos, actividad que no fue corregida posteriormente en el aula (ni ese día, ni en días posteriores).

En la parte final de la clase, explicó cómo se resolvían límites con una indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$ y con presencia de expresiones con radicales, y se realizó un ejemplo.

Como tareas para la próxima sesión (que será el martes 5/6/2012, puesto que los días 31 de mayo y 1 de junio se celebran las fiestas del centro, por lo que no hay clases lectivas), y además de la representación anteriormente comentada, se propone el ej. 47 (apartados a y c) de la pág. 299, el ej. 49 (apartado a) de esa misma página y la resolución del límite siguiente: $\lim_{x\to +\infty}(x - \sqrt{x^2+3})$.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase existieron contenidos de todos los tipos, a excepción de "Dibujos, esquemas y gráficos".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

30. (Imp) Método para resolver límites en funciones definidas a trozos.

31. (Imp) Método para resolver indeterminaciones del tipo $(\to \infty) - (\to \infty)$ (con expresiones con radicales).

Ejemplos:

22. (Imp: al menos uno de los cuatro de los números 22 al 25) Ejemplo 1 de cálculo de límites en funciones definidas a trozos: límite cuando $x \to -\infty$ de la función $f(x) = \begin{cases} -x-1, & si -1 \geq x \\ 1-x^2, & si -1 < x < 1. \\ x-1, & si\ x \geq 1 \end{cases}$

23. Ejemplo 2 de cálculo de límites en funciones definidas a trozos: límite cuando $x \to 0$ de la misma función del Ejemplo 1.

24. Ejemplo 3 de cálculo de límites en funciones definidas a trozos: límite cuando $x \to 1$ de la misma función del Ejemplo 1.

25. Ejemplo 4 de cálculo de límites en funciones definidas a trozos: límite cuando $x \to +\infty$ de la misma función del Ejemplo 1.

26. (Imp) Ejemplo de límite con indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$ (con expresiones radicales): $\text{lím}_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-3x}\right)$.

Observaciones o comentarios de interés:

8. (Imp) En el proceso de resolución de un límite, las funciones de las igualdades no tienen por qué ser iguales, pero sí sus límites.

Unidad práctica (UP2):

Existen tanto mejoras en la corrección de una actividad como actividades propuestas (corregidas posteriormente y no corregidas).

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

5. En la corrección del límite $\text{lím}_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$: realización de la interpretación del resultado obtenido y representación en un entorno de x=-2.

6. En la corrección del cálculo de límites en el ej. 39, apartado c, de la pág. 298: indicación de la existencia de un salto en x=0 en la función (anticipación de teoría posterior sobre continuidad).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

20. ARLT: Pág. 298, ej. 39, apartado c (cálculo de límites de la función a trozos cuando x tiende a 0, 3, +∞ y -∞, corregido en la propia sesión).

21. AELT: Pág. 299, ej. 47, apartados a y c (cálculo de límites en funciones con expresiones radicales, corregida en la sesión del martes 5/6/2012).

22. AELT: Pág. 299, ej. 49, apartado a (mismo propósito anterior, corregida en la sesión del martes 5/6/2012).

23. ACD: Calcula el límite $\text{lím}_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3})$ (corregido en la sesión del martes 5/6/2012).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

2. ACD: Representa gráficamente la función a trozos del ej. 39, apartado c, de la pág. 298.

Jueves 31 de mayo de 2012 y viernes 1 de junio de 2012

Estos dos días no hubo clases lectivas en el centro, puesto que se desarrollaron actividades relacionadas con la fiesta del centro (que tuvo lugar esos dos días).

Martes 5 de junio de 2012 (Hora: 09:25 a 10:20)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Corrección de actividades pendientes: "$\text{lím}_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3})$"; corregido por la alumna A20, que lo copia de su cuaderno. Pág. 299, ej. 47, apartado a; corregido por la alumna A22, que lo copia de su cuaderno. Pág. 299, ej. 47, apartado c; corregido por la alumna A26, que lo copia de su cuaderno.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion. En este caso, la interpretación de la información obtenida de los cuadernos parece indicar que en esta clase también existió una componente de explicación de aspectos teóricos, en la segunda parte de esta sesión. Comentamos a continuación los aspectos no tratados por el docente en el guion rellenado que nos proporcionó.

En la primera parte de la sesión, dedicada a la corrección de actividades, también se corrigió el ej. 49 (apartado a) de la pág. 299, aunque no tenemos información sobre quién lo corrigió. Además, durante la corrección de los dos apartados del ej. 47 de la pág. 299, consideramos que el docente realizó una mejora significativa del contenido de esta actividad, puesto que indicó la interpretación de los límites (en términos de la existencia o no de asíntotas horizontales) y la posición de la rama asintótica con respecto a la asíntota (que en ambos casos existía).

Posteriormente, se retoma la teoría de este tema. Se define continuidad de una función y los diferentes tipos de discontinuidades (evitable, de salto finito o infinito), acompañados de su ilustración a través de una gráfica. En la parte final de la clase, se realizan dos ejemplos más de límites con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ y expresiones con radicales.

<u>Unidad teórica (UT2):</u>

En esta clase se impartieron contenidos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

32. (Imp) Definición de función continua en un punto.
33. (Imp) Definición de discontinuidad evitable en un punto (dos posibilidades, según exista o no la imagen en el punto).
34. (Imp) Definición de discontinuidad de salto (en general).
35. (Imp) Definición de discontinuidad de salto finito.
36. (Imp) Definición de discontinuidad de salto infinito.

Ejemplos:

27. (Imp) Ejemplo 1 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ y expresiones radicales: $\text{lím}_{x\to 3} \frac{3-\sqrt{2x+3}}{2x^2-8x+6}$.
28. (Imp) Ejemplo 2 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ y expresiones radicales: $\text{lím}_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{3-\sqrt{5x-1}}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

11. (Imp) Gráfica de una función con una discontinuidad evitable en la que no existe la imagen en el punto.
12. (Imp) Gráfica de una función con una discontinuidad evitable en la que sí existen la imagen en el punto.
13. (Imp) Gráfica de una función con una discontinuidad de salto finito.
14. (Imp) Gráfica de una función con una discontinuidad de salto infinito.

Observaciones o comentarios de interés:

9. (Imp) En las discontinuidades de salto infinito existe una asíntota vertical.
10. (Imp) Las situaciones de tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$ suelen coincidir con la presencia de discontinuidades evitables.

Unidad práctica (UP2):

El docente no planteó ninguna actividad a los alumnos durante esta sesión, pero sí que realizó una mejora significativa en la corrección de actividades pendientes.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

7. En la corrección del ej. 47, apartados a y c, de la pág. 299: interpretación del resultado en términos de la existencia o no de asíntota horizontal y representación gráfica.

Miércoles 6 de junio de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Este día no disponemos de guion rellenado por el docente.

Información adicional de interés:

Dado que no disponemos del guion del docente, hemos interpretado el contenido y desarrollo de la clase a partir del contenido existente en los cuadernos de los alumnos (por tanto, hay que tener mayor cautela con esta interpretación).

La primera parte de la clase se dedica a ilustrar cómo se estudia la continuidad en una función definida a trozos. Todo ello se hace a través de un ejemplo,

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & si\ x \leq -2 \\ e^x + 5, & si\ x > 2 \end{cases}$, sobre el cual se van ilustrando los pasos clave (estudio del dominio, análisis de posibles puntos problemáticos).

Algo similar se hace en la segunda parte, pero tomando como ejemplo una función racional, $f(x) = \frac{2-4x}{x^2-x-2}$. En dicha función se ilustra el cálculo del dominio y se realiza el estudio de uno de los puntos problemáticos: en x=-1.

El análisis del otro punto problemático, x=2, es propuesto a los alumnos como actividad para realizar durante la clase. Dicha actividad es corregida al final de la clase.

En esta clase se da por finalizado este tema, y es el último tema del bloque de Análisis Matemático que se trata (no se llega a abordar la derivada de una función). Los días restantes hasta los exámenes finales, se dedicaron a la realización de ejercicios de repaso de todos los temas tratados durante el curso. Estos contenidos ya no serán analizados en nuestro estudio. Durante estos días de repaso, se realizó la recogida de los cuadernos de los alumnos participantes, para realizar una fotocopia de los mismos antes de ser devueltos a los estudiantes.

Unidad teórica (UT1):

En esta clase existieron contenidos correspondientes a tres de los cuatro tipos considerados, no existiendo ningún aspecto dentro de lo que hemos llamado "Observaciones o comentarios de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

37. (Imp) Método para estudiar la continuidad en algunos tipos de funciones: definida a trozos, racional.

Ejemplos:

29. (Imp) Ejemplo de estudio de la continuidad en una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & si\ x \leq -2 \\ e^x + 5, & si\ x > 2 \end{cases}.$$

30. (Imp) Ejemplo de estudio de la continuidad en una función racional: $f(x) = \frac{2-4x}{x^2-x-2}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

15. (Imp) Gráfica ilustrando qué pasa en un entorno de x=2 en el ejemplo de función definida a trozos (estudio de continuidad).

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo una actividad propuesta y posteriormente corregida.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

24. ACD: Estudia la continuidad de la función $f(x)=\frac{2-4x}{x^2-x-2}$ en el punto x=2 (corregida en la propia sesión).

ANEXO B.5

En este anexo incluimos información detallada sobre el desarrollo de la docencia en el bloque de Análisis Matemático en el aula de la modalidad de Ciencias Sociales de la Docente 3. En relación con estas clases, podemos diferenciar dos momentos según la cantidad de información que disponemos sobre el desarrollo de las clases. Durante el primer tema (funciones, funciones elementales y sus características) no hemos dispuesto de información diaria proporcionada por el propio profesor sobre cada clase. Por lo tanto, en este primer tema haremos un desarrollo individual de las sesiones a las que asistimos como observadores, pero un desarrollo global de los periodos restantes (al no tener suficiente información para determinar a qué clase concreta pertenecen los diferentes contenidos o actividades).

En los temas segundo (límite de una función y continuidad) y tercero (derivada de una función) sí que disponemos de los guiones de la docente en casi todas las sesiones, por lo que se detallará la información sesión por sesión, con la información proporcionada por la profesora y la obtenida en conversaciones informales con ella o a partir de la interpretación del contenido de los cuadernos de los alumnos.

Ya sea en formato diario o en formato periodo, la información se presentará a través de cuatro organizadores. El primero es la información proporcionada por la docente (en el caso de que esta exista), a través de los guiones de cada sesión. El segundo es la compleción de dicha información con otros aspectos de interés no recogidos por la profesora en su guion. El tercer organizador, denominado “Unidad Teórica”, sirve para indicar los diferentes contenidos teóricos tratados en la sesión o en el periodo considerado. Después del nombre se indicará el número de tema al que corresponde el contenido (UT1, UT2 o UT3). Se presentan utilizando la distinción en cuatro tipos de contenidos que se ha utilizado al analizar las unidades teóricas de los cuadernos (subapartado IV.3.1 de la tesis doctoral).

- Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones
- Ejemplos
- Dibujos, esquemas y gráficos
- Observaciones o comentarios de interés

Dentro de cada tipo de contenido, existe una numeración correlativa según su orden de exposición dentro de la unidad del tema correspondiente. Además, aquellos elementos que consideramos que el docente ha considerado como “prioritarios” o como más importantes dentro del tema, se han marcado escribiendo “(Imp)” (abreviatura de importante) después del número y antes del enunciado verbal del elemento.

El cuarto organizador, denominado “Unidad Práctica”, sirve para indicar aspectos relacionados con la propuesta y corrección de actividades en la sesión o en el periodo considerado. Después del nombre se indicará el número de tema al que corresponden las actividades (UP1, UP2 o UP3). Se distinguen tres aspectos, relacionados con las variables utilizadas en el análisis de los cuadernos:

- Mejoras significativas durante la corrección de actividades.
- Actividades propuestas y posteriormente corregidas.
- Actividades propuestas y no corregidas posteriormente.

Al igual que con los contenidos teóricos, las mejoras y los dos tipos de actividades son numerados correlativamente dentro de cada tipo, según el orden en que fueron desarrolladas o propuestas dentro de la unidad del tema correspondiente. Además, en las actividades distinguimos si son de tipo AELT; ARLT o ACD.

A continuación se presenta la información sobre las sesiones o los periodos asociada al desarrollo del bloque de Análisis Matemático por parte del Docente 3 en la clase de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

Sesiones anteriores al lunes 19 de diciembre de 2011

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos.

Información adicional de interés:

El día 19 de diciembre de 2011 es el primer día que acudimos como observadores a una clase de Matemáticas de este docente con este grupo. A continuación, y a través de una interpretación de lo que encontramos en los cuadernos de los alumnos y lo que nos comenta informalmente el profesor, indicamos todos los contenidos teóricos y los aspectos prácticos tratados en las sesiones previas a dicha clase.

Unidad teórica (UT1):

Existieron elementos de los cuatro tipos de contenidos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. Notación de función.
2. (Imp) Concepto de función (condición para que una relación sea función).
3. Concepto de variable dependiente e independiente.
4. (Imp) Representación de una función a través de la expresión analítica (simbólica).
5. (Imp) Representación de una función a través de una tabla de valores (tabular).
6. (Imp) Representación de una función a través de una gráfica.
7. (Imp) Concepto de dominio de una función.
8. Concepto de función polinómica: definición verbal y simbólica general ($f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n;\ a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$).
9. (Imp) Dominio de una función polinómica.
10. Concepto de función racional: definición verbal y simbólica general ($g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son funciones polinómicas).
11. (Imp) Dominio de una función racional.
12. Concepto de función irracional: definición verbal y simbólica general ($h(x) = \sqrt[n]{P(x)}$).

13. (Imp) Dominio de una función irracional (según cuál sea el índice de la raíz).

14. (Imp) Concepto de función exponencial: definición verbal y simbólica general ($f(x) = a^{g(x)}$ donde a>0, a≠1.

15. (Imp) Dominio de una función exponencial.

16. (Imp) Concepto de función logarítmica: definición simbólica general (f(x)=$\log_a$P(x), siendo P(x) un polinomio).

17. (Imp) Dominio de una función logarítmica.

18. (Imp) Concepto de función afín y expresión general: f(x)=mx+n (el docente denomina a estas funciones como "funciones lineales", quizá siguiendo la nomenclatura del libro de texto; nomenclatura que consideramos inadecuada, puesto que las funciones polinómicas de primer grado que sí son lineales son únicamente las de la forma f(x)=mx).

19. (Imp) La representación gráfica de una función afín es una recta.

20. (Imp) Concepto de pendiente de una función afín.

21. Concepto de ordenada en el origen de una función afín.

22. (Imp) Relación entre la pendiente de una función afín y su monotonía.

23. Función constante (como caso particular de función afín).

24. (Imp) Ecuación punto-pendiente de una recta: $y = y_0 + m(x - x_0)$.

25. (Imp) Concepto de interpolación lineal.

26. Ecuación segmentaria o canónica de una recta.

Ejemplos:

1. (Imp) Ejemplo de función representada por su expresión analítica: $f(x) = \frac{x^2+3}{2x-8}$.

2. (Imp) Ejemplo de función representada por una tabla de valores.

3. (Imp) Ejemplo de función representada por su gráfica.

4. (Imp) Contraejemplo de función (valores con dos imágenes): raíz cuadrada.

5. Ejemplo de función y varios valores que pertenecen a su dominio: x=0 y x=1 en $f(x) = \frac{x^2+3}{2x-8}$.

6. Ejemplo de función y de un valor que no pertenece a su dominio: x=4 en $f(x) = \frac{x^2+3}{2x-8}$.

7. Ejemplo de función polinómica: f(x)=-2+7x^3-12x^5.

8. (Imp) Ejemplo de cálculo del dominio de una función polinómica (función anterior).

9. Ejemplo de función racional: $f(x) = \frac{3x-2}{1-x^2}$.

10. (Imp) Ejemplo de cálculo del dominio de una función racional (función anterior).

11. Ejemplo de función irracional: $f(x) = +\sqrt{x^2 - 4}$.

12. (Imp) Ejemplo de cálculo del dominio de una función irracional (función anterior).

13. (Imp) Ejemplo de función exponencial: $f(x) = 3^{-\frac{1}{x}}$.

14. (Imp) Ejemplo de cálculo del dominio de una función exponencial (función anterior).

15. (Imp) Ejemplo de función logarítmica: f(x)=ln(1-7x).

16. (Imp) Ejemplo de cálculo del dominio de una función logarítmica (función anterior).

17. (Imp) Ejemplo de función afín: f(x)=2x+2.

18. Ejemplo de función constante: f(x)=-3.

19. Ejemplo de obtención de la ecuación punto-pendiente de una recta: recta que pasa por P(-1,2) y cuya pendiente es 3.

20. Ejemplo de restricción del dominio (y, por tanto, la imagen) de una función (con el ejemplo anterior): restricción de la recta anterior al dominio [-3,1].

21. (Imp) Ejemplo de obtención de información en un problema utilizando interpolación lineal (utilizando como base los datos del ej. 1 de la pág. 109).

22. Ejemplo de ecuación segmentaria o canónica de una recta: $\frac{x}{3'5} + \frac{y}{-5} = 1$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. (Imp) Representación gráfica de una función (en ejemplo sobre las formas de representar una función).

2. (Imp) Representación gráfica de función afín f(x)=2x+2 (ilustrando la pendiente).

3. Representación gráfica de función constante f(x)=-3.

4. (Imp) Representación de una recta vertical (que no representa una función).

5. Representación gráfica de la recta obtenida en el ejemplo de ecuación punto-pendiente (con la restricción en el dominio al intervalo [-3,1].

6. Representación gráfica de una recta dada en la forma canónica/segmentaria.

Observaciones o comentarios de interés:

1. (Imp) Comentario sobre el dominio de la función (todo $\mathbb{R}$) si el denominador de la función racional fuera $1+x^2$ (en el ejemplo de esta función).

2. (Imp) Enfatización de que los puntos donde se anula una raíz cuadrada sí están en el dominio de una función.

3. (Imp) Explicación de por qué las rectas verticales no pueden ser la representación gráfica de una función.

4. (Imp) Posibilidad de cambiar la unidad de medida o la escala para facilitar el cálculo en una interpolación.

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

Hubo tanto mejoras significativas en la corrección de actividades como propuesta de actividades que fueron corregidas posteriormente.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

1. En la corrección de la segunda tanda de apartados del ej. 1 de la pág. 107 (apartados l, m, n, ñ y o): Se realiza también el apartado p, en el que se pedía calcular el dominio de una función definida verbalmente en una situación geométrica.

2. En la corrección de la tercera tanda de apartados del ej. 1 de la pág. 107 (apartados g, e, f, h, i y j): Se indica el carácter opuesto (complementario) del dominio de dos parejas de funciones irracionales con raíz cuadrada y radicandos opuestos (por un lado, g y h; por otro lado, i y j).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

1. AELT: Pág. 107, ej. 1, apartados a, b, c, d y k (cálculo de dominios en funciones polinómicas e irracionales, consideramos cinco apartados conjuntamente para que las actividades tengan una carga de trabajo equilibrada).

2. AELT: Pág. 107, ej. 1, apartados l, m, n, ñ y o (cálculo de dominios en funciones racionales).

3. AELT: Pág. 107, ej. 1, apartados g, e, f, h, i y j (cálculo de dominios en funciones racionales e irracionales).

4. ACD: Calcula el dominio de $f(x) = \frac{\sqrt{6-2x}}{x^2-1}$.

5. AELT: Pág. 123, ej. 1, apartado e (cálculo de dominios en funciones racionales).

6. AELT: Pág. 123, ej. 2, apartado b (mismo propósito anterior).

7. AELT: Pág. 123, ej. 3, apartado d (mismo propósito anterior).

8. AELT: Pág. 108, ej. 1 (representación de una función afín en un intervalo restringido, se corrigió el lunes 19/12/2011, día que asistimos como observadores a la clase).

9. AELT: Pág. 108, ej. 2 (obtención y representación de una función "afín" conociendo algunos datos de ella, se corrigió el lunes 19/12/2011, día que asistimos como observadores a la clase).

10. ARLT: Pág. 123, ej. 7 (además de indicar la pendiente de cada recta, también pide el dominio y la imagen de la función del último apartado).

11. AELT: Pág. 123, ej. 8 (obtención de ecuaciones de rectas a partir de los datos ofrecidos).

12. AELT: Pág. 125, ej. 27 (ejercicio sobre interpolación lineal en una situación, se corrigió el lunes 19/12/2011, día que asistimos como observadores a la clase).

13. AELT: Pág. 123, ej. 11 (mismo propósito anterior, se corrigió el lunes 19/12/2011, día que asistimos como observadores a la clase)

Lunes 19 de diciembre de 2011 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la misma.

Asisten a esta clase todos los alumnos.

Comienza recordando los títulos de lo visto hasta ahora y anticipando los próximos tipos de funciones que van a estudiarse: cuadráticas, de proporcionalidad inversa y funciones con radicales. Con ello intenta tantear cuáles son los conocimientos previos de los alumnos.

En la parte de teoría, se tratan las funciones cuadráticas. Su definición (verbal y simbólica), su representación gráfica (con la diferenciación según sea el signo del coeficiente del término de mayor grado) y algunas de sus propiedades fundamentales (vértice y sus coordenadas, tipo de extremo en el vértice, curvatura, simetría respecto a un eje vertical). Todo ello se ilustra con el estudio de un ejemplo: $f(x)=x^2-2x+3$ (tomado del apartado a del ej. 1 de la pág. 110).

Posteriormente, se propone a los alumnos hacer un estudio similar con la función del apartado b de ese mismo ejercicio, que es corregido poco después entre todos. En esta corrección consideramos que el docente ha añadido una mejora significativa al contenido de la actividad: el estudio del dominio y la imagen de esa función cuadrática. Tras esto, se proponen el resto de apartados del ejercicio (del c al f) y los tres apartados del ej. 2 de la pág. 110 (todos sobre representación de funciones cuadráticas) como actividades a realizar para la próxima sesión.

En la segunda parte de la sesión, se realiza la corrección de actividades pendientes de sesiones anteriores. El primero que se corrige es el ej. 27 de la pág. 125, corrección que se realiza en la pizarra por la alumna A36 (que lo copia de su cuaderno). El profesor comenta a la alumna que hubiera sido más adecuado intercambiar las variables dependiente e independiente que ha utilizado, según el significado de las mismas. Posteriormente es corregido el ej. 11 de la pág. 123 por parte de otra alumna del aula.

Tras estos dos ejercicios, se pasa a la corrección de los ej. 1 y 2 de la pág. 108, que habían sido planteados varios días antes. En el caso del ej. 1, el docente realiza una mejora significativa al contenido de la actividad durante su corrección, puesto que indica la obtención de la imagen de la función afín (con dominio restringido) que se pedía representar.

<u>Unidad teórica (UT1)</u>:

En esta clase hubo contenidos de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

27. (Imp) Concepto de función cuadrática: definición verbal y simbólica general ($f(x)=ax^2+bx+c$).

28. (Imp) La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.

29. (Imp) Vértice de una parábola y fórmulas para obtener sus coordenadas.

30. (Imp) Orientación y curvatura de una función cuadrática según el signo del coeficiente del término de mayor grado (a>0 ó a<0).

31. Una función cuadrática es simétrica respecto de un eje vertical.

Ejemplos:

23. (Imp) Ejemplo de estudio y representación de función cuadrática: $f(x)=x^2-2x+3$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

7. (Imp) Representación gráfica de una función cuadrática genérica con a>0 (cóncava).

8. (Imp) Representación gráfica de una función cuadrática genérica con a<0 (convexa).

9. (Imp) Representación gráfica de una función cuadrática concreta: $f(x)=x^2-2x+3$.

Observaciones o comentarios de interés:

5. (Imp) Las parábolas con las ramas hacia la derecha o izquierda no pueden representar una función.

Unidad práctica (UP1):

En la clase hubo tanto mejoras en la corrección de actividades como propuesta de actividades corregidas y no corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

3. En la corrección del ej. 1, apartado b, de la pág. 110: indicación de cuál es el dominio y la imagen de la función cuadrática.

4. En la corrección del ej. 1 de la pág. 108: indicación de cuál es la imagen de la función afín (con el dominio restringido) que se representa.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

14. AELT: Pág. 110, ej. 1, apartado b (estudio y representación de funciones cuadráticas, corregido durante la propia sesión)

15. AELT: Pág. 110, ej. 1, apartado c (mismo propósito anterior).

16. AELT: Pág. 110, ej. 1, apartado d (mismo propósito anterior).

17. AELT: Pág. 110, ej. 1, apartado e (mismo propósito anterior).

18. AELT: Pág. 110, ej. 1, apartado f (mismo propósito anterior).

19. AELT: Pág. 110, ej. 2, apartado a (estudio y representación de funciones cuadráticas con un dominio restringido).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

1. AELT: Pág. 110, ej. 2, apartado b (estudio y representación de funciones cuadráticas con un dominio restringido).

2. AELT: Pág. 110, ej. 2, apartado c (mismo propósito anterior).

Sesiones posteriores al lunes 19 de diciembre de 2011 y anteriores al examen parcial de la segunda evaluación (realizado en el mes de enero de 2012)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos.

Información adicional de interés:

El siguiente día que asistimos como observadores a una clase de matemáticas de este grupo es el miércoles 1 de febrero de 2012. Con anterioridad a esa sesión, se realizó el examen parcial de la segunda evaluación, en el que entraron los contenidos que se llevaban tratados en este primer tema del bloque de análisis matemático junto con el bloque anterior (sobre ecuaciones, sistemas de ecuaciones e inecuaciones). A continuación, y a través de una interpretación de lo que encontramos en los cuadernos de los alumnos y lo que nos comenta informalmente el profesor, indicamos todos los contenidos teóricos y los aspectos prácticos tratados en las sesiones posteriores al lunes 19/12/2011 y anteriores a dicho examen parcial.

Durante este periodo, es necesario comentar que algunos de los alumnos de la clase se fueron a disfrutar de una semana de inmersión lingüística en Inglaterra, semana que se aprovechó en el centro para la realización de ejercicios de repaso sobre aspectos ya tratados, y para una mejor preparación del examen parcial por parte de los alumnos que no disfrutaron de esa semana de inmersión lingüística. Los alumnos que se marcharon en la semana de inmersión lingüística fueron A31, A32, A40 y A41 (todas ellas chicas).

Unidad teórica (UT1):

En este periodo se expusieron contenidos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

32. (Imp) Concepto de función de proporcionalidad inversa, $f(x) = \frac{k}{x}$.
33. Dominio e imagen de una función de proporcionalidad inversa.
34. Propiedades de una función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{k}{x}$ con k>0.
35. Propiedades de una función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{k}{x}$ con k<0.
36. (Imp) Idea de asíntota de una función: asíntota horizontal y vertical.
37. (Imp) Funciones con radicales: definición (de $f(x) = +\sqrt{x}$) y características.
38. (Imp) Relación entre cambios del tipo f(x+k) y f(x-k) y traslaciones de una función a izquierda y derecha.
39. (Imp) Relación entre cambios del tipo f(x)+k y f(x)-k y traslaciones de una función arriba y abajo.
40. Método para estudiar una función definida a trozos.
41. Introducción gráfica de las ideas de continuidad y discontinuidad.

Ejemplos:

24. (Imp) Ejemplo de función radical: $f(x) = +\sqrt{x}$.
25. (Imp) Ejemplo 1 de estudio y representación de una función trasladada de una conocida: $f(x) = \sqrt{x-4}$ (a partir de la función $f(x) = +\sqrt{x}$).
26. (Imp) Ejemplo 2 de estudio y representación de una función trasladada de una conocida: $f(x) = \frac{2}{x-2} + 3$ (a partir de la función $f(x) = \frac{2}{x}$).
27. (Imp) Ejemplo de estudio y representación de una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 3-x, & si\ x \leq 1 \\ 2\sqrt{x}, & si\ 1 < x < 9. \\ -x^2, & si\ x > 9 \end{cases}$$

Dibujos, esquemas y gráficos:

10. (Imp) Representación gráfica de una función genérica de proporcionalidad lineal $f(x) = \frac{k}{x}$ con k>0.

11. (Imp) Representación gráfica de una función genérica de proporcionalidad lineal $f(x)=\frac{k}{x}$ con k<0.

12. (Imp) Representación de la función radical tomada como ejemplo: $f(x)=+\sqrt{x}$.

13. (Imp) Representación gráfica de función en Ejemplo 1 de traslación de una función conocida: $f(x)=\sqrt{x-4}$.

14. (Imp) Representación gráfica de función en Ejemplo 2 de traslación de una función conocida: $f(x)=\frac{2}{x-2}+3$.

15. (Imp) Representación gráfica de la función definida a trozos tomada como ejemplo.

Observaciones o comentarios de interés:

6. (Imp) Indicación de que la densidad del plano real permite la existencia de comportamientos asintóticos.

7. (Imp) Explicación y significado de la marca gráfica en los ejes para representar valores muy alejados del origen.

8. (Imp) El crecimiento de una función se indica en intervalos abiertos.

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

En la clase hubo tanto mejoras en la corrección de actividades como propuesta de actividades corregidas y no corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

5. En la corrección del ej. 1, apartados c, d, e y f, de la pág. 110: indicación de cuál es el dominio y la imagen de la función cuadrática.

6. En la corrección del ej. 1, apartado c, de la pág. 110: explicación sobre cómo estudiar de modo sistemático los puntos de corte con los ejes de una función cuadrática.

7. En la corrección del ej. 2, apartado a, de la pág. 110: indicación de cuál es la imagen de la función cuadrática (con el dominio restringido) que se pide representar.

8. En la corrección de la representación de las funciones f(x)=x^2-4, con x ∈ (-2,3] y $f(x) = -\frac{3}{x}$, con x ∈ [-6,3): indicación de cuál es el dominio y la imagen de estas dos funciones representadas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

20. AELT: Pág. 123, ej. 6 (aplicación del estudio de una función y su dominio en una situación geométrica).

21. ACD: Representación (a partir de una tabla de valores) de la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{3}{x}$.

22. ACD: Calcula el dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$.

23. AELT: Pág. 114, ej. 1, apartado b (estudio y representación de una función definida a trozos).

24. AELT: Pág. 114, ej. 2 (mismo propósito anterior).

25. ACD: Cálculo del polinomio de interpolación lineal en una situación poblacional (en semana de inmersión lingüística)

26. ACD: Representa gráficamente la función f(x)=-x^2+6x-1 (en semana de inmersión lingüística).

27. ACD: Representa gráficamente la función f(x)=x^2-4, con x ∈ (-2, 3] (en semana de inmersión lingüística).

28. ACD: Representa gráficamente la función $f(x) = -\frac{3}{x}$ x ∈ [-6, 3) (en semana de inmersión lingüística).

29. ACD: Calcula el dominio de la función f(x)=x^5-2x^4+7x^3+3x (en semana de inmersión lingüística).

30. ACD: Calcula el dominio de la función $g(x) = \frac{\sqrt{7-2x}}{x+5}$ (en semana de inmersión lingüística).

31. ACD: Calcula el dominio de la función $h(x) = \frac{1-x^2}{\sqrt{x+6}}$ (en semana de inmersión lingüística).

32. AELT: Pág. 125, ej. 32 (aplicación del estudio de funciones cuadráticas a una situación de modelización funcional, en semana de inmersión lingüística).

33. AELT: Pág. 126, ej. 36 (mismo propósito anterior, en semana de inmersión lingüística).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

3. AELT: Pág. 113, ej. 4, apartado b (representación de una función con radicales).

Examen parcial de la segunda evaluación (durante el mes de enero de 2012)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

El docente nos proporcionó los enunciados de los ejercicios del examen. El examen constaba de seis preguntas. Cuatro de ellas (preguntas 3, 4, 5 y 6) pertenecían al tema actualmente desarrollado (las dos primeras correspondían al bloque anterior: ecuaciones, sistemas de ecuaciones e inecuaciones).

Enunciados de estas cuatro actividades y valoración de cada una en el examen:

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=x^3-x$ *(0'5 puntos)*

(b) $g(x)=\frac{\sqrt{6+x}}{x^2-x-6}$ *(1'5 puntos)*

4. El número de habitantes de una ciudad ha evolucionado según los siguientes datos: (2 puntos)

Años	*2006*	*2007*
Población	*53000*	*70000*

(a) Calcula el polinomio de interpolación lineal

(b) Estima la población en el año 2008

(c) ¿Has interpolado o extrapolado en el apartado anterior? Explica por qué

5. Representa gráficamente la siguiente función cuadrática: $h(x)=-2x^2+8x+3$, $x \in (-1, 4]$ *(1 punto) y señala la imagen de esta misma función. (0'5 puntos)*

6. Define dominio de definición de una función. (1 punto)

Información adicional de interés:

No conocemos la fecha exacta en la que se realizó este examen parcial. Se dedicó toda la sesión de clase a la realización del mismo.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión (que pueda estar en el cuaderno de los alumnos).

Sesiones posteriores al examen parcial de la segunda evaluación (realizado en el mes de enero de 2012) y anteriores a la sesión del miércoles 1 de febrero de 2012

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos.

Información adicional de interés:

La siguiente sesión que acudimos a observar fue la del miércoles 1 de febrero de 2012. A continuación, y a través de una interpretación de lo que encontramos en los cuadernos de los alumnos y lo que nos comenta informalmente el profesor, indicamos todos los contenidos teóricos y los aspectos prácticos tratados en las sesiones posteriores al día del examen parcial de la segunda evaluación y dicha sesión del miércoles 1/2/2012.

Unidad teórica (UT1):

En este periodo se expusieron contenidos de los tres primeros tipos (no hubo ningún elemento catalogado como observación o comentario de interés).

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

42. (Imp) Relación entre las funciones f(x) y f(-x) (simetría respecto a OY).
43. (Imp) Relación entre las funciones f(x) y -f(x) (simetría respecto a OX).
44. (Imp) Función valor absoluto, f(x)=|x|: definición y propiedades.
45. (Imp) Dos maneras de representar |f(x)|: función a trozos/simetría respecto a OX de parte negativa.

Ejemplos:

28. Resolución del ej. 3 del examen parcial de la 2ª evaluación.
29. Resolución del ej. 4 del examen parcial de la 2ª evaluación.

30. Resolución del ej. 5 del examen parcial de la 2ª evaluación.

31. Resolución del ej. 6 del examen parcial de la 2ª evaluación.

32. (Imp) Ejemplo que ilustra la relación de las funciones f(-x) y -f(x) con f(x): con $f(x) = +\sqrt{x}$.

33. (Imp) Ejemplo 1 de estudio y representación de una función con valor absoluto: f(x)=|3-x|.

34. (Imp) Ejemplo 2 de estudio y representación de una función con valor absoluto: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

16. Representación gráfica de la función del ej. 5 del examen parcial de la 2ª evaluación.

17. (Imp) Gráfica que ilustra la relación entre las representaciones gráficas de $f(x) = +\sqrt{x}$, $f(-x) = +\sqrt{-x}$, $-f(x) = -\sqrt{x}$.

18. (Imp) Representación gráfica de la función valor absoluto, f(x)=|x|.

19. (Imp) Representación gráfica de Ejemplo 1 de función con valor absoluto: f(x)=|3-x| (utilizando simetría de la parte negativa respecto a OX).

20. (Imp) Representación gráfica de Ejemplo 2 de función con valor absoluto: f(x)=|x^2-5x+6| (utilizando simetría de la parte negativa respecto a OX).

<u>Unidad práctica (UP1)</u>:

De los tres aspectos considerados, en este periodo únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

34. ARLT: Pág. 124, ej. 17, apartado b (representación de una función definida a trozos y escritura de sus propiedades).

35. ARLT: Pág. 124, ej. 17, apartado d (mismo propósito anterior).

36. AELT: Pág. 124, ej. 12 (discriminación sobre si unos gráficos representan o no a una función y relación de las gráficas de funciones con sus expresiones simbólicas).

37. ACD: Representa la siguiente función a trozos e indica sus características:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5, & si\ x \leq -1 \\ -\frac{2}{x}, & si -1 < x < 1 \\ -x^2 - 6x - 7, & si\ x \geq 1 \end{cases}.$$

38. AELT: Pág. 125, ej. 25, apartado b (representación de una función con valor absoluto, se corrigió en la sesión del miércoles 1/2/2012, día que asistimos como observadores a la clase)

39. AELT: Pág. 124, ej. 13 (asociación entre la representación gráfica de funciones y su expresión simbólica).

40. ARLT: Pág. 125, ej. 21 (representación de funciones trasladadas de una función dada y escritura de sus propiedades fundamentales).

41. ARLT: Pág. 126, ej. 42, apartado b (representación de función con valor absoluto, escritura como función a trozos y escritura de sus características).

42. ARLT: Pág. 126, ej. 42, apartado c (mismo propósito anterior).

43. AELT: Pág. 126, ej. 35 (aplicación del estudio de funciones cuadráticas a una situación de modelización funcional, la segunda parte de este ejercicio se corrigió en la sesión del miércoles 1/2/2012, día que asistimos como observadores a la clase)

44. ARLT: Pág. 126, ej. 39, apartado b (representación de función definida a trozos y escritura de sus características, se corrigió en la sesión del miércoles 1/2/2012, día que asistimos como observadores a la clase)

45. AELT: Pág. 127, ej. 46 (cálculo del parámetro en una función cuadrática para que cumpla las condiciones pedidas sobre el número de puntos de corte con el eje OX, dos, uno o ninguno; se corrigió en la sesión del miércoles 1/2/2012 ,día que asistimos como observadores a la clase)

Miércoles 1 de febrero de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la misma.

Asisten a esta clase todos los alumnos, a excepción del alumno A39 que, según nos indica el profesor, lleva unos días sin asistir a clase por culpa de una operación y el reposo postoperatorio. La clase se dedica a aspectos prácticos, fundamentalmente a la corrección de ejercicios pendientes de sesiones anteriores, y al planteamiento de algún ejercicio nuevo en la parte final.

El primer ejercicio que se corrige es el ej. 39, apartado b, de la pág. 126; que es corregido por un alumno, cuyo cuaderno no pertenece al análisis. El profesor va ayudando al alumno en el transcurso de la corrección, explicando los pasos a seguir. Además, como mejora significativa al contenido de esta actividad durante su corrección, el docente enfatiza la existencia de una discontinuidad de salto finito en un punto de la gráfica (anticipación de teoría propia del tema siguiente).

El segundo ejercicio es corregido por el alumno A37 (que lo copia de su cuaderno), y es el ej. 46 de la pág. 127. En este ejercicio el alumno comete un error al indicar el resultado de una división que no es advertido por ningún alumno ni por el docente. Con posterioridad, el docente corrige la segunda parte del ej. 35 de la pág. 126, que estaba pendiente de la sesión anterior (la primera parte, por lo visto, fue corregida por la alumna A31). Hay una última actividad propuesta con la corrección pendiente: el ej. 25, apartado b, de la pág. 125, que es corregido por la alumna A32 (copiándolo de su cuaderno). Durante la corrección de este ejercicio, el profesor enfatiza los procesos para conocer el signo de la imagen de una función (cuándo es positiva y cuándo es negativa).

Al no haber, según los alumnos, más ejercicios pendientes de corrección, el docente plantea un ejercicio nuevo, extraído del libro de texto: el ej. 41 de la pág. 126. Primero plantea el apartado a. Tras unos minutos, el ejercicio es corregido en la pizarra por el docente con la ayuda de los alumnos. Posteriormente plantea el apartado b. Los alumnos comienzan a trabajar en este apartado, pero este ejercicio no es corregido en el aula ni en esta sesión (puesto que concluye la clase) ni en sesiones posteriores.

Al final de esta clase realizamos una primera recogida de los cuadernos de los alumnos, para hacer una primera tanda de fotocopias (de lo existente en este bloque hasta el momento). Los cuadernos son devueltos a los alumnos por el docente en la siguiente sesión (viernes 3/2/2012).

<u>Unidad teórica (UT1):</u>

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP1):

En esta clase hubo aspectos prácticos de los tres tipos considerados.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

9. En la corrección del ej. 39, apartado b, de la pág. 126: anticipación del docente de teoría posterior, al enfatizar la existencia de una discontinuidad de salto infinito en la función a trozos que se pide estudiar en este apartado,

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

46. AELT: Pág. 126, ej. 41, apartado a (escritura de la expresión simbólica de una función a trozos definida de forma gráfica, corregido en la parte final de esta propia sesión),

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

4. AELT: Pág. 126, ej. 41, apartado b (escritura de la expresión simbólica de una función a trozos definida de forma gráfica),

Sesiones posteriores al miércoles 1 de febrero de 2012 y anteriores al examen global de la segunda evaluación (realizado en el mes de febrero de 2012)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos.

Información adicional de interés:

Durante el mes de febrero se realizó el examen global de la segunda evaluación (el calendario de exámenes del colegio no se corresponde exactamente con los tres trimestres habituales, es por ello que la fecha para este examen sea muy anterior a la de las vacaciones de Semana Santa). Utilizaremos el examen como hito importante dentro de este tema. A continuación, y a través de una interpretación de lo que encontramos en los cuadernos de los alumnos y lo que nos comenta informalmente el profesor, indicamos todos los contenidos teóricos y los aspectos prácticos tratados en las sesiones posteriores al miércoles 1/2/2012 y anteriores a dicho examen global de la segunda evaluación.

Unidad teórica (UT1):

En este periodo hubo contenidos teóricos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

46. (Imp) Método para representar funciones racionales sencillas (cociente de polinomios de primer grado).

47. (Imp) Propiedades comunes de las funciones exponenciales (sea cual sea su base).

48. (Imp) Propiedades que varían en las funciones exponenciales (según el valor de la base).

49. (Imp) Propiedades comunes de las funciones logarítmicas (sea cual sea su base).

50. (Imp) Propiedades que varían en las funciones logarítmicas (según el valor de su base).

Ejemplos:

35. (Imp) Ejemplo de estudio y representación de una función racional: $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

36. (Imp) Ejemplo de estudio y representación de función exponencial: f(x)=3^x.

37. Ejemplo 1 de función exponencial trasladada de la del ejemplo anterior: f(x)=3^{x+2}.

38. Ejemplo 2 de función exponencial trasladada de la del ejemplo anterior: f(x)=3^x+5.

Dibujos, esquemas y gráficos:

21. (Imp) Representación gráfica de una función racional: $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

22. (Imp) Gráfica de función exponencial con base $0<a<1$.

23. (Imp) Gráfica de función exponencial con base $a>1$.

24. (Imp) Gráfica de función logarítmica con base $0<a<1$.

25. (Imp) Gráfica de función logarítmica con base $a>1$.

26. Representación gráfica de una función exponencial, f(x)=3^x, y dos trasladadas suyas: f(x)=3^{x+2} y f(x)=3^x+5.

Observaciones o comentarios de interés:

9. (Imp) Diferente velocidad de crecimiento de funciones exponenciales y logarítmicas.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en este periodo únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

47. ARLT: Pág. 126, ej. 44, apartado a (representación de una función racional sencilla –cociente de polinomios de primer grado- y escritura de sus características)

48. ARLT: Pág. 126, ej. 44, apartado c (mismo propósito anterior).

49. AELT: Pág. 127, ej. 47 (obtención de los parámetros de interés en la expresión simbólica de una función racional, cociente de polinomios de primer grado, a partir de su representación gráfica).

50. ARLT: Pág. 143, ej. 13, apartado d (representación de una función exponencial y escritura de sus características).

51. AELT: Pág. 144, ej. 25 (cálculo de parámetros de interés en la expresión simbólica de una función exponencial a partir de algunos datos, y representación de la función obtenida).

52. AELT: Pág. 145, ej. 34 (respuesta a preguntas sobre propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas).

53. AELT: Pág. 126, ej. 42, apartado d (representación de función con valor absoluto y escritura como función a trozos).

54. AELT: Pág. 126, ej. 42, apartado a (mismo propósito anterior).

Examen global de la segunda evaluación (durante el mes de febrero de 2012)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

El docente nos proporcionó los enunciados de los ejercicios del examen. El examen constaba de cinco preguntas, todas ellas valoradas sobre 2 puntos. Las cuatro últimas pertenecían al tema actualmente desarrollado. La primera correspondía al bloque anterior: ecuaciones, sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

Enunciados de estas cuatro actividades de este tema:

2. Considera las siguientes funciones: $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}}$, $g(x) = \frac{2x+5}{x-3}$, *h(x)=-*x^2*+7.*

(a) Calcula el dominio de f(x)

(b) Calcula las asíntotas de g(x)

(c) Calcula la imagen de h(x)

3. (a) Di su expresión analítica

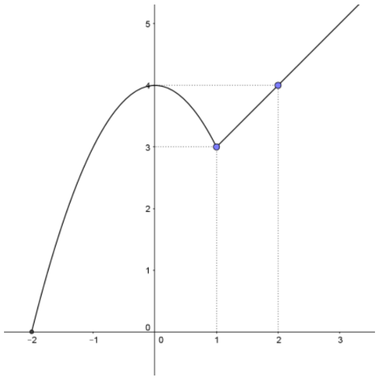
(b) Indica su dominio

(c) Indica su imagen

(d) Estudia la monotonía

(e) Estudia la curvatura

(f) Indica los extremos relativos y absolutos



4. La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, un proyectil que lanzamos verticalmente con una velocidad de 500 m/s es $h=500t-t^2$.

(a) Haz una representación gráfica (de la altura en función del tiempo, h(t))

(b) Di su dominio de definición

(c) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa?

(d) ¿En qué intervalo el proyectil está a una altura superior a 4500 m?

5. Con 100 metros de valla queremos acotar un recinto cuadrangular aprovechando una pared.

(a) Llama x a uno de los lados de la valla. ¿Cuánto valen los otros dos lados?

(b) Construye la función que nos da el área. ¿Cuándo se hace máxima? ¿Cuánto vale?

(c) ¿Cuál es su dominio de definición?

Información adicional de interés:

No conocemos la fecha exacta en la que se realizó este examen parcial. Se dedicó toda la sesión de clase a la realización del mismo.

Unidad teórica (UT1):

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP1):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión (que pueda estar en el cuaderno de los alumnos).

Sesiones posteriores al examen global de la segunda evaluación (realizado en el mes de febrero de 2012) hasta la finalización del primer tema (miércoles 29 de febrero de 2012)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos.

Información adicional de interés:

Indicamos aquí lo concerniente a las últimas sesiones sobre el desarrollo del primer tema de este bloque de análisis matemático, sobre funciones elementales y sus características. A continuación, y a través de una interpretación de lo que encontramos en los cuadernos de los alumnos y lo que nos comenta informalmente el profesor, indicamos todos los contenidos teóricos y los aspectos prácticos tratados en las sesiones posteriores al examen global de la segunda evaluación y anteriores a la finalización de este tema (que se terminó en la sesión del miércoles 29 de febrero de 2012).

Unidad teórica (UT1):

En este periodo hubo contenidos teóricos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

51. (Imp) Definición de composición de funciones.
52. Notación simbólica y lectura verbal de una composición de funciones.
53. Modo de cálculo de una composición de funciones.
54. (Imp) Definición de función recíproca de una dada (el docente denomina como “función inversa” a la función recíproca, lo que puede provocar dificultades en los alumnos con la inversa para el producto, operación en la que se utiliza este nombre para la función simétrica)
55. (Imp) Pasos para calcular la función recíproca de una dada.
56. Función identidad (como elemento neutro de la composición de funciones).
57. (Imp) Necesidad de que una función sea inyectiva para que pueda calcularse su recíproca.
58. (Imp) Relación entre las gráficas de una función y la de su recíproca.
59. Relación de reciprocidad entre funciones exponenciales y logarítmicas de la misma base.

Ejemplos:

39. Resolución del ej. 2 del examen global de la 2ª evaluación.
40. Resolución del ej. 3 del examen global de la 2ª evaluación.
41. Resolución del ej. 4 del examen global de la 2ª evaluación.
42. Resolución del ej. 5 del examen global de la 2ª evaluación.
43. (Imp) Ejemplo 1 de cálculo de composición de funciones: $(g \circ f)(x)$ con $g(x) = \frac{2}{x}$ y $f(x) = 3x^2 - 1$.
44. Ejemplo de cálculo de composición de funciones en un punto concreto: $(g \circ f)(3)$ con $g(x) = \frac{2}{x}$ y $f(x) = 3x^2 - 1$
45. (Imp) Ejemplo 2 de cálculo de composición de funciones: $(f \circ g)(x)$ con $g(x) = \frac{2}{x}$ y $f(x) = 3x^2 - 1$.
46. (Imp) Ejemplo 1 de cálculo de la función recíproca de una dada: f(x)=4x-7.
47. (Imp) Ejemplo 2 de cálculo de la función recíproca de una dada: f(x)=x^2 (rama positiva).
48. (Imp) Ejemplo 3 de cálculo de la función recíproca de una dada: f(x)=2^x.

Dibujos, esquemas y gráficos:

27. Representación gráfica de la función del ej. 3 del examen global de la 2ª evaluación.
28. Representación gráfica de la función del ej. 4 del examen global de la 2ª evaluación.
29. Esquema gráfico de la situación en el ej. 5 del examen global de la 2ª evaluación.
30. (Imp) Diagrama indicando el orden de actuación de las funciones en la composición.
31. (Imp) Diagrama indicando la relación entre una función y su recíproca
32. (Imp) Representación gráfica de la función f(x)=x^2 (con x≥0) y su recíproca (simetría respecto a y=x).
33. (Imp) Representación gráfica de la función f(x)=2^x y su recíproca logarítmica (simetría respecto a y=x).

Observaciones o comentarios de interés:

10. (Imp) La composición de funciones no es una operación conmutativa.
11. (Imp) Todas las funciones cuyas gráficas son rectas o hipérbolas tienen recíproca.

Unidad práctica (UP1):

De los tres aspectos considerados, en este periodo únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

55. AELT: Pág. 130, ej. 1 (composición de funciones: en general y en puntos concretos).
56. AELT: Pág. 143, ej. 4, apartados c y d (composición de funciones).
57. ACD: Cálculo de la función recíproca de $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$.
58. ACD: Cálculo de la función recíproca de $f(x) = 3 + \frac{2}{x-1}$.
59. AELT: Pág. 133, ej. 1 (estudio de una función exponencial en un contexto de modelización funcional con tasa de crecimiento constante por unidad temporal)
60. AELT: Pág. 133, ej. 2 (cálculo de parámetros en función exponencial para que se cumpla una propiedad establecida).
61. AELT: Pág. 144, ej. 30 (estudio del carácter recíproco de las funciones exponencial y logarítmica de la misma base; en este caso, base 2).
62. AELT: Pág. 144, ej. 32 (cálculo de la función recíproca de una función dada).
63. AELT: Pág. 144, ej. 28 (estudio y representación de una función exponencial obtenida en una situación modelizada con una función de este tipo).
64. AELT: Pág. 144, ej. 31 (estudio de una función exponencial obtenida en una situación modelizada con una función de este tipo).

Viernes 2 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Este día no disponemos aún de guion rellenado por el docente. Comenzaremos a disponer de estos guiones a partir de la clase del próximo viernes, 9/3/2012.

Información adicional de interés:

Dado que no disponemos del guion del docente, hemos interpretado el contenido y desarrollo de la clase a partir de la información proporcionada informalmente por el docente y del contenido existente en los cuadernos de los alumnos (por tanto, hay que tener mayor cautela con esta interpretación).

El docente comienza con el tema de límites y continuidad de una función (Tema 2 de este bloque), a través de la introducción de ideas intuitivas sobre el límite a través de varios ejemplos desarrollados en una función representada gráficamente: límites cuando $x \to \pm\infty$, límites finitos e infinitos, límite cuando x tiende a un punto: idea de límites laterales, existencia o no del límite en un punto, relación entre límites laterales y asíntotas verticales.

Posteriormente, se pasa el "cálculo numérico" de límites, a través de la "sustitución en el punto", introduciendo la idea de indeterminación cuando al sustituir se obtiene una expresión "cuyo valor varía", tratando el cálculo de límites en el infinito de un polinomio.

En la parte final de la clase se proponen varias actividades para el próximo día, relacionadas con el cálculo de límites en funciones definidas gráficamente o analíticamente: los apartados d y f del ej. 1 de la pág. 169 (que se consideran por separado) y el ej. 8 de la pág. 170 (considerándose por separados los límites para cada una de las dos funciones, de nombre f_1 y f_2.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase hay contenidos teóricos de tres de los cuatro tipos, puesto que no hemos considerado que existiera ningún contenido dentro del tipo "observación o comentario de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. (Imp) Notación del límite de una función: simbólica y lectura verbal.
2. (Imp) Idea de qué significa el límite de una función cuando x tiende a más infinito.
3. (Imp) Idea de qué significa que el límite de una función sea infinito.
4. (Imp) Idea de qué significa el límite de una función cuando x tiende a menos infinito.
5. (Imp) Idea de qué significa un límite finito en el infinito.

6. (Imp) Idea de qué significa el límite de una función en un punto.

7. (Imp) Límite lateral por la izquierda: idea sobre el concepto y notación.

8. (Imp) Límite lateral por la derecha: idea sobre el concepto y notación.

9. (Imp) Condición de existencia/no existencia del límite de una función en un punto (límites laterales).

10. (Imp) Existencia de asíntota vertical cuando existen límites laterales infinitos.

11. (Imp) Cálculo numérico de límites (sin indeterminaciones, sustituyendo x por valor).

12. (Imp) Concepto de indeterminación.

13. (Imp) Explicación del cálculo de límites de polinomios en el infinito (monomio dominante).

14. (Imp) Indicación de las indeterminaciones que van a tratarse: $(\to\infty)-(\to\infty)$,$\frac{\to\infty}{\to\infty}$, "$\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}=\pm\infty$", $\frac{\to 0}{\to 0}$.

Ejemplos:

1. Recuerdo del tema anterior: dominio e imagen en gráfica de función ejemplo.

2. (Imp) Ejemplo 1 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x\to+\infty$.

3. (Imp) Ejemplo 2 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x\to-\infty$.

4. (Imp: recoger al menos entre los números 4 y 5) Ejemplo 3 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x\to-1$.

5. Ejemplo 4 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x\to-6$.

6. (Imp: recoger al menos entre los números 6 y 7) Ejemplo 5 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x\to 2$.

7. Ejemplo 6 de cálculo de límite a partir de una función representada gráficamente: límite cuando $x\to-3$.

8. (Imp) Ejemplo de cálculo numérico de un límite en un punto ("sustituyendo"): f(x)=-x^2+7x+3 en x=2.

9. (Imp) Ejemplo de cálculo del límite de un polinomio en el infinito (a partir del monomio dominante): f(x)=-x^2+7x+3 cuando $x\to+\infty$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. (Imp) Representación gráfica de función inicial para presentar el concepto de límite y su cálculo.
2. (Imp) Interpretación gráfica del límite en +∞ del polinomio (monomio dominante).

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en este periodo únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

1. AELT: Pág. 169, ej. 1, apartado d (cálculo de límites en funciones definidas gráficamente, corregido en la sesión del lunes 5/3/2012).
2. AELT: Pág. 169, ej. 1, apartado f (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 5/3/2012).
3. AELT: Pág. 170, ej. 8, función f_1 (cálculo de límites en funciones definidas gráfica y simbólicamente, corregido en la sesión del lunes 5/3/2012).
4. AELT: Pág. 170, ej. 8, función f_2 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 5/3/2012).

Lunes 5 de marzo de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Este día no disponemos aún de guion rellenado por el docente (primer día con guion: viernes, 9/3/2012).

Información adicional de interés:

Dado que no disponemos del guion del docente, hemos interpretado el contenido y desarrollo de la clase a partir de la información proporcionada informalmente por el docente y del contenido existente en los cuadernos de los alumnos (por tanto, hay que tener mayor cautela con esta interpretación).

En la primera parte de la clase se corrigen las cuatro actividades pendientes. No tenemos información sobre quién corrigió las actividades.

En la vuelta a la exposición teórica, el docente explica cómo se resuelven los límites con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$, realizando seis ejemplos distintos (tomados del ej. 13 de la pág. 170) para mostrar el método. Posteriormente, explica cómo resolver límites en los que se llega a una situación del tipo $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$, “indeterminación” en la que hay que determinar el signo, y se realiza un ejemplo ilustrativo, junto con la interpretación gráfica de la situación. Finalmente, se explica la resolución de límites con una indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, realizándose además dos ejemplos ilustrativos junto con la interpretación gráfica de la información obtenida sobre la función cuando $x \to +\infty$.

En la parte final de la clase, se plantean actividades para la siguiente sesión: los tres límites en el ej. 14 de la pág. 170 y los ocho apartados del ej. 19 de la pág. 171 (cálculo de límites con las indeterminaciones que se han explicado durante esta sesión).

Unidad teórica (UT2):

En esta clase hay contenidos de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

15. (Imp) Método para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$.

16. (Imp) Método para resolver "indeterminaciones" del tipo $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$.

17. (Imp) Método para resolver indeterminaciones del $\frac{\to\infty}{\to\infty}$.

18. (Imp) Relación entre el valor del límite en el infinito y la existencia o no de asíntota horizontal.

19. (Imp) Método para saber si una función se aproxima a una asíntota horizontal por encima o por debajo de ésta.

Ejemplos:

10. (Imp: recoger al menos uno de los seis entre los números 10 al 15) Ejemplo 1 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ (tomado de la pág. 170, ej. 13a): $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ cuando $x \to 1$.

11. Ejemplo 2 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ (tomado de la pág. 170, ej. 13b): $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x}$ cuando $x \to -1$.

12. Ejemplo 3 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ (tomado de la pág. 170, ej. 13c): $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ cuando $x \to -2$.

13. Ejemplo 4 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ (tomado de la pág. 170, ej. 13d): $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ cuando $x \to 2$.

14. Ejemplo 5 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ (tomado de la pág. 170, ej. 13e): $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+3}$ cuando $x \to -3$.

15. Ejemplo 6 de límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ (tomado de la pág. 170, ej. 13f): $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$ cuando $x \to 1$.

16. (Imp) Ejemplo de límite con "indeterminación" $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$: $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x}$ cuando $x \to 0$.

17. (Imp) Ejemplo 1 de límite con indeterminación $\frac{\to \infty}{\to \infty}$ (tomado de la pág. 161, ej. 3a): $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ cuando $x \to +\infty$.

18. (Imp) Ejemplo 2 de límite con indeterminación $\frac{\to \infty}{\to \infty}$ (tomado de la pág. 161, ej. 3b): $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ cuando $x \to +\infty$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

3. (Imp) Representación gráfica en un entorno de 0 de la función del ejemplo con "indeterminación" $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$ (asíntota vertical).

4. (Imp) Representación gráfica de la función del Ejemplo 1 con indeterminación $\frac{\to \infty}{\to \infty}$ (con asíntota horizontal, cuando $x \to +\infty$).

5. (Imp) Lo mismo con la función del Ejemplo 2 con indeterminación $\frac{\to \infty}{\to \infty}$ (rama infinita: posibilidades según curvatura).

Observaciones o comentarios de interés:

1. (Imp) k/0 es "indeterminación" porque hay que determinar el signo (+∞ o -∞).

2. (Imp) Diferentes maneras de que una función tienda a infinito, según su curvatura.

Unidad práctica (UP2):

En esta clase se propusieron actividades, algunas de ellas fueron corregidas posteriormente, otras no. No se realizó ninguna mejora significativa en la corrección de las actividades.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

5. AELT: Pág. 170, ej. 14, límite en x=3 (cálculo de límite con una indeterminación, corregido en la sesión del martes 6/3/2012).
6. AELT: Pág. 170, ej. 14, límite en x=0 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 6/3/2012).
7. AELT: Pág. 170, ej. 14, límite en x=-1 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 6/3/2012).
8. AELT: Pág. 171, ej. 19, apartado a (cálculo de límite con una indeterminación e interpretación gráfica de la información obtenida, corregido en la sesión del martes 6/3/2012).
9. AELT: Pág. 171, ej. 19, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 6/3/2012).
10. AELT: Pág. 171, ej. 19, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 6/3/2012).
11. AELT: Pág. 171, ej. 19, apartado d (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 6/3/2012).
12. AELT: Pág. 171, ej. 19, apartado e (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 6/3/2012).
13. AELT: Pág. 171, ej. 19, apartado f (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 6/3/2012).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

1. AELT: Pág. 171, ej. 19, apartado g (cálculo de límite con una indeterminación e interpretación gráfica de la información obtenida).
2. AELT: Pág. 171, ej. 19, apartado h (mismo propósito anterior).

Martes 6 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Este día no disponemos aún de guion rellenado por el docente (primer día con guion: viernes, 9/3/2012).

Información adicional de interés:

Dado que no disponemos del guion del docente, hemos interpretado el contenido y desarrollo de la clase a partir de la información proporcionada informalmente por el docente y del contenido existente en los cuadernos de los alumnos (por tanto, hay que tener mayor cautela con esta interpretación).

Esta clase, en su totalidad, se dedica a la corrección de actividades planteadas en la sesión anterior. Durante esta clase se corrigen los tres límites del ej. 14 de la pág. 170 y los seis primeros apartados del ej. 19 de la pág. 171 (límite más la interpretación gráfica). No tenemos información sobre quién realizó la corrección de las actividades.

Además, durante la corrección de los límites del ej. 14 de la pág. 170, consideramos que el docente realizó una mejora significativa en la corrección de cada uno de los tres límites, puesto que el profesor añadió la interpretación gráfica de la información proporcionada por el límite (en un entorno de los puntos).

En la parte final de la clase, y como es habitual, el docente planteó actividades para la próxima sesión (miércoles 7/3/2012). Las actividades son extraídas del libro de texto, y son los seis apartados del ej. 25 de la pág. 171. Cada uno de los apartados trata sobre el cálculo de las asíntotas de las funciones que se proporcionan (tanto horizontales cuando $x \to +\infty$ como verticales), añadiéndose además la representación gráfica de la información obtenida.

Unidad teórica (UT2):

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP2):

En esta clase se propusieron actividades (todas ellas posteriormente corregidas) y existieron mejoras significativas en la corrección de algunas actividades.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

1., 2. y 3. En la corrección de los tres límites del ej. 14 de la pág. 170: Realización de la interpretación gráfica de la información que nos proporcionan estos límites (por separado para cada uno)

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

14. ARLT: Pág. 171, ej. 25, apartado a (estudio de la existencia o no de asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y de asíntotas verticales en funciones racionales y representación gráfica de la información obtenida, corregido en la sesión del miércoles 7/3/2012).
15. ARLT: Pág. 171, ej. 25, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del miércoles 7/3/2012).
16. ARLT: Pág. 171, ej. 25, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del miércoles 7/3/2012).
17. ARLT: Pág. 171, ej. 25, apartado d (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del miércoles 7/3/2012).
18. ARLT: Pág. 171, ej. 25, apartado e (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del miércoles 7/3/2012).
19. ARLT: Pág. 171, ej. 25, apartado f (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del viernes 9/3/2012).

Miércoles 7 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Este día el docente no rellena el guion con el resumen de la sesión, puesto que asistimos como observadores a la clase.

Información adicional de interés:

Obtenida de la observación de la clase.

Asisten todos los alumnos a la clase.

La clase se dedica a la corrección de las actividades planteadas en la sesión anterior. Durante esta clase se corrigen los cinco primeros apartados (apartados a al e de la pág. 25 de la pág. 171), mientras que se pospone la corrección del apartado f (por falta de tiempo) para la siguiente sesión.

El docente, con la participación de los alumnos, comienza recordando cómo se calculan las posibles asíntotas horizontales y verticales en una función. El apartado a es corregido por el propio docente, pidiendo la participación de los estudiantes para la resolución de límites y su interpretación en términos de existencia de asíntotas, así como la posición de la curva respecto de las asíntotas.

El apartado b es corregido por la alumna A33. Primeramente esta alumna resuelve una indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ por un método distinto al presentado por el profesor, por lo que el docente le manda rehacer el límite. El apartado c es corregido por el alumno A39, aunque sólo parcialmente, puesto que no realiza el cálculo para saber si existe o no asíntota horizontal (completado por el docente).

El apartado d también es corregido por el propio docente, que indica que la representación gráfica ya no es una hipérbola, al no ser un cociente de polinomios de primer grado. Lo mismo sucede con el apartado e, aunque el profesor requiere a los alumnos que le digan la solución de los límites que van apareciendo. La alumna A38 indica que tiene dudas al calcular la posición de la curva respecto de la asíntota vertical, por lo que es requerida para salir a la pizarra a completar el cálculo de la posición en una de las asíntotas verticales (en x=-1).

En la parte final de la clase, el docente vuelve a proponer de nuevo como actividad el apartado f del ej. 25 de la pág. 171. También pide el cálculo de las asíntotas verticales y la situación de la curva respecto de las asíntotas verticales existentes en las seis funciones del ej. 13 de la pág. 170.

Unidad teórica (UT2):

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en este periodo únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

20. ARLT: Pág. 170, ej. 13, apartado a (estudio de la existencia o no de asíntotas verticales en funciones racionales y representación gráfica de la información obtenida, corregido en la sesión del viernes 9/3/2012).
21. ARLT: Pág. 170, ej. 13, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del viernes 9/3/2012).

22. ARLT: Pág. 170, ej. 13, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del viernes 9/3/2012).

23. ARLT: Pág. 170, ej. 13, apartado d (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 12/3/2012).

24. ARLT: Pág. 170, ej. 13, apartado e (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 12/3/2012).

25. ARLT: Pág. 170, ej. 13, apartado f (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 12/3/2012).

Viernes 9 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Teoría, Ejemplos, Resolución ejercicios.

Tema o conceptos explicados en exposición teórica: "$\text{lím}_{x\to-\infty} f(x)$". Tiempo aproximado de exposición: 15 minutos. La explicación se ha realizado mediante exposición oral relativamente personal de aquello que se considera más importante, con posible apoyo de la pizarra. Además, se utilizan ejemplos personales, no tomados del libro, que se explican oralmente con ayuda de la pizarra. Ejemplo: Límite de una f. racional. La pizarra se utiliza en la exposición para escribir lo fundamental de la teoría y para explicar los ejemplos.

Corrección de actividades pendientes: Pág. 171, ejercicio 25, apartado f (Cálculo de asíntotas). Corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el profesor.

Comportamiento general del alumnado en este día de clase: Normal.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

En la parte final de la clase, se comienzan a corregir el estudio de asíntotas verticales en las funciones de los seis apartados del ej. 13 de la pág. 170. Pareciera que en esta clase se corrigieran los tres primeros (funciones de los apartados a, b y c), aunque no tenemos información sobre quién los corrige. Además, en la corrección de la función del apartado c, consideramos que el docente realizó una mejora significativa en la corrección de la actividad, puesto que también se estudia la existencia o no de asíntota horizontal en la función cuando $x \to +\infty$.

Se plantearon algunas actividades para la siguiente sesión: los ejercicios 23 y 24 de la pág. 171, cada uno de ellos con cuatro apartados. En todos ellos se pide estudiar la existencia o no de asíntotas horizontales y verticales, y representar la posición de la curva respecto de las asíntotas.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase hay contenidos teóricos de tres de los cuatro tipos, puesto que no hemos considerado que existiera ningún contenido dentro del tipo “observación o comentario de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

20. (Imp) Método para resolver límites con indeterminación cuando x tiende a -∞ (cambio de variable).

Ejemplos:

19. (Imp) Ejemplo de cálculo de límites cuando x tiende a -∞ (con cambio de variable, en una función racional): $f(x) = \frac{-2x+3}{x^2-1}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

6. (Imp) Representación gráfica ilustrando cómo se comporta cuando x tiende a -∞ la función del ejemplo ($f(x) = \frac{-2x+3}{x^2-1}$).

Unidad práctica (UP2):

En esta clase se propusieron actividades (todas ellas posteriormente corregidas) y existió una mejora significativa en la corrección de una actividad.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

4. En la corrección del apartado c del ej. 13 de la pág. 170: Realización del estudio de la existencia o no de asíntota horizontal en la función cuando $x \to +\infty$.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

26. AELT: Pág. 171, ej. 23, apartado a (estudio sobre la existencia o no de asíntotas horizontales y verticales en funciones racionales, y representación gráfica de la información obtenida, corregido en la sesión del lunes 12/3/2012)

27. AELT: Pág. 171, ej. 23, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 13/3/2012).
28. AELT: Pág. 171, ej. 23, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 13/3/2012).
29. AELT: Pág. 171, ej. 23, apartado d (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 13/3/2012).
30. AELT: Pág. 171, ej. 24, apartado a (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 20/3/2012).
31. AELT: Pág. 171, ej. 24, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 20/3/2012).
32. AELT: Pág. 171, ej. 24, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 20/3/2012).
33. AELT: Pág. 171, ej. 24, apartado d (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 20/3/2012).

Lunes 12 de marzo de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección de ejercicios, Teoría: Límites de potencias.

Corrección de actividades pendientes: Pág. 170, ejercicio 13 (en este se propuso calcular asíntotas); corrección por parte de las alumnas A36, A31 y A41. Página 171, ejercicio 23; corrección por parte de la alumna A32.

La exposición de la teoría se hizo mediante exposición oral relativamente personal de aquello que se considera más importante, con posible apoyo de la pizarra. Además, se utilizan ejemplos personales, no tomados del libro, que se explican oralmente con ayuda de la pizarra.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion, a partir de la interpretación de la información extraída de los cuadernos y los guiones de los días posteriores.

En la parte en la que se corrigen ejercicios, sólo se corrige el apartado a del ej. 23 de la pág. 171, siendo los demás corregidos en la siguiente sesión (martes 13/3/2012). Además, en la corrección de las funciones de los tres apartados restantes del ej. 13 de la pág. 170, consideramos que el docente realizó una mejora significativa en cada uno de ellos, puesto que también se estudia la existencia o no de asíntota horizontal en la función cuando $x \to +\infty$.

En la parte final de la clase se plantearon algunas actividades para la siguiente sesión. Por una parte, los cuatro apartados del ej. 22 de la pág. 171, donde se pide calcular los límites de las funciones en +∞ y en -∞, y representar la información encontrada. Por otra parte, en el ej. 31 de la pág. 172 también se trata el cálculo de límites (aunque en puntos) y la representación de la información obtenida.

Unidad teórica (UT2):

Los contenidos de esta clase abarcan tres de los cuatro tipos considerados (no hay ningún elemento del tipo “dibujos, esquemas y gráficos”)

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

21. (Imp) Resolución de límites en funciones de tipo potencial-exponencial (sin indeterminación).

22. (Imp) Comportamiento de una potencia con base entre 0 y 1 y exponente tendiendo a +∞.

Ejemplos:

20. (Imp) Ejemplo 1 de cálculo de límites en una función potencial-exponencial: $f(x) = \left(\frac{-2x}{3-x}\right)^{x^2}$ cuando $x \to +\infty$.

21. (Imp) Ejemplo 2 de cálculo de límites en una función potencial-exponencial: $f(x) = \left(\frac{-2x}{3-x}\right)^{-x^2}$ cuando $x \to +\infty$.

Observaciones o comentarios de interés:

3. (Imp) Diferencia en el comportamiento sobre la existencia de asíntota horizontal en +∞ y -∞ en funciones racionales y exponenciales.

Unidad práctica (UP2):

En esta clase se propusieron actividades (ninguna de ellas posteriormente corregida) y existió una mejora significativa en la corrección de varias actividades.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

5., 6. y 7. En la corrección de los apartados d, e y f del ej. 13 de la pág. 170: Realización del estudio de la existencia o no de asíntota horizontal en la función cuando $x \to +\infty$.

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

3. AELT: Pág. 171, ej. 22, apartado a (cálculo de los límites cuando x tiende a +∞ y a -∞ en funciones polinómicas y racionales, e interpretación gráfica de la información obtenida).
4. AELT: Pág. 171, ej. 22, apartado b (mismo propósito anterior).
5. AELT: Pág. 171, ej. 22, apartado c (mismo propósito anterior).
6. AELT: Pág. 171, ej. 22, apartado d (mismo propósito anterior).
7. AELT: Pág. 172, ej. 31, apartado a (cálculo de un límite en un punto en una función racional e interpretación gráfica del resultado obtenido)
8. AELT: Pág. 172, ej. 31, apartado b (mismo propósito anterior).

Martes 13 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

<u>Información tomada del guion rellenado por el docente</u>:

Momentos de la clase: Teoría, Corrección.

Tema o conceptos explicados en la exposición teórica: límites de funciones a trozos. La exposición de la teoría se hizo mediante exposición oral relativamente personal de aquello que se considera más importante, con posible apoyo de la pizarra. Además, se utilizan ejemplos personales, no tomados del libro, que se explican oralmente con ayuda de la pizarra: se ha tomado una función a trozos y se han calculado varios límites, para lo cual se ha usado la pizarra.

Corrección de actividades pendientes: Página 171, ejercicio 23; corrección en la pizarra (combinado con la explicación oral) por parte de las alumnas A33 y A40.

<u>Información adicional de interés</u>:

Complementamos algunos aspectos del guion.

En la parte final de la clase se propusieron varias actividades para la próxima sesión, relacionadas con el cálculo de límites en funciones a trozos. Se plantean los apartados a y c del ej. 34 de la pág. 172 y el apartado c del ej. 36 de esa misma página.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase hubo contenidos de los cuatro tipos considerados.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

23. (Imp) Método para resolver límites en funciones definidas a trozos.

Ejemplos:

22. (Imp: recoger al menos uno de los seis entre los números 22 al 27) Ejemplo 1 de cálculo de límites en funciones definidas a trozos: límite cuando $x \to -\infty$ de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x - 11, & si\ x \leq -2 \\ 2^x + 3, & si -1 < x < 2 \\ \frac{x+5}{x-8}, & si\ x > 2 \end{cases}$.

23. Ejemplo 2 de cálculo de límites en funciones definidas a trozos: límite cuando $x \to +\infty$ de la misma función del Ejemplo 1.

24. Ejemplo 3 de cálculo de límites en funciones definidas a trozos: límite cuando $x \to -2$ (por la izquierda) de la misma función del Ejemplo 1.

25. Ejemplo 4 de cálculo de límites en funciones definidas a trozos: límite cuando $x \to 0$ de la misma función del Ejemplo 1.

26. Ejemplo 5 de cálculo de límites en funciones definidas a trozos: límite cuando $x \to 2$ de la misma función del Ejemplo 1.

27. Ejemplo 6 de cálculo de límites en funciones definidas a trozos: límite cuando $x \to 8$ de la misma función del Ejemplo 1.

Dibujos, esquemas y gráficos:

7. (Imp) Diagrama con la recta real y expresiones analíticas en los intervalos de la función a trozos tomada como ejemplo.

Observaciones o comentarios de interés:

4. (Imp) Posible existencia de límite en un punto aunque no exista su imagen.

5. (Imp) Anticipación sobre la existencia de discontinuidad de salto cuando los límites laterales son distintos.

Unidad práctica (UP2):

En esta clase actividades propuestas tanto corregidas como no corregidas posteriormente.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

34. ARLT: Pág. 172, ej. 34, apartado a (cálculo de límites en funciones definidas a trozos, corregido con anterioridad a la sesión del martes 20/3/2012).

35. ARLT: Pág. 172, ej. 34, apartado c (mismo propósito anterior, corregido con anterioridad a la sesión del martes 20/3/2012).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

9. ARLT: Pág. 172, ej. 36, apartado c (cálculo de un parámetro en una función definida a trozos para que exista un límite).

Miércoles 14 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30), viernes 16 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30) y lunes 19 de marzo de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos.

Información adicional de interés:

No poseemos los guiones rellenados por el docente de estas tres clases. Sin embargo, la interpretación del contenido existente en los cuadernos parece indicarnos que no existió un avance real en estas clases, ni a nivel de contenido teórico ni de actividades prácticas, por lo que pudiera ser que no hubiera clases o actividades lectivas. Lo único que podemos atribuir a estos tres días es la corrección de los apartados a y c del ej. 34 de la pág. 172. Hay otras actividades pendientes cuya corrección no aparece en los guiones de los demás días (cuatro apartados del ej. 22 de la pág. 171, dos apartados del ej. 31 y el ej. 36 –apartado c- de la pág. 172) y que interpretamos como no corregidas en el aula, dado el alto número de errores y resoluciones incorrectas en los cuadernos de muchos de los alumnos que no son corregidos en ningún caso.

Martes 20 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección.

Corrección de actividades pendientes: Pág. 171, ejercicio 24; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el profesor.

<u>Información adicional de interés</u>:

Complementamos algunos aspectos del guion.

En la corrección de cada uno de los cuatro apartados del ej. 24 de la pág. 171, consideramos que el docente realizó una mejora significativa, puesto que indicó la posible existencia o no de asíntotas oblicuas (anticipándose al contenido teórico que iba a empezar a tratar al final de esta misma clase).

El contenido de los cuadernos revela que en la parte final de esta clase se introdujo el estudio de las asíntotas oblicuas de una función, a pesar de que el docente lo ha omitido en el guion rellenado que nos proporciona. Lo hace a través de la función $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$ (tomada del ej. 26, apartado e, de la pág. 171), estudiando primero si existían o no asíntotas horizontales e introduciendo el método de cálculo (división por caja de numerador entre denominador) para obtener la expresión de la asíntotas oblicua.

Además, se mandan como deberes cuatro actividades extraídas del libro de texto, todas ellas sobre el estudio de la existencia o no de asíntotas horizontales y verticales en funciones y de la posición de la representación de la función respecto de las asíntotas existentes. Son los apartados a y d del ej. 28 de la pág. 171 y los apartados a y c del ej. 29 de esa misma página.

<u>Unidad teórica (UT2):</u>

Los contenidos de esta clase abarcan tres de los cuatro tipos considerados (no hay ningún elemento del tipo “dibujos, esquemas y gráficos”).

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

24. (Imp) Método para obtener una asíntota oblicua en una función racional (división por caja).

Ejemplos:

28. (Imp) Ejemplo de cálculo de la asíntota oblicua en función racional: $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$ (primera parte: cálculo de la expresión de la asíntota oblicua).

Observaciones o comentarios de interés:

6. (Imp) Existencia de asíntotas oblicuas en funciones racionales según la diferencia de los grados de numerador y denominador.

Unidad práctica (UP2):

Existen aspectos prácticos de los tres tipos considerados.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

8., 9., 10. y 11. En la corrección de los cuatro apartados del ej. 24 de la pág. 171: Indicación sobre la posible existencia o no de asíntotas oblicuas en las funciones de cada uno de los cuatro apartados.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

36. AELT: Pág. 171, ej. 29, apartado a (estudio de las asíntotas de una función racional y representación de la información obtenida, corregido en la sesión del miércoles 28/3/2012).

37. AELT: Pág. 171, ej. 29, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del miércoles 28/3/2012).

Actividades propuestas y no corregidas posteriormente:

10. AELT: Pág. 171, ej. 28, apartado a (estudio de las asíntotas de una función racional y representación de la información obtenida).

11. AELT: Pág. 171, ej. 28, apartado d (mismo propósito anterior).

Miércoles 21 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Teoría, Ejercicios en clase.

Tema o conceptos explicados en la exposición teórica: Cálculo de las asíntotas oblicuas de una f. racional y representación gráfica (curva respecto asíntota). Tiempo de clase dedicado (aprox.): 20 minutos. La exposición de la teoría se hizo mediante exposición oral relativamente personal de aquello que se considera más importante, con posible apoyo de la pizarra. Se utilizan ejemplos tomados del libro, y explicados de forma detallada en la pizarra, durante la explicación (la función del ej. 26, apartado e, pg. 171).

Realización de ejercicios durante la clase: Se ha propuesto un ejercicio para su realización en el momento por parte de los alumnos en sus cuadernos, y la corrección inmediatamente posterior del mismo. Es un ejercicio tomado del libro: pág. 171, ejercicio 26, apartado b. Es corregido por la alumna A36.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

Además, al final de la clase se proponen como actividades para la próxima sesión varios de los apartados restantes del ej. 26 de la pág. 171 (con el mismo propósito): apartados a, d y f.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase hay contenidos teóricos de tres de los cuatro tipos, puesto que no hemos considerado que existiera ningún contenido dentro del tipo "observación o comentario de interés".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

25. (Imp) Método para saber la posición de una función con respecto a la asíntota oblicua (cuando existe).

Ejemplos:

28. (Imp) Ejemplo de cálculo de la asíntota oblicua en función racional: $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$ (segunda parte: repaso del cálculo de la asíntota e ilustración del método para obtener la posición de la curva respecto de la asíntota oblicua).

Dibujos, esquemas y gráficos:

8. (Imp) Representación gráfica del comportamiento de la función con respecto a la asíntota oblicua en el ejemplo de función racional, $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en este periodo únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

38. AELT: Pág. 171, ej. 26, apartado b (estudio de la existencia o no de asíntota oblicua y posición de la curva respecto de la asíntota, corregido en esta misma sesión).
39. AELT: Pág. 171, ej. 26, apartado a (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del viernes 23/3/2012).
40. AELT: Pág. 171, ej. 26, apartado d (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del viernes 23/3/2012).
41. AELT: Pág. 171, ej. 26, apartado f (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 26/3/2012).

Viernes 23 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

<u>Información tomada del guion rellenado por el docente</u>:

Momentos de la clase: Corrección ejercicios.

Corrección de actividades pendientes: Pág. 171, ejercicio 26, apartado a; corregido por la alumna A31. Pág. 171, ejercicio 26, apartado d; corregido por la alumna A32.

<u>Información adicional de interés:</u> No.

<u>Unidad teórica (UT2):</u>

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

<u>Unidad práctica (UP2):</u>

No se planteó ninguna actividad durante esta sesión, ni se desarrolló ninguna mejora en las actividades corregidas.

Lunes 26 de marzo de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

<u>Información tomada del guion rellenado por el docente</u>:

Este día no disponemos de guion rellenado por el docente sobre el desarrollo de la clase.

<u>Información adicional de interés</u>:

Dado que no disponemos del guion del docente, hemos interpretado el contenido y desarrollo de la clase a partir del contenido existente en los cuadernos de los alumnos y de la información de guiones posteriores. Por tanto, hay que tener mayor cautela con esta interpretación.

Durante esta clase, se realiza la corrección detallada del último de los apartados del ej. 26 de la pág. 171 que estaba pendiente: el apartado f. No tenemos información sobre quién realiza esa corrección.

Unidad teórica (UT2):

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP2):

No se planteó ninguna actividad durante esta sesión, ni se desarrolló ninguna mejora en las actividades corregidas.

Martes 27 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Teoría: "$\text{lím}_{x\to+\infty}(\sqrt{\ } - \sqrt{\ })$", Indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$.

La exposición de la teoría se hizo mediante exposición oral relativamente personal de aquello que se considera más importante, con posible apoyo de la pizarra. Además, se utilizan ejemplos personales, no tomados del libro, que se explican oralmente con ayuda de la pizarra.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

La ilustración del método de resolución de los límites con indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$ y con una diferencia de radicales se realiza a través de un ejemplo, donde se calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y se interpreta el resultado. También se calcula el límite cuando $x \to -\infty$ para comparar lo que sucede, y se interpreta el resultado.

En la parte final de la clase son propuestos por el docente dos límites más con esta indeterminación y de este tipo, que serán corregidas en la próxima sesión (miércoles 28/3/2012): $\text{lím}_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$ y $\text{lím}_{x\to+\infty}(3x - \sqrt{2x^2+5x})$.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase hay contenidos teóricos de tres de los cuatro tipos, puesto que no hemos considerado que existiera ningún contenido dentro del tipo “observación o comentario de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

26. (Imp) Método para resolver indeterminaciones $(\to \infty) - (\to \infty)$ con raíces cuadradas

Ejemplos:

29. (Imp) Ejemplo 1 de límite con indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$ (con raíces cuadradas): $\text{lím}_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.
30. Cálculo del límite en la función anterior en -∞ (sin indeterminación, aparece una situación $(\to \infty) + (\to \infty)$).

Dibujos, esquemas y gráficos:

9. Representación gráfica de la función del ejemplo con indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$ y raíces cuadradas.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

42. ACD: Cálculo del límite $\text{lím}_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3})$ (límite en una indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$, corregido en la sesión del 28/3/2012).
43. ACD: Cálculo del límite $\text{lím}_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{2x^2+5x})$ (límite en una indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$, corregido en la sesión del 28/3/2012).

Miércoles 28 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección ejercicios, Explicación $\infty - \infty$ con fracciones algebraicas.

Corrección de actividades pendientes: Ejercicio propuesto por el profesor: $\text{lím}_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3})$; corregido por la alumna A38. Ejercicio propuesto por el profesor: $\text{lím}_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{2x^2+5x})$; corregido por la alumna A33.

Exposición teórica: La exposición de la teoría se hizo mediante exposición oral relativamente personal de aquello que se considera más importante, con posible apoyo de la pizarra.

<u>Información adicional de interés</u>:

Complementamos algunos aspectos del guion.

En la parte dedicada a la corrección de actividades pendientes, y previamente a la corrección de los dos límites que indica el docente en su guion, se corrigieron los dos apartados (a y c) del ej. 29 de la pág. 171 (propuestos en la sesión del martes 20/3/2012). No tenemos información sobre quién realizó la corrección.

Además, en cada uno de los dos límites con indeterminación $(\to\infty)-(\to\infty)$, consideramos que el docente realiza una mejora significativa al contenido de la actividad: se estudia el cálculo de los límites de las funciones anteriores también cuando $x\to-\infty$ y se interpreta el resultado de forma gráfica.

En la parte teórica de la clase, se explica cómo calcular límites con una indeterminación $(\to\infty)-(\to\infty)$ y en los que hay una diferencia de fracciones algebraicas. Se ilustra a través de un ejemplo, en el que se interpreta el resultado y se representa gráficamente.

Como actividades para el próximo día se proponen una serie de cálculos de límites en funciones definidas a trozos (con la idea del docente de utilizarlos para anticipar y ejemplificar el estudio de la continuidad de una función, que se desarrollará en sesiones posteriores). Se toman las funciones definidas a trozos del ej. 37 de la pág. 172: en la función del apartado a, el límite cuando $x\to1$; en la función del apartado b, los límites cuando $x\to-1$ y $x\to1$; y en la función del apartado c, el límite cuando $x\to0$.

<u>Unidad teórica (UT2):</u>

En esta clase hay contenidos teóricos de tres de los cuatro tipos, puesto que no hemos considerado que existiera ningún contenido dentro del tipo “observación o comentario de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

27. (Imp) Método para resolver indeterminaciones $(\rightarrow \infty) - (\rightarrow \infty)$ con una resta de fracciones algebraicas.

Ejemplos:

31. (Imp) Ejemplo 2 de límite con indeterminación $(\rightarrow \infty) - (\rightarrow \infty)$ (con fracciones algebraicas): $\text{lím}_{x\to 2} \frac{3x+1}{x^2-4} - \frac{x}{x-2}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

10. Representación gráfica de la función del ejemplo con indeterminación $(\rightarrow \infty) - (\rightarrow \infty)$ y fracciones algebraicas (en un entorno punto de x=2).

<u>Unidad práctica (UP2):</u>

Están los tres aspectos considerados, salvo la propuesta de ejercicios posteriormente no corregidos.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

12. y 13. En la corrección de los dos límites con indeterminación $(\rightarrow \infty) - (\rightarrow \infty)$: estudio del estudio del límite cuando $x \rightarrow -\infty$ e interpretación gráfica de la información obtenida en cada una de las dos funciones que aparecen en los límites.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

44. ARLT: Pág. 172, ej. 37, apartado a (cálculo de límites en la función definida a trozos, corregido en la sesión del lunes 2/4/2012).

45. ARLT: Pág. 172, ej. 37, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 2/4/2012).

46. ARLT: Pág. 172, ej. 37, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 2/4/2012).

Viernes 30 de marzo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

<u>Información tomada del guion rellenado por el docente</u>:

Corrección de actividades pendientes: Ejercicio propuesto por el profesor: $\text{lím}_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$; corregido nuevamente por el propio docente en la pizarra y combinado con la explicación oral del mismo. Ejercicio propuesto por el profesor: $\text{lím}_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{2x^2+5x})$; corregido por el propio docente en la pizarra y combinado con la explicación oral del mismo.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

Como observamos en el guion que nos proporciona el docente, vuelve a aparecer la corrección de los dos límites con indeterminación $(\to\infty)-(\to\infty)$, que ya habían sido corregidos durante la sesión anterior. Por tanto, interpretamos que en esta clase se pudiera haber repasado o rehecho la corrección de estos límites, posiblemente a petición de los alumnos.

Unidad teórica (UT2):

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP2):

No se planteó ninguna actividad durante esta sesión, ni se desarrolló ninguna mejora en las actividades corregidas.

Lunes 2 de abril de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Teoría: Continuidad – Discontinuidades y tipos (ejemplos gráficos).

Corrección de actividades pendientes: Página 172, ejercicio 37, apartado a; corregido en la pizarra (combinado con la expresión oral) por el alumno A37, que lo copia de su cuaderno. Durante el proceso de corrección, añadimos al cálculo del límite el estudio de la continuidad (no pedido). Página 172, ejercicio 37, apartado b; corregido en la pizarra (combinado con la expresión oral) por la alumna A31, que lo copia de su cuaderno. Misma incidencia indicada en el proceso de corrección anterior. Página 172, ejercicio 37, apartado c; corregido en la pizarra (combinado con la expresión oral) por la alumna A36, que lo copia de su cuaderno. Durante el proceso de corrección, añadimos al cálculo de límites y el tipo de discontinuidad existente (que no se había pedido).

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

En la parte teórica de la sesión, se indica la definición de continuidad y los diferentes tipos de discontinuidades: evitable (en los dos casos: no existencia del valor de la función en el punto, o existencia pero con valor distinto del límite de la función), discontinuidad de salto finito y de salto infinito. Se ilustran gráficamente todos los tipos de discontinuidades.

Consideramos como ejemplos el estudio de la continuidad en las funciones definidas a trozos a partir de los límites que se habían propuesto como actividad para esta sesión, así como su representación gráfica.

En la parte final de la clase, el docente propone dos actividades extraídas del libro de texto: los ejercicios 39 y 40 de la pág. 172, que tratan la aplicación de aspectos asociados al límite y la continuidad de una función en modelos funcionales. Estas actividades serán corregidas en la sesión del lunes 16/4/2012, después de las vacaciones de Semana Santa.

En la siguiente clase, la del martes 3/4/2012 estaba planificada la realización del examen parcial de la tercera evaluación, en la que los contenidos serán los que se han desarrollado hasta el momento en los dos temas de funciones.

Unidad teórica (UT2):

En esta clase hubo contenidos de cada uno de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

28. (Imp) Definición de función continua en un punto.
29. (Imp) Definición de discontinuidad evitable en un punto.
30. (Imp) Definición de discontinuidad de salto finito en un punto.
31. (Imp) Definición de discontinuidad de salto infinito en un punto.
32. (Imp) La existencia de asíntota vertical implica la existencia de una discontinuidad de salto infinito.

Ejemplos:

32. (Imp: recoger al menos uno de los cuatro entre los números 32 al 35) Ejemplo 1 de estudio de continuidad de una función en un punto (función del ej. 37, apartado a, en x=1): $f(x) = \begin{cases} 2-x, & si\ x<1 \\ \frac{1}{x}, & si\ x \geq 1 \end{cases}$.

33. Ejemplo 2 de estudio de continuidad de una función en un punto (función del ej. 37, apartado b, en x=-1): $f(x) = \begin{cases} -x-1, & si -1 \geq x \\ 1-x^2, & si -1 < x < 1 \\ x-1, & si\ x \geq 1 \end{cases}$.

34. Ejemplo 3 de estudio de continuidad de una función en un punto (misma función anterior, en x=1).

35. Ejemplo 4 de estudio de continuidad de una función en un punto (función del ej. 37, apartado c, en x=0): $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & si\ x \leq 0 \\ 2^{x+1}, & si\ x > 0 \end{cases}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

11. (Imp) Representación gráfica de una función con discontinuidad evitable en la que no existe f(a).

12. (Imp) Representación gráfica de una función con discontinuidad evitable en el que el valor del límite y el de la función en el punto son distintos.

13. (Imp) Representación gráfica de una función con discontinuidad de salto finito.

14. (Imp) Representación gráfica de una función con discontinuidad de salto infinito (comportamiento asintótico).

15. Representación gráfica de la función a trozos del ejercicio 37, apartado a.

16. Representación gráfica de la función a trozos del ejercicio 37, apartado b.

17. Representación gráfica de la función a trozos del ejercicio 37, apartado c.

Observaciones o comentarios de interés:

7. (Imp) Explicación del nombre de "evitable" para el tipo de discontinuidad.

<u>Unidad práctica (UP2)</u>:

De los tres aspectos considerados, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

47. AELT: Pág. 172, ej. 39 (aplicación de aspectos de límite y continuidad en situaciones de modelización funcional, corregido en la sesión del lunes 16/4/2012).

48. AELT: Pág. 172, ej. 40 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del lunes 16/4/2012).

Martes 3 de abril de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

El docente nos proporcionó los enunciados de los ejercicios del examen. El examen constaba de cuatro preguntas, valorándose las tres primeras sobre tres puntos y la última sobre 1 punto. El examen es sobre el bloque de análisis matemático (los dos temas vistos hasta ahora).

Los enunciados de las actividades son los siguientes:

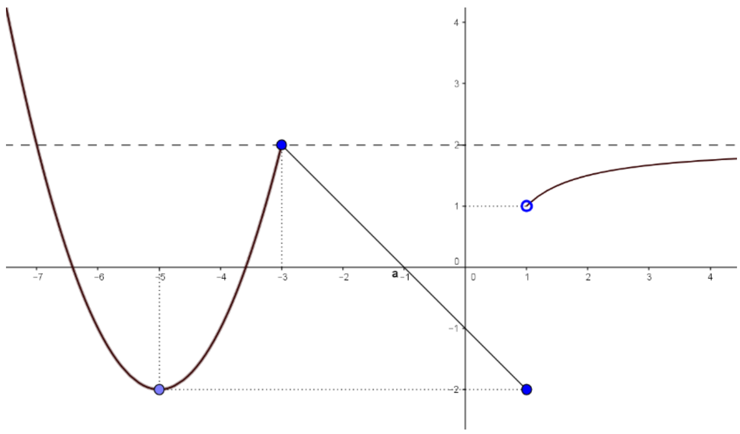
1. Considera las siguientes funciones: f(x)=x²+3, $g(x) = 4 + \frac{3}{x-1}$, *h(x)=3²ˣ.*

(a) Calcula $(g \circ f)(x)$

(b) Calcula $((f \circ h)(-1)$

(c) Calcula $g^{-1}(x)$

2. Calcula los siguientes límites:



(a) $\text{lím}_{x\to-\infty} f(x)$

(b) $\text{lím}_{x\to+\infty} f(x)$

(c) $\text{lím}_{x\to-3} f(x)$

(d) $\text{lím}_{x\to 0} f(x)$

(e) $\text{lím}_{x\to 1} f(x)$

3. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones y representa gráficamente (la curva respecto de las asíntotas)

(a) $f(x) = \frac{x^2+x}{1-x^2}$

(b) $g(x) = \frac{3x^2-10x+9}{x-3}$

4. Define “inversa de una función”.

Información adicional de interés:

Como ya hemos comentado en el apartado “Información adicional de interés” de la sesión anterior, se dedica esta sesión a la realización por parte de los alumnos de un examen parcial de la tercera evaluación (debido al calendario del centro, se realiza a pesar de que todavía se estaba en el periodo previo a la Semana Santa).

Unidad teórica (UT2):

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP2):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión (que pueda estar en el cuaderno de los alumnos).

Miércoles 4 de abril de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Ordenadores

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

De la interpretación del contenido de los cuadernos, inferimos que en esta clase, aunque el docente no nos lo indica en el guion que nos proporciona, se realizó también la corrección de los ejercicios del examen parcial realizado en la sesión anterior. Dos de los ejercicios de dicho examen (los números 2 y 3) tienen contenidos propios del tema que está desarrollando en este momento (límites y continuidad), por lo que las hemos considerado como ejercicios resueltos propios de la UT2 (ejemplos desarrollados por el docente).

Esta es la última clase antes de las vacaciones de Semana Santa. La próxima sesión, a vuelta de vacaciones, será la del lunes 16/4/2012.

Unidad teórica (UT2):

En esta sesión se explicaron contenidos de dos tipos: ejemplos y dibujos, esquemas y gráficos.

Ejemplos:

36. Resolución del ej. 2 del primer examen parcial de la 3ª evaluación.
37. Resolución del ej. 3 del primer examen parcial de la 3ª evaluación.

Dibujos, esquemas y gráficos:

18. Representación gráfica de la función utilizada en el ej. 2 del primer examen parcial (3ª evaluación).
19. Gráfica con la posición de la función con respecto a las asíntotas (ej. 3a, primer examen parcial 3ª evaluación).
20. Gráfica con la posición de la función con respecto a las asíntotas (ej. 3b, primer examen parcial 3ª evaluación).

Unidad práctica (UP2):

No se planteó ninguna actividad durante esta sesión ni se realizó ninguna mejora significativa en las actividades corregidas.

Lunes 16 de abril de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección actividades, Teoría: Derivada – Concepto – Gráficamente, Teoría: Técnicas de derivación: f. constante, f. identidad, potencia de x. Propiedades: D(f+g), D(cf).

Corrección de actividades pendientes: Pág. 172, ejercicio 39; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el profesor. Pág. 172, ejercicio 40; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el profesor.

Exposición teórica: La exposición de la teoría se hizo mediante exposición oral relativamente personal de aquello que se considera más importante, con posible apoyo de la pizarra. Tiempo aproximado de exposición: 20 minutos. Se utilizaron ejemplos personales, no tomados del libro, explicados combinando la exposición oral con el uso de la pizarra: $D(x^2)$, $D(x^5)$, $D(1/x)$, $D(\sqrt[3]{x})$, $D(3x)$, $D(x^2+x-5)$. La pizarra se utilizó en la exposición para escribir lo fundamental de la teoría (alguna definición, fórmula) y para explicar los ejemplos.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

Como nos indica el docente en su guion, en la parte final de la clase se corrigen dos actividades correspondientes al tema de límites y continuidad de una función, antes de comenzar la teoría del siguiente tema (Tema 3 del bloque de Análisis Matemático): derivada de una función.

Se presenta la derivada de una función a través del límite del cociente incremental, relacionándose posteriormente con la pendiente de la recta tangente a través del límite de la pendiente de las rectas tangentes, aspecto que se ilustra gráficamente. Este docente combina dos notaciones para la derivada: la notación f'(x) y la notación como operador Df(x). Posteriormente, se comienza el estudio de las derivadas de algunas funciones y de algunas reglas de derivación, con los ejemplos indicados ya en el guion rellenado por el docente.

En la parte final de la clase se propone el cálculo de varias derivadas, lo cual es corregido poco después entre docente y alumnos (esto no está reflejado en el guion). Esas actividades son los ejercicios 1, 2 y 3 de la pág. 182. Como actividad para la próxima sesión se propone una actividad del tema anterior (cálculo del valor del parámetro para que funciones definidas a trozos sean continuas): los tres apartados del ej. 36 de la pág. 172.

<u>Unidad teórica (UT3):</u>

En esta clase hay contenidos teóricos de tres de los cuatro tipos, puesto que no hemos considerado que existiera ningún contenido dentro del tipo “observación o comentario de interés”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

1. (Imp) Utilización de dos notaciones para la derivada: f' y Df.
2. (Imp) Límite del cociente incremental con el que se calcula la derivada (h tiende a cero): $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
3. Relación del cociente de la expresión del límite con la pendiente de la recta secante (proceso de aproximación).
4. (Imp) Derivada en un punto como pendiente de la recta tangente a f en ese punto.
5. (Imp) "Idea" de recta tangente (como recta que "solo corta en ese punto a la curva").
6. (Imp) Derivada de una función constante genérica, f(x)=k.

7. (Imp) Derivada de la función identidad, f(x)=x.

8. (Imp) Derivada de una función potencial genérica, $f(x)=x^n$.

9. (Imp) Regla para la derivada de una suma/resta de funciones.

10. (Imp) Regla para la derivada del producto de una constante por una función.

Ejemplos:

1. (Imp: recoger al menos uno de entre los números 1 y 2) Ejemplo 1 de derivación de una función potencial: $f(x)=x^2$.

2. Ejemplo 2 de derivación de una función potencial: $f(x)=x^5$.

3. (Imp) Ejemplo 3 de derivación de una función potencial: $f(x) = \frac{1}{x}$.

4. (Imp) Ejemplo 4 de derivación de una función potencial: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

5. (Imp) Ejemplo de derivación de una constante por una función: f(x)=3x.

6. (Imp) Ejemplo de derivación de una suma de funciones: $f(x)=x^2+x-5$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

1. (Imp) Gráfica de función donde se aproximan las rectas secantes a la tangente en un punto.

Unidad práctica (UP2):

De los tres aspectos considerados, y sobre el tema de límites y continuidad, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

49. AELT: Pág. 172, ej. 36, apartado a (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 17/4/2012).

50. AELT: Pág. 172, ej. 36, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 17/4/2012).

51. AELT: Pág. 172, ej. 36, apartado c (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 17/4/2012).

Unidad práctica (UP3):

De los tres aspectos considerados, y sobre el tema de derivada de una función, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

1. AELT: Pág. 182, ej. 1 (cálculo de derivadas en funciones, corregido en esta misma sesión).
2. AELT: Pág. 182, ej. 2 (mismo propósito anterior, corregido en esta misma sesión).
3. AELT: Pág. 182, ej. 3 (mismo propósito anterior, corregido en esta misma sesión).

Martes 17 de abril de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

<u>Información tomada del guion rellenado por el docente</u>:

Momentos de la clase: Corrección ejercicios, Teoría: Derivadas. Continuación de las derivadas de las f. elementales. Derivada del producto y del cociente.

Corrección de actividades pendientes: Página 172, ejercicio 36, apartado a; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) entre el profesor y los alumnos. Página 172, ejercicio 36, apartado b; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) entre el profesor y los alumnos. Página 172, ejercicio 36, apartado c; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) entre el profesor y los alumnos.

<u>Información adicional de interés</u>:

Complementamos algunos aspectos del guion.

El docente nos indica en el guion la corrección de estas actividades correspondientes al tema anterior (límites y continuidad). Estas actividades son las últimas sobre este tema que se plantearon y corrigieron. Sin embargo, en el guion del docente no hay ninguna información más sobre la parte de la clase dedicada a continuar la exposición de la teoría del tema de derivadas.

En esta parte, se indica cuál es la derivada de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, con un ejemplo concreto en los dos primeros casos. Además, se indica y ejemplifica la regla para derivar tanto un producto como un cociente de funciones.

Al finalizar la clase, el profesor propone varias actividades (ejercicios 5, 7, 9, 10 y 13 de la página 182) que serán corregidas en la próxima sesión. Todas ellas tratan el cálculo de derivadas aplicando la teoría tratada en esta sesión.

Unidad teórica (UT3):

En esta clase hay contenidos teóricos de dos de los cuatro tipos: "definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones" y "ejemplos".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

11. (Imp) Derivada de la función exponencial (de base e), $f(x)=e^x$.
12. (Imp) Derivada de la función exponencial (de base cualquiera), $f(x)=a^x$.
13. (Imp) Derivada de la función logaritmo neperiano, $f(x)=\ln(x)$.
14. (Imp) Derivada de la función logaritmo (de base cualquiera), $f(x)=\log_a(x)$.
15. (Imp) Derivada de la función seno, $f(x)=\operatorname{sen}(x)$.
16. (Imp) Derivada de la función coseno, $f(x)=\cos(x)$.
17. (Imp) Regla para la derivada de un producto de funciones.
18. (Imp) Regla para la derivada de un cociente de funciones.

Ejemplos:

7. (Imp) Ejemplo de derivación de una función exponencial: $f(x)=3^x$.
8. (Imp) Ejemplo de derivación de una función logarítmica: $f(x)=\log_{1/2}(x)$.
9. (Imp) Ejemplo de derivación de un producto de funciones: $f(x)=x^2\cdot\ln(x)$.
10. (Imp) Ejemplo de derivación de un cociente de funciones: $f(x)=\frac{x}{1-x}$.

Unidad práctica (UP2):

No se planteó ninguna actividad durante esta sesión ni se realizó ninguna mejora significativa en las actividades corregidas correspondientes al tema de límites y continuidad de una función.

Unidad práctica (UP3):

De los tres aspectos considerados, y sobre el tema de derivada de una función, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

4. AELT: Pág. 182, ej. 5 (cálculo de derivadas en funciones, corregido en la sesión del miércoles 18/4/2012).

5. AELT: Pág. 182, ej. 7 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del miércoles 18/4/2012).
6. AELT: Pág. 182, ej. 9 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del miércoles 18/4/2012).
7. AELT: Pág. 182, ej. 10 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del miércoles 18/4/2012).
8. AELT: Pág. 182, ej. 13 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del miércoles 18/4/2012).

Miércoles 18 de abril de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

<u>Información tomada del guion rellenado por el docente</u>:

Momentos de la clase: Corrección, Derivada de una función compuesta.

Corrección de actividades pendientes: Página 182, ejercicio 5; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el alumno A37. Página 182, ejercicio 7; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por la alumna A33. Página 182, ejercicio 10; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por la alumna A41. Página 182, ejercicio 9; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por la alumna A31. Página 182, ejercicio 13; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el propio profesor.

Exposición teórica: Durante la exposición se hace uso de ejemplos, tanto tomados del libro y comentados oralmente de forma breve como ejemplos personales (no tomados del libro) que son explicados con la ayuda de la pizarra.

<u>Información adicional de interés</u>:

Complementamos algunos aspectos del guion.

Con respecto a la teoría, la regla para derivar funciones compuestas se ilustra a través del desarrollo detallado de un ejemplo, tomado del ej. 15 de la pág. 183. Además, se detallan algunas composiciones “usuales” de funciones y cuál es su derivada, ejemplificándose dos de ellas.

En la parte final de la sesión plantea actividades para la próxima sesión, relacionadas con el cálculo de derivadas aplicando la teoría vista hasta ahora. Son los ejercicios 18, 19 y 21 de la pág. 182, y los ejercicios 19 y 27 de la pág. 195.

Unidad teórica (UT3):

En esta clase hay contenidos teóricos de dos de los cuatro tipos: “definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones” y “ejemplos”.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

19. (Imp) Regla para la derivada de una composición de funciones.
20. Derivada del seno de una función, D(sen(f(x)).
21. Derivada de la exponencial de una función, D($e^{f(x)}$).
22. Derivada de la potencia de una función, D($f(x)^n$).

Ejemplos:

11. (Imp) Ejemplo 1 de derivación de una función compuesta f(x)=sen(x^2-5x+7).
12. Ejemplo 2 de derivación de una función compuesta: $f(x) = e^{x^2}$.
13. Ejemplo 3 de derivación de una función compuesta: f(x)=$(x^2+1)^{25}$.

Unidad práctica (UP3):

De los tres aspectos considerados, y sobre el tema de derivada de una función, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

9. AELT: Pág. 182, ej. 18 (cálculo de derivadas en funciones, corregido en la sesión del viernes 20/4/2012).
10. AELT: Pág. 182, ej. 19 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del viernes 20/4/2012).
11. AELT: Pág. 182, ej. 21 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del viernes 20/4/2012).
12. AELT: Pág. 195, ej. 19 (cálculo de la derivada y su valor en un punto concreto, corregido en la sesión del viernes 20/4/2012).
13. AELT: Pág. 195, ej. 27 (cálculo de derivadas en funciones, corregido en la sesión del viernes 20/4/2012).

Viernes 20 de abril de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

<u>Información tomada del guion rellenado por el docente</u>:

Momentos de la clase: Corrección de ejercicios, Derivada de $\sqrt[n]{f(x)}$ (5 minutos), Ejercicio 42, b), d), pg. 195.

Corrección de actividades pendientes: Página 183, ejercicio 18; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por la alumna A40, que lo copia de su cuaderno. Página 183, ejercicios 19 y 21; corregidos en la pizarra (combinado con la explicación oral) por el alumno A39, que los copia de su cuaderno. Página 195, ejercicio 19; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por la alumna A33, que lo copia de su cuaderno.

Exposición teórica: Se utilizan ejemplos personales, no tomados del libro, que son explicados por el docente con la ayuda de la pizarra: D($\sqrt[3]{x^2}$).

Realización de ejercicios en clase por parte de los alumnos: se propone un ejercicio para su realización en el momento por parte de los alumnos en sus cuadernos, y que es corregido poco después. El ejercicio es tomado del libro de texto: pág. 195, ejercicio 42, apartado b. El ejercicio es corregido por el profesor en la pizarra, combinado con su explicación oral.

Además, se propone otro ejercicio que se empieza a realizar en la clase, pero con la idea de que sea completado en casa como “deberes”: pág. 195, ejercicio 42, apartado d.

<u>Información adicional de interés</u>:

Complementamos algunos aspectos del guion.

En la parte destinada a la corrección de ejercicios, también fue corregido el ejercicio restante (pág. 195, ej. 27), aunque el docente no lo refleja en el guion y no tenemos información sobre quién lo corrigió. Además, durante esta corrección el docente aprovechó para introducir una nueva regla de derivación de una “composición usual”: D(ln(f(x))).

En la parte teórica, se indicó la regla para calcular la derivada de la raíz enésima de una función, y se realizó un ejemplo. Durante la corrección del ej. 42 (apartado b) de la página 195 se introduce, puesto que viene a colación de la actividad, la definición de punto crítico de una función (puntos en los que se anula su derivada). Además de la actividad indicada en el guion del docente que queda como actividad pendiente para la próxima sesión, se proponen seis ejercicios más de cálculo de derivadas: los apartados a y b de los ej. 30, 34 y 37 de la pág. 195 del libro de texto.

La próxima sesión fue la del martes 24/4/2012, puesto que el lunes 23 de abril es festivo en la comunidad de Castilla y León (Día de la Comunidad Autónoma).

Unidad teórica (UT3):

En esta clase hay contenidos teóricos de tres de los cuatro tipos, puesto que no hemos considerado que existiera ningún contenido dentro del tipo "dibujos, esquemas y gráficos".

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

23. Derivada del logaritmo neperiano de una función, D(ln(f(x))).
24. (Imp) Derivada de la raíz n-ésima de una función, $D\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)$.
25. (Imp) Definición de punto crítico de una función.

Ejemplos:

14. (Imp) Ejemplo de derivación de la raíz enésima de una función: $D(\sqrt[3]{x^2})$.

Observaciones o comentarios de interés:

1. (Imp) Obtención del mismo resultado al derivar la raíz enésima de x^m como función potencial o aplicando la regla de la raíz enésima.

Unidad práctica (UP3):

De los tres aspectos considerados, y sobre el tema de derivada de una función, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

14. AELT: Pág. 195, ej. 42, apartado b (cálculo de la derivada y comprobación de que no se anula en ningún punto, corregido en esta misma sesión).
15. AELT: Pág. 195, ej. 42, apartado d (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 24/4/2012)
16. AELT: Pág. 195, ej. 30, apartado a (cálculo de la derivada de una función, corregido en la sesión del martes 24/4/2012).

17. AELT: Pág. 195, ej. 30, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 24/4/2012).

18. AELT: Pág. 195, ej. 34, apartado a (cálculo de la derivada de una función, corregido en la sesión del martes 24/4/2012).

19. AELT: Pág. 195, ej. 34, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 24/4/2012).

20. AELT: Pág. 195, ej. 37, apartado a (cálculo de la derivada de una función, corregido en la sesión del martes 24/4/2012).

21. AELT: Pág. 195, ej. 37, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del martes 24/4/2012).

Martes 24 de abril de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Corrección de ejercicios, Teoría.

Corrección de actividades pendientes: Página 195, ejercicio 42, apartado d; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por la alumna A31, que lo copia de su cuaderno.

Exposición teórica. Tema o conceptos explicados: Estudio de la monotonía y los extremos relativos de una f. polinómica.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

Con respecto a la primera parte de la sesión (corrección de actividades pendientes), la información extraída de los cuadernos de los alumnos hace que interpretemos que también se corrigen los seis ejercicios restantes que se plantearon en la sesión anterior: los apartados a y b de los ej. 30, 34 y 37 de la pág. 195. No obstante, no tenemos información sobre quién los corrigió, puesto que el docente no lo indica en su guion.

Además, consideramos que el docente realizó durante la corrección dos mejoras significativas al contenido de estas actividades, puesto que se enfatiza la posibilidad de derivar de dos formas distintas algunas de las funciones presentadas. En particular, se indica para la función del apartado a del ej. 30, $f(x) = \sqrt[3]{(x+6)^2}$, que puede derivarse como función potencial (exponente 2/3) o aplicando la regla para derivar la raíz enésima de una función. Lo mismo sucede con la función del apartado b del ej. 34, $f(x) = \ln(\sqrt{x})$, que puede derivarse como una función compuesta o aplicando, previamente, las propiedades de los logaritmos.

En la parte teórica, el estudio se hace a través de un ejemplo: $f(x)=x^3-x$, en el que se estudia el dominio, la derivada y su signo, la interpretación de la información y las propiedades sobre monotonía y extremos de la función. Como actividades para la próxima sesión, se plantean los apartados a y b del ej. 69 de la pág. 197, en la que se plantea un estudio similar.

<u>Unidad teórica (UT3):</u>

En el contenido de esta clase existieron elementos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

26. (Imp) Relación entre la derivada de una función y su crecimiento.
27. (Imp) Relación entre la derivada de una función y su decrecimiento.
28. (Imp) Estudio de los extremos relativos a partir de la monotonía.

Ejemplos:

15. (Imp) Ejemplo 1 de estudio de la monotonía y extremos relativos: $f(x)=x^3-3x$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

2. (Imp) Diagrama de signos de la derivada en uno de los ejemplos: $f(x)=x^3-3x$.

Observaciones o comentarios de interés:

2. (Imp) Necesidad de estudiar el dominio de f' al estudiar su signo (posibles cambios donde no esté definida).

<u>Unidad práctica (UP3)</u>:

De los tres aspectos considerados, en esta clase hubo mejoras en la corrección de algunos ejercicios y propuesta de actividades posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

1. En la corrección del apartado b del ej. 30 de la pág. 195: indicación y enfatización de las dos posibilidades de realizar la derivada: como función potencial o aplicando la regla de la derivada de la raíz enésima.

2. En la corrección del apartado b del ej. 34 de la pág. 195: indicación y enfatización de las dos posibilidades de realizar la derivada: aplicando la regla de la cadena o aplicando previamente las propiedades de los logaritmos (lo que reduce la dificultad de la derivada).

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

22. AELT: Pág. 197, ej. 69, apartado a (estudio de la monotonía y extremos en una función polinómica, corregido en la sesión del 25/4/2012).

23. AELT: Pág. 197, ej. 69, apartado b (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del 25/4/2012).

Miércoles 25 de abril de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos de guion rellenado de esta clase.

Información adicional de interés:

Dado que no disponemos del guion del docente, hemos interpretado el contenido y desarrollo de la clase a partir de la información proporcionada informalmente por el docente, y del contenido existente en los cuadernos de los alumnos (por tanto, hay que tener mayor cautela con esta interpretación).

En la primera parte de la clase, se realiza la corrección de las dos actividades propuestas en la sesión anterior: el estudio de la monotonía y los extremos en dos funciones polinómicas (apartados a y b, ej. 69, p. 197).

Posteriormente, se retoma la teoría de este tema, presentándose el estudio de la monotonía y los extremos relativos en una función racional. Como en la sesión anterior, se ilustra el método a través de su aplicación en un ejemplo: $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$. En la parte final se plantearon como actividades para la próxima sesión: los apartados b y f del ej. 75 de la pág. 198, en la que se plantea un estudio similar al desarrollado en el aula, añadiendo el estudio de la existencia o no de asíntotas y la representación gráfica de dichas funciones.

Unidad teórica (UT3):

En el contenido de esta clase existieron elementos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

26. Relación entre la derivada de una función y su crecimiento (otra vez, enfatizado ahora en el estudio de una función racional).
27. Relación entre la derivada de una función y su decrecimiento (otra vez, enfatizado ahora en el estudio de una función racional).
28. Estudio de los extremos relativos a partir de la monotonía (otra vez, enfatizado ahora en el estudio de una función racional).

Ejemplos:

16. (Imp) Ejemplo 2 de estudio de la monotonía y extremos relativos: $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$.

Dibujos, esquemas y gráficos:

3. (Imp) Diagrama de signos de la derivada en uno de los ejemplos: $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$.

Observaciones o comentarios de interés:

3. (Imp) Necesidad de que el punto esté en el dominio de la función para que pueda ser máximo o mínimo.

<u>Unidad práctica (UP3)</u>:

De los tres aspectos considerados, y sobre el tema de derivada de una función, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

24. AELT: Pág. 198, ej. 75, apartado b (estudio y representación de funciones racionales, corregido en la sesión del 27/4/2012).
25. AELT: Pág. 198, ej. 75, apartado f (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del 27/4/2012).

Viernes 27 de abril de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

<u>Información tomada del guion rellenado por el docente</u>:

Momentos de la clase: Corrección de ejercicios.

Corrección de actividades pendientes: Página 198, ejercicio 75, apartado b; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por las alumnas A33 y

A32, que lo copian de su cuaderno. Página 198, ejercicio 75, apartado f; corregido en la pizarra (combinado con la explicación oral) por la alumna A31, que lo copia de su cuaderno.

Información adicional de interés:

Derivada de la observación de la clase.

La clase de hoy aparenta ser un poco especial, puesto que hay personas de la clase de 1º Bachillerato (modalidad Científico-Tecnológica), a las que parece que se les están corrigiendo algunas dudas. Además, algunas alumnas se ausentan de esta clase, como A37 y A41 (debido a la revisión de un examen por parte de otro profesor).

Como comenta el docente en su guion, la clase se dedica principalmente a la corrección de las dos actividades pendientes. La corrección de los dos apartados se realiza simultáneamente, primeramente con las alumnas A33 (para el apartado b) y A31 (para el apartado f), en la pizarra.

Primeramente, es revisada la parte correspondiente al cálculo del dominio, de la derivada, de los puntos críticos y el signo de la derivada, para obtener los intervalos de monotonía y los extremos relativos. Posteriormente, pasa a estudiarse la existencia o no de asíntotas y la información para obtener una representación de la función. La alumna A31 completa satisfactoriamente el ejercicio, pero la alumna A33 había cometido un error en sus cálculos. Por esta razón, el docente indica que la alumna se siente para poder aclarar sus errores, siguiendo la alumna A32 con el cálculo de asíntotas.

En ambos casos, es el profesor el que termina realizando la representación gráfica de la función a partir de toda la información obtenida. Además, consideramos que el docente realiza una mejora significativa al contenido de la actividad en este momento, puesto que indica la posibilidad de obtener información sobre la posición de la función respecto de las asíntotas y de la posible existencia de puntos de inflexión a partir de la información obtenida sobre monotonía (necesidad de que sea compatible con ésta).

En la última parte de la clase, el docente plantea el mismo estudio con la función del apartado j de ese mismo ejercicio (ej. 75, pág. 198). Los alumnos comienzan a trabajarlo en el aula, comenzándose la corrección del mismo en la parte final por parte del docente (llega a calcularse la derivada).

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP3):

De los tres aspectos considerados, en esta clase hubo mejoras en la corrección de algunos ejercicios y propuesta de actividades posteriormente corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

3. y 4. En la corrección de los apartados b y f del ej. 75 de la pág. 198: indicación de la posibilidad de obtener información tanto sobre la posición de la función respecto de las asíntotas como de la posible existencia de puntos de inflexión a partir de la información obtenida sobre monotonía (y de la necesidad de que la función sea compatible con esa información ya obtenida)

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

26. AELT: Pág. 198, ej. 75, apartado j (estudio y representación de funciones racionales, comienza a corregirse en esta misma sesión, corrección que termina el lunes 30/4/2012).

Lunes 30 de abril de 2012 (Hora: 08:30 a 09:25)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

Momentos de la clase: Recta tg. a una función en un punto.

Exposición teórica: Se usan ejemplos personales, no tomados del libro, que son explicados con la ayuda de la pizarra: recta tg. a $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ en x=-1.

Realización de ejercicios en clase por los alumnos: Se proponen dos ejercicios para su realización en la propia clase por parte de los alumnos en sus cuadernos, y que son corregidos posteriormente. Ambos tomados del libro: pg. 198, ejercicio 77 y 78. Son corregidos en la pizarra (combinado con su explicación oral) por el profesor.

Información adicional de interés:

Complementamos algunos aspectos del guion.

El contenido de los cuadernos de los alumnos nos lleva a constatar que, en la primera parte de la sesión, se termina la corrección del apartado j del ej. 75 de la pág. 198 (corrección pendiente de la sesión anterior, viernes 27/4/2012).

Retomando la teoría, se explica cuál es la ecuación de la recta tangente a una función en un punto, en la forma punto-pendiente, con la ayuda de un gráfico aclaratorio. Además, se realiza un ejemplo de cálculo. Posteriormente, y como indica el profesor en su guion, se proponen y desarrollan en clase dos actividades relacionadas con el cálculo de rectas tangentes. En la parte final de la clase, se proponen otras dos actividades para la próxima sesión, también sobre esta misma temática (ejercicios 44 y 45 de la pág. 196 del libro de texto).

Unidad teórica (UT3):

En el contenido de esta clase existieron elementos de los cuatro tipos.

Definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones:

29. (Imp) Ecuación de la recta tangente a una función en un punto (en la forma punto-pendiente).

Ejemplos:

17. (Imp) Ejemplo de cálculo de la ecuación de la recta tangente: $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ en x=-1.

Dibujos, esquemas y gráficos:

4. (Imp) Gráfica aclaratoria de la recta tangente a una función en un punto.

Observaciones o comentarios de interés:

4. (Imp) El punto de tangencia es común a la función y a la recta tangente en ese punto.

Unidad práctica (UP3):

De los tres aspectos considerados, y sobre el tema de derivada de una función, en esta clase únicamente hubo actividades propuestas y posteriormente corregidas.

Actividades propuestas y posteriormente corregidas:

27. AELT: Pág. 198, ej. 77 (cálculo de rectas tangentes con algunas propiedades, corregido en esta misma sesión).

28. AELT: Pág. 198, ej. 78 (cálculo de parámetros en una función polinómica para que algunas rectas tangentes tengan ciertas propiedades, corregido en esta misma sesión).

29. AELT: Pág. 196, ej. 44 (cálculo de rectas tangentes, corregido en la sesión del miércoles 2/5/2012).
30. AELT: Pág. 196, ej. 45 (mismo propósito anterior, corregido en la sesión del miércoles 2/5/2012).

Miércoles 2 de mayo de 2012 (Hora: 13:35 a 14:30)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos de más guiones rellenados por el docente. No obstante, la de hoy es la última clase lectiva correspondiente al contenido de este tema, y también es la última clase anterior al periodo de exámenes fijado por el centro (del jueves 3/5/2012 hasta el martes 8/5/2012) en el que se suspenden las clases para realizar los exámenes parciales de la tercera evaluación (entre ellos, el examen de matemáticas).

Información adicional de interés:

Dado que no disponemos del guion del docente, hemos interpretado el contenido y desarrollo de la clase a partir de la información proporcionada informalmente por el docente y del contenido existente en los cuadernos de los alumnos (por tanto, hay que tener mayor cautela con esta interpretación).

En la primera parte de la sesión, se corrigieron los ejercicios pendientes para hoy: ej. 44 y 45 de la pág. 196, que tratan el cálculo de la recta tangente a una función en un punto. No tenemos información sobre quién los corrigió. Sí que consideramos que el docente introdujo una mejora significativa al contenido de la actividad durante su corrección, puesto que se calcula la ecuación de la recta tangente tanto de forma implícita como de forma explícita, recordando así ambos tipos de ecuaciones de una recta.

La segunda parte de la sesión se dedicó a la resolución de dudas para el próximo examen, en el que los contenidos serán los propios de este bloque de análisis matemático (los tres temas).

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún elemento o aspecto teórico nuevo.

Unidad práctica (UP3):

Existió una mejora en una de las actividades corregidas.

Mejoras significativas durante la corrección de actividades:

5. En la corrección del ej. 44 de la pág. 196: escritura de la ecuación de la recta tangente en dos formas distintas: utilizando la ecuación de la recta explícita y la implícita.

Periodo de exámenes parciales (3ª ev.): del jueves 3/5/2012 al martes 8/5/2012

<u>Información tomada del guion rellenado por el docente</u>:

El docente nos proporcionó los enunciados de los ejercicios del examen. El examen constaba de seis preguntas, todas ellas con la misma valoración, y todas ellas del bloque de análisis matemático.

El enunciado de las actividades del examen fueron las siguientes:

1. Considera las siguientes funciones: $f(x) = \sqrt{x+3}$ *y* $g(x) = \frac{2}{x}$

(a) Calcula el dominio de f(x)

(b) Calcula el dominio de $(g \circ f)(x)$

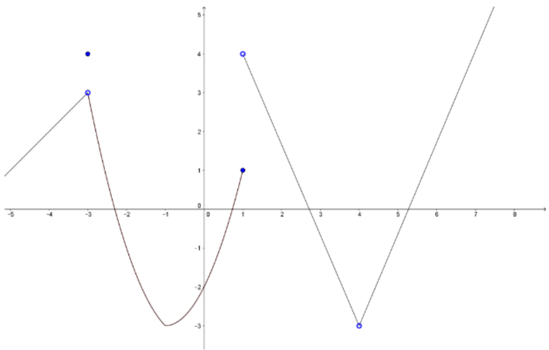
2. Calcula los siguientes límites:

(a) $lím_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{x^2+3}$

(b) $lím_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

3. (a) Indica los tipos de discontinuidades que pueden existir en una función.

(b) Indica las discontinuidades de la siguiente función y clasifica las mismas.



4. Calcula el valor de k para que la función f sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x, & si\ x \leq -1 \\ (3+k)\cdot x, & si\ x > -1 \end{cases}$$

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones, simplificando lo máximo posible la expresión obtenida:

(a) $f(x)=x^2 \cdot e^{1-x}$

(b) $g(x)=cos(3x-x^2)$

6. Considera la función $f(x)=x^3-3x^2-9x+34$

(a) Calcula los extremos relativos de la función f.

(b) Calcula la ecuación de la recta tangente con pendiente -12.

Información adicional de interés:

No conocemos qué día de los destinados a exámenes fue el día en que se realizó el examen de matemáticas.

Unidad teórica (UT3):

No se introdujo ningún contenido teórico nuevo en esta sesión.

Unidad práctica (UP3):

No se planteó ni se corrigió ninguna actividad durante esta sesión (que pueda estar en el cuaderno de los alumnos).

Periodo posterior al de exámenes parciales (tercera evaluación)

Información tomada del guion rellenado por el docente:

No disponemos.

Información adicional de interés:

Se realizó en el aula la corrección de las actividades del examen, antes de comenzar con los siguientes bloques de contenido (en este caso, estadística). Consideramos en nuestro análisis que los dos ejercicios relacionados con el último tema (los ejercicios 5 y 6) juegan la función de ejercicios resueltos a modo de ejemplo dentro de este tema. El resto de ejercicios, al pertenecer a temas anteriores, no se han considerado en este análisis.

Unidad teórica (UT3):

En esta sesión se explicaron contenidos de dos tipos: ejemplos y dibujos, esquemas y gráficos.

Ejemplos:

18. Resolución del ej. 5 del examen parcial (segundo) de la 3ª evaluación.
19. Resolución del ej. 6 del examen parcial (segundo) de la 3ª evaluación.

Dibujos, esquemas y gráficos:

5. Diagrama de signos de la derivada en el ej. 6 del examen parcial (segundo) de la 3ª evaluación.

Unidad práctica (UP3):

No se planteó ninguna actividad más sobre este tema en este periodo, ni se realizó ninguna mejora significativa en las actividades corregidas.

ANEXO C

Anexos relacionados con el proceso de análisis de los cuadernos (Capítulo IV)

En este conjunto de anexos hemos recogido información relacionada con el análisis pormenorizado de los cuadernos de los alumnos que se ha desarrollado, así como algunos ejemplos que ilustran el desarrollo del análisis y el producto obtenido como desarrollo de dicho análisis.

El Anexo C consta de ocho anexos específicos, cuyo contenido es:

- El Anexo C.1 recoge un ejemplo de cuaderno de un estudiante. En concreto, se recoge el escaneo de las fotocopias del tema de funciones elementales (primer tema) en el cuaderno de la alumna A14.

- El Anexo C.2 recoge un ejemplo del análisis realizado por el EI sobre las propias fotocopias de los cuadernos. En concreto, se presenta el escaneo de la parte correspondiente al tema de límites en el cuaderno del alumno A10 junto con las anotaciones realizadas por el EI en el desarrollo del análisis pormenorizado teniendo en cuenta el marco de análisis utilizado.

- El Anexo C.3 contiene la plantilla para las UT que se ha utilizado como base para el desarrollo del análisis de tales unidades. Dicha plantilla contiene tablas para las diferentes dimensiones, variables e indicadores, para marcar la valoración de cada indicador y, posteriormente, recoger los detalles del análisis de la unidad que explican o justifican cada valoración.

- En el Anexo C.4 se presenta la plantilla para las UP que se ha utilizado como base para el desarrollo del análisis de tales unidades, y que tiene una estructura similar a la plantilla para las UT.

- El Anexo C.5 contiene un ejemplo de plantilla para UT rellenada, fruto del desarrollo del análisis de una unidad concreta. En este caso, es la plantilla correspondiente a la unidad teórica UT1 de la alumna A14.

- El Anexo C.6 contiene un ejemplo de plantilla para UP rellenada, fruto del desarrollo del análisis de una unidad concreta. En este caso, es la plantilla correspondiente a la unidad práctica UP1 de la alumna A14.

- El Anexo C.7 contiene otro ejemplo de plantilla para las UT rellenada por el EI, fruto del desarrollo del análisis pormenorizado de una unidad. En este caso, es la plantilla correspondiente a la unidad teórica UT2 del alumno A10.

- En el Anexo C.8 se presenta otro ejemplo de plantilla para las UP rellenada por el EI, fruto del desarrollo del análisis pormenorizado de una unidad. En este caso, es la plantilla correspondiente a la unidad práctica UP2 del alumno A10.

ANEXO C.1

Este anexo muestra un ejemplo del tipo de datos principales que hemos recogido en esta investigación: las fotocopias de los cuadernos de los alumnos, en la parte correspondiente al bloque de Análisis Matemático. En particular, se presenta aquí el escaneo de las fotocopias correspondientes al tema de funciones elementales (primero de los temas del bloque) y pertenecientes al cuaderno de la alumna A14.

Tema 4: funciones elementales

ALUMNA A14

① Concepto definición

En el estudio de los fenómenos naturales se introducen variables. Por ejemplo espacio, tiempo velocidad, altura sobre el n. del mar, presión atmosférica, temperatura etc.

Las funciones relacionan dos o más de estas variables. Nosotros estudiaremos las que relacionan dos variables. Una de ellas tomará valores libremente (variable independiente) y la otra tomará valores que dependen de los de la primera ("dependiente).

Una función puede venir dada de 3 formas diferentes: mediante una tabla de valores, una gráfica o mediante una expresión analítica ($y=\sqrt{x}$).

En ocasiones podremos pasar fácilmente de una determinación a otra

Tabla de valores a gráfica

x	y
1	1
2	4
5	13

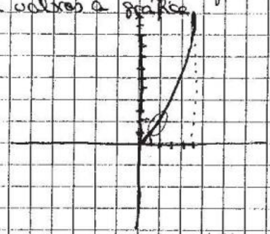
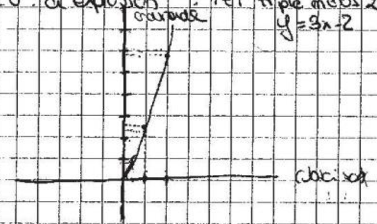


Tabla de v. a expresión: 1Ej triple menos 2
$y=3x-2$

x	y
1	1
2	4
5	13
10	28



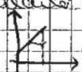
Gráfica

② Las funciones elementales:

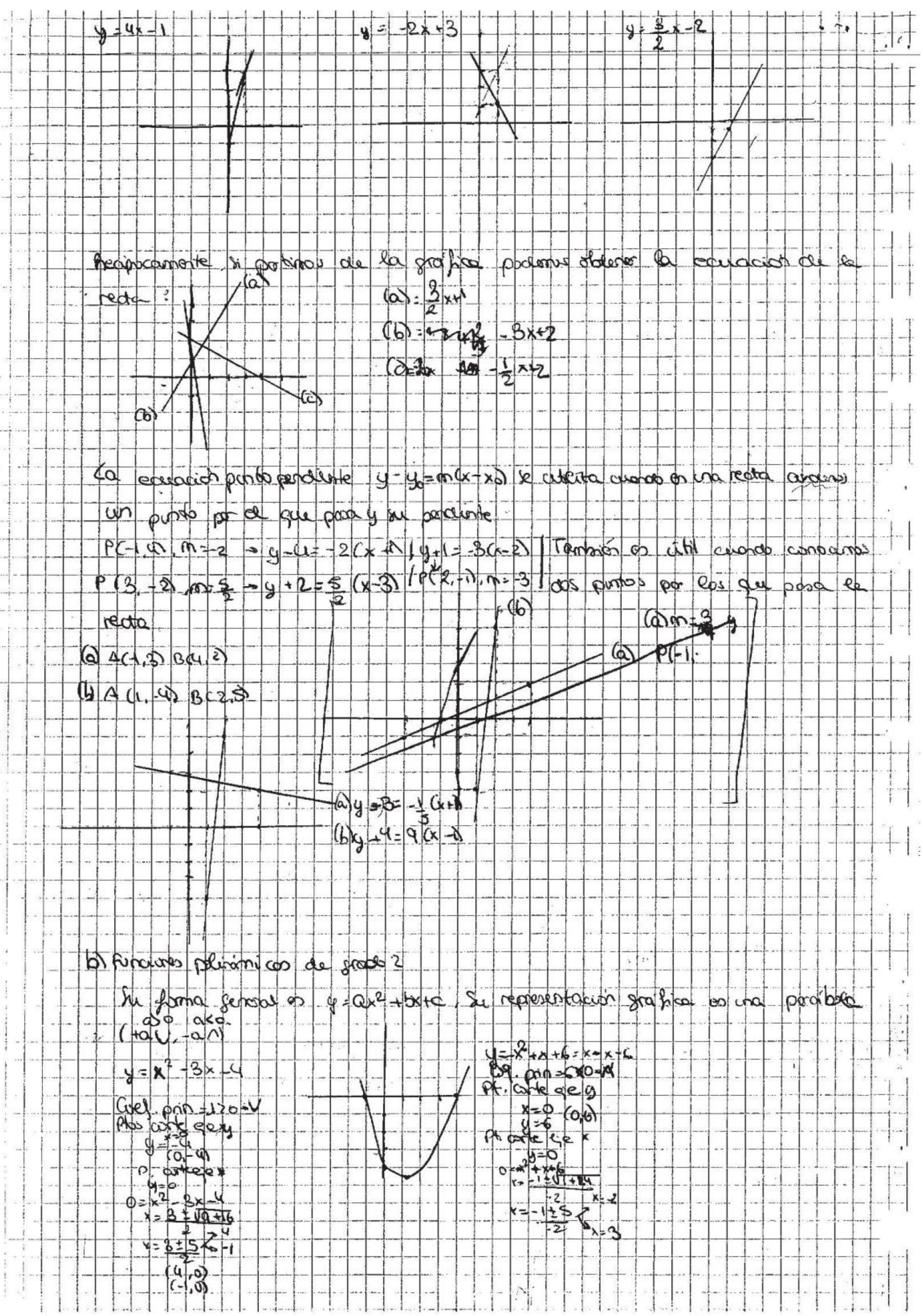
Se denominan así a las funciones más sencillas. A partir de ellas mediante las operaciones con funciones se puede construir una clase más amplia de funciones. Se consideran funciones elementales las siguientes: polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas

③ Funciones polinómicas:

a) Grado 1: $y=mx+n$. Su gráfica es una recta para determinarla basta con conocer 2 puntos.

La pendiente 'm' es lo que varía la 'y' (aumenta o disminuye) cuando la 'x' aumenta 1 ud. De otra forma para calcular la pendiente dividimos la longitud del cat. vertical entre la del horizontal: . Coincide con la tag. trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje de abcisas.

Dada la expresión $y=mx+n$. Podemos representar la recta interpretando los coeficientes



$y = 4x - 1$ $y = -2x + 3$ $y = \frac{3}{2}x - 2$

Recíprocamente, si partimos de la gráfica podemos obtener la ecuación de la recta?

(a): $\frac{3}{2}x+1$

(b): $-3x+2$

(c): $-\frac{1}{2}x+2$

La ecuación punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$ se utiliza cuando en una recta conocemos un punto por el que pasa y su pendiente.

$P(-1,4), m=-2 \rightarrow y-4 = -2(x+1)$ | $y+1 = -3(x-2)$

$P(3,-2), m=\frac{5}{2} \rightarrow y+2 = \frac{5}{2}(x-3)$ | $P(2,-1), m=-3$

También es útil cuando conocemos dos puntos por los que pasa la recta

(a) $A(-1,3)$ $B(4,2)$

(b) $A(1,-4)$ $B(2,5)$

(a) $y-3 = -\frac{1}{5}(x+1)$

(b) $y+4 = 9(x-1)$

b) Funciones polinómicas de grado 2

Su forma general es $y = ax^2+bx+c$. Su representación gráfica es una parábola

$y = x^2 - 3x - 4$

$y = -x^2 + x + 6$

Pts. corte eje y: $x=0$, $y=-4$, $(0,-4)$

Pts. corte eje x: $y=0$, $0 = x^2-3x-4$, $x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$, $x = \frac{3\pm5}{2}$, $(4,0)$, $(-1,0)$

Pt. corte eje y: $x=0$, $y=6$, $(0,6)$

Pt. corte eje x: $y=0$, $0=-x^2+x+6$, $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-2}$, $x = \frac{-1\pm5}{-2}$, $x=-2$, $x=3$

Pag 106

② a) $y = x^2 - 2x + 3$

Coef princ $= 1 > 0 \to \vee$

Ptos corte eje y

$x = 0$

$y = 3 \quad (0,3)$

eje x

$y = 0$

$0 = x^2 - 2x + 3$

$x = 2 \pm \sqrt{4}$

b) $y = -x^2 - 2x - 3$

Coef. princ $= +3 \cancel{x} 0 \to \vee$

Ptos corte eje y

$x = 0$

$(0, -3)$

Pto corte eje x

$y = 0$

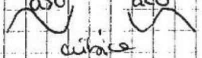
$+ \mid x^2 + 2x \mid 3 = 0$

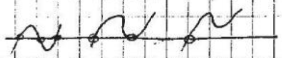
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$

$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$ ↗ $x = 1 \quad (1,0)$ ↘ $x = -3 \quad (-3,0)$

c) De tercer grado

Su exp. general → $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Su representación gráfica es una curva que se llama cúbica →





$y = x^3 - x^2 - 6x + 0 \to y = x(x^2 - x - 6) \to y =$

Coef pric $= 1 > 0 \to \sim$

Ptos corte eje y

$x = 0$

$y = 0$

$(0,0)$

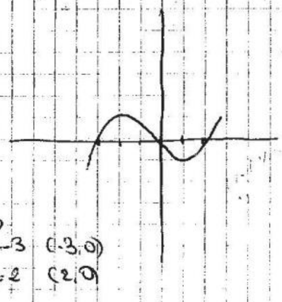
x

$y = 0$

$x^3 - x^2 - 6x = 0$

$x(x^2 - \cancel{6}x - 6x) = 0$ ↗ $x = 0$ ↘ $x^2 - x - 6 = 0$

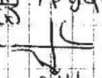
$x = \frac{1 \pm 5}{-2}$ ↗ $x = -3 \quad (-3,0)$ ↘ $x = 2 \quad (2,0)$



③ Funciones racionales

Se llaman así a los que son cociente de 2 polinomios $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P y Q polinomios

$y = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 2x - 1}$ Su gráfica → $\left(y = \frac{1}{x}\right)$ es una curva hipérbola



④ Fun. con expresiones radicales

$y = \sqrt{x} \to$ inversa $\to y = x^2$

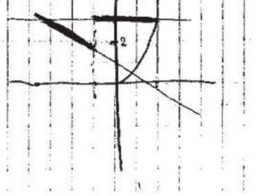
$y = \sqrt[3]{x}$

Las gráficas de las funciones que son inversas una de otra son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante

⑤ Funciones definidas a trozos

Se llaman así a las funciones que están definidas mediante varias expresiones analíticas válidas en un intervalo

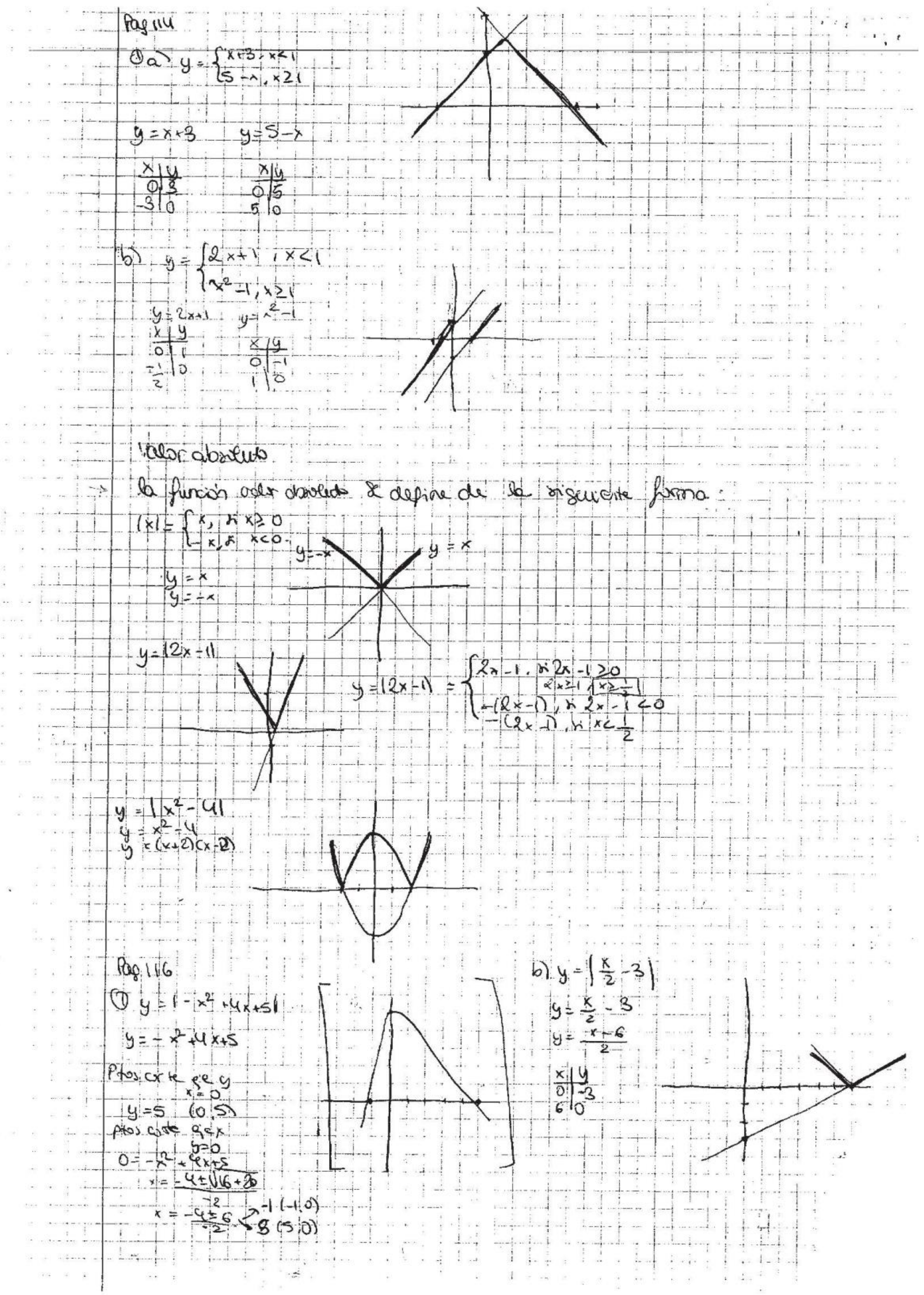
$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{si } x \leq -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x^2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$



$y = -x + 1$

$y = 3$

$y = x^2$



Pag 114

1 a) $y = \begin{cases} x+3, & x<1 \\ 5-x, & x\geq 1 \end{cases}$

$y = x+3$ $y = 5-x$

x	y
0	3
-3	0

x	y
0	5
5	0

b) $y = \begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ x^2-1, & x\geq 1 \end{cases}$

$y = 2x+1$ $y = x^2-1$

x	y
0	1
$-\frac{1}{2}$	0

x	y
0	-1
1	0

Valor absoluto

La función valor absoluto se define de la siguiente forma:

$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x\geq 0 \\ -x, & \text{si } x<0 \end{cases}$

$y = -x$ $y = x$

$y = x$

$y = -x$

$y = |2x-1|$

$y = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } 2x-1\geq 0 \quad 2x\geq 1 \quad x\geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1), & \text{si } 2x-1<0 \\ -(2x-1), & \text{si } x<\frac{1}{2} \end{cases}$

$y = |x^2-4|$

$y = x^2-4$

$y = (x+2)(x-2)$

Pag 116

1 $y = |-x^2+4x+5|$

$y = -x^2+4x+5$

Ptos corte eje y $x=0$

$y=5$ $(0,5)$

Ptos corte eje x $y=0$

$0 = -x^2+4x+5$

$x = \frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{-2}$

$x = \frac{-4\pm 6}{-2}$ → -1 $(-1,0)$; 5 $(5,0)$

b) $y = \left|\frac{x}{2}-3\right|$

$y = \frac{x}{2}-3$

$y = \frac{x-6}{2}$

x	y
0	-3
6	0

① $y = |-x^2+4x+5|$

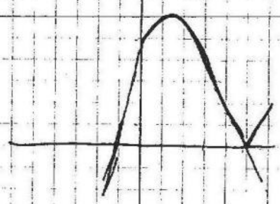
$y = -x^2+4x+5$

Ptos corte eje x: $y=0$ — eje y: $x=0$, $y=5$, $(0,5)$

$0 = -x^2+4x+5$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{-2}$

$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$ → $x_1 = -1$ $(-1,0)$; $x_2 = 5$ $(5,0)$

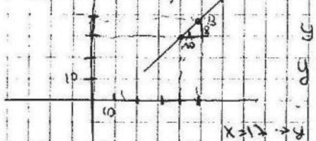


② Interpolación lineal

Cuando no conocemos completamente una función o bien conociéndola es complicado calcular con ella se aproxima mediante una función más sencilla. Como clase de funciones aproximadoras se pueden tomar los polinomios.

Una forma de aproximación es la interpolación. Consiste en sustituir una función por otra que coincida con la primera en una serie de puntos. El caso más sencillo es la interpolación lineal, en la que la función interpolada es un polinomio de grado 1. Por lo tanto la gráfica de la función desconocida se sustituye por una recta que coincide con ella en 2 puntos.

Simplificando vamos a resolver el siguiente problema: de una función conocemos que pasa por esos puntos A(40,30) y B(50,38). Vamos a sustituir su gráfica por la recta que pasa por esos 2 puntos



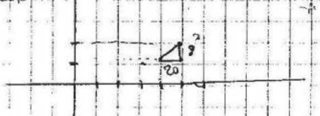
$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 30 = \frac{8}{10}(x - 40)$

Pag. 109

Ej resuelto ①

$A = (40,12)$
$B = (60,20)$



a) $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 12 = \frac{8}{20}(55 - 40)$

$y = \frac{8}{20}(x - 40) + 12$

$y = \frac{8x - 320}{20} + 12$

$y = \frac{8x - 320 + 240}{20}$

$y = \frac{8x - 80}{20}$

$\boxed{y = 18\,mm}$

b) $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 12 = \frac{8}{20}(100 - 40)$

$y = \frac{800 - 320}{20} + 12$

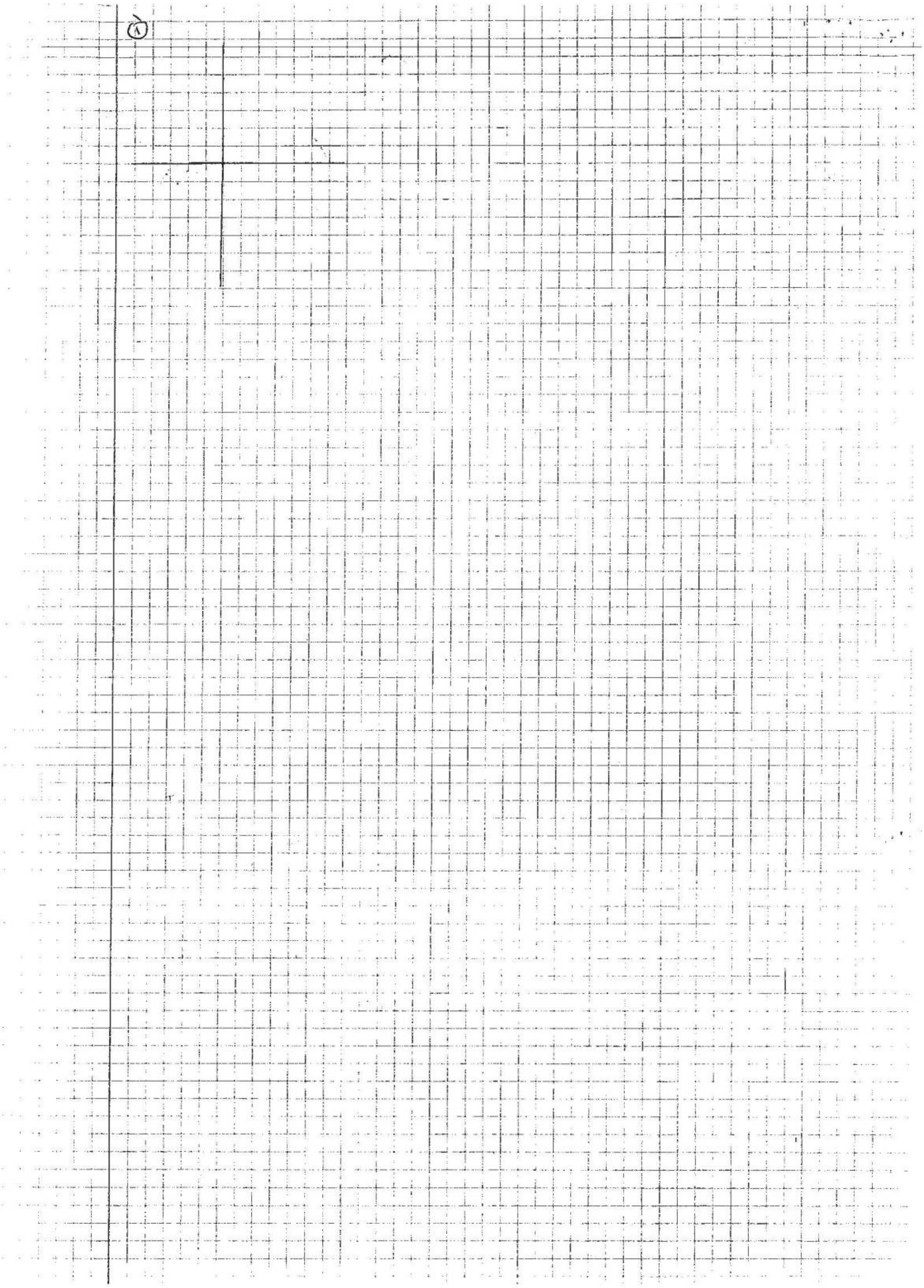
$y = \frac{800 - 80}{20}$

$\boxed{y = 36\,mm}$

c) $y - y_0 = m(x - x_0)$

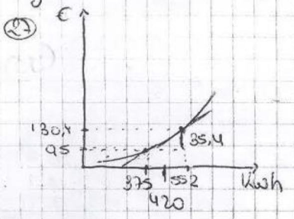
$y - 12 = \frac{8}{20}(4965)$

$\boxed{y = 1996\,mm}$



Pág 125

(27)



Ecuación de la recta

$y - y_0 = m(x - x_0)$

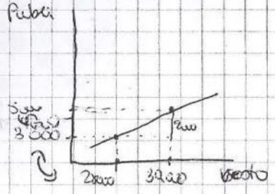
$y - 95 = \frac{130,4 - 95}{552 - 375}(x - 375)$

$y - 95 = 0,2x - 75$

$y = 0,2x + 20$

$x = 420 \Rightarrow y = 0,2 \cdot 420 + 20 = \boxed{104€}$

(28) Public.



$y - y_0 = m(x - x_0)$

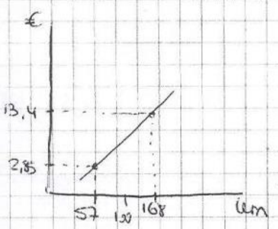
$y - 28000 = \frac{11000}{2000}(x - 3000)$

$y - 28000 = 5,5(x - 3000)$

$y = 5,5x + 11500$

$x = 4700 \rightarrow y = 5,5 \cdot 4700 + 11500 = 37350$ €

(29)



$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 2,85 = \frac{13,4 - 2,85}{168 - 57}(x - 57)$

$y - 2,85 = 0,09x - 5,4$

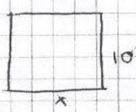
$y = 0,09x - 2,55$

$x = 100$

$y = 0,09 \cdot 100 - 2,55$

$\boxed{y = 6,75 €}$

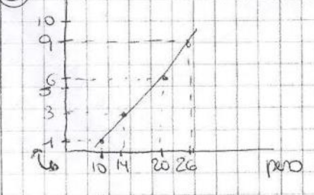
(30) 20 cm perímetro.



$0 \leq x < 10$

$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$

(31)



$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 1 = \frac{9 - 1}{26 - 10}(x - 10)$

$y - 1 = 0,5x - 5$

$y = 0,5x - 4$

$x = 5 \Rightarrow y = 0,5 \cdot 5 - 4$

$y =$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 10 = \frac{16}{8}(x - 1)$

$y = 2x + 8$

$x = 5 \Rightarrow y = 2 \cdot 5 + 8$

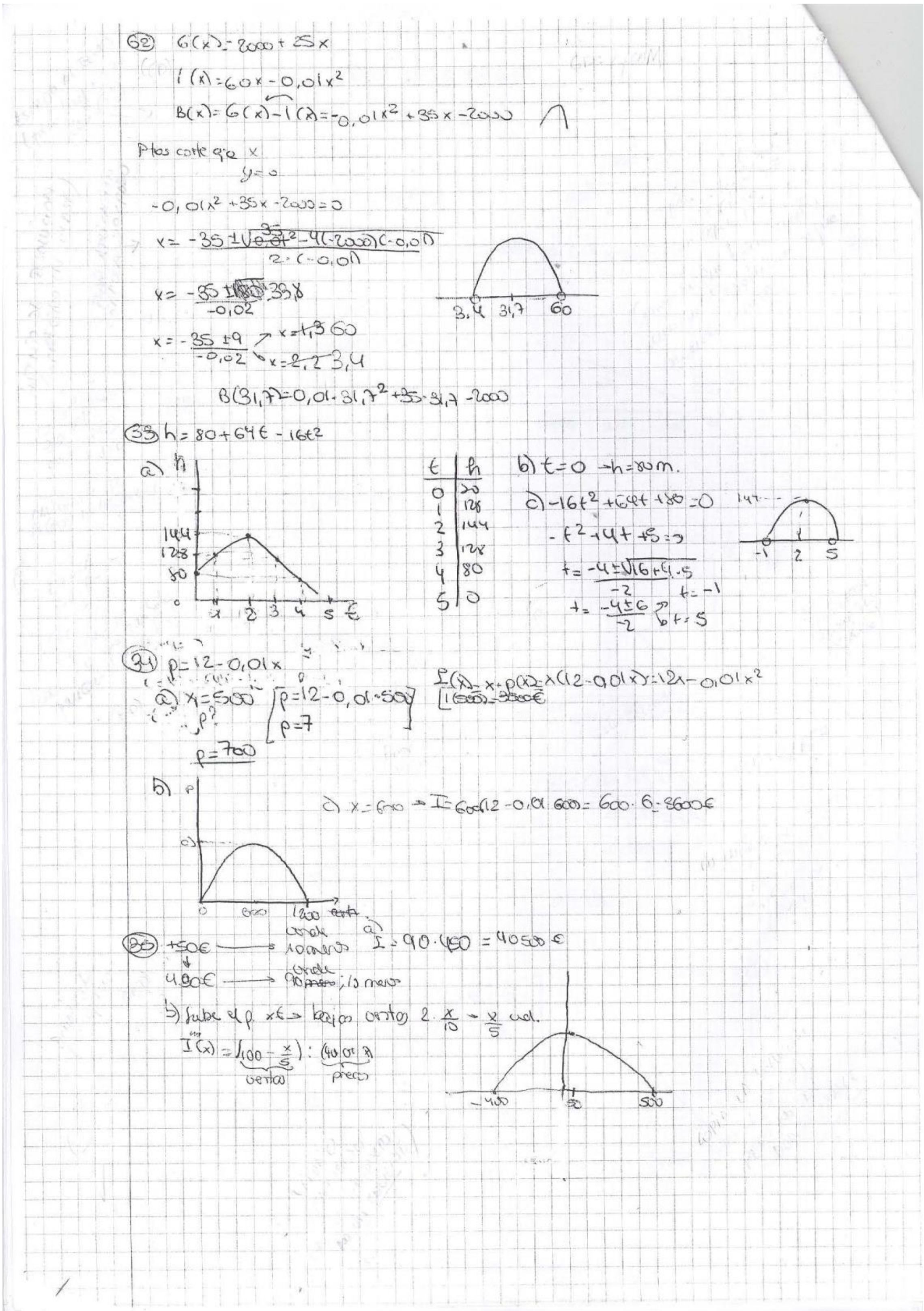
$\boxed{y = 18}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y = 2x + 8$

$x = 10 \Rightarrow y = 2 \cdot 10 + 8$

$\boxed{y = 28}$



(32) $G(x)=2000+25x$

$I(x)=60x-0{,}01x^2$

$B(x)=G(x)-I(x)=-0{,}01x^2+35x-2000$

Ptos corte eje x
$y=0$

$-0{,}01x^2+35x-2000=0$

$x=\frac{-35\pm\sqrt{35^2-4(-2000)(-0{,}01)}}{2\cdot(-0{,}01)}$

$x=\frac{-35\pm\sqrt{1225}}{-0{,}02}$ 33,8

$x=\frac{-35\pm 9}{-0{,}02}$ $x=1{,}3$ 60; $x=2{,}2$ 3,4

3,4 31,7 60

$B(31{,}7)=-0{,}01\cdot 31{,}7^2+35\cdot 31{,}7-2000$

(33) $h=80+64t-16t^2$

a) h

144 128 80 0 1 2 3 4 5 t

t	h
0	80
1	128
2	144
3	128
4	80
5	0

b) $t=0 \rightarrow h=80$ m.

c) $-16t^2+64t+80=0$

$-t^2+4t+5=0$

$t=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot 5}}{-2}$

$t=\frac{-4\pm 6}{-2}$ $t=-1$; $t=5$

144 -1 2 5

(34) $p=12-0{,}01x$

a) $x=500$ ¿p? $p=12-0{,}01\cdot 500$; $p=7$

$p=700$

$I(x)=x\cdot p(x)=x(12-0{,}01x)=12x-0{,}01x^2$

$I(500)=3500$€

b) p

0 600 1200

c) $x=600 \rightarrow I=600(12-0{,}01\cdot 600)=600\cdot 6=3600$€

(35) +50€ ⟶ 10 menos (vende)

450€ ⟶ 90 pares (vende); 10 menos

a) $I=90\cdot 450=40500$ €

b) Sube el p. x€ ⟹ bajan ventas $2\cdot\frac{x}{10}=\frac{x}{5}$ ud.

$I(x)=\underbrace{\left(100-\frac{x}{5}\right)}_{\text{ventas}}\cdot\underbrace{(400+x)}_{\text{precio}}$

-400 50 500

Tema 5: funciones elementales. Continuación

① Funciones exponenciales.

A partir de la gráfica podemos deducir algunas propiedades: su dominio es todo $\mathbb{R}$, sólo toma valores positivos, todas pasan por el punto $(0,1)$, se trata de funciones crecientes, no tiene máximos ni mínimos, sus límites son $(\infty, 0)$

② Funciones logarítmicas

$\log_a(x) = y \longleftrightarrow a^y = x$

y esto quiere decir que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial con la misma base. $\rightarrow \log_2(x) = y \longleftrightarrow 2^y = x$. Como las gráficas de 2 funciones que son inversa una de otra son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, conocida la gráfica de la función exponencial podemos representar la correspondiente función logarítmica.

$(1, \infty)$ $(0, 1)$

Propiedades: su dominio es $(0, \infty)$, toma valores positivos y negativos, todas pasan por el punto $(1, 0)$, son funciones crecientes ~~(y decrecientes las otras)~~, no tiene ni máximos ni mínimos, sus límites son $(-\infty, \infty)$, su recorrido es $(-\infty, +\infty)$

Pág 144

⑮ $y = k a^x$ $(0; 0{,}5)$ y $(1; 1{,}7)$

$y = 0{,}5$ $\quad 0{,}5 = ka^1$
$x = 0$

$y = 1{,}7$ $\quad 1{,}7 = ka^2$
$x = 1$

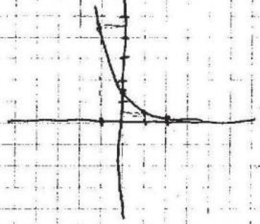
$$\left.\begin{matrix} 0{,}5 = ka \\ 1{,}7\ ka^2 \end{matrix}\right\} k = \frac{0{,}5}{a}$$

$0{,}5 = k \cdot a^0 = k, k = 0{,}5 \rightarrow y = 0.5\ a^x$

$1{,}7 = \frac{0{,}5}{a} \cdot a^2 \rightarrow a = \frac{1{,}7}{0{,}5} = 3{,}4 \rightarrow k = \frac{0{,}5}{3{,}4} = 1{,}4$

b) $y = 1{,}4 \cdot 0{,}3^x$ $\quad y = k \cdot a^x$

x	y
-1	4,6
0	1,4
1	0,4
2	0,1



$1{,}4 = \frac{0{,}5}{a}$

$1{,}4a = 0{,}5$

$a = \frac{0{,}5}{1{,}4}$

$a = 0{,}4$

⑯ inflación = 4% años: 5 hoy

12000€ $\quad$ 12000€

$12000 \xrightarrow[1{,}04]{+4\%} 1{,}04 \cdot 12000 \xrightarrow[1{,}04]{+4\%} 1{,}04^2 \cdot 12000 \ldots$

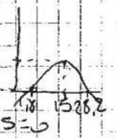
x años: $12000 \cdot 1{,}04^x$; $x = 5 \rightarrow 12000 \cdot 1{,}04^5 = 14599{,}83$

36) $(1/4)x^2 + 35x + 25 \rightarrow$ coste

$50 - x/4 \rightarrow$ precio de 1ud

a) $B(x) = I(x) - C(x) = x\left(50 - \frac{x}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x^2 + 25\right) = \underbrace{-\frac{1}{2}x^2 + 15x - 25}_{\text{Beneficios.}}$

$I(x) = x \cdot P(x) = x\left(50 - \frac{x}{4}\right) = 50x - \frac{1}{4}x^2$

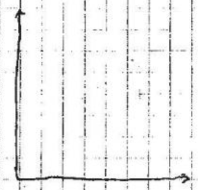


b) $-\frac{1}{2}x^2 + 15x - 25 = 0$

$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 50}}{-1}$

$x = \frac{-15 \pm 13,2}{-1}$ $x = 1,8$; $x = 28,2$

37)



$h = 1200$ m

base : 0 m → 10°C

$T(x) = 10 - 1 \cdot \frac{x}{180} = \underbrace{10 - \frac{x}{180}}_{\text{Temperatura.}}$

1200 : 180 ≈ 6,7 °C baja

10 °C − 6,7 °C = 3,3 °C

27) pág 44

10000 € $C_1 =$

8,4 % anual → $\frac{8,4}{12}$ % mensual $= \frac{8,4}{12} = 0,7$ %

m meses. pago mensual

$10000 \xrightarrow{+0,7} 1,007 \cdot 10000 \xrightarrow{+0,7} 1,007^2 \cdot 10000 \xrightarrow{m \text{ meses}} 1,007^m \cdot 10000$

$1,007^m = 2$, $m \ln(1,007) = \ln(2)$

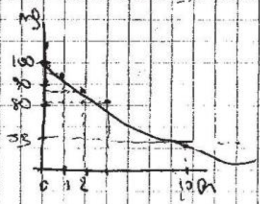
$m = \frac{\ln(2)}{\ln(1,007)} = 99$

28) $y = 100(0,94)^t$

a) $t = 3$ $y = 100(0,94)^3$

$y = 83$ mg

b)



x	y
1	94
0	100
2	88
3	83
10	53

c) $y = 60$ mg
t?

$60 = 100 \cdot 0,94^t$

$0,94^t \cdot 100 = 60$

$94^t = 60$

Pág 144

(31) $y = 1+2^{x/10}$

a) $y = 1+2^{0/10}$ b) $y = 1+2^{10/10}$ c) $y=4$

$y=2 \rightarrow 2000$ bacterias $y=3 \rightarrow 3000$ bact.

$y = 1+2^{x/10}$

$1+2^{x/10}=4$

$2^{x/10}=3$

$\log_2 3 = \frac{x}{10}$

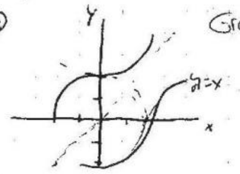
$\frac{x}{10} \cdot \log(2) = \log(3)$

$\frac{x}{10} = \frac{\log 3}{\log 2}$, $x = 10 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} \rightarrow 15{,}8$ horas.

Autoevaluación

Pág 145

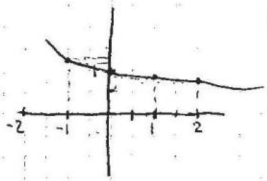
(3)



Gráf. funciones inversas son simétricas respecto a la bisectriz del I cuadrante.

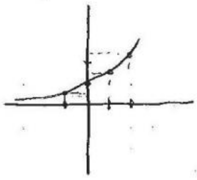
(4) a) $y = 0{,}8^x$

x	y
1	0,8
0	1
2	0,64
-1	1,25

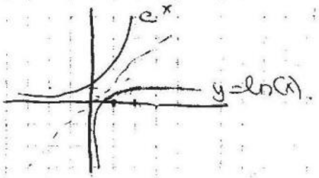


b) $y = 1{,}5^x$

x	y
1	1,5
-1	0,6
0	1
2	2,25



c) $y = \ln x$



(5) $y = ka^x$

$(0, \frac{1}{5})$ $(5; 6{,}4)$ $y = ka^x$ $\boxed{y = \frac{1}{5} \cdot 2^x}$

$y = \frac{1}{5}$ $y = 6{,}4$

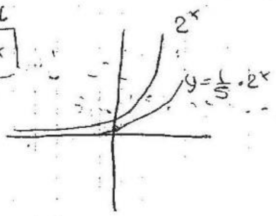
$x = 0$ $x = 5$

$\frac{1}{5} = ka^0$ $6{,}4 = ka^5$

$\boxed{\frac{1}{5} = K}$ $6{,}4 = \frac{1}{5} \cdot a^5$

$a^5 = 32$

$\boxed{a=2}$



(8) $y = 1+0{,}5 \cdot 2^{0{,}4x}$

a) $x=0$, $y = 1+0{,}5 \cdot 2^0$

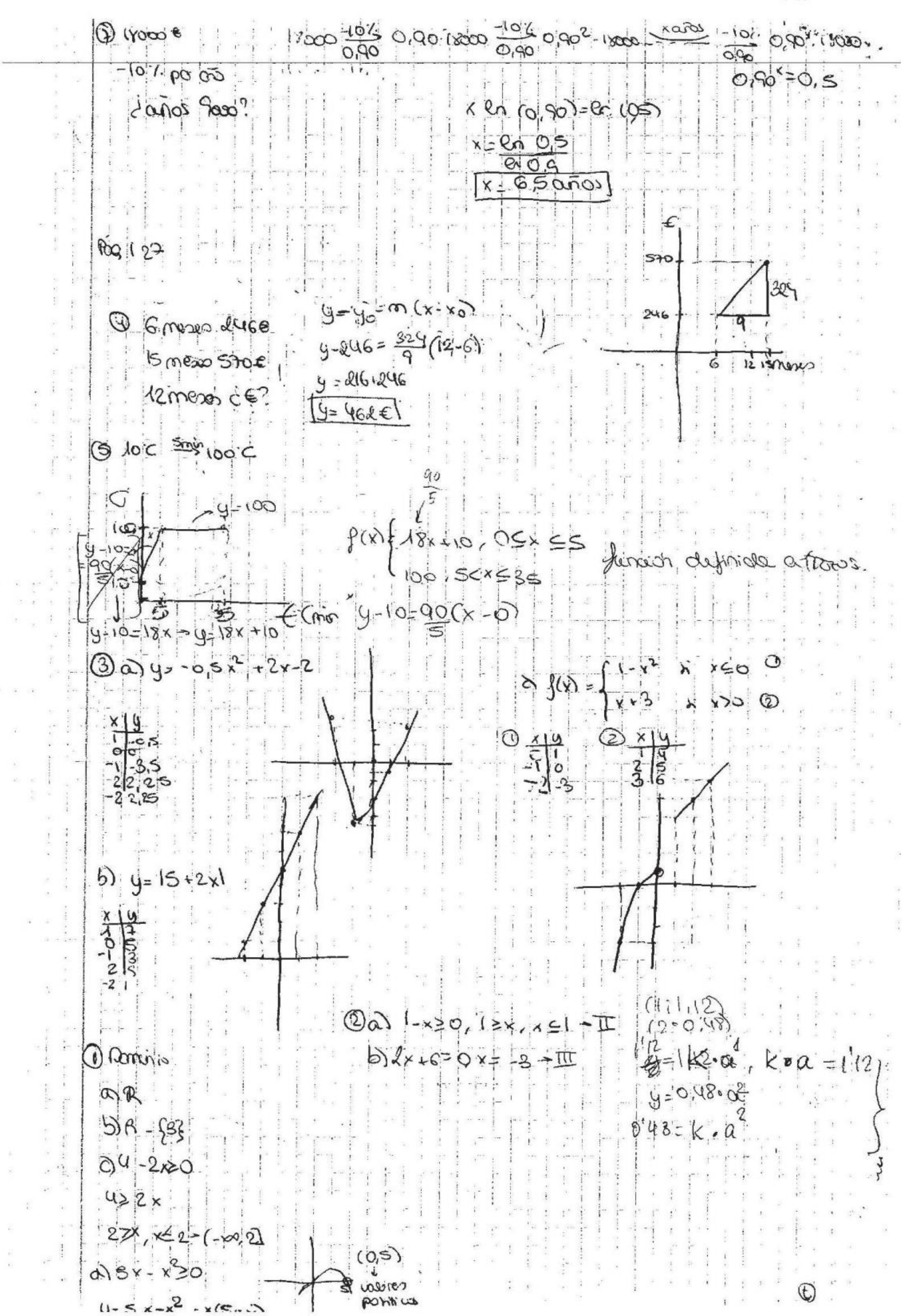
$y = 1{,}5 \rightarrow 1500$ insectos

b) $1+0{,}5 \cdot 2^{0{,}4x} = 3$

$0{,}5 \cdot 2^{0{,}4x} = 2$

$2^{0{,}4x} = 4$ ó $2^{0{,}4x} = 2^2 \rightarrow 0{,}4x = 2$, $x=5$

$\ln(2^{0{,}4x}) = \ln 4 \rightarrow \boxed{x=5 \text{ días}}$



-10% por año
¿años 9000?
x ln (0,90) = ln (0,5)
x = 6,5 años
Pág 127
6 meses 246€
15 meses 570€
12 meses ¿€?
y = 462€
y = 100
función definida a trozos.
y - 10 = 18x → y = 18x + 10
③ a) y = -0,5x² + 2x - 2
b) y = 15 + 2x1
① Dominio
a) R
d) 5x - x² ≥ 0
(0,5)
valores positivos

ANEXO C.2

Este anexo muestra un ejemplo del análisis realizado por el EI sobre las propias fotocopias de los cuadernos. En concreto, se recoge aquí el escaneo correspondiente a la parte del tema de límites (segundo de los temas del bloque) y perteneciente al alumno A10, junto con las anotaciones que ha realizado el EI en el desarrollo del análisis pormenorizado de las unidades teórica y práctica. Ese análisis se realiza teniendo como referencia el marco presentado en el Capítulo IV.

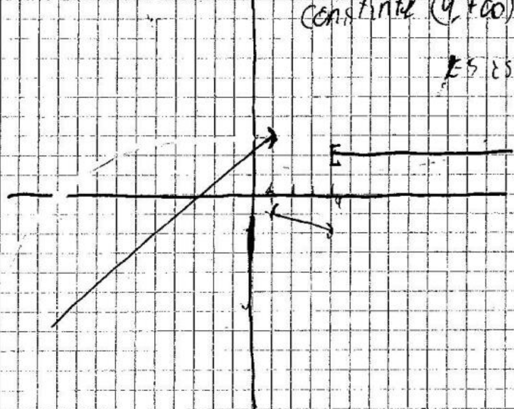
ALUMNO A10

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to 4^+} = 2 = f(4)$

c) Es creciente $(-\infty, 1)$ Decrece $(1, 4)$
Constante $(4, +\infty)$

Es asíntota si pone $\lim_{x \to 0} f(x) = \pm\infty$



TAMPOCO DESTACA EL TÍTULO

Límites (de funciones)

2P

A lo que tienden las imágenes de la función ($f(x)$) cuando la variable independiente (x) tiende a algo. "Tender: estar más cerca (cada vez) de algo".

ERROR TRANSCRIPCIÓN Y BORRONES

FALTA EJEMPLO Y GRÁFICO

? ← Y ($f(x)$) $\lim_{x \to h} f(x) = K$ $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0}$

MALA TRANSCRIPCIÓN

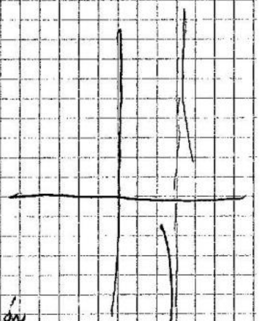
1T → Lím. en un punto

$h = a \in \mathbb{R}$ $y = \frac{1}{x-3}$

Por la izquierda $\lim_{x \to a^-} f(x)$ $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

MUY APELOTONADO

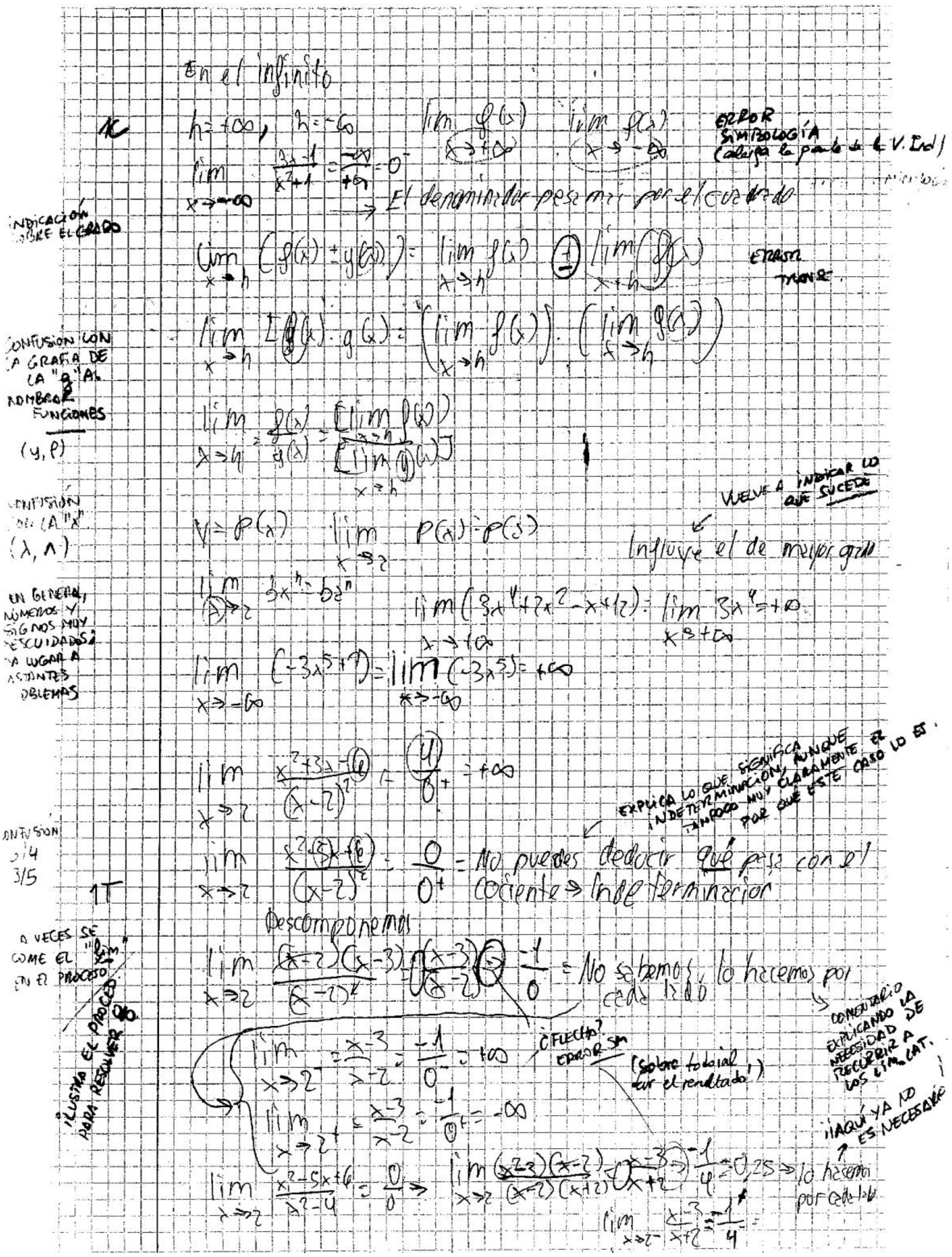
Por la derecha $\lim_{x \to a^+} f(x)$ $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



NO EXPLICITA EXPLICACIÓN PERO SÍ HACE EL GRÁFICO ILUSTRATIVO

"A" FINAL MUY ESCASA/INEXISTENTE

POCA CLARIDAD AL HACER LAS FLECHAS



En el infinito

$h = +\infty,\ h = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$

ERROR SIMBOLOGÍA (clarifica la parte de la V. Ind)

$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-1}{x^2+1} = \frac{-\infty}{+\infty} = 0^-$ → El denominador pesa más por el cuadrado

INDICACIÓN SOBRE EL GRADO

$\lim_{x \to h} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to h} f(x) \pm \lim_{x \to h} f(x)$

ERRATA TRONEDO

$\lim_{x \to h} [f(x) \cdot g(x)] = (\lim_{x \to h} f(x)) \cdot (\lim_{x \to h} g(x))$

CONFUSIÓN CON LA GRAFÍA DE LA "g" AL NOMBRAR FUNCIONES (y, f)

$\lim_{x \to h} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{[\lim_{x \to h} f(x)]}{[\lim_{x \to h} g(x)]}$

CONFUSIÓN CON LA "x" (λ, ʌ)

$y = f(x) \quad \lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

VUELVE A INDICAR LO QUE SUCEDE

Influye el de mayor grado

$\lim_{x \to 2} ax^n = a2^n$

$\lim_{x \to +\infty} (3x^4 + 2x^2 - x + 2) = \lim_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$

EN GENERAL, NÚMEROS Y SIGNOS MUY DESCUIDADOS, DA LUGAR A DISTINTOS PROBLEMAS

$\lim_{x \to -\infty} (-3x^5 + 7) = \lim_{x \to -\infty} (-3x^5) = +\infty$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-6}{(x-2)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

EXPLICA LO QUE SIGNIFICA INDETERMINACIÓN, AUNQUE TAMPOCO MUY CLARAMENTE EL POR QUÉ ESTE CASO LO ES.

CONFUSIÓN 3/4 3/5

1T

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = \frac{0}{0^+}$ = No puedes deducir qué pasa con el cociente ⇒ Indeterminación

Descomponemos

A VECES SE COME EL "lim" EN EL PROCESO

$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)}{(x-2)} = \frac{-1}{0}$ = No sabemos, lo hacemos por cada lado

COMENTARIO EXPLICANDO LA NECESIDAD DE RECURRIR A LOS LIM. LAT.

ILUSTRA EL PROCESO PARA RESOLVER

$\lim_{x \to 2^-} = \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

¿FLECHA? ERROR SIM.

(¡Sobre todo al ver el resultado!)

$\lim_{x \to 2^+} = \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

¡¡AQUÍ YA NO ES NECESARIO!!

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-3)}{(x+2)} = \frac{-1}{4} = 0{,}25 \Rightarrow$ lo hacemos por cada lado

$\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x+2} = \frac{-1}{4}$

Si el grado del polinomio del denominador es mayor:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-2x^2-10x}{x^2+3x-2} \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^2} \rightarrow \lim_{x\to+\infty} (3x) \rightarrow +\infty$

ERROR TRANSCRIP

Nos fijamos en los términos de primer grado $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{px^n}{k} = \pm\infty$

ERROR TERMINOLOGÍA (NO PRIMER SINO MAYOR) - luego procede adecuadamente -

Si el grado del polinomio del denominador es menor:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-5x+2}{4x^3+7x^2-1} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{4x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4x} = \frac{3}{-\infty} = 0$

3 pasos

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{px^4} = 0$

COPIA COMENTARIO, PERO NO EXPLICA

DÉFICIT ESCRITURA DEL LÍMITE

SÍ ILUSTRA PROCED. RESOLUCIÓN, NO EXPLICA EN TRES CASOS

Si el grado de los polinomios es igual:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3-5x+2}{4x^3+7x^2-x} \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3}{4x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

MEZCLA FLECHAS E IGUALES EN LA RESOLUCIÓN

FALTA RELACIÓN LÍMITE-ASÍNTOTAS

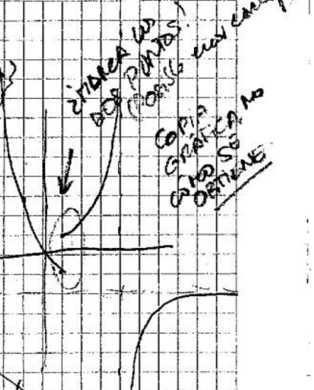
$y=f(x)$ es continua en $x=a$ si existe $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

Si existe $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)}$ Disc. evitable

Si no existe $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) \text{ no existe}}$ Disc. inevitable

RECUERDA LAS CARACTERÍSTICAS PRINC. SOBRE CONTINUIDAD

$y=f(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si } x<1 \\ \frac{2x+1}{4-x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ $D: \mathbb{R}-\{4\}$



¿MARCA LOS DOS PUNTOS? (CONFUSIÓN CON CONCEPTO)

COPIA GRÁFICA, NO CÓMO SE OBTIENE

$\lim_{x\to1} f(x)$ No existe

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (x^2-2x) = -1$

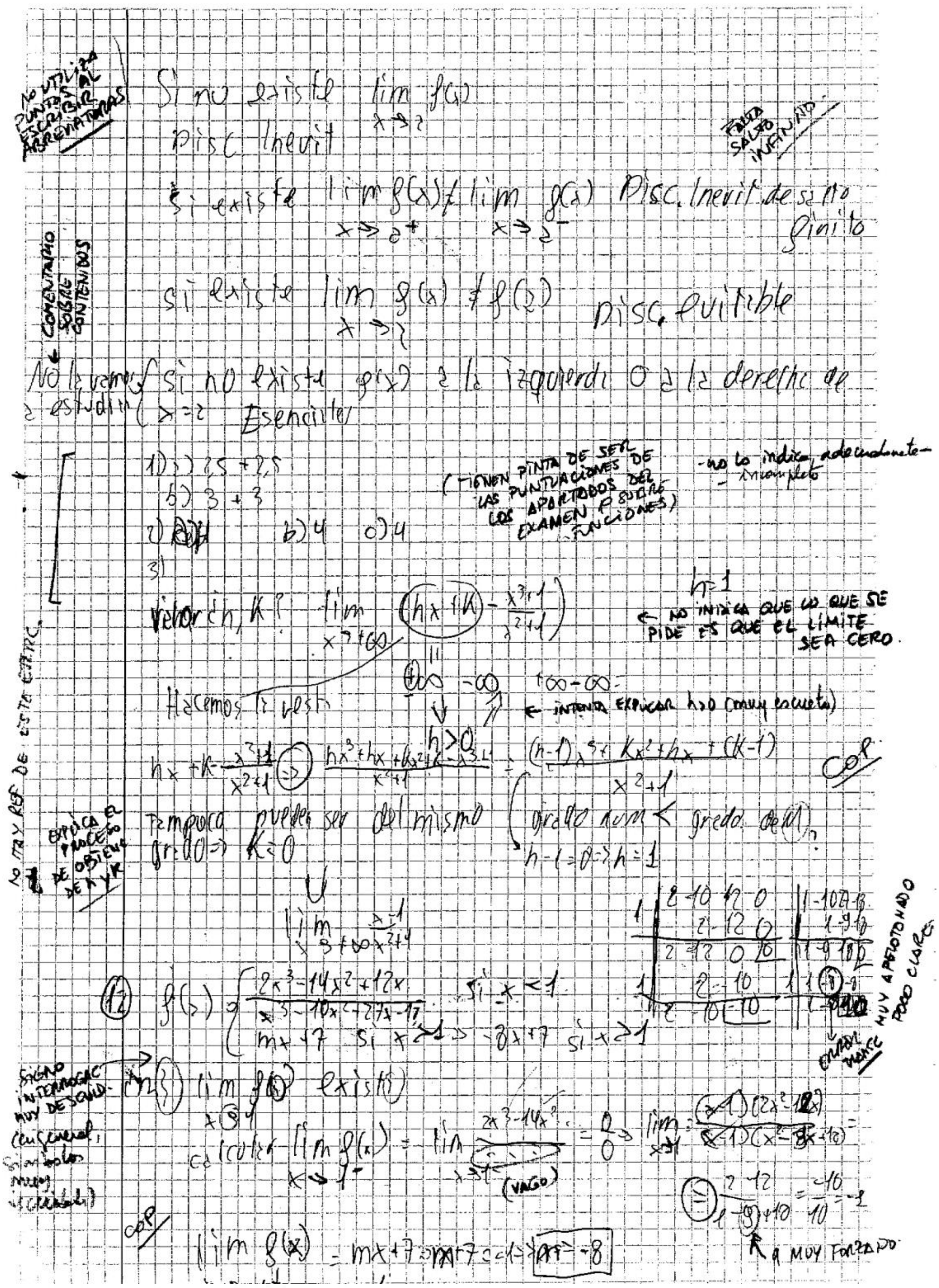
$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \left(\frac{2x+1}{4-x}\right) = 1$

NÚMEROS Y SÍMBOLOS DIFÍCILMENTE LEGIBLES

Si los valores de los límites fueran iguales la función es continua. Ej: $\frac{2x+1}{x-2} \rightarrow \lim_{x\to1} \frac{2x+1}{x-2} = -1$ continua.

EXPLICACIÓN SOBRE LOS LÍMITES LATERALES Y RELACIÓN CON LA CONTINUIDAD (AUNQUE ALGO INCOMPLETO - no hace ref. al valor de la función en el punto-

NO ES CORRECTO EL EJEMPLO



NO UTILIZA PUNTOS AL ESCRIBIR ABREVIATURAS

Si no existe $\lim_{x \to 2} f(x)$ Disc. Inevit.

FALTA SALTO INFINITO

Si existe $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$ Disc. Inevit. de salto finito

COMENTARIO SOBRE CONTENIDOS

Si existe $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$ Disc. evitable

No la vemos a estudiar. Si no existe $f(x)$ a la izquierda o a la derecha de $x = 2$ Esencial

1) a) 2,5 + 2,5

b) 3 + 3

2) a) 4 b) 4 c) 4

3)

(TIENEN PINTA DE SER LAS PUNTUACIONES DE LOS APARTADOS DEL EXAMEN SOBRE FUNCIONES)

– no lo indica adecuadamente – incompleto

Valor h, k? $\lim_{x \to +\infty} \left(hx + k - \frac{x^3+1}{x^2+1} \right)$

$h = 1$

← NO INDICA QUE LO QUE SE PIDE ES QUE EL LÍMITE SEA CERO.

NO HAY REF. DE ESTE EJERC.

$+\infty - \infty$

Hacemos la resta

← INTENTA EXPLICAR $h > 0$ (muy escueto)

$h > 0$

$hx + k - \frac{x^3+1}{x^2+1} = \frac{hx^3 + hx + kx^2 + k - x^3 - 1}{x^2+1} = \frac{(h-1)x^3 + kx^2 + hx + (k-1)}{x^2+1}$

COP

EXPLICA EL PROCESO DE OBTENER h Y k

Tampoco puede ser del mismo grado $\Rightarrow k = 0$ — grado num < grado denom.

$h - 1 = 0 \Rightarrow h = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{x^2 + 1}$

MUY APELOTONADO POCO CLARO

11) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 21x - 12} & \text{si } x < 1 \\ mx + 7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 8x + 7$ si $x \geq 1$

FALTAN MARC.

SIGNO INTERROGAC. MUY DESIGUAL

(en general, símbolos muy desiguales)

m? $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe

Calcular $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^3 - 14x^2 \ldots}{\ldots} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x^2 - 12x)}{(x-1)(x^2 - 9x + 12)} =$

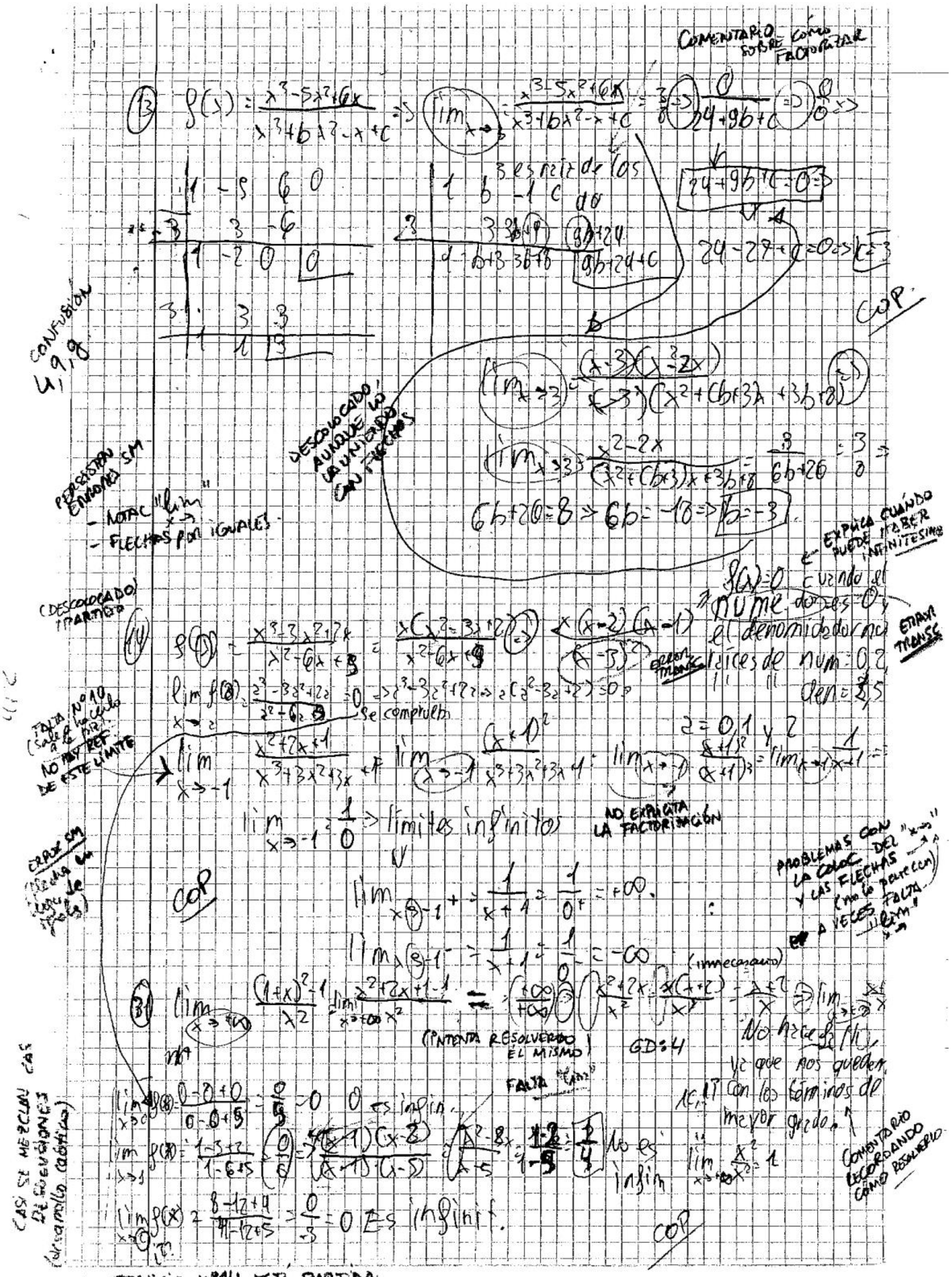
(VAGO)

$\frac{2 - 12}{1 - 9 + 12} = \frac{-10}{10} = -1$

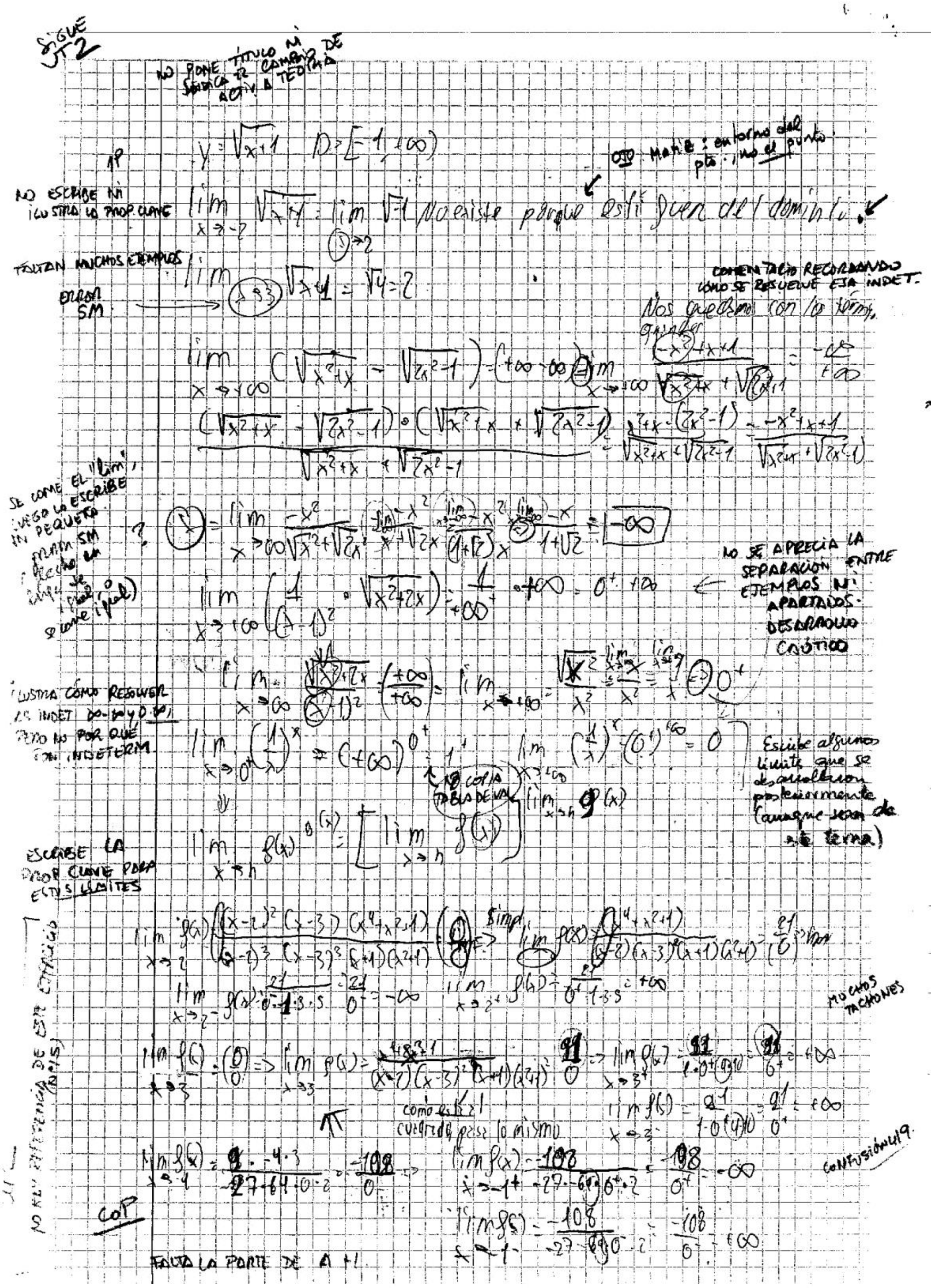
A MUY FORZADO

COP

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = mx + 7 = m + 7 = -1 \Rightarrow \boxed{m = -8}$



EL EJERCICIO Nº14 ESTÁ PARTIDO, AUNQUE LO INDICA CON UNA FLECHA.


SIGUE UT 2
NO PONE TÍTULO NI INDICA EL CAMBIO DE ACTIV A TEORÍA
1º
$y = \sqrt{x+1}$ $D = [-1, +\infty)$
OJO Mate: entorno del pto, no el punto
NO ESCRIBE NI ILUSTRA LA PROP. CLAVE
$\lim_{x \to -2} \sqrt{x+1} = \lim \sqrt{-1}$ No existe porque está fuera del dominio.
FALTAN MUCHOS EJEMPLOS
ERROR SM
$\lim \sqrt{x+1} = \sqrt{4} = 2$
COMENTARIO RECORDANDO CÓMO SE RESUELVE ESA INDET.
Nos quedamos con los términos grandes
$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{2x^2-1}\right) = (+\infty - \infty)$
SE COME EL "lim", LUEGO LO ESCRIBE EN PEQUEÑO
NO SE APRECIA LA SEPARACIÓN ENTRE EJEMPLOS NI APARTADOS. DESARROLLO CAÓTICO
ILUSTRA CÓMO RESOLVER LAS INDET. PERO NO POR QUÉ SON INDETERM.
Escribe algunos límites que se desarrollan posteriormente (aunque sean de otro tema)
ESCRIBE LA PROP CLAVE PARA ESTOS LÍMITES
$\lim_{x \to h} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x \to h} f(x)\right]^{\lim_{x \to h} g(x)}$
MUCHOS TACHONES
como es $(x-3)^2$ cuadrado pasa lo mismo
CONFUSIÓN 4/9
COP
FALTA LA PARTE DE A +1

$$\lim_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x}) (+\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}} \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2-x}) (+\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2-x)}{x+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{+x}{x+\sqrt{x^2-x}} \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2}} = \frac{x}{2x}$$

ESC 5M

Sigue con algún problema con simbología del límite y con flechas como iguales

$$\lim_{x\to h} f(x)^{g(x)} \longrightarrow e^{l}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e \leftarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^x_{x\to+\infty}$$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \quad f(x)\to\infty}$$

$$\text{bien} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \to e$$

ESCRIBE LA PROP CLAVE, PERO EL DESARROLLO ES MUY CAÓTICO

$$\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = (1^{+\infty}) = \lim_{x\to 0} \left(1+\frac{1}{x^{-2}}\right)^{x^{-2}} = e$$

(Justifica la aplicación de la propiedad)

$$\lim_{x\to 0} x^{-2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Arreglos para poner un dividimos entre

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x^2} = (1^{+\infty}) = \lim \left(1+\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{2}\right)$$

1P

Va explicando los pasos del procedimiento

→ El exponente se multiplica por $\frac{2x-1}{2}$ y $\frac{2}{2x-1}$, pues que se quede igual (multiplicamos inversos) y aplicamos propiedad.

$$\frac{2x-1}{2} \cdot \frac{2}{2x-1} \cdot x^2 = \frac{2x^2}{2x-1} \cdot \frac{2x-1}{2}$$

Falta $\lim_{x\to\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right]^{\frac{2x^2}{2x-1}} = e^{\frac{2x^2}{2x-1}} = e^{+\infty} = \infty$$

esto tiende a e $\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$ (Indica la aparición del nº e)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x = 1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)^x = \left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^x \Rightarrow \left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2}}\right)$$

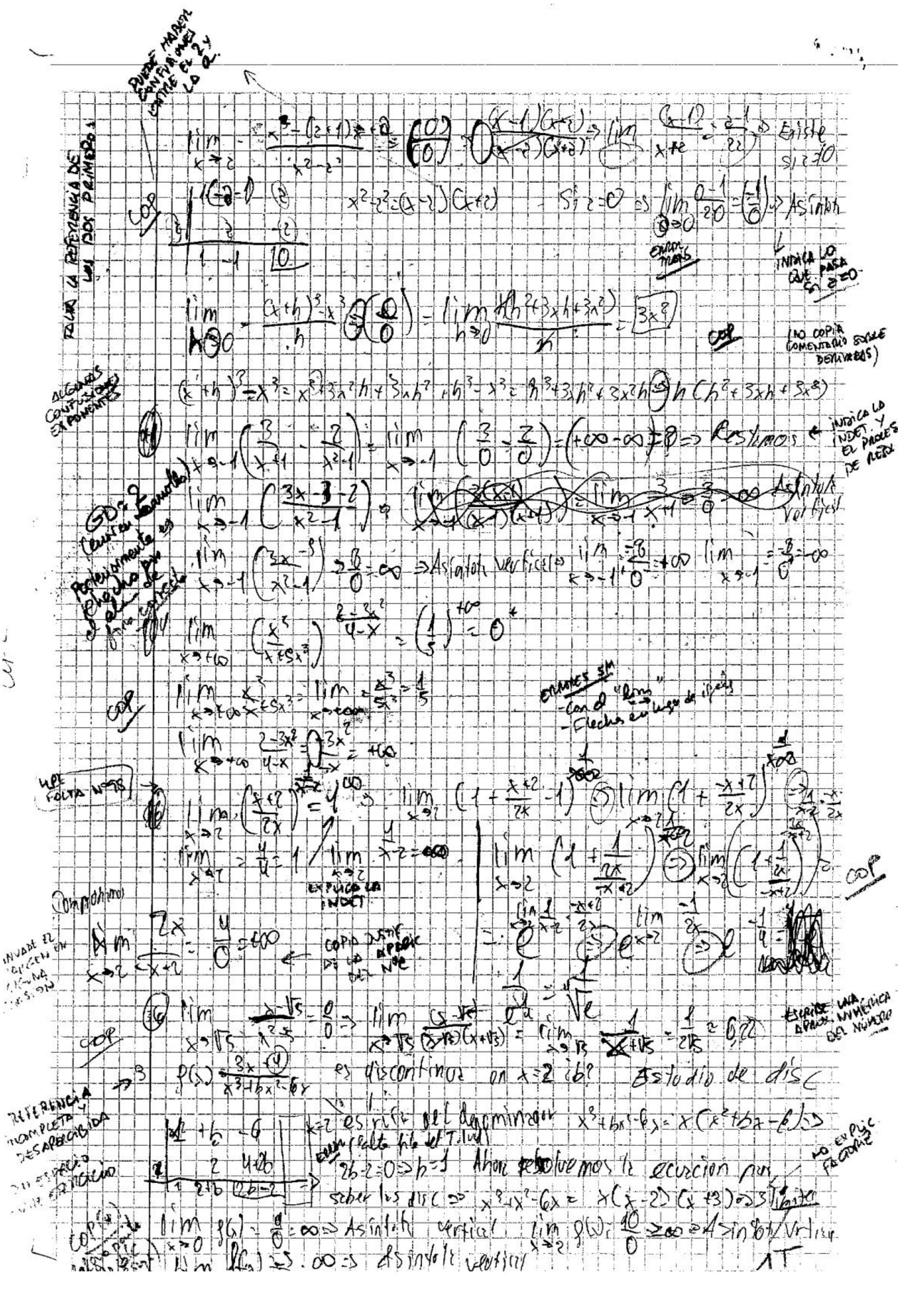
$$\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{2x-1}} \Rightarrow e^{\frac{2x}{2x-1}} = e^{1} = e$$

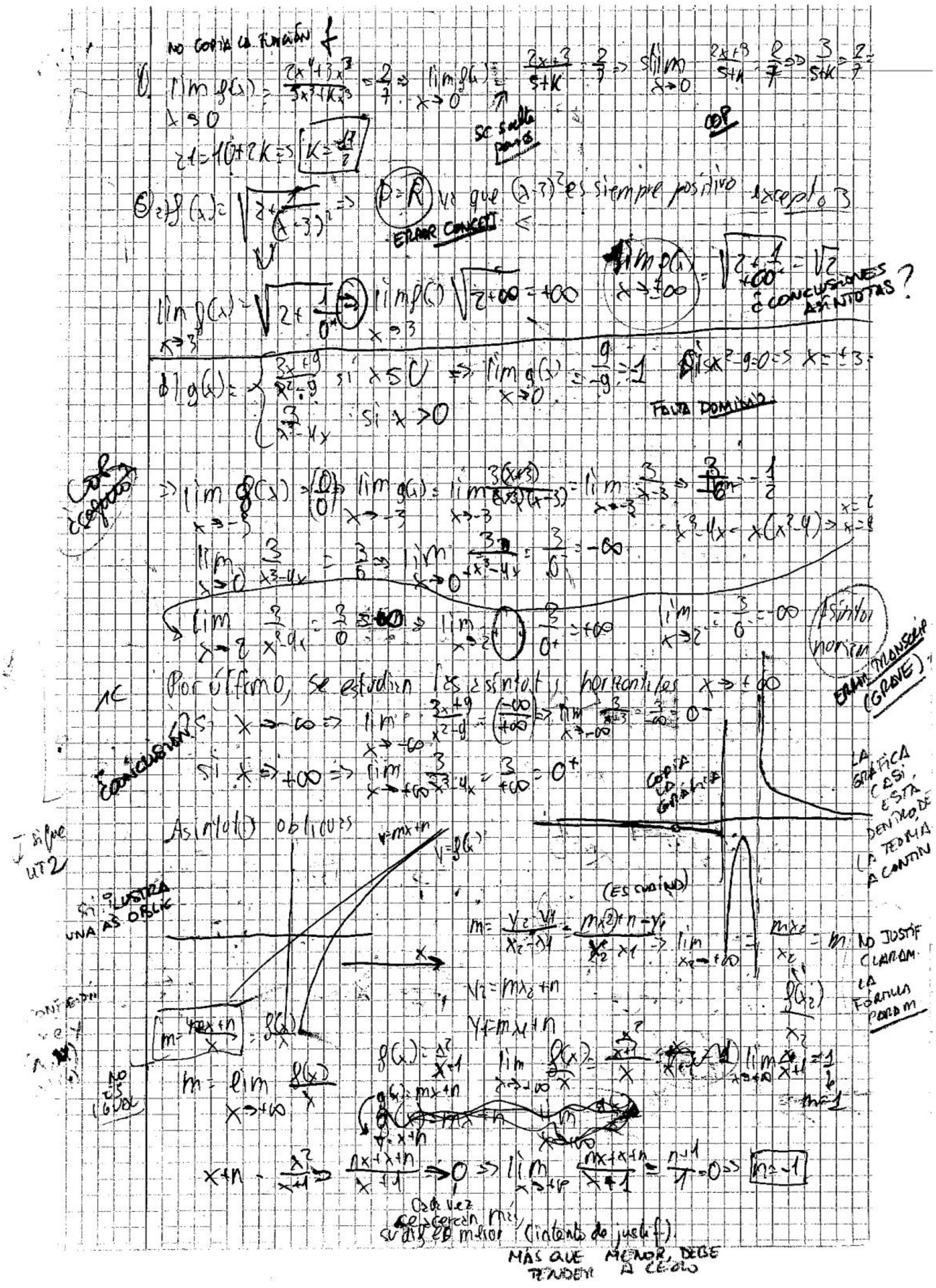
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x-1} = \frac{2}{2} = 1$$

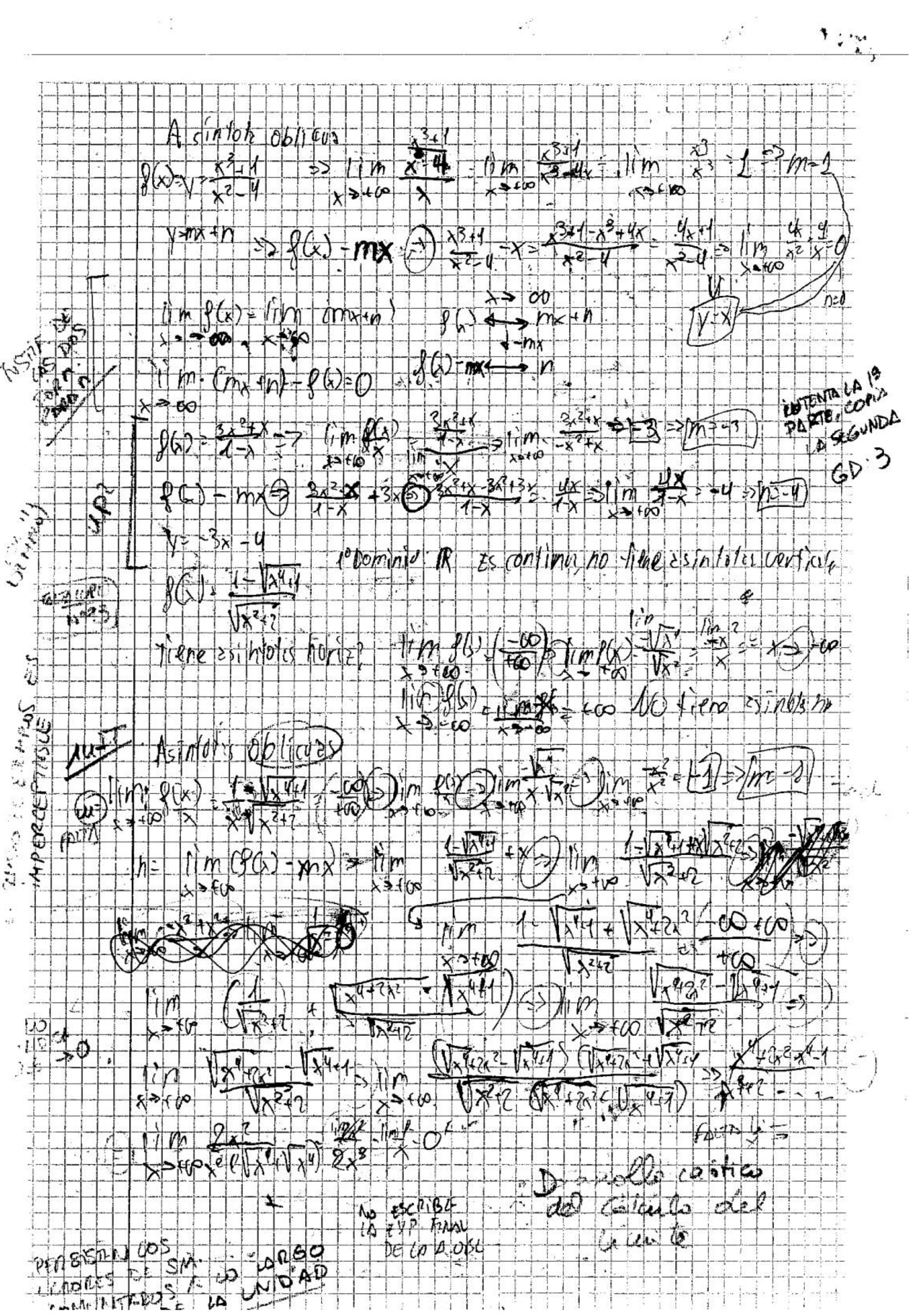
ILUSTRA EL PROCESO PARA RESOLVER LA INDET 1^∞, PERO NO POR QUÉ ES INDET

FALTA "$\lim_{x\to}$" EN GRAN PARTE DE LOS PROCESOS

OCASIONALMENTE SUSTITUYE EL IGUAL POR UNA FLECHA


COP
INDICA LO QUE PASA SI z=0
NO COPIA COMENTARIO SOBRE DERIVADAS
ALGUNAS CONFUSIONES EXPONENTES
EXPLICA LA INDET
ERRORES SM
ESCRIBE UNA APROX. NUMÉRICA DEL NÚMERO
NO EXPLIC FACTORIZ


NO COPIA LA FUNCIÓN
ERROR CONCEPT
¿CONCLUSIONES ASÍNTOTAS?
FALTA DOMINIO
Por último, se estudian las asíntotas horizontales
Asíntotas oblicuas
COPIA LA GRÁFICA
LA GRÁFICA CASI ESTÁ DENTRO DE LA TEORÍA
NO ILUSTRA UNA AS. OBLIC
NO JUSTIF CLARAM. LA FÓRMULA PARA M
MÁS QUE MENOR, DEBE TENDER A CERO


Asíntota oblicua
$f(x) = y = \frac{x^3+1}{x^2-4} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^3-4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \Rightarrow m = 1$
$y = mx + n \Rightarrow f(x) - mx = \frac{x^3+1}{x^2-4} - x = \frac{x^3+1-x^3+4x}{x^2-4} = \frac{4x+1}{x^2-4} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x^2} = \frac{4}{x} = 0$
$n = 0$
$y = x$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (mx+n)$
$f(x) \longleftrightarrow mx+n$
$f(x) - mx \longleftrightarrow n$
$\lim_{x\to\infty} (mx+n) - f(x) = 0$
$f(x) = \frac{3x^2+x}{1-x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{3x^2+x}{1-x}}{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x}{-x^2+x} = -3 \Rightarrow \boxed{m=-3}$
$f(x) - mx \Rightarrow \frac{3x^2+x}{1-x} + 3x \Rightarrow \frac{3x^2+x-3x^2+3x}{1-x} = \frac{4x}{1-x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{-x} = -4 \Rightarrow \boxed{n=-4}$
$y = -3x - 4$
Justif. de las dos
INTENTA LA 1ª PARTE, COPIA LA SEGUNDA
GD·3
$f(x) = \frac{1-\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^2+2}}$
1º Dominio $\mathbb{R}$ es continua, no tiene asíntotas verticales
Tiene asíntotas horiz? $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-\sqrt{x^4}}{\sqrt{x^2}} = \frac{-x^2}{x} = -x \to -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ NO tiene asíntotas h.
Asíntotas oblicuas
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{1-\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^2+2}}}{x} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sqrt{x^4}}{x\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow \boxed{m=-1}$
$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^2+2}} + x \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{x^4+1}+x\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4+2x^2}}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{-\infty+\infty}{+\infty}$
$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^2+2}}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^2+2}}$
$\to 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^2+2}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4+1})(\sqrt{x^4+2x^2}+\sqrt{x^4+1})}{\sqrt{x^2+2}\,(\sqrt{x^4+2x^2}+\sqrt{x^4+1})} \Rightarrow \frac{x^4+2x^2-x^4-1}{\ldots}$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x(\sqrt{x^4}+\sqrt{x^4})} = \frac{2x^2}{2x^3} = \lim \frac{1}{x} = 0$
Desarrollo correcto del cálculo del límite
NO ESCRIBE LA EXP. FINAL DE LA A. OBL.
IMPERCEPTIBLE
PERSISTEN LOS SEÑALADORES DE SM. COMENTADOS A LO LARGO DE LA UNIDAD

ANEXO C.3

Este anexo contiene la plantilla utilizada como base para el desarrollo del análisis de una unidad teórica. La base para generar estas plantillas es el marco de análisis de los cuadernos que hemos elaborado, y que se explica en el Capítulo IV. Esta plantilla contiene tablas para las diferentes dimensiones, variables e indicadores, para poder marcar la valoración que se realice de cada uno de los indicadores. Posteriormente, permite recoger los detalles del análisis de la unidad concreta que explican o que justifican cada una valoraciones efectuadas.

ANÁLISIS DE UNA UNIDAD TEÓRICA DE UN CUADERNO

Tipo de unidad y tema:
Cuaderno de:
Centro y curso:
Profesor:

DIMENSIÓN 1: Estructura, orden y presentación de la unidad

Variable 1: Organización de la unidad

Claridad en la indicación de las diferentes partes que componen un tema	1	2	3	4	5
Ausencia de partes de teoría correspondientes a temas distintos del actual	1	2	3	4	5
Orden cronológico de la teoría y los ejemplos desarrollados	1	2	3	4	5

Variable 2: Presentación de la unidad

Primera impresión que causa la revisión general de la unidad	1	2	3	4	5
Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma	1	2	3	4	5
Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad	1	2	3	4	5
Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco	1	2	3	4	5
Tamaño e integración en la unidad de los dibujos, esquemas o gráficos	1	2	3	4	5
Tamaño de la letra, números y signos matemáticos	1	2	3	4	5
Legibilidad de la letra	1	2	3	4	5
Legibilidad de los números y signos matemáticos	1	2	3	4	5

Variable 3: Estilo propio en la unidad

Los indicadores que pueden mostrar que existe un estilo propio en la unidad son:

Personalización en la organización de la unidad	1	2	3	4	5
Personalización en la presentación de la unidad	1	2	3	4	5
Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo	1	2	3	4	5

Nivel de adecuación de los tipos de rasgos encontrados (en el caso de que el indicador de presencia de ese tipo de rasgos sea mayor o igual que 3):

Adecuación de los rasgos personales de organización de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de los rasgos personales de presentación de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de las notaciones y representaciones personales que	1	2	3	4	5

aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo					

DIMENSIÓN 2: Completitud de la unidad

Variable 1: Completitud de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)	1	2	3	4	5
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	3	4	5

Variable 2: Completitud de los ejemplos ilustrativos

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)	1	2	3	4	5
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	3	4	5

Variable 3: Completitud de los dibujos, esquemas y gráficos

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)	1	2	3	4	5
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	3	4	5

Variable 4: Completitud de las observaciones o comentarios de interés realizados por el docente

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el	1	2	3	4	5

libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)					
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 3: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Variable 1: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad	1	2	3	4	5
Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con la teoría de la unidad	1	2	3	4	5
Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en la teoría de la unidad	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 4: Riqueza y corrección del lenguaje natural utilizado en la unidad

Variable 1: Vocabulario

Variedad y amplitud del vocabulario de la unidad	1	2	3	4	5
Propiedad del vocabulario de la unidad (adecuación y comprensión)	1	2	3	4	5

Variable 2: Gramática y sintaxis

Riqueza y variedad de las estructuras sintácticas empleadas	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de concordancias (género, número, persona) y tiempos verbales	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de conectores y organizadores de contenido	1	2	3	4	5

Variable 3: Puntuación

Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad	1	2	3	4	5
Presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad	1	2	3	4	5

Variable 4: Ortografía

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o fonemas similares (b/v, ll/y, h)	1	2	3	4	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras	1	2	3	4	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de mayúsculas	1	2	3	4	5

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 5: Nivel de corrección matemática de la unidad: errores existentes

Variable 1: Riqueza y corrección de los sistemas de representación de conceptos y del lenguaje matemático existente en la unidad

Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	2	3	4	5
Utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	2	3	4	5
Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	1	2	3	4	5
Utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	1	2	3	4	5
Asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	2	3	4	5
Utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	2	3	4	5

Variable 2: Corrección de los elementos transcritos

Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta de dictados o copias	1	2	3	4	5
Tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	2	3	4	5

Variable 3: Existencia de errores que pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos

Comentarios aclaratorios a la valoración propuesta.-

ANEXO C.4

En este anexo se recoge la plantilla utilizada como base para el desarrollo del análisis de una unidad práctica. La base para generar estas plantillas es el marco de análisis de los cuadernos que hemos elaborado, y que se explica en el Capítulo IV. Esta plantilla contiene tablas para las diferentes dimensiones, variables e indicadores, para poder marcar la valoración que se otorga a cada uno de los indicadores de acuerdo a las leyendas explicativas de cada uno. Posteriormente, permite recoger los detalles del análisis de la unidad concreta que explican o que justifican cada valoración.

ANÁLISIS DE UNA UNIDAD PRÁCTICA DE UN CUADERNO

Tipo de unidad y tema:
Cuaderno de:
Centro y curso:
Profesor:

DIMENSIÓN 1: Estructura, orden y presentación de la unidad

Variable 1: Organización de la unidad

Información y referencia de los ejercicios	1	2	3	4	5
Ausencia en la unidad de ejercicios de otros temas distintos del actual	1	2	3	4	5
Orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase	1	2	3	4	5
Ausencia de ejercicios cuya resolución esté separada en varias partes de la unidad	1	2	3	4	5
Claridad en la indicación de los cambios de ejercicio cuando se producen (paso de unos a otros)	1	2	3	4	5

Variable 2: Presentación de la unidad

Primera impresión que causa la revisión general de la unidad	1	2	3	4	5
Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma	1	2	3	4	5
Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad	1	2	3	4	5
Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco	1	2	3	4	5
Tamaño e integración en la unidad de los dibujos, esquemas o gráficos	1	2	3	4	5
Tamaño de la letra, números y signos matemáticos	1	2	3	4	5
Legibilidad de la letra	1	2	3	4	5
Legibilidad de los números y signos matemáticos	1	2	3	4	5

Variable 3: Estilo propio en la unidad

Los indicadores que pueden mostrar que existe un estilo propio en la unidad son:

Personalización en la organización de la unidad	1	2	3	4	5
Personalización en la presentación de la unidad	1	2	3	4	5
Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo	1	2	3	4	5

Nivel de adecuación de los tipos de rasgos encontrados (en el caso de que el indicador de presencia de ese tipo de rasgos sea mayor o igual que 3):

Adecuación de los rasgos personales de organización de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de los rasgos personales de presentación de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de las notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 2: Completitud de la unidad

Variable 1: Cantidad de actividades registradas en la unidad

Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente y posteriormente corregidas que se registran en la unidad	1	2	3	4	5
Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente pero no corregidas posteriormente en el aula que se registran en la unidad	1	2	3	4	5
Cantidad de actividades a mayores de las propuestas registradas en la unidad	1	2	3	4	5
Contenidos abarcados por las actividades a mayores de las propuestas que se registran en la unidad	1	2	3	4	5

Variable 2: Completitud en el desarrollo de las actividades registradas

Grado de completitud de las actividades registradas que fueron corregidas en el aula	1	2	3	4	5
Grado de completitud de las actividades registradas que no fueron corregidas en el aula	1	2	3	4	5

Variable 3: Ejecución por parte del alumno de las actividades registradas en la unidad

Porcentaje (respecto del total) de actividades que se revelan intentadas por el alumno	1	2	3	4	5
Grado de satisfacción en los intentos de resolución de las actividades que ha efectuado el alumno	1	2	3	4	5

Variable 4: Revisión de las actividades que son corregidas

Frecuencia en la corrección de sus errores al resolver las actividades	1	2	3	4	5
Claridad en la indicación de los errores cometidos que corrige	1	2	3	4	5
Explicación de los errores cometidos que corrige	1	2	3	4	5
Registro de las mejoras efectuadas por el profesor durante la corrección de actividades en el aula	1	2	3	4	5
Compleción de actividades durante el proceso de corrección (registro de partes no desarrolladas o toma de resoluciones distintas de la del	1	2	3	4	5

alumno)					
Rehacimiento de ejercicios con pobres intentos de resolución (con grado de satisfacción 1 ó 2) o de apartados erróneos	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 3: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Variable 1: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad	1	2	3	4	5
Asiduidad en la escritura de los pasos y procesos seguidos para resolver las actividades	1	2	3	4	5
Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con las actividades de la parte práctica	1	2	3	4	5
Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en las actividades que componen la parte práctica	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 4: Riqueza y corrección del lenguaje natural utilizado en la unidad

Variable 1: Vocabulario

Variedad y amplitud del vocabulario de la unidad	1	2	3	4	5
Propiedad del vocabulario de la unidad (adecuación y comprensión)	1	2	3	4	5

Variable 2: Gramática y sintaxis

Riqueza y variedad de las estructuras sintácticas empleadas	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de concordancias (género, número, persona) y tiempos verbales	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de conectores y organizadores de contenido	1	2	3	4	5

Variable 3: Puntuación

Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad	1	2	3	4	5
Presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad	1	2	3	4	5

Variable 4: Ortografía

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o fonemas similares (b/v, ll/y, h)	1	2	3	4	5

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras	1	2	3	4	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de mayúsculas	1	2	3	4	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 5: Nivel de corrección matemática de la unidad: errores existentes

Variable 1: Riqueza y corrección de los sistemas de representación de conceptos y del lenguaje matemático existente en la unidad

Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	2	3	4	5
Utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	2	3	4	5
Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	1	2	3	4	5
Utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	1	2	3	4	5
Asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	2	3	4	5
Utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	2	3	4	5

Variable 2: Corrección de los elementos transcritos

Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta de dictados o copias	1	2	3	4	5
Tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	2	3	4	5

Variable 3: Corrección de los cálculos y los procesos asociados a la aplicación de reglas y propiedades aritmético-algebraicas en la unidad

Ausencia de errores aritmético-algebraicos en la unidad	1	2	3	4	5
Tipos de errores aritmético-algebraicos existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	2	3	4	5

Variable 4: Corrección de procesos seguidos (distintos de los aritmético-algebraicos)

Ausencia de errores en los procesos de resolución (no aritmético-algebraicos) desarrollados por el alumno en la unidad	1	2	3	4	5

Tipos de errores de proceso (no aritmético-algebraicos) existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	2	3	4	5

Variable 5: Existencia de errores que pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos

Comentarios aclaratorios a la valoración propuesta.-

ANEXO C.5

Este anexo contiene un ejemplo de plantilla para la unidad teórica rellenada, fruto del desarrollo del análisis de una unidad concreta por parte del EI. En particular, se recoge aquí la plantilla rellenada correspondiente a la unidad teórica UT1 de la alumna A14, con la valoración de cada uno de los indicadores y la explicación o justificación de la misma a partir de la información obtenida en el análisis.

ANÁLISIS DE UNA UNIDAD TEÓRICA DE UN CUADERNO

Tipo de unidad y tema: UT, "Funciones elementales"
Cuaderno de: Alumna A14
Centro y curso: Instituto Público, 1º Bach. Ciencias Sociales
Profesor: Docente 2

DIMENSIÓN 1: Estructura, orden y presentación de la unidad

Variable 1: Organización de la unidad

Claridad en la indicación de las diferentes partes que componen un tema	1	2	**3**	4	5
Ausencia de partes de teoría correspondientes a temas distintos del actual	1	2	3	4	**5**
Orden cronológico de la teoría y los ejemplos desarrollados	1	2	3	**4**	5

Variable 2: Presentación de la unidad

Primera impresión que causa la revisión general de la unidad	1	2	**3**	4	5
Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma	1	2	**3**	4	5
Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad	1	2	3	**4**	5
Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco	1	**2**	3	4	5
Tamaño e integración en la unidad de los dibujos, esquemas o gráficos	1	**2**	3	4	5
Tamaño de la letra, números y signos matemáticos	1	2	**3**	4	5
Legibilidad de la letra	1	**2**	3	4	5
Legibilidad de los números y signos matemáticos	1	2	3	**4**	5

Variable 3: Estilo propio en la unidad

Los indicadores que pueden mostrar que existe un estilo propio en la unidad son:

Personalización en la organización de la unidad	1	2	**3**	4	5
Personalización en la presentación de la unidad	**1**	2	3	4	5
Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo	**1**	2	3	4	5

Nivel de adecuación de los tipos de rasgos encontrados (en el caso de que el indicador de presencia de ese tipo de rasgos sea mayor o igual que 3):

Adecuación de los rasgos personales de organización de la unidad	1	2	**3**	4	5
Adecuación de los rasgos personales de presentación de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de las notaciones y representaciones personales que	1	2	3	4	5

aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo					

DIMENSIÓN 2: Completitud de la unidad

Variable 1: Completitud de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	3	**4**	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	2	**3**	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)	1	2	3	**4**	5
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	**3**	4	5

Variable 2: Completitud de los ejemplos ilustrativos

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	3	**4**	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	2	**3**	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)	1	2	3	**4**	5
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	3	**4**	5

Variable 3: Completitud de los dibujos, esquemas y gráficos

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	**3**	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	**2**	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)	1	2	**3**	4	5
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	**2**	3	4	5

Variable 4: Completitud de las observaciones o comentarios de interés realizados por el docente

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	**1**	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	**1**	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el	**1**	2	3	4	5

libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)					
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 3: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Variable 1: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad	1	2	3	4	5
Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con la teoría de la unidad	1	2	3	4	5
Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en la teoría de la unidad	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 4: Riqueza y corrección del lenguaje natural utilizado en la unidad

Variable 1: Vocabulario

Variedad y amplitud del vocabulario de la unidad	1	2	3	4	5
Propiedad del vocabulario de la unidad (adecuación y comprensión)	1	2	3	4	5

Variable 2: Gramática

Riqueza y variedad de las estructuras sintácticas empleadas	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de concordancias (género, número, persona) y tiempos verbales	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de conectores y organizadores de contenido	1	2	3	4	5

Variable 3: Puntuación

Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad	1	2	3	4	5
Presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad	1	2	3	4	5

Variable 4: Ortografía

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o fonemas similares (b/v, ll/y, h)	1	2	3	4	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras	1	2	3	4	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionada con el uso de mayúsculas	1	2	3	4	5

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde	1	2	3	**4**	5

DIMENSIÓN 5: Nivel de corrección matemática de la unidad: errores existentes

<u>Variable 1: Riqueza y corrección de los sistemas de representación de conceptos y del lenguaje matemático existente en la unidad</u>

Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	2	3	**4**	5
Utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	2	**3**	4	5
Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	1	2	3	**4**	5
Utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	1	2	**3**	4	5
Asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	2	**3**	4	5
Utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	**2**	3	4	5

<u>Variable 2: Corrección de los elementos transcritos</u>

Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta de dictados o copias	1	2	**3**	4	5
Tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	2	**3**	4	5

<u>Variable 3: Existencia de errores que pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos</u>

El primero de los errores que puede denotar una asimilación pobre o deficiente de conceptos, es que, en uno de los ejemplos, hace las ramas de las parábolas que representan funciones cuadráticas de una forma prácticamente vertical, lo que es incompatible con el concepto de función. No obstante, sólo lo realiza en un caso, no aparece en otras gráficas de este tipo de funciones, por lo que puede ser un error de naturaleza más bien puntual.

En la representación de la función $y = \sqrt{x}$, ésta puede provocar o revelar una asimilación incorrecta del comportamiento de esta función, ya que la dibuja como si tuviera una asíntota horizontal cuando $x \to \infty$, incluso empezando a decrecer en la parte final de la gráfica, algo que es incorrecto. No obstante, el pequeño tamaño de la gráfica puede haber incitado una mayor dificultad para que la alumna refleje adecuadamente el comportamiento de la función.

La alumna comete un par de errores al representar puntos dadas sus coordenadas, lo que puede mostrar deficiencias en la asimilación de este proceso fundamental.

En la parte de funciones racionales, la transcripción que realiza la alumna de la teoría puede llevarla a entender que todas las funciones racionales tienen por gráfica una hipérbola (lo cual es cierto en alguno de los casos sencillos que presentó, no en otros) y que la asíntota es la rama de la función que se acerca a una recta (y no la recta a la que se acerca). En la gráfica de esta parte, la realización de ramas asintóticas que son equidistantes de la asíntota de un lugar en adelante, o que incluso se alejan de ella al final, puede también revelar otro posible error más relacionado con el concepto de "asíntota" y con una falta de asimilación del comportamiento progresivo de aproximación de las ramas asintóticas a la asíntota que existe en los ejemplos trabajados en la clase.

Comentarios aclaratorios a la valoración propuesta.-

Dimensión 1

Variable 1: Se indican tanto los comienzos de los temas como los diferentes apartados que componen cada tema, pero ambos tipos de títulos se destacan muy poco. En particular los cambios de apartados no se destacan casi nada, pasando casi desapercibidos en el desarrollo del tema (dificultad para detectarlos a simple vista), ya que tan sólo se indican con un pequeño número rodeado a su izquierda y el texto. Es decir, los títulos no destacan ni por su tamaño ni porque se añadan elementos distintivos que ayuden a su identificación. Valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable.

No hay presencia en la unidad analizada de partes de teoría de otros temas distintos del actual, por lo que valoraremos con un 5 el segundo indicador.

En relación al orden cronológico de la teoría y ejemplos registrados en la unidad, la alumna sigue mayoritariamente el orden cronológico en el que los diferentes elementos fueron presentados, aunque el uso de varias columnas en el desarrollo de algunos tipos de elementos, como en los ejemplos, puede dificultar la detección del orden en que éstos se han desarrollado. Por ello, valoraremos con un 4 este último indicador.

Variable 2: La primera impresión que causa la unidad de esta alumna en una revisión general de la misma es aceptable. En el desarrollo de su visionado, existen algunas zonas que provocan mejor impresión que otras, en las cuales la acumulación de muchos elementos en poco espacio hace que la revisión sea poco agradable, experimentándose cierta sensación de agobio en su revisión. Valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable.

Limpieza de la unidad y tachones en la misma: El cuaderno es correcto en cuanto a limpieza, existiendo algunos pequeños tachones que no destacan en relación al resto del cuaderno. Si la alumna comete algún fallo que ocupa más espacio o abarca varias partes, opta por poner entre paréntesis la parte errónea con una fina línea cruzando horizontalmente el contenido del interior del paréntesis. Esta marca, muy discreta, puede pasar desapercibida e impedir que cumpla la función con la que fue concebida. Un ejemplo claro de esta situación se da en uno de los gráficos transcritos en la parte de teoría correspondiente a las funciones lineales). Valoraremos con un 3 este indicador.

Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad: La alumna, generalmente, respeta los márgenes izquierdo, inferior y superior, aunque en alguna ocasión el margen puede ser un poco escaso. Esta escasez es un poco más frecuente en el margen derecho, donde hay algunos casos en los que se apura demasiado la escritura, generalmente para completar elementos y finalizar frases sin pasar a la línea siguiente. Así, consideramos que los márgenes se respetan, aunque en alguna ocasión sean un poco escasos, por lo que valoraremos con un 4 este indicador.

Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco: La utilización de espacios por parte de la alumna a lo largo de la unidad es bastante mejorable. Pareciera que la alumna tiene la intención de que el desarrollo de la teoría de la unidad ocupe el menor espacio posible. Deducimos este hecho de dos características que aparecen de forma marcada en el desarrollo de la unidad: la alumna tiende a juntar muchos elementos en poco espacio y, además, en demasiadas ocasiones recurre al desarrollo de los contenidos utilizando dos columnas de texto, en aquellos casos en que inicialmente queda un margen demasiado amplio a la derecha. También observamos cómo intenta encajar las representaciones gráficas en los huecos que va dejando el texto verbal y simbólico, lo que también contribuye negativamente en su tamaño e integración y, por ende, en su claridad (más detallado en la explicación sobre el siguiente indicador). Es decir, existe una sobreutilización bastante continuada de las hojas a lo largo de la unidad, que hace disminuir la claridad de la unidad. Valoraremos con un 2 este indicador.

Tamaño e integración de los dibujos, esquemas y gráficos: En líneas generales, el tamaño de los gráficos es pequeño a lo largo de la unidad, siendo especialmente pequeños en aquellos casos en que se utilizan los huecos existentes en el desarrollo del texto verbal y simbólico para encajar el gráfico, o en los que se intentan registrar los gráficos en línea con el texto escrito (como es el caso del gráfico que pretende ilustrar el concepto de pendiente de una recta). Así, la integración de estos gráficos es mejorable en bastantes ocasiones, debido a la falta de espacio a su alrededor y a su ubicación en huecos de pequeño tamaño, por lo que valoraremos con un 2 este indicador.

Tamaño de la letra, números y signos matemáticos: El tamaño de estos elementos, en algunas ocasiones, peca de ser demasiado pequeño para su propósito (por ejemplo, en el desarrollo de ejemplos o al escribir las funciones valor absoluto como funciones a trozos). Así, valoraremos con un 3 este indicador.

Legibilidad de la letra: La letra está demasiado apelotonada en muchas partes. La alumna tiende tendencia a “comerse” trazos de las letras al juntar unas con otras, lo que dificulta su legibilidad. Además, la unión de todas las letras tampoco ayuda a su claridad (en casos como la “r”, “m” o “n”), debido a su pequeño tamaño y el poco cuidado en la grafía de las letras en los finales de las palabras (por ejemplo: existen problemas para distinguir entre “la”, “le” y “lo” en el final de palabra). Valoración: 2.

Legibilidad de números y signos matemáticos: Los números y signos sí que son claros, ya que los problemas de legibilidad surgen cuando se juntan los signos, no cuando se escriben por separado. Son legibles de forma clara en líneas generales, aún en aquellas zonas donde el tamaño de estos es más pequeño. Valoraremos con un 4 el último indicador de esta variable.

Variable 3: En algunas ocasiones observamos que la alumna recurre al desarrollo en dos columnas de los elementos teóricos (aunque este comportamiento es más acusado en unidades prácticas), lo que interpretamos como un rasgo propio de organización de la alumna. Valoraremos con un 3 el primer indicador para el estilo propio en la organización. En relación a la adecuación de estos rasgos personales, son medianamente adecuados, ya que en algunos casos esta organización puede ser más natural (como cuando se desarrollan ejemplos del mismo tipo, uno por columna), pero en otros casos la organización resultante es más forzada, menos natural, y dando lugar a un desarrollo menos claro del contenido. Valoraremos con un 3 el segundo indicador para el estilo propio en la organización de la unidad.

No encontramos rasgos propios de la alumna en relación a la presentación ni al uso de notaciones y representaciones personales, por lo que valoraremos con un 1 el primer indicador asociado a estas dos características, no valorando el segundo al no tener información para ello.

Dimensión 2

Variable 1: De las 31 definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones que hemos considerado que se han tratado en la clase en el desarrollo de esta unidad, encontramos registradas en la unidad de esta alumna 23 de estos elementos de una manera completa, mientras que dos se registran parcialmente y los seis elementos restantes no son registrados. Así, valoraremos con un 4 el primer indicador de esta variable.

Importancia de los elementos de este tipo registrados: Están registrados en la unidad varios de los elementos que hemos considerado como más importantes, pero faltan tres de ellos: el concepto de ordenada en el origen en el desarrollo de las funciones lineales, la expresión analítica general de una función exponencial y las tres posiciones diferentes que puede tener una función cuadrática según los puntos de corte que tenga su gráfica con el eje OX y su relación con el discriminante de la expresión analítica. Así, valoraremos con un 3 el segundo indicador de esta variable.

En este caso, debido a la metodología del profesor, que les da la teoría dictada y no sigue el libro ni utiliza el mismo a lo largo de la exposición, el registro de los elementos de este tipo sin referencia es equivalente al registro de todos los elementos del tipo. Así, valoraremos con un 4 el tercer indicador.

Precisión de los elementos de este tipo registrados: Encontramos que pueden existir algunos problemas o ambigüedades en la parte donde se desarrolla la teoría sobre funciones racionales. Uno de ellos es que no todas las funciones racionales tienen por gráfica una hipérbola, como sí la tienen las más sencillas (funciones racionales con ambos polinomios de primer grado). Este aspecto no queda claro con su transcripción: “Se llaman así a las que son cocientes de 2 polinomios. Su gráfica (y=1/x) es una curva hipérbola". El otro es que puede haber confusión entre si la asíntota es la recta a la que se acerca una gráfica o es la propia gráfica, tal como está indicado en el ejemplo ilustrativo, en el que es difícil distinguir si la flecha que pretende indicarla sale de la propia curva o de la recta. Además, en la parte sobre propiedades de las funciones exponencial y logarítmica, la alumna no escribe correctamente la simbología asociada al límite, omitiendo información importante (escribe frases como: "Los límites son $(\infty,0)$", sin indicar los valores de la variable independiente donde estamos aproximando la x en cada uno de los casos, el primero cuando $x \to -\infty$ y el segundo cuando $x \to +\infty$). Algo similar sucede con las frases "Toma valores positivos $(1,\infty)$ y negativos (0,1)". Valoraremos con un 3 el último indicador de esta variable.

Variable 2: De los 34 ejemplos que consideramos que ha desarrollado el profesor a lo largo de la unidad, esta alumna ha registrado 26 de manera completa, mientras que los ocho ejemplos restantes no están registrados. Así, como están registrados bastantes de los elementos de este tipo, valoraremos con un 4 el primer indicador.

Importancia de los ejemplos registrados: La alumna A14 registra en su unidad varios de los elementos que hemos considerado de mayor importancia, pero faltan otros, como el registro de los ejemplos para ilustrar cómo puede definirse una función a través de una tabla de valores o de una gráfica, así como el ejemplo ilustrativo de la función polinómica de primer grado y los ejemplos de funciones exponenciales. Valoraremos con un 3 este indicador.

En este caso, debido a la metodología del profesor, que les da la teoría dictada y no sigue el libro ni utiliza el mismo a lo largo de la exposición, el registro de los elementos de este tipo sin referencia es equivalente al registro de todos los elementos del tipo. Así, valoraremos con un 4 el tercer indicador (misma valoración que el primero).

Precisión de los ejemplos registrados: En la unidad de la alumna encontramos una exposición precisa de la mayoría de los ejemplos, aunque existe alguna imprecisión que a continuación comentamos. Una de ellas es la existencia de un error en la asignación entre expresión analítica y gráfica en los ejemplos que pretenden ilustrar cómo se obtiene la expresión analítica de una recta a partir de su representación gráfica obteniendo "m" y "n". En él, asigna a una de las rectas dos expresiones analíticas distintas, una con pendiente positiva y otra con pendiente negativa, lo cual no es posible. Quizá alguna de las dos expresiones se refiera a la otra recta que queda sin expresión asignada, pero la impresión que se extrae del gráfico es la que se acaba de comentar. Además, en el ejemplo ilustrativo de conversión de una función dada mediante una tabla de valores a su representación gráfica, hay un error al representar uno de los puntos, el punto (2,4), que la alumna representa como si fuera el punto (2,2). El resto de los ejemplos se desarrolla de forma correcta. Así, valoraremos con un 4 el último indicador de esta variable.

Variable 3: De los 29 dibujos, esquemas y gráficos de los que consideramos que consta el desarrollo teórico del profesor en la clase, esta alumna registra 15 de manera completa, 2 parcialmente y hay doce elementos de este tipo, un número apreciable, que no están registrados en la unidad. Así, valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable.

Importancia de los elementos de este tipo registrados: Encontramos que en esta unidad faltan bastantes de los dibujos, esquemas y gráficos que se han considerado como elementos de mayor importancia. Los elementos no registrados son: la gráfica inicial que muestra cómo una función puede quedar definida a través de una gráfica, la gráfica ilustrando una función polinómica de primer grado, la gráfica con las tres posiciones que puede tener una parábola según el número de puntos de corte con el eje OX, la gráfica explicando la idea de interpolación en una función y todas las gráficas de funciones exponenciales (tanto para base a<1 como a>1) y de una función logarítmica. Así, valoraremos con un 2 este indicador.

En este caso, debido a la metodología del profesor, que les da la teoría dictada y no sigue el libro ni utiliza el mismo a lo largo de la exposición, el registro de los elementos de este tipo sin referencia es equivalente al registro de todos los elementos del tipo. Así, valoraremos con un 3 el tercer indicador.

Precisión de los elementos de este tipo registrados: Como ya hemos comentado en anteriores variables, varios de los gráficos que realiza la alumna a lo largo de la unidad son demasiado pequeños, lo que puede afectar a la claridad de los mismos y de los elementos o conceptos que pretenden abordar. En la mayoría de gráficos suele indicar las divisiones en los ejes, aunque no marca la escala asociada a esas divisiones. La alumna, generalmente, utiliza como unidad la proporcionada implícitamente por la cuadrícula de la hoja. Encontramos algunas imprecisiones en estos elementos, como son la poca precisión del gráfico de la función y=|2x-1|, donde no se realiza adecuadamente la simetría respecto al eje OX de la parte que en la función inicial tiene imagen negativa, o la existencia de una rama totalmente vertical en la parte cuadrática del ejemplo de función definida a trozos. Ya hemos indicado en la variable anterior el error al representar un punto (el punto (2,4)) en la gráfica que se toma al principio para ilustrar la conversión de una función dada por una tabla de valores a su representación gráfica. En el gráfico de la función f(x)=1/x, las ramas asintóticas que se dibujan son equidistantes de la asíntota de un lugar en adelante, por lo que no puede observarse el acercamiento progresivo que las caracteriza. Además, existe la ambigüedad en el elemento marcado como asíntota (a rama o la recta) ya comentado en la primera variable de esta dimensión. Por último, indicamos la poca precisión en el trazado de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$, donde no se refleja adecuadamente el comportamiento de la función cuando $x \to +\infty$: la función parece estancarse o, incluso, comenzar a decrecer, cuando en realidad la función es estrictamente creciente (aunque bien es cierto que cada vez su tasa de crecimiento es menor) y con límite $+\infty$ en ese caso. Valoraremos con un 2 el último indicador de esta variable.

Variable 4: No encontramos registrado en la unidad de esta alumna ninguna de las tres observaciones o comentarios orales o escritos, todos ellos de interés, que consideramos que ha desarrollado el profesor en el desarrollo teórico del tema. Así, valoraremos con un 1 los dos primeros indicadores de esta variable.

En este caso, debido a la metodología del profesor, que les da la teoría dictada y no sigue el libro ni utiliza el mismo a lo largo de la exposición, el registro de los elementos de este tipo sin referencia es equivalente al registro de todos los elementos del tipo. Así, valoraremos con un 1 el tercer indicador.

No tenemos ninguna información que nos permita valorar el cuarto indicador de esta variable, por lo que dejamos en blanco su valoración.

Dimensión 3

Variable 1: Hay pocos comentarios o aclaraciones en el desarrollo de la UT1 de esta alumna, ya sean tomados del discurso del profesor o personales de la alumna. En uno de los primeros ejemplos indica el nombre que reciben los dos ejes (abscisas y ordenadas), aunque lo hace con una letra poco legible. También indica los tipos de asíntotas (horizontal o vertical) al señalar éstas en la gráfica de la función y=1/x. En la parte de interpolación, recoge parte de un comentario sobre el uso de la interpolación explicado en un ejemplo (“x=17$\rightarrow y$”), que no llega a completar. Al existir muy pocos comentarios, y ser más bien aislados, valoraremos con un 2 el primer indicador.

Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con la teoría de la unidad: Además de la indicación que ya hemos comentado en la variable anterior sobre la escritura de los nombres de los dos ejes en un gráfico, y de las asíntotas en otro (aunque de manera confusa), encontramos algunos casos en los que sí que se encuentra alguna indicación o explicación sobre lo que se representa. Por ejemplo, en los gráficos sí que tiende a aclarar, a través de líneas discontinuas o líneas de puntos, la abscisa y la ordenada de los diferentes puntos que marca (sobre todo en los gráficos de la primera parte, donde se representan rectas), lo que sirve de ayuda para encontrar la pendiente o para marcar ésta. Sin embargo, tan sólo en un caso dibuja los catetos horizontal y vertical e indica su longitud (en el ejemplo sobre interpolación lineal). En alguno de los casos en que aparecen varias funciones en un mismo diagrama cartesiano diferencia cuál es cada una (con la expresión analítica o con su nombre), pero en otros casos no lo hace. Se ha detectado un hecho sorprendente más: en la parte final, sobre funciones exponenciales y logarítmicas, la alumna escribe que “a partir de la gráfica podemos deducir las siguientes propiedades”; sin embargo, la alumna no ha trazado ninguna de las gráficas correspondientes a este apartado, lo que hubiera permitido dotar de sentido el texto anterior. Así, se recogen algunas explicaciones e indicaciones básicas en las gráficas, pero existen pocas explicaciones más concretas, lo que nos ha llevado a valorar excepcionalmente con un 2-3 este indicador.

No hay ninguna señal de la alumna que indique partes comprendidas o no comprendidas a lo largo de la teoría de la unidad, ni indicaciones sobre la existencia de dudas, por lo que valoraremos con un 1 el último indicador de la unidad.

Dimensión 4

Variables 1 y 2: El texto escrito que encontramos en la unidad de la alumna es, en todos los casos, transcrito de la teoría dictada por el profesor o los ejemplos desarrollados por éste. Así, entendemos que no hay suficiente texto redactado y elaborado personalmente por la alumna que permita hacer una valoración significativa de estas dos variables. Por tanto, se ha optado por dejar en blanco sus indicadores. Los errores sintácticos que se han encontrado han sido considerados como errores de transcripción de elementos o como faltas de atención en el desarrollo de esa transcripción.

Variable 3: Aunque los signos de puntuación que encontramos en la unidad de esta alumna están correctamente utilizados, faltan bastantes de los signos de puntuación necesarios en el desarrollo, lo que hace que sea difuso y algo ficticio poder hablar de una utilización correcta de los mismos. Así, valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable.

Como acabamos de indicar en el párrafo anterior, en la unidad de esta alumna faltan bastantes de los signos de puntuación necesarios en la unidad. Faltan bastantes puntos y aparte, también hay ocasiones en que se omiten los dos puntos necesarios al presentar una lista de elementos o una expresión analítica. Incluso, en la parte de funciones polinómicas de grado 3, sustituye los dos puntos por una flecha, escribiendo “Su exp. general $\rightarrow\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d$”. En cuanto a las comas, las que aparecen son correctas, pero también faltan bastantes de las necesarias a lo largo de la unidad, sobre todo aquellas que deben utilizarse para indicar la delimitación de aclaraciones dentro de oraciones, o tras escribir nexos o locuciones que introducen una frase. Valoraremos con un 2 el segundo indicador de esta variable.

Variable 4: No se encuentra ninguna falta de ortografía relacionada con el uso incorrecto de grafemas que se correspondan con un mismo fonema o con fonemas similares, por lo que valoraremos con un 5 el primer indicador de esta variable.

En relación a la separación adecuada de palabras, tampoco encontramos faltas de ortografía en este sentido, ni posibles ambigüedades en estas separaciones, por lo que también valoraremos con un 5 el segundo indicador de esta variable.

En la utilización de las letras mayúsculas sí que se encuentran varios problemas en la unidad de esta alumna. En varias ocasiones, la alumna no utiliza la mayúscula inicial en la primera palabra de un tema o apartado, o de un párrafo. Incluso en una ocasión no pone mayúscula después de punto y seguido. Encontramos al menos cuatro fallos de este tipo a lo largo de la unidad, por lo que valoraremos con un 2 el indicador sobre el uso de las mayúsculas.

Faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde: Tan sólo encontramos un par de faltas relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde al principio de la unidad, al escribir “fácilmente” sin tilde y escribir indebidamente con tilde la palabra “estas” cuando no hace el papel de pronombre: “éstas variables”. En el resto de la unidad la acentuación y el uso de la tilde son adecuados. Valoraremos con un 4 el último indicador de esta variable.

Dimensión 5

Variable 1: En relación a la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático, el hecho de que el profesor dicte las notas teóricas a lo largo del desarrollo del tema, hace que la inmensa mayoría de la terminología utilizada en ese desarrollo por la alumna sea la transcrita de ese dictado. En este caso, la unidad de la alumna es bastante completa en este sentido, aunque hay algún concepto, como el de ordenada en el origen, que no aparece en su unidad. Esto hace que valoraremos con un 4 el primer indicador para este tipo de representación. Uso preciso y pertinente: A lo largo de la unidad encontramos algunas partes donde la alumna utiliza bastantes abreviaturas de las palabras, lo que pudiera causar algún problema para identificar a qué término hacen referencia. Las abreviaturas que utiliza son “cat.” para cateto, “tang.” para tangente, “ud.” para unidad o “exp” para expresión. También, en esta parte, hay un problema con una palabra que escribe mal: “abcisas” en lugar de "abscisas". Esto pudiera ser causado por una mala transcripción del dictado oral, puesto que en otros lugares sí se encuentra bien escrita esta palabra. Indicamos también otro error al transcribir el título del primer apartado del tema, donde, en lugar de escribir "concepto de función" escribe "concepto definición", quedando un título sin sentido. La presencia de algunas imprecisiones en las representaciones escritas de este tipo hace que valoremos con un 3 el segundo indicador.

Representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático: El uso de este tipo de representación que encontramos en la unidad de esta alumna es, de forma mayoritaria, derivado de la transcripción que la alumna realiza del dictado y el desarrollo oral o escrito de ejemplos desarrollado por el profesor en el aula. Como la unidad es bastante completa en los elementos donde este tipo de representación es utilizada de forma mayoritaria (en definiciones, fórmulas y ejemplos), consideramos que la alumna hace un uso frecuente de este tipo de representación a lo largo de la unidad y, por tanto, valoraremos con un 4 el primer indicador para este tipo de representaciones. Uso preciso y pertinente: Encontramos algunas imprecisiones y errores en la utilización de este tipo de representación. Uno de ellos es la utilización del nombre dado a la recta como parte de la expresión analítica de las mismas (la alumna escribe "a=3/2x+1" en lugar de "a$\equiv$y=3/2x+1"). Otro error lo encontramos en la representación simbólica del concepto de límite, que no es utilizada por la alumna. En su lugar, en la parte donde se desarrollan las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas, la alumna escribe expresiones como "Sus límites son $(\infty,0)$" (para la exponencial) y "sus límites son $(-\infty,\infty)$" (para la logarítmica). El problema de su notación es que no hace ninguna referencia a en qué puntos o qué tendencias son las que está calculando o a las que se está refiriendo; es decir, no hay ninguna mención al valor de la variable independiente. En este caso, ambas parejas de límites estaban asociados a límites cuando $x \to -\infty$ en la primera coordenada y a límites cuando $x \to +\infty$ en la segunda. Además, en un comentario identifica +a con a>0 y –a con a<0 al hablar de la orientación de las parábolas, lo que puede dar lugar a alguna confusión (aunque luego escribe la condición correcta). Valoraremos con un 3 el segundo indicador, puesto que, aunque el error de la representación de límite es grave, hay que tener en cuenta que únicamente se estaba introduciendo la misma, ya que el tema en el que se trata el concepto de límite es el tema inmediatamente posterior al analizado.

Representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático: Como ya hemos indicado en la dimensión 2, el uso de este tipo de representaciones en la unidad de la alumna es parcial, puesto que hay algunas que sí que son transcritas, pero existe una cantidad apreciable de elementos de este tipo que no son transcritos por la alumna a partir del desarrollo teórico del profesor. Por lo tanto, valoraremos con un 3 el primer indicador para este tipo de representaciones. Uso preciso y pertinente: Encontramos algunas imprecisiones y errores en este tipo de representación, que ya hemos detallado en la dimensión 2, como son la poca precisión del gráfico de la función y=|2x-1| en la realización de la simetría de la imagen que en la función y=2x-1 es negativa, la existencia de una rama totalmente vertical en el trozo cuadrático del ejemplo de función definida a trozos o la existencia de un error al representar uno de los puntos en la gráfica que se toma al principio para ilustrar el paso de una función dada por una tabla de valores a la representación gráfica de la misma. Otro ejemplo de poca precisión en el trazado es el gráfico de la función f(x)=1/x, donde las ramas asintóticas que se dibujan son equidistantes de la asíntota de un lugar en delante, por lo que no observamos el acercamiento progresivo que las caracteriza. Además, existe la ambigüedad en la asignación de la asíntota (a la rama o a la recta) ya comentado en la dimensión 2. Por último, indicamos la poca precisión en el trazado de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$, donde no se refleja adecuadamente el comportamiento de la función cuando $x \to +\infty$: la función parece estancarse o, incluso, comenzar a decrecer, cuando en realidad la función es estrictamente creciente (aunque bien es cierto que cada vez su tasa de crecimiento es menor) y con límite $+\infty$ en ese caso. Así, valoraremos con un 2 este indicador, ya que a la existencia de bastantes imprecisiones y errores en este sentido se une el pequeño tamaño de los gráficos, que complica la detección y el reflejo adecuado de algunos comportamientos de las gráficas.

Variable 2: Encontramos pocos errores derivados de la transcripción errónea de dictados o copias en relación con la cantidad de elementos con esta naturaleza (es decir, que son transcritos de otros medios, ya sea el dictado o el discurso oral o escrito del docente) existentes en la unidad. Así, valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable. Si analizamos los errores de este tipo existentes en la unidad, observamos cómo, en algunas ocasiones, se come algunos trozos de frases, generalmente nexos o conectores. Esta omisión puede dar lugar o provocar algún error en la asimilación de algún concepto, como es el caso del concepto de función definida a trozos, donde escribe que “Se llaman así a las funciones que están definidas mediante varias expresiones analíticas válidas en un intervalo”, pudiendo entenderse, tal como está escrito, que en un mismo intervalo hay varias expresiones analíticas diferentes; una característica que se incompatible con el concepto de función. Además, hay algunos errores de transcripción: en el título del primer apartado escribe “concepto definición” en lugar de “concepto de función” (importante), o, como ya decíamos antes, escribir “abcisas” en lugar de abscisas. Valoraremos también con un 3 el segundo indicador de esta variable.

ANEXO C.6

Este anexo contiene un ejemplo de plantilla para la unidad práctica rellenada, fruto del desarrollo del análisis de una unidad concreta. En particular, se recoge aquí la plantilla rellenada correspondiente a la unidad práctica UP1 de la alumna A14, con la valoración de cada uno de los indicadores y la explicación o justificación que ha dado el EI a cada una de esas valoraciones.

ANÁLISIS DE UNA UNIDAD PRÁCTICA DE UN CUADERNO

Tipo de unidad y tema: UP, "Funciones elementales"
Cuaderno de: Alumna A14
Centro y curso: Instituto Público, 1º Bach. Ciencias Sociales
Profesor: Docente 2

DIMENSIÓN 1: Estructura, orden y presentación de la unidad

Variable 1: Organización de la unidad

Información y referencia de los ejercicios	1	2	3	4	5
Ausencia en la unidad de ejercicios de otros temas distintos del actual	1	2	3	4	5
Orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase	1	2	3	4	5
Ausencia de ejercicios cuya resolución esté separada en varias partes de la unidad	1	2	3	4	5
Claridad en la indicación de los cambios de ejercicio cuando se producen (paso de unos a otros)	1	2	3	4	5

Variable 2: Presentación de la unidad

Primera impresión que causa la revisión general de la unidad	1	2	3	4	5
Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma	1	2	3	4	5
Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad	1	2	3	4	5
Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco	1	2	3	4	5
Tamaño e integración en la unidad de los dibujos, esquemas o gráficos	1	2	3	4	5
Tamaño de la letra, números y signos matemáticos	1	2	3	4	5
Legibilidad de la letra	1	2	3	4	5
Legibilidad de los números y signos matemáticos	1	2	3	4	5

Variable 3: Estilo propio en la unidad

Los indicadores que pueden mostrar que existe un estilo propio en la unidad son:

Personalización en la organización de la unidad	1	2	3	4	5
Personalización en la presentación de la unidad	1	2	3	4	5
Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo	1	2	3	4	5

Nivel de adecuación de los tipos de rasgos encontrados (en el caso de que el indicador de presencia de ese tipo de rasgos sea mayor o igual que 3):

Adecuación de los rasgos personales de organización de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de los rasgos personales de presentación de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de las notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 2: Completitud de la unidad

Variable 1: Cantidad de actividades registradas en la unidad

Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente y posteriormente corregidas que se registran en la unidad	1	2	3	4	**5**
Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente pero no corregidas posteriormente en el aula que se registran en la unidad	1	2	3	4	**5**
Cantidad de actividades a mayores de las propuestas registradas en la unidad	1	**2**	3	4	5
Contenidos abarcados por las actividades a mayores de las propuestas que se registran en la unidad	1	**2**	3	4	5

Variable 2: Completitud en el desarrollo de las actividades registradas

Grado de completitud de las actividades registradas que fueron corregidas en el aula	1	2	3	**4**	5
Grado de completitud de las actividades registradas que no fueron corregidas en el aula	1	2	3	**4**	5

Variable 3: Ejecución por parte del alumno de las actividades registradas en la unidad

Porcentaje (respecto del total) de actividades que se revelan intentadas por el alumno	1	2	**3**	4	5
Grado de satisfacción en los intentos de resolución de las actividades que ha efectuado el alumno	1	**2**	**3**	4	5

Variable 4: Revisión de las actividades que son corregidas

Frecuencia en la corrección de sus errores al resolver las actividades	1	2	**3**	4	5
Claridad en la indicación de los errores cometidos que corrige	1	**2**	3	4	5
Explicación de los errores cometidos que corrige	**1**	2	3	4	5
Registro de las mejoras efectuadas por el profesor durante la corrección de actividades en el aula	1	2	3	**4**	5
Compleción de actividades durante el proceso de corrección (registro de partes no desarrolladas o toma de resoluciones distintas de la del	1	2	**3**	4	5

alumno)					
Rehacimiento de ejercicios con pobres intentos de resolución (con grado de satisfacción 1 ó 2) o de apartados erróneos	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 3: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Variable 1: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad	1	2	3	4	5
Asiduidad en la escritura de los pasos y procesos seguidos para resolver las actividades	1	2	3	4	5
Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con las actividades de la parte práctica	1	2	3	4	5
Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en las actividades que componen la parte práctica	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 4: Riqueza y corrección del lenguaje natural utilizado en la unidad

Variable 1: Vocabulario

Variedad y amplitud del vocabulario de la unidad	1	2	3	4	5
Propiedad del vocabulario de la unidad (adecuación y comprensión)	1	2	3	4	5

Variable 2: Gramática y sintaxis

Riqueza y variedad de las estructuras sintácticas empleadas	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de concordancias (género, número, persona) y tiempos verbales	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de conectores y organizadores de contenido	1	2	3	4	5

Variable 3: Puntuación

Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad	1	2	3	4	5
Presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad	1	2	3	4	5

Variable 4: Ortografía

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o fonemas similares (b/v, ll/y, h)	1	2	3	4	5

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras	1	2	3	**4**	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionada con el uso de mayúsculas	1	2	3	**4**	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde	1	2	3	4	**5**

DIMENSIÓN 5: Nivel de corrección matemática de la unidad: errores existentes

Variable 1: Riqueza y corrección de los sistemas de representación de conceptos y del lenguaje matemático existente en la unidad

Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	**2**	3	4	5
Utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	**2**	3	4	5
Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	1	2	3	**4**	5
Utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	1	2	**3**	4	5
Asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	2	3	**4**	5
Utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	**2**	3	4	5

Variable 2: Corrección de los elementos transcritos

Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta de dictados o copias	1	2	**3**	4	5
Tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	2	**3**	4	5

Variable 3: Corrección de los cálculos y los procesos asociados a la aplicación de reglas y propiedades aritmético-algebraicas en la unidad

Ausencia de errores aritmético-algebraicos en la unidad	1	**2**	3	4	5
Tipos de errores aritmético-algebraicos existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	**2**	3	4	5

Variable 4: Corrección de procesos seguidos (distintos de los aritmético-algebraicos)

Ausencia de errores en los procesos de resolución (no aritmético-algebraicos) desarrollados por el alumno en la unidad	1	**2**	3	4	5

Tipos de errores de proceso (no aritmético-algebraicos) existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	2	3	4	5

Variable 5: Existencia de errores que pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos

Encontramos varios errores que pueden mostrar o revelar deficientes u obstáculos en la comprensión de conceptos en los ejercicios iniciales de representación de funciones cuadráticas. Por una parte, parece haber asimilado que las parábolas deben tener su vértice sobre el eje OY (punto de corte con ese eje). La sobreutilización de tablas de valores para representar funciones lleva a la alumna a cometer algunos errores, como la representación de una función cuadrática como si fuera una recta, sin que parezca tener en cuenta las propiedades o la forma general que puede asociarse a dicha función según sea su expresión. En otras gráficas existen algunos problemas, como la aparición de ramas verticales (que son incompatibles con que sean la representación de una función) o algunas funciones en las que la gráfica no representa sus características (puede relacionarse con el error anterior de la función cuadrática como recta), como la realización de una rama totalmente horizontal cuando $x \to +\infty$ en la función y=ln(x) o el corte de la gráfica de la función $y = \frac{1}{5} \cdot 2^x$ con el eje OX (abortando ahí su representación), sin que se observe el carácter asintótico de esa rama.

La alumna parece no haber asimilado qué sucede en una ecuación de segundo grado cuando su discriminante es negativo, y cómo se traduce en la representación de dicha función, puesto que en un ejercicio, al ver que obtiene un discriminante negativo, aborta su resolución, mientras que en otro parece cambiar el signo dentro del discriminante para que sea positivo. Podemos relacionar este error con la ausencia en la unidad de la alumna de los ejemplos proporcionados por el Docente 2 sobre las diferentes posibilidades de puntos de corte de una parábola según el discriminante de la ecuación.

La alumna cambia el signo de los coeficientes de una función cuadrática que tenía su coeficiente principal negativo, sin ser consciente de que así está cambiando la expresión de la función (cambia de signo todas sus imágenes), pareciendo confundirlo con las transformaciones válidas para la resolución de ecuaciones.

La alumna parece no haber asimilado correctamente el significado de algunos conceptos claves en la unidad. Por una parte, identifica el término “coeficiente principal” con el de término independiente; mientras que tampoco parece haber asimilado el significado de las variables dependiente e independiente, al asignar incorrectamente el papel de las variables en dos ejercicios de interpolación lineal.

Por último, la alumna no considera los puntos donde f(x) vale 0 como posibles al calcular el dominio de una función radical $y = \sqrt{f(x)}$, por lo que parece indicar que considera que no está definida una función de este tipo cuando el radicando vale 0.

Comentarios aclaratorios a la valoración propuesta.-

Dimensión 1

Variable 1: Esta alumna no escribe, en ningún caso, el enunciado de los ejercicios que extrae del libro. La alumna, al comenzar una tanda de ejercicios, suele indicar el número de página de donde se extraen y, posteriormente, el número del ejercicio correspondiente a cada uno, redondeando dicho número. Sin embargo, la referencia uno por uno no es completa (ya que no se pone el número de página en todos, sino únicamente al comenzar una tanda de ejercicios, sin que además se indiquen los posibles cambios de página que puede haber en el transcurso de una tanda). Hay un error en la referencia del ej. 2 de la pág. 116, que se referencia como segundo apartado del ej. 1. Valoraremos con un 3 este indicador.

No encontramos en la unidad de esta alumna ningún ejercicio correspondiente a temas distintos del actual, por lo que valoraremos con un 5 el segundo indicador de esta variable.

Orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase: Se sigue el orden cronológico en casi todos los casos, a excepción de en dos ejercicios: los ejercicios número 36 y 37 de la pág. 126. Estos ejercicios están desubicados con respecto a la posición que les corresponde según el momento en que fueron planteados por el Docente 2: están dentro de la parte sobre funciones exponenciales y logarítmicas, cuando corresponden al final de la parte anterior del tema (ejercicios sobre interpolación lineal y estudio de funciones cuadráticas en contexto). Valoraremos con un 3 este indicador.

No encontramos en la unidad ningún ejercicio cuya resolución aparezca partida en varios trozos a lo largo de la unidad, por lo que valoraremos con un 5 este indicador.

La indicación de los cambios de ejercicio y el paso de unos a otros es medianamente clara, a través de la indicación del número del ejercicio redondeado en la parte izquierda, aunque esta indicación podía ser de mayor claridad si se dejara algo más de espacio entre uno y otro, y si la referencia del ejercicio fuera mayor. El pequeño tamaño de la referencia provoca que el cambio de ejercicio no sea evidente a primera vista en varios casos. Valoraremos con un 3 el último indicador de esta variable.

Variable 2: En la revisión general se combinan partes que causan una impresión agradable a primera vista con otras partes que no la causan. Estos últimos casos están ocasionados por el poco espacio entre ejercicios y entre las distintas frases que la estudiante va escribiendo. Como en otras unidades de la alumna, pareciera que ésta intenta utilizar el mínimo espacio posible para resolver los ejercicios, lo que causa cierto desagrado en el avance de la revisión de aquellos casos en que este comportamiento se presenta de un modo más acentuado. Valoraremos con un 3 este indicador.

Limpieza en la unidad y tachones en la misma: La unidad es relativamente limpia, aunque se combinan zonas con una buena presentación con otras donde la presentación es mejorable. En algunas ocasiones se sobrescriben números, letras o símbolos que eran equivocados, aunque también intenta que estos tachones o elementos corregidos no destaquen en la unidad. Esto provoca que la indicación sea tenue en algunos casos, como cuando utiliza los corchetes y una raya cruzada dentro de ellos para indicar partes de mayor tamaño que no son válidas. Además, en algunas partes se utiliza de manera frecuente el tippex para corregir fallos sin que llegue a eliminarse totalmente lo escrito, dejando algún rastro que afea la presentación. No obstante, este comportamiento es menos acentuado que en su compañero A13 en esta misma unidad práctica. Valoraremos con un 3 este indicador.

Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad: En general, hemos de indicar que la alumna suele respetar los márgenes en la unidad, aunque en alguna ocasión puede ser un margen algo más escaso. Valoraremos con un 4 este indicador.

Consideramos que la utilización de los espacios y la distribución de los espacios en blanco son bastante malas a lo largo de la unidad. En algunas partes se acumulan muchos ejercicios en poco espacio, realizando los ejercicios a “doble columna”, mientras que en otros lugares se suelen dejar algunos espacios en blanco sin utilizar, como en la parte final de algunas hojas, sin aparente justificación. Es decir, encontramos una desigual la utilización de los espacios, poco homogénea en este sentido, que provoca un desarrollo poco claro de la unidad en algunas ocasiones. Valoraremos con un 2 este indicador.

Tamaño e integración en la unidad de dibujos, esquemas y gráficos: En líneas generales, el tamaño de los gráficos es algo pequeño, sería deseable que fueran de un tamaño algo mayor. La integración también es correcta, pero podría ser mejor si se ampliara el espacio destinado a ellos, puesto que en algunas ocasiones existen muchos elementos alrededor y demasiado cercanos a los mismos. Valoraremos con un 3 este indicador.

Tamaño de letras, números y signos matemáticos: En lo poco que hay escrito en los ejercicios, se mantienen las características que hemos indicado en la UT1 de esta misma estudiante: los números y signos son demasiado pequeños en algunos casos, especialmente al resolver ecuaciones de segundo grado, también al anotar algunos comentarios en la resolución de ejercicios. Valoraremos con un 3 este indicador.

Legibilidad de la letra: La letra de la alumna es de lectura difícil en bastantes casos, puesto que escribe las letras demasiado apelotonados, superponiéndose los trazos de una letra con los de la siguiente. Este hecho dificulta su lectura, especialmente en relación a las vocales y algunas letras, como la “s” o la “n”. También hay alguna parte, como los comentarios añadidos durante la resolución del ej. 35 de la pág. 126, donde la letra que se hace es una letra poco cuidada y difícilmente legible. Valoración: 2.

Legibilidad de números y signos matemáticos: El problema de apelotonamiento, a diferencia de la UT1 de esta alumna, sí que se mantiene para los números, no realizando de manera clara algunos de ellos. Existen confusiones entre los números “0” y “9” en algún ejercicio, también con el número “4”, y el número “8” se realiza de forma muy descuidada en bastantes lugares. Las dificultades son mayores en los casos en los que, además, el tamaño de los números es bastante pequeño, como durante la resolución de ecuaciones. Valoraremos con un 2 el último indicador de esta variable.

Variable 3: No encontramos en la unidad de la alumna ningún rasgo que denote un estilo propio en la organización de la unidad, en su presentación o en el uso de notaciones y representaciones personales, por lo que valoraremos con un 1 el primer indicador para los tres tipos de elementos. No se valora el segundo grupo de indicadores al no existir información para ello.

Dimensión 2

Variable 1: De las 29 actividades de este tema que fueron planteadas y posteriormente corregidas en la clase, esta alumna registra 27 en su unidad. Únicamente faltan por registrar dos actividades: el ej. 2 de la pág. 109 y el ej. 6 de la autoevaluación de la pág. 127. Así, el porcentaje de actividades de este tipo registradas es del 93’10% del total, por lo que valoraremos con un 5 el primer indicador de esta variable.

La alumna registra en su unidad nueve de las diez actividades que el profesor propuso pero que, posteriormente, no corrigió. Esto supone el 90% de las actividades de este tipo, faltando únicamente el ej. 2 de la pág. 114. Valoraremos con un 5 el segundo indicador de esta variable.

Además, encontramos registrada en la unidad de A14 una actividad a mayores de las propuestas por el Docente 2. La alumna intenta realizar uno de los ejercicios resueltos que aparecen en el libro, el correspondiente a la página 109 (sobre interpolación lineal), que el profesor les mandó observar en la clase para comprobar si comprendían o no lo que en él se hacía. Esta estudiante intenta su resolución en el cuaderno, sin tratar de copiar la resolución dada por el libro de texto. Por ello, lo consideramos como ejercicio intentado a mayores de los propuestos. Valoraremos con un 2 los dos indicadores para este tipo de actividades.

Variable 2: De las 27 actividades registradas en la unidad de la alumna que fueron corregidas en el aula, hay 18 que la alumna registra de una manera completa, mientras que hay seis que están bastante desarrolladas, aunque no completamente. Además, encontramos dos actividades que están parcialmente desarrolladas (la parte del ej. 28 de la pág. 144 corregida en la clase y el ej. 2 de la autoevaluación de la pág. 127), en los que únicamente se registran la mitad de los apartados. Por último, encontramos una actividad, el ej. 1 de la pág. 109, donde la estudiante únicamente registra la referencia y hace un diagrama cartesiano vacío, por lo que lo consideramos como registrado pero no desarrollado. Así, de los 27 puntos posibles que A14 podría alcanzar en la medición del grado de desarrollo de estas actividades, la alumna obtiene 23’5 puntos, un 87’04% del total. Valoraremos con un 4 este indicador, al estar el tanto por ciento en el intervalo [80,95).

En la unidad de esta alumna hay diez ejercicios que están registrados pero que no fueron corregidos por el profesor en el aula. De los diez, en seis de ellos sí que se desarrolló la resolución de forma completa, mientras que hay dos que están bastante desarrollados, pero no completamente; uno que está parcialmente desarrollado y un último ejercicio que está poco desarrollado. Así, de los 10 puntos posibles que esta alumna podría alcanzar en la medición del grado de desarrollo de estas actividades, la alumna obtiene 8’25 puntos, un 82’5% del total. Valoraremos con un 4 el segundo indicador de esta variable.

Variable 3: De las 37 actividades que encontramos registradas en la unidad de esta alumna, consideramos que hay 20 que sí que se han revelado como intentadas por A14, lo que representa un 54'05% del total. No obstante, en algunos casos esos intentos de resolución casi no quedan reflejados en el cuaderno, puesto que la alumna tiende a borrar casi de manera completa, utilizando tippex, intentos erróneos de resolución. Interpretamos que los otros 17 ejercicios han sido transcritos directamente de su resolución en el aula. Valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable.

Grado de satisfacción en los intentos de resolución de la alumna: La suma de puntos alcanzada por la alumna en relación al grado de satisfacción en sus intentos de resolución de estas 20 tareas es de 51, lo que nos hace obtener una media aritmética de 2'55 puntos por actividad en la medición del grado de satisfacción de la misma. Como la media está muy cerca del valor intermedio entre 2 y 3 (menos de una décima), valoraremos con un 2-3 el segundo indicador de esta variable.

Variable 4: La alumna corrige algunos de los errores que comete en sus intentos de resolución de actividades, como en los ej. 31 o 34 de las pág. 125 y 126, respectivamente. Por el contrario, no se hace esa corrección en otros casos, como en el análisis y representación de la función cúbica o en el ej. 25 de la pág. 144. Esto hace que valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable.

Claridad en la indicación de los errores cometidos que corrige: En general, la indicación de la alumna es pobre en varios de los errores. Por una parte, porque recurre tan sólo a escribir la expresión entre corchetes para indicar que no es correcta (como en el ej. 34 de la pág. 126 con el cálculo de la función ingresos). También porque, en algunos casos, recurre al uso de tippex para tapar sus intentos de resolución erróneos (dejando alguna marca de los mismos, al no tapar completamente sus intentos en estos casos). Esto último hace que no quede ninguna constancia de los errores cometidos. Así, la indicación de los errores es demasiado tenue o no se produce al taparlos, por lo que valoraremos con un 2 este indicador.

En ninguna ocasión la alumna explica los errores cometidos que corrige. Valoraremos con un 1 el tercer indicador.

Registro de las mejoras efectuadas por el profesor durante la corrección de actividades en el aula: Esta alumna toma las tres mejoras que consideramos que efectuó el profesor durante la corrección de actividades en el aula, aunque en dos casos consideramos que tan sólo de forma parcial. Por ejemplo, la alumna toma los gráficos que ilustran cómo calcular el vértice dados los puntos de corte de una función cuadrática con el eje OX (en el ej. 32 de la pág. 125 y los ej. 34 y 36 de la pág. 126), aunque sin explicar el método seguido y su justificación sobre el porqué de su validez. En otro caso, esta alumna hace el gráfico en el que representa gráficamente la función exponencial de base 2 y la misma función multiplicada por 1/5, pero no explica verbalmente qué efecto provoca esta multiplicación en el gráfico, además de ser éste poco preciso (la gráfica parece cortar al eje OX, abortándose el trazado de la curva justo cuando llega a dicho eje). Valoraremos con un 4 este indicador al considerar que algunas de las mejoras tan sólo se registran parcialmente.

Compleción de actividades durante el proceso de corrección: En la unidad de esta alumna hay seis actividades en las que la resolución de la alumna ha sido incompleta y que, posteriormente, han sido corregidas en el aula. De ellas, hay tres en las que sí que se completa un intento de resolución incompleto: en el análisis y representación de la ecuación polinómica de tercer grado y en los ej. 31 y 34 de la páginas 125 y 126, respectivamente, en los cuales se rehace la actividad, siendo completada en ese proceso (sus intentos de resolución habían sido incompletos). Otras tres actividades no son completadas: la parte del ej. 28 de la pág. 144 que el profesor corrigió en el aula y los ejercicios 2 y 3 de la autoevaluación de la pág. 127. Así, valoraremos con un 3 este indicador.

Rehacimiento de ejercicios con pobres intentos de resolución o apartados erróneos: Encontramos siete actividades en las cuales el intento de resolución de la alumna ha sido considerado como poco satisfactorio (grado de satisfacción de 2 en la escala de 1 a 5) y que, posteriormente, han sido corregidas en el aula. De ellas, hay tres donde la alumna sí que rehace los ejercicios desde el principio, a través de la transcripción completa de su corrección en el aula. Dichas actividades son los ejercicios 28 y 31 de la pág. 125 (ambos sobre interpolación lineal) y el ej. 34 de la pág. 126 (sobre el estudio de una función cuadrática obtenida en un contexto económico). Así, alrededor de la mitad de las actividades pobremente desarrolladas han sido rehechas por la alumna, por lo que valoraremos con un 3 el último indicador de esta variable.

Dimensión 3

Variable 1: Encontramos en la unidad de esta alumna algunos comentarios, observaciones y aclaraciones, sobre todo en la parte final. En algunas ocasiones la alumna, remarca qué representan las expresiones analíticas obtenidas para algunas funciones a través de la escritura del nombre completo (beneficios, temperatura...). También hay un caso en el que la alumna escribe qué tipo de función es la que se obtiene en un ejercicio contextualizado (el ej. 5 de la autoevaluación de la pág. 127), donde escribe "función definida a trozos". Además, en el último ejercicio intentado en la unidad, la alumna registra la gráfica de la parábola $y = 5x - x^2$ para justificar cuál es el dominio de $y = \sqrt{5x - x^2}$, a partir de la determinación sobre en qué intervalos la función cuadrática es positiva. En un ejercicio anterior observamos un comentario, que parece hecho por el profesor, en el que la alumna pretende buscar una explicación más convincente sobre cómo resolver ejercicios como el 25 de la pág. 144, en el que se pide calcular algunos parámetros de una función de tipo exponencial a partir de datos como algunos puntos por los que dicha función pasa. Valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable.

Asiduidad en la escritura de los pasos y procesos seguidos para resolver las actividades: La alumna suele registrar de manera simbólica los pasos que se siguen en la resolución de las actividades, combinándola con algunas indicaciones verbales que la complementan. En los ejercicios iniciales sobre representación (sobre todo en el caso de que sean funciones cuadráticas), indica verbalmente los pasos que va siguiendo (Puntos de corte con los ejes, coeficiente principal [para determinar la orientación]), además de indicarlo simbólicamente. En los ejercicios sobre interpolación lineal, siempre escribe al comienzo la expresión general de la ecuación punto-pendiente, e indica el cociente que da lugar a la pendiente. En los ejercicios sobre funciones cuadráticas en contexto indica las funciones que van apareciendo y cómo de manera simbólica. En los ejercicios con funciones exponenciales, la alumna toma los diagramas del profesor en los que se explicita su aparición. Además, existen algunas indicaciones verbales en la resolución de algunos de ellos, como el recuerdo de la relación gráfica entre una función y su recíproca en el ej. 3 de la pág. 145 ("Gráf.

funciones inversas son simétricas respecto a la bisectriz del I cuadrante") o la indicación sobre la toma de los "valores positivos" para el dominio de la función $y = \sqrt{5x - x^2}$ (aunque existe un problema con los extremos del intervalo, los puntos donde la función vale cero, que no parece considerar). Al existir un número importante de indicaciones sobre los pasos y procesos, aunque no demasiados son de tipo verbal, valoraremos con un 3-4 este indicador.

Explicación de lo que representan dibujos, esquemas y gráficos y relación con las actividades de la parte práctica: Encontramos esa explicación o relación en algunas ocasiones. Por ejemplo, en los ejercicios de interpolación lineal suele marcar gráficamente en varios casos los catetos que dan lugar al cálculo de la pendiente, así como sus longitudes. En estos ejercicios también suele indicar qué magnitudes se están representando en los ejes. Como hemos indicado ya en el ejercicio anterior, recuerda la relación que da lugar a la obtención, a partir de la gráfica, de la representación gráfica de la función recíproca de otra dada, en el ej. 3 de la pág. 145. Esta relación también refuerza la gráfica dibujada en el ejercicio siguiente: dibuja la gráfica de la función y=ln(x) como recíproca de la función $y = e^x$. No obstante, en otros dibujos, esquemas y gráficos falta una explicación verbal asociada a los mismos, como en los gráficos iniciales donde se representan funciones definidas a trozos (no indica la expresión analítica de cada trozo en la gráfica) o funciones de la forma y=|f(x)| donde no se indica la realización de la simetría con respecto del eje OX de la parte con imagen negativa. Tampoco explica ni relaciona con las actividades los gráficos que pretenden ilustrar cómo obtener el vértice que maximiza funciones cuadráticas en los ejercicios de este tipo, así como la curva que parece representar en el ej. 27 de la pág. 125, en un ejercicio de interpolación lineal (¿podría mostrar la función en la situación real planteada, que aquí se aproxima a través de una interpolación lineal?). Por todo ello, valoraremos con un 3 este indicador.

No hay señales de la alumna que indiquen la presencia de partes comprendidas o no comprendidas a lo largo de la unidad, o de dudas en las actividades que componen la parte práctica, por lo que valoraremos el último indicador de esta variable con un 1.

Dimensión 4

Variables 1 y 2: En la unidad de esta alumna encontramos poca cantidad de texto escrito, e interpretamos que la gran mayoría de él (que generalmente suelen ser palabras o frases más bien aisladas, que se corresponden con la indicación de algún paso o elemento), es tomado directamente del discurso oral o escrito del docente en la corrección de la actividad. Así, consideramos que no hay en la unidad suficiente texto redactado personalmente por el alumno para poder hacer una valoración significativa de los indicadores de estas dos variables. Este hecho nos lleva a dejar en blanco sus indicadores.

Variable 3: Aunque tampoco haya mucha cantidad de texto redactado para poder hacer una valoración demasiado significativa de este indicador, consideramos que los pocos signos de puntuación que aparecen están correctamente utilizados, aunque faltan bastantes de los que serían necesarios para una escritura correcta en la unidad. En muchos casos faltan los dos puntos cuando se utilizan frases o indicaciones destinadas a presentar cálculos posteriores (del tipo: "Puntos de corte con el eje OX:"

o “Ecuación de la recta:”. También se omiten en algunos casos los puntos necesarios para indicar las abreviaturas. Así, valoraremos con un 3 el primer indicador y con un 2 el segundo.

Variable 4: No encontramos faltas de ortografía relacionadas con el uso incorrecto de grafemas correspondientes al mismo fonema o a fonemas similares, por lo que valoraremos con un 5 el primer indicador de esta variable.

En relación a la separación adecuada de palabras, tampoco existen faltas de ortografía en este sentido, aunque la separación existente en algunos casos es demasiado pequeña, lo que puede causar alguna ambigüedad sobre la separación o no de algunas palabras. Valoraremos con un 4 este indicador.

En una ocasión (en el ej. 26 de la pág. 144) no escribe la mayúscula inicial para indicar el dato que presenta, comenzando con minúscula. En el resto de casos la alumna sí que utiliza correctamente las mayúsculas cuando éstas se necesitan, por lo que valoraremos con un 4 este indicador.

La acentuación en la unidad y el uso que se hace de la tilde a lo largo de la misma es un uso correcto, sin que existan faltas de ortografía de este tipo. Así, valoraremos con un 5 el último indicador de esta variable.

Dimensión 5

Variable 1: En relación con la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático, el uso que se hace de este tipo de representación es reducido en comparación con el que sería necesario en un desarrollo completo de la unidad. Sí que encontramos alguna indicación verbal sobre los pasos o los datos que aparecen en algunos ejercicios, aunque en otros muchos no se hace. Así, valoraremos con un 2 el primer indicador para este tipo de representación. Uso preciso y pertinente: Existe un problema en esta alumna al abusar de las abreviaturas en la escritura de términos, generalmente de terminología matemática. Ejemplos de ello son la escritura de expresiones como: “Coef. prin.” (coeficiente principal), “Pt. corte” (puntos de corte) o “Gráf” (gráfica), pero también en otros casos donde la abreviatura es menos clara, como “p.” para referirse al precio (en el ej. 35 de la pág. 126) o “I” para indicar la palabra “primer”. Además de las imprecisiones causadas por estas abreviaturas, existe un error en el uso de la terminología que consideramos grave, relacionado con el significado de un término. En dos ocasiones a lo largo de la unidad, la alumna confunde “coeficiente principal” con “término independiente” en un polinomio, creyendo que el primero es el segundo. Este error provoca otro al analizar las funciones cuadráticas en estos dos ejercicios (que comentaremos en la dimensión 4). Sin embargo, en otros casos sí utiliza correctamente esta terminología. Valoraremos con un 2 el segundo indicador para este tipo de representaciones.

Representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático: El uso de este tipo de representación por parte de la alumna es frecuente a lo largo de toda la unidad, bien sea en ejercicios transcritos de la resolución del profesor o en ejercicios intentados por ella. Así, valoraremos con un 4 este indicador, puesto que su uso podría ser mayor con respecto al total si no faltaran unos pocos ejercicios por realizar, registrar o completar su resolución. Uso preciso y pertinente: Existen algunos errores e imprecisiones en la utilización de este tipo de representaciones. La alumna comete algún error relacionado con la igualación de elementos que en realidad no son iguales, en el proceso de representación de una función polinómica de tercer grado, aunque puede ser derivado de otro tipo de errores (manipulación algebraica, errores conceptuales). También hay un lugar en el que se confunde el símbolo para multiplicar con el de dividir, pareciendo que pone el segundo en lugar del primero. En el ej. 25 de la pág. 144 utiliza un igual en lugar de una flecha de implicación para indicar qué valor obtenemos para la segunda incógnita una vez calculada la primera. Así, valoraremos con un 3 el segundo indicador para las representaciones de este tipo.

Representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático: La alumna también realiza un uso frecuente de este tipo de representaciones, puesto que sí que hace o registra las representaciones gráficas asociadas a gran parte de los ejercicios en los que éstas aparecen (bien como apoyo, o bien porque sea el requerimiento del ejercicio). No obstante, falta la representación en unos pocos ejercicios en que la misma se pedía (como en la primera parte de la unidad, con dos funciones cuadráticas), por lo que valoraremos con un 4 el primer indicador para este tipo de representaciones. Uso preciso y pertinente: En líneas generales, los gráficos que realiza la alumna suelen ser poco precisos tanto en el trazado de la curva como en la asignación de escalas. La poca precisión en el trazado de los grafos lleva a no apreciar la simetría en algunas ocasiones, como en las parábolas respecto a un eje vertical o en la representación de funciones del tipo y=|f(x)| a partir de una función f(x) dada. En los ejercicios de la primera parte hay varios gráficos donde no se indica la escala o se indican sus divisiones pero no los valores numéricos (no obstante, generalmente suele tomar como escala la dada implícitamente por la cuadrícula de la hoja). En otros ejercicios sobre interpolación lineal sí que hay algunas asignaciones de valores en los ejes, pero no siempre esa colocación de valores resulta precisa o coherente con la unidad utilizada. La querencia de la alumna por representar cualquier función a través de tablas de valores provoca algunos errores graves, como la representación en el ej. 1b de la pág. 114 de la gráfica de una función cuadrática como una recta. Además, en el caso de las funciones cuadráticas parece asumir que el punto de corte con el eje OY es el vértice de la función (así lo dibuja en el ej. 1b de la pág. 110 y en el ej. 1 de la pág. 116), dos puntos que no tienen por qué coincidir (y, de hecho, casi nunca lo hacen). Otros dos errores o imprecisiones que consideramos de gravedad: En la gráfica de la función y=ln(x) realiza una rama asintótica que es prácticamente vertical (o incluso, volviendo sobre sí misma), lo que es incompatible con el concepto de función, así como una rama totalmente horizontal cuando $x \to +\infty$, lo que no concuerda con las características de esta función. Además, en la gráfica de la función $y = \frac{1}{5} \cdot 2^x$, la alumna realiza la gráfica de tal modo que ésta corta al eje OX, cuando en realidad dicho eje es asíntota horizontal de la misma, aunque aborta su trazado justo cuando la función va a cortar dicho eje por la trayectoria dibujada. Por tanto, en varios casos no se reflejan adecuadamente las propiedades de las funciones representadas. Así, valoraremos con un 2 el segundo indicador para este tipo de representaciones.

Variable 2: En la unidad de esta alumna encontramos pocos errores derivados de una transcripción incorrecta de la resolución de actividades realizada en el aula, en comparación con la cantidad de elementos de esta naturaleza existentes en la unidad. Así, valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable. Describimos cuáles son esos errores. En el ejercicio de análisis y representación de una función polinómica de tercer grado, comete un error al completar su intento erróneo de resolución con la transcripción de la resolución de una ecuación de segundo grado (hay un error al transcribir el signo en el denominador al aplicar la fórmula de resolución). Hay otro error al copiar la expresión de una función en el ej. 5 de la autoevaluación de la pág. 145: en lugar de poner 1/5 multiplicando delante de la exponencial (después de calcular ese factor), pone ½. En el primero de los casos comentados, el error se arrastra después, en lo que parecen volver a ser intentos de resolución propios de la alumna. Es decir, este error de transcripción causa que la resolución posterior sea incorrecta (aunque coherente con lo escrito). Así, valoraremos con un 3 el segundo indicador de esta variable.

Variable 3: Encontramos varios errores en la unidad en cálculos y en procesos de tipo aritmético-algebraico, por lo que valoraremos con un 2 el primer indicador de esta variable. Encontramos algunos errores en cálculos donde los resultados no se corresponden con los cálculos indicados. Uno de ellos está en el ej. 29 de la pág. 125, en la que el resultado final no se corresponde con el cálculo antes explicitado para llegar a él (y=0'09·100-2'55, y=6'75 €). Esto podría explicarse a partir del uso de calculadora en la resolución y la indicación sólo de los dos primeros decimales en el 0'09). El otro está en el ej. 25 de la pág. 144, cuando al dividir 4'7 entre 0'5 obtiene como resultado 0'3. Existen también algunos errores al calcular imágenes en funciones cuadráticas (sobre todo cuando el coeficiente principal es negativo), que pueden indicar problemas para realizar cálculos de potencias con números negativos. No obstante, no se aprecian en la unidad patrones claros de error a partir de los resultados escritos por la alumna. En el ej. 1b de la pág. 110 encontramos un error con el signo dentro del discriminante al resolver una ecuación de segundo grado, indicando una suma en lugar de una resta (no sé hasta qué punto este error puede estar condicionado por un comentario que después indicaré sobre una deficiencia más grave relacionado con el discriminante, pues en este ejemplo, si se procede con la fórmula correcta, el discriminante queda negativo). Encontramos un error al sacar factor común en una expresión algebraica, en el último término: "$x^3 - x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 6x) = 0$". No obstante, sólo lo comete en esta ocasión, por lo que no sabemos si puede ser un descuido o es un error que muestra un déficit operacional importante. Por último, indicamos la existencia de un error que consideramos un déficit operacional importante al operar con potencias en el ej. 28 de la pág. 144, donde escribe la siguiente secuencia: "$60 = 100 \cdot 0'94^t ; 0'94^t \cdot 100 = 60; 94^t = 60$", es decir, al multiplicar por 100 en una potencia, multiplica por 100 la base. Como consideramos que sí que existe un error que representa un déficit operacional importante, en cálculos que la alumna ya debiera realizar con soltura, valoraremos con un 2 el segundo indicador de esta variable.

Variable 4: Encontramos varios errores a lo largo de la unidad en procesos distintos de los aritmético-algebraicos, y de varios tipos, por lo que valoraremos con un 2 el primer indicador de esta variable. Entre ellos podemos indicar el error al obtener los ingresos (se olvida de multiplicar el precio de venta del objeto por el número de unidades vendidas) en el ej. 34 de la pág. 126. Además, también hay un error al sustituir la "x" por su valor en dos ocasiones en el ej. 25 de la pág. 144 (cuando es x=0 sustituye como si fuera x=1, y cuando es x=1, como si fuera x=2, puede estar causado porque el libro pide, en este ejercicio, revisar un ejercicio resuelto anterior, en el que los valores en los que había que sustituir eran precisamente, x=1 y x=2). Sin embargo, encontramos hasta tres errores de este tipo que consideramos que pueden mostrar o revelar obstáculos o déficits de comprensión de algunos conceptos. Por una parte, la confusión entre “coeficiente principal” y “término independiente” en la alumna (que en varias ocasiones señala como coeficiente principal lo que, en realidad, es el término independiente) provoca un error en el proceso de análisis de las funciones cuadráticas, derivado de la comprensión errónea del significado de esos dos conceptos. Por otro lado, también en la primera parte del tema, encontramos cómo la alumna, en una ocasión, cambia el signo a una función de segundo grado (cuyo coeficiente principal era negativo) para analizarla, sin darse cuenta de que dicho cambio provoca un cambio en la expresión de la función (confusión con las transformaciones válidas en la resolución de ecuaciones, aquí no tenemos equivalencias entre expresiones, sino tan sólo la expresión). Por último, hay un error en dos ejercicios (números 28 y 31 de la pág. 125) al asignar incorrectamente los roles de variable dependiente e independiente en el estudio de la situación (por ejemplo, considera como variable independiente el peso de un niño y como variable dependiente de ésta los años que tiene). Este error parece mostrar o revelar una deficiencia en la asimilación del significado de los términos variable dependiente e independiente. Así, valoraremos con un 1 el último indicador de esta variable.

ANEXO C.7

Este anexo contiene un segundo ejemplo de plantilla rellenada para la unidad teórica, fruto del desarrollo del análisis de una unidad concreta por parte del EI. En particular, se recoge aquí la plantilla rellenada correspondiente a la unidad teórica UT2 (es decir, correspondiente al tema de límites y continuidad de una función) del alumno A10, con la valoración de cada uno de los indicadores y la explicación o justificación de esa valoración otorgada a cada uno de ellos.

ANÁLISIS DE UNA UNIDAD TEÓRICA DE UN CUADERNO

Tipo de unidad y tema: UT, "Límites y continuidad"
Cuaderno de: Alumno A10
Centro y curso: Instituto Público, 1º Bach. Científico-Tecnológico
Profesor: Docente 1

DIMENSIÓN 1: Estructura, orden y presentación de la unidad

Variable 1: Organización de la unidad

Claridad en la indicación de las diferentes partes que componen un tema	1	**2**	3	4	5
Ausencia de partes de teoría correspondientes a temas distintos del actual	1	2	3	**4**	5
Orden cronológico de la teoría y los ejemplos desarrollados	1	2	3	**4**	5

Variable 2: Presentación de la unidad

Primera impresión que causa la revisión general de la unidad	**1**	2	3	4	5
Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma	**1**	2	3	4	5
Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad	1	2	**3**	4	5
Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco	1	**2**	3	4	5
Tamaño e integración en la unidad de los dibujos, esquemas o gráficos	1	2	**3**	4	5
Tamaño de la letra, números y signos matemáticos	1	**2**	3	4	5
Legibilidad de la letra	1	**2**	3	4	5
Legibilidad de los números y signos matemáticos	**1**	2	3	4	5

Variable 3: Estilo propio en la unidad

Los indicadores que pueden mostrar que existe un estilo propio en la unidad son:

Personalización en la organización de la unidad	**1**	2	3	4	5
Personalización en la presentación de la unidad	**1**	2	3	4	5
Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo	**1**	2	3	4	5

Nivel de adecuación de los tipos de rasgos encontrados (en el caso de que el indicador de presencia de ese tipo de rasgos sea mayor o igual que 3):

Adecuación de los rasgos personales de organización de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de los rasgos personales de presentación de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de las notaciones y representaciones personales que	1	2	3	4	5

aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo					

DIMENSIÓN 2: Completitud de la unidad

Variable 1: Completitud de las definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)	1	2	3	4	5
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	3	4	5

Variable 2: Completitud de los ejemplos ilustrativos

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)	1	2	3	4	5
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	3	4	5

Variable 3: Completitud de los dibujos, esquemas y gráficos

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)	1	2	3	4	5
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	3	4	5

Variable 4: Completitud de las observaciones o comentarios de interés realizados por el docente

Frecuencia de registro de los elementos de este tipo en la unidad	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo considerados por el docente como más importantes	1	2	3	4	5
Frecuencia de registro de los elementos de este tipo sin otra referencia para el alumno (es decir, elementos en cuya explicación no se sigue el	1	2	3	4	5

libro de texto u otros medios proporcionados al alumno)					
Precisión de los elementos de este tipo registrados	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 3: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Variable 1: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad	1	2	3	4	5
Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con la teoría de la unidad	1	2	3	4	5
Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en la teoría de la unidad	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 4: Riqueza y corrección del lenguaje natural utilizado en la unidad

Variable 1: Vocabulario

Variedad y amplitud del vocabulario de la unidad	1	2	3	4	5
Propiedad del vocabulario de la unidad (adecuación y comprensión)	1	2	3	4	5

Variable 2: Gramática y sintaxis

Riqueza y variedad de las estructuras sintácticas empleadas	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de concordancias (género, número, persona) y tiempos verbales	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de conectores y organizadores de contenido	1	2	3	4	5

Variable 3: Puntuación

Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad	1	2	3	4	5
Presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad	1	2	3	4	5

Variable 4: Ortografía

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o fonemas similares (b/v, ll/y, h)	1	2	3	4	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras	1	2	3	4	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de mayúsculas	1	2	3	4	5

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde	1	2	**3**	4	5

DIMENSIÓN 5: Nivel de corrección matemática de la unidad: errores existentes

<u>Variable 1: Riqueza y corrección de los sistemas de representación de conceptos y del lenguaje matemático existente en la unidad</u>

Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	2	**3**	**4**	5
Utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	**2**	3	4	5
Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	1	2	**3**	**4**	5
Utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	**1**	2	3	4	5
Asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	2	**3**	4	5
Utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	**2**	3	4	5

<u>Variable 2: Corrección de los elementos transcritos</u>

Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta de dictados o copias	1	2	**3**	4	5
Tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	2	**3**	4	5

<u>Variable 3: Existencia de errores que pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos</u>

Algunos de los errores que hemos indicado en variables anteriores pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos. En relación con las gráficas, los problemas que encontramos pueden hacer que el alumno no asimile correctamente el concepto de asíntota y el acercamiento progresivo a la misma que caracteriza a las ramas asintóticas aquí existentes. Además, la presencia de ramas asintóticas verticales y de una función que parece tener dos valores en un punto puede indicar una falta de asimilación del concepto de función, puesto que dichas representaciones son incompatibles con que sean la representación de una función.

Los errores frecuentes relacionados con el signo igual y la utilización indebida de flechas en lugar de iguales pueden mostrar una deficiente asimilación del significado de ambos signos y de sus usos.

El alumno parece tener problemas para referirse a los monomios de grado más alto en la resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, sustituyéndolo por expresiones ambiguas como "pesa más" o "términos grandes", o erróneos como "términos de primer grado", lo que puede indicar una identificación entre primer término de un monomio con término de primer grado.

Además, encontramos otras imprecisiones en el texto escrito en la unidad que pueden dar lugar a errores en la comprensión de conceptos. Por una parte, el alumno indica en un ejemplo que "si los valores de los límites fueran iguales, la función es continua", pareciendo no tener en cuenta el valor de la función en el punto para que la función sea continua (posible error en la asimilación de la continuidad). Por otro lado, al escribir que un límite "no existe porque está fuera del dominio", el alumno parece identificar no existencia de un límite con que la función no esté definida en el punto, cuando lo que suceda en el punto no tiene relevancia en el valor y en el comportamiento del límite, sino lo que pase en un entorno reducido del mismo (posible error de comprensión asociado al concepto de límite).

Por último, en el límite $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x$, el alumno no registra la tabla de valores que se utilizó en la clase para llegar al resultado del límite, transcribiendo directamente el tipo de indeterminación existente y el resultado de dicho límite: "$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x = (+\infty)^{0^+} = 1^+$").

Tal como está registrado, y al no existir ninguna indicación ni explicación sobre la obtención del resultado, el alumno puede interpretar que, en esa situación, no existe una indeterminación, y que el resultado en esa situación siempre es uno, lo cual no es cierto.

Comentarios aclaratorios a la valoración propuesta.-

Dimensión 1

Variable 1: El alumno escribe un título para el tema, aunque no lo destaca de ninguna manera (mismo tamaño de letra, ni tan siquiera lo subraya) ni hay una indicación explícita a que se trate de un nuevo tema. En la primera parte sí que se indican los títulos de algunos apartados, como "Límites en un punto" y "Límites en el infinito" (alguno de ellos, por cierto, lo destaca más que el título del tema, puesto que sí que lo subraya). En toda la parte intermedia del tema no hay ninguna indicación, en la parte final escribe "Asíntotas oblicuas" como título para la última parte, aunque vuelve a no destacarse y éste puede pasar desapercibido (puede confundirse, por ejemplo, con una palabra o con una indicación propia de ejemplos o ejercicios prácticos anteriores, sin mostrarse verdaderamente como un cambio que indique la vuelta a la teoría). Así, al encontrar títulos sólo de unos pocos apartados y no destacarse entre los restantes elementos de la unidad, valoraremos con un 2 este indicador.

En relación a la presencia de posibles partes de teoría correspondientes a otros temas distintos del actual, encontramos un elemento que parece corresponder al tema anterior: las puntuaciones de los diferentes apartados en el examen del tema anterior (sobre geometría plana), que debieron ser desarrolladas por el profesor durante la realización de la resolución de dicho examen en la pizarra. No se indica de ninguna manera la aparición de este elemento, aunque tampoco corresponda, en puridad, a un apartado de teoría de otro tema, por lo que valoraremos con un 4 este indicador.

Orden cronológico de la teoría y ejemplos desarrollados: En líneas generales, el contenido que se encuentra en la unidad del alumno sigue el orden cronológico en que fueron presentados los elementos teóricos. No obstante, en la parte de funciones exponenciales se trastoca el orden de algunos ejemplos poniéndolos antes de su lugar cronológico, aunque lo hace justo a continuación de la teoría anterior, lo que hace que el desarrollo teórico resultante sí que sea coherente. Así, valoraremos con un 4 el último indicador de esta variable.

Variable 2: La impresión que causa la unidad en una revisión general de la misma es muy poco agradable, pésima. El desarrollo de la unidad aparenta ser caótico, con un uso excesivo de algunas hojas, falta de indicaciones de cambios entre ejercicios y una falta de visualización de las partes en las que se organiza la unidad, así como una presentación muy mala. Por lo tanto, valoraremos con un 1 el primer indicador de esta variable.

Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma: La unidad de este alumno no es limpia en su desarrollo. Por una parte, siguen existiendo problemas relacionados con la tinta del bolígrafo que utiliza (que sigue estando corrida en algunas partes). Además, existen bastantes tachones y correcciones en el desarrollo de algunos de los ejemplos, algunos de ellos bastante grandes o que son frecuentes en alguna parte, complicando el seguimiento del desarrollo de los mismos. Así, consideramos que la limpieza de la unidad es muy mala, y afecta gravemente a la presentación de la misma, por lo que valoraremos con un 1 el segundo indicador de esta unidad.

Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad: Consideramos que el alumno respeta los márgenes en algunas ocasiones. En relación al margen izquierdo, éste sí que suele ser respetado por el alumno, aunque en alguna ocasión lo ocupa para anotar algún comentario. En relación a los otros tres márgenes, hay ocasiones en que son respetados, pero en otros casos estos márgenes son demasiado exiguos, bien porque empieza a escribir demasiado arriba en la hoja, bien porque escribe casi hasta el final de la misma, o bien porque apura el margen derecho para completar algunos cálculos o para escribir algunos comentarios. Así, valoraremos con un 3 este indicador.

Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco: En líneas generales, consideramos que la utilización y distribución de espacios en la unidad es mejorable, siendo aceptable en la primera parte de la unidad pero empeorando a medida que avanza la misma. En la parte intermedia y, sobre todo, en la parte final, el EI considera que no es clara la utilización de los espacios debido, entre otras cosas, a la falta de indicación del paso de unos límites a otros y al uso excesivo de las hojas en algunos casos (en las que se condensa una cantidad excesiva de información en poco espacio). En este sentido, encontramos un uso ocasional de la doble columna en el alumno, lo que hace perder claridad al desarrollo. Así, valoraremos con un 2 este indicador.

Tamaño e integración en la unidad de los dibujos, esquemas y gráficos: Mientras que el tamaño de estos elementos es adecuado, la integración es buena en el primero de los gráficos, pero es mejorable en los otros dos gráficos existentes en la unidad, debido a que deja poco espacio alrededor de los gráficos. Este aspecto complica su legibilidad, con algún elemento que "invade" su espacio (por ejemplo, el dominio de la función en el caso del gráfico asociado al primer ejemplo de estudio de la continuidad). Así, valoraremos con un 3 este indicador.

Tamaño de la letra, números y signos matemáticos: Consideramos que el tamaño de estos elementos es poco adecuado en bastantes ocasiones. Por un lado, el tamaño de la letra es variable, siendo ésta demasiado grande en algunos lugares (por ejemplo, en la primera parte, en el desarrollo de la caracterización de la continuidad utilizando el límite) y pequeña en otros, como en los comentarios. También el tamaño de los números y signos es variable, destacando negativamente el pequeño tamaño con el que realiza la simbología asociada al límite en algunos casos, cuando en un primer momento se olvida de ella y posteriormente intenta introducirla en el espacio existente. Así, valoraremos con un 2 este indicador.

Legibilidad de la letra: La letra realizada a lo largo de la unidad es, generalmente, de difícil lectura, aunque el que realice los trazos de las letras separadas entre sí (sin unir éstas) pueda facilitar algo dicha lectura. La lectura, no obstante, puede verse dificultada tanto por el poco cuidado con el que se realiza como con la falta de seguimiento en la escritura de las líneas marcadas por la cuadrícula. Entre los mayores problemas y confusiones seguimos destacando la realización de las vocales, sobre todo de la letra "a" al final de palabra (que realiza de modo muy forzado), también hay problemas con las letras en las que sobresale el trazo un poco por encima o por debajo, como la "d" y la "p", también en algunos casos con letras como la "s" o la "l". Así, valoraremos con un 2 este indicador.

Legibilidad de los números y signos matemáticos: Encontramos un gran número de problemas y confusiones en la legibilidad de estos elementos a lo largo de la unidad, debido al poco cuidado en su trazado, lo que hace que sea muy difícil su lectura, y que puedan llegar a no entenderse. Así, hay una confusión bastante generalizada en la unidad relacionada con la identificación de las letras "f" y "g" cuando se utilizan para nombrar funciones, también entre varios de los números, como el "4", el "6" y el "9", o entre el "3" y el "5", o para identificar el número "1", que en ocasiones se realiza de manera muy forzada. Además, cuando estos números son exponentes el problema también se produce, y de hecho se agrava debido al pequeño tamaño en algunos casos. La simbología asociada al límite también es bastante descuidada, sobre todo la parte relativa a la indicación del valor de la variable independiente al que estamos tendiendo (especialmente en la realización de la flecha, que es difícil de identificar). Por último, también hay problemas con las letras que sirven para indicar las variables dependiente e independiente, "y" y "x" respectivamente: la letra "y" se parece a la letra griega ro, "ρ", en algunos casos, mientras que la grafía de la letra "x" es muy poco clara, pareciéndose en ocasiones a letras griegas como "Λ" o "λ" o, incluso, a una "y" al hacer más corto alguno de los segmentos que configuran la letra. Así, valoraremos con un 1 el último indicador de esta variable.

Variable 3: No encontramos en la unidad de este alumno ningún rasgo personal que nos permita identificar la existencia de un estilo propio en este estudiante, ni en la organización de la unidad, ni en su presentación ni en el uso de notaciones o representaciones personales. Así, valoraremos con un 1 el primer indicador en los tres casos, no valorando el segundo, al no existir dichos rasgos.

Dimensión 2

Variable 1: De las 34 definiciones, resultados teóricos, fórmulas y justificaciones que consideramos que han sido desarrolladas en la clase a lo largo de la unidad, en la de este alumno encontramos registradas 24 de manera completa, mientras que hay seis que consideramos registradas parcialmente y hay otros cuatro elementos que no son recogidos por el alumno. Así, como el alumno registra gran parte de los elementos de este tipo, valoraremos con un 4 el primer indicador de esta variable.

Importancia de los elementos de este tipo registrados: En la unidad de este alumno están bastantes de los elementos de este tipo que hemos considerado de mayor importancia, pero falta alguno de ellos, como la caracterización del cálculo de asíntotas horizontales y verticales a través del límite, o la indicación explícita sobre cómo resolver límites genéricos con funciones irracionales. Así, valoraremos con un 4 el segundo indicador de esta variable.

En este caso, debido a la metodología del profesor, que realiza una exposición de la teoría de carácter personal, sin seguir ni utilizar el libro de texto, el registro de los elementos de este tipo sin referencia coincide con el de los elementos totales de este tipo, por lo que este indicador es equivalente al primero. Así, valoraremos con un 4 este indicador.

Precisión de los elementos de este tipo registrados: Encontramos algunas imprecisiones y errores en el desarrollo de estos elementos. En la primera parte de la unidad encontramos cómo escribe “Tenderse” en lugar de tender al intentar tomar la definición informal del término que proporcionó el docente (en la introducción del concepto de límite). Además, hay un error en la regla que indica cómo se comporta el límite con respecto a la suma y a la resta, puesto que omite la resta en el segundo miembro de la igualdad (escribe sólo “+”), cuando en el primer miembro había escrito “ $\pm$”. Hemos de indicar que este alumno es de los únicos del grupo de alumnos del Docente 1 que sí intenta hacer el esfuerzo de explicar verbalmente cómo se resuelven las indeterminaciones principales tratadas, aunque encontramos un error en la terminología utilizada en la explicación correspondiente a $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, al escribir que “nos fijamos en los términos de *primer* grado” en lugar de en los de grado más alto. No obstante, ya había escrito esta idea anteriormente de forma correcta y no comete errores de este tipo al transcribir y desarrollar ejemplos, por lo que parece un error al transcribir. En relación a la última parte, es poco clara la justificación de la fórmula para obtener la pendiente en asíntotas oblicuas, escribiendo una igualdad confusa: “ $m=\frac{mx+n}{x}=\frac{f(x)}{x}$”. Así, valoraremos con un 3 el último indicador de esta variable.

Variable 2: De los 45 ejemplos que consideramos que ha desarrollado el Docente 1 a lo largo de la unidad, este alumno registra 26 de manera completa, mientras que hay tres que son registrados parcialmente y hay 16 elementos de este tipo que no son registrados. Como registra poco más de la mitad de los elementos de este tipo y faltan un número apreciable de los mismos, valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable.

Importancia de los ejemplos registrados: Encontramos registrados varios de los ejemplos que hemos considerado de mayor importancia en el desarrollo de la unidad, aunque falta alguno de los ejemplos iniciales presentando en concepto de límite, así como, sobre todo, la mayoría de ejemplos que ilustran la resolución de límites con funciones irracionales y exponenciales en los que no aparecía alguna de las indeterminaciones específicas presentadas. Así, valoraremos con un 3 este indicador.

En este caso, debido a la metodología del profesor, que realiza una exposición de la teoría de carácter personal, sin seguir ni utilizar el libro de texto, el registro de los elementos de este tipo sin referencia coincide con el de los elementos totales de este tipo, por lo que este indicador es equivalente al primero. Así, valoraremos con un 3 este indicador.

Precisión de los elementos de este tipo registrados: Encontramos algunas imprecisiones y errores en el desarrollo de los ejemplos que registra. Por una parte, encontramos un desarrollo (que parece propio del alumno) no pertinente al calcular los límites laterales en un límite con indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ una vez que ha sustituido (parece que siguiendo la estela del anterior límite, en el que también existía esta indeterminación en principio y, tras simplificar factores comunes, se llega a una del tipo $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$, algo que en el segundo ejemplo no pasa). Encontramos un error de signo en el desarrollo de uno de los límites con indeterminación $\frac{\to \infty}{\to \infty}$ (cambia de signo el cociente casi al final, dando el resultado de forma errónea [el alumno es coherente con su error, por lo que sigue la resolución]). Hay un registro muy incompleto del segundo de los ejemplos que relaciona la continuidad con el cálculo del límite, donde lo que registra es correcto, pero no es suficiente para el estudio de la continuidad (sólo toma una de las partes de la función y su límite, sin registrar nada sobre la otra parte). En el primero de estos ejemplos, hay un comentario que parece relacionar directamente la existencia del límite con la continuidad de la función, no haciendo mención explícita al valor de la función en el punto: “Si los valores de los límites fueran iguales, la función es continua”. Por último, encontramos otra omisión (la de la tabla de valores utilizada para dar la solución del límite $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x$) que puede causar algún problema en el alumno, puesto que al transcribir directamente el resultado pudiera sobrentender que la situación a la que se llega en este límite (base tendiendo a $+\infty$ y exponente tendiendo a cero con valores positivos) fuera una situación en la que el límite siempre fuera uno, cuando en realidad es una indeterminación (depende de cómo sea esa tendencia). Así, valoraremos con un 3 el último indicador de esta variable.

Variable 3: De los siete dibujos, esquemas y gráficos de los que consideramos que ha constado esta unidad, todos ellos considerados de importancia, el alumno registra tres de ellos en su unidad, mientras que los cuatro restantes no son registrados. Así, al haber aproximadamente la mitad de elementos de este tipo registrados, valoraremos con un 3 los dos primeros indicadores de esta variable.

En este caso, debido a la metodología del Docente 1, que realiza una exposición de la teoría de carácter personal, sin seguir ni utilizar el libro de texto, el registro de los elementos de este tipo sin referencia coincide con el de los elementos totales de este tipo, por lo que este indicador es equivalente al primero. Así, valoraremos con un 3 este indicador.

Precisión de los elementos de este tipo registrados: Consideramos que estos elementos son poco completos en su desarrollo, existiendo varias imprecisiones y errores en los mismos. El alumno no indica en ninguno de sus gráficos la escala y la unidad de medida utilizada en los ejes de los diagramas cartesianos, ni hay ninguna indicación tan siquiera de las divisiones, lo que complica relacionar los comportamientos gráficos mostrados con los conceptos de límite y continuidad, aunque es cierto que el alumno siempre parece utilizar como unidad de medida la proporcionada por la cuadrícula de la hoja. En relación a la corrección de las gráficas, en dos de ellas no se muestra de manera correcta el acercamiento de las ramas asintóticas a la asíntota existente, puesto que la rama es equidistante de la asíntota de un lugar en adelante de manera muy marcada, incluso alejándose en la parte final de su trazado (como en el caso de la asíntota oblicua en el tercero de los gráficos). Esto puede complicar la asimilación del concepto de asíntota y del acercamiento progresivo a la asíntota que caracteriza a las ramas aquí representadas, además de ser incompatible con que lo representado sea una función en el primero de los gráficos, con ramas asintóticas totalmente verticales. En el segundo de los gráficos existe otro problema relacionado con el concepto de función, puesto que el alumno parece marcar dos valores posibles para la función en el punto x=1, punto donde hay un salto y en el que se está estudiando la continuidad (parece realizar puntos “rellenos” en ambas partes). Así, valoraremos con un 2 el último indicador de esta variable.

Variable 4: De las seis observaciones y comentarios de interés, todos ellos de importancia, que consideramos que ha hecho el Docente 1 en el desarrollo de la unidad, este alumno registra dos de ellas de forma completa en su unidad, mientras que hay una que consideramos registrada parcialmente (la indicación de que el límite $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{p\cdot x^n}$ es igual a cero, sin ninguna explicación sobre por qué) y los tres elementos restantes de este tipo no han sido registrados. Así, como registra más o menos la mitad de elementos de este tipo, valoraremos con un 3 los dos primeros indicadores de este tipo.

En este caso, debido a la metodología del profesor, que realiza una exposición de la teoría de carácter personal, sin seguir ni utilizar el libro de texto, el registro de los elementos de este tipo sin referencia coincide con el de los elementos totales de este tipo, por lo que este indicador es equivalente al primero. Así, valoraremos con un 3 este indicador.

Precisión de los elementos de este tipo registrados: Consideramos bastante incompletos o imprecisos los elementos de este tipo recogidos por el alumno. Mientras que ya hemos comentado anteriormente que la indicación sobre el valor del límite es recogida sin ninguna explicación (tan sólo recoge la fórmula), los otros dos comentarios no destacan por ser precisos, pudiendo causar en el alumno algún error de comprensión importante. Por una parte, el primero de ellos es el registro del anticipo sobre cómo se comportan los monomios de un polinomio según su grado cuando $x \to +\infty$, escribiendo que “el denominador pesa más por el cuadrado”, sin especificar a qué se refiere con “pesa más” (en este caso, tiende más rápido a infinito, al ser el monomio de grado más alto en la expresión). Mientras tanto, el otro elemento de este tipo que se registra es la indicación de la no existencia de un límite, en la que escribe que “no existe porque está fuera del dominio”. Este comentario, tal como queda registrado, puede provocar que el alumno identifique erróneamente la no existencia de un límite con la no inclusión del punto en que se calcula el límite en el dominio de la función. En realidad, lo que tiene que pasar es que, entre otras cosas, la función esté definida en un entorno del punto, pero no teniendo ninguna incidencia para que el límite exista o no lo que suceda con la función en dicho punto en concreto. Así, valoraremos con un 2 el último indicador de esta variable.

Dimensión 3

Variable 1: Hemos indicado al final de la dimensión anterior la presencia de algunas de las observaciones y comentarios que ahí teníamos en cuenta. Además, existen algunas observaciones y comentarios más a lo largo de la unidad del alumno. Por ejemplo, en el estudio de la indeterminación $\frac{\to \infty}{\to \infty}$ puede observarse cómo el alumno distingue claramente las tres posibilidades existentes según sea la comparación entre el grado de los polinomios de numerador y denominador (mayor, menor o igual). A10 también escribe que las discontinuidades de tipo esencial “no las vamos a estudiar” en este curso, mientras que recuerda en el ejemplo ilustrativo con indeterminación $(\to \infty) - (\to \infty)$ cómo se resuelve la indeterminación $\frac{\to \infty}{\to \infty}$, indeterminación a la que se llega en el transcurso de la resolución (“nos quedamos con los términos grandes”). En los límites con indeterminación del tipo $\to 1^{\to \infty}$, el alumno suele indicar explícitamente a qué tienden numerador y denominador (calculando los límites correspondientes por separado, sobre todo en el caso de la base), además de justificar en alguna ocasión la aparición del número “e”, comprobando la tendencia a infinito de la expresión de denominador y exponente (sobre todo en el caso menos evidente, con un límite donde $x \to 0$). Así, valoraremos con un 3-4 el primer indicador de esta variable, al haber varios comentarios, observaciones y aclaraciones, y ser relativamente frecuentes en su unidad.

Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con la teoría de la unidad: Consideramos que este indicador tiene un desarrollo pobre en la unidad de este alumno. En el último gráfico sí que se indican las ecuaciones de la asíntota (oblicua) y de la función genérica al ilustrar el concepto, aunque podría haber indicado más explícitamente cuál es la asíntota y relacionar el nombre con la recta. Mientras tanto, en las otras dos gráficas el desarrollo de explicaciones o indicaciones es prácticamente nulo, puesto que ni se indican expresiones analíticas de funciones o asíntotas que se aparecen, además de no indicar las escalas en los ejes ni relacionarlas con los límites calculados o con el estudio de la continuidad. Así, valoraremos con un 2 el segundo indicador de esta variable.

No hay ninguna señal del alumno de partes comprendidas o no comprendidas o que indiquen la existencia de dudas en el alumno a lo largo de la teoría de la unidad, por lo que valoraremos con un 1 el último indicador de esta variable.

Dimensión 4

Variables 1 y 2: Aunque es cierto que en la unidad de este alumno hay una cierta aparición de lenguaje verbal o escrito, consideramos que gran parte del mismo es fruto de la transcripción del desarrollo teórico por parte del profesor, bien al tomar definiciones de elementos, o bien al tomar explicaciones sobre los procesos de resolución de indeterminaciones o al tomar algunos comentarios y observaciones dichos por el propio docente. Así, el EI piensa que no hay suficiente texto elaborado y redactado personalmente por el alumno para que podamos hacer una valoración significativa de los indicadores de estas dos variables, por lo que dejaremos dichos indicadores en blanco. No obstante, destacamos una frase condicional en la que no se utilizan adecuadamente los tiempos verbales: "Si los valores de los límites fueran iguales, la función es continua" (debería escribirse "sería continua" y no es continua).

Variable 3: Encontramos pocos signos de puntuación en la unidad de este alumno en comparación con los necesarios y, además, alguno de ellos está utilizado de manera incorrecta, como la situación de la coma en la escritura de uno de los pasos para la indeterminación $\to 1^{\to\infty}$ ("El exponente se multiplica por $\frac{2x-1}{-2}$ y $\frac{-2}{2x-1}$ para que se quede igual, (multiplicamos inversos) y aplicamos propiedad", sic). Así, valoraremos con un 2 el primer indicador de esta variable.

Faltan bastantes de los signos de puntuación necesarios para el texto escrito por el alumno. Aunque sí que encontramos las comas necesarias, hay un problema muy evidente relacionado con la falta de utilización del punto (tanto al final de las frases como, también, en algunas abreviaturas de palabras). Además, tampoco se utilizan los dos puntos al presentar las tres posibilidades (según los grados de los polinomios) en el estudio de la indeterminación del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$. Así, valoraremos también con un 2 el segundo indicador de esta variable.

Variable 4: No encontramos faltas de ortografía relacionadas con el uso incorrecto de grafemas correspondientes con el mismo fonema o con fonemas similares, por lo que valoraremos con un 5 el segundo indicador de esta variable.

Separación adecuada de palabras: Aunque no existen faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras, sí que encontramos alguna ocasión en la que el espacio que deja el alumno es demasiado escueto, lo que puede provocar la presencia de alguna ambigüedad sobre si dos palabras están o no separadas. Así, valoraremos con un 4 el segundo indicador de esta variable.

En relación con el uso de las mayúsculas, no encontramos tampoco errores en este sentido, pero sí que es cierto que puede existir alguna ambigüedad provocada por la realización con un tamaño exagerado de la letra en algunas partes (frente a otras) y de los problemas con las letras "d" y "p" y el pequeño tamaño de las partes que sobresalen superior e inferiormente, lo que puede derivar en la presencia de alguna ambigüedad entre una letra y otra. Valoraremos con un 4 el tercer indicador de esta variable.

Acentuación correcta en la unidad y uso de la tilde: Encontramos algunos errores relacionados con la acentuación, aunque son pocos en la unidad. Por una parte, el alumno acentúa indebidamente la palabra “oblicua”. Mientras, falta por acentuar un “qué” en una oración donde se utiliza de modo interrogativo (“No puedes deducir qué pasa con el cociente”), así como en la abreviatura de límite, “lím”, en un título de apartado. Tampoco escribe la tilde en la simbología asociada al límite. Valoraremos con un 3 el último indicador de esta variable.

Dimensión 5

Variable 1: Consideramos que este alumno hace un uso relativamente frecuente de las representaciones verbales de los conceptos y del lenguaje matemático, puesto que escribe bastantes de las definiciones de elementos, en varias de las indeterminaciones intenta explicar verbalmente el proceso de resolución de las mismas (aunque sea brevemente), y toma algunos comentarios y aclaraciones en el desarrollo de la unidad. Por tanto, valoraremos con un 3-4 el primer indicador para este tipo de representaciones. Uso preciso y pertinente: Encontramos bastantes imprecisiones y errores relacionados con las representaciones de tipo verbal a lo largo de la unidad. La primera la encontramos nada más comenzar, al escribir “tenderse” en lugar de tender cuando define este término al presentar el concepto de límite. En la indicación de los tipos de discontinuidades, el alumno utiliza indebidamente el plural y omite el término “discontinuidad”, al escribir que “Si no exista f(x) a la izquierda o a la derecha de x=a Esenciales” (sic). Encontramos varios errores e imprecisiones relacionados con la verbalización de la resolución de límites con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$. Por una parte, en la zona donde explica verbalmente cómo resolverlas, encontramos la utilización de un término incorrecto al indicar cómo se resuelven, puesto que indica que “nos fijamos en los términos de primer grado”, en lugar de en los de mayor grado (aunque luego procede adecuadamente, bien es cierto que pudiera asimilar lo que escribe con que siempre sea el primero de los términos del polinomio, dado que frecuentemente los polinomios suelen presentarse con los monomios ordenados según el grado). Además, en un ejemplo anterior en el que anticipa cómo se resuelven, el alumno usa términos poco claros al escribir que “el denominador pesa más por el cuadrado”, sin explicar a qué se refiere con “pesa más” (parece querer referirse a que crece más rápidamente y, por eso, es el monomio dominante en la resolución del límite). Y en un ejemplo posterior donde recuerda cómo resolver la indeterminación, vuelva a utilizar una terminología pobre al escribir que “Nos quedamos con los términos grandes”, sin aclarar a qué se refiere con grandes (no hay referencia al grado). En la última parte de la unidad observamos cómo el alumno asocia que la diferencia entre dos números sea cada vez menor con que tienda a cero la diferencia (puede pasar lo primero sin que pase lo segundo). Así, valoraremos con un 2 el segundo indicador para este tipo de representaciones.

Representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático: Consideramos que el alumno hace un uso relativamente frecuente de las representaciones de este tipo, puesto que sí que recoge gran parte de las reglas y fórmulas correspondientes al desarrollo teórico y varios de los ejemplos, pero también es cierto que faltan una cantidad apreciable de ejemplos (sobre todo en límites con funciones irracionales y exponenciales sin indeterminación). Así, valoraremos con un 3-4 el primer indicador para este tipo de representaciones. Uso preciso y pertinente: A lo largo de la unidad encontramos un número muy elevado de errores e imprecisiones en la utilización de representaciones simbólicas, algunos de ellos muy generalizados a lo largo de la unidad. El fallo más repetido es el uso indebido de la flecha (en lugar del igual) en cadenas de igualdades asociadas a procesos de resolución de límites. Este error sucede en más de una quincena de ocasiones, no sólo asociado a la escritura de expresiones equivalentes sino también en el último paso, al dar el resultado del límite. Además, en un par de ocasiones no aparece ningún signo en esas cadenas, es decir, omite el signo igual pero tampoco utiliza otro signo para indicar la equivalencia de expresiones. Otros fallos que encontramos en la unidad asociados al signo igual son: no poner los iguales al cambiar de línea en el proceso de resolución de un límite o poner iguales entre cosas que no lo son, como en el intento de justificación de la fórmula para obtener la pendiente de una asíntota oblicua en una función (" $m=\frac{mx+n}{x}=\frac{f(x)}{x}$ "). En otro orden de cosas, encontramos también bastantes errores asociados a la simbología del límite, puesto que el alumno omite el signo del límite en varias ocasiones. En otros casos sí que lo añade al darse cuenta de que no lo había escrito, pero debido a la falta de espacio se realiza con un tamaño muy pequeño y se suele situar por encima o por debajo del desarrollo de la expresión, lo que dificulta el seguimiento del proceso de resolución. Además, en la parte del signo en la que se indica el valor de la variable independiente al que se tiende también hay algún problema adicional, puesto que se olvida de ponerlo en algún caso, mientras que en bastantes ocasiones lo escribe demasiado a la derecha, no debajo del "lím", sino más bien como subíndice por la derecha del mismo, o abarcando también a la escritura de la función. Como hay gran cantidad de errores e imprecisiones, algunos de ellos bastante generalizados a lo largo de toda la unidad, valoraremos con un 1 el segundo indicador para este tipo de representaciones.

Representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático: Consideramos que el alumno hace un uso parcial de las representaciones de este tipo, puesto que recoge tres de las representaciones de este tipo de las siete que son necesarias en un desarrollo completo de la unidad. Así, valoraremos con un 3 el primer indicador para este tipo de representaciones. Uso preciso y pertinente: Las representaciones de este tipo pecan de ser poco completas, existiendo varias imprecisiones y errores en las mismas. El alumno no indica en ninguna de las representaciones gráficas que realiza ni la escala ni la unidad de medida utilizada en los ejes de los diagramas cartesianos, ni hay ninguna indicación tan siquiera de las divisiones que nos den información sobre los valores de las variables que corresponden a los elementos dibujados en ellas, lo que complica poder relacionar los comportamientos gráficos mostrados en las representaciones con los conceptos de límite y continuidad. No obstante, es cierto que el alumno siempre parece utilizar como unidad de medida en los ejes de este tipo de representaciones la que está implícitamente proporcionada por la cuadrícula de la hoja. En relación a la corrección de las representaciones gráficas, en dos de ellas no se muestra de manera correcta el acercamiento de las ramas asintóticas a la asíntota existente, puesto que la rama que dibuja es equidistante de la asíntota de un lugar en adelante de una forma muy marcada, incluso alejándose en la parte final de su trazado (como en el caso de la asíntota oblicua en el tercero de los gráficos). Esto puede complicar la asimilación del concepto de asíntota y del acercamiento progresivo a la asíntota que caracteriza a las ramas aquí representadas, además de ser incompatible con que lo que representa sea una función en el primero de los gráficos, con ramas asintóticas totalmente verticales. Además, en la segunda de las representaciones encontramos otro problema relacionado con el concepto de función, puesto que el alumno parece marcar dos valores posibles para la función en el punto x=1, punto donde hay un salto y en el que se está estudiando la continuidad (parece realizar puntos "rellenos" en ambas partes). Así, valoraremos con un 2 el segundo indicador para este tipo de representaciones.

Variable 2: Encontramos algunos errores derivados de la transcripción incorrecta del desarrollo teórico por parte del profesor, aunque consideramos que son pocos en relación con la cantidad de elementos de esta naturaleza que el alumno registra en su unidad. Así, valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable. Algunos de los errores de este tipo que encontramos en la unidad parecen ser debidos a descuidos del alumno. Por ejemplo, encontramos transcrito un elemento sin sentido en la parte inicial del tema (escribe "y(fx)", posiblemente al querer escribir la expresión analítica genérica de una función, y=f(x)), o encontramos un error en un signo al hacer un cociente en uno de los límites con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ (a partir del cual prosigue la resolución con la expresión que escribe, por lo que observamos que sí que está siguiendo lo que toma, llegando a un resultado final que es opuesto al real). También, en la parte final de la unidad, en la transcripción de la justificación de la fórmula para obtener la pendiente en una asíntota oblicua, escribe erróneamente un subíndice como superíndice (en lugar de x_2 escribe "x^2" al escribir "mx^2+n-y_1"), aunque esta justificación no esté entre los elementos que hemos considerado importantes en el tema. También parece despistarse al tomar los signos intercambiados la primera vez que registra uno de los límites con indeterminación $\to 1^{\to\infty}$, aunque luego prosigue como si hubiera tomado bien la expresión (no obstante, sí que parece seguir el proceso de resolución, puesto que hay explicaciones verbales del mismo, lo que hace que sea menos grave el cometer este error de transcripción en el desarrollo del ejemplo). El error de este tipo que consideramos más grave es la omisión del signo menos en la fórmula con la que pretende ilustrar cómo se comporta el límite con respecto a la suma y la resta: mientras que en el miembro de la izquierda escribe "$\pm$" en el de la derecha sólo escribe "+" como operación. Esto puede provocar algún problema en la asimilación de la regla de conservación que se establece. Así, valoraremos con un 3 el segundo indicador de esta variable.

ANEXO C.8

Este anexo contiene un segundo ejemplo de plantilla rellenada para la unidad práctica, fruto del desarrollo del análisis de una unidad concreta por parte del EI. En particular, se recoge aquí la plantilla rellenada correspondiente a la unidad práctica UP2 (es decir, correspondiente al tema de límites y continuidad de una función) del alumno A10, con la valoración de cada uno de los indicadores y la explicación o justificación de cada una de ellas.

ANÁLISIS DE UNA UNIDAD PRÁCTICA DE UN CUADERNO

Tipo de unidad y tema: UP, "Límites y continuidad"
Cuaderno de: Alumno A10
Centro y curso: Instituto Público, 1º Bach. Científico-Tecnológico
Profesor: Docente 1

DIMENSIÓN 1: Estructura, orden y presentación de la unidad

Variable 1: Organización de la unidad

Información y referencia de los ejercicios	**1**	2	3	4	5
Ausencia en la unidad de ejercicios de otros temas distintos del actual	1	2	3	4	**5**
Orden cronológico de los ejercicios planteados en la clase	1	2	3	**4**	5
Ausencia de ejercicios cuya resolución esté separada en varias partes de la unidad	1	2	3	**4**	5
Claridad en la indicación de los cambios de ejercicio cuando se producen (paso de unos a otros)	1	**2**	3	4	5

Variable 2: Presentación de la unidad

Primera impresión que causa la revisión general de la unidad	**1**	2	3	4	5
Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma	**1**	2	3	4	5
Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad	1	**2**	3	4	5
Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco	1	**2**	3	4	5
Tamaño e integración en la unidad de los dibujos, esquemas o gráficos	1	**2**	3	4	5
Tamaño de la letra, números y signos matemáticos	1	**2**	3	4	5
Legibilidad de la letra	1	**2**	3	4	5
Legibilidad de los números y signos matemáticos	**1**	2	3	4	5

Variable 3: Estilo propio en la unidad

Los indicadores que pueden mostrar que existe un estilo propio en la unidad son:

Personalización en la organización de la unidad	**1**	2	3	4	5
Personalización en la presentación de la unidad	**1**	2	3	4	5
Uso de notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo	**1**	2	3	4	5

Nivel de adecuación de los tipos de rasgos encontrados (en el caso de que el indicador de presencia de ese tipo de rasgos sea mayor o igual que 3):

Adecuación de los rasgos personales de organización de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de los rasgos personales de presentación de la unidad	1	2	3	4	5
Adecuación de las notaciones y representaciones personales que aportan al alumno información sobre la clase y su desarrollo	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 2: Completitud de la unidad

Variable 1: Cantidad de actividades registradas en la unidad

Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente y posteriormente corregidas que se registran en la unidad	1	2	3	4	5
Porcentaje (respecto del total) de actividades propuestas por el docente pero no corregidas posteriormente en el aula que se registran en la unidad	1	2	3	4	5
Cantidad de actividades a mayores de las propuestas registradas en la unidad	1	2	3	4	5
Contenidos abarcados por las actividades a mayores de las propuestas que se registran en la unidad	1	2	3	4	5

Variable 2: Completitud en el desarrollo de las actividades registradas

Grado de completitud de las actividades registradas que fueron corregidas en el aula	1	2	3	4	5
Grado de completitud de las actividades registradas que no fueron corregidas en el aula	1	2	3	4	5

Variable 3: Ejecución por parte del alumno de las actividades registradas en la unidad

Porcentaje (respecto del total) de actividades que se revelan intentadas por el alumno	1	2	3	4	5
Grado de satisfacción en los intentos de resolución de las actividades que ha efectuado el alumno	1	2	3	4	5

Variable 4: Revisión de las actividades que son corregidas

Frecuencia en la corrección de sus errores al resolver las actividades	1	2	3	4	5
Claridad en la indicación de los errores cometidos que corrige	1	2	3	4	5
Explicación de los errores cometidos que corrige	1	2	3	4	5
Registro de las mejoras efectuadas por el profesor durante la corrección de actividades en el aula	1	2	3	4	5
Compleción de actividades durante el proceso de corrección (registro de partes no desarrolladas o toma de resoluciones distintas de la del	1	2	3	4	5

alumno)					
Rehacimiento de ejercicios con pobres intentos de resolución (con grado de satisfacción 1 ó 2) o de apartados erróneos	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 3: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Variable 1: Utilidad de la unidad como instrumento para facilitar el estudio o revisión posterior por parte del alumno

Asiduidad en el registro de comentarios, observaciones y aclaraciones a lo largo de la unidad	1	2	3	4	5
Asiduidad en la escritura de los pasos y procesos seguidos para resolver las actividades	1	2	3	4	5
Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con las actividades de la parte práctica	1	2	3	4	5
Señalización de partes comprendidas y no comprendidas y de dudas en las actividades que componen la parte práctica	1	2	3	4	5

DIMENSIÓN 4: Riqueza y corrección del lenguaje natural utilizado en la unidad

Variable 1: Vocabulario

Variedad y amplitud del vocabulario de la unidad	1	2	3	4	5
Propiedad del vocabulario de la unidad (adecuación y comprensión)	1	2	3	4	5

Variable 2: Gramática y sintaxis

Riqueza y variedad de las estructuras sintácticas empleadas	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de concordancias (género, número, persona) y tiempos verbales	1	2	3	4	5
Corrección en el uso de conectores y organizadores de contenido	1	2	3	4	5

Variable 3: Puntuación

Corrección en el uso de los signos de puntuación existentes en la unidad	1	2	3	4	5
Presencia de los signos de puntuación necesarios en la unidad	1	2	3	4	5

Variable 4: Ortografía

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de grafemas que se corresponden con el mismo fonema o fonemas similares (b/v, ll/y, h)	1	2	3	4	5

Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la separación de palabras	1	2	3	**4**	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con el uso de mayúsculas	1	2	3	**4**	5
Ausencia de faltas de ortografía relacionadas con la acentuación y el uso de la tilde	1	2	**3**	4	5

DIMENSIÓN 5: Nivel de corrección matemática de la unidad: errores existentes

Variable 1: Riqueza y corrección de los sistemas de representación de conceptos y del lenguaje matemático existente en la unidad

Asiduidad en el uso de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	2	**3**	**4**	5
Utilización precisa y pertinente de la representación verbal de los conceptos y del lenguaje matemático (terminología)	1	**2**	3	4	5
Asiduidad en el uso de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	1	2	3	**4**	5
Utilización precisa y pertinente de la representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático (notación)	**1**	2	3	4	5
Asiduidad en el uso de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	**2**	3	4	5
Utilización precisa y pertinente de la representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático (dibujos, gráficos)	1	**2**	3	4	5

Variable 2: Corrección de los elementos transcritos

Ausencia de errores derivados de la transcripción incorrecta de dictados o copias	1	**2**	3	4	5
Tipos de errores derivados de la transcripción existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	**2**	3	4	5

Variable 3: Corrección de los cálculos y los procesos asociados a la aplicación de reglas y propiedades aritmético-algebraicas en la unidad

Ausencia de errores aritmético-algebraicos en la unidad	1	**2**	3	4	5
Tipos de errores aritmético-algebraicos existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	**2**	3	4	5

Variable 4: Corrección de procesos seguidos (distintos de los aritmético-algebraicos)

Ausencia de errores en los procesos de resolución (no aritmético-algebraicos) desarrollados por el alumno en la unidad	1	2	3	**4**	5

Tipos de errores de proceso (no aritmético-algebraicos) existentes en la unidad y nivel de gravedad asociado a los mismos	1	2	3	4	5

Variable 5: Existencia de errores que pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos

Varios de los errores que hemos indicado en variables anteriores pueden llegar a mostrar o revelar deficiencias u obstáculos en la comprensión de conceptos. Por una parte, los errores frecuentes relacionados con los signos igual y la flecha parecen indicar que el alumno no ha asimilado los significados y los usos de ambos signos. Además, en relación a la representación gráfica, pueden vislumbrarse problemas relacionados con los conceptos de asíntota y de función, al aparecer ramas asintóticas equidistantes de la asíntota (que son totalmente horizontales o verticales) de un lugar en adelante, no mostrándose el acercamiento progresivo que las caracteriza. Además, la rama vertical es incompatible con que sea la representación de una función.

Los errores de transcripción en los dos apartados del ej. 5 de la hoja “Funciones 2” (al tomar el dominio de la primera función y al indicar, erróneamente, la existencia de asíntota horizontal, en lugar de vertical, en la segunda), pueden dificultar la obtención del dominio en funciones con radicales (y la restricción que proporciona el denominador existente), así como confundir las condiciones que dan lugar a las asíntotas horizontales y verticales (intercambiarlas, asociando la asíntota horizontal a un límite infinito en un valor finito de la variable independiente).

Por último, el alumno parece no haber asimilado la presencia de una indeterminación en una situación del tipo $(\to\infty)-(\to\infty)$, ya que al llegar a esa situación en el límite nº 41 indica directamente que el resultado es cero, operando como si fueran números; sin tener en cuenta que no son tales, y que el resultado de esa diferencia depende de la “velocidad” de crecimiento de cada uno de los dos sumandos.

Comentarios aclaratorios a la valoración propuesta.-

Dimensión 1

Variable 1: En algunos de los ejercicios encontramos una referencia incompleta. Tan sólo el número del ejercicio, en ningún caso toma el enunciado de los mismos o indica de qué hoja los ha extraído, además de no destacar apenas dicha referencia, que pasa muy desapercibida. En otros casos (más de cinco ejercicios) ni tan siquiera encontramos algún tipo de referencia, ni una marca para indicar su inicio. Por lo tanto, consideramos que la referencia es inexistente o incompleta en la inmensa mayoría de ocasiones, por lo que valoraremos con un 1 el primer indicador de esta variable.

No encontramos en la unidad ningún ejercicio correspondiente a temas distintos del actual, por lo que valoraremos con un 5 este indicador.

Orden cronológico de los ejemplos planteados en la clase: En general, el alumno tiende a respetar el orden cronológico en el que se han desarrollado los elementos, aunque falta alguno de los ejercicios y hay un ejercicio que está partido y cuya resolución aparece en dos lugares diferentes (se comienza antes de un bloque de ejercicios y se retoma después). Así, valoraremos con un 4 este indicador.

Como hemos indicado, encontramos en la unidad un ejercicio cuyo desarrollo está partido en dos trozos separados entre sí. Dicho ejercicio es el ej. 14 de la hoja “Funciones 1”, factorizándose los polinomios en la primera parte del ejercicio y completándose en la segunda parte con el cálculo para comprobar si los puntos son o no infinitésimos. La alumna indica la circunstancia con una flecha que une ambas partes y un pequeño texto que acompaña a la misma, escribiendo “se comprueba”, por lo que consideramos que sí que indica la circunstancia. Valoraremos con un 4 este indicador.

Indicación de los cambios de ejercicio cuando se producen (paso de unos a otros): La falta de referencia en varios de los ejercicios y pobreza de ésta en otros casos, sin destacar el número de ninguna manera, con un tamaño muy pequeño y, en ocasiones, poco legible; así como el poco espacio existente en algunos casos entre ejercicios, hace que la indicación de cambio de ejercicio sea, en varias ocasiones, bastante confusa o inexistente. Así, valoraremos con un 2 el último indicador de esta variable.

Variable 2: Consideramos que la impresión que causa la unidad en una revisión general de la misma es muy desagradable, muy mala, debido al desarrollo caótico en bastantes partes, y muy poco cuidado. Así, valoraremos con un 1 el primer indicador de esta variable.

Limpieza de la unidad y ausencia de tachones en la misma: La unidad es poco limpia, apareciendo demasiados tachones y correcciones de los elementos erróneos, marcándose éstas demasiado por el tipo de bolígrafo que utiliza y, además, corriéndose la tinta en alguna ocasión (mucha suciedad en las hojas finales). Tampoco contribuye a la limpieza el uso de flechas que van uniendo diferentes partes que se van desarrollando de un ejercicio, o líneas que dividen unas partes de otras. Así, el Ei considera que la presentación de la unidad es muy mala, por lo que valoraremos con un 1 este indicador.

Respeto de los márgenes a lo largo de la unidad: Consideramos que el alumno respeta en pocas ocasiones los márgenes. Los márgenes superior e inferior suelen ser muy escuetos en bastantes ocasiones, así como el margen derecho, que suele utilizarse para completar el desarrollo de algunos cálculos. En relación al margen izquierdo, lo respeta en bastantes casos, pero también lo invade en otros, sobre todo para la resolución de algunos límites (por ejemplo, en el ej. 14 de la hoja “Funciones 1”). Por todo ello, valoraremos con un 2 este indicador.

Utilización de los espacios y distribución de los espacios en blanco: La utilización y distribución de espacios puede considerarse como aceptable en algunas zonas, pero hay otras en que consideramos que es realmente mala. Sobre todo en la parte final, donde el alumno utiliza las hojas más de lo que sería deseable, escribiendo en ellas muchos elementos y, en general, de una forma poco organizada. En estas últimas hojas, el alumno tiene que recurrir a la utilización de flechas y a la separación con líneas de las partes para clarificar el desarrollo de las actividades. Es usual que no deje prácticamente espacio entre elementos en esta parte final. Así, valoraremos con un 2 este indicador.

Tamaño e integración en la unidad de dibujos, esquemas y gráficos: Encontramos un elemento de este tipo en la unidad, la gráfica de la función a trozos dada en el ej. 5b de la hoja "Funciones 2". Consideramos que el tamaño de la gráfica es el adecuado, pero su integración es bastante mala, puesto que aparece invadiendo parte del espacio correspondiente al siguiente apartado, sobre cálculo de asíntotas oblicuas. Además, también hay algunos cálculos del propio ejercicio que invaden el espacio de la gráfica. Por todo ello, consideramos que la única gráfica de la unidad no tiene el espacio suficiente para que su integración en la misma sea buena, por lo que valoraremos con un 2 este indicador.

Tamaño de la letra, números y signos matemáticos: Ciertamente el tamaño de estos elementos es variable a lo largo de la unidad, siendo grande en algunas zonas y más pequeño en otras, sobre todo en lo relativo a las aclaraciones que toma el propio alumno. Estos comportamientos son especialmente marcados con las letras, algo menos con los números y signos matemáticos. Valoraremos con un 2 este indicador.

Legibilidad de la letra: Consideramos que la letra del alumno es difícilmente legible en algunas partes, aunque ayuda a que pueda entenderse algo mejor el hecho de que realice las letras de forma separada, sin unirlas entre sí. Continúan los problemas muy marcados con la letra "a" y con las otras vocales, y también con las letras en las que sobresale la parte superior e inferior (como la "d", la "p" o la "g"). En la parte final de la unidad, en un límite planteado por el propio profesor, encontramos un comentario que es prácticamente ilegible. Así, valoraremos con un 2 este indicador.

Legibilidad de los números y signos matemáticos: Existen un gran número de problemas relacionados con estos elementos, que suelen realizarse de manera muy descuidada, dando lugar a confusiones constantes entre ellos y a dificultades claras para su legibilidad. Son especialmente marcados y frecuentes los problemas asociados al número "9", cuya grafía es muy parecida a la letra "g", también hay problemas con los números "4", el "5" y "8" y con la propia letra "g", que se realizan de manera muy forzada en algunos casos. También son generalizados los problemas con la flecha del signo del límite, al indicar el valor al que tiende la variable independiente, una flecha que es irreconocible en algunos casos (grafía muy parecida a la palabra "es"). También con la "x" como variable independiente en algunos casos, especialmente cuando la realiza con poco cuidado, así como con la letra "a" cuando representa un parámetro (heredado de la forma en que realiza la letra). Valoraremos con un 1 el último indicador de esta variable.

Variable 3: No encontramos ningún rasgo propio del alumno en lo que se refiere a la organización en la unidad, su presentación y en la utilización de notaciones y representaciones personales, por lo que consideramos que no hay un estilo propio del alumno en ninguno de los tres casos. Por lo tanto, valoraremos con un 1 el primer indicador en los tres casos, no valorando el segundo al no tener información para ello.

Dimensión 2

Variable 1: De las 25 actividades de este tema que fueron planteadas y posteriormente corregidas en la clase, este alumno registra 21 de ellos en esta unidad, mientras que las otras cuatro actividades de este tipo no han sido registradas. En el caso de una de esas cuatro actividades, el límite nº 10, el alumno salió a resolver esta actividad a la pizarra, por lo que puede ser el motivo para que no aparezca en el cuaderno (no lo intenta con anterioridad o lo intenta en otro sitio, posteriormente no toma su realización en la pizarra). Así, este alumno registra en su unidad un 84% de las actividades planteadas por el profesor y corregidas posteriormente en clase, por lo que valoraremos con un 4 el primer indicador de esta variable.

En esta unidad no hay ninguna actividad que haya sido propuesta por el docente y que posteriormente no haya sido corregida en el aula, por lo que no haremos una valoración de segundo indicador, dejando ésta en blanco.

No encontramos tampoco ninguna actividad a mayores de las que fueron planteadas por el profesor, por lo que la valoración de los dos indicadores para este tipo de actividades es de 1.

Variable 2: De las 21 actividades registradas en la unidad de A10 que han sido propuestas y posteriormente corregidas por el Docente 1 en el aula, este alumno desarrolla de manera completa 16 de ellas, mientras que hay una más que está bastante desarrollada (aunque no completamente) y otras cuatro actividades que tan sólo consideramos como parcialmente desarrolladas. Dichas cuatro actividades son el ej. 15 de la hoja “Funciones 1” y los ejercicios 3, 5a y 5b de la hoja “Funciones 2”, al no indicarse las conclusiones de dichos ejercicios en términos de asíntotas (en el primer caso) o de los tipos de discontinuidades existentes (en los otros tres). Así, de los 21 puntos que podría alcanzar el alumno en la medición del grado de desarrollo en los ejercicios de este tipo, el alumno obtiene 18’75 puntos, un 89’29% del total de puntos posible. Como el porcentaje está entre el 80 y el 95%, valoraremos con un 4 este indicador.

El alumno no registra en la unidad ninguna actividad que no haya sido posteriormente corregida en el aula, por lo que no podemos hacer una valoración del segundo indicador de esta variable.

Variable 3: De las 21 actividades registradas en la unidad de este alumno, consideramos que hay cuatro en las que sí que se revela la existencia de intentos de resolución propios del alumno. Además, en alguna otra actividad puede aparecer algún cálculo aislado que es propio del alumno, pero no el EI no ha considerado que esas actividades puedan calificarse como intentadas por el alumno, al no formar parte estos cálculos del grueso del planteamiento y resolución del mismo, sino del transcurso de la resolución (sobre todo evaluación de polinomios). Así, consideramos que el alumno intenta un 19’05% de las actividades de la unidad, porcentaje muy próximo al 20%, en el que se produce el cambio de 1 a 2 en la valoración, por lo que valoraremos con un 1-2 el primer indicador de esta variable.

Grado de satisfacción en los intentos de resolución realizados por el alumno: La suma de los puntos que hemos otorgado según el grado de satisfacción de los intentos de resolución de las cuatro actividades que parece intentar es de 12 puntos, por lo que la media aritmética de los grados de satisfacción es de 3 puntos por actividad (en la escala de 1 a 5). Así, valoraremos con un 3 el segundo indicador de esta variable.

Variable 4: El alumno corrige los errores que comete en el desarrollo del límite nº 41, que es uno de los cuatro ejercicios que se han detectado como intentados por el alumno. En él se corrigen tanto el error al indicar el resultado inicial (relacionado con un error conceptual, escribiendo que infinito menos infinito es cero, no teniendo en cuenta que es una indeterminación) como el error al operar en la resta de expresiones algebraicas. Sin embargo, el alumno no corrige el error cometido en el desarrollo de la regla de Ruffini (en la que omite la última columna, correspondiente al término independiente) en la resolución del ej. 3 de la hoja “Funciones 2”. Por ello, valoraremos con un 3 el primer indicador de esta variable.

Indicación de los errores cometidos que corrige: En relación al resultado inicial en el límite nº 41, el alumno sobrescribe una interrogación, aunque no indica qué quiere decir con la misma. El error al operar también es corregido sobrescribiendo el número erróneo y tachando el desarrollo posterior a partir del error. Así, la indicación es relativamente clara, pero podía serlo más si no tuviera ese comportamiento de sobrescribir encima de los errores. Así, valoraremos con un 3 este indicador.

El alumno hace un pequeño atisbo de explicación del error cometido al escribir el resultado inicial en el límite nº 41, puesto que el alumno escribe una interrogación después de escribir infinito menos infinito, pero no explica verbalmente qué significa (presencia de indeterminación). En el otro error no hay ninguna explicación. Así, valoraremos con un 2 este indicador.

Registro de las mejoras efectuadas por el profesor durante la corrección de actividades en el aula: Del total de once mejoras que consideramos que ha efectuado el profesor a lo largo de la unidad en la corrección de las diferentes actividades, este alumno registra cinco, algo menos de la mitad, pero no todas ellas de forma completa. Sí que consideramos registrado de forma completa el estudio del valor del límite y las asíntotas según el parámetro “a” en el límite nº 37, así como la existencia de asíntotas verticales en los puntos del ej. 3 de la hoja “Funciones 2”. Además, encontramos otros dos ejercicios en los que toma parcialmente el estudio de asíntotas (en el límite nº 41 indica la existencia de asíntota vertical, pero cuál es la ecuación; mientras que en el ej. 5a de la hoja “Funciones 2” toma los límites de los que se deriva la información sobre las asíntotas, pero no verbaliza ésta). Por último, en el ej. 5b de esta misma hoja toma la gráfica con la representación de la función a trozos dada en el apartado, aunque faltan algunas indicaciones sobre las asíntotas existentes. Así, valoraremos con un 2-3 este indicador.

Compleción de las actividades durante el proceso de corrección: El alumno hace una resolución que se ha considerado como incompleta en dos de las cuatro actividades que intenta y que, posteriormente, son corregidas por el alumno. En una de esas dos actividades, el cálculo de la asíntota oblicua de $f(x)=\frac{3x^2+x}{1-x}$, el alumno sí que completa la parte que le faltaba (cálculo de la ordenada en el origen) durante la corrección de la actividad. Sin embargo, en la otra actividad en esta circunstancia, el ej. 3 de la hoja “Funciones 2”, no completa nada sobre las discontinuidades existentes. Además, hemos de indicar que el alumno toma la resolución realizada en la clase para calcular el límite nº 31, que había intentado resolver de forma correcta pero utilizando un método distinto al visto en clase. Es decir, toma una resolución distinta de la suya durante la corrección, que completa dicho ejercicio. Así, valoraremos con un 3-4 este indicador.

Rehacimiento de ejercicios pobremente desarrollados o con resolución poco satisfactoria: En tan sólo una de las cuatro actividades intentadas por el alumno y posteriormente corregidas hemos consideramos que su resolución haya sido pobre o poco satisfactoria (con una valoración de 2 en la escala de 1 a 5). Dicha actividad es el límite nº 41. En esta actividad, observamos cómo el alumno no rehace totalmente la misma, pero sí que rehace la resolución a partir del error que había cometido, en la primera parte de dicho cálculo, transcribiendo la resolución. Así, valoraremos con un 4 este indicador.

Dimensión 3

Variable 1: Encontramos un número muy elevado de comentarios, observaciones y aclaraciones, bien del profesor o bien propios del alumno, a lo largo de la unidad, por lo que valoraremos con un 5 el primer indicador de esta variable, al considerar que su registro es muy frecuente en la unidad. Entre estos comentarios y aclaraciones podemos resaltar las indicaciones en el ej. 11 de la hoja “Funciones 1” sobre el grado de numerador y denominador para el resultado del límite con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$, la indicación sobre que 3 debe ser raíz común de ambos polinomios de la fracción algebraica en el ej. 13 de esa misma hoja, escribe qué debe de pasar para que exista un infinitésimo (“f(x)=0 cuando el numedor es 0 y el denomidador no”, sic) en el ej. 14 de esa misma hoja, la indicación de la presencia de límites laterales infinitos en el límite nº 13, el comentario recordando la manera más corta de resolver indeterminaciones $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ tras un intento suyo de resolución en el límite número 31 (“No hace falta, ya que nos quedamos con los términos de mayor grado”), la indicación sobre la presencia de un factor al cuadrado en uno de los denominadores de los límites del ej. 15 de la hoja “Funciones 1” (“como está al cuadrado pasa lo mismo”), aunque la explicación sea algo difusa; y algunas aclaraciones en el cálculo de límites, como la comprobación de la tendencia a infinito de una expresión para la aparición del número “e” en el límite nº 96, la escritura de la solución decimal aproximada (además de la expresión con radicales) en el límite nº 36, la solución “0^+” en el límite 104 y la indicación de que se “toman los valores que condicionan” para resolver un límite con indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ que se obtiene a lo largo del cálculo del límite planteado por el propio profesor.

Asiduidad en la escritura de los pasos y procesos seguidos para resolver las actividades: Se detecta la existencia de un esfuerzo por parte del alumno al escribir de forma verbal o, al menos, de forma simbólica, los pasos y procesos seguidos en la resolución de gran parte de las tareas. Por una parte, en los ejercicios en los que se pide resolver directamente un límite, suele indicar simbólicamente los pasos de la resolución y, en algunos casos, se complementa de indicaciones verbales de ciertos pasos en concreto (“restamos”, “hacemos la resta”, “simpl” [simplificamos]). En los ejercicios que son algo más que un mero cálculo de límites sí que intenta indicar algunos de los pasos seguidos de forma verbal, aunque tampoco se hace de forma sistemática y con todos ellos. Así, valoraremos con un 4 el segundo indicador de esta variable

Explicación de lo que representan los dibujos, esquemas y gráficos y relación con las actividades de la parte práctica: Tan sólo encontramos una gráfica en la unidad de este alumno, como ya hemos comentado en la Dimensión 1. El EI considera que el desarrollo de este indicador es muy pobre en esta gráfica, puesto que tan sólo podemos destacar cómo se marca un punto “hueco” en la gráfica, además de las líneas discontinuas para marcar las asíntotas, pero no marca la escalas ni los valores importantes en los ejes, tampoco escribe las ecuaciones de las asíntotas ni de las expresiones analíticas de cada trozo, ni indica qué representa ese punto “hueco” en relación a los cálculos previos de límites realizados y qué tipo de discontinuidad. Así, valoraremos con un 1-2 este indicador.

No hay señales del alumno que indiquen la presencia de partes comprendidas o no comprendidas a lo largo de la unidad, o de dudas en las actividades que componen la parte práctica, por lo que valoraremos el último indicador de esta variable con un 1.

Dimensión 4

Variables 1 y 2: Consideramos que la gran mayoría del texto que aparece escrito por el alumno en la unidad ha sido transcrito de la corrección de actividades realizada en el aula (explicaciones de los pasos, algunos comentarios importantes tomados durante la resolución). No obstante, también hay alguna aclaración o escrito personal que parece propio del alumno, pero el EI ha considerado que no hay suficiente cantidad de texto elaborado y redactado personalmente por el alumno para que pueda realizarse una valoración significativa de los dos indicadores de esta variable.

Variable 3: Los signos de puntuación que el alumno toma en el texto que escribe están correctamente utilizados, aunque es difuso hablar de corrección debido a que faltan bastantes de los signos de este tipo que son necesarios para la escritura de dicho texto. En algún caso los signos de puntuación se realizan de forma poco cuidada, como los signos de interrogación en el ej. 12 de la hoja “Funciones 1”. Valoraremos con un 3 este primer indicador.

Como acabamos de anticipar en el párrafo anterior, faltan bastantes de los signos de puntuación necesarios para el texto escrito en la unidad, puesto que faltan bastantes de los puntos al final de frases, también algunas comas en los comentarios y los dos puntos en alguna ocasión, en una frase en la que se presenta un cálculo. Así, valoraremos con un 2 el segundo indicador de esta variable.

Variable 4: No encontramos ninguna falta de ortografía relacionada con el uso incorrecto de grafemas correspondientes con el mismo fonema o con fonemas similares, por lo que valoraremos con un 5 el primer indicador de esta variable.

Separación adecuada de palabras: No encontramos faltas de ortografía relacionadas con la separación adecuada de palabras, pero sí que es cierto que, en algunos casos, esas separaciones son demasiado pequeñas, pudiendo ser ambiguo o dar lugar a alguna confusión el hecho de determinar si dos palabras están separadas o no en el texto. Así, valoraremos con un 4 este indicador.

En relación con el uso de la mayúscula, sería deseable que comenzara con mayúscula alguno de los comentarios que no empieza con tal tipo de letra, aunque es cierto que a veces son aclaraciones o comentarios muy escuetos, que casi no pueden considerarse como oraciones, sin acción verbal. Así, valoraremos con un 4 este indicador.

Acentuación correcta en la unidad y uso de la tilde: Encontramos algunos problemas de acentuación en la unidad, aunque son pocos. Falta la tilde en alguna ocasión en la palabra "límite" (aunque en otros casos sí que se escribe con tilde), y también en la palabra "está" (del verbo estar). Valoraremos con un 3 el último indicador de esta variable.

Dimensión 5

Variable 1: Consideramos que el alumno hace un uso relativamente frecuente de las representaciones verbales de los conceptos y del lenguaje matemático, puesto que sí que se escribe en varias ocasiones los pasos y procesos seguidos en la resolución de actividades de forma verbal, además de existir bastantes comentarios y aclaraciones. Sin embargo, no escribe los enunciados de los ejercicios. Por todo ello, valoraremos con un 3-4 el primer indicador para este tipo de representaciones. Uso preciso y pertinente: Encontramos bastantes imprecisiones y errores en las representaciones de tipo verbal. Por un lado, encontramos dos errores al escribir términos en el comentario que hace sobre la obtención del infinitésimo en el ej. 14 de la hoja "Funciones 1", puesto que escribe "numedor" y "denomidador", en lugar de numerador y denominador, respectivamente. En relación a estas mismas palabras, es frecuente el uso de abreviaturas poco usuales, como "num" o "den", que pueden ser difíciles de identificar (sobre todo la primera, puesto que puede confundirse, por ejemplo, con una abreviatura de la palabra "número"). Algo similar sucede con las abreviaturas de infinitésimo en el ej. 14, "infin" e "infinit", que pueden resultar confusas con la palabra infinito (además, la palabra "infinitésimo" no se escribe de forma completa en ningún momento de la unidad). Otra imprecisión la encontramos en la omisión del término "laterales" cuando habla de este tipo de límites, escribiendo solamente "límites infinitos". En el ej. 5a de la hoja "Funciones 2" el alumno escribe que "$(x-3)^2$ es siempre positivo excepto 3", pudiendo resultar confusa la parte final al no indicar el "x=" que aclararía que se está refiriendo a ese valor en concreto de la variable independiente, y evitar confusiones con la imagen o con la cantidad de puntos en que eso suceda. En el ej. 15 de la hoja "Funciones 1" encontramos un comentario poco claro al indicar que "Como está al cuadrado, pasa lo mismo" en un factor elevado el cuadrado existente en un denominador. No explica a qué se refiere con "pasa lo mismo", con el que parece indicar la tenencia del mismo signo a ambos lados del punto en el que se está calculando el límite. El fallo más grave lo encontramos en el ej. 5b de la hoja "Funciones 2", al confundir asíntota horizontal y vertical en una ocasión, escribiendo "asíntota horizontal" al lado de un límite del que, en realidad, se deduce la existencia de una asíntota vertical (límite infinito en un valor finito de la variable independiente). Por todo ello, valoraremos con un 2 el segundo indicado para este tipo de representaciones.

Representación simbólica de los conceptos y del lenguaje matemático: Consideramos que el alumno hace un uso frecuente de las representaciones de este tipo a lo largo de la unidad, puesto que registra o realiza gran parte de los ejercicios que propuso el profesor (aunque no todos), y la mayoría de ellos de manera bastante completa. No obstante, en algún caso esporádico se puede apreciar cierta vaguería del alumno al utilizar la escritura de puntos suspensivos para no repetir expresiones analíticas que se repiten en la resolución de un límite (en el ej. 12 de la hoja "Funciones 1"). Valoraremos con un 4 el primer indicador para este tipo de representaciones. Uso preciso y pertinente: Encontramos un número muy abundante de errores en las representaciones de este tipo, varios de ellos bastantes generalizados y que consideramos de gravedad. La gran mayoría de esos errores están asociados a tres signos: el igual, la flecha y el signo del límite. En relación a los dos primeros, es muy frecuente en la unidad de este alumno (al igual que sucedía en la correspondiente unidad teórica) el uso indebido de la flecha en lugar del igual en las cadenas de igualdades para resolver indeterminaciones. Encontramos este uso indebido más de veinte veces a lo largo de la unidad. También hay alguna ocasión en la que omite el signo igual, como al cambiar de línea en estas cadenas de igualdades. También encontramos un número elevado de errores relacionados con el signo del límite, $\lim\limits_{x\to}$.

Por una parte, es frecuente que el alumno omita dicho signo en las cadenas de igualdades (casi una decena de veces), mientras que en otros casos lo omite en primera instancia pero luego, al darse cuenta de su omisión, lo intenta poner en el espacio resultante (generalmente encima o debajo), lo que complica la lectura de la cadena de igualdades resultante. En alguna otra ocasión, aunque más aislada, escribe el signo cuando ya no se necesita. Otra parte de este signo con la que hay problemas adicionales es la parte en la que indica el valor de la variable independiente al que tendemos. Esta parte es omitida en alguna ocasión, pero lo más frecuente es que la ubique incorrectamente en la expresión, escribiéndolo más como subíndice a la derecha del "lím" que debajo del mismo. Otros errores: en un par de ocasiones omite el paréntesis necesario para indicar correctamente productos en los que están involucrados binomios, mientras que en otra ocasión se come el nombre de la función en un proceso de resolución de un límite. Así, valoraremos con un 1 el segundo indicador para este tipo de representaciones.

Representación gráfica de los conceptos y del lenguaje matemático: Aunque tampoco sean necesarias muchas representaciones de este tipo a lo largo de la unidad para la resolución de estos ejercicios, el alumno tan sólo recoge una representación gráfica en toda la unidad: el gráfico de la función definida a trozos que se da en el ej. 5b de la hoja "Funciones 2". Así, valoraremos con un 2 el primer indicador para este tipo de representaciones. Uso preciso y pertinente: Consideramos que existen varias imprecisiones y errores en la única representación de este tipo existente. Por una parte, el alumno no indica la escala ni la unidad utilizada en los ejes del diagrama cartesiano, y tampoco indica los valores más importantes en estos ejes, lo que dificulta la interpretación de la misma y la obtención de información. No obstante, parece utilizar como unidad la implícita en la cuadrícula de la hoja. El trazado podía ser más preciso, puesto que parece usar tippex para realizarla, lo que hace que pierda claridad. Encontramos algunas ramas asintóticas que son equidistantes de la asíntota de un lugar en adelante (una horizontal y otro vertical), no mostrándose el acercamiento progresivo a la asíntota que caracteriza a las ramas. En otro caso, la asíntota no se dibuja completa (se deja de dibuja demasiado pronto), lo que dificulta identificar la rama que tiende a ella como asintótica. Así, existen varias imprecisiones graves en el trazado de estas ramas asintóticas, que en el caso de que sean verticales también resultan ser incompatibles con que lo que representan sea una función. Valoraremos con un 2 el segundo indicador de esta variable.

Variable 2: Encontramos varios errores derivados de la transcripción incorrecta de la corrección de actividades desarrollada en el aula, por lo que valoraremos con un 2 el primer indicador de esta variable. Algunos de ellos parecen derivados de despistes o de poca atención al copiar algunos elementos, como un error en un número de los que se escriben al aplicar la regla de Ruffini en el ej. 12 de la hoja “Funciones 1”, un error al reescribir un polinomio en varios pasos en el ej. 15 de esa misma hoja (que es corregido por el alumno) o un error al indicar la variable independiente (escribe “a” en lugar de “x” en la mejora tomada para el límite nº 37). Sin embargo, encontramos tres errores de este tipo que el EI considera de mayor gravedad, puesto que pueden mostrar o causar problemas en la comprensión de algunos conceptos o técnicas. Por un lado, hay un error al tomar la factorización del denominador en el Ej. 14 de la hoja “Funciones 1”, no concordando con la escritura de cuáles son las raíces del denominador que toma justo a la derecha (escribe en el denominador $(x-3)^2$ y luego escribe a la derecha que x=1 e x=5 son las raíces de éste), lo que puede causar algún problema en la relación entre factorización y su obtención y las raíces del polinomio. En el ej. 5a de la hoja “Funciones 1” hay un error al escribir cuál es el dominio de la función $f(x)=\sqrt{2+\frac{1}{(x-3)^2}}$, puesto que escribe que es “D=R ya que $(x-3)^2$ es siempre positivo excepto 3”, no concordando el comentario con el resultado que da para el dominio, pudiendo dificultar la comprensión de qué sucede en esta función. Por último, en el apartado b de este mismo ejercicio hay un error al indicar que una función tiene una “Asíntota horizontal” (en lugar de “Asíntota vertical”) al calcular el límite en un punto en el que existía una indeterminación del tipo $\frac{\to k(\neq 0)}{\to 0}$, lo que puede hacer confundir al alumno los dos tipos de asíntotas y su obtención. Así, valoraremos con un 2 el segundo indicador de esta variable.

Variable 3: A pesar de que no hay muchos cálculos y procesos de tipo aritmético-algebraico en la unidad de este alumno, encontramos algunos fallos de este tipo, por lo que valoraremos con un 2 el primer indicador de esta variable. Uno de los fallos está en el ej. 3 de la hoja “Funciones 2”, en el que omite una de las columnas (la relativa al término independiente) al desarrollar una regla de Ruffini. Dicho término independiente era cero, pero es necesario añadirla en la unidad. No obstante, como quería el resultado para factorizarlo, al ser cero la variable independiente no cambian las raíces del polinomio (para el parámetro) que obtiene con los que se obtienen añadiendo dicha columna. Además, encontramos un error aritmético-algebraico al operar la resta de fracciones en el límite nº 41 en la reducción a común denominador dicha resta. El alumno se olvida de multiplicar por 3 (numerador) uno de los dos elementos del binomio por el que tiene que multiplicar para llegar al denominador común (es decir, debía multiplicar 3·(x-1) y escribe como producto 3x-1). Consideramos que este segundo error es de mayor gravedad, puesto que puede indicar un déficit operacional del alumno al hacer este tipo de operaciones (en el primero, siendo benévolos, podemos pensar que el alumno se da cuenta de que no cambian las raíces de la expresión y por eso no añade la última columna, para la cual sí que encontramos que deja el espacio). Así, valoraremos con un 2 el segundo indicador de esta variable.

Variable 4: Encontramos un error en un proceso distinto de los aritmético-algebraico. Consideramos este error como grave puesto que está relacionado con la falta de asimilación de la situación resultante. Dicho error lo encontramos en el límite nº 41 en el que, tras sustituir por x=1 en la resta de fracciones, el alumno llega a dos fracciones con denominador cero, y escribe que el resultado es "$\infty - \infty = 0$". Así, parece que el alumno no ha asimilado que esa situación corresponde a una indeterminación, en la que el resultado no está determinado puesto que pueden existir diferentes "velocidades" en la tendencia a infinito de estos números. Parece que, en este caso, el alumno opera con el infinito como si fuera un número cualquiera, no teniendo en cuenta la consideración anterior. Así, valoraremos con un 4 el primer indicador de esta variable y con un 2 el segundo.

ANEXO D

Anexos asociados al desarrollo del análisis cuantitativo (Capítulo V)

En este conjunto de anexos hemos recogido información complementaria sobre el desarrollo del análisis cuantitativo de las valoraciones de los indicadores que se presenta en el Capítulo V de la memoria de la tesis doctoral. Se ha decidido incluir esta información en un anexo para no sobrecargar con un excesivo número de tablas el capítulo correspondiente de la memoria, recogiendo aquí aquellas partes que son más rutinarias o que recogen la información detallada sobre pasos o comprobaciones necesarias para llevar a cabo diferentes pruebas estadísticas.

En concreto, este conjunto de anexos se compone de trece anexos específicos. Se especifica a continuación la información que contiene cada uno de ellos.

- El Anexo D.1 está asociado al tratamiento que se ha realizado a los indicadores sin valoración numérica para poder desarrollar el análisis cuantitativo pretendido. Ese tratamiento se presenta en el primer apartado del Capítulo V. En concreto, en este anexo se detallan todos los cambios realizados en el Paso 3.

- El Anexo D.2 también está asociado al tratamiento que se ha realizado a los indicadores sin valoración numérica para poder llevar a cabo el análisis cuantitativo buscado. En concreto, aquí se detallan todos los cambios realizados en el Paso 5.

- El Anexo D.3 recoge tablas con información descriptiva de las valoraciones globales de todos los indicadores, excluyendo ya las valoraciones del alumno considerado como caso atípico, estudiante A18.

- En el Anexo D.4 se presenta la matriz de correlaciones correspondiente a todos los indicadores de las unidades teóricas que participan en el análisis de componentes principales (ACP). Dicho análisis se desarrolla en el subapartado V.2.1 de la tesis doctoral.

- El Anexo D.5 contiene la matriz de cargas factoriales que se ha obtenido al realizar el ACP en las unidades teóricas, en el que se han seleccionado las primeras trece componentes como componentes principales.

- El Anexo D.6 contiene las matrices de cargas factoriales rotadas para cada uno de los tres métodos de rotación ortogonal más usuales: Varimax, Quartimax y Equamax, en el caso de las unidades teóricas.

- El Anexo D.7 recoge la matriz de correlaciones correspondiente a todos los indicadores de las unidades prácticas que participan en el ACP desarrollado para este tipo de unidades (subapartado V.2.2)

- El Anexo D.8 contiene la matriz de cargas factoriales que se ha obtenido en el ACP llevado a cabo en las unidades prácticas, en el que se han seleccionado las primeras dieciséis componentes como componentes principales.

- El Anexo D.9 contiene las matrices de cargas factoriales rotadas para cada uno de los tres métodos de rotación ortogonal más usuales: Varimax, Quartimax y Equamax, en el caso de las unidades prácticas.

- En el Anexo D.10 se recogen los resultados obtenidos al desarrollar las pruebas de normalidad en los tres grandes grupos para las unidades teóricas (GGT1, GGT2 y GGT3) y para cada una de las trece componentes consideradas como principales.

- El Anexo D.11 recoge los resultados obtenidos al implementar las pruebas de normalidad en los seis grupos para las unidades teóricas (GT1 a GT6) y para cada una de las trece componentes consideradas como principales.

- El Anexo D.12 contiene los resultados que se han obtenido al ejecutar las pruebas de normalidad en los dos grandes grupos para las unidades prácticas

(GGP1 y GGP2) y para cada una de las dieciséis componentes consideradas como principales.

- El Anexo D.13, por último, recoge los resultados de la implementación de las pruebas de normalidad en todos los subgrupos de los dos grandes grupos para las unidades prácticas y para una de las dieciséis componentes principales.

ANEXO D.1

En este anexo detallamos los cambios hechos en el Paso 3 del tratamiento de los indicadores sin valoración numérica para el desarrollo del análisis cuantitativo (apartado V.1 de la memoria de tesis doctoral). En dicho subapartado se explican los criterios para realizar estos cambios. En este anexo informaremos de los cambios en todos los indicadores que se mantienen con alguna valoración en blanco después de los dos primeros pasos. Esa información se proporciona indicador por indicador. Se hace referencia a los indicadores con una notación que indica primero la dimensión en la que está encuadrado el indicador, posteriormente el número de la variable dentro de la dimensión y, por último, el número que le corresponde al indicador dentro de la variable, respetando el orden en el que fueron presentados en el Capítulo IV de la tesis doctoral. Por ejemplo, el indicador D1V2Ind5 hace referencia al indicador quinto de la Variable 2 de la Dimensión 1.

Dentro de cada indicador, detallamos el cambio en todas las unidades afectadas, indicando previamente a qué alumno corresponden. Se ha utilizado la notación usual para unidades y alumnos.

INDICADOR D1V2Ind5 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A1 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UT1 y con un 3 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" en la matriz de datos por un 3'5.

A1 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" en la matriz de datos por un 3.

A2 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UT1 y con un 3 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" en la matriz de datos por un 3'5.

A2 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" en la matriz de datos por un 3.

A3 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3'5 en la UT1 y con un 4 en la UT2 de este mismo alumno. La media aritmética es 3'75, fuera del rango posible de valores. Así, sustituimos el "0" en la matriz de datos por un 3'5, el primer valor inmediatamente inferior a la media que sí está en el rango de posibles codificaciones.

A4 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el "0" en la matriz de datos por un 3.

A8 (UT2): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UT1 como en la UT3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 3.

A9 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el "0" en la matriz de datos por un 4.

A18 (UT1): Tan sólo tenemos una unidad teórica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco ("0" en la matriz de datos).

INDICADOR D1V2Ind7 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" en la matriz de datos por un 3.

INDICADOR D2V1Ind4 (EN LAS UT)

A8 (UT1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT2 y con un 2 en la UT3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 2'5.

A18 (UT1): Tan sólo tenemos una unidad teórica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D2V2Ind4 (EN LAS UT)

A18 (UT1): Únicamente tenemos una unidad teórica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado porque no existe ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco.

INDICADOR D2V3Ind4 (EN LAS UT)

A1 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A2 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 2.

A3 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A4 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 2.

A8 (UT2): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UT1 como en la UT3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A9 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A18 (UT1): Tan sólo tenemos una unidad teórica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D2V4Ind4 (EN LAS UT)

A1 (UT2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT1 y con un 2 en la UT3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A2 (UT1, UT2 y UT3): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en cada una de las tres unidades (“0” en la matriz de datos).

A8 (UT1, UT2 y UT3): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en cada una de las tres unidades (“0” en la matriz de datos).

A9 (UT1 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT2 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 3.

A11 (UT1 y UT2): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UT3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 4.

A12 (UT2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UT1 y con un 4 en la UT3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A14 (UT1): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UT2 y con un 5 en la UT3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4’5.

A16 (UT1 y UT2): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UT3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 5.

A18 (UT1): Tan sólo tenemos una unidad teórica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

A21 (UT2): Tan sólo tenemos una unidad teórica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

A23 (UT1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A26 (UT1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A35 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A37 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 y con un 3 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A40 (UT1): Tan sólo tenemos una unidad teórica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

A41 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

INDICADOR D2V1Ind2 (EN LAS UP)

A1 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A2 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A3 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2’5 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A4 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A6 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A7 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A8 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A9 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A10 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A11 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 y con un 3 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A12 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UP1 como en la UP3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A13 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UP1 como en la UP3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A14 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 5 tanto en la UP1 como en la UP3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A15 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 y con un 1 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1’5.

A16 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 y con un 3 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A17 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP1 y con un 2 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

A19 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A20 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

A22 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A23 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A24 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A25 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A26 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A27 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A28 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A29 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A31 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP1 y con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A32 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 y con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

A33 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP1 y con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

A34 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 y con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A35 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UP1 como en la UP2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A36 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 y con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A37 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 y con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

A38 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP1 y con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4’5.

A39 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 y con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A41 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 y con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

INDICADOR D2V2Ind2 (EN LAS UP)

A1 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A2 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades ("0" en la matriz de datos).

A4 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades ("0" en la matriz de datos).

A7 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 3.

A8 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 3.

A9 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades ("0" en la matriz de datos).

A10 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 4.

A11 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 y con un 3 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 2'5.

A12 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 y con un 3 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 2'5.

A14 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP1 y con un 3 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 3'5.

A15 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UP1 como en la UP3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 2.

A17 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP1 y con un 3 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 3'5.

A19 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el "0" de la matriz de datos por un 1.

A20 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

A22 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades (“0” en la matriz de datos).

A23 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A24 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades (“0” en la matriz de datos).

A25 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A26 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A29 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A31 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 4 tanto en la UP1 como en la UP2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A32 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 4 tanto en la UP1 como en la UP2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A33 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP1 y con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

A36 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP1 y con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4’5.

A38 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UP1 como en la UP2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A39 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP1 y con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

INDICADOR D2V3Ind2 (EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A7 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A8 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A15 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 y con un 3 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D2V4Ind1 (EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A3 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A6 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A7 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades (“0” en la matriz de datos).

A8 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A9 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A10 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A11 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 y con un 3 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A12 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 y con un 2 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1’5.

A15 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 2.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D2V4Ind2 (EN LAS UP)

A1 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A3 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A5 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. No obstante, en el D2V4I1 el alumno tiene una valoración de “1”, indicándose que no corrige ninguno de los errores que comete. Así, no indica ninguno de los errores, por lo que sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A6 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A7 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. Además, el indicador D2V4I1 tampoco tenía información para su valoración (el alumno no comete ningún error), por lo que, de momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades (“0” en la matriz de datos).

A8 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A9 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. No obstante, este alumno tiene, en su UP1, una valoración de 1 en el indicador D2V4I1, indicándose que no corrige ninguno de los errores que comete. Así, en la UP1 este alumno no indica ninguno de los errores cometidos, por lo que sustituiremos el “0” de la matriz de datos por un 1. Por extensión, como no hay información para UP2, sustituiremos también el “0” de la matriz de datos por un 1.

A10 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A11 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 3.

A12 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 3.

A15 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 3.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. Este alumno tampoco tenía ninguna valoración en el indicador D2V4I1 (el alumno no comete ningún error), por lo que, de momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en esta unidad (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D2V4Ind3 (EN LAS UP)

A1 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A3 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A5 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. No obstante, en el D2V4I1 el alumno tiene una valoración de “1”, indicándose que no corrige ninguno de los errores que comete. Así, no explica ninguno de sus errores, por lo que sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A6 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A7 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. Además, el indicador D2V4I1 tampoco tenía información para su valoración (el alumno no comete ningún error), por lo que, de momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades (“0” en la matriz de datos).

A8 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A9 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. No obstante, este alumno tiene, en su UP1, una valoración de 1 en el indicador D2V4I1, indicándose que no corrige ninguno de los errores que comete. Así, en la UP1 este alumno no explica ninguno de sus errores, por lo que sustituiremos el “0” de la matriz de datos por un 1. Por extensión, como no hay información para UP2, sustituiremos también el “0” de la matriz de datos por un 1.

A10 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A11 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 1.

A12 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 1.

A15 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 1.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. Este alumno tampoco tenía ninguna valoración en el indicador D2V4I1 (el alumno no comete ningún error), por lo que, de momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en esta unidad (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D2V4Ind5 (EN LAS UP)

A1 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A5 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

A6 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A7 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades (“0” en la matriz de datos).

A8 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades (“0” en la matriz de datos).

A10 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3’5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

A11 (UP1 y UP3): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 1.

A12 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 y con un 2 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1’5.

A13 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 y con un 2 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1’5.

A15 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 1.

A16 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UP2 como en la UP3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D2V4Ind6 (EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A6 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A7 (UP1 y UP2): Este indicador no está valorado en el alumno en ninguna de las unidades de este tipo, por lo que no tenemos ninguna información que nos permita la valoración, ni tan siquiera de otras unidades. De momento, seguimos dejando la valoración del indicador en blanco en las dos unidades (“0” en la matriz de datos).

A8 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A9 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A10 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A11 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 tanto en la UP2 como en la UP3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A12 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 tanto en la UP2 como en la UP3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A13 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 1 tanto en la UP2 como en la UP3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1.

A15 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 3.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

A35 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 2´5 en la UP1 y con un 2 en la UP2 de este mismo alumno. La media aritmética es 2’25, fuera del rango de valores posible. Así, sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 2, el primer valor inmediatamente inferior a la media que sí está en el rango de posibles codificaciones.

INDICADOR D3V1Ind2 (EN LAS UT)

A1 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 1´5 en la UT1 y con un 1 en la UT2 de este mismo alumno. La media aritmética es 1’25, fuera del rango de valores posible. Así, sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 1, el primer valor inmediatamente inferior a la media que sí está en el rango de posibles codificaciones.

A2 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 1´5 en la UT1 y con un 1 en la UT2 de este mismo alumno. La media aritmética es 1’25, fuera del rango de valores posible. Así, sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 1, el primer valor inmediatamente inferior a la media que sí está en el rango de posibles codificaciones.

A3 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT1 y con un 2 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A4 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 2.

A8 (UT2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT1 y con un 1 en la UT3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A9 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 1’5 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 1’5.

A18 (UT1): Tan sólo tenemos una unidad teórica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D3V1Ind3 (EN LAS UP)

A1 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1’5 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1’5.

A2 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 1’5 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1’5.

INDICADOR D4V3Ind1 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A1 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT1 y con un 2 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A2 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 4.

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A6 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT1 y con un 4 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

A7 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT1 y con un 4 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

A8 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 3.

A9 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A10 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A11 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP1 y con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

A14 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A15 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 4 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A30 (UT2): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UT1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A37 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

INDICADOR D4V3Ind2 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A1 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT1 y con un 2 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A2 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UT1 y con un 1 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A6 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A7 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A8 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 2.

A9 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 y con un 3 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A10 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A11 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UP1 como en la UP2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A14 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UP1 como en la UP2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A15 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UP1 como en la UP2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

INDICADOR D4V4Ind1 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

INDICADOR D4V4Ind2 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A8 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 5.

A11 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 4 tanto en la UP1 como en la UP2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A13 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 4 tanto en la UP1 como en la UP2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A15 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 tanto en la UP2 como en la UP3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D4V4Ind3 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A2 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UT1 y con un 3 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A8 (UT2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 y con un 5 en la UT3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

INDICADOR D4V4Ind4 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A2 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UT1 y con un 5 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A3 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 3 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A4 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 y con un 3 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A8 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 2.

A10 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 y con un 3 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A13 (UP3): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP1 y con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3’5.

INDICADOR D5V1Ind2 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D5V1Ind4 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A18 (UT1): Tan sólo tenemos una unidad teórica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D5V1Ind6 (TANTO EN LAS UT COMO EN LAS UP)

A1 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A1 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A2 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 y con un 3 en la UT2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A2 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A3 (UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UT1 como en la UT2 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A3 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A4 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 2.

A4 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A6 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A7 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2’5 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2’5.

A8 (UT2): Este indicador ha sido valorado con un 2 tanto en la UT1 como en la UT3 de este mismo alumno. Así, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A8 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A9 (UT2 y UT3): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UT1 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 2.

A18 (UT1): Tan sólo tenemos una unidad teórica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D5V3Ind1 (EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A7 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A8 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A15 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 3 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 3.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D5V3Ind2 (EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A7 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A8 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A15 (UP1 y UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP3 de este mismo alumno, única unidad de este tipo donde el indicador es valorado en el alumno. Por ello, en ambas unidades sustituimos el “0” en la matriz de datos por un 2.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D5V4Ind1 (EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A7 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A8 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 4.

A15 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 4 en la UP1 y con un 2 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 3.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

INDICADOR D5V4Ind2 (EN LAS UP)

A2 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A7 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 5 en la UP1 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 5.

A8 (UP1): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP2 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 2.

A15 (UP2): Este indicador ha sido valorado con un 2 en la UP1 y con un 1 en la UP3 de este mismo alumno. Por ello, sustituimos el “0” de la matriz de datos por un 1’5.

A18 (UP1): Tan sólo tenemos una unidad práctica de este alumno y, en ella, este indicador no está valorado, al no tener ninguna información para ello. De momento, seguimos dejando la valoración de este indicador en blanco (“0” en la matriz de datos).

ANEXO D.2

En este anexo detallamos los cambios hechos en el Paso 5 del tratamiento realizado, para poder llevar a cabo el análisis cuantitativo, de los indicadores a los que no se les había asignado ninguna valoración numérica (apartado V.1). Los criterios para la realización de estos cambios correspondientes al Paso 5 han sido explicados en el subapartado V.1.5. En este anexo informaremos de los cambios en todos los indicadores que se mantienen con alguna valoración en blanco después de los cuatro primeros pasos. Esa información se proporciona indicador por indicador, explicando los cambios que se realizan en las unidades afectadas dentro de cada indicador, y a qué alumnos pertenecen. La notación utilizada para indicadores, unidades y alumnos es la usual a lo largo de todo el trabajo.

INDICADOR D2V4Ind4 (EN LAS UT)

Existen cuatro alumnos, A2 (UT1, UT2 y UT3), A8 (UT1, UT2 y UT3), A21 (UT2) y A40 (UT1) que conservan aún los “0” en la valoración de este indicador por la ausencia de información sobre el mismo en todas las unidades de este tipo.

En este momento, tras los pasos anteriores, existen 94 unidades con una valoración de este indicador no nula. La suma de esas valoraciones es de 286’5 puntos, lo que establece una media aritmética de 3’048 para la valoración de este indicador. Así, sustituiremos los “0” de la matriz de datos de los alumnos en este indicador por un 3 en cada uno de los casos.

INDICADOR D2V1Ind2 (EN LAS UP)

Hay un estudiante, A20, del cual no tenemos información para poder valorar este indicador, puesto que no existieron actividades del tipo al que hace referencia el indicador en la única unidad suya que disponemos (la UP1).

En este momento, tras los pasos anteriores, existen 93 unidades con una valoración de este indicador no nula. La suma de esas valoraciones es de 256 puntos, lo que establece una media aritmética de 2’752 para la valoración de este indicador. Así, sustituiremos el “0” de la matriz de datos de esta estudiante en este indicador por un 2’5.

INDICADOR D2V2Ind2 (EN LAS UP)

Existen seis alumnos, A2 (UP1 y UP2), A4 (UP1 y UP2), A9 (UP1 y UP2), A20 (UP1), A22 (UP1 y UP2) y A24 (UP1 y UP2) que conservan aún los “0” en la valoración de este indicador por la ausencia de información sobre el mismo en todas las unidades de este tipo.

En este momento, tras los pasos anteriores, existen 82 unidades con una valoración de este indicador no nula. La suma de esas valoraciones es de 286’5 puntos, lo que establece una media aritmética de 3’494 para la valoración de este indicador. Así, sustituiremos los “0” de la matriz de datos de los alumnos en este indicador por un 3 en cada uno de los casos.

INDICADOR D2V4Ind1 (EN LAS UP)

Existe una estudiante, A7, de la cual no tenemos información para poder valorar este indicador en ninguna de sus unidades de este tipo (UP1 y UP2), por lo que conserva aún los "'0" en su valoración del mismo.

En este momento, tras los pasos anteriores, existen 91 unidades con una valoración de este indicador no nula. La suma de esas valoraciones es de 259'5 puntos, lo que establece una media aritmética de 2'852 para la valoración de este indicador. Así, sustituiremos los "0" de la matriz de datos de la alumna en este indicador por un 2'5 en cada una de las unidades prácticas.

INDICADOR D2V4Ind2 (EN LAS UP)

Existe una estudiante, A7, de la cual no tenemos información para poder valorar este indicador en ninguna de sus unidades de este tipo (UP1 y UP2), por lo que conserva aún los "'0" en su valoración del mismo.

En este momento, tras los pasos anteriores, existen 91 unidades con una valoración de este indicador no nula. La suma de esas valoraciones es de 224'5 puntos, lo que establece una media aritmética de 2'467 para la valoración de este indicador. Así, sustituiremos los "0" de la matriz de datos de la alumna en este indicador por un 2 en cada una de las unidades prácticas.

INDICADOR D2V4Ind3 (EN LAS UP)

Existe una estudiante, A7, de la cual no tenemos información para poder valorar este indicador en ninguna de sus unidades de este tipo (UP1 y UP2), por lo que conserva aún los "'0" en su valoración del mismo.

En este momento, tras los pasos anteriores, existen 91 unidades con una valoración de este indicador no nula. La suma de esas valoraciones es de 115 puntos, lo que establece una media aritmética de 1'264 para la valoración de este indicador. Así, sustituiremos los "0" de la matriz de datos de la alumna en este indicador por un 1 en cada una de las unidades prácticas.

INDICADOR D2V4Ind5 (EN LAS UP)

Existen tres alumnos, A5 (UP1), A7 (UP1 y UP2) y A8 (UP1 y UP2) que conservan aún los "0" en la valoración de este indicador por la ausencia de información sobre el mismo en todas las unidades de este tipo.

En este momento, tras los pasos anteriores, existen 88 unidades con una valoración de este indicador no nula. La suma de esas valoraciones es de 257 puntos, lo que establece una media aritmética de 2’920 para la valoración de este indicador. Así, sustituiremos los “0” de la matriz de datos de los alumnos en este indicador por un 2’5 en cada uno de los casos.

INDICADOR D2V4Ind6 (EN LAS UP)

Existe una estudiante, A7, de la cual no tenemos información para poder valorar este indicador en ninguna de sus unidades de este tipo (UP1 y UP2), por lo que conserva aún los “’0” en su valoración del mismo.

En este momento, tras los pasos anteriores, existen 91 unidades con una valoración de este indicador no nula. La suma de esas valoraciones es de 191’5 puntos, lo que establece una media aritmética de 2’104 para la valoración de este indicador. Así, sustituiremos los “0” de la matriz de datos de la alumna en este indicador por un 2 en cada una de las unidades prácticas.

ANEXO D.3

En este anexo recogemos las tablas con la información descriptiva correspondiente al análisis de las valoraciones de cada uno de los indicadores en las unidades de los alumnos que vamos a considerar (excluyendo las del alumno A18, considerado como alumno atípico). En ambas tablas incluimos tanto la valoración mínima y máxima dentro de la escala 1-5 que ha sido asignada por el EI a cada uno de los indicadores, así como la media aritmética de las valoraciones y, en la última columna, la desviación típica de las mismas.

La Tabla D.1 corresponde a la información estadística obtenida para las valoraciones de los indicadores en las unidades de tipo teórico. La Tabla D.2 contiene la misma información estadística, pero considerando las valoraciones otorgadas a los indicadores para las unidades de tipo práctico durante el desarrollo del análisis.

Nomenclatura del indicador	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica
D1V1Ind1	102	1,0	4,0	2,608	0,8254
D1V1Ind2	102	1,0	5,0	4,647	0,8972
D1V1Ind3	102	1,0	5,0	3,461	0,7919
D1V2Ind1	102	1,0	5,0	3,074	0,7720
D1V2Ind2	102	1,0	4,0	3,196	0,8240
D1V2Ind3	102	2,0	4,0	3,240	0,6665
D1V2Ind4	102	2,0	4,0	2,990	0,6173
D1V2Ind5	102	2,0	4,0	3,299	0,5813
D1V2Ind6	102	2,0	5,0	3,382	0,6972
D1V2Ind7	102	1,0	4,0	2,789	0,7293
D1V2Ind8	102	1,0	5,0	2,897	0,8741
D1V3Ind1	102	1,0	4,0	1,980	1,1772
D1V3Ind2	102	1,0	4,0	1,069	0,4044
D1V3Ind3	102	1,0	4,0	1,265	0,7026
D2V1Ind1	102	1,0	5,0	3,020	0,9516
D2V1Ind2	102	1,0	5,0	2,740	0,8406
D2V1Ind4	102	1,0	4,0	2,569	0,5406
D2V2Ind1	102	1,0	5,0	3,534	1,1351
D2V2Ind2	102	1,0	5,0	3,338	1,0835
D2V2Ind4	102	1,0	4,0	2,544	0,6098
D2V3Ind1	102	1,0	5,0	3,186	1,2526
D2V3Ind2	102	1,0	5,0	3,005	1,2013
D2V3Ind4	102	1,0	3,0	2,010	0,4719
D2V4Ind1	102	1,0	5,0	1,946	0,9619
D2V4Ind2	102	1,0	5,0	1,985	1,0159
D2V4Ind4	102	1,0	5,0	3,044	0,7383
D3V1Ind1	102	1,0	5,0	2,721	1,0473
D3V1Ind2	102	1,0	4,0	2,304	0,6416
D3V1Ind3	102	1,0	4,0	1,103	0,4001
D4V3Ind1	102	2,0	4,0	3,343	0,6674
D4V3Ind2	102	1,0	5,0	2,451	0,6352
D4V4Ind1	102	1,0	5,0	4,392	1,1359
D4V4Ind2	102	2,0	5,0	4,216	0,9401
D4V4Ind3	102	1,0	5,0	3,436	1,0870
D4V4Ind4	102	1,0	5,0	2,848	1,2680
D5V1Ind1	102	1,0	4,5	2,711	0,8427
D5V1Ind2	102	1,0	4,0	2,539	0,7402
D5V1Ind3	102	1,5	5,0	3,333	0,7152
D5V1Ind4	102	1,0	4,0	2,294	0,7013
D5V1Ind5	102	1,0	5,0	3,265	1,2302

D5V1Ind6	102	1,0	3,0	2,010	0,4666
D5V2Ind1	102	1,0	5,0	2,500	0,9413
D5V2Ind2	102	1,0	5,0	2,127	1,0017

Tabla D.1. Información estadística descriptiva de las valoraciones de los indicadores en las unidades teóricas

Nomenclatura del indicador	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica
D1V1Ind1	93	1,0	4,0	2,731	0,6739
D1V1Ind2	93	1,0	5,0	3,914	1,4192
D1V1Ind3	93	1,0	5,0	3,376	1,0206
D1V1Ind4	93	1,0	5,0	3,849	1,1511
D1V1Ind5	93	2,0	5,0	3,210	0,6607
D1V2Ind1	93	1,0	4,0	2,935	0,6685
D1V2Ind2	93	1,0	4,0	2,962	0,7527
D1V2Ind3	93	2,0	5,0	3,344	0,7297
D1V2Ind4	93	2,0	4,0	2,823	0,5597
D1V2Ind5	93	1,0	4,0	3,263	0,6410
D1V2Ind6	93	2,0	5,0	3,505	0,6736
D1V2Ind7	93	1,0	4,0	2,909	0,6714
D1V2Ind8	93	1,0	4,0	2,742	0,7431
D1V3Ind1	93	1,0	4,0	1,753	1,0699
D1V3Ind2	93	1,0	1,0	1,000	0,0000
D1V3Ind3	93	1,0	4,0	1,430	0,9017
D2V1Ind1	93	1,0	5,0	4,124	1,0072
D2V1Ind2	93	1,0	5,0	2,769	1,3960
D2V1Ind3	93	1,0	5,0	2,065	1,4127
D2V1Ind4	93	1,0	5,0	1,978	1,3186
D2V2Ind1	93	1,0	5,0	3,763	0,9284
D2V2Ind2	93	1,0	5,0	3,435	0,9447
D2V3Ind1	93	1,0	5,0	3,118	1,2841
D2V3Ind2	93	1,0	4,0	2,962	0,6000
D2V4Ind1	93	1,0	5,0	2,844	0,9028
D2V4Ind2	93	1,0	4,0	2,457	0,6153
D2V4Ind3	93	1,0	4,0	1,258	0,5347
D2V4Ind4	93	1,0	5,0	2,398	0,9712
D2V4Ind5	93	1,0	5,0	2,898	1,0998
D2V4Ind6	93	1,0	5,0	2,102	1,0518
D3V1Ind1	93	1,0	5,0	2,591	0,9917
D3V1Ind2	93	1,0	4,0	2,661	0,6262
D3V1Ind3	93	1,0	3,5	2,113	0,5669
D3V1Ind4	93	1,0	4,0	1,290	0,6689
D4V3Ind1	93	2,0	4,0	3,306	0,5469
D4V3Ind2	93	1,5	4,0	2,505	0,6320
D4V4Ind1	93	1,0	5,0	4,742	0,7648
D4V4Ind2	93	3,0	5,0	4,430	0,6150
D4V4Ind3	93	1,0	5,0	3,398	1,1991
D4V4Ind4	93	1,0	5,0	3,097	1,3777
D5V1Ind1	93	1,0	4,0	2,263	0,6900

D5V1Ind2	93	1,0	4,0	2,742	0,7648
D5V1Ind3	93	1,5	5,0	3,613	0,6802
D5V1Ind4	93	1,0	4,0	2,102	0,7131
D5V1Ind5	93	1,0	5,0	3,156	1,1373
D5V1Ind6	93	1,0	3,0	1,876	0,4277
D5V2Ind1	93	1,0	5,0	2,796	0,9006
D5V2Ind2	93	1,0	5,0	2,570	1,0467
D5V3Ind1	93	1,0	5,0	2,710	1,0512
D5V3Ind2	93	1,0	5,0	1,812	1,2067
D5V4Ind1	93	1,0	5,0	2,731	1,2348
D5V4Ind2	93	1,0	5,0	1,855	1,3075

Tabla D.2. Información estadística descriptiva de las valoraciones de los indicadores en las unidades prácticas

ANEXO D.4

En este anexo se adjunta la matriz de correlaciones correspondiente a todos los indicadores de las unidades teóricas que participan en el análisis de componentes principales (ACP). Como hay 43 indicadores, la matriz tiene una dimensión de 43x43. Además, es una matriz simétrica por las propiedades del coeficiente de correlación de Pearson. Para facilitar la lectura de la matriz, mostraremos ésta dividida en tres submatrices, partiendo en tres grupos las columnas de los indicadores.

En la primera submatriz, que se presenta en la Tabla D.3, se mostrarán los coeficientes de correlación de Pearson de los indicadores correspondientes a la Dimensión 1 con todos los indicadores tenidos en cuenta para las UT. La segunda submatriz, presentada en la Tabla D.4, contiene los coeficientes correspondientes para los indicadores de las Dimensiones 2 y 3 con respecto a todos los indicadores. Por último, la tercera submatriz (Tabla D.5) contiene esos coeficientes para los indicadores de las dos Dimensiones restantes, 4 y 5, en relación con todos los indicadores participantes en el análisis ACP de las unidades teóricas.

Indicador tipificado	Z(D1V 1Ind1)	Z(D1V 1Ind2)	Z(D1V 1Ind3)	Z(D1V 2Ind1)	Z(D1V 2Ind2)	Z(D1V 2Ind3)	Z(D1V 2Ind4)	Z(D1V 2Ind5)	Z(D1V 2Ind6)	Z(D1V 2Ind7)	Z(D1V 2Ind8)	Z(D1V 3Ind1)	Z(D1V 3Ind2)	Z(D1V 3Ind3)
Z(D1V1Ind1)	1	0,219	0,181	0,469	0,278	0,038	0,041	0,051	0,164	0,248	0,218	0,318	0,141	0,087
Z(D1V1Ind2)	0,219	1	0,120	0,288	0,222	0,085	0,092	0,204	-0,020	-0,009	0,281	0,097	-0,096	0,118
Z(D1V1Ind3)	0,181	0,120	1	0,292	0,194	0,276	0,222	0,128	0,117	0,161	0,076	-0,139	0,086	0,046
Z(D1V2Ind1)	0,469	0,288	0,292	1	0,751	0,360	0,438	0,281	0,352	0,538	0,444	0,149	0,142	0,219
Z(D1V2Ind2)	0,278	0,222	0,194	0,751	1	0,346	0,276	0,321	0,234	0,432	0,461	-0,027	0,137	0,183
Z(D1V2Ind3)	0,038	0,085	0,276	0,360	0,346	1	0,307	0,222	0,099	0,217	0,077	-0,215	-0,062	0,095
Z(D1V2Ind4)	0,041	0,092	0,222	0,438	0,276	0,307	1	,229	0,193	0,391	0,136	-0,021	0,082	0,257
Z(D1V2Ind5)	0,051	0,204	0,128	0,281	0,321	0,222	0,229	1	0,057	0,150	0,120	-0,281	-0,025	0,168
Z(D1V2Ind6)	0,164	-0,020	0,117	0,352	0,234	0,099	0,193	0,057	1	0,257	0,122	0,160	0,187	-0,087
Z(D1V2Ind7)	0,248	-0,009	0,161	0,538	0,432	0,217	0,391	0,150	0,257	1	0,385	0,001	0,050	0,120
Z(D1V2Ind8)	0,218	0,281	0,076	0,444	0,461	0,077	0,136	0,120	0,122	0,385	1	0,051	0,076	0,174
Z(D1V3Ind1)	0,318	0,097	-0,139	0,149	-0,027	-0,215	-0,021	-0,281	0,160	0,001	0,051	1	0,211	-0,209
Z(D1V3Ind2)	0,141	-0,096	0,086	0,142	0,137	-0,062	0,082	-0,025	0,187	0,050	0,076	0,211	1	-0,065
Z(D1V3Ind3)	0,087	0,118	0,046	0,219	0,183	0,095	0,257	0,168	-0,087	0,120	0,174	-0,209	-0,065	1
Z(D2V1Ind1)	0,457	0,101	0,218	0,220	0,077	-0,160	-0,033	0,021	0,015	-0,105	0,068	0,212	0,022	0,066
Z(D2V1Ind2)	0,433	0,074	0,249	0,152	0,010	-0,214	-0,062	-0,012	-0,053	-0,074	0,091	0,195	0,082	-0,008
Z(D2V1Ind4)	0,094	0,173	0,076	0,183	0,114	-0,039	0,032	0,099	-0,018	0,207	0,115	-0,076	-0,090	0,043
Z(D2V2Ind1)	0,345	0,309	0,302	0,353	0,234	-0,011	0,177	0,007	0,158	0,069	0,246	0,264	0,027	0,187
Z(D2V2Ind2)	0,294	0,175	0,284	0,272	0,169	-0,052	0,220	0,003	0,135	0,041	0,147	0,281	0,105	0,154
Z(D2V2Ind4)	0,054	-0,007	0,152	0,093	0,199	0,077	0,041	0,018	-0,087	-0,007	0,171	-0,082	0,128	0,180
Z(D2V3Ind1)	0,380	0,257	0,207	0,293	0,257	-0,155	0,076	0,025	0,025	0,052	0,257	0,201	-0,006	0,191
Z(D2V3Ind2)	0,321	0,236	0,180	0,272	0,242	-0,156	0,137	0,048	0,018	0,069	0,260	0,196	0,020	0,233
Z(D2V3Ind4)	0,124	-0,039	0,186	0,256	0,237	0,150	0,196	0,016	0,064	0,258	0,050	-0,062	0,100	-0,023

Indicador tipificado	Z(D1V 1Ind1)	Z(D1V 1Ind2)	Z(D1V 1Ind3)	Z(D1V 2Ind1)	Z(D1V 2Ind2)	Z(D1V 2Ind3)	Z(D1V 2Ind4)	Z(D1V 2Ind5)	Z(D1V 2Ind6)	Z(D1V 2Ind7)	Z(D1V 2Ind8)	Z(D1V 3Ind1)	Z(D1V 3Ind2)	Z(D1V 3Ind3)
Z(D2V4Ind1)	0,325	0,161	0,150	0,019	-0,049	-0,292	-0,076	-00,095	-0,157	-0,002	0,079	0,073	-0,143	0,058
Z(D2V4Ind2)	0,335	0,141	0,132	0,011	-0,056	-0,291	-0,055	-0,139	-0,170	0,009	0,057	0,087	-0,142	0,054
Z(D2V4Ind4)	0,394	0,136	-0,077	0,298	0,242	-0,153	-0,037	-0,089	0,188	0,165	0,345	0,360	0,189	-0,042
Z(D3V1Ind1)	0,356	-0,059	-0,016	0,075	0,004	-0,343	-0,066	-0,065	-0,015	0,058	0,168	0,124	0,046	0,128
Z(D3V1Ind2)	0,428	0,343	0,160	0,269	0,120	-0,074	0,045	-0,093	0,053	0,032	0,268	0,205	0,071	0,072
Z(D3V1Ind3)	0,078	0,019	0,099	-0,137	-0,197	-0,335	0,004	0,079	-0,089	-0,145	0,045	0,057	-0,044	0,043
Z(D4V3Ind1)	-0,005	0,089	-0,162	0,239	0,277	0,147	0,261	0,109	0,056	0,150	0,282	0,021	0,022	0,142
Z(D4V3Ind2)	0,057	-0,083	-0,112	0,113	0,085	-0,060	0,024	0,134	-0,036	0,132	0,156	-0,054	0,032	0,007
Z(D4V4Ind1)	-0,257	-0,067	-0,005	0,119	0,160	0,234	0,161	0,076	-0,104	0,071	0,121	-0,239	-0,167	0,204
Z(D4V4Ind2)	-0,241	-0,108	0,051	-0,070	0,066	0,296	-0,030	0,089	0,032	0,089	-0,027	-0,202	0,013	-0,012
Z(D4V4Ind3)	0,038	-0,155	0,115	0,280	0,290	0,230	0,176	0,054	0,065	0,304	0,152	-0,136	0,156	0,055
Z(D4V4Ind4)	0,068	-0,109	0,065	0,229	0,313	0,278	0,156	0,129	-0,006	0,318	0,388	-0,291	0,040	0,212
Z(D5V1Ind1)	0,554	0,250	0,239	0,223	0,082	-0,179	0,009	-0,074	-0,080	-0,064	0,161	0,274	0,059	0,122
Z(D5V1Ind2)	-0,262	0,021	0,036	-0,009	0,121	0,101	-0,010	0,024	-0,116	0,020	0,110	-0,351	-0,059	-0,011
Z(D5V1Ind3)	0,295	0,231	0,233	0,305	0,199	0,007	0,131	0,109	0,129	0,117	0,253	0,090	-0,080	0,197
Z(D5V1Ind4)	0,235	0,104	0,048	0,234	0,259	0,049	0,030	0,116	0,061	0,229	0,328	-0,029	0,103	-0,009
Z(D5V1Ind5)	0,374	0,274	0,184	0,297	0,256	-0,142	0,052	0,047	0,068	0,060	0,270	0,212	0,003	0,176
Z(D5V1Ind6)	0,100	-0,063	0,175	0,204	0,227	0,072	0,181	-0,002	0,125	0,203	0,027	-0,045	0,259	-0,053
Z(D5V2Ind1)	-0,025	0,129	0,073	0,201	0,287	0,201	0,094	0,068	-0,008	0,263	0,238	-0,179	0,013	0,172
Z(D5V2Ind2)	-0,154	0,051	0,087	0,013	0,179	0,206	0,082	0,155	-0,127	0,220	0,168	-0,317	0,027	0,092

Tabla D.3. Valores de los coeficientes de correlación de Pearson, para las UT, de los indicadores correspondientes a la Dimensión 1 con el resto de indicadores

Indicador tipificado	Z(D2 V1 Ind1)	Z(D2 V1 Ind2)	Z(D2 V1 Ind4)	Z(D2 V2 Ind1)	Z(D2 V2 Ind2)	Z(D2 V2 Ind4)	Z(D2 V3 Ind1)	Z(D2 V3 Ind2)	Z(D2 V3 Ind4)	Z(D2 V4 Ind1)	Z(D2 V4 Ind2)	Z(D2 V4 Ind4)	Z(D3 V1 Ind1)	Z(D3 V1 Ind2)	Z(D3 V1 Ind3)
Z(D1V1Ind1)	0,457	0,433	0,094	0,345	0,294	0,054	0,380	0,321	0,124	0,325	0,335	0,394	0,356	0,428	0,078
Z(D1V1Ind2)	0,101	0,074	0,173	0,309	0,175	-0,007	0,257	0,236	-0,039	0,161	0,141	0,136	-0,059	0,343	0,019
Z(D1V1Ind3)	0,218	0,249	0,076	0,302	0,284	0,152	0,207	0,180	0,186	0,150	0,132	-0,077	-0,016	0,160	0,099
Z(D1V2Ind1)	0,220	0,152	0,183	0,353	0,272	0,093	0,293	0,272	0,256	0,019	0,011	0,298	0,075	0,269	-0,137
Z(D1V2Ind2)	0,077	0,010	0,114	0,234	0,169	0,199	0,257	0,242	0,237	-0,049	-0,056	0,242	0,004	0,120	-0,197
Z(D1V2Ind3)	-0,160	-0,214	-0,039	-0,011	-0,052	0,077	-0,155	-0,156	0,150	-0,292	-0,291	-0,153	-0,343	-0,074	-0,335
Z(D1V2Ind4)	-0,033	-0,062	0,032	0,177	0,220	0,041	0,076	0,137	0,196	-0,076	-0,055	-0,037	-0,066	0,045	0,004
Z(D1V2Ind5)	0,021	-0,012	0,099	0,007	0,003	0,018	0,025	0,048	0,016	-0,095	-0,139	-0,089	-0,065	-0,093	0,079
Z(D1V2Ind6)	0,015	-0,053	-0,018	0,158	0,135	-0,087	0,025	0,018	0,064	-0,157	-0,170	0,188	-0,015	0,053	-0,089
Z(D1V2Ind7)	-0,105	-0,074	0,207	0,069	0,041	-0,007	0,052	0,069	0,258	-0,002	0,009	0,165	0,058	0,032	-0,145
Z(D1V2Ind8)	0,068	0,091	0,115	0,246	0,147	0,171	0,257	0,260	0,050	0,079	0,057	0,345	0,168	0,268	0,045
Z(D1V3Ind1)	0,212	0,195	-0,076	0,264	0,281	-0,082	0,201	0,196	-0,062	0,073	0,087	0,360	0,124	0,205	0,057
Z(D1V3Ind2)	0,022	0,082	-0,090	0,027	0,105	0,128	-0,006	0,020	0,100	-0,143	-0,142	0,189	0,046	0,071	-0,044
Z(D1V3Ind3)	0,066	-0,008	0,043	0,187	0,154	0,180	0,191	0,233	-0,023	0,058	0,054	-0,042	0,128	0,072	0,043
Z(D2V1Ind1)	1	0,833	0,132	0,646	0,637	0,199	0,626	0,582	0,071	0,599	0,561	0,196	0,522	0,489	0,216
Z(D2V1Ind2)	0,833	1	0,165	0,528	0,565	0,105	0,493	0,469	0,063	0,576	0,540	0,162	0,547	0,341	0,286
Z(D2V1Ind4)	0,132	0,165	1	0,069	-0,002	0,223	0,113	0,095	0,143	0,188	0,146	0,123	0,187	0,210	-0,102
Z(D2V2Ind1)	0,646	0,528	0,069	1	0,900	0,177	0,789	0,773	0,013	0,414	0,391	0,128	0,404	0,499	0,117
Z(D2V2Ind2)	0,637	0,565	-0,002	0,900	1	0,183	0,730	0,754	0,061	0,429	0,407	0,055	0,448	0,456	0,182
Z(D2V2Ind4)	0,199	0,105	0,223	0,177	0,183	1	0,271	0,267	0,050	0,181	0,185	0,067	0,314	0,294	0,052
Z(D2V3Ind1)	0,626	0,493	0,113	0,789	0,730	0,271	1	0,912	0,064	0,508	0,494	0,125	0,429	0,542	0,198
Z(D2V3Ind2)	0,582	0,469	0,095	0,773	0,754	0,267	0,912	1	0,009	0,486	0,469	0,086	0,430	0,502	0,246
Z(D2V3Ind4)	0,071	0,063	0,143	0,013	0,061	0,050	0,064	0,009	1	0,214	0,181	0,155	0,061	0,170	-0,136

Indicador tipificado	Z(D2 V1 Ind1)	Z(D2 V1 Ind2)	Z(D2 V1 Ind4)	Z(D2 V2 Ind1)	Z(D2 V2 Ind2)	Z(D2 V2 Ind4)	Z(D2 V3 Ind1)	Z(D2 V3 Ind2)	Z(D2 V3 Ind4)	Z(D2 V4 Ind1)	Z(D2 V4 Ind2)	Z(D2 V4 Ind4)	Z(D3 V1 Ind1)	Z(D3 V1 Ind2)	Z(D3 V1 Ind3)
Z(D2V4Ind1)	0,599	0,576	0,188	0,414	0,429	0,181	0,508	0,486	0,214	1	0,972	0,178	0,611	0,516	0,304
Z(D2V4Ind2)	0,561	0,540	0,146	0,391	0,407	0,185	0,494	0,469	0,181	0,972	1	0,159	0,617	0,523	0,278
Z(D2V4Ind4)	0,196	0,162	0,123	0,128	0,055	0,067	0,125	0,086	0,155	0,178	0,159	1	0,138	0,369	0,052
Z(D3V1Ind1)	0,522	0,547	0,187	0,404	0,448	0,314	0,429	0,430	0,061	0,611	0,617	0,138	1	0,448	0,347
Z(D3V1Ind2)	0,489	0,341	0,210	0,499	0,456	0,294	0,542	0,502	0,170	0,516	0,523	0,369	0,448	1	0,166
Z(D3V1Ind3)	0,216	0,286	-0,102	0,117	0,182	0,052	0,198	0,246	-0,136	0,304	0,278	0,052	0,347	0,166	1
Z(D4V3Ind1)	-0,108	-0,104	0,058	0,128	0,050	-0,111	0,106	0,078	-0,027	-0,222	-0,230	0,090	-0,028	0,026	-0,004
Z(D4V3Ind2)	-0,027	0,004	0,104	-0,128	-0,102	-0,001	-0,038	-0,003	-0,114	-0,089	-0,074	-0,043	0,039	-0,018	-0,068
Z(D4V4Ind1)	-0,094	-0,084	0,165	0,059	-0,008	0,068	-0,003	0,046	0,048	-0,148	-0,209	-0,050	-0,119	-0,070	-0,101
Z(D4V4Ind2)	-0,387	-0,455	0,000	-0,244	-0,301	-0,129	-0,308	-0,299	0,118	-0,430	-0,458	-0,121	-0,441	-0,274	-0,270
Z(D4V4Ind3)	-0,018	-0,005	0,214	-0,038	-0,072	0,101	-0,002	0,002	0,247	-0,124	-0,111	0,056	-0,142	-0,057	-0,332
Z(D4V4Ind4)	-0,053	0,025	0,243	0,047	-0,049	0,204	0,006	0,049	0,168	0,009	0,010	0,055	0,154	0,036	-0,135
Z(D5V1Ind1)	0,692	0,690	0,136	0,445	0,444	0,280	0,492	0,439	0,163	0,604	0,602	0,315	0,586	0,530	0,324
Z(D5V1Ind2)	-0,201	-0,111	0,346	-0,128	-0,168	0,248	-0,077	-0,042	-0,001	-0,049	-0,068	-0,044	-0,085	-0,119	-0,122
Z(D5V1Ind3)	0,641	0,545	0,145	0,858	0,786	0,199	0,734	0,753	0,012	0,433	0,409	0,084	0,502	0,473	0,156
Z(D5V1Ind4)	-0,024	-0,008	0,286	-0,131	-0,171	0,288	0,103	-0,025	0,193	0,119	0,135	0,204	0,207	0,140	-0,003
Z(D5V1Ind5)	0,585	0,438	0,084	0,766	0,708	0,271	0,980	0,907	0,030	0,495	0,480	0,126	0,423	0,546	0,211
Z(D5V1Ind6)	0,039	0,076	0,144	-0,061	0,013	0,033	-0,012	-0,071	0,899	0,128	0,094	0,200	0,056	0,097	-0,138
Z(D5V2Ind1)	-0,116	-0,128	0,379	0,081	0,036	0,436	0,084	0,125	0,156	-0,003	0,003	0,082	0,103	0,172	-0,138
Z(D5V2Ind2)	-0,257	-0,248	0,368	-0,148	-0,154	0,380	-0,102	-0,087	0,228	-0,075	-0,086	0,086	-0,013	0,039	-0,095

Tabla D.4. Valores de los coeficientes de correlación de Pearson, para las UT, de los indicadores correspondientes a las Dimensiones 2 y 3 con el resto de indicadores

Indicador tipificado	Z(D4V3Ind1)	Z(D4V3Ind2)	Z(D4V4Ind1)	Z(D4V4Ind2)	Z(D4V4Ind3)	Z(D4V4Ind4)	Z(D5V1Ind1)	Z(D5V1Ind2)	Z(D5V1Ind3)	Z(D5V1Ind4)	Z(D5V1Ind5)	Z(D5V1Ind6)	Z(D5V2Ind1)	Z(D5V2Ind2)
Z(D1V1Ind1)	-0,005	0,057	-0,257	-0,241	0,038	0,068	0,554	-0,262	0,295	0,235	0,374	0,100	-0,025	-0,154
Z(D1V1Ind2)	0,089	-0,083	-0,067	-0,108	-0,155	-0,109	0,250	0,021	0,231	0,104	0,274	-0,063	0,129	0,051
Z(D1V1Ind3)	-0,162	-0,112	-0,005	0,051	0,115	0,065	0,239	0,036	0,233	0,048	0,184	0,175	0,073	0,087
Z(D1V2Ind1)	0,239	0,113	0,119	-0,070	0,280	0,229	0,223	-0,009	0,305	0,234	0,297	0,204	0,201	0,013
Z(D1V2Ind2)	0,277	0,085	0,160	0,066	0,290	0,313	0,082	0,121	0,199	0,259	0,256	0,227	0,287	0,179
Z(D1V2Ind3)	0,147	-0,060	0,234	0,296	0,230	0,278	-0,179	0,101	0,007	0,049	-0,142	0,072	0,201	0,206
Z(D1V2Ind4)	0,261	0,024	0,161	-0,030	0,176	0,156	0,009	-0,010	0,131	0,030	0,052	0,181	0,094	0,082
Z(D1V2Ind5)	0,109	0,134	0,076	0,089	0,054	0,129	-0,074	0,024	0,109	0,116	0,047	-0,002	0,068	0,155
Z(D1V2Ind6)	0,056	-0,036	-0,104	0,032	0,065	-0,006	-0,080	-0,116	0,129	0,061	0,068	0,125	-0,008	-0,127
Z(D1V2Ind7)	0,150	0,132	0,071	0,089	0,304	0,318	-0,064	0,020	0,117	0,229	0,060	0,203	0,263	0,220
Z(D1V2Ind8)	0,282	0,156	0,121	-0,027	0,152	0,388	0,161	0,110	0,253	0,328	0,270	0,027	0,238	0,168
Z(D1V3Ind1)	0,021	-0,054	-0,239	-0,202	-0,136	-0,291	0,274	-0,351	0,090	-0,029	0,212	-0,045	-0,179	-0,317
Z(D1V3Ind2)	0,022	0,032	-0,167	0,013	0,156	0,040	0,059	-0,059	-0,080	0,103	0,003	0,259	0,013	0,027
Z(D1V3Ind3)	0,142	0,007	0,204	-0,012	0,055	0,212	0,122	-0,011	0,197	-0,009	0,176	-0,053	0,172	0,092
Z(D2V1Ind1)	-0,108	-0,027	-0,094	-0,387	-0,018	-0,053	0,692	-0,201	0,641	-0,024	0,585	0,039	-0,116	-0,257
Z(D2V1Ind2)	-0,104	0,004	-0,084	-0,455	-0,005	0,025	0,690	-0,111	0,545	-0,008	0,438	0,076	-0,128	-0,248
Z(D2V1Ind4)	0,058	0,104	0,165	0,000	0,214	0,243	0,136	0,346	0,145	0,286	0,084	0,144	0,379	0,368
Z(D2V2Ind1)	0,128	-0,128	0,059	-0,244	-0,038	0,047	0,445	-0,128	0,858	-0,131	0,766	-0,061	0,081	-0,148
Z(D2V2Ind2)	0,050	-0,102	-0,008	-0,301	-0,072	-0,049	0,444	-0,168	0,786	-0,171	0,708	0,013	0,036	-0,154
Z(D2V2Ind4)	-0,111	-0,001	0,068	-0,129	0,101	0,204	0,280	0,248	0,199	0,288	0,271	0,033	0,436	0,380
Z(D2V3Ind1)	0,106	-0,038	-0,003	-0,308	-0,002	0,006	0,492	-0,077	0,734	0,103	0,980	-0,012	0,084	-0,102
Z(D2V3Ind2)	0,078	-0,003	0,046	-0,299	0,002	0,049	0,439	-0,042	0,753	-0,025	0,907	-0,071	0,125	-0,087
Z(D2V3Ind4)	-0,027	-0,114	0,048	0,118	0,247	0,168	0,163	-0,001	0,012	0,193	0,030	0,899	0,156	0,228

Indicador tipificado	Z(D4V 3Ind1)	Z(D4V 3Ind2)	Z(D4V 4Ind1)	Z(D4V 4Ind2)	Z(D4V 4Ind3)	Z(D4V 4Ind4)	Z(D5V 1Ind1)	Z(D5V 1Ind2)	Z(D5V 1Ind3)	Z(D5V 1Ind4)	Z(D5V 1Ind5)	Z(D5V 1Ind6)	Z(D5V 2Ind1)	Z(D5V 2Ind2)
Z(D2V4Ind1)	-0,222	-0,089	-0,148	-0,430	-0,124	0,009	0,604	-0,049	0,433	0,119	0,495	0,128	-0,003	-0,075
Z(D2V4Ind2)	-0,230	-0,074	-0,209	-0,458	-0,111	0,010	0,602	-0,068	0,409	0,135	0,480	0,094	0,003	-0,086
Z(D2V4Ind4)	0,090	-0,043	-0,050	-0,121	0,056	0,055	0,315	-0,044	0,084	0,204	0,126	0,200	0,082	0,086
Z(D3V1Ind1)	-0,028	0,039	-0,119	-0,441	-0,142	0,154	0,586	-0,085	0,502	0,207	0,423	0,056	0,103	-0,013
Z(D3V1Ind2)	0,026	-0,018	-0,070	-0,274	-0,057	0,036	0,530	-0,119	0,473	0,140	0,546	0,097	0,172	0,039
Z(D3V1Ind3)	-0,004	-0,068	-0,101	-0,270	-0,332	-0,135	0,324	-0,122	0,156	-0,003	0,211	-0,138	-0,138	-0,095
Z(D4V3Ind1)	1	0,338	0,258	-0,040	0,085	0,407	-0,086	0,003	0,111	0,131	0,090	-0,027	0,189	0,089
Z(D4V3Ind2)	0,338	1	0,047	-0,165	0,257	0,215	-0,027	0,046	-0,018	0,094	-0,069	-0,182	0,149	0,111
Z(D4V4Ind1)	0,258	0,047	1	0,226	0,081	0,465	-0,232	0,358	0,112	-0,065	-0,025	-0,026	0,315	0,269
Z(D4V4Ind2)	-0,040	-0,165	0,226	1	0,120	0,144	-0,433	0,208	-0,226	-0,067	-0,268	0,074	0,112	0,275
Z(D4V4Ind3)	0,085	0,257	0,081	0,120	1	0,336	-0,123	0,203	0,047	0,002	-0,069	0,255	0,259	0,267
Z(D4V4Ind4)	0,407	0,215	0,465	0,144	0,336	1	0,002	0,246	0,171	0,312	0,013	0,120	0,384	0,362
Z(D5V1Ind1)	-0,086	-0,027	-0,232	-0,433	-0,123	0,002	1	-0,263	0,441	0,187	0,457	0,146	-0,059	-0,132
Z(D5V1Ind2)	0,003	0,046	0,358	0,208	0,203	0,246	-0,263	1	0,003	0,211	-0,090	-0,015	0,469	0,494
Z(D5V1Ind3)	0,111	-0,018	0,112	-0,226	0,047	0,171	0,441	0,003	1	-0,113	0,709	-0,106	0,169	-0,032
Z(D5V1Ind4)	0,131	0,094	-0,065	-0,067	0,002	0,312	0,187	0,211	-0,113	1	0,124	0,195	0,217	0,298
Z(D5V1Ind5)	0,090	-0,069	-0,025	-0,268	-0,069	0,013	0,457	-0,090	0,709	0,124	1	-0,048	0,077	-0,096
Z(D5V1Ind6)	-0,027	-0,182	-0,026	0,074	0,255	0,120	0,146	-0,015	-0,106	0,195	-0,048	1	0,090	0,199
Z(D5V2Ind1)	0,189	0,149	0,315	0,112	0,259	0,384	-0,059	0,469	0,169	0,217	0,077	0,090	1	0,793
Z(D5V2Ind2)	0,089	0,111	0,269	0,275	0,267	0,362	-0,132	0,494	-0,032	0,298	-0,096	0,199	0,793	1

Tabla D.5. Valores de los coeficientes de correlación de Pearson, para las UT, de los indicadores correspondientes a las Dimensiones 4 y 5 con el resto de indicadores

ANEXO D.5

En este anexo se adjunta la matriz de cargas factoriales que obtenemos al realizar el ACP en las unidades teóricas, análisis en el que el EI ha seleccionado las primeras trece componentes como componentes principales. Dado que las cargas factoriales suelen considerarse como significativas cuando su magnitud (en valor absoluto) es superior a 0’5, se han marcado en negrita las cargas factoriales que responden a dicha situación.

Podemos observar, como ya hemos comentado en el cuerpo del texto del capítulo V, la presencia de varias componentes donde todos los elementos de la columna son bajos (inferiores a 0’5 en valor absoluto). Este hecho dificulta que puedan interpretarse correctamente las componentes obtenidas y, así, poder determinar cuáles son los indicadores que tienen un peso relevante en cada componente. La matriz completa se muestra a continuación, en la Tabla D.6.

Matriz de cargas factoriales													
Nomenclatura del indicador	Número de componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D1V1Ind1	**0,57**	0,07	-0,30	0,32	0,18	0,10	-0,14	0,16	-0,16	0,16	-0,00	-0,15	-0,02
D1V1Ind2	0,31	0,13	-0,10	-0,13	0,13	-0,20	**-0,64**	-0,12	-0,24	0,01	-0,25	0,23	0,11
D1V1Ind3	0,28	0,22	-0,10	0,01	-0,49	0,10	-0,23	0,35	0,06	0,06	0,17	0,05	0,14
D1V2Ind1	0,41	**0,61**	-0,47	0,07	0,07	0,09	-0,13	0,06	-0,11	0,00	0,02	-0,05	0,05
D1V2Ind2	0,27	**0,68**	-0,31	0,01	0,06	0,00	-0,11	0,05	-0,02	0,05	-0,01	-0,01	-0,24
D1V2Ind3	-0,16	**0,53**	-0,23	-0,17	-0,30	0,08	-0,19	0,12	-0,13	0,29	-0,06	-0,19	0,08
D1V2Ind4	0,12	0,43	-0,32	-0,12	-0,17	0,27	-0,04	-0,14	0,27	-0,21	-0,12	-0,02	0,42
D1V2Ind5	0,02	0,34	-0,10	-0,20	-0,02	0,38	-0,38	0,20	0,08	-0,11	0,02	0,40	-0,17
D1V2Ind6	0,08	0,19	**-0,52**	0,09	0,01	-0,17	0,09	0,12	0,09	-0,28	0,42	-0,02	0,11
D1V2Ind7	0,12	**0,58**	-0,24	0,16	0,07	0,16	0,04	-0,08	-0,04	-0,37	0,22	-0,30	0,08
D1V2Ind8	0,33	0,48	-0,09	0,00	0,40	-0,04	-0,10	-0,11	0,05	0,09	0,18	-0,06	-0,17
D1V3Ind1	0,28	-0,28	-0,43	0,20	0,29	-0,38	0,15	-0,06	-0,04	0,03	-0,06	-0,02	0,21
D1V3Ind2	0,06	0,11	-0,27	0,31	0,04	-0,22	0,30	0,34	0,45	0,14	-0,12	0,20	-0,03
D1V3Ind3	0,19	0,26	0,07	-0,30	-0,00	0,27	-0,13	-0,16	0,25	0,16	-0,26	-0,34	0,05
D2V1Ind1	**0,80**	-0,21	0,00	0,03	-0,13	0,12	0,12	0,17	-0,17	0,19	0,04	0,11	0,00
D2V1Ind2	**0,72**	-0,23	0,07	0,11	-0,09	0,23	0,17	0,20	-0,17	0,21	0,13	0,22	0,08
D2V1Ind4	0,19	0,37	0,39	0,16	0,07	-0,06	-0,04	0,07	-0,36	-0,17	0,07	0,21	0,23
D2V2Ind1	**0,82**	0,03	-0,17	-0,36	-0,15	-0,18	0,10	-0,04	-0,03	0,02	0,04	0,02	0,06
D2V2Ind2	**0,79**	-0,06	-0,16	-0,30	-0,22	-0,11	0,18	0,00	0,10	-0,05	-0,01	0,05	0,10
D2V2Ind4	0,31	0,28	0,43	0,04	-0,01	-0,21	-0,03	0,36	0,36	0,13	-0,16	-0,22	0,01
D2V3Ind1	**0,86**	0,02	-0,00	-0,26	-0,04	-0,16	0,04	-0,05	0,03	-0,12	-0,09	0,03	-0,27
D2V3Ind2	**0,83**	0,02	0,01	-0,34	-0,04	-0,13	0,09	-0,04	0,08	-0,15	-0,08	0,02	-0,18
D2V3Ind4	0,15	0,36	-0,02	**0,56**	-0,49	0,05	0,11	-0,36	0,03	-0,05	-0,14	0,15	-0,11
D2V4Ind1	**0,71**	-0,23	0,36	0,24	-0,11	0,16	-0,09	-0,16	-0,13	-0,12	0,04	-0,11	-0,02
D2V4Ind2	**0,69**	-0,25	0,36	0,26	-0,09	0,17	-0,09	-0,14	-0,12	-0,15	-0,00	-0,19	-0,02
D2V4Ind4	0,30	0,14	-0,16	0,45	0,36	-0,30	-0,01	-0,17	-0,07	0,22	0,13	0,04	0,13
D3V1Ind1	**0,66**	-0,13	0,31	0,18	0,16	0,18	0,16	0,00	0,19	-0,05	0,16	-0,12	0,04
D3V1Ind2	**0,69**	0,04	0,08	0,15	0,08	-0,22	-0,12	-0,11	-0,03	0,07	-0,14	-0,05	0,14
D3V1Ind3	0,30	-0,34	0,16	-0,05	0,14	0,23	-0,20	-0,07	0,47	-0,03	0,27	0,25	0,16
D4V3Ind1	0,03	0,39	-0,16	-0,26	0,44	0,16	0,22	-0,34	0,08	0,09	-0,14	0,27	0,04
D4V3Ind2	-0,03	0,20	0,06	-0,06	0,49	0,35	0,30	0,25	-0,16	-0,19	-0,28	0,15	0,01
D4V4Ind1	-0,09	0,43	0,24	-0,40	-0,07	0,03	0,21	-0,31	-0,08	0,32	0,21	0,10	0,13
D4V4Ind2	-0,47	0,31	-0,04	-0,11	-0,29	-0,27	-0,05	-0,07	-0,04	0,16	0,21	-0,00	-0,20
D4V4Ind3	-0,04	**0,51**	-0,03	0,13	-0,13	0,08	0,43	0,26	-0,26	-0,10	-0,22	-0,06	-0,06
D4V4Ind4	0,07	**0,63**	0,24	-0,03	0,14	0,27	0,27	-0,11	0,00	0,29	0,20	-0,09	-0,10
D5V1Ind1	**0,75**	-0,17	0,06	0,30	0,04	0,15	-0,12	0,07	0,02	0,28	-0,10	0,01	0,11
D5V1Ind2	-0,15	0,42	**0,54**	-0,12	-0,03	-0,23	-0,00	0,13	-0,12	-0,08	0,20	0,15	0,00
D5V1Ind3	**0,79**	0,10	0,01	-0,38	-0,12	-0,04	0,14	0,01	-0,10	-0,03	0,13	0,03	0,04

Nomenclatura del indicador	Número de componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D5V1Ind4	0,13	0,37	0,20	0,42	0,33	0,03	-0,26	0,07	0,16	-0,04	0,12	0,01	-0,29
D5V1Ind5	**0,83**	0,01	-0,02	-0,27	-0,01	-0,20	-0,01	-0,06	0,07	-0,14	-0,04	0,01	-0,31
D5V1Ind6	0,08	0,32	-0,07	**0,65**	-0,46	0,02	0,14	-0,29	0,13	-0,02	-0,13	0,23	-0,09
D5V2Ind1	0,09	**0,64**	0,45	-0,05	0,07	-0,29	0,03	0,05	0,06	-0,09	-0,11	-0,05	0,23
D5V2Ind2	-0,12	**0,62**	**0,53**	0,08	-0,02	-0,23	-0,06	0,05	0,14	-0,07	-0,08	0,07	0,15

Tabla D.6. Matriz de cargas factoriales obtenida al realizar el ACP con los indicadores de las UT

ANEXO D.6

En este anexo mostramos las matrices de cargas factoriales rotadas que se han obtenido al utilizar cada uno de los tres métodos de rotación ortogonales más usuales: Varimax, Quartimax y Equamax, en el caso de las unidades teóricas. El EI ha estudiado las tres matrices obtenidas para seleccionar cuál de los tres métodos es el que nos proporcionaba una mejor interpretación de las componentes involucradas.

Para poder detectar más fácilmente cuáles son los indicadores que tienen un peso alto en cada una de las componentes, en cada una de las tablas se han marcado aquellas cargas factoriales mayores o iguales a 0’5 coloreando la celda con un color verde oscuro. Con un tono verde más claro se han señalado las celdas con un peso mayor o igual a 0’3 e inferior a 0’5 (que corresponderían con indicadores que tienen un peso secundario en la componente). Del mismo modo, se han marcado con color naranja aquellas celdas donde la carga factorial es inferior o igual a -0’5, utilizando un tono naranja más claro para cargas factoriales negativas con un peso apreciable pero secundario (valores menores o iguales que -0’3 pero mayores que -0’5).

La Tabla D.7 recoge la matriz de cargas factoriales en el ACP para las unidades teóricas, tras hacer realizado una rotación de la misma utilizando el método Varimax. La rotación ha convergido tras 27 iteraciones. Se ha redondeado cada una de las cargas factoriales a un número con dos cifras decimales.

La Tabla D.8 recoge la matriz de cargas factoriales tras realizar la rotación de la misma utilizando el método Quartimax. La rotación ha convergido tras 15 iteraciones.

Cada una de las cargas factoriales ha sido redondeada a un número con dos decimales.

Por último, la Tabla D.9 recoge la matriz de cargas factoriales obtenida tras realizar la rotación utilizando el método Equamax. La rotación ha convergido tras 17 iteraciones. De nuevo, cada una de las cargas factoriales ha sido redondeada a un número con dos decimales.

Matriz de cargas factoriales rotada (método Varimax)													
Nomenclatura del indicador	Número de componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D1V1Ind1	0,20	0,56	-0,19	0,40	0,20	0,00	0,18	-0,13	-0,11	-0,01	0,18	0,09	0,03
D1V1Ind2	0,22	0,05	0,09	0,16	-0,01	-0,05	-0,02	-0,08	0,07	-0,03	0,83	-0,14	0,04
D1V1Ind3	0,17	0,29	0,12	-0,09	0,30	0,08	0,11	-0,02	0,43	-0,41	0,06	0,16	0,03
D1V2Ind1	0,24	0,16	-0,02	0,42	0,57	0,11	0,32	0,12	0,11	0,05	0,27	0,11	0,11
D1V2Ind2	0,24	-0,06	0,08	0,54	0,30	0,15	0,33	0,13	0,20	0,03	0,17	0,14	0,11
D1V2Ind3	-0,13	-0,10	0,06	0,05	0,24	0,00	0,50	0,26	0,27	-0,28	0,18	0,06	0,31
D1V2Ind4	0,09	-0,06	0,04	-0,14	0,65	0,21	-0,05	0,12	0,16	0,12	0,15	0,08	0,40
D1V2Ind5	0,03	-0,06	0,02	0,20	0,14	0,01	-0,07	0,05	0,74	0,14	0,24	0,04	0,01
D1V2Ind6	0,10	-0,13	-0,11	0,16	0,65	-0,03	0,00	-0,05	-0,07	-0,13	-0,08	0,20	-0,29
D1V2Ind7	0,02	-0,03	0,14	0,35	0,70	0,15	0,18	-0,01	0,00	0,10	-0,14	-0,20	0,09
D1V2Ind8	0,22	0,03	0,12	0,66	0,19	-0,05	0,00	0,21	-0,05	0,09	0,09	0,01	0,07
D1V3Ind1	0,19	0,13	-0,27	0,02	0,16	-0,07	-0,04	-0,13	-0,60	0,06	0,23	0,26	-0,19
D1V3Ind2	0,02	0,02	0,01	0,10	0,07	0,17	0,01	-0,11	-0,08	0,06	-0,12	0,79	-0,06
D1V3Ind3	0,17	0,02	0,04	0,09	0,05	-0,05	0,01	0,15	0,10	0,03	0,02	-0,08	0,71
D2V1Ind1	0,57	0,69	-0,13	-0,04	-0,07	0,01	0,04	0,04	0,04	-0,03	0,01	0,06	-0,11
D2V1Ind2	0,42	0,77	-0,11	-0,06	-0,05	0,02	-0,05	0,11	0,09	0,03	-0,05	0,08	-0,20
D2V1Ind4	0,02	0,26	0,60	0,06	0,11	0,09	0,09	0,08	0,03	0,16	0,17	-0,20	-0,26
D2V2Ind1	0,87	0,24	-0,04	-0,05	0,17	-0,06	0,02	0,14	-0,06	-0,10	0,13	0,04	0,03
D2V2Ind2	0,84	0,25	-0,06	-0,17	0,19	0,02	-0,06	0,06	-0,04	-0,06	0,04	0,13	0,06
D2V2Ind4	0,22	0,20	0,57	0,17	-0,14	-0,08	0,02	-0,16	0,01	-0,14	-0,14	0,31	0,35
D2V3Ind1	0,92	0,17	0,00	0,17	-0,05	0,05	-0,03	-0,08	0,01	0,05	0,06	-0,03	0,05
D2V3Ind2	0,92	0,14	0,04	0,08	0,01	-0,01	-0,06	-0,04	0,01	0,07	0,02	-0,02	0,09
D2V3Ind4	0,02	0,09	0,09	0,08	0,10	0,92	0,13	0,03	0,01	-0,09	-0,01	-0,01	0,01
D2V4Ind1	0,41	0,61	0,08	0,06	-0,11	0,22	-0,21	-0,20	-0,08	-0,05	-0,07	-0,40	0,03
D2V4Ind2	0,39	0,61	0,07	0,06	-0,10	0,19	-0,18	-0,26	-0,12	-0,03	-0,09	-0,41	0,08
D2V4Ind4	0,00	0,27	0,04	0,43	0,12	0,13	-0,05	0,11	-0,49	-0,02	0,24	0,17	-0,18
D3V1Ind1	0,37	0,57	0,13	0,17	0,01	0,02	-0,34	-0,06	-0,14	0,11	-0,30	-0,06	0,08
D3V1Ind2	0,46	0,41	0,17	0,17	0,01	0,11	-0,07	-0,08	-0,29	-0,04	0,28	0,00	0,11
D3V1Ind3	0,12	0,26	-0,07	-0,01	0,01	-0,09	-0,77	0,01	0,15	-0,01	-0,02	0,06	0,04
D4V3Ind1	0,10	-0,20	-0,03	0,21	0,11	0,03	-0,07	0,51	-0,04	0,55	0,17	0,10	0,14
D4V3Ind2	-0,09	0,10	0,11	0,08	0,04	-0,18	0,18	0,01	0,13	0,78	-0,08	0,06	-0,01
D4V4Ind1	0,06	-0,17	0,28	-0,04	-0,01	0,00	0,05	0,77	0,05	-0,04	-0,05	-0,13	0,10
D4V4Ind2	-0,20	-0,49	0,11	0,07	-0,03	0,09	0,24	0,25	0,11	-0,39	-0,04	0,02	-0,11
D4V4Ind3	0,00	0,02	0,25	0,00	0,17	0,21	0,63	0,04	0,09	0,28	-0,21	0,12	-0,03
D4V4Ind4	-0,01	0,10	0,29	0,40	0,07	0,09	0,17	0,58	0,10	0,14	-0,30	-0,05	0,19
D5V1Ind1	0,31	0,78	-0,07	0,15	-0,08	0,11	-0,13	-0,08	-0,09	-0,04	0,16	0,10	0,13
D5V1Ind2	-0,04	-0,16	0,70	0,06	-0,10	-0,06	0,06	0,18	0,16	-0,06	-0,07	-0,10	-0,20
D5V1Ind3	0,82	0,29	0,08	-0,03	0,16	-0,10	0,02	0,20	0,05	-0,02	0,01	-0,08	0,00

Nomenclatura del indicador	Número de componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D5V1Ind4	-0,11	0,12	0,29	0,70	-0,01	0,15	-0,12	-0,15	0,10	0,05	-0,01	0,03	-0,01
D5V1Ind5	0,92	0,12	-0,01	0,23	-0,04	0,01	-0,07	-0,11	0,00	0,00	0,06	-0,03	0,05
D5V1Ind6	-0,06	0,09	0,06	0,07	0,10	0,93	0,08	0,00	0,00	-0,09	-0,03	0,15	-0,05
D5V2Ind1	0,10	-0,08	0,82	0,11	0,11	0,04	0,11	0,12	-0,08	0,07	0,06	0,04	0,17
D5V2Ind2	-0,12	-0,14	0,83	0,12	0,01	0,17	0,02	0,09	0,06	0,01	0,04	0,06	0,12

Tabla D.7. Matriz de cargas factoriales obtenida tras realizar el ACP con los indicadores de las UT y utilizar el método Varimax de rotación

Matriz de cargas factoriales rotada (método Quartimax)

Nomenclatura del indicador	Número de componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D1V1Ind1	0,42	-0,21	0,46	0,14	0,04	0,11	-0,20	-0,17	0,10	0,37	0,11	0,02	0,03
D1V1Ind2	0,24	0,08	0,17	-0,01	-0,06	0,00	-0,04	0,04	-0,05	0,02	0,83	-0,13	0,04
D1V1Ind3	0,26	0,13	-0,06	0,28	0,11	0,07	-0,14	0,38	-0,30	0,43	0,04	0,12	0,04
D1V2Ind1	0,29	-0,01	0,44	0,55	0,11	0,31	0,12	0,08	0,07	0,18	0,24	0,08	0,12
D1V2Ind2	0,20	0,09	0,53	0,32	0,12	0,36	0,16	0,21	-0,01	-0,03	0,16	0,15	0,11
D1V2Ind3	-0,17	0,09	0,06	0,24	0,01	0,48	0,19	0,24	-0,25	0,26	0,15	0,03	0,33
D1V2Ind4	0,07	0,05	-0,14	0,64	0,22	-0,06	0,16	0,14	0,12	0,03	0,15	0,07	0,41
D1V2Ind5	-0,01	0,02	0,20	0,16	0,00	-0,07	0,08	0,72	0,13	0,06	0,27	0,06	0,01
D1V2Ind6	0,04	-0,10	0,13	0,68	-0,05	0,03	-0,04	-0,07	-0,14	-0,04	-0,07	0,20	-0,28
D1V2Ind7	0,02	0,14	0,35	0,70	0,15	0,17	0,00	0,00	0,11	-0,06	-0,14	-0,20	0,09
D1V2Ind8	0,23	0,14	0,64	0,20	-0,07	0,02	0,25	-0,04	0,03	-0,08	0,07	0,01	0,06
D1V3Ind1	0,24	-0,29	0,03	0,15	-0,07	-0,03	-0,10	-0,61	0,06	-0,01	0,20	0,25	-0,18
D1V3Ind2	0,02	0,00	0,11	0,08	0,17	0,01	-0,09	-0,10	0,07	0,05	-0,12	0,79	-0,06
D1V3Ind3	0,17	0,05	0,08	0,03	-0,05	0,01	0,16	0,11	0,02	-0,03	0,01	-0,08	0,71
D2V1Ind1	0,79	-0,15	0,00	-0,13	0,05	-0,01	-0,04	0,00	0,07	0,40	-0,05	0,01	-0,11
D2V1Ind2	0,68	-0,12	-0,01	-0,13	0,07	-0,12	0,01	0,02	0,15	0,52	-0,12	0,00	-0,21
D2V1Ind4	0,13	0,59	0,09	0,07	0,12	0,04	0,03	-0,01	0,22	0,20	0,15	-0,24	-0,27
D2V2Ind1	0,89	-0,03	-0,08	0,18	-0,09	0,07	0,16	-0,04	-0,12	0,00	0,11	0,06	0,03
D2V2Ind2	0,87	-0,06	-0,20	0,19	0,00	-0,02	0,08	-0,02	-0,07	0,00	0,02	0,15	0,05
D2V2Ind4	0,28	0,57	0,17	-0,15	-0,07	-0,01	-0,22	0,00	-0,08	0,09	-0,15	0,30	0,34
D2V3Ind1	0,92	0,00	0,12	-0,03	0,00	0,04	-0,01	0,07	-0,01	-0,24	0,07	0,03	0,02
D2V3Ind2	0,90	0,04	0,03	0,03	-0,06	0,01	0,04	0,07	0,02	-0,24	0,03	0,04	0,07
D2V3Ind4	0,07	0,09	0,09	0,10	0,93	0,13	0,02	0,01	-0,09	0,02	-0,02	-0,02	0,01
D2V4Ind1	0,64	0,06	0,08	-0,16	0,25	-0,25	-0,27	-0,09	0,04	0,16	-0,10	-0,43	0,01
D2V4Ind2	0,62	0,05	0,08	-0,15	0,22	-0,23	-0,33	-0,13	0,07	0,14	-0,12	-0,43	0,06
D2V4Ind4	0,14	0,03	0,47	0,09	0,15	-0,08	0,09	-0,53	-0,02	0,17	0,18	0,12	-0,18
D3V1Ind1	0,58	0,10	0,19	-0,04	0,05	-0,39	-0,11	-0,15	0,17	0,15	-0,34	-0,09	0,07
D3V1Ind2	0,61	0,16	0,18	-0,02	0,12	-0,08	-0,10	-0,31	-0,01	0,11	0,24	-0,02	0,10
D3V1Ind3	0,23	-0,08	0,00	-0,02	-0,08	-0,79	0,00	0,13	-0,01	0,09	-0,02	0,05	0,03
D4V3Ind1	0,02	-0,02	0,19	0,13	0,01	-0,03	0,64	-0,02	0,41	-0,21	0,17	0,12	0,13
D4V3Ind2	-0,05	0,10	0,11	0,02	-0,16	0,13	0,09	0,11	0,80	0,00	-0,07	0,05	-0,02
D4V4Ind1	-0,02	0,31	-0,07	-0,01	-0,02	0,08	0,75	0,06	-0,14	0,02	-0,08	-0,13	0,10
D4V4Ind2	-0,39	0,14	0,02	0,02	0,05	0,30	0,23	0,15	-0,48	-0,14	-0,03	0,06	-0,10
D4V4Ind3	-0,01	0,26	0,01	0,17	0,22	0,60	0,03	0,08	0,33	0,08	-0,22	0,11	-0,02
D4V4Ind4	0,03	0,32	0,40	0,04	0,09	0,14	0,53	0,10	0,11	0,13	-0,35	-0,08	0,19
D5V1Ind1	0,61	-0,09	0,22	-0,16	0,16	-0,21	-0,17	-0,16	0,09	0,47	0,09	0,02	0,13
D5V1Ind2	-0,11	0,71	0,04	-0,08	-0,08	0,08	0,15	0,17	-0,09	-0,05	-0,06	-0,09	-0,21
D5V1Ind3	0,86	0,09	-0,06	0,15	-0,12	0,05	0,20	0,07	-0,03	0,05	-0,02	-0,07	-0,01

Nomenclatura del indicador	Número de componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D5V1Ind4	-0,03	0,28	0,71	-0,02	0,15	-0,15	-0,16	0,08	0,07	-0,02	-0,01	0,03	-0,02
D5V1Ind5	0,90	-0,01	0,17	-0,01	-0,04	0,01	-0,03	0,07	-0,07	-0,28	0,08	0,03	0,02
D5V1Ind6	-0,01	0,06	0,09	0,09	0,94	0,06	-0,02	-0,01	-0,08	0,05	-0,03	0,14	-0,05
D5V2Ind1	0,07	0,83	0,10	0,11	0,02	0,11	0,12	-0,08	0,06	-0,07	0,06	0,05	0,16
D5V2Ind2	-0,15	0,84	0,11	0,01	0,16	0,02	0,07	0,06	0,00	-0,06	0,05	0,07	0,12

Tabla D.8. Matriz de cargas factoriales obtenida tras realizar el ACP con los indicadores de las UT y utilizar el método Quartimax de rotación

Matriz de cargas factoriales rotada (método Equamax)													
Nomenclatura del indicador	Número de componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D1V1Ind1	0,04	0,43	-0,19	0,17	0,06	0,21	0,41	-0,07	0,29	-0,21	0,24	0,14	0,11
D1V1Ind2	0,10	-0,02	0,08	0,07	-0,06	-0,03	0,09	0,01	0,03	-0,06	0,87	0,06	-0,04
D1V1Ind3	0,07	0,50	0,15	-0,05	0,14	0,31	-0,03	-0,03	-0,29	-0,11	0,13	0,15	-0,30
D1V2Ind1	0,12	0,21	-0,04	-0,06	0,16	0,57	0,35	-0,25	0,05	0,09	0,37	0,23	0,14
D1V2Ind2	0,21	0,06	0,05	-0,16	0,19	0,34	0,50	-0,30	-0,09	0,14	0,26	0,19	0,08
D1V2Ind3	-0,17	0,12	0,05	-0,19	0,03	0,22	0,03	-0,50	-0,23	0,22	0,18	0,35	-0,23
D1V2Ind4	-0,01	-0,06	0,02	-0,11	0,24	0,57	-0,22	0,09	-0,12	0,12	0,18	0,46	0,14
D1V2Ind5	0,02	0,09	-0,01	-0,18	0,03	0,17	0,20	0,10	-0,65	0,04	0,35	0,04	0,16
D1V2Ind6	0,11	0,01	-0,07	-0,21	0,00	0,70	0,10	0,01	0,14	-0,07	-0,05	-0,21	-0,10
D1V2Ind7	-0,03	-0,15	0,09	0,19	0,16	0,72	0,27	-0,19	-0,02	0,08	-0,04	0,13	0,14
D1V2Ind8	0,15	-0,02	0,09	0,01	-0,03	0,24	0,61	0,02	0,13	0,26	0,18	0,12	0,12
D1V3Ind1	0,13	0,06	-0,22	-0,12	-0,05	0,14	-0,03	0,08	0,70	-0,20	0,15	-0,13	0,07
D1V3Ind2	0,08	0,20	0,08	-0,63	0,26	0,07	0,16	0,07	0,23	-0,24	-0,20	0,02	0,11
D1V3Ind3	0,08	-0,06	0,00	0,09	-0,05	-0,01	0,07	0,01	-0,11	0,17	0,06	0,72	0,04
D2V1Ind1	0,41	0,72	-0,12	0,27	0,07	-0,05	0,03	0,12	0,15	-0,07	0,11	0,04	0,09
D2V1Ind2	0,26	0,79	-0,10	0,27	0,09	-0,04	0,02	0,21	0,11	-0,01	0,04	-0,06	0,16
D2V1Ind4	-0,06	0,17	0,56	0,29	0,12	0,11	0,06	-0,06	-0,01	0,13	0,23	-0,23	0,21
D2V2Ind1	0,74	0,38	-0,03	0,13	-0,04	0,20	-0,06	0,08	0,21	0,11	0,24	0,19	-0,04
D2V2Ind2	0,72	0,39	-0,03	0,09	0,05	0,21	-0,17	0,17	0,18	0,00	0,13	0,22	-0,01
D2V2Ind4	0,17	0,20	0,59	-0,06	-0,02	-0,14	0,26	0,04	0,05	-0,19	-0,13	0,42	-0,06
D2V3Ind1	0,84	0,21	0,00	0,22	0,05	0,01	0,18	0,11	0,10	-0,06	0,20	0,16	0,08
D2V3Ind2	0,83	0,20	0,04	0,20	-0,01	0,06	0,09	0,14	0,09	-0,02	0,16	0,21	0,10
D2V3Ind4	0,01	0,01	0,05	0,12	0,93	0,08	0,06	-0,12	0,00	0,05	0,01	0,02	-0,08
D2V4Ind1	0,25	0,31	0,05	0,73	0,21	-0,09	0,09	0,27	0,11	-0,17	0,06	0,07	0,01
D2V4Ind2	0,23	0,27	0,04	0,74	0,18	-0,09	0,09	0,25	0,14	-0,23	0,03	0,12	0,03
D2V4Ind4	-0,09	0,12	0,04	-0,01	0,17	0,12	0,39	0,08	0,61	0,08	0,22	-0,13	0,02
D3V1Ind1	0,24	0,34	0,11	0,42	0,05	0,03	0,23	0,44	0,21	-0,07	-0,21	0,16	0,18
D3V1Ind2	0,30	0,24	0,17	0,26	0,14	0,00	0,16	0,14	0,41	-0,10	0,33	0,20	0,01
D3V1Ind3	0,04	0,15	-0,05	0,06	-0,08	-0,01	0,03	0,82	-0,08	-0,03	0,02	0,06	-0,02
D4V3Ind1	0,10	-0,20	-0,08	-0,24	0,04	0,08	0,12	0,08	0,08	0,54	0,18	0,14	0,50
D4V3Ind2	-0,07	0,02	0,08	-0,04	-0,15	0,02	0,08	-0,12	-0,11	0,03	-0,05	-0,01	0,81
D4V4Ind1	0,05	0,00	0,22	-0,03	-0,01	-0,02	-0,07	-0,07	-0,08	0,81	-0,03	0,10	-0,07
D4V4Ind2	-0,07	-0,22	0,10	-0,28	0,06	0,01	0,06	-0,33	-0,19	0,28	-0,08	-0,15	-0,45
D4V4Ind3	0,04	0,13	0,23	-0,07	0,25	0,18	0,02	-0,58	-0,08	0,04	-0,20	0,02	0,35
D4V4Ind4	-0,05	0,12	0,22	0,06	0,11	0,08	0,40	-0,14	-0,09	0,61	-0,23	0,23	0,19
D5V1Ind1	0,11	0,60	-0,06	0,28	0,17	-0,11	0,20	0,27	0,28	-0,19	0,22	0,24	0,08
D5V1Ind2	0,02	-0,05	0,67	0,03	-0,06	-0,05	0,09	-0,11	-0,22	0,26	-0,04	-0,21	-0,06
D5V1Ind3	0,68	0,41	0,08	0,25	-0,08	0,20	-0,02	0,08	0,07	0,19	0,15	0,15	0,04

Nomenclatura del indicador	Número de componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D5V1Ind4	-0,13	-0,06	0,26	0,06	0,17	0,04	0,72	0,12	-0,06	-0,10	0,06	-0,01	0,09
D5V1Ind5	0,84	0,16	-0,01	0,21	0,01	0,03	0,23	0,13	0,09	-0,08	0,21	0,15	0,02
D5V1Ind6	-0,06	0,04	0,04	-0,03	0,95	0,08	0,07	-0,05	0,03	-0,02	-0,03	-0,04	-0,07
D5V2Ind1	0,07	-0,10	0,80	0,00	0,06	0,09	0,10	-0,12	0,06	0,19	0,08	0,20	0,10
D5V2Ind2	-0,10	-0,16	0,81	-0,06	0,19	-0,01	0,13	-0,06	-0,11	0,16	0,04	0,11	0,01

Tabla D.9. Matriz de cargas factoriales obtenida tras realizar el ACP con los indicadores de las UT y utilizar el método Equamax de rotación

ANEXO D.7

En este anexo se adjunta la matriz de correlaciones que recoge los cálculos de todos los coeficientes de correlación de Pearson para todas las parejas de indicadores tomados en consideración en el ACP para las unidades prácticas. Como hay 51 indicadores, la matriz tiene una dimensión de 51X51, y, además, es simétrica, debido a las propiedades del coeficiente de correlación.

Para facilitar la lectura de una matriz tan grande, mostraremos dicha matriz dividida en cuatro submatrices, partiendo las columnas de los indicadores en cuatro. En la Tabla D.10 se recoge la primera submatriz, con los coeficientes de correlación de Pearson de los indicadores correspondientes a la Dimensión 1 con todos los indicadores tenidos en cuenta para este ACP en las unidades prácticas. La segunda submatriz (Tabla D.11) contiene dichos coeficientes para los indicadores de la Dimensión 2. La tercera submatriz (Tabla D.12) hace lo propio con los indicadores de las Dimensiones 3 y 4. Por último, la cuarta submatriz (Tabla D.13) muestra los coeficientes para los indicadores de la Dimensión 5 en relación con todos los indicadores participantes en el análisis para las UP.

Indicador tipificado	Z(D1 V1 Ind1)	Z(D1 V1 Ind2)	Z(D1 V1 Ind3)	Z(D1 V1 Ind4)	Z(D1 V1 Ind5)	Z(D1 V2 Ind1)	Z(D1 V2 Ind2)	Z(D1 V2 Ind3)	Z(D1 V2 Ind4)	Z(D1 V2 Ind5)	Z(D1 V2 Ind6)	Z(D1 V2 Ind7)	Z(D1 V2 Ind8)	Z(D1 V3 Ind1)	Z(D1 V3 Ind3)
Z(D1V1Ind1)	1	0,066	0,101	0,136	0,622	0,444	0,425	0,024	0,312	0,292	-0,021	0,161	0,294	0,073	0,228
Z(D1V1Ind2)	0,066	1	0,090	0,271	0,066	-0,057	-0,029	0,003	0,008	-0,220	-0,164	0,083	0,041	-0,122	-0,200
Z(D1V1Ind3)	0,101	0,090	1	0,252	0,027	0,147	0,139	0,167	0,071	-0,037	-0,169	0,130	0,015	0,156	0,070
Z(D1V1Ind4)	0,136	0,271	0,252	1	-0,015	0,001	0,000	0,108	0,042	-0,137	-0,251	-0,095	-0,217	-0,163	-0,220
Z(D1V1Ind5)	0,622	0,066	0,027	-0,015	1	0,560	0,481	0,153	0,425	0,394	0,150	0,313	0,349	0,005	0,221
Z(D1V2Ind1)	0,444	-0,057	0,147	0,001	0,560	1	0,730	0,380	0,448	0,332	0,170	0,447	0,393	-0,083	0,362
Z(D1V2Ind2)	0,425	-0,029	0,139	0,000	0,481	0,730	1	0,439	0,332	0,331	0,220	0,364	0,429	-0,180	0,256
Z(D1V2Ind3)	0,024	0,003	0,167	0,108	0,153	0,380	0,439	1	0,164	0,188	0,085	0,154	0,095	-0,182	-0,013
Z(D1V2Ind4)	0,312	0,008	0,071	0,042	0,425	0,448	0,332	0,164	1	0,071	0,111	0,318	0,170	0,062	0,067
Z(D1V2Ind5)	0,292	-0,220	-0,037	-0,137	0,394	0,332	0,331	0,188	0,071	1	0,079	0,132	0,167	-0,031	0,197
Z(D1V2Ind6)	-0,021	-0,164	-0,169	-0,251	0,150	0,170	0,220	0,085	0,111	0,079	1	0,295	0,236	-0,126	0,005
Z(D1V2Ind7)	0,161	0,083	0,130	-0,095	0,313	0,447	0,364	0,154	0,318	0,132	0,295	1	0,464	-0,092	0,200
Z(D1V2Ind8)	0,294	0,041	0,015	-0,217	0,349	0,393	0,429	0,095	0,170	0,167	0,236	0,464	1	0,165	0,322
Z(D1V3Ind1)	0,073	-0,122	0,156	-0,163	0,005	-0,083	-0,180	-0,182	0,062	-0,031	-0,126	-0,092	0,165	1	-0,012
Z(D1V3Ind3)	0,228	-0,200	0,070	-0,220	0,221	0,362	0,256	-0,013	0,067	0,197	0,005	0,200	0,322	-0,012	1
Z(D2V1Ind1)	0,238	-0,126	0,340	-0,303	0,181	0,198	0,078	-0,095	0,078	0,042	0,003	0,137	0,239	0,407	0,252
Z(D2V1Ind2)	0,268	0,132	0,100	-0,208	0,062	0,045	-0,001	-0,166	-0,011	-0,013	0,065	0,041	0,306	0,231	0,145
Z(D2V1Ind3)	-0,193	-0,317	-0,319	-0,375	-0,213	-0,174	-0,253	-0,296	-0,137	-0,043	0,251	-0,171	-0,108	-0,025	-0,022
Z(D2V1Ind4)	-0,196	-0,361	-0,317	-0,317	-0,244	-0,199	-0,291	-0,309	-0,138	-0,083	0,208	-0,143	-0,117	-0,012	-0,074
Z(D2V2Ind1)	0,314	-0,242	0,210	-0,176	0,281	0,352	0,252	0,037	0,373	0,193	-0,046	0,235	0,226	0,323	0,350
Z(D2V2Ind2)	0,101	-0,369	-0,082	-0,259	0,026	-0,015	-0,019	-0,117	0,045	0,069	0,035	-0,211	0,053	0,124	0,109
Z(D2V3Ind1)	0,156	-0,287	0,239	-0,311	-0,023	0,243	0,159	0,005	-0,016	-0,015	0,144	0,050	0,237	0,275	0,387
Z(D2V3Ind2)	0,129	-0,253	0,174	-0,252	0,075	0,265	0,219	-0,051	0,061	0,026	0,048	0,066	0,331	0,197	0,422

Indicador tipificado	Z(D1 V1 Ind1)	Z(D1 V1 Ind2)	Z(D1 V1 Ind3)	Z(D1 V1 Ind4)	Z(D1 V1 Ind5)	Z(D1 V2 Ind1)	Z(D1 V2 Ind2)	Z(D1 V2 Ind3)	Z(D1 V2 Ind4)	Z(D1 V2 Ind5)	Z(D1 V2 Ind6)	Z(D1 V2 Ind7)	Z(D1 V2 Ind8)	Z(D1 V3 Ind1)	Z(D1 V3 Ind3)
Z(D2V4Ind1)	-0,025	-0,155	0,153	-0,091	-0,008	-0,003	-0,169	-0,165	0,074	0,044	0,006	0,160	0,158	0,275	0,183
Z(D2V4Ind2)	-0,330	-0,104	0,017	0,044	-0,171	-0,165	-0,156	0,082	-0,062	-0,061	0,066	0,023	-0,096	-0,016	0,014
Z(D2V4Ind3)	0,089	-0,149	0,288	-0,201	0,030	0,184	0,092	-0,077	0,046	0,085	-0,034	0,112	0,169	0,170	0,590
Z(D2V4Ind4)	0,273	0,088	0,165	-0,160	0,165	0,157	-0,024	-0,226	0,096	0,048	-0,028	-0,019	0,212	0,174	0,212
Z(D2V4Ind5)	0,054	-0,145	0,098	-0,128	0,127	0,179	0,054	-0,034	0,235	0,081	-0,014	0,245	0,287	0,251	0,198
Z(D2V4Ind6)	-0,103	-0,005	0,045	-0,162	0,016	-0,161	-0,174	-0,153	-0,061	0,020	-0,131	0,017	-0,140	-0,103	0,010
Z(D3V1Ind1)	0,261	-0,021	0,089	-0,221	0,140	0,062	-0,075	-0,389	0,005	-0,008	-0,094	0,074	0,217	0,134	0,381
Z(D3V1Ind2)	0,284	-0,021	0,108	-0,170	0,160	0,077	0,036	-0,289	0,129	0,184	0,004	0,094	0,225	0,174	0,203
Z(D3V1Ind3)	0,336	-0,089	-0,093	-0,140	0,248	0,062	-0,015	-0,259	0,021	0,321	0,055	0,042	0,251	0,190	0,244
Z(D3V1Ind4)	0,115	-0,214	0,045	-0,211	0,008	-0,116	-0,086	-0,396	0,052	0,022	-0,124	0,011	0,152	0,162	0,277
Z(D4V3Ind1)	0,064	0,041	-0,092	-0,021	-0,044	0,129	0,108	0,182	0,002	0,170	-0,056	0,033	0,050	-0,194	-0,006
Z(D4V3Ind2)	0,054	0,019	-0,163	-0,036	0,062	0,091	0,000	0,137	0,056	0,050	0,064	0,123	-0,003	-0,127	-0,023
Z(D4V4Ind1)	-0,020	0,150	0,112	0,017	-0,021	0,031	0,096	0,258	-0,032	0,007	0,087	0,017	0,121	-0,278	0,100
Z(D4V4Ind2)	-0,190	0,030	-0,001	0,139	-0,184	-0,038	0,094	0,115	0,066	0,013	-0,006	0,057	0,067	-0,134	0,035
Z(D4V4Ind3)	-0,075	0,346	-0,195	-0,003	-0,017	-0,008	0,005	0,165	0,058	-0,131	-0,083	0,133	-0,030	-0,109	-0,059
Z(D4V4Ind4)	-0,033	0,160	0,241	0,006	-0,070	0,178	0,127	0,102	0,149	-0,017	-0,094	0,221	0,205	-0,050	0,111
Z(D5V1Ind1)	0,399	-0,027	0,220	-0,210	0,271	0,167	0,077	-0,225	0,263	0,026	-0,132	0,053	0,288	0,229	0,366
Z(D5V1Ind2)	-0,068	0,270	0,049	0,036	-0,053	-0,091	0,049	0,224	0,057	0,040	0,077	-0,099	-0,052	0,014	-0,216
Z(D5V1Ind3)	0,263	-0,097	0,196	-0,436	0,267	0,207	0,083	-0,013	0,167	0,074	0,099	0,154	0,273	0,255	0,274
Z(D5V1Ind4)	0,075	0,165	-0,098	0,211	-0,057	0,060	0,164	0,000	0,087	0,190	0,095	0,145	0,153	-0,159	-0,086
Z(D5V1Ind5)	0,240	-0,248	0,197	-0,239	0,090	0,156	0,096	-0,144	0,031	0,197	-0,005	-0,017	0,112	0,233	0,342
Z(D5V1Ind6)	0,213	-0,062	0,070	0,138	0,054	0,219	0,256	0,173	0,157	0,160	-0,064	0,244	0,070	-0,044	0,139

Indicador tipificado	Z(D1 V1 Ind1)	Z(D1 V1 Ind2)	Z(D1 V1 Ind3)	Z(D1 V1 Ind4)	Z(D1 V1 Ind5)	Z(D1 V2 Ind1)	Z(D1 V2 Ind2)	Z(D1 V2 Ind3)	Z(D1 V2 Ind4)	Z(D1 V2 Ind5)	Z(D1 V2 Ind6)	Z(D1 V2 Ind7)	Z(D1 V2 Ind8)	Z(D1 V3 Ind1)	Z(D1 V3 Ind3)
Z(D5V2Ind1)	0,141	0,037	0,280	0,164	0,018	0,131	0,197	0,174	-0,030	0,174	-0,124	-0,040	0,050	-0,200	0,163
Z(D5V2Ind2)	0,135	0,209	0,255	0,144	0,006	0,123	0,221	0,125	-0,039	0,082	-0,128	0,013	0,093	-0,193	0,071
Z(D5V3Ind1)	0,065	0,296	-0,054	0,282	0,132	0,043	0,024	-0,045	0,022	0,018	-0,343	-0,007	-0,076	-0,103	-0,159
Z(D5V3Ind2)	-0,013	0,301	-0,026	0,339	0,023	-0,035	-0,020	0,068	-0,090	0,037	-0,303	-0,109	-0,176	-0,167	-0,294
Z(D5V4Ind1)	-0,055	0,291	0,073	0,338	0,070	-0,048	0,071	0,110	0,158	-0,067	-0,064	-0,030	-0,171	-0,191	-0,286
Z(D5V4Ind2)	-0,045	0,330	0,001	0,267	0,073	0,002	0,083	0,116	0,113	-0,084	0,053	0,109	-0,017	-0,185	-0,241

Tabla D.10. Valores de los coeficientes de correlación de Pearson, para las UP, de los indicadores correspondientes a la Dimensión 1 con el resto de indicadores

Indicador tipificado	Z(D2V 1Ind1)	Z(D2V 1Ind2)	Z(D2V 1Ind3)	Z(D2V 1Ind4)	Z(D2V 2Ind1)	Z(D2V 2Ind2)	Z(D2V 3Ind1)	Z(D2V 3Ind2)	Z(D2V 4Ind1)	Z(D2V 4Ind2)	Z(D2V 4Ind3)	Z(D2V 4Ind4)	Z(D2V 4Ind5)	Z(D2V 4Ind6)
Z(D1V1Ind1)	0,238	0,268	-0,193	-0,196	0,314	0,101	0,156	0,129	-0,025	-0,330	0,089	0,273	0,054	-0,103
Z(D1V1Ind2)	-0,126	0,132	-0,317	-0,361	-0,242	-0,369	-0,287	-0,253	-0,155	-0,104	-0,149	0,088	-0,145	-0,005
Z(D1V1Ind3)	0,340	0,100	-0,319	-0,317	0,210	-0,082	0,239	0,174	0,153	0,017	0,288	0,165	0,098	0,045
Z(D1V1Ind4)	-0,303	-0,208	-0,375	-0,317	-0,176	-0,259	-0,311	-0,252	-0,091	0,044	-0,201	-0,160	-0,128	-0,162
Z(D1V1Ind5)	0,181	0,062	-0,213	-0,244	0,281	0,026	-0,023	0,075	-0,008	-0,171	0,030	0,165	0,127	0,016
Z(D1V2Ind1)	0,198	0,045	-0,174	-0,199	0,352	-0,015	0,243	0,265	-0,003	-0,165	0,184	0,157	0,179	-0,161
Z(D1V2Ind2)	0,078	-0,001	-0,253	-0,291	0,252	-0,019	0,159	0,219	-0,169	-0,156	0,092	-0,024	0,054	-0,174
Z(D1V2Ind3)	-0,095	-0,166	-0,296	-0,309	0,037	-0,117	0,005	-0,051	-0,165	0,082	-0,077	-0,226	-0,034	-0,153
Z(D1V2Ind4)	0,078	-0,011	-0,137	-0,138	0,373	0,045	-0,016	0,061	0,074	-0,062	0,046	0,096	0,235	-0,061
Z(D1V2Ind5)	0,042	-0,013	-0,043	-0,083	0,193	0,069	-0,015	0,026	0,044	-0,061	0,085	0,048	0,081	0,020
Z(D1V2Ind6)	0,003	0,065	0,251	0,208	-0,046	0,035	0,144	0,048	0,006	0,066	-0,034	-0,028	-0,014	-0,131
Z(D1V2Ind7)	0,137	0,041	-0,171	-0,143	0,235	-0,211	0,050	0,066	0,160	0,023	0,112	-0,019	0,245	0,017
Z(D1V2Ind8)	0,239	0,306	-0,108	-0,117	0,226	0,053	0,237	0,331	0,158	-0,096	0,169	0,212	0,287	-0,140
Z(D1V3Ind1)	0,407	0,231	-0,025	-0,012	0,323	0,124	0,275	0,197	0,275	-0,016	0,170	0,174	0,251	-0,103
Z(D1V3Ind3)	0,252	0,145	-0,022	-0,074	0,350	0,109	0,387	0,422	0,183	0,014	0,590	0,212	0,198	0,010
Z(D2V1Ind1)	1	0,519	-0,094	-0,100	0,508	0,217	0,552	0,448	0,290	-0,154	0,253	0,483	0,257	0,044
Z(D2V1Ind2)	0,519	1	0,093	0,080	0,087	0,147	0,373	0,165	0,029	-0,154	0,095	0,381	0,114	-0,185
Z(D2V1Ind3)	-0,094	0,093	1	0,958	-0,137	0,349	0,125	0,150	-0,018	-0,009	-0,022	-0,039	0,018	-0,012
Z(D2V1Ind4)	-0,100	0,080	0,958	1	-0,129	0,370	0,117	0,178	0,029	-0,008	-0,054	-0,002	0,051	0,033
Z(D2V2Ind1)	0,508	0,087	-0,137	-0,129	1	0,246	0,409	0,486	0,448	-0,075	0,365	0,259	0,530	0,128
Z(D2V2Ind2)	0,217	0,147	0,349	0,370	0,246	1	0,421	0,413	0,093	-0,047	0,109	0,167	0,098	-0,001
Z(D2V3Ind1)	0,552	0,373	0,125	0,117	0,409	0,421	1	0,609	0,234	-0,028	0,406	0,339	0,143	-0,037
Z(D2V3Ind2)	0,448	0,165	0,150	0,178	0,486	0,413	0,609	1	0,280	-0,085	0,276	0,264	0,229	0,045

Indicador tipificado	Z(D2V 1Ind1)	Z(D2V 1Ind2)	Z(D2V 1Ind3)	Z(D2V 1Ind4)	Z(D2V 2Ind1)	Z(D2V 2Ind2)	Z(D2V 3Ind1)	Z(D2V 3Ind2)	Z(D2V 4Ind1)	Z(D2V 4Ind2)	Z(D2V 4Ind3)	Z(D2V 4Ind4)	Z(D2V 4Ind5)	Z(D2V 4Ind6)
Z(D2V4Ind1)	0,290	0,029	-0,018	0,029	0,448	0,093	0,234	0,280	1	0,423	0,298	0,202	0,367	0,346
Z(D2V4Ind2)	-0,154	-0,154	-0,009	-0,008	-0,075	-0,047	-0,028	-0,085	0,423	1	0,117	-0,253	-0,015	0,145
Z(D2V4Ind3)	0,253	0,095	-0,022	-0,054	0,365	0,109	0,406	0,276	0,298	0,117	1	0,360	0,323	0,117
Z(D2V4Ind4)	0,483	0,381	-0,039	-0,002	0,259	0,167	0,339	0,264	0,202	-0,253	0,360	1	0,217	0,103
Z(D2V4Ind5)	0,257	0,114	0,018	0,051	0,530	0,098	0,143	0,229	0,367	-0,015	0,323	0,217	1	0,014
Z(D2V4Ind6)	0,044	-0,185	-0,012	0,033	0,128	-0,001	-0,037	0,045	0,346	0,145	0,117	0,103	0,014	1
Z(D3V1Ind1)	0,350	0,288	0,120	0,139	0,334	0,209	0,314	0,431	0,156	-0,172	0,437	0,506	0,203	0,082
Z(D3V1Ind2)	0,403	0,342	0,068	0,050	0,351	0,211	0,209	0,298	0,165	-0,158	0,410	0,452	0,154	0,111
Z(D3V1Ind3)	0,332	0,342	0,222	0,243	0,371	0,338	0,280	0,348	0,247	-0,118	0,226	0,436	0,224	0,003
Z(D3V1Ind4)	0,172	0,195	0,072	0,056	0,094	0,193	0,156	0,068	0,022	0,017	0,472	0,239	0,115	0,081
Z(D4V3Ind1)	-0,099	-0,056	0,009	0,017	-0,059	0,002	-0,013	-0,022	-0,001	-0,049	-0,032	-0,058	-0,164	0,011
Z(D4V3Ind2)	-0,244	-0,014	0,188	0,157	-0,090	-0,063	-0,054	-0,157	-0,122	-0,069	-0,036	-0,167	-0,159	-0,119
Z(D4V4Ind1)	-0,085	0,117	-0,166	-0,200	-0,118	0,007	0,054	-0,045	-0,083	0,138	0,085	0,023	-0,051	-0,143
Z(D4V4Ind2)	-0,060	-0,016	-0,195	-0,203	-0,096	-0,251	-0,072	-0,103	-0,093	0,107	0,039	-0,262	0,066	-0,001
Z(D4V4Ind3)	-0,280	-0,211	-0,079	-0,118	-0,149	-0,241	-0,278	-0,198	-0,138	0,053	-0,204	-0,277	-0,167	0,002
Z(D4V4Ind4)	-0,067	-0,016	-0,065	-0,065	0,046	0,038	0,064	0,037	0,200	0,114	0,146	0,012	0,025	0,151
Z(D5V1Ind1)	0,461	0,329	0,105	0,132	0,374	0,264	0,277	0,379	0,123	-0,197	0,440	0,564	0,265	0,019
Z(D5V1Ind2)	-0,297	-0,092	-0,110	-0,140	-0,255	-0,008	-0,165	-0,164	-0,165	0,069	-0,241	-0,124	-0,261	-0,116
Z(D5V1Ind3)	0,749	0,466	0,088	0,094	0,495	0,346	0,510	0,477	0,171	-0,235	0,352	0,499	0,266	0,041
Z(D5V1Ind4)	-0,264	-0,072	-0,061	-0,021	-0,115	-0,030	-0,233	-0,105	0,017	0,029	-0,120	-0,032	-0,035	-0,087
Z(D5V1Ind5)	0,531	0,432	-0,050	-0,052	0,406	0,321	0,462	0,339	0,087	-0,118	0,349	0,369	0,185	-0,004
Z(D5V1Ind6)	-0,078	-0,212	-0,131	-0,140	0,240	-0,054	-0,023	0,193	0,090	0,176	0,058	-0,168	0,019	-0,050
Z(D5V2Ind1)	-0,056	0,036	-0,113	-0,100	0,049	0,112	0,230	0,167	0,054	0,053	0,212	0,066	-0,131	0,246

Indicador tipificado	Z(D2V 1Ind1)	Z(D2V 1Ind2)	Z(D2V 1Ind3)	Z(D2V 1Ind4)	Z(D2V 2Ind1)	Z(D2V 2Ind2)	Z(D2V 3Ind1)	Z(D2V 3Ind2)	Z(D2V 4Ind1)	Z(D2V 4Ind2)	Z(D2V 4Ind3)	Z(D2V 4Ind4)	Z(D2V 4Ind5)	Z(D2V 4Ind6)
Z(D5V2Ind2)	-0,099	0,080	-0,231	-0,204	0,000	-0,001	0,220	0,156	-0,003	0,055	0,142	0,154	-0,171	0,193
Z(D5V3Ind1)	-0,248	-0,202	-0,269	-0,236	-0,130	-0,260	-0,443	-0,039	-0,103	-0,146	-0,146	-0,005	-0,214	0,091
Z(D5V3Ind2)	-0,412	-0,326	-0,206	-0,190	-0,322	-0,247	-0,589	-0,239	-0,327	-0,190	-0,244	-0,042	-0,228	-0,023
Z(D5V4Ind1)	-0,441	-0,462	-0,196	-0,191	-0,141	-0,364	-0,586	-0,183	-0,131	-0,051	-0,264	-0,232	-0,096	0,113
Z(D5V4Ind2)	-0,391	-0,371	-0,174	-0,182	-0,064	-0,349	-0,462	-0,146	-0,042	-0,052	-0,179	-0,215	0,001	0,054

Tabla D.11. Valores de los coeficientes de correlación de Pearson, para las UP, de los indicadores correspondientes a la Dimensión 2 con el resto de indicadores

Indicador tipificado	Z(D3V1Ind1)	Z(D3V1Ind2)	Z(D3V1Ind3)	Z(D3V1Ind4)	Z(D4V3Ind1)	Z(D4V3Ind2)	Z(D4V4Ind1)	Z(D4V4Ind2)	Z(D4V4Ind3)	Z(D4V4Ind4)
Z(D1V1Ind1)	0,261	0,284	0,336	0,115	0,064	0,054	-0,020	-0,190	-0,075	-0,033
Z(D1V1Ind2)	-0,021	-0,021	-0,089	-0,214	0,041	0,019	0,150	0,030	0,346	0,160
Z(D1V1Ind3)	0,089	0,108	-0,093	0,045	-0,092	-0,163	0,112	-0,001	-0,195	0,241
Z(D1V1Ind4)	-0,221	-0,170	-0,140	-0,211	-0,021	-0,036	0,017	0,139	-0,003	0,006
Z(D1V1Ind5)	0,140	0,160	0,248	0,008	-0,044	0,062	-0,021	-0,184	-0,017	-0,070
Z(D1V2Ind1)	0,062	0,077	0,062	-0,116	0,129	0,091	0,031	-0,038	-0,008	0,178
Z(D1V2Ind2)	-0,075	0,036	-0,015	-0,086	0,108	0,000	0,096	0,094	0,005	0,127
Z(D1V2Ind3)	-0,389	-0,289	-0,259	-0,396	0,182	0,137	0,258	0,115	0,165	0,102
Z(D1V2Ind4)	0,005	0,129	0,021	0,052	0,002	0,056	-0,032	0,066	0,058	0,149
Z(D1V2Ind5)	-0,008	0,184	0,321	0,022	0,170	0,050	0,007	0,013	-0,131	-0,017
Z(D1V2Ind6)	-0,094	0,004	0,055	-0,124	-0,056	0,064	0,087	-0,006	-0,083	-0,094
Z(D1V2Ind7)	0,074	0,094	0,042	0,011	0,033	0,123	0,017	0,057	0,133	0,221
Z(D1V2Ind8)	0,217	0,225	0,251	0,152	0,050	-0,003	0,121	0,067	-0,030	0,205
Z(D1V3Ind1)	0,134	0,174	0,190	0,162	-0,194	-0,127	-0,278	-0,134	-0,109	-0,050
Z(D1V3Ind3)	0,381	0,203	0,244	0,277	-0,006	-0,023	0,100	0,035	-0,059	0,111
Z(D2V1Ind1)	0,350	0,403	0,332	0,172	-0,099	-0,244	-0,085	-0,060	-0,280	-0,067
Z(D2V1Ind2)	0,288	0,342	0,342	0,195	-0,056	-0,014	0,117	-0,016	-0,211	-0,016
Z(D2V1Ind3)	0,120	0,068	0,222	0,072	0,009	0,188	-0,166	-0,195	-0,079	-0,065
Z(D2V1Ind4)	0,139	0,050	0,243	0,056	0,017	0,157	-0,200	-0,203	-0,118	-0,065
Z(D2V2Ind1)	0,334	0,351	0,371	0,094	-0,059	-0,090	-0,118	-0,096	-0,149	0,046
Z(D2V2Ind2)	0,209	0,211	0,338	0,193	0,002	-0,063	0,007	-0,251	-0,241	0,038
Z(D2V3Ind1)	0,314	0,209	0,280	0,156	-0,013	-0,054	0,054	-0,072	-0,278	0,064
Z(D2V3Ind2)	0,431	0,298	0,348	0,068	-0,022	-0,157	-0,045	-0,103	-0,198	0,037
Z(D2V4Ind1)	0,156	0,165	0,247	0,022	-0,001	-0,122	-0,083	-0,093	-0,138	0,200

Indicador tipificado	Z(D3V1Ind1)	Z(D3V1Ind2)	Z(D3V1Ind3)	Z(D3V1Ind4)	Z(D4V3Ind1)	Z(D4V3Ind2)	Z(D4V4Ind1)	Z(D4V4Ind2)	Z(D4V4Ind3)	Z(D4V4Ind4)
Z(D2V4Ind2)	-0,172	-0,158	-0,118	0,017	-0,049	-0,069	0,138	0,107	0,053	0,114
Z(D2V4Ind3)	0,437	0,410	0,226	0,472	-0,032	-0,036	0,085	0,039	-0,204	0,146
Z(D2V4Ind4)	0,506	0,452	0,436	0,239	-0,058	-0,167	0,023	-0,262	-0,277	0,012
Z(D2V4Ind5)	0,203	0,154	0,224	0,115	-0,164	-0,159	-0,051	0,066	-0,167	0,025
Z(D2V4Ind6)	0,082	0,111	0,003	0,081	0,011	-0,119	-0,143	-0,001	0,002	0,151
Z(D3V1Ind1)	1	0,637	0,537	0,443	-0,037	-0,014	-0,055	-0,181	-0,232	-0,046
Z(D3V1Ind2)	0,637	1	0,515	0,341	-0,019	-0,043	-0,082	-0,083	-0,224	0,026
Z(D3V1Ind3)	0,537	0,515	1	0,257	0,036	0,082	-0,158	-0,203	-0,155	-0,080
Z(D3V1Ind4)	0,443	0,341	0,257	1	-0,038	-0,068	0,063	0,010	-0,213	-0,037
Z(D4V3Ind1)	-0,037	-0,019	0,036	-0,038	1	0,679	0,087	0,186	0,202	0,249
Z(D4V3Ind2)	-0,014	-0,043	0,082	-0,068	0,679	1	0,003	0,064	0,234	0,199
Z(D4V4Ind1)	-0,055	-0,082	-0,158	0,063	0,087	0,003	1	0,100	0,030	0,199
Z(D4V4Ind2)	-0,181	-0,083	-0,203	0,010	0,186	0,064	0,100	1	0,090	0,149
Z(D4V4Ind3)	-0,232	-0,224	-0,155	-0,213	0,202	0,234	0,030	0,090	1	0,203
Z(D4V4Ind4)	-0,046	0,026	-0,080	-0,037	0,249	0,199	0,199	0,149	0,203	1
Z(D5V1Ind1)	0,715	0,643	0,451	0,386	-0,065	-0,078	-0,076	-0,206	-0,266	-0,064
Z(D5V1Ind2)	-0,255	-0,139	-0,026	-0,277	-0,017	0,042	0,275	-0,004	0,279	0,310
Z(D5V1Ind3)	0,516	0,531	0,467	0,250	-0,021	-0,039	-0,027	-0,143	-0,189	-0,038
Z(D5V1Ind4)	-0,071	-0,037	0,166	-0,074	0,156	0,029	0,119	0,171	0,206	0,338
Z(D5V1Ind5)	0,310	0,262	0,301	0,326	-0,139	-0,205	0,103	-0,058	-0,345	-0,102
Z(D5V1Ind6)	0,053	0,106	0,125	-0,044	0,117	0,053	-0,132	0,039	0,214	0,205
Z(D5V2Ind1)	0,128	0,194	0,046	0,100	0,173	0,031	0,207	0,151	-0,130	0,270
Z(D5V2Ind2)	0,164	0,173	0,083	0,056	0,128	0,020	0,186	0,122	0,017	0,270

Indicador tipificado	Z(D3V1Ind1)	Z(D3V1Ind2)	Z(D3V1Ind3)	Z(D3V1Ind4)	Z(D4V3Ind1)	Z(D4V3Ind2)	Z(D4V4Ind1)	Z(D4V4Ind2)	Z(D4V4Ind3)	Z(D4V4Ind4)
Z(D5V3Ind1)	0,021	-0,044	-0,095	-0,080	-0,033	-0,051	-0,081	-0,091	0,067	0,036
Z(D5V3Ind2)	-0,156	-0,128	-0,207	-0,174	-0,019	0,012	0,006	-0,153	0,015	-0,051
Z(D5V4Ind1)	-0,233	-0,182	-0,189	-0,260	-0,046	-0,033	-0,074	-0,032	0,132	0,028
Z(D5V4Ind2)	-0,168	-0,147	-0,146	-0,262	0,048	0,103	-0,038	0,004	0,148	0,101

Tabla D.12. Valores de los coeficientes de correlación de Pearson, para las UP, de los indicadores correspondientes a la Dimensión 3 y 4 con el resto de indicadores

Indicador tipificado	Z(D5V1Ind1)	Z(D5V1Ind2)	Z(D5V1Ind3)	Z(D5V1Ind4)	Z(D5V1Ind5)	Z(D5V1Ind6)	Z(D5V2Ind1)	Z(D5V2Ind2)	Z(D5V3Ind1)	Z(D5V3Ind2)	Z(D5V4Ind1)	Z(D5V4Ind2)
Z(D1V1Ind1)	0,399	-0,068	0,263	0,075	0,240	0,213	0,141	0,135	0,065	-0,013	-0,055	-0,045
Z(D1V1Ind2)	-0,027	0,270	-0,097	0,165	-0,248	-0,062	0,037	0,209	0,296	0,301	0,291	0,330
Z(D1V1Ind3)	0,220	0,049	0,196	-0,098	0,197	0,070	0,280	0,255	-0,054	-0,026	0,073	0,001
Z(D1V1Ind4)	-0,210	0,036	-0,436	0,211	-0,239	0,138	0,164	0,144	0,282	0,339	0,338	0,267
Z(D1V1Ind5)	0,271	-0,053	0,267	-0,057	0,090	0,054	0,018	0,006	0,132	0,023	0,070	0,073
Z(D1V2Ind1)	0,167	-0,091	0,207	0,060	0,156	0,219	0,131	0,123	0,043	-0,035	-0,048	0,002
Z(D1V2Ind2)	0,077	0,049	0,083	0,164	0,096	0,256	0,197	0,221	0,024	-0,020	0,071	0,083
Z(D1V2Ind3)	-0,225	0,224	-0,013	0,000	-0,144	0,173	0,174	0,125	-0,045	0,068	0,110	0,116
Z(D1V2Ind4)	0,263	0,057	0,167	0,087	0,031	0,157	-0,030	-0,039	0,022	-0,090	0,158	0,113
Z(D1V2Ind5)	0,026	0,040	0,074	0,190	0,197	0,160	0,174	0,082	0,018	0,037	-0,067	-0,084
Z(D1V2Ind6)	-0,132	0,077	0,099	0,095	-0,005	-0,064	-0,124	-0,128	-0,343	-0,303	-0,064	0,053
Z(D1V2Ind7)	0,053	-0,099	0,154	0,145	-0,017	0,244	-0,040	0,013	-0,007	-0,109	-0,030	0,109
Z(D1V2Ind8)	0,288	-0,052	0,273	0,153	0,112	0,070	0,050	0,093	-0,076	-0,176	-0,171	-0,017
Z(D1V3Ind1)	0,229	0,014	0,255	-0,159	0,233	-0,044	-0,200	-0,193	-0,103	-0,167	-0,191	-0,185
Z(D1V3Ind3)	0,366	-0,216	0,274	-0,086	0,342	0,139	0,163	0,071	-0,159	-0,294	-0,286	-0,241
Z(D2V1Ind1)	0,461	-0,297	0,749	-0,264	0,531	-0,078	-0,056	-0,099	-0,248	-0,412	-0,441	-0,391
Z(D2V1Ind2)	0,329	-0,092	0,466	-0,072	0,432	-0,212	0,036	0,080	-0,202	-0,326	-0,462	-0,371
Z(D2V1Ind3)	0,105	-0,110	0,088	-0,061	-0,050	-0,131	-0,113	-0,231	-0,269	-0,206	-0,196	-0,174
Z(D2V1Ind4)	0,132	-0,140	0,094	-0,021	-0,052	-0,140	-0,100	-0,204	-0,236	-0,190	-0,191	-0,182
Z(D2V2Ind1)	0,374	-0,255	0,495	-0,115	0,406	0,240	0,049	0,000	-0,130	-0,322	-0,141	-0,064
Z(D2V2Ind2)	0,264	-0,008	0,346	-0,030	0,321	-0,054	0,112	-0,001	-0,260	-0,247	-0,364	-0,349
Z(D2V3Ind1)	0,277	-0,165	0,510	-0,233	0,462	-0,023	0,230	0,220	-0,443	-0,589	-0,586	-0,462
Z(D2V3Ind2)	0,379	-0,164	0,477	-0,105	0,339	0,193	0,167	0,156	-0,039	-0,239	-0,183	-0,146
Z(D2V4Ind1)	0,123	-0,165	0,171	0,017	0,087	0,090	0,054	-0,003	-0,103	-0,327	-0,131	-0,042

Indicador tipificado	Z(D5V1Ind1)	Z(D5V1Ind2)	Z(D5V1Ind3)	Z(D5V1Ind4)	Z(D5V1Ind5)	Z(D5V1Ind6)	Z(D5V2Ind1)	Z(D5V2Ind2)	Z(D5V3Ind1)	Z(D5V3Ind2)	Z(D5V4Ind1)	Z(D5V4Ind2)
Z(D2V4Ind2)	-0,197	0,069	-0,235	0,029	-0,118	0,176	0,053	0,055	-0,146	-0,190	-0,051	-0,052
Z(D2V4Ind3)	0,440	-0,241	0,352	-0,120	0,349	0,058	0,212	0,142	-0,146	-0,244	-0,264	-0,179
Z(D2V4Ind4)	0,564	-0,124	0,499	-0,032	0,369	-0,168	0,066	0,154	-0,005	-0,042	-0,232	-0,215
Z(D2V4Ind5)	0,265	-0,261	0,266	-0,035	0,185	0,019	-0,131	-0,171	-0,214	-0,228	-0,096	0,001
Z(D2V4Ind6)	0,019	-0,116	0,041	-0,087	-0,004	-0,050	0,246	0,193	0,091	-0,023	0,113	0,054
Z(D3V1Ind1)	0,715	-0,255	0,516	-0,071	0,310	0,053	0,128	0,164	0,021	-0,156	-0,233	-0,168
Z(D3V1Ind2)	0,643	-0,139	0,531	-0,037	0,262	0,106	0,194	0,173	-0,044	-0,128	-0,182	-0,147
Z(D3V1Ind3)	0,451	-0,026	0,467	0,166	0,301	0,125	0,046	0,083	-0,095	-0,207	-0,189	-0,146
Z(D3V1Ind4)	0,386	-0,277	0,250	-0,074	0,326	-0,044	0,100	0,056	-0,080	-0,174	-0,260	-0,262
Z(D4V3Ind1)	-0,065	-0,017	-0,021	0,156	-0,139	0,117	0,173	0,128	-0,033	-0,019	-0,046	0,048
Z(D4V3Ind2)	-0,078	0,042	-0,039	0,029	-0,205	0,053	0,031	0,020	-0,051	0,012	-0,033	0,103
Z(D4V4Ind1)	-0,076	0,275	-0,027	0,119	0,103	-0,132	0,207	0,186	-0,081	0,006	-0,074	-0,038
Z(D4V4Ind2)	-0,206	-0,004	-0,143	0,171	-0,058	0,039	0,151	0,122	-0,091	-0,153	-0,032	0,004
Z(D4V4Ind3)	-0,266	0,279	-0,189	0,206	-0,345	0,214	-0,130	0,017	0,067	0,015	0,132	0,148
Z(D4V4Ind4)	-0,064	0,310	-0,038	0,338	-0,102	0,205	0,270	0,270	0,036	-0,051	0,028	0,101
Z(D5V1Ind1)	1	-0,256	0,596	-0,193	0,290	0,038	0,127	0,113	-0,062	-0,136	-0,197	-0,207
Z(D5V1Ind2)	-0,256	1	-0,205	0,228	-0,191	0,151	0,104	0,206	0,055	0,182	0,311	0,218
Z(D5V1Ind3)	0,596	-0,205	1	-0,170	0,423	-0,036	0,011	-0,023	-0,242	-0,378	-0,410	-0,382
Z(D5V1Ind4)	-0,193	0,228	-0,170	1	-0,043	0,184	0,058	0,096	0,160	0,168	0,143	0,109
Z(D5V1Ind5)	0,290	-0,191	0,423	-0,043	1	-0,144	0,074	0,062	-0,105	-0,194	-0,419	-0,418
Z(D5V1Ind6)	0,038	0,151	-0,036	0,184	-0,144	1	0,159	0,232	0,137	0,028	0,194	0,123
Z(D5V2Ind1)	0,127	0,104	0,011	0,058	0,074	0,159	1	0,857	0,112	-0,026	-0,025	-0,072
Z(D5V2Ind2)	0,113	0,206	-0,023	0,096	0,062	0,232	0,857	1	0,211	0,021	0,027	0,021

Indicador tipificado	Z(D5V1Ind1)	Z(D5V1Ind2)	Z(D5V1Ind3)	Z(D5V1Ind4)	Z(D5V1Ind5)	Z(D5V1Ind6)	Z(D5V2Ind1)	Z(D5V2Ind2)	Z(D5V3Ind1)	Z(D5V3Ind2)	Z(D5V4Ind1)	Z(D5V4Ind2)
Z(D5V3Ind1)	-0,062	0,055	-0,242	0,160	-0,105	0,137	0,112	0,211	1	0,771	0,404	0,364
Z(D5V3Ind2)	-0,136	0,182	-0,378	0,168	-0,194	0,028	-0,026	0,021	0,771	1	0,531	0,468
Z(D5V4Ind1)	-0,197	0,311	-0,410	0,143	-0,419	0,194	-0,025	0,027	0,404	0,531	1	0,831
Z(D5V4Ind2)	-0,207	0,218	-0,382	0,109	-0,418	0,123	-0,072	0,021	0,364	0,468	0,831	1

Tabla D.13. Valores de los coeficientes de correlación de Pearson, para las UP, de los indicadores correspondientes a la Dimensión 5 con el resto de indicadores

ANEXO D.8

En este anexo se muestra la matriz de cargas factoriales obtenida tras haber realizado el análisis de componentes principales en las unidades prácticas, en el que han sido seleccionadas las 16 primeras componentes. La Tabla D.14 contiene dicha matriz. Al igual que en el Anexo D.5, hemos marcado en negrita aquellas cargas factoriales que se consideran significativas en cuanto a su magnitud, por ser superiores a 0’5 en valor absoluto. Existe un número importante de componentes donde todas las cargas factoriales son inferiores en magnitud a 0’5, sobre todo en las últimas componentes. Esto dificulta poder realizar una interpretación correcta del significado de las componentes obtenidas y poder determinar los indicadores con un peso relevante en cada una de ellas. Este aspecto ha hecho que fuera necesario aplicar métodos de rotación de esta matriz que clarificaran y facilitaran esa interpretación.

Matriz de cargas factoriales

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D1V1Ind1	0,383	**0,503**	-0,132	-0,303	0,148	-0,217	-0,087	-0,021	-0,095	0,198	-0,030	0,126	-0,092	-0,202	0,048	-0,216
D1V1Ind2	-0,309	0,318	-0,366	0,055	0,068	-0,207	**0,548**	0,141	-0,009	-0,147	-0,089	-0,026	-0,121	0,001	0,045	-0,076
D1V1Ind3	0,210	0,316	-0,217	0,402	-0,325	-0,049	-0,025	0,199	-0,128	-0,164	0,125	0,217	0,176	-0,052	0,099	-0,005
D1V1Ind4	-0,425	0,299	-0,303	0,128	-0,108	-0,057	-0,109	-0,013	-0,064	0,205	0,251	0,465	-0,054	-0,025	0,201	-0,258
D1V1Ind5	0,274	**0,558**	0,003	-0,467	-0,005	-0,075	-0,101	-0,073	0,038	-0,009	-0,300	-0,020	-0,006	-0,251	0,010	-0,153
D1V2Ind1	0,308	**0,674**	0,304	-0,228	-0,031	-0,058	-0,178	-0,047	-0,045	-0,125	0,042	-0,025	0,021	0,105	0,021	-0,209
D1V2Ind2	0,164	**0,707**	0,336	-0,147	-0,008	-0,153	-0,239	-0,016	0,100	-0,091	0,090	-0,006	-0,085	0,069	-0,103	0,020
D1V2Ind3	-0,202	0,482	0,428	0,092	-0,177	-0,174	-0,198	0,140	-0,180	-0,110	-0,035	-0,068	0,164	-0,052	0,098	0,154
D1V2Ind4	0,173	0,455	0,107	-0,290	-0,104	0,172	0,087	0,052	-0,039	-0,020	0,112	0,175	0,218	-0,305	-0,411	-0,205
D1V2Ind5	0,192	0,331	0,176	-0,153	0,191	0,003	-0,321	-0,136	0,141	0,427	-0,352	-0,024	0,140	0,027	0,062	0,276
D1V2Ind6	0,085	-0,020	**0,533**	-0,261	0,033	-0,025	0,068	0,143	0,427	-0,244	-0,149	0,213	-0,113	-0,073	0,120	0,165
D1V2Ind7	0,173	0,478	0,288	-0,163	-0,094	0,229	0,310	-0,144	0,146	-0,170	-0,067	0,024	-0,172	0,111	0,029	-0,110
D1V2Ind8	0,416	0,400	0,217	-0,131	0,036	-0,010	0,301	0,002	0,272	-0,035	0,072	-0,069	-0,106	0,232	0,070	0,019
D1V3Ind1	0,364	-0,175	-0,165	-0,091	-0,339	0,087	0,175	0,258	-0,208	0,322	0,132	-0,092	0,056	-0,041	0,024	0,119
D1V3Ind3	**0,542**	0,212	0,149	0,142	0,024	0,099	-0,091	-0,340	0,105	-0,079	0,169	-0,338	-0,064	-0,007	0,153	-0,046
D2V1Ind1	**0,747**	-0,014	-0,077	-0,005	-0,340	-0,161	0,129	0,132	-0,198	0,004	-0,154	0,025	-0,069	0,131	-0,040	0,083
D2V1Ind2	**0,524**	-0,093	-0,034	0,023	0,044	-0,467	0,369	0,105	0,058	0,071	-0,044	0,173	-0,095	0,088	0,050	-0,039
D2V1Ind3	0,139	**-0,614**	0,268	-0,235	0,466	0,169	-0,091	0,123	0,070	-0,182	0,112	0,083	0,034	0,020	-0,028	-0,092
D2V1Ind4	0,142	**-0,627**	0,224	-0,222	0,462	0,210	-0,106	0,148	0,060	-0,159	0,106	0,139	0,033	0,080	-0,040	-0,146
D2V2Ind1	**0,637**	0,273	0,007	-0,081	-0,257	0,357	-0,107	0,096	-0,205	0,099	-0,005	-0,005	0,091	0,029	-0,078	0,067
D2V2Ind2	0,458	-0,272	0,137	0,007	0,246	-0,027	-0,307	0,327	0,003	0,144	0,083	-0,076	0,204	-0,066	-0,182	-0,163

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D2V3Ind1	**0,709**	-0,083	0,273	0,297	-0,070	-0,148	-0,118	0,212	-0,133	-0,116	0,081	-0,006	-0,106	0,085	0,086	-0,043
D2V3Ind2	**0,617**	0,072	0,043	0,066	0,053	0,182	-0,235	0,298	-0,063	-0,168	0,220	-0,158	-0,158	0,309	0,031	0,068
D2V4Ind1	0,353	-0,029	0,005	0,225	-0,212	**0,616**	0,127	0,143	0,021	0,150	-0,287	0,085	0,049	0,081	0,257	-0,185
D2V4Ind2	-0,138	-0,120	0,236	0,421	-0,178	0,397	0,020	-0,017	0,210	0,151	-0,105	-0,019	-0,078	-0,296	0,283	-0,130
D2V4Ind3	**0,571**	0,095	-0,074	0,323	-0,025	0,222	0,007	-0,324	0,105	-0,131	0,169	-0,141	0,207	-0,116	0,143	0,083
D2V4Ind4	**0,592**	0,050	-0,389	-0,019	0,095	-0,142	0,158	0,108	0,088	-0,086	-0,159	0,001	0,167	0,082	0,080	-0,096
D2V4Ind5	0,418	0,066	0,037	-0,144	-0,318	0,379	0,135	-0,048	0,114	0,031	0,137	0,154	0,261	0,158	-0,059	0,032
D2V4Ind6	0,045	-0,051	-0,216	0,269	0,051	0,438	-0,084	-0,058	-0,026	-0,185	**-0,621**	-0,060	-0,024	0,036	-0,302	-0,059
D3V1Ind1	**0,655**	-0,021	-0,388	-0,012	0,313	0,101	0,117	-0,130	0,035	-0,134	0,135	-0,046	-0,101	-0,046	0,097	0,063
D3V1Ind2	**0,610**	0,081	-0,329	-0,023	0,285	0,083	0,133	-0,027	0,047	0,005	-0,025	0,139	-0,061	-0,147	-0,061	0,252
D3V1Ind3	**0,585**	-0,003	-0,142	-0,200	0,395	0,129	0,076	0,147	0,069	0,325	-0,074	0,094	-0,074	-0,031	0,194	0,161
D3V1Ind4	0,437	-0,155	-0,219	0,140	0,140	0,024	0,061	-0,467	0,212	0,087	0,171	-0,075	0,110	-0,241	-0,166	0,006
D4V3Ind1	-0,080	0,180	0,292	0,124	0,476	0,007	0,148	-0,211	**-0,501**	0,076	-0,116	0,077	0,244	0,172	0,129	0,085
D4V3Ind2	-0,128	0,083	0,325	-0,086	**0,503**	0,013	0,223	-0,205	-0,490	-0,038	-0,015	0,090	0,236	-0,032	0,228	0,037
D4V4Ind1	-0,049	0,188	0,173	0,374	0,049	-0,343	0,136	0,017	0,360	-0,106	0,025	-0,162	0,376	-0,111	0,151	-0,024
D4V4Ind2	-0,159	0,132	0,241	0,342	-0,098	-0,010	0,195	-0,350	0,025	0,124	0,142	0,290	-0,071	0,198	-0,374	0,329
D4V4Ind3	-0,377	0,171	0,203	-0,013	0,130	0,103	0,409	0,031	-0,248	0,063	0,016	-0,418	-0,238	-0,146	-0,163	-0,069
D4V4Ind4	-0,018	0,330	0,174	0,409	0,224	0,242	0,317	0,211	-0,019	0,010	0,077	-0,096	0,255	0,131	-0,177	-0,243
D5V1Ind1	**0,704**	0,081	-0,362	-0,116	0,179	0,022	0,066	-0,054	-0,053	-0,183	0,159	0,042	0,041	-0,216	-0,029	-0,011
D5V1Ind2	-0,352	0,203	0,071	0,144	0,178	-0,117	0,148	**0,579**	0,158	0,143	0,030	-0,219	0,132	-0,287	-0,058	0,228
D5V1Ind3	**0,786**	0,008	-0,023	-0,099	0,000	-0,116	0,155	0,138	-0,164	-0,126	-0,109	-0,052	0,023	-0,022	-0,099	0,146
D5V1Ind4	-0,189	0,272	0,090	0,019	0,322	0,100	0,218	0,113	0,357	0,470	0,102	0,086	0,039	0,275	-0,104	-0,115

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D5V1Ind5	**0,622**	-0,032	-0,081	0,104	-0,138	-0,273	-0,166	-0,042	0,130	0,222	-0,036	-0,108	0,154	0,164	-0,080	0,015
D5V1Ind6	-0,003	0,417	0,085	0,067	0,143	0,398	-0,132	0,095	-0,151	0,241	0,299	-0,094	-0,367	-0,159	0,059	0,116
D5V2Ind1	0,125	0,340	-0,074	**0,632**	0,371	-0,052	-0,311	0,050	0,015	-0,097	-0,106	0,208	-0,085	-0,034	-0,096	-0,004
D5V2Ind2	0,068	0,406	-0,157	**0,607**	0,376	-0,090	-0,155	0,132	0,035	-0,103	-0,085	0,112	-0,233	-0,023	-0,070	0,022
D5V3Ind1	-0,333	0,330	**-0,567**	-0,105	0,162	0,063	-0,147	-0,043	0,018	0,037	-0,016	-0,238	-0,049	0,307	-0,013	-0,124
D5V3Ind2	**-0,522**	0,240	**-0,527**	-0,207	0,153	-0,060	-0,187	-0,007	0,066	-0,004	0,054	-0,190	0,206	0,233	0,090	0,001
D5V4Ind1	**-0,569**	0,335	-0,328	-0,206	0,011	0,322	-0,083	0,183	0,082	-0,201	0,068	0,083	0,110	-0,067	-0,023	0,231
D5V4Ind2	-0,493	0,354	-0,223	-0,224	0,033	0,354	0,067	0,134	0,075	-0,283	0,055	0,102	0,135	0,064	0,114	0,249

Tabla D.14. Matriz de cargas factoriales obtenida al realizar el ACP con los indicadores de las UP

ANEXO D.9

En este anexo se muestran las matrices de cargas factoriales rotadas para el ACP de las unidades prácticas, utilizando cada uno de los tres métodos de rotación ortogonales más usuales: Varimax, Quartimax y Equamax. El objetivo es seleccionar el método que nos proporcione mayor facilidad para poder interpretar las componentes principales obtenidas en este análisis.

Para poder detectar de una manera más sencilla cuáles son los indicadores con un peso alto en cada componente, hemos utilizado el mismo código de colores ya explicado en el Anexo D.6. Con un tono verde oscuro hemos señalado las celdas con cargas factoriales superiores o iguales a 0'5. Con un tono verde más claro hemos marcado las celdas en el caso de que la carga fuera mayor o igual a 0'3, pero inferior a 0'5. Del mismo modo, hemos señalado con un color naranja intenso las celdas con cargas factoriales inferiores o iguales a -0'5, y se ha utilizado un color naranja más claro cuando las celdas han contenido una carga factorial superior a -0'5, pero inferior o igual a -0'3.

Se presentan a continuación las tres matrices. La primera de ellas es la matriz de cargas factoriales para las unidades prácticas, tras hacer rotado la misma utilizando el método Varimax, una rotación que ha convergido tras realizar 64 iteraciones. La Tabla D.15 muestra dicha matriz. La segunda matriz que presentamos es la matriz rotada utilizando el método Quartimax, que ha convergido tras 17 iteraciones. La Tabla D.16 contiene dicha matriz. Por último, la tercera matriz es la obtenida al utilizar el método

Equamax, rotación que ha convergido tras 30 iteraciones. La matriz se presenta en la Tabla D.17. En este caso, a diferencia de lo que sucedió en el Anexo D.6 y dado el mayor número de componentes, hemos optado por presentar las matrices en un formato apaisado, lo que nos permite mantener los tres decimales que nos proporciona el programa SPSS al efectuar los cálculos de estas matrices.

Matriz de cargas factoriales rotada (método Varimax)

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D1V1Ind1	0,380	0,137	0,252	0,215	-0,039	0,136	-0,060	0,057	-0,152	0,256	0,413	-0,133	0,042	0,112	0,326	-0,230
D1V1Ind2	0,193	-0,227	0,105	0,456	-0,278	0,072	-0,270	0,078	-0,092	-0,437	-0,071	0,197	0,177	-0,040	0,093	0,042
D1V1Ind3	0,090	-0,024	-0,047	0,385	0,420	0,329	0,055	-0,057	0,164	-0,202	0,164	0,080	-0,135	-0,212	-0,027	-0,191
D1V1Ind4	-0,170	-0,292	-0,187	0,341	-0,131	0,279	-0,192	-0,026	0,124	-0,103	0,151	-0,269	0,184	-0,001	0,029	-0,536
D1V1Ind5	0,214	-0,030	0,461	0,210	-0,102	-0,023	-0,038	-0,001	-0,083	0,343	0,460	-0,058	-0,127	0,014	0,359	0,062
D1V2Ind1	-0,066	0,049	0,647	0,125	0,249	0,145	0,119	0,131	-0,165	0,174	0,355	-0,100	0,015	0,033	0,213	-0,104
D1V2Ind2	-0,129	-0,006	0,635	0,139	0,158	0,256	0,074	-0,007	-0,274	0,263	0,278	0,051	-0,006	0,112	0,003	-0,137
D1V2Ind3	-0,461	-0,053	0,278	0,249	0,203	0,170	-0,056	0,237	-0,075	0,173	0,122	0,313	-0,228	0,015	0,013	-0,118
D1V2Ind4	0,074	-0,089	0,242	0,037	0,092	-0,066	0,015	-0,003	-0,026	-0,018	0,825	0,052	0,056	0,057	-0,056	0,013
D1V2Ind5	0,077	0,015	0,173	0,067	0,007	0,063	0,036	0,126	0,001	0,840	0,044	0,047	0,098	0,020	0,016	0,064
D1V2Ind6	-0,020	0,040	0,576	-0,391	-0,145	-0,071	-0,196	-0,104	0,162	0,146	-0,040	0,223	-0,214	-0,143	-0,151	-0,074
D1V2Ind7	0,053	-0,045	0,722	0,128	0,012	-0,070	0,052	0,075	0,166	-0,085	0,154	-0,097	0,092	0,084	-0,082	0,103
D1V2Ind8	0,273	0,120	0,670	0,062	0,146	-0,060	0,108	-0,004	-0,018	0,019	-0,021	0,085	0,230	0,005	-0,057	-0,048
D1V3Ind1	0,281	0,216	-0,244	0,145	0,420	-0,403	-0,077	-0,127	0,123	-0,011	0,051	0,070	0,009	0,126	0,011	-0,076
D1V3Ind3	0,163	0,237	0,347	0,034	0,166	0,074	0,646	0,012	0,042	0,086	-0,055	-0,075	-0,041	0,146	0,094	0,012
D2V1Ind1	0,432	0,493	0,126	0,211	0,486	-0,117	-0,086	-0,109	-0,011	0,005	0,030	-0,098	-0,180	-0,139	-0,007	0,114
D2V1Ind2	0,492	0,539	0,148	0,064	0,013	-0,013	-0,165	-0,013	-0,088	-0,110	-0,086	0,064	0,075	-0,253	-0,034	-0,156
D2V1Ind3	0,091	0,088	-0,074	-0,895	-0,049	-0,102	-0,018	0,095	-0,005	-0,067	-0,076	-0,036	-0,027	-0,025	0,048	0,022
D2V1Ind4	0,096	0,075	-0,105	-0,907	-0,010	-0,077	-0,058	0,079	0,022	-0,083	-0,068	-0,106	0,032	-0,047	0,056	0,026
D2V2Ind1	0,280	0,099	0,159	0,103	0,631	-0,079	0,127	-0,023	0,167	0,203	0,323	-0,134	-0,061	0,128	0,009	0,122
D2V2Ind2	0,127	0,362	-0,204	-0,498	0,301	0,100	0,077	-0,075	-0,069	0,178	0,198	0,153	0,105	-0,025	0,211	0,009
D2V3Ind1	0,176	0,603	0,168	-0,150	0,504	0,237	0,113	-0,016	0,067	-0,057	-0,076	0,037	-0,180	-0,029	0,045	-0,071

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D2V3Ind2	0,252	0,138	0,237	-0,240	0,679	0,187	0,145	-0,123	-0,080	-0,015	-0,142	-0,056	-0,008	0,171	0,118	0,028
D2V4Ind1	0,155	0,059	0,051	0,021	0,361	-0,040	0,013	-0,004	0,766	0,022	-0,007	-0,152	0,150	-0,027	0,094	0,231
D2V4Ind2	-0,260	0,060	-0,058	-0,001	-0,131	0,075	0,168	-0,093	0,740	-0,006	-0,089	0,114	-0,012	0,146	-0,024	0,013
D2V4Ind3	0,335	0,091	0,072	0,065	0,236	0,101	0,700	0,034	0,225	0,007	0,014	-0,005	-0,099	-0,078	-0,075	0,024
D2V4Ind4	0,615	0,149	0,054	0,086	0,186	0,053	0,069	-0,056	-0,031	-0,029	0,019	0,002	0,084	-0,350	0,254	0,092
D2V4Ind5	0,190	-0,050	0,189	-0,031	0,424	-0,308	0,186	-0,095	0,240	0,032	0,242	-0,149	0,109	-0,167	-0,220	-0,001
D2V4Ind6	0,060	-0,117	-0,130	0,007	0,013	0,272	-0,014	-0,051	0,258	0,031	0,040	-0,178	-0,026	-0,068	0,005	0,795
D3V1Ind1	0,770	0,054	0,045	-0,104	0,108	0,091	0,332	-0,010	-0,037	-0,080	-0,071	-0,137	-0,027	0,051	0,098	0,022
D3V1Ind2	0,793	0,036	0,023	-0,036	0,088	0,132	0,110	-0,015	0,000	0,115	0,083	-0,007	-0,047	0,042	-0,101	0,065
D3V1Ind3	0,714	0,117	0,057	-0,200	0,120	-0,028	-0,062	0,072	0,135	0,351	-0,052	0,010	0,156	0,136	0,116	-0,081
D3V1Ind4	0,422	0,198	-0,170	-0,050	-0,182	-0,011	0,597	-0,110	-0,008	0,047	0,126	-0,086	0,046	-0,045	-0,164	0,039
D4V3Ind1	-0,038	0,021	0,014	-0,001	0,001	0,136	-0,009	0,873	-0,049	0,109	-0,039	-0,018	0,107	0,029	-0,088	0,044
D4V3Ind2	0,004	-0,044	0,047	-0,140	-0,143	-0,027	-0,011	0,884	-0,028	-0,002	0,036	0,023	-0,039	0,065	0,004	-0,079
D4V4Ind1	-0,137	0,096	0,138	0,146	-0,143	0,195	0,309	0,053	0,037	-0,036	-0,062	0,538	0,104	-0,376	0,027	-0,129
D4V4Ind2	-0,175	0,062	0,059	0,188	-0,057	0,130	0,053	0,098	-0,062	0,001	-0,003	-0,067	0,142	0,036	-0,816	0,004
D4V4Ind3	-0,205	-0,013	0,097	0,158	-0,245	-0,159	-0,076	0,260	-0,066	-0,289	0,035	0,255	0,150	0,533	0,027	0,248
D4V4Ind4	-0,086	-0,019	0,118	0,030	0,192	0,259	0,115	0,291	0,173	-0,277	0,190	0,302	0,505	0,023	-0,055	0,180
D5V1Ind1	0,736	0,080	0,039	-0,060	0,173	0,068	0,285	-0,031	-0,096	-0,090	0,253	-0,085	-0,145	-0,022	0,134	-0,031
D5V1Ind2	-0,092	-0,180	-0,093	0,059	-0,064	0,113	-0,226	-0,029	-0,015	0,020	0,026	0,814	0,154	0,170	0,045	-0,046
D5V1Ind3	0,578	0,387	0,175	-0,026	0,377	-0,068	0,025	0,039	-0,114	0,017	0,117	0,078	-0,203	-0,079	0,032	0,171
D5V1Ind4	-0,012	-0,113	0,157	-0,036	-0,132	0,064	-0,113	0,030	0,050	0,156	0,017	0,132	0,775	0,078	-0,139	-0,120
D5V1Ind5	0,254	0,460	-0,023	0,099	0,311	0,014	0,239	-0,213	-0,139	0,294	-0,010	-0,024	0,099	-0,251	0,038	0,003

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D5V1Ind6	0,026	-0,180	0,125	0,067	0,166	0,201	0,073	0,047	0,141	0,112	0,084	0,015	0,085	0,739	-0,020	-0,157
D5V2Ind1	0,085	0,038	-0,030	0,055	0,052	0,898	0,090	0,073	0,037	0,093	0,024	0,047	0,045	0,000	-0,067	0,059
D5V2Ind2	0,158	0,000	0,037	0,161	0,003	0,863	0,010	0,024	-0,005	-0,022	-0,070	0,125	0,094	0,112	-0,030	0,066
D5V3Ind1	0,002	-0,504	-0,081	0,292	-0,052	0,134	0,009	-0,080	-0,305	0,014	-0,128	-0,210	0,351	0,082	0,321	0,126
D5V3Ind2	-0,109	-0,650	-0,183	0,221	-0,114	0,013	-0,004	-0,019	-0,365	0,074	-0,136	-0,039	0,250	-0,102	0,310	-0,047
D5V4Ind1	-0,100	-0,874	-0,033	0,104	-0,030	0,041	-0,169	-0,080	-0,039	-0,024	0,115	0,115	-0,025	0,079	-0,013	0,000
D5V4Ind2	-0,052	-0,860	0,140	0,085	0,016	-0,027	-0,148	0,068	0,023	-0,081	0,009	0,091	-0,010	0,004	-0,043	-0,010

Tabla D.15. Matriz de cargas factoriales obtenida tras realizar el ACP con los indicadores de las UP y utilizar el método Varimax de rotación

Matriz de cargas factoriales rotada (método Quartimax)																
Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D1V1Ind1	0,401	0,425	0,080	0,176	0,091	-0,165	0,063	-0,079	0,106	-0,113	0,054	0,193	0,117	-0,328	0,216	0,305
D1V1Ind2	0,081	-0,066	-0,290	0,516	0,110	-0,150	0,097	-0,203	0,251	0,146	-0,061	-0,433	-0,089	-0,145	-0,056	0,003
D1V1Ind3	0,205	0,127	0,008	0,292	0,274	0,290	-0,102	-0,011	-0,300	0,194	0,156	-0,184	-0,119	0,125	0,347	0,036
D1V1Ind4	-0,258	-0,062	-0,260	0,299	0,231	0,030	-0,023	-0,126	0,142	-0,177	0,144	-0,084	0,070	-0,051	0,658	0,154
D1V1Ind5	0,241	0,568	-0,087	0,201	-0,041	-0,068	0,000	-0,042	-0,029	-0,100	-0,115	0,269	-0,018	-0,377	-0,091	0,346
D1V2Ind1	0,080	0,869	0,041	0,039	0,061	0,007	0,092	0,031	-0,020	-0,047	0,050	0,065	0,005	-0,094	0,071	0,081
D1V2Ind2	-0,018	0,819	-0,008	0,081	0,175	-0,170	-0,036	0,011	0,003	0,068	-0,052	0,158	0,088	0,081	0,055	0,045
D1V2Ind3	-0,364	0,474	-0,006	0,192	0,107	-0,007	0,189	-0,101	-0,307	0,352	-0,021	0,133	0,016	0,054	0,081	-0,041
D1V2Ind4	0,132	0,466	-0,106	-0,014	-0,100	0,081	-0,019	-0,020	0,009	0,088	0,039	-0,067	0,057	0,093	0,017	0,701
D1V2Ind5	0,090	0,271	0,007	0,048	0,069	0,022	0,125	0,025	0,140	0,037	-0,040	0,806	0,030	-0,025	-0,083	-0,001
D1V2Ind6	-0,055	0,286	0,045	-0,259	-0,081	-0,001	-0,075	-0,093	0,020	0,098	-0,739	0,084	-0,108	0,030	-0,047	-0,055
D1V2Ind7	0,067	0,583	-0,058	0,173	-0,078	0,214	0,075	0,077	0,198	-0,144	-0,302	-0,173	0,059	0,068	-0,158	0,037
D1V2Ind8	0,332	0,548	0,089	0,083	-0,089	0,056	-0,003	0,090	0,320	0,067	-0,222	-0,071	-0,003	0,092	-0,053	-0,167
D1V3Ind1	0,365	-0,154	0,223	0,090	-0,418	0,235	-0,144	-0,153	-0,088	0,154	0,208	0,016	0,189	0,052	0,097	0,009
D1V3Ind3	0,266	0,386	0,243	0,000	0,043	0,087	0,001	0,589	-0,043	-0,066	0,039	0,031	0,137	-0,042	-0,082	-0,186
D2V1Ind1	0,601	0,170	0,467	0,167	-0,135	0,179	-0,137	-0,202	-0,225	-0,056	0,067	-0,005	-0,104	0,094	-0,063	-0,082
D2V1Ind2	0,516	-0,001	0,482	0,116	-0,016	-0,136	0,009	-0,160	0,186	0,041	-0,177	-0,123	-0,231	-0,001	0,124	-0,073
D2V1Ind3	0,069	-0,200	0,085	-0,844	-0,097	-0,068	0,123	-0,001	0,038	-0,076	-0,202	-0,074	-0,022	-0,074	-0,078	-0,031
D2V1Ind4	0,077	-0,217	0,073	-0,869	-0,071	-0,011	0,105	-0,049	0,074	-0,128	-0,154	-0,087	-0,040	-0,067	-0,049	-0,027
D2V2Ind1	0,461	0,387	0,113	-0,010	-0,121	0,441	-0,070	-0,014	-0,207	-0,030	0,209	0,170	0,186	0,131	-0,034	0,119
D2V2Ind2	0,245	0,007	0,359	-0,583	0,071	0,036	-0,094	-0,022	-0,010	0,229	0,222	0,168	-0,011	-0,119	0,011	0,121

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D2V3Ind1	0,360	0,241	0,623	-0,204	0,180	0,177	-0,049	0,005	-0,246	0,098	0,004	-0,091	0,019	0,046	0,080	-0,232
D2V3Ind2	0,451	0,363	0,149	-0,347	0,120	0,184	-0,167	-0,019	-0,138	0,038	0,187	-0,071	0,202	0,074	-0,025	-0,376
D2V4Ind1	0,191	-0,028	0,093	0,002	-0,008	0,884	-0,023	0,010	0,074	-0,091	-0,034	0,027	0,047	-0,083	-0,062	-0,045
D2V4Ind2	-0,349	-0,217	0,130	0,063	0,113	0,544	-0,080	0,290	0,032	0,088	-0,268	0,015	0,204	-0,116	0,026	0,007
D2V4Ind3	0,423	0,100	0,108	0,029	0,090	0,275	0,023	0,655	-0,159	0,028	0,044	0,008	-0,020	0,118	0,017	-0,057
D2V4Ind4	0,688	0,042	0,081	0,054	0,060	0,087	-0,060	0,010	0,063	0,029	0,089	-0,030	-0,333	-0,191	-0,012	-0,031
D2V4Ind5	0,301	0,236	-0,027	-0,084	-0,335	0,439	-0,118	0,123	0,019	-0,071	0,021	0,018	-0,097	0,313	0,083	0,112
D2V4Ind6	0,052	-0,176	-0,138	0,008	0,377	0,405	-0,064	-0,037	-0,092	-0,223	0,093	0,066	-0,125	-0,006	-0,618	0,129
D3V1Ind1	0,788	-0,033	-0,001	-0,099	0,095	-0,023	0,013	0,297	0,022	-0,150	0,007	-0,091	0,085	-0,084	-0,023	-0,087
D3V1Ind2	0,787	-0,048	-0,019	-0,010	0,151	-0,006	0,013	0,097	0,029	-0,038	-0,109	0,112	0,100	0,073	-0,047	0,101
D3V1Ind3	0,690	-0,028	0,073	-0,176	-0,021	0,104	0,104	-0,060	0,255	0,004	-0,129	0,325	0,205	-0,151	0,059	-0,056
D3V1Ind4	0,401	-0,192	0,171	-0,030	0,020	-0,098	-0,078	0,612	0,089	-0,117	0,050	0,073	-0,034	0,110	-0,044	0,217
D4V3Ind1	-0,051	0,074	0,025	-0,011	0,143	0,005	0,866	-0,033	0,062	0,006	0,099	0,102	0,004	0,112	-0,039	-0,053
D4V3Ind2	-0,052	0,042	-0,046	-0,108	-0,027	-0,084	0,896	0,012	-0,007	0,010	-0,070	-0,014	0,049	-0,037	0,027	0,045
D4V4Ind1	-0,127	0,098	0,100	0,161	0,188	-0,052	0,047	0,350	0,104	0,528	-0,126	-0,038	-0,379	-0,043	0,091	-0,070
D4V4Ind2	-0,204	0,001	0,097	0,228	0,145	-0,067	0,104	0,077	0,155	-0,085	-0,089	0,013	0,046	0,782	-0,007	0,056
D4V4Ind3	-0,291	0,031	-0,031	0,209	-0,114	-0,120	0,271	-0,044	0,197	0,189	0,028	-0,315	0,419	-0,083	-0,399	0,094
D4V4Ind4	-0,047	0,195	-0,013	-0,027	0,267	0,338	0,261	0,071	0,352	0,379	0,205	-0,302	-0,010	0,144	-0,123	0,112
D5V1Ind1	0,801	0,097	0,025	-0,088	0,047	-0,047	-0,022	0,224	-0,137	-0,073	0,050	-0,104	0,022	-0,097	0,056	0,186
D5V1Ind2	-0,153	-0,090	-0,183	0,077	0,122	-0,105	-0,028	-0,186	0,149	0,800	-0,083	0,023	0,170	-0,079	-0,046	0,061
D5V1Ind3	0,719	0,199	0,338	-0,046	-0,079	0,033	0,026	-0,081	-0,206	0,079	-0,022	-0,008	-0,061	0,036	-0,180	0,016
D5V1Ind4	-0,099	0,106	-0,127	-0,029	0,076	0,053	0,048	-0,065	0,797	0,162	0,029	0,118	0,062	0,132	0,093	0,026

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D5V1Ind5	0,406	0,124	0,441	0,017	-0,009	0,009	-0,237	0,130	0,014	0,044	0,243	0,291	-0,237	0,065	0,035	-0,098
D5V1Ind6	0,006	0,234	-0,145	0,033	0,163	0,121	0,044	0,063	0,075	0,052	0,058	0,061	0,774	0,024	0,089	-0,005
D5V2Ind1	0,097	0,076	0,042	0,015	0,895	0,046	0,061	0,072	-0,016	0,073	0,072	0,087	0,024	0,082	0,056	0,003
D5V2Ind2	0,141	0,069	-0,013	0,145	0,868	-0,021	0,020	0,007	0,074	0,127	0,036	-0,036	0,118	0,030	0,004	-0,076
D5V3Ind1	-0,024	0,044	-0,546	0,207	0,144	-0,151	-0,094	-0,043	0,251	-0,161	0,462	0,012	0,004	-0,211	-0,075	-0,158
D5V3Ind2	-0,150	-0,046	-0,678	0,142	0,008	-0,266	-0,031	-0,032	0,148	0,012	0,395	0,094	-0,154	-0,208	0,079	-0,151
D5V4Ind1	-0,174	0,007	-0,866	0,085	0,037	0,000	-0,086	-0,141	-0,069	0,122	0,004	-0,012	0,100	0,037	0,044	0,102
D5V4Ind2	-0,117	0,095	-0,851	0,086	-0,034	0,080	0,062	-0,116	-0,030	0,091	-0,100	-0,084	0,030	0,073	0,039	-0,032

Tabla D.16. Matriz de cargas factoriales obtenida tras realizar el ACP con los indicadores de las UP y utilizar el método Quartimax de rotación

Matriz de cargas factoriales rotada (método Equamax)																
Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D1V1Ind1	0,306	0,170	0,198	0,007	0,027	0,187	0,127	0,079	0,465	-0,154	-0,005	0,274	-0,103	-0,174	0,067	0,413
D1V1Ind2	0,262	0,399	-0,138	-0,217	-0,209	0,183	0,098	0,261	-0,018	-0,092	0,011	-0,461	0,263	-0,031	0,087	0,082
D1V1Ind3	-0,026	0,397	-0,083	0,380	0,110	-0,091	0,291	-0,120	0,187	0,167	0,288	-0,180	0,085	-0,169	-0,071	0,058
D1V1Ind4	0,001	0,248	-0,118	-0,058	-0,151	-0,110	0,184	0,193	0,103	0,029	0,001	-0,118	-0,074	-0,790	-0,008	-0,048
D1V1Ind5	0,064	0,213	-0,039	-0,183	-0,015	0,319	0,013	0,013	0,498	-0,079	-0,001	0,359	-0,102	0,084	0,008	0,465
D1V2Ind1	-0,215	0,116	0,049	0,230	0,066	0,544	0,127	0,017	0,459	-0,101	0,004	0,272	-0,053	-0,046	0,148	0,233
D1V2Ind2	-0,191	0,156	-0,030	0,196	0,018	0,518	0,237	-0,047	0,376	-0,281	-0,089	0,358	0,055	-0,051	0,014	0,043
D1V2Ind3	-0,460	0,324	-0,148	0,200	-0,161	0,116	0,127	-0,223	0,121	-0,152	-0,079	0,221	0,246	-0,056	0,239	0,043
D1V2Ind4	0,006	0,021	-0,106	-0,012	0,035	0,118	-0,058	-0,067	0,859	0,017	-0,050	0,019	0,058	0,000	-0,006	0,003
D1V2Ind5	0,087	0,075	0,014	-0,068	0,002	0,082	0,066	0,043	0,060	0,034	0,001	0,852	0,042	0,077	0,127	0,026
D1V2Ind6	0,001	-0,268	-0,166	-0,147	-0,177	0,476	-0,052	-0,550	-0,049	-0,058	0,079	0,180	0,111	0,074	-0,093	0,026
D1V2Ind7	0,004	0,140	-0,076	-0,038	0,052	0,702	-0,028	-0,080	0,257	0,180	-0,102	-0,011	-0,059	0,077	0,086	-0,033
D1V2Ind8	0,216	0,058	0,094	0,176	0,133	0,689	-0,044	-0,030	0,125	0,019	0,055	0,109	0,141	0,101	0,006	-0,004
D1V3Ind1	0,291	0,157	0,178	0,401	-0,011	-0,239	-0,405	-0,065	0,089	0,199	-0,001	-0,021	0,003	0,087	-0,157	0,064
D1V3Ind3	-0,059	0,044	0,218	0,198	0,638	0,336	0,083	-0,044	0,005	0,070	-0,095	0,166	-0,068	0,137	0,009	0,138
D2V1Ind1	0,266	0,261	0,357	0,423	-0,004	0,083	-0,069	-0,199	0,134	0,109	0,320	0,016	-0,217	0,350	-0,128	0,140
D2V1Ind2	0,463	0,065	0,474	0,089	-0,042	0,195	0,000	-0,188	-0,019	-0,112	0,380	-0,108	0,069	0,072	-0,012	0,084
D2V1Ind3	0,071	-0,866	0,020	-0,014	0,001	-0,058	-0,099	-0,187	-0,121	-0,037	0,020	-0,068	-0,079	0,123	0,099	0,069
D2V1Ind4	0,084	-0,896	0,029	0,010	-0,039	-0,069	-0,077	-0,133	-0,106	0,023	0,052	-0,084	-0,119	0,088	0,084	0,052
D2V2Ind1	0,117	0,129	0,023	0,500	0,160	0,068	-0,056	-0,069	0,420	0,336	0,016	0,252	-0,205	0,217	-0,046	0,096
D2V2Ind2	0,036	-0,517	0,329	0,285	0,056	-0,246	0,076	-0,065	0,187	0,029	0,094	0,202	0,153	0,145	-0,087	0,186

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D2V3Ind1	0,015	-0,085	0,445	0,544	0,141	0,117	0,232	-0,378	-0,019	0,087	0,164	0,004	-0,041	0,174	-0,028	0,159
D2V3Ind2	0,088	-0,219	0,075	0,717	0,155	0,229	0,190	0,004	-0,006	0,078	-0,007	0,070	-0,109	0,224	-0,128	0,158
D2V4Ind1	0,095	0,010	0,025	0,157	0,032	0,082	-0,013	-0,070	0,005	0,888	0,050	0,039	-0,083	0,066	-0,031	0,082
D2V4Ind2	-0,187	0,028	0,018	-0,194	0,137	-0,054	0,064	-0,301	-0,208	0,590	-0,271	-0,004	0,156	-0,180	-0,111	-0,037
D2V4Ind3	0,077	0,087	0,028	0,192	0,760	0,060	0,109	-0,115	0,039	0,243	0,143	0,053	-0,016	0,131	0,015	0,027
D2V4Ind4	0,398	0,044	0,143	0,124	0,171	0,084	0,083	0,140	0,097	0,102	0,473	-0,029	0,030	0,214	-0,064	0,328
D2V4Ind5	0,090	-0,030	-0,101	0,276	0,218	0,188	-0,305	-0,070	0,315	0,351	0,240	0,079	-0,114	0,048	-0,109	-0,177
D2V4Ind6	-0,070	-0,004	-0,133	-0,236	-0,055	-0,147	0,384	0,187	0,036	0,478	0,025	-0,014	-0,217	0,529	-0,065	-0,050
D3V1Ind1	0,561	-0,115	0,047	0,168	0,500	0,091	0,133	0,073	0,009	0,017	0,111	-0,070	-0,182	0,189	-0,017	0,241
D3V1Ind2	0,668	-0,016	-0,027	0,104	0,298	0,006	0,187	-0,059	0,154	0,022	0,122	0,106	-0,105	0,229	-0,026	0,096
D3V1Ind3	0,700	-0,206	0,103	0,157	0,090	0,070	-0,009	-0,019	0,011	0,158	0,020	0,353	-0,017	0,073	0,063	0,240
D3V1Ind4	0,273	-0,079	0,219	-0,176	0,684	-0,128	0,013	0,010	0,109	-0,010	0,098	0,040	-0,067	0,107	-0,119	-0,106
D4V3Ind1	0,005	-0,005	0,043	0,018	-0,023	0,000	0,125	0,053	-0,020	0,009	-0,026	0,117	0,023	0,025	0,877	-0,126
D4V3Ind2	0,036	-0,116	-0,053	-0,087	0,014	0,008	-0,042	-0,084	0,018	-0,079	-0,088	-0,003	0,016	-0,041	0,888	0,037
D4V4Ind1	-0,203	0,141	0,065	-0,130	0,254	0,124	0,150	-0,111	-0,097	-0,067	0,271	0,002	0,632	-0,059	0,053	0,013
D4V4Ind2	-0,002	0,208	0,038	-0,032	0,048	0,094	0,136	-0,128	0,036	-0,086	-0,032	0,018	-0,038	-0,042	0,105	-0,828
D4V4Ind3	-0,060	0,144	0,052	-0,165	-0,140	0,106	-0,117	0,125	0,055	-0,048	-0,630	-0,280	0,241	0,187	0,259	-0,062
D4V4Ind4	-0,067	-0,056	0,053	0,136	0,046	0,166	0,246	0,194	0,254	0,339	-0,069	-0,208	0,489	0,055	0,285	-0,206
D5V1Ind1	0,480	-0,057	0,034	0,193	0,456	0,008	0,101	-0,030	0,318	-0,056	0,187	-0,081	-0,166	0,170	-0,041	0,323
D5V1Ind2	0,075	0,072	-0,201	0,008	-0,256	-0,153	0,087	-0,042	0,000	-0,108	-0,254	0,023	0,783	0,018	-0,040	0,035
D5V1Ind3	0,364	0,038	0,228	0,344	0,130	0,093	-0,007	-0,221	0,218	-0,021	0,245	0,033	-0,085	0,478	0,021	0,225
D5V1Ind4	0,227	-0,169	0,073	-0,099	-0,153	0,290	0,023	0,353	0,080	0,134	-0,106	0,204	0,405	-0,275	0,047	-0,335

Nomenclatura del indicador	Número de componente															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D5V1Ind5	0,103	0,072	0,444	0,267	0,237	-0,017	0,008	0,040	0,049	-0,007	0,374	0,319	0,006	0,169	-0,222	0,038
D5V1Ind6	0,145	0,069	-0,128	0,291	0,097	0,097	0,184	0,023	0,128	0,105	-0,686	0,165	-0,006	-0,196	0,045	-0,005
D5V2Ind1	0,033	0,035	0,040	0,078	0,109	-0,058	0,891	0,012	0,029	0,051	0,038	0,113	0,092	-0,053	0,080	-0,057
D5V2Ind2	0,145	0,135	0,023	0,079	0,046	0,037	0,869	0,078	-0,035	0,003	-0,068	-0,001	0,164	-0,029	0,032	-0,018
D5V3Ind1	0,003	0,149	-0,244	-0,047	-0,048	0,035	0,130	0,791	-0,057	-0,089	-0,082	0,008	-0,049	-0,092	-0,062	0,112
D5V3Ind2	-0,089	0,104	-0,421	-0,101	-0,068	-0,100	-0,027	0,704	-0,117	-0,240	0,058	0,052	0,099	-0,203	-0,001	0,125
D5V4Ind1	-0,031	0,097	-0,816	-0,068	-0,168	-0,067	0,032	0,258	0,113	-0,054	-0,147	-0,042	0,094	-0,152	-0,075	-0,022
D5V4Ind2	-0,005	0,092	-0,827	-0,025	-0,137	0,123	-0,033	0,208	0,037	0,010	-0,067	-0,081	0,083	-0,124	0,074	-0,032

Tabla D.17. Matriz de cargas factoriales obtenida tras realizar el ACP con los indicadores de las UP y utilizar el método Equamax de rotación

ANEXO D.10

En este anexo recogemos la tabla que contiene los valores obtenidos al ejecutar las pruebas de normalidad, utilizando el programa SPSS, en los tres grandes grupos para las Unidades teóricas (GGT1, GGT2 y GGT3) y para cada una de las componentes. La prueba de normalidad que hemos considerado, al tener los tres grupos un número inferior a 50 unidades, ha sido la de Shapiro-Wilk.

La Tabla D.18 muestra el estadístico obtenido en la realización de la prueba para cada gran grupo y componente, así como el p-valor asociado, que nos marca la aceptación o el rechazo de la hipótesis de normalidad en la distribución. En todas estas pruebas, el nivel de significación fijado ha sido 0.05 (nivel de confianza del 95%), por lo que un nivel superior a 0,05 en el p-valor supone la aceptación de la hipótesis de normalidad en la distribución del grupo en la componente que corresponda y un nivel inferior supone el rechazo de dicha hipótesis de normalidad.

Para facilitar la visualización y la extracción de información de la Tabla D.18, hemos marcado en color verde las celdas correspondientes a aquellos p-valores que evidencian la superación de la prueba de normalidad para un determinado grupo y componente. Asimismo, se han marcado en color rojo las celdas de los p-valores que hacen que se rechace la hipótesis de normalidad en uno de los grandes grupos para una determinada componente.

Número de Componente	Gran Grupo Teórico	Prueba de Shapiro-Wilk		
		Estadístico	gl	Signif. (p-valor)
Componente 1	GGT1	0,962	39	0,204
	GGT2	0,896	24	0,018
	GGT3	0,945	39	0,056
Componente 2	GGT1	0,968	39	0,337
	GGT2	0,965	24	0,538
	GGT3	0,960	39	0,178
Componente 3	GGT1	0,971	39	0,392
	GGT2	0,977	24	0,830
	GGT3	0,979	39	0,679
Componente 4	GGT1	0,972	39	0,430
	GGT2	0,907	24	0,030
	GGT3	0,941	39	0,042
Componente 5	GGT1	0,840	39	0,000
	GGT2	0,927	24	0,083
	GGT3	0,889	39	0,001
Componente 6	GGT1	0,950	39	0,084
	GGT2	0,938	24	0,149
	GGT3	0,986	39	0,910
Componente 7	GGT1	0,964	39	0,250
	GGT2	0,983	24	0,940
	GGT3	0,981	39	0,741
Componente 8	GGT1	0,953	39	0,107
	GGT2	0,955	24	0,352
	GGT3	0,791	39	0,000
Componente 9	GGT1	0,951	39	0,089
	GGT2	0,946	24	0,222
	GGT3	0,937	39	0,030
Componente 10	GGT1	0,963	39	0,225
	GGT2	0,943	24	0,191
	GGT3	0,892	39	0,001
Componente 11	GGT1	0,771	39	0,000
	GGT2	0,818	24	0,001
	GGT3	0,846	39	0,000
Componente 12	GGT1	0,941	39	0,041
	GGT2	0,915	24	0,046
	GGT3	0,974	39	0,499
Componente 13	GGT1	0,979	39	0,680
	GGT2	0,984	24	0,956
	GGT3	0,955	39	0,121

Tabla D.18. Valores obtenidos al realizar la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk en cada componente para los tres grandes grupos teóricos

ANEXO D.11

En este anexo recogemos la tabla con las pruebas de normalidad realizadas, utilizando el programa SPSS, para cinco de los seis grupos teóricos. Se ha excluido de este análisis el GT3, al no tener sentido en él puesto que está compuesto únicamente por dos unidades. La prueba de referencia que se ha utilizado es la de Shapiro-Wilk, al tener todos los grupos un número de unidades inferior a 50.

La Tabla D.19 muestra los resultados obtenidos en la aplicación de esta prueba, tanto el valor del estadístico como el p-valor asociado, que nos indica si la hipótesis de normalidad de la distribución analizada es aceptada o rechazada. El nivel de significación fijado para todas estas pruebas ha sido 0’05, como en el Anexo D.10.

El criterio de colores seguido para facilitar la extracción visual de la información ha sido el mismo que en el Anexo D.10. Se han marcado con color verde aquellas celdas en las que los p-valores muestran un resultado positivo para la prueba de normalidad, mientras que hemos utilizado el color rojo para señalar aquellas celdas donde la prueba de Shapiro-Wilk ha rechazado que la distribución del grupo en la componente sea una distribución normal.

Número de Componente	Grupo Teórico	Prueba de Shapiro-Wilk		
		Estadístico	gl	Signif. (p-valor)
Componente 1	GT1	0,870	14	0,041
	GT2	0,955	25	0,322
	GT4	0,904	22	0,035
	GT5	0,901	13	0,139
	GT6	0,927	26	0,064
Componente 2	GT1	0,947	14	0,515
	GT2	0,958	25	0,380
	GT4	0,980	22	0,918
	GT5	0,950	13	0,597
	GT6	0,970	26	0,612
Componente 3	GT1	0,917	14	0,202
	GT2	0,988	25	0,989
	GT4	0,983	22	0,956
	GT5	0,866	13	0,046
	GT6	0,976	26	0,773
Componente 4	GT1	0,935	14	0,357
	GT2	0,951	25	0,258
	GT4	0,959	22	0,465
	GT5	0,936	13	0,404
	GT6	0,964	26	0,472
Componente 5	GT1	0,907	14	0,143
	GT2	0,709	25	0,000
	GT4	0,900	22	0,030
	GT5	0,875	13	0,061
	GT6	0,870	26	0,003
Componente 6	GT1	0,944	14	0,470
	GT2	0,938	25	0,131
	GT4	0,937	22	0,168
	GT5	0,948	13	0,565
	GT6	0,954	26	0,287
Componente 7	GT1	0,965	14	0,800
	GT2	0,953	25	0,299
	GT4	0,982	22	0,940
	GT5	0,931	13	0,353
	GT6	0,978	26	0,825
Componente 8	GT1	0,852	14	0,024
	GT2	0,965	25	0,522
	GT4	0,941	22	0,208
	GT5	0,748	13	0,002
	GT6	0,931	26	0,083

Componente 9	GT1	0,949	14	0,546
	GT2	0,945	25	0,190
	GT4	0,959	22	0,466
	GT5	0,874	13	0,059
	GT6	0,955	26	0,301
Componente 10	GT1	0,947	14	0,511
	GT2	0,968	25	0,599
	GT4	0,959	22	0,473
	GT5	0,888	13	0,091
	GT6	0,879	26	0,006
Componente 11	GT1	0,916	14	0,191
	GT2	0,764	25	0,000
	GT4	0,910	22	0,048
	GT5	0,889	13	0,095
	GT6	0,809	26	0,000
Componente 12	GT1	0,943	14	0,453
	GT2	0,978	25	0,849
	GT4	0,899	22	0,028
	GT5	0,956	13	0,692
	GT6	0,962	26	0,425
Componente 13	GT1	0,983	14	0,987
	GT2	0,971	25	0,673
	GT4	0,981	22	0,935
	GT5	0,910	13	0,181
	GT6	0,933	26	0,091

Tabla D.19. Valores obtenidos al realizar la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk en cada componente para cinco de los seis grupos teóricos

ANEXO D.12

En este anexo recogemos la tabla con las pruebas de normalidad realizadas, utilizando el programa SPSS, para la distribución de los grandes grupos prácticos GGP1 y GGP2 en cada una de las componentes. La prueba de referencia que se considera más adecuada ha sido distinta según el número de elementos que han compuesto cada gran grupo. Para el GGP1, con menos de 50 unidades, se ha considerado la prueba de Shapiro-Wilk para determinar si el grupo tiene o no una distribución que se acepta como estadísticamente normal en una determinada componente. Para el grupo GGP2, de más de 50 unidades, la prueba utilizada para ese mismo propósito ha sido de la Kolmogorov-Smirnov. En ambos casos, el nivel de significación fijado ha sido de 0’05.

La Tabla D.20 muestra los resultados obtenidos al aplicar dichas pruebas. El criterio de colores que hemos seguido para marcar en la tabla si la prueba considerada como determinante se supera o no es el mismo que el seguido en los Anexos D.10 y D.11. Se han marcado en color verde aquellos valores que nos indican un resultado positivo de la prueba de normalidad (por componente y para la prueba de referencia considerada en el gran grupo) y con color rojo aquellos valores que aportan un resultado negativo, es decir, que evidencian el rechazo de la hipótesis de una distribución normal del gran grupo en una componente.

Número de componente	Gran Grupo Práctico	Prueba Kolmogorov-Smirnov			Prueba de Shapiro-Wilk		
		Estadístico	gl	Signif. (p-valor)	Estadístico	gl	Signif. (p-valor)
Componente 1	GGP1	0,128	42	0,080	0,965	42	0,224
	GGP2	0,130	51	0,031	0,953	51	0,043
Componente 2	GGP1	0,189	42	0,001	0,893	42	0,001
	GGP2	0,139	51	0,015	0,933	51	0,006
Componente 3	GGP1	0,114	42	0,197	0,964	42	0,206
	GGP2	0,058	51	>0,200	0,991	51	0,967
Componente 4	GGP1	0,171	42	0,003	0,913	42	0,004
	GGP2	0,079	51	>0,200	0,979	51	0,515
Componente 5	GGP1	0,089	42	>0,200	0,976	42	0,520
	GGP2	0,167	51	0,001	0,952	51	0,038
Componente 6	GGP1	0,108	42	>0,200	0,977	42	0,548
	GGP2	0,105	51	>0,200	0,970	51	0,226
Componente 7	GGP1	0,121	42	0,132	0,944	42	0,038
	GGP2	0,107	51	>0,200	0,963	51	0,109
Componente 8	GGP1	0,132	42	0,064	0,946	42	0,046
	GGP2	0,168	51	0,001	0,931	51	0,005
Componente 9	GGP1	0,104	42	>0,200	0,974	42	0,446
	GGP2	0,094	51	>0,200	0,937	51	0,009
Componente 10	GGP1	0,101	42	>0,200	0,959	42	0,137
	GGP2	0,085	51	>0,200	0,976	51	0,370
Componente 11	GGP1	0,111	42	>0,200	0,960	42	0,151
	GGP2	0,070	51	>0,200	0,983	51	0,683
Componente 12	GGP1	0,080	42	>0,200	0,978	42	0,589
	GGP2	0,136	51	0,019	0,957	51	0,063
Componente 13	GGP1	0,090	42	>0,200	0,948	42	0,055
	GGP2	0,065	51	>0,200	0,993	51	0,987
Componente 14	GGP1	0,061	42	>0,200	0,990	42	0,968
	GGP2	0,076	51	>0,200	0,988	51	0,871
Componente 15	GGP2	0,071	42	>0,200	0,975	42	0,487
	GGP2	0,081	51	>0,200	0,970	51	0,227
Componente 16	GGP1	0,085	42	>0,200	0,983	42	0,776
	GGP2	0,130	51	0,031	0,927	51	0,004

Tabla D.20. Valores obtenidos al realizar las pruebas de normalidad en cada componente para los dos grandes grupos prácticos

ANEXO D.13

En este anexo se presentan los resultados obtenidos al aplicar las pruebas de normalidad para la distribución de los diferentes subgrupos en que han sido divididos los dos grandes grupos prácticos, GGP1 y GGP2. La prueba de referencia, al tener todos los subgrupos un número de unidades inferior a 50, ha sido la prueba de Shapiro-Wilk.

La Tabla D.21 muestra los resultados obtenidos al aplicar dichas pruebas. El nivel de significación fijado es el habitual, 0’05; así como el criterio de colores seguido (igual al de los Anexos D.10, D.11 y D.12): celdas señaladas en color verde si se acepta la hipótesis de normalidad en la distribución en un subgrupo y componente (p-valor superior a 0’05) y en color rojo si dicha hipótesis es rechazada.

Número de componente	Subgrupos unidades prácticas	Prueba de Shapiro-Wilk		
		Estadístico	gl	Signif. (p-valor)
Componente 1	GGP1S1	0,926	7	0,514
	GGP1S2	0,904	8	0,312
	GGP1S3	0,868	12	0,061
	GGP1S4	0,948	15	0,498
	GGP2S1	0,949	11	0,630
	GGP2S2	0,919	9	0,386
	GGP2S3	0,882	10	0,139
	GGP2S4	0,946	12	0,575
	GGP2S5	0,940	4	0,655
	GGP2S6	0,895	5	0,384
Componente 2	GGP1S1	0,707	7	0,004
	GGP1S2	0,868	8	0,144
	GGP1S3	0,848	12	0,034
	GGP1S4	0,966	15	0,790
	GGP2S1	0,975	11	0,932
	GGP2S2	0,909	9	0,306
	GGP2S3	0,726	10	0,002
	GGP2S4	0,914	12	0,243
	GGP2S5	0,940	4	0,652
	GGP2S6	0,795	5	0,074
Componente 3	GGP1S1	0,838	7	0,095
	GGP1S2	0,862	8	0,127
	GGP1S3	0,927	12	0,346
	GGP1S4	0,968	15	0,826
	GGP2S1	0,984	11	0,983
	GGP2S2	0,890	9	0,201
	GGP2S3	0,888	10	0,159
	GGP2S4	0,908	12	0,201
	GGP2S5	0,999	4	0,997
	GGP2S6	0,880	5	0,310
Componente 4	GGP1S1	0,901	7	0,340
	GGP1S2	0,949	8	0,699
	GGP1S3	0,746	12	0,002
	GGP1S4	0,808	15	0,005
	GGP2S1	0,897	11	0,169
	GGP2S2	0,909	9	0,308
	GGP2S3	0,926	10	0,407
	GGP2S4	0,977	12	0,971
	GGP2S5	0,858	4	0,254
	GGP2S6	0,936	5	0,636
Componente 5	GGP1S1	0,862	7	0,157
	GGP1S2	0,891	8	0,240

	GGP1S3	0,821	12	0,016
	GGP1S4	0,969	15	0,837
	GGP2S1	0,991	11	0,999
	GGP2S2	0,865	9	0,110
	GGP2S3	0,894	10	0,190
	GGP2S4	0,902	12	0,167
	GGP2S5	0,924	4	0,560
	GGP2S6	0,945	5	0,700
Componente 6	GGP1S1	0,947	7	0,701
	GGP1S2	0,925	8	0,470
	GGP1S3	0,973	12	0,939
	GGP1S4	0,905	15	0,114
	GGP2S1	0,881	11	0,108
	GGP2S2	0,950	9	0,690
	GGP2S3	0,911	10	0,288
	GGP2S4	0,965	12	0,858
	GGP2S5	0,995	4	0,982
	GGP2S6	0,977	5	0,919
Componente 7	GGP1S1	0,936	7	0,604
	GGP1S2	0,967	8	0,869
	GGP1S3	0,820	12	0,016
	GGP1S4	0,942	15	0,407
	GGP2S1	0,899	11	0,181
	GGP2S2	0,943	9	0,610
	GGP2S3	0,950	10	0,674
	GGP2S4	0,960	12	0,779
	GGP2S5	0,985	4	0,932
	GGP2S6	0,936	5	0,638
Componente 8	GGP1S1	0,962	7	0,838
	GGP1S2	0,908	8	0,339
	GGP1S3	0,936	12	0,448
	GGP1S4	0,884	15	0,054
	GGP2S1	0,858	11	0,054
	GGP2S2	0,831	9	0,046
	GGP2S3	0,923	10	0,379
	GGP2S4	0,821	12	0,016
	GGP2S5	0,980	4	0,900
	GGP2S6	0,792	5	0,069
Componente 9	GGP1S1	0,775	7	0,023
	GGP1S2	0,853	8	0,101
	GGP1S3	0,879	12	0,086
	GGP1S4	0,961	15	0,701
	GGP2S1	0,859	11	0,057
	GGP2S2	0,989	9	0,994
	GGP2S3	0,931	10	0,455
	GGP2S4	0,921	12	0,293
	GGP2S5	0,868	4	0,288

	GGP2S6	0,829	5	0,136
Componente 10	GGP1S1	0,938	7	0,618
	GGP1S2	0,896	8	0,267
	GGP1S3	0,976	12	0,964
	GGP1S4	0,909	15	0,132
	GGP2S1	0,924	11	0,354
	GGP2S2	0,969	9	0,886
	GGP2S3	0,941	10	0,566
	GGP2S4	0,939	12	0,479
	GGP2S5	0,999	4	0,997
	GGP2S6	0,816	5	0,108
Componente 11	GGP1S1	0,904	7	0,359
	GGP1S2	0,938	8	0,592
	GGP1S3	0,928	12	0,361
	GGP1S4	0,966	15	0,796
	GGP2S1	0,923	11	0,341
	GGP2S2	0,933	9	0,511
	GGP2S3	0,901	10	0,223
	GGP2S4	0,951	12	0,649
	GGP2S5	0,980	4	0,903
	GGP2S6	0,961	5	0,814
Componente 12	GGP1S1	0,932	7	0,567
	GGP1S2	0,846	8	0,086
	GGP1S3	0,807	12	0,011
	GGP1S4	0,950	15	0,527
	GGP2S1	0,838	11	0,029
	GGP2S2	0,935	9	0,527
	GGP2S3	0,959	10	0,773
	GGP2S4	0,978	12	0,976
	GGP2S5	0,920	4	0,536
	GGP2S6	0,770	5	0,045
Componente 13	GGP1S1	0,946	7	0,689
	GGP1S2	0,818	8	0,044
	GGP1S3	0,890	12	0,117
	GGP1S4	0,961	15	0,709
	GGP2S1	0,984	11	0,985
	GGP2S2	0,920	9	0,396
	GGP2S3	0,939	10	0,540
	GGP2S4	0,945	12	0,566
	GGP2S5	0,975	4	0,872
	GGP2S6	0,987	5	0,970
Componente 14	GGP1S1	0,931	7	0,561
	GGP1S2	0,862	8	0,125
	GGP1S3	0,945	12	0,571
	GGP1S4	0,972	15	0,886
	GGP2S1	0,970	11	0,891
	GGP2S2	0,940	9	0,586

	GGP2S3	0,870	10	0,101
	GGP2S4	0,903	12	0,172
	GGP2S5	0,859	4	0,257
	GGP2S6	0,970	5	0,873
Componente 15	GGP1S1	0,929	7	0,540
	GGP1S2	0,868	8	0,144
	GGP1S3	0,892	12	0,127
	GGP1S4	0,891	15	0,071
	GGP2S1	0,896	11	0,166
	GGP2S2	0,966	9	0,856
	GGP2S3	0,907	10	0,264
	GGP2S4	0,949	12	0,621
	GGP2S5	0,980	4	0,902
	GGP2S6	0,911	5	0,471
Componente 16	GGP1S1	0,924	7	0,503
	GGP1S2	0,970	8	0,896
	GGP1S3	0,938	12	0,479
	GGP1S4	0,982	15	0,980
	GGP2S1	0,944	11	0,568
	GGP2S2	0,852	9	0,078
	GGP2S3	0,921	10	0,364
	GGP2S4	0,909	12	0,208
	GGP2S5	0,784	4	0,076
	GGP2S6	0,983	5	0,952

Tabla D.21. Valores obtenidos al realizar la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk en cada componente para los diferentes subgrupos de los grandes grupos prácticos

ANEXO E

Anexos con la transcripción de las entrevistas (Capítulo VI)

Este conjunto de anexos contiene las transcripciones de las ocho entrevistas realizadas a ocho parejas de alumnos participantes. Estas entrevistas tratan sobre los modos en que los estudiantes elaboran y utilizan su cuaderno de matemáticas y cuál es el rol que tiene para ellos el cuaderno en su estudio y aprendizaje de las matemáticas. Los resultados obtenidos del análisis de las entrevistas aquí presentadas están en el Capítulo VI de la memoria de tesis doctoral.

En concreto, este bloque de anexos se compone de ocho anexos específicos, uno por entrevista:

- El Anexo E.1 contiene la transcripción de la entrevista realizada a los alumnos A6 y A10, pertenecientes al aula del Docente 1, de la modalidad científico-tecnológica (C-T).

- El Anexo E.2 contiene la transcripción de la entrevista efectuada a los alumnos A2 y A3, también pertenecientes al aula del Docente 1, de la modalidad C-T.

- El Anexo E.3 recoge la transcripción de la entrevista mantenida con las alumnas A12 y A14, pertenecientes al aula del Docente 2, de la modalidad de Ciencias Sociales (CCSS).

- El Anexo E.4 recoge la transcripción de la entrevista realizada a los alumnos A13 y A16, pertenecientes al aula del Docente 2, de la modalidad CCSS.

- El Anexo E.5 contiene la transcripción de la entrevista llevada a cabo con los alumnos A24 y A28, ambos pertenecientes al aula de la modalidad C-T de la Docente 3.

- El Anexo E.6 contiene la transcripción de la entrevista efectuada con los alumnos A21 y A27, estudiantes del aula C-T de la Docente 3.

- El Anexo E.7 recoge la transcripción de la entrevista realizada con las alumnas A31 y A36, pertenecientes al aula de la modalidad de CCSS de la Docente 3.

- El Anexo E.8 contiene la transcripción de la entrevista mantenida con los estudiantes A38 y A39, pertenecientes al aula de la modalidad CCSS de la Docente 3.

ANEXO E.1

Este anexo contiene la transcripción completa de la entrevista desarrollada por el doctorando (que se marcará en la transcripción como “Inv.”) a la alumna A6 y al alumno A10, correspondientes al aula del Docente 1 durante el periodo analizado. Las anotaciones en cursiva entre paréntesis y algunas notas al pie tienen por objetivo completar la transcripción del discurso oral. En otras notas al pie se introducen reflexiones del EI derivadas de una lectura de las transcripciones y de las ideas emergidas a partir de un análisis global de la entrevista.

Datos identificativos básicos de la entrevista

- Pareja de alumnos entrevistada: Alumna A6 y alumno A10.
- Aula al que pertenecieron durante el periodo analizado: Aula del Docente 1, 1º Bachillerato Científico-Tecnológico, Instituto Público.
- Día y hora de realización de la entrevista: Jueves 18/04/2013, 10:55 - 11:25 h.

Transcripción de la entrevista

1. Inv.: Empieza la entrevista, Jueves 18 de Abril, los alumnos son A6 y A10, que el año pasado estaban con el Docente 1, en el 1º de Bachillerato de Ciencias[1].
2. Inv.: El primer bloque de la entrevista va sobre la necesidad y utilidad del cuaderno de matemáticas (*de ahora en adelante, CM*). Entonces, la primera pregunta que os hago es si pensáis que es necesario tener un CM. (*Tras la pregunta, los alumnos se quedan pensativos unos segundos antes de dar una respuesta*).
3. A6: Sí.
4. A10: Sí, yo creo que sí. Yo creo que más que el libro[2], casi.
5. Inv.: ¿Por qué consideráis que es útil tener un CM?
6. A6: Porque..., bueno, más que en cualquier otra asignatura, los ejercicios es lo..., más importante. Tienes que practicar y eso se hace..., en los cuadernos, vaya.
7. A10: Sí, lo mismo vamos (*Además de la afirmación oral, el estudiante también hace gestos evidenciando estar de acuerdo con la afirmación de A6*).
8. Inv.: ¿Sólo para los ejercicios?
9. A6: Hombre, apuntes y..., toda la teoría también. (*De nuevo, A10 hace gestos evidenciando estar de acuerdo con lo que comenta A6*).
10. Inv.: ¿Qué elementos o cualidades debe tener un CM, para vosotros, para que sea un "buen" cuaderno? ¿Qué cualidades creéis vosotros que tiene que tener un "buen" CM?
11. A10: Pues..., que sea limpio y ordenado y..., y que se vea bien lo que estás haciendo. Sobre todo que estén bien resueltos los ejercicios, si no... No te sirve para nada (*disminuyendo el tono de la voz en el final de la frase*).
12. A6: Las correcciones también, que se vea que..., que lo has corregido para no volver a..., caer en el mismo error.
13. Inv.: Y dentro de todas estas cosas que me habéis comentado, si tuvierais que establecer un orden de importancia, ¿cuál sería para vosotros el elemento o la cualidad más importante de entre las que me habéis comentado? Me habéis comentado aspectos de organización, de limpieza, aspectos de tener los ejercicios resueltos, de tomar nota de las correcciones de los ejercicios... De todos estos aspectos, cuáles son para vosotros los más importantes, o qué orden de preferencia les dais.

[1] Bachillerato Científico-Tecnológico.
[2] Se refiere a un libro de texto de la asignatura.

14. A10: Quizá tomar nota de las correcciones porque..., si fallas es por algo y..., si no corriges lo que has fallado pues al final vas a cometer el mismo error..., muchas veces. Para mí eso.

15. Inv.: (*Pregunta dirigida a la alumna A6*) ¿Estás de acuerdo?

16. A6: Sí, lo mismo.

17. Inv.: Es decir, corregir los ejercicios, para vosotros, es lo fundamental. (*Los dos alumnos evidencian gestualmente estar de acuerdo con la afirmación*).

18. Inv.: El siguiente bloque trata sobre aspectos de elaboración del CM. Quisiera preguntaros si vosotros elaboráis el CM de una manera más o menos uniforme a lo largo de diferentes cursos o temas o, sin embargo, adaptáis un poco la elaboración del CM, lo que tomáis, lo que hacéis, cómo trabajáis con él, a diferentes temas, cursos... Es decir, si la elaboración de vuestro CM es más o menos uniforme o ha sido variable, y de acuerdo a qué factores (*ambos alumnos se quedan pensativos unos instantes ante la pregunta planteada*).

19. A10: Yo creo que, más bien, uniforme. Aunque, también, depende del profesor[3]. Dependiendo de cómo dé los apuntes y tal, pues... Tú los copias de una manera o de otra, pero, más o menos, durante el curso, siempre sigues el mismo..., lo utilizas de la misma manera, a pesar de los temas. Es lo que yo creo.

20. A6: Sí... Yo..., en mi caso primero siempre es..., teoría, todo lo que demos de teoría lo intento coger rápido y luego todos los ejercicios. Hombre, hemos ido mejorando desde primero de la ESO a ahora, a coger apuntes, pero..., sí, siempre igual, uniforme.

21. A10: El método es el mismo.

22. Inv.: Habéis dicho..., que en función de los temas no hacéis variación, trabajáis más o menos igual con el cuaderno si es un tema de álgebra o es un tema de geometría. Aunque los contenidos sean distintos, cómo se plasma y cómo se trabaja con ellos es, más o menos, de una manera uniforme, entiendo de lo que me habéis comentado.

23. A6: Sí.

24. A10: Sí, al final es el mismo esquema, casi siempre. La teoría, unos ejemplos y luego ya los ejercicios.

25. A6: Además, luego, a la hora de estudiar, el orden..., que tú tengas en el cuaderno de..., primero, pues eso, teoría y luego la práctica tiene..., es importante.

26. Inv.: Y..., vamos a pasar ahora a hablar del docente, del profesor.

27. A10: Eso sí que es importante (*con un tono de voz bajo*).

---

[3] En este momento pido al alumno que suba un poco su tono de voz, puesto que hablaba con un tono demasiado bajo y tenía miedo de que no se escuchara bien la grabación en audio.

28. Inv.: ¿Hacéis cambios en la elaboración y en el uso del CM dependiendo de cómo sea el profesor?
29. A10: Sí.
30. A6: Sí.
31. Inv.: ¿Qué tipo de cambios hacéis? ¿Qué adaptaciones podéis hacer? Ponedme ejemplos (*los alumnos se quedan callados unos instantes*). Tampoco es necesario que sean demasiado concretos…
32. A10: Pues...
33. A6: Hombre..., es que, por ejemplo, con un profesor..., con un profesor que da más importancia a la teoría..., copia todo en la pizarra..., entonces nosotros lo copiamos con más facilidad... Y, con otros profesores, pues es todo más en clase de..., hacer ejercicios, hacer ejercicios, y él lo explica pero sin copiarlo en la pizarra, por ejemplo. Entonces...
34. A10: O te lo dicta, y tú copias lo que crees más importante.
35. A6: Claro, las formas...
36. A10: No copias todo, literalmente, no se copia en la pizarra.
37. Inv.: ¿A vosotros os ha dado clase el Docente 2[4]?
38. A6: Sí.
39. A10: Sí.
40. Inv.: ¿El Docente 2 os dictaba los apuntes en aquella época?
41. A6: No me acuerdo ya...
42. A10: Sí, sí que nos los dictaba. Entonces..., era más difícil de seguir a veces.
43. Inv.: ¿Más difícil de seguir?
44. A10: Sí, yo creo que sí. Más que..., te los copia, y luego ya los copias tú y te lo explica.
45. A6: Por ejemplo, otro profesor de matemáticas del centro[5] los..., los copia en la pizarra todas las cosas.
46. A10: Sí, todo. Y encima lo organiza muy bien y tal. Se sigue más fácil las exposiciones.
47. Inv.: Os facilita el trabajo.
48. A6: Sí.

[4] Sustituimos el nombre por el código del profesor, participante en esta investigación aunque no en la clase a la que pertenecían estos alumnos, y cuya metodología al dar apuntes se basa en dictar la teoría para que sea tomada por los estudiantes. Hago la pregunta al ver que este factor ha emergido en las respuestas del alumno A10 (intervención número 34).

[5] Omitimos el nombre del docente al que se refiere la alumna. Es un profesor del centro que no participó en la investigación pero que en el curso en el que desarrolló la entrevista (2012/2013) era el profesor de matemáticas del alumno A10 en 2º de Bachillerato. La alumna A6 no cursó Matemáticas en 2º de Bachillerato, dentro de la rama de Ciencias de la Salud.

49. A10: Sí. Todo lo que dé..., pues está ahí.

50. Inv.: La manera de exponer del Docente 1, que era vuestro profesor el año pasado, era más..., digamos, menos ordenada, más activa. En el sentido de que él iba comentando cosas, en las partes de teoría, a veces sin un guion muy predefinido, porque a veces unas cosas dan pie a otras, se comentan...

51. A10: Claro...

52. Inv.: Entonces, en ese momento, vosotros… ¿Qué hacéis para tomar los apuntes? En comparación con otros profesores, como por ejemplo, este otro profesor que os lo da todo muy ordenado, ¿cómo tomabais los apuntes con el Docente 1? ¿Qué tenéis en cuenta para decidir qué tomar y qué no tomar?

53. A10: (*Tras quedarse ambos alumnos pensativos durante unos segundos*) Hombre..., se nota cuando explica una cosa si le da más importancia..., que a otra. Por ejemplo, el tipo de ejercicio que hace ya te dice si va a meter más de este tipo[6], le da más importancia, que de otras cosas. Y eso es lo..., lo que tienes en cuenta para hacer los apuntes, pero..., la cosa es copiar todo y luego ya...

54. A6: Decides.

55. A10: Seleccionar lo que..., lo que es más importante (*bajando el tono de voz*).

56. Inv.: ¿Habéis tenido alguna vez profesores que os revisaran el CM?

57. A10: Sí, pero...

58. A6: Los primeros cursos...

59. A10: Cuando eres pequeño y tal, en el colegio...

60. Inv.: Me refiero en Secundaria.

61. A10: Ah... ¿En Secundaria?

62. A6: Sí, hombre... En Primero[7]..., sí que..., sobre todo también por los ejercicios, para ver si los teníamos hechos y todo eso pues sí que nos lo miraban.

63. Inv.: Era más, digamos, una variable de control, para ver si estaban o no estaban.

64. A6: Sí, a ver, claro.

65. A10: Sí.

66. Inv.: ¿Y alguna vez ha tenido influencia en la evaluación de la asignatura el CM, en el caso de que os lo comentaran?

67. A10: En esta asignatura no tanto como en otras... A lo mejor en otras sí que..., te piden el cuaderno..., no sé por qué será pero..., no sé, yo creo que nunca ha contado mucho el cuaderno.

---

[6] Con esta afirmación parece hacer una referencia implícita a la evaluación de la asignatura (exámenes que generalmente constan de varias actividades prácticas)

[7] La alumna se refiere al primer curso de ESO.

68. Inv.: Y en el caso de que os revisaran el CM... Imaginaros que el profesor que tenéis este año os dijera "os voy a revisar el cuaderno". ¿Haríais algún cambio en la elaboración del CM? ¿Qué cambios haríais?

69. A6: Yo ninguno, ¿eh? ¡Mi cuaderno es perfecto! (*risas de ambos alumnos*).

70. A10: Si tú lo dices...

71. Inv.: Está bien tener la autoestima...

72. A10: Muy alta.

73. A6: No, pero... En plan de presentación y eso.

74. A10: Sí, que es lo que vas a cambiar al final porque...

75. A6: Claro... Yo tengo una presentación buena... El contenido ya no... (*risas de la alumna*)

76. Inv.: Digamos que son aspectos más de continente[8], ¿no? Ponerlo más bonito...

77. A10: Quizá, a lo mejor, tratar de explicar un poco mejor los ejercicios, pero tampoco puedes retocar mucho. Más que nada eso..., la presentación, que te quede bonito porque..., si lo ves bonito como que[9]...

78. Inv.: ¿Y hasta qué punto os afectaría que os revisaran el CM? ¿Os obligaría a cambiar vuestra manera de trabajarlo o no, o pensáis que el CM es un instrumento que utilizo yo para estudiar y no voy a cambiar la manera en que trabajo con él porque me lo vayan a revisar, le gusto o no al profesor?

79. A6: Pero..., depende, si al final eso es beneficioso para ti. Que esté más ordenado, márgenes..., o cualquier cosa.

80. Inv.: ¿Más allá de los aspectos formales?

81. A10: Pues sí, a lo mejor, sí. Si lo tienes que entregar pues a lo mejor trabajas mejor en él y las explicaciones y tal pues..., te las curras más luego te..., te sirven más como instrumento el CM[10] que antes. Yo creo que sí.

82. Inv.: O sea, que no os agobiaría mucho que os revisaran el CM.

83. A10: No, no, yo creo que no.

84. Inv.: Bueno, vamos a pasar ahora al bloque de ejercicios y actividades, ¿vale? Aunque ya hemos comentado algunas cosas. Os voy a leer dos frases. Me tenéis que decir con cuál de las dos simpatizáis más, o estáis más de acuerdo, y por qué. La primera frase es: "El CM es un lugar donde, en gran medida, se registran ejercicios" y la segunda frase es: "El CM es un lugar donde, en gran medida, se hacen ejercicios". ¿Con cuál de las dos frases

[8] Dicotomía entre el continente y el contenido.
[9] Parece hacer referencia a la importancia de una buena presentación para que el cuaderno dé una buena impresión en la revisión del mismo.
[10] El alumno vincula la presencia de explicaciones y la calidad de las mismas con el hecho de que el cuaderno suponga un instrumento más útil para él.

estáis más de acuerdo y por qué, si tuvierais que decantaros por una de las dos?

85. A6: Puf... (*ambos alumnos hacen gestos pareciendo aludir a la dificultad de dar respuesta a la pregunta*)

86. A10: Vaya pregunta, ¿eh? Eh... Yo creo que eso..., depende del profesor también. Depende de si te manda él el trabajo o si lo hace él para que tú lo copies. Entonces..., claro, si te manda más trabajo pues el cuaderno sería donde tú los haces. Pero..., yo casi me quedo con la segunda que has dicho, donde se hacen.

87. Inv.: Donde se hacen. ¿A6?

88. A6: Pues..., sí, también, porque creo que es más importante el hecho de hacer que revisar[11] los ejercicios, ¿no? Aunque ya he dicho también que las correcciones también son muy importantes. Tienes que revisar los ejercicios para saber si están bien o mal (*risas de la alumna*).

89. Inv.: Vale, o sea que os quedáis más con la segunda frase. (*Los dos alumnos asienten*). Cuando intentáis realizar actividades de matemáticas, bien que os haya propuesto el profesor, o bien porque consideráis adecuado hacerlas aunque no os las hayan propuesto, ¿lo hacéis siempre en el CM? ¿Generalmente? ¿Algunas veces? ¿Pocas veces?

90. A10: Yo siempre. Para luego..., tenerlo ahí.

91. Inv.: ¿Siempre?[12]

92. A10: Sí, sobre todo si los ha mandado el profesor. Si no, a lo mejor, si es por iniciativa propia, a lo mejor, los haces aparte, pero..., si te los manda el profesor..., yo por lo menos sí que los tengo en el cuaderno.

93. Inv.: ¿Tú, A6?

94. A6: Yo lo que..., así, más, para el uso de clase y todo eso sí, porque luego a la hora de estudiar, a lo mejor, si hay un ejercicio que…, se me ha atragantado o..., algo, pues lo hago en papel, en sucio, una y otra vez. No lo pongo en el cuaderno mil veces..., hasta..., que me salga.

95. Inv.: Me comentabas, A10, que si el profesor os ha mandado las tareas tú las realizas en el CM; pero si no, a veces las haces en el cuaderno, pero a veces las haces en otros lugares.

96. A10: Sí.

97. Inv.: ¿Qué lugares utilizas para esos intentos de resolución?

98. A10: Pues nada especial..., cuadernos viejos, hojas en sucio... Cosas así.

99. Inv.: ¿Por qué razón?

---

[11] Quizá la alumna haya entendido "revisar" en lugar de "registrar" en la primera frase.
[12] Repregunta ante la sorpresa causada por la respuesta del alumno, dado que no era el comportamiento que se había detectado en él al analizar su cuaderno.

100. A10: Porque..., no sé, no forma parte del contenido propio..., que te lo ha mandado el profesor, ¿no? Entonces a lo mejor es un ejercicio que te hace gracia y..., puede ser interesante. Entonces lo haces y..., ya está, pero no lo metes en el CM[13] porque luego, al estudiar, no tiene la misma importancia que los que te ha dicho el profesor que hagas, porque él considera que son importantes. Que son los que luego, normalmente, entran en el examen.

101. Inv.: Aquí te quiero hacer una pregunta, A10, un poco más en concreto. Yo he observado, que, cuando revisaba tu cuaderno[14], he visto que había pocas actividades en lo que me entregaste fotocopiado. Sin embargo, eras un alumno que siempre solías preguntar en clase dudas de ejercicios que habías intentado, pero luego esos ejercicios no aparecían reflejados en lo que me entregaste. Quería saber si esto que he observado es cierto y si está relacionado con la metodología de Docente 1, que tampoco era un profesor..., que os mandaba explícitamente tareas[15]...

102. A10: Claro.

103. Inv.: Si no que os daba hojas de actividades, como diciendo, ahí las tenéis...

104. A10: Correcto.

105. Inv.: Irlas haciendo, y en las que tengáis dudas las comentaremos en clase.

106. A10: Sobre todo para este tipo de libros[16], normalmente el Docente 1 dice "al final del tema hay ejercicios interesantes"... Entonces, no sabías muy bien cuáles tenías que hacer. Entonces, los hacías un poco por tu cuenta, como era en mi caso, luego, sobre todo cuando llegaba el examen pues..., te ponías y..., y claro, yo sobre todo siempre para practicar los exámenes[17] en este tipo de asignaturas, como mates, física o química, que son muchos..., ejercicios de tipo práctico, pues los haces aparte porque..., más que estudiarte una teoría, como puede ser historia[18], pues lo que tienes que hacer es practicar para que luego llegue el examen y sepas enfrentarte a cualquier situación. Entonces, pues sí, yo quizá hago más ejercicios fuera del cuaderno que dentro del cuaderno.

107. Inv.: Digamos que esto estaría relacionado con la metodología del Docente 1, con otros profesores actuarías de otra manera.

[13] En este sentido, el alumno parece utilizar implícitamente su cuaderno como instrumento para diferenciar el trabajo planteado por el docente de otro tipo de actividades realizadas por iniciativa del alumno.
[14] En realidad, las fotocopias de su cuaderno de matemáticas.
[15] En cierto modo, las respuestas anteriores del alumno ya parecían aclarar una respuesta a este hecho. No obstante, para confirmarlo le planteo directamente la cuestión.
[16] Se refiere a la estructura usual de un tema en un libro de texto de matemáticas.
[17] El alumno hace emerger la variable del estudio y de la preparación de pruebas de evaluación.
[18] Se refiere a la asignatura de Historia. Plantea una dicotomía entre las asignatura de tipo científico (matemáticas, física, química), en las que da más importancia a la parte práctica; y asignaturas de tipo social y humanístico (como Historia), en las que da más importancia a la teoría.

108. A10: El profesor de este curso más bien te dice: “oye, haz estos, estos y estos”, entonces tú son los que haces, y a lo mejor tienes más ejercicios en el cuaderno.

109. Inv.: Sin embargo, tú, A6, he visto que tenías muchos ejercicios en lo que me entregaste (*risas de la alumna*). Aparte de los que podía haber propuesto el Docente 1, sí que había más actividades a mayores. Por ejemplo tenías muchos cálculos de límites en el CM, a diferencia un poco de A10, que yo pienso que los hacía, pero que ahí no estaban reflejados, los hacía en otros lugares. ¿Tú siempre utilizas el CM, aunque sean ejercicios que, a lo mejor, no te han mandado de una manera muy explícita?

110. A6: (*Tras unos instantes de silencio*) Hombre..., sí, yo procuro hacer todos en un mismo sitio para luego, a la hora de repasar, tenerlos todos en un mismo..., sitio, y no volverme loca buscando dónde los he hecho (*risas*), básicamente.

111. Inv.: Cuando hacéis un ejercicio en vuestro CM o cuando transcribís un ejercicio en vuestro cuaderno de la resolución del profesor en la pizarra, ¿qué elementos pensáis que debe contener esa resolución? Me refiero a elementos como el enunciado, ¿pensáis que tiene que estar o no tiene que estar? ¿Únicamente la resolución? ¿Pensáis que es útil añadir comentarios explicando el proceso de resolución? ¿Registrar dudas o elementos que no hayáis entendido? Explicadme cuál es vuestra manera de proceder y qué pensáis al respecto.

112. A6: Bueno..., el enunciado..., normalmente..., vamos, yo no lo copiaba ni..., ni nada, simplemente ponía los datos más importantes para la resolución del problema.

113. Inv.: He visto que eso también era común en el caso de A10[19].

114. A6: Sí, es que, hombre, eso, en algunos casos, es una pérdida de tiempo al final. Con los datos...

115. A10: Si viene el enunciado en el libro pues no le[20] copias.

116. A6: Claro, pones la página y ya está (*risas de la alumna*).

117. A10: Y luego..., eso, lo más importante casi..., las dudas que te surgen a ti del ejercicio es lo que copias. La resolución, sí, la tienes que copiar, pero..., si hay un comentario que hace el profesor, que a lo mejor tú no ves, pues lo apuntas y..., casi te diría que eso es lo más importante yo creo. No sé (*en la parte final de su respuesta, el alumno baja mucho su tono de voz*).

118. Inv.: (*Pregunta dirigida a la alumna A6*) ¿Tú también?

119. A6: Sí, lo que te resulte más..., más complicado es lo que hay que copiar.

120. Inv.: ¿Y actuáis siempre más o menos de la misma manera? ¿Esto que me comentáis es siempre uniforme? ¿O depende un poco del tipo de ejercicios,

[19] Hecho que el EI había detectado en el análisis de los cuadernos de estos dos estudiantes.
[20] El alumno incurre aquí en un leísmo.

por ejemplo, "en este tipo de ejercicios sí que voy a tener más en cuenta las explicaciones"...?

121. A10: Depende un poco de cuáles sean los temas. Yo, por ejemplo..., en lo que era el álgebra se me daba muy bien; en cambio, vectores, espacios vectoriales y tal..., no se me daba tan bien, entonces..., solía darle más importancia y las dudas y las correcciones marcarlas un poco más que otros temas. Y también depende del profesor[21], hay profesores que te lo ponen todo muy explicado, como puede ser el docente de este curso, y otros que..., se basan así en..., cómo son las operaciones y tal.

122. Inv.: Entonces..., ya me habéis comentado que dais bastante importancia a la corrección de los ejercicios. Cuando vosotros habéis hecho o intentado un ejercicio, y el profesor pasa a corregirlo en la pizarra, ¿en qué centráis vuestra atención?

123. A6: Pues..., en las dificultades dentro del ejercicio..., no sé.

124. A10: Yo más bien en el método que usa el profesor. Porque a veces no usas el mismo método para resolver un mismo ejercicio, lo puedes hacer de distintas maneras, entonces no..., no siempre es el mismo, aunque luego la solución final sea la misma, no tiene por qué seguir el mismo camino.

125. Inv.: ¿Y tomas nota de esos procesos de resolución alternativos?

126. A10: Sí..., si veo que es interesante sí. Si veo que es más largo o más confuso que el mío pues digo..., pues no lo hago.

127. Inv.: Vale. La pregunta iba enfocada a si centráis vuestra atención en lo que es la corrección del ejercicio, de los errores cometidos o, un poco, en lo que comentaba A10, en entender y comprender el proceso que sigue el profesor para resolver la tarea. ¿Tú, A6, en qué te centras, en qué intentas centrarte?

128. A6: Pues... (*la alumna duda bastante antes de dar una respuesta*) pues hombre en..., en el método..., o sea, sí, en el método de cómo lo hace también..., sí que es importante saber y sobre todo ver si es más..., mejor que el tuyo o peor, más sencillo, vaya, de hacer.

129. Inv.: He visto que sí que soléis corregir los errores que cometéis en los ejercicios que intentáis, sin embargo he visto que no explicáis demasiado los errores cometidos, os limitáis mucho a tacharlo, ponéis a continuación la resolución correcta pero no explicáis el error cometido, por qué lo que habéis hecho no es válido. ¿Por qué?

130. A10: No sé..., a veces lo ves directamente..., que te has equivocado.

131. Inv.: Sí, en un caso donde, si es una cuenta y daba 37 y yo he puesto 46...

132. A10: Efectivamente, ahí no vas a hacer ningún comentario, pero...

133. Inv.: ¿En otro tipo de cosas?

[21] De nuevo, este alumno vuelve a hacer emerger y poner de manifiesto la variable del "profesor".

134. A10: Si no entiendes por qué te ha salido mal es cuando preguntas al profesor por qué tu método no es válido. Yo, a veces, no tomas apuntes porque lo estás escuchando y... Y no lo escribes. Y luego...

135. A6: Se te olvida.

136. A10: Luego, a lo mejor, ves el ejercicio y no te acuerdas..., quizás sí que se debería..., escribirlo.

137. Inv.: Una última pregunta sobre ejercicios. Ante ejercicios que habéis realizado, pero luego no se han corregido en clase, ¿seguís o no algún procedimiento para confirmar que los habéis realizado de manera correcta? ¿Qué tipo de procedimientos soléis seguir?

138. A6: Mmm... Pues depende. Si ese ejercicio te ha resultado más difícil que otro pues siempre se lo puedes preguntar al profesor, que..., te lo resuelva. Pero si crees, estás en un 90% seguro...[22]

139. A6: Si tienes dudas se lo comentas al profesor, y si estás seguro o muy convencido de que no has fallado, de que lo tienes bien, pues lo dejas pasar, yo creo, más.

140. A10: Yo es que lo que suelo hacer es coger ejercicios cuya resolución te viene en el libro, ¿no? Sobre todo los libros que hemos cogido estos dos últimos años, que han sido de la misma editorial[23] todos los años, siempre al final del tema te venían más o menos los ejercicios..., un poco de cada parte del tema y..., la resolución. Y luego también los del final del tema, la autoevaluación, había una autoevaluación al final, cuyas resoluciones te venían en un CD, por ejemplo. Entonces..., siempre procuro coger los que puedes luego decir esto está bien o esto está mal. ¿Sabes?

141. Inv.: De acuerdo...

142. A10: Y los que no pues..., preguntarlos al profesor. Si es interesante, si no...

143. Inv.: De acuerdo, vamos a pasar al bloque de trabajo con el CM fuera del aula y uso del CM para estudiar la asignatura. Ya antes creo que ha salido un poco. ¿Cómo utilizáis, en caso de hacerlo, el CM para estudiar la asignatura y para preparar un examen? Tanto en la parte teórica como en la parte práctica.

144. A6: Hombre es que..., al final todo está reflejado en el cuaderno. Entonces tienes que estudiar con el cuaderno sí o sí.

145. Inv.: Sí, pero... ¿cómo utilizas el CM? Por ejemplo, desde el punto de vista de la teoría, de los elementos teóricos, como las definiciones, los resultados, los teoremas, las observaciones importantes...

[22] En este momento se interrumpe momentáneamente la entrevista, pues entra un docente a informarnos de que avisáramos en conserjería al terminar la entrevista para que cerraran el aula que nos habían abierto para poder desarrollar la entrevista.

[23] Los libros son de la editorial ANAYA, que sí que tiene varios ejercicios resueltos al final de cada tema y que se consideran como significativos de los aspectos más importantes del tema.

146. A6: Hombre... Yo siempre intento aplicarlo más a los ejercicios, la teoría. Porque luego..., no sé, al menos, en nuestros casos, en los exámenes no te preguntan teoría..., normalmente.

147. A10: Bueno, depende del profesor. Sí, el Docente 1 nunca..., solía preguntar teoría creo, pero el profesor que tenemos ahora siempre..., siempre cae un apartado o una pregunta que es sólo de teoría. Pero siempre pregunta teoría que él ha dado en clase entonces..., tú lo que coges no es el libro[24], al menos en mi caso, para estudiarte la teoría, sino los apuntes. Y vas sacando la teoría, porque normalmente está fragmentada porque..., estudias un teorema, haces un par de ejercicios, otro teorema[25], otro par de ejercicios. Entonces lo sacas fuera y es lo que te estudias.

148. Inv.: ¿A qué te refieres con "lo sacas fuera"? ¿Lo reescribes?

149. A10: Sí..., o bueno, no del todo.

150. Inv.: ¿Lo juntas todo? ¿Te haces un pequeño esquema?

151. A10: Sí, casi un pequeño esquema. Por ejemplo, "Teorema de Rolle", "Teorema de Weierstrass"... Eso.

152. Inv.: De acuerdo. ¿El libro de texto lo utilizáis para estudiar la asignatura?

153. A10: Sí, pero..., sólo para hacer ejercicios. Yo en mi caso, no sé tú (*refiriéndose a su compañera de entrevista*).

154. A6: Sí, para..., los ejercicios.

155. Inv.: Desde el punto de vista de la teoría, que es lo que estábamos comentado..., os fiais más de los apuntes.

156. A6: Sí, yo sobre todo.

157. A10: Porque..., si el profesor lo ha dado es porque es lo que le gusta. Entonces, si tú lo pones en el examen lo que ha dado él, más que lo del libro. Bueno, hay veces que cuesta un poco entender alguna cosilla de teoría y lo miras en el libro, que a veces a lo mejor lo acompaña con gráficas o cosas así. Entonces sí, pero si no, no. Yo..., solo para hacer ejercicios.

158. A6: Yo..., sí para hacer ejercicios también. Porque..., la teoría es..., depende del profesor siempre más... Además es más fiable normalmente, ¿no?

159. A10: Bueno... (*risas del alumno*)

160. A6: No sé, yo me fío.

161. Inv.: Sí, más al gusto del profesor, que muchas veces cuenta, ¿no? Esto sí que lo ha dado, esto no, esto sí que lo ha dado importancia... (*ambos alumnos asienten mientras se realiza este comentario*).

162. A6: Si le ha dado importancia a eso es porque..., le interesa más.

[24] Se refiere al libro de texto de la asignatura.
[25] El alumno hace mención explícita a los teoremas, pero no a otros posibles contenidos teóricos como, por ejemplo, definiciones de conceptos importantes.

163. Inv.: Y para los ejercicios, ¿cómo utilizáis el CM a la hora de estudiar para un examen?

164. A6: Yo hago los ejercicios aparte, y si coinciden con lo que yo he hecho en el cuaderno pues..., bien[26], y si no pues lo vuelvo a hacer, ya lo consulto en el cuaderno, me aseguro de cómo se hace...

165. A10: Yo es que no suelo repetir los ejercicios (*risas de la alumna A6 mientras habla este estudiante*) porque..., ya luego no..., no sé, no tienen la dificultad que tenían al principio. Además, como hay tantos ejercicios de matemáticas, pues normalmente haces alguno nuevo. Yo luego ya sí, para el global[27], a lo mejor sí haces los ejercicios porque luego ya la resolución la tienes ahí y sabes cómo los has hecho, pero..., los ejercicios del cuaderno son para hacerlos en su momento y mirar si los has hecho bien o mal, yo creo, y ya está.

166. Inv.: De acuerdo. Digamos que tú (*refiriéndome a A10*) no sueles revisar demasiado, salvo algunos casos, los ejercicios del CM y tú (*refiriéndome a A6*) sí que, para ti, el CM tiene una importante componente de revisión cuando tú intentas los ejercicios.

167. A6: Sí.

168. A10: Hombre, hay ejercicios que sí que tienen gran dificultad y sí que los sueles mirar pero la mayoría no..., no les presto mucha atención.

169. Inv.: Estos métodos de estudio, que seguís con el CM y con el libro, ¿son relativamente fijos a lo largo del tiempo? ¿O los habéis ido cambiando a lo largo del tiempo, y en base a qué?

170. A6: Yo no los he..., cambiado. O sea, yo eso lo he hecho durante todo el tiempo y... (*risas*)

171. Inv.: Sí, siempre has tenido esta manera de trabajar para estudiar.

172. A6: Sí.

173. Inv.: Como te ha ido relativamente bien[28], no la has cambiado.

174. A6: Así que no la cambio. Claro (*risas*).

175. A10: Yo sí que he cambiado un poco, yo creo... Bueno, antes yo creo que trabajaba menos que ahora, para empezar (*risas de ambos alumnos*). Y eso, solía hacer..., más o menos lo que ha dicho ella de mirar los ejercicios, por ejemplo, ya que está relacionado con lo que acabamos de decir. Pero ahora, no sé, como que..., ya sabes más o menos elegir qué ejercicios tú crees importantes, o que teoría va a preguntar él[29], entonces más o menos

[26] En esta frase, la alumna parece dar al cuaderno la consideración de que su contenido es algo verídico e irrefutable, sin admitir la posibilidad de error en él.
[27] Se refiere al examen global de las asignaturas que suele hacerse en este centro al final de cada uno de los cursos.
[28] Según me comentan varios profesores del centro, es una alumna que ha tenido siempre un buen rendimiento en esta asignatura y, en general, en todas ellas.
[29] Se refiere al docente de matemáticas.

seleccionas mejor. Antes, a lo mejor, te lo estudiabas todo igual y..., no le dabas más importancia a unas cosas que a otras.

176. Inv.: Digamos que intentas anticipar el comportamiento que puede tener el profesor.

177. A10: ¡Eso es! Por ejemplo, en el tema de..., derivadas y tal, tú sabes que el Teorema de Bolzano[30], por ejemplo, es muy importante y..., bueno, ella no ha dado Matemáticas II.

178. A6: Yo este año no he dado matemáticas.

179. A10: Bueno, es un teorema muy importante vamos. Entonces, luego dices... ¡Es que tiene que entrar! Y luego entra, por ejemplo, en el examen. Entonces, más o menos, cambias un poco lo que estudias (*bajando el tono de voz a medida que finalizaba la frase*).

180. Inv.: De acuerdo. Quisiera haceros una última pregunta, en relación a los aspectos de organización y presentación del CM. ¿Qué aspectos de organización y presentación consideráis que es necesario o que es imprescindible seguir para que el CM sea un instrumento eficaz para vosotros? (*tras formular la pregunta, el alumno A10 ríe y hace gestos negando con la cabeza, la alumna A6 también se ríe al oír la pregunta y ver a su compañero).* He observado un contraste entre vosotros dos.

181. A6: Yo creo que soy muy..., muy ordenada. Yo le doy mucha importancia a los colores, además. (*su compañero de entrevista se ríe*). ¡Es verdad! Por ejemplo, las correcciones van en rojo, y sé que eso está mal y lo tengo que mirar. A mí me llama la atención y entonces... (*A10 sigue riéndose*) ¡Es importante!

182. Inv.: Cuando tomas nota de algún comentario o alguna observación que tú crees que es importante, la resaltas, para que no se te pase por alto.

183. A6: Lo resalto, claro.

184. A10: Yo es que nada, ¿eh? (*A6 se ríe*). Al principio del curso, normalmente, empiezas un poco como "a ver si este año le prestas un poco más de atención, y lo organizas mejor", pero..., qué va, a la segunda semana ya..., empiezas a hacer lo mismo. Colores sólo utilizo uno, normalmente. Este año, normalmente, hago cada tema de un color, voy alternando rojo y azul, pero vamos, que tampoco..., que tampoco es mucho. Luego, no sé, yo es que a la hora de escribir siempre me pasa lo mismo, soy..., no dejo márgenes y entonces..., las correcciones, tacho, lo pongo debajo, no me cabe, ¿sabes? Entonces no...

185. Inv.: Sí, pero, ¿cómo te afecta eso a la hora de estudiar? ¿Te afecta o no te afecta?

[30] Aquí el alumno comete un error, puesto que el Teorema al que hace referencia, el Teorema de Bolzano, es un teorema que hace referencia a funciones continuas, sin hacer ninguna referencia a aspectos sobre derivabilidad de funciones.

186. A10: ¿A mí? ¡No! Porque yo luego me entiendo perfectamente, así que no..., no tengo problema yo para eso.

187. Inv.: Sin embargo, si, por ejemplo, pongamos la situación en que A6 tiene que estudiar con el CM de A10.

188. A6: (*Risas*) ¡Uff! ¡No podría!

189. A10: Yo con el suyo sí, por ejemplo, pero es que, con el mío...

190. Inv.: Imaginaros que os intercambiáis los cuadernos y tenéis que estudiar cada uno con el CM del otro.

191. A6: Te lo pasaría, yo creo.

192. Inv.: ¿Crees que lo podríais hacer? ¿Hasta qué punto pensáis que vuestra manera de..., trabajar con el CM puede ser útil para otra persona si le doy el cuaderno?

193. A6: Yo creo que con mi cuaderno la gente no tendría..., problemas.

194. A10: No, pero..., con el suyo.

195. A6: Pero yo, en el caso de tener que estudiar con su cuaderno, pues, hombre, me resultaría difícil, porque tendría que estar muy atenta a todo.

196. Inv.: Yo creo que nada más. Muchas gracias por haber accedido a la entrevista.

ANEXO E.2

Este anexo contiene la transcripción completa de la entrevista desarrollada por el doctorando (que se marcará en la transcripción como “Inv.”) a los alumnos A2 y A3, correspondientes al aula del Docente 1 durante el periodo analizado. Las anotaciones en cursiva entre paréntesis y algunas notas al pie tienen por objetivo completar la transcripción del discurso oral. En otras notas al pie se introducen reflexiones del EI derivadas de una lectura de las transcripciones y de las ideas emergidas derivadas de un análisis de la entrevista en su globalidad.

Datos identificativos básicos de la entrevista

- Pareja de alumnos entrevistada: Alumnos A2 y A3.
- Aula al que pertenecieron durante el periodo analizado: Aula del Docente 1, 1º Bachillerato Científico-Tecnológico, Instituto Público.
- Día y hora de realización de la entrevista: Lunes 22/04/2013, 10:05 – 10:45 h.

Transcripción de la entrevista

1. Inv.: Hoy es lunes, 22 de abril, estamos en el Instituto Público con A2 y con A3. Vamos a empezar la entrevista sobre la elaboración y uso del cuaderno. La entrevista tiene varios bloques, os voy a ir haciendo una serie de preguntas y me vais contestando, ¿vale?
2. Inv.: El primer bloque trata sobre la necesidad y utilidad del CM. Entonces, la primera pregunta que os quiero hacer es si pensáis que es necesario tener un CM.
3. A2: Sí.
4. A3: Sí, porque..., ahí tienes que apuntar los ejercicios que vas a hacer y así vas..., pues vas estudiando mientras los haces. Así vas..., sabiendo cómo se hacen, porque las matemáticas necesitas estar todos los días intentando hacer los ejercicios para, cuando llegues al examen, saberlos..., saberlos hacer.
5. A2: Sí, porque si..., es decir, si no practicas los ejercicios en el cuaderno o algo, luego llegas al examen y parece que te lo sabes de..., porque ves al profesor que los hace y tal, pero si no compruebas que lo sabes hacer tú pues no..., no sirve[31].
6. Inv.: Entonces los dos pensáis que es necesario tener un cuaderno.
7. A2: Sí.
8. Inv.: Y..., el por qué lo centráis en la parte práctica, la parte de los ejercicios, según he creído entender de vuestras respuestas. ¿Sólo la parte de ejercicios?
9. A3: Bueno, también...
10. Inv.: Más cosas por las que consideráis que es útil tener un cuaderno.
11. A3: También porque cuando el profesor te explica una lección, la parte teórica también..., no te la suele poner también..., igual como en el libro de texto, o sea, el profesor tiene su forma de explicar algo y tú lo apuntas para que sepas lo que quiere él, no lo que quiere el libro de texto.
12. A2: Bueno, yo creo que la parte de teoría viene ya en el libro y..., luego el profesor pues lo que dice pues es su manera de interpretar lo que cada uno tiene... Vamos, yo la parte de teoría no la apunto en el cuaderno.
13. Inv.: Tú a la parte de teoría no le das la importancia para que esté en el cuaderno.
14. A2: No.
15. Inv.: La estudias del libro.
16. A2: Sí.

[31] Destaca la importancia de intentar por uno mismo la resolución de ejercicios frente al hecho de únicamente ver cómo otra persona (el docente) los resuelve.

17. Inv.: Vale, de acuerdo. ¿Qué elementos o cualidades debe tener para vosotros un CM para que lo consideréis un "buen cuaderno", para que sea un buen cuaderno para vosotros?

18. A2: Pues que esté bien organizado, para que puedas buscar..., a la hora de estudiar que..., vamos que sepas "esto es de este tema, esto es de este otro". Y luego pues... Que tenga lo más importante porque..., a lo mejor..., vamos, que tengas ahí apuntados los ejercicios más importantes del examen, que creas tú que te van a preguntar.

19. A3: Sí, sobre todo que esté muy organizado, y si es necesario, que tenga diferentes..., que se usen diferentes colores en los apartados para diferenciarlos mejor. También que estén muy organizados los temas y que, también, el cuaderno, cuando le vayas a comprar, que tenga cuadros, así, cuando vayas a hacer gráficas, te resulte más fácil..., escribir.

20. Inv.: Interesante... Esa es una condición que debe tener tu CM. Los cuadros.

21. A3: Sí, de matemáticas.

22. Inv.: Por ejemplo, en lo que me entregasteis[32], A2, yo he visto que me entregaste folios[33].

23. A2: Yo lo hice en folios.

24. Inv.: A3, sin embargo, tú sí que tenías un CM cuadriculado, ¿no? Entonces A2, por ejemplo, a eso que ha dicho A3...

25. A2: Sí, con cuadros es más fácil para hacer las gráficas pero..., no sé, yo en su momento, pues cogí folios y ya luego no compré..., cuaderno.

26. Inv.: Trabajas bien con folios.

27. A2: Sí. Las haces a mano alzada[34], tampoco... Tampoco hace falta que tengan mucha precisión porque es una cosa que..., no vas a comprobar que están bien puestos los puntos, simplemente es para hacerte una idea pues si es una parábola, pues es una parábola.

28. A3: También es que los cuadros..., pues te ayudan a escribir recto, que también es una cosa importante cuando lo vas a..., exponer todo..., centrado. Cuando lo escribes recto pues lo ves mejor a la vista.

29. Inv.: Digamos que te ayuda más para..., para temas de organización: que los renglones no estén torcidos, que las gráficas queden más..., mejor realizadas... (*el alumno A3 asiente con la cabeza durante mi comentario*).

30. Inv.: De acuerdo, por lo que entiendo, vosotros, sobre todo A3, dais una importancia bastante alta a la organización del cuaderno. ¿Os parece el más

---

[32] Se hace aquí mención a los cuadernos entregados por los alumnos para la realización de fotocopias de la parte correspondientes al bloque de Análisis Matemático.

[33] Aprovecho para plantear alguna pregunta más en este sentido a partir de la característica que había hecho emerger el alumno A3 y las características que recordábamos de los cuadernos de ambos alumnos.

[34] Se refiere a las gráficas.

importante, la cualidad más importante que debe tener un CM, la buena organización? (*tras la pregunta, ambos alumnos se quedan pensativos unos instantes*).

31. A2: Hombre... Aparte de tener..., de estar organizado tiene que tener bien los contenidos que tú consideres interesantes de tener en el cuaderno. Porque, por muy bien organizado que lo tengas, si solamente tienes..., tres bobadas que no..., vamos que no te van a ser útiles a la hora de estudiar, no sirve de nada. Tienes que tener cosas que a ti te vayan a..., que tú pienses que cuando vayas a estudiar para el examen te van a ayudar, que te van a ser útiles. Y ya, teniendo eso, pues que esté organizado, porque si no está organizado pues..., tardas más en estudiar y además es menos... ¿Sabes? Que si lo ves organizado tienes más memoria visual y de esas cosas para..., para aprendértelo mejor.
32. Inv.: A3, ¿estás de acuerdo?
33. A3: Yo siempre he dicho que 50-50 (*risas de A2*). Cincuenta por ciento estructura y todo bien escrito, organizado, y cincuenta por ciento contenido para que... (*se calla*)
34. Inv.: Digamos que le das la misma importancia.
35. A3: Sí. Hombre, tiene que ser muy importante el contenido pero si lo tienes todo..., pues cada cosa por un lado pues no..., no te vas a enterar al final.
36. Inv.: ¿Y tú, A2, antepones el contenido a la organización?[35] (deducido de la frase anterior)
37. A2: Mmm...
38. Inv.: Si tuvieras que quedarte con una de las dos cosas...
39. A2: Hombre es que..., si no tienes contenido pues no sirve de nada el cuaderno. Pero..., sí yo creo que es un poco más importante el contenido pero..., es decir, una persona sin organización puede ayudarse de su cuaderno, con sus contenidos, pero le cuesta más... Es decir, con el mismo contenido le cuesta más a una persona que no es organizada que a una que es organizada. Entonces, si hay que decir un porcentaje pues... 65-35.
40. A3: Todos damos porcentajes...
41. Inv.: De acuerdo, está bien lo de los porcentajes. Pasamos a un segundo bloque, en el que me gustaría preguntaros si vuestra elaboración del cuaderno es más o menos uniforme a lo largo de diferentes temas, cursos... ¿Vuestra manera de elaborar el cuaderno ha sido más o menos uniforme a lo largo del tiempo, o es variable porque la adaptáis a determinadas circunstancias, y cuáles son esas circunstancias?
42. A3: Sí, eh... Yo, pues, normalmente cuando escribo un título lo hago en mayúsculas, y así lo hago durante todo el curso y cuando escribo un apartado

[35] Realizo esta inferencia a partir de la impresión que me había causado su intervención anterior (intervención número 31).

pues pongo un guion o..., cosas así. Normalmente sí que durante todo el curso suelo escribir los mismos símbolos para referirme a las cosas.

43. A2: ¿Pero preguntas eso o si escribimos más o menos en distintas etapas, digamos?

44. Inv.: Pues..., un poco todo. Veo que A3 se ha centrado un poco más en aspectos formales, organizativos, pero la pregunta no va sólo en ese tipo de aspectos, sino en aspectos generales. Hombre, evidentemente, los contenidos, si yo estoy trabajando con un tema de álgebra o es un tema de funciones, son distintos. Pero la manera de plasmarlos por mi parte en el cuaderno puede ser más o menos similar, o puedo hacer cambios porque este tema tiene esta peculiaridad, que me hace trabajarlo de esta manera, que aquí no me era necesario. Los aspectos organizativos son importantes, pero un poco la pregunta es en general.

45. A2: Sí, yo, cuando un tema ves que lo llevas bien y eso pues apuntas menos y..., así un poco por encima. Si ves que es un tema más complicado pues empiezas a apuntar más minuciosamente digamos los ejercicios y... Luego, por ejemplo, hay temas en los que te falla más la manera de hacerlo que..., es decir, que tienes que cambiar tu manera de hacerlo para hacerlo más rápido, porque al profesor le gusta hacerlo de otra manera. Entonces tú tienes que centrarte más en apuntar el procedimiento. En otro, sin embargo, la manera, el procedimiento para hacer el ejercicio lo haces bien, entonces tienes que centrarte más en apuntar los resultados para..., para corregir dónde has tenido el fallo y eso[36].

46. Inv.: ¿Tú, A3?

47. A3: Sí, yo, normalmente, pues suelo escribir todo..., todo lo que nos ponen en la pizarra para que no se me escape ninguna idea[37]. Aunque vea que es muy fácil la idea intento apuntarla para que al final siempre la tenga escrita cuando me haga falta. Así que yo, normalmente, sea difícil o fácil el tema, lo suelo apuntar todo lo que nos pone.

48. Inv.: Así que más o menos tu comportamiento puede ser más o menos uniforme, en el sentido de que siempre intentas tomar...

49. A3: Sí, todo lo que..., toda la información.

50. Inv.: Todo lo que parezca importante, o todo lo que se haya reflejado en la clase. Vale. En cuanto a los temas ya me habéis comentado un poco... Os voy a preguntar por algunos aspectos concretos, para ver cómo influyen en vuestra elaboración del cuaderno. La primera de ellas ya ha salido un poquito, lo ha comentado A2, es la metodología del docente. La diferente manera de trabajar del profesor, ¿hace que tengáis que hacer cambios en la elaboración del CM?

---

[36] De la respuesta, parece inferirse una distinción clara por parte del alumno entre la corrección del procedimiento y la corrección en el desarrollo del procedimiento.

[37] El alumno matiza que con "todo" se refiere a todo lo que se anota en la pizarra. Puede indicar una preferencia por lo que se comunica a través de este medio, frente al discurso oral u otros medios posibles.

¿O no es una cosa que os afecte mucho y trabajáis de una manera más o menos igual independiente del profesor?

51. A2: No, sí que afecta. Por ejemplo, el año pasado..., es decir, este año tenemos otro profesor distinto que el del año pasado[38] y..., el profesor del año pasado casi no escribía letras en la pizarra y este[39], por ejemplo, las explicaciones teóricas escribe con letras. Entonces, al ver que el profesor lo pone con letras pues lo copias. Sin embargo, el año pasado, como lo decía de viva voz pues copiabas..., vamos, que no lo copiabas. Las explicaciones, digamos.

52. A3: Sí, es verdad, sí que cambia mucho de un profesor a otro, y tiene razón[40], este año nos escriben toda la teoría en la pizarra y sí que lo escribes. Incluso hay veces que pone sus propios símbolos en las explicaciones. El año pasado..., pues era muy diferente. El año pasado, por ejemplo, tú tenías que amoldarte... También, el profesor, escribe peor que otro, te cuesta..., te resulta más difícil a ti entender la teoría porque..., por ejemplo, el año pasado pues, el profesor, hay veces que no le cabía en una pizarra y se iba a la otra, y eso pues..., cuesta entenderlo un poco. Pero si eres organizado desde el principio pues..., te resulta más fácil entenderlo, entender al profesor.

53. Inv.: Esto en cuanto a aspectos teóricos, ¿en cuanto a aspectos de resolución de ejercicios?

54. A2: Similar. Algunos lo hacen con más detenimiento y otros con menos. También depende del número de alumnos, porque este año somos cinco y el año pasado éramos quince entonces, este año, vamos más..., puede hacer los ejercicios..., puede ir al ritmo de los cinco porque es más o menos... Sin embargo, el año pasado, ir al ritmo de quince personas era imposible, entonces sí tiene que decidir él cuándo va más rápido y cuándo va más lento[41].

55. Inv.: O sea, que sobre todo las diferencias estarían más en aspectos teóricos.

56. A2: Sí. (*El alumno A3 también asiente con la cabeza*).

57. Inv.: También relacionado con el profesor, os voy a hacer otra serie de preguntas.

58. A2: ¡Nos vas a hacer ponerle verde! (*Ambos alumnos se ríen ante este comentario*)

---

[38] Recordemos que estos alumnos pertenecieron el año pasado a la clase del profesor al que nos referimos como Docente 1 en esta investigación.
[39] Se refiere al profesor de matemáticas que tiene en 2º de Bachillerato, que es otro docente distinto del centro.
[40] Refiriéndose a su compañero de entrevista, A2.
[41] El alumno hace una interesante reflexión sobre la posibilidad de una atención más particularizada del docente en un entorno con menos alumnos, pero no hay referencias concretas sobre la posible influencia del docente en la elaboración de los aspectos prácticos en el cuaderno.

59. Inv.: No, esto no es ponerle verde, no van dirigidas a nadie en concreto las preguntas. ¿Habéis tenido docentes, alguna vez, en Secundaria, que os revisaran el cuaderno, lo que hacíais en el cuaderno?

60. A2: ¿De matemáticas?

61. Inv.: Sí, de matemáticas.

62. A3: Mmm... (*calla durante unos segundos*) Yo no.

63. Inv.: A3 no.

64. A2: Yo creo que no. Lo mismo, a veces, revisarte si habías hecho los ejercicios. Si mandaba deberes, pues pasarse para ver si los habías hecho, pero..., revisarte que lo hacías bien y eso en Secundaria no. En Primaria sí, pero ya en Secundaria no.

65. Inv.: Y en el caso de que el profesor dijera: "Bueno, este año os voy a revisar el CM, lo que hacéis en el CM", ¿haríais algún cambio en la elaboración y uso del cuaderno, o no?

66. A3: Sí.

67. A2: Sí. Sí, te esfuerzas más en que esté mejor organizado porque lo va a ver otra persona también, y..., pues en copiar más cosas, yo creo.

68. A3: Sí, yo..., por eso yo suelo escribir bastante por si acaso también hay veces que te lo puede llegar a mirar pero..., por eso no me preocupo mucho, porque más o menos yo siempre lo tengo organizado.

69. Inv.: De acuerdo. Pasamos a un tercer bloque relacionado con los apuntes y los elementos teóricos en el CM. Aquí ya se han comentado algunas cosas. Os voy a plantear tres escenarios diferentes. Quiero que me comentéis, de forma general ya que son casos hipotéticos, no casos concretos, qué registraríais en vuestro CM en cada una de las situaciones. La primera situación es: el profesor expone la teoría de la asignatura siguiendo el libro de texto. ¿Vosotros qué registraríais en el CM, a lo largo de esa explicación, si es que registraríais algo?

70. A3: Pues yo no registraría nada en el cuaderno.

71. A2: Yo tampoco.

72. A3: Cogería un lápiz y subrayaría en el libro de texto lo que ha dicho.

73. A2: Sí, yo abriría el libro y leería lo que va diciendo mientras..., leería el libro mientras va diciendo, leería lo que pone en el libro y lo seguiría por el libro sin apuntar nada.

74. Inv.: De acuerdo. ¿Nada, nada?

75. A3: Nada.

76. A2: Cero.

77. Inv.: Vale. Segunda situación: el profesor os ha proporcionado unos apuntes de la asignatura y va siguiendo esos apuntes. ¿Vosotros qué registraríais, si es que registraríais algo, en vuestro CM?
78. A3: Hombre, si hace algún ejercicio relacionado...
79. Inv.: Estamos centrándonos en los elementos teóricos.
80. A3: Ah, vale.
81. Inv.: Bueno, también puede ser que desarrolle ejemplos, pero siempre cosas desarrolladas por él, no planteadas.
82. A3: Vale. Si desarrolla algún ejemplo, lo escribiría en esa hoja que nos da con la teoría, pero no escribiría tampoco nada en el cuaderno.
83. A2: Yo..., tampoco escribiría en el cuaderno. Como mucho, mucho, si ves que en algo hace mucho hincapié, subrayarlo o resaltarlo en los propios apuntes, pero..., caso raro.
84. Inv.: Vale. O sea que, tanto con el libro de texto como con los apuntes, las marcas, digamos, las haríais en esos elementos[42]. Si es una exposición del docente, relativamente personal, donde combina aspectos orales y de pizarra, que es un poco la situación en la que, habitualmente, trabajamos. ¿Qué os lleva a vosotros a decidir qué tomar y qué no tomar en vuestro CM?
85. A3: Hombre, el profesor, muchas veces, sabes cuándo te está diciendo algo importante y cuándo no, y cuando dice algo importante, tú lo apuntas y..., y cuando no pues..., intentas recordarlo pero tampoco le tomas tanta importancia. También tienes que ver la importancia que da el profesor a lo que explica.
86. Inv.: ¿Y cómo lo ves tú eso?[43]
87. A3: Pues..., no sé, por ejemplo, a algo que le da mucha importancia lo escribe en la pizarra, pero si no le da tanta, pues lo dice oralmente y ya está[44].
88. A2: Sí, o lo dice varias veces..., o el mismo profesor dice: “Esto es importante”.
89. A3: Si ves que tiene..., que hace muchos ejercicios de..., de la misma teoría, es que sabes que es importante. Entonces lo tomas como más importante.
90. A2: Sí, o también si es algo nuevo, que no has visto otros años, pues lo apuntas y eso porque..., ves que no..., vamos, que no lo has hecho otras veces. Pero si es algo que ya has estado haciendo otros años y compruebas que te sale una vez pues ya dices... Ya no lo apuntas más.

---

[42] Tras esto, se plantea a los alumnos la tercera situación fijada en el guion.
[43] Con esta pregunta, intento que el alumno haga emerger “marcas de importancia” para él de lo que hace o desarrolla el docente.
[44] El alumno A3 asocia la marca de importancia al medio de exposición que utiliza el docente.

91. Inv.: Vale, de acuerdo. Ahora me gustaría preguntarte, A2, a ti en particular. El año pasado me diste una serie de folios, que no sé si eran dos folios o tres folios, no me diste más.

92. A2: No me acuerdo.

93. Inv.: Me diste muy poquito. La parte de teoría estaba pues..., muy incompleto lo que había. Había alguna cosa aislada, pero no había prácticamente nada más. No sé si te acuerdas.

94. A2: Sí.

95. Inv.: Entonces, no sé si es que tenías más elementos en otro lugar y no me lo diste[45]...

96. A2: No, en clase, es eso lo que tenía.

97. Inv.: O es que no tomaste nada más que esos elementos aislados.

98. A2: Sí, en clase solamente tomé eso. Luego, cuando es el examen, en casa hago ejercicios yo el día antes, pero en clase era eso lo que tenía.

99. Inv.: No tenías la necesidad de registrar los elementos teóricos que iban surgiendo.

100. A2: No..., no sé qué tema era, pero...

101. Inv.: Era el tema de funciones y límites, yo creo que era.

102. A2: Pues... No, apunté lo que creí conveniente. Lo que te di es lo que tenía, sí.

103. Inv.: De acuerdo. Pasamos a un cuarto bloque de ejercicios y actividades.

104. A2: ¿Cuántos bloques hay?

105. Inv.: Pues hay seis.

106. A2: Vale, vale.

107. Inv.: Os voy a leer dos frases, me tenéis que decir con cuál de las frases simpatizáis más, y por qué, con cuál estáis más de acuerdo. La primera es: “El CM es un lugar donde, en gran medida, se registran ejercicios” y la segunda frase es: “El CM es un lugar donde, en gran medida, se hacen ejercicios”. ¿Con cuál de las dos frases estáis más de acuerdo, y por qué?

108. A3: Yo elegiría la primera, donde se registran los ejercicios era, ¿no?

109. Inv.: Sí.

110. A3: Porque..., porque en el cuaderno (*el alumno da una respuesta muy entrecortada, trabándose bastante en su explicación*)..., o sea, tú utilizas el cuaderno para llevarle a clase y ahí apuntas lo que el profesor..., los ejemplos que hace, los ejercicios. Pero tú, cuando llegas a casa, coges un folio aparte y

[45] Se ha introducido esta situación particular característica que se había detectado en lo entregado por el alumno A2, para buscar que este estudiante nos proporcionara alguna razón de su comportamiento, si se acordaba.

tú haces los ejercicios, y si no..., ves que te salen, pues coges el cuaderno y ahí tienes los ejercicios hechos para..., para saber cómo se hacen[46]. Por eso elegiría la primera.

111. Inv.: O sea que tú, cuando te planteas intentar ejercicios, no sueles hacerlo en el CM, sino que sueles hacerlo fuera del CM, con el apoyo del CM si lo tienes que revisar. ¿Ese es tu comportamiento habitual?

112. A3: Sí, intento que sea. Normalmente, pues eso, cojo un folio aparte y hago los ejercicios..., cuando veo que necesito hacerles. Si no, no.

113. Inv.: De acuerdo. ¿Tú, A2?

114. A2: Yo también la primera, solo para registrar ejercicios, porque..., en clase, normalmente, no nos dedicamos a hacer ejercicios. Entonces el cuaderno solamente lo..., lo apunto en clase y ahí es donde registras el ejercicio que te parece interesante o los ejercicios (*baja mucho el tono de voz al final de esta frase*). Y luego ya, como he dicho antes, pues, en casa, cuando te pones a estudiar, pues realizas otros ejercicios que no has hecho en clase[47] o, si realizas los mismos ejercicios que han hecho en clase y los tienes apuntados, pues puedes revisarlos. O, por ejemplo, si hay un ejercicio que ha hecho el profesor y no te ha quedado claro, pues lo apuntas en el cuaderno, y luego lo haces en casa, en otro cuaderno aparte o en otros folios, yo por ejemplo tengo folios sucios en casa y ahí es donde hago los ejercicios, digamos, en los que tengo dudas y tal. Luego compruebas cómo lo has hecho tú con cómo lo ha hecho el profesor y tal. Así que la primera frase.

115. Inv.: Así que la primera... Muy bien. Bueno, la siguiente pregunta ya me la habéis contestado un poco, era si cuando intentáis las actividades de matemáticas, lo hacéis siempre / generalmente / algunas veces / pocas veces en el CM. Por lo que me habéis comentado, los intentos de resolución no los soléis hacer, ninguno de los dos, en el CM.

116. A2: No...

117. Inv.: Sino que los hacéis en folios aparte, en cuadernos viejos..., por lo que ha comentado A2. ¿En tu caso, A3?

118. A3: Igual.

119. Inv.: Similar. ¿Y por qué razón? ¿Por qué razón no intentáis la resolución de ejercicios en el propio cuaderno?

120. A3: Yo, más que nada, es una cosa visual. Porque cuando abres un cuaderno y ves que está lleno de borratajos y cosas así, pues no te entran ganas luego de revisar el cuaderno para estudiar. Sin embargo, si coges un folio aparte y haces el ejercicio ahí, pues sabes cómo se hace el ejercicio y

[46] La respuesta del alumno A3 deja entrever un rol del cuaderno como “plantilla” que recoge cómo se “deben” hacer las actividades, para compararlo con sus intentos de resolución de esas actividades, que realiza fuera del propio cuaderno (intervención número 112).

[47] El estudiante A2 añade otro tipo de ejercicios, no se limita únicamente a los trabajados en la clase.

luego ya... ya lo tienes aparte y tienes luego en el cuaderno el ejercicio hecho igual, pero sin borratajos ni nada. Es una cosa visual. Así no te parece…, que vas a abrir un libro y no sabes por dónde empezar por todos los borratajos que hay.

121. Inv.: De acuerdo. ¿A2?

122. A2: ¿Me puedes repetir la pregunta, que se me ha olvidado?

123. Inv.: ¿Por qué razón no intentáis la resolución de las actividades en el cuaderno?

124. A2: ¡Ah, sí! Pues yo como uso folios en el cuaderno[48] pues…, eh…, en vez de coger un… Como los ejercicios que realizas los hago en casa y normalmente los realizas…, pues como ha dicho él, con borratajos, si te sale mal tachas… Para hacerlo con más libertad, digamos, que no estés pendiente de que te quede limpio y tal, porque es un ejercicio que tú lo haces para comprobar si lo sabes hacer y tal. Entonces lo haces en…, en una hoja que pilles por casa. Lo haces, si te sale bien pues bien, y esa hoja ya la tiras o… ¿sabes? Una hoja…, que no vas a coger una hoja limpia para hacer un ejercicio…, vamos, unos cuantos ejercicios, que simplemente para comprobar que están bien. Luego no vas a estudiar de esos ejercicios, simplemente compruebas que te salen bien y ya está. Ya vas al examen y…, es decir, si tú en casa lo has hecho bien, pues luego en el examen también[49].

125. Inv.: (*Pregunta dirigida al alumno A3*) ¿Estás de acuerdo con lo que dice?

126. A3: Sí.

127. Inv.: O sea, que esas hojas donde hacéis vuestros intentos de resolución…, luego esas hojas digamos que no se archivan, no se guardan. Son hojas de sucio, lo importante es, digamos, que a mí me ha salido el ejercicio…, o no me ha salido el ejercicio y se lo voy a preguntar al profesor. Dais prioridad a eso frente a que esas resoluciones puedan archivarse porque en otro momento pueda necesitar recurrir a ellas. No veis la necesidad de hacer eso.

128. A2[50]: Yo no, porque…, si te ha salido una vez, vamos, si tú sabes que…, es decir, a ti te sale el ejercicio, haces tres ejercicios de lo mismo, por ejemplo, y te salen los tres, eso ya… Vamos, no se te va a olvidar así porque sí y vas a tener que volver a hacer los ejercicios. Lo mismo ahora me ponen el mismo ejercicio y no sé hacerlo, pero…, pues le hago otra vez. No vuelvo a las hojas de ejercicios de no sé qué… (*bajando mucho el tono de voz al final*).

129. Inv.: De acuerdo.

---

[48] Este alumno suele utilizar folios sueltos, en lugar del mayoritario “cuaderno de anillas”.

[49] De esta contestación de A2 se infiere que el alumno da más valor al propio hecho de que el alumno haya sabido hacer el ejercicio a que dicha resolución quede registrada. Unido a intervenciones anteriores de este mismo alumno, únicamente parece dar valor a ese registro en ejercicios hechos en clase en los que haya tenido más dificultades o dudas.

[50] En esta intervención, el alumno A2 da algunas razones en relación a lo que comentábamos en la nota al pie anterior.

130. A3: Tú eso lo tienes apuntado en el cuaderno porque, cuando ves que se te olvida lo que has hecho, pues ahí tienes el cuaderno, que está limpio y lo puedes ver bien. Pero si coges esas hojas que tenías sucias…, yo no las archivo por eso, porque están sucias y sólo eran para saber si lo sabías hacer. Si luego se te olvida, pues vas al cuaderno y lo vuelves a ver y ya está[51]. Y, si eso, pues coges otras hojas y lo vuelves a hacer en sucio.

131. Inv.: Vale, de acuerdo. En la siguiente pregunta os voy a plantear también una situación: el profesor está corrigiendo en la clase un ejercicio que vosotros habíais intentado con anterioridad resolver, ¿vale? Entonces, ¿en qué centráis vuestra atención cuando el profesor está corrigiendo ese ejercicio en la pizarra?

132. A3: Yo centro la atención en el camino que sigue desde el comienzo del ejercicio hasta el final, y lo comparo con el método que he seguido yo. Así puedo ver en qué cosas puedo mejorar o en qué cosas he fallado y él no, si no me ha salido igual que a él, por ejemplo.

133. A2: ¿Estamos poniendo el caso en el que a ti te ha salido mal o que a ti te ha salido bien?

134. Inv.: Tú lo has intentado. Si el comportamiento que tienes es distinto en los dos casos, me lo puedes decir. Si me ha salido bien hago esto, y si me salido mal, esto.

135. A2: Si lo has intentado y te ha salido bien, pues simplemente te fijas en cómo lo hace el profesor. Estamos hablando de si anotas o no anotas, ¿no? ¿O de en qué te fijas más?

136. Inv.: Os he preguntado en qué centráis vuestra atención. Eso puede conllevar que anotéis cosas en el cuaderno, efectivamente.

137. A2: Pues que…, si lo he hecho bien, me fijo en cómo lo hace el profesor, si lo hace de manera distinta pues te preguntas por qué lo hace de esa manera… Si ves que es más rápida la del profesor, pues ya, para la próxima vez, sabes que lo tienes que hacer como el profesor; si ves que es más lenta, le dices que es más lento y que por qué lo ha hecho de esa manera y tal[52]. Y en el caso en que lo hayas hecho mal, te fijas en cómo lo ha hecho, en dónde está tu fallo, si ha seguido otro método, si ha sido un fallo en el cálculo, si ha sido… Vamos, buscar el fallo más que nada, como ha dicho A3. Bien dicho.

138. Inv.: De acuerdo. O sea que os centráis tanto en el método o en el proceso seguido de resolución, como en si habéis tenido algún error, para corregirle. Bien. Me comentabas A2 que el profesor puede seguir otro método. Si el profesor, al corregir la actividad, utiliza un método distinto del que has seguido tú, ese método distinto, ¿lo registras en el CM, te parece interesante registrarlo en el cuaderno, o no?

[51] A diferencia de su compañero, este alumno descarta los intentos de resolución "en sucio", pero sí parece registrar un intento de resolución completo y bien presentado en su cuaderno (o puede ser el tomado en el propio aula), que le sirva como instrumento de revisión posterior.
[52] El alumno parece mostrar una preferencia por las soluciones más "cortas/rápidas".

139. A2: Si ves que es más rápido, y que es mejor, lo registras. Si ves que el tuyo es mejor, pues… Vamos, normalmente, el del profesor… Es decir, si tú ves que el tuyo es mejor, pues le preguntas por qué el suyo es mejor y te dará una explicación. Normalmente el del profesor es mejor, y si no es mejor te dice: "Vale, el tuyo es mejor" Es decir, apunto el mejor. Si no es mejor uno, no lo apuntas.

140. Inv.: Siempre tiendes a mejorar, a apuntar el método si consideras que es mejor, más rápido, más adecuado…

141. A2: Si tienes que cambiar tu propio método porque el del profesor es mejor pues…, lo haces.

142. Inv.: Ahí sí que lo registras.

143. A2: Sí.

144. Inv.: ¿Tú, A3?

145. A3: Sí, igual. Si ves que el del profesor es mejor, pues lo apuntas. Y si ves que es el tuyo mejor, pues le preguntas por qué es mejor. Y ya está.

146. Inv.: De acuerdo. Y ante ejercicios que realizáis, pero posteriormente no se corrigen en la clase, ¿seguís algún procedimiento para confirmar que lo que habéis realizado, lo habéis hecho de manera correcta? ¿Qué tipo de procedimientos?

147. A2: Es que…, nos solía dar la solución[53]. Es decir, en los ejercicios que él nos da, en fotocopias, viene el enunciado y luego, en otra cara, viene el resultado numérico que da. Entonces tú sabes si lo has hecho bien o mal. En caso de que lo hayas hecho mal, pues le pregun…, buscas el fallo, y si no lo encuentras, pues le preguntas en clase al día siguiente[54]. Si lo has hecho bien, pues nada.

148. A3: Tú si coges un ejercicio que él no nos ha dado, y…, lo resuelves, o…, o no sabes cómo resolverle, decías, ¿no? (*el alumno muestra una expresión de duda, no parece tener clara la situación planteada*)

149. Inv.: No es que no sepas cómo resolverle. La pregunta es: Vosotros estáis realizando un ejercicio que no se ha propuesto y no se ha corregido en la clase, ¿seguís algún procedimiento para confirmar que eso que habéis realizado está correctamente realizado?

150. A3: Pues el procedimiento es el de toda la vida, que es preguntarle al profesor si lo has hecho bien. O sea, le preguntas al profesor si podemos hacer este ejercicio, y ya, ahí, pues te explica cómo se hace. Y ya está. Ese es el procedimiento que habrá que seguir, y que yo seguiría.

[53] El alumno aquí se refiere al docente del año pasado, el Docente 1, y las hojas de ejercicios que proporcionaba a los alumnos.
[54] Esto encaja con la metodología habitual del Docente 1, que solía comenzar todas las clases preguntando a los alumnos si habían tenido alguna duda o problema en sus intentos de resolución de ejercicios.

151. Inv.: Ya…, pero bueno, ese procedimiento a lo mejor no se puede seguir siempre, porque habéis intentado todos los ejercicios, o muchos ejercicios, y el profesor no tiene tiempo para detenerse en…, en contestaros a todos.

152. A2: Pues…, al final de clase, preguntarle…, en los cinco minutos del intercambio[55].

153. Inv.: O sea que el apoyo para esa confirmación es el profesor.

154. A2: Sí…

155. Inv.: De acuerdo.

156. A2: Es que no hay otro apoyo posible. O vas a clases, o lo buscas en Internet, que a saber lo que te sale…

157. Inv.: Bueno, pues esos son otros apoyos… Serán menos, o los podréis considerar menos fiables, pero son otros apoyos.

158. A3: Sí, yo por eso no…, nunca buscaría…, si no sé hacer algo me costaría mucho buscarlo en Internet porque no me fiaría demasiado[56].

159. A2: Sí.

160. A3: Prefiero ir al profesor que siempre va a tener…, siempre debería tener tiempo para responderte.

161. A2: Y en el caso de que no tenga tiempo, pues le preguntas a algún amigo que…, intente hacer el ejercicio para ver…, cuál es lo que a él le da. Alguien que tengas confianza y que sepas que…, vamos, alguien que sepas que puede hacerlo bien[57].

162. Inv.: Bueno, pues van saliendo otras cosas… Ya no sólo es el profesor.

163. A2: Ya, pero lo normal es el profesor. Lo más útil, vamos.

164. Inv.: Quiero centrarme ahora en cómo trabajáis con el CM fuera del aula, y cómo lo utilizáis para estudiar. Ya ha ido saliendo un poco, a lo largo de los bloques anteriores. [58]Corregidme si me equivoco, pareciera que tampoco es que trabajéis demasiado con el CM fuera del aula, ni que lo utilicéis demasiado para estudiar. Y si lo hacéis, digamos que lo hacéis desde una componente de revisión.

165. A2: Sí.

166. Inv.: Como ha dicho A3, para comprobar si lo que yo estoy intentando hacer fuera del CM es acorde a lo que se hizo en clase en ese momento.

167. A2: Sí, solo eso. Vamos, en mi caso. Solo eso.

---

[55] En el horario del instituto existen cinco minutos de descanso entre cada sesión de 50 minutos.
[56] Los dos alumnos no parecen fiarse de la información que pueden encontrar en Internet.
[57] Este alumno, aquí, pudiera estar haciendo una referencia velada a A10, uno de alumnos con mejor rendimiento del grupo del curso pasado. Según nos comentó el Docente 1, existe mucha confianza entre estos dos alumnos y se ayudan mutuamente.
[58] Inferencias extraídas de respuestas anteriores de ambos alumnos.

168. A3: Yo, pues, cuando tengo que estudiar miro la teoría y…, hago los ejercicios en sucio. Y si, pues lo que te he dicho antes, si no sé cómo se hace, o quiero ver si lo he hecho bien, uso el cuaderno. Pero rara vez le[59] uso para otra cosa.

169. A2: ¿Y qué teoría apuntas en el cuaderno?

170. Inv.: En cuanto a la teoría, es algo que quería preguntaros. A la hora de estudiar para un examen la teoría, ¿preferís estudiar la teoría de vuestros apuntes, del libro de texto, lo combináis?

171. A2: Yo, como en los apuntes no tengo teoría, del libro de texto. ¡Y él no sé qué teoría tendrá![60]

172. A3: Yo, de la teoría… Pues el año pasado no tenía mucha (*risas de ambos alumnos*), pero de este año, te podría decir que usa mucha teoría… Y bueno, el del año pasado también bast…, alguna, porque lo decía oralmente, también.

173. Inv.: Sí, había teoría, sí.

174. A3: Entonces, me leía la teoría y, con la teoría, pues me veía los ejercicios y veía pues…, lo que querían decir. Hay veces que, si no entendía muy bien la teoría, uso el libro, así lo complemento un poco y me lo puede explicar un poco mejor si no está bien explicado[61]. O sea que yo uso la teoría y luego me complemento un poco con el libro.

175. Inv.: El libro de texto sería una herramienta, digamos, de apoyo, para aquello en que puedas tener alguna dificultad, no entiendas muy bien… De acuerdo. Como aspectos organizativos y de presentación ya hemos comentado al principio, voy a terminar con dos preguntas la entrevista[62].

176. A3: Vale.

177. Inv.: Intentad hacer un poco de memoria de los profesores de matemáticas que habéis tenido en Secundaria. La pregunta es: ¿Recordáis que os hayan dado alguna sugerencia, algún modo de elaboración o algún modo de utilización del CM en alguna ocasión? En caso afirmativo, cuáles fueron y si os fueron de utilidad.

178. A3: Pues…, lo que yo recuerdo es que no. Cada profesor impartía su materia y…

179. Inv.: Me centro en los profesores de matemáticas, ¿vale?[63]

180. A3: Sí, cada uno daba su materia, cada profesor de matemáticas, y la verdad es que le importaba bien poco lo que escribieras en el cuaderno. Sólo le

[59] El alumno comete aquí un leísmo.
[60] El alumno parece mostrarse sorprendido ante el comportamiento de su compañero de entrevista, que contrasta con el suyo.
[61] Se refiere a sus apuntes.
[62] Se omite formular las primeras preguntas del bloque 6, al haber emergido ya anteriormente.
[63] Se enfatiza este hecho puesto que la respuesta anterior hace dudar sobre si va a dar una respuesta global a todas las asignaturas o únicamente a los docentes de matemáticas.

importaba pues…, si sabías hacer bien los ejercicios pero, el cuaderno, pues ni me lo miraba, la verdad.

181. A2: Sí, yo también lo mismo. Más bien eso en Primaria y tal, sí que te dicen consejos para cómo hacer bien el cuaderno. Ya luego en Secundaria se supone que te lo han dicho en Primaria y… ¿sabes? Parten de que ya en Primaria te han enseñado a hacer eso. No se dedican a estar enseñando cómo hacer un cuaderno a un chaval que tiene doce años, que lleva haciendo cuadernos desde los seis años y se supone que…, vamos, que ya le han enseñado a… "Mira, esto lo tienes que poner en rojo porque es el título" o "Aquí tienes que poner página no sé qué, ejercicio…" ¿Sabes? Que le han enseñado ya a organizarlo en Primaria, no van a estar en Secundaria también…, dando la vara con lo mismo[64].

182. Inv.: De acuerdo. La última pregunta: ¿Aceptaríais que un profesor de matemáticas os propusiera una manera determinada de trabajar con el CM, o no lo consideraríais apropiado?

183. A2: ¿Aceptar de que nos pareciese bien o de que lo adoptemos?

184. Inv.: Sí, el profesor os propone una manera de trabajar con el CM determinada. Entonces, ¿vosotros aceptaríais esa manera de trabajar con el CM que os propone? Siempre hablando desde un punto de vista hipotético. Imaginaros que un profesor os plantea: "De aquí en adelante vamos a trabajar con el CM de esta manera, tiene que estar reflejado así y vais a trabajar así". ¿A vosotros os parecería apropiado, o no os parecería apropiado que un profesor os propusiera o impusiera una manera de trabajar con el CM?

185. A2: Sí, yo creo que sí que sería apropiado que…, vamos, no creo que sea su obligación decirte cómo tienes que hacer el cuaderno, pero, si te lo dice, pues es un esfuerzo por parte suya que está bien…, reconocérselo. Luego ya entras tú, que criticas y evalúas lo que él te ha dicho y adoptas unas cosas, adoptas otras, algunas las usas y otras no, dependiendo de lo que tú consideres que…, es más útil para ti, porque luego cada persona tiene una manera de trabajar. No puede decir una manera de trabajar para todos[65].

186. Inv.: Digamos que, como consejos, los aceptaríais y los adaptaríais a vuestras maneras de trabajar. Si son adecuados los cogeríais y si no, pues menos.

187. A3: Sí, yo también aceptaría lo que me dice, pero también compararía lo que me dice con…, o sea, compararía el método que quiere implantar con el que yo sigo, y si veo que con el mío me entiendo mejor, pues seguiría el mío. Pero, aún así, aceptaría lo que él me dice e intentaría coger algo de su método si viera que es más útil que lo mío, siempre buscando la utilidad.

188. Inv.: De acuerdo. Muchas gracias por haber aceptado la entrevista.

[64] El alumno, con su respuesta, parece hacer hincapié únicamente en aspectos sobre la organización y presentación del cuaderno, sin hacer mención a otros posibles aspectos.

[65] En su respuesta, el alumno reconoce la diversidad de formas de trabajar con el cuaderno que existen, y la dificultad de establecer posibles modos de trabajo comunes en un aula.

ANEXO E.3

Este anexo contiene la transcripción completa de la entrevista desarrollada por el doctorando (que se marcará en la transcripción como "Inv.") a las alumnas A12 y A14, correspondientes al aula del Docente 2 durante el periodo analizado. Las anotaciones en cursiva entre paréntesis y algunas notas al pie tienen por objetivo completar la transcripción del discurso oral. En otras notas al pie se introducen reflexiones del EI derivadas de una lectura de las transcripciones y de las ideas emergidas derivadas de una visión global del contenido de la entrevista.

Datos identificativos básicos de la entrevista

- Pareja de alumnos entrevistada: Alumnas A12 y A14.
- Aula al que pertenecieron durante el periodo analizado: Aula del Docente 2, 1º Bachillerato Ciencias Sociales, Instituto Público.
- Día y hora de realización de la entrevista: Miércoles 24/04/2013, 10:55 – 11:25 h.

Transcripción de la entrevista

1. Inv.: Hoy es miércoles 24 de abril, estamos en el Instituto Público con la entrevista a A14 y A12. La primera pregunta que quiero haceros sobre el cuaderno de matemáticas (*de ahora en adelante, CM*) es si pensáis que es necesario tener un CM.
2. A14: Yo creo que sí, porque luego si no luego llegas a casa y…, y no…, no sé, no puedes repasar lo que has hecho.
3. A12: Hombre, yo creo que es imprescindible, porque las matemáticas tienes que hacer ejercicios, si no no puedes…, estudiar de un libro o de… (*se ríe*) las cosas que te explican en clase.
4. Inv.: ¿Por qué consideráis que es útil tenerlo? Ya habéis comentado un poco el tema de ejercicios… ¿Por qué más cosas consideráis que es útil tener un CM? (*ambas alumnos se quedan pensativas unos instantes, antes de responder*)
5. A12: Por eso, porque no creo que te valga con las explicaciones que te den en clase. Tienes que…, o sea, por ejemplo, no sé, las matemáticas son muy de entender, y tú si no…, en el libro a lo mejor no entiendes bien cómo…, cómo lo explica. Y el profesor te lo explica y para eso está, ¿no? Para que tú cojas las cosas y…, luego ya lo tomes como tú lo puedes entender.
6. Inv.: (*Pregunta dirigida a A14*) ¿Tú qué crees? ¿Por qué piensas que es útil?
7. A14: (*Risas*) Pues por eso mismo más o menos. Porque si tú haces cosas en clase, luego…, si no lo apuntas en ningún lado, pues no puedes estudiarlo. Porque con un libro sólo no… (*la alumna se calla, no completa su respuesta*)
8. Inv.: ¿Qué elementos o cualidades debe tener para vosotras un CM para que sea un "buen" cuaderno para vosotras? (*Tras la pregunta, hay unos momentos de silencio, las alumnas se quedan pensativas y finalmente ríen antes de responder*)
9. A12: (*Dirigiéndose a su compañera A14*) ¿Empiezas?
10. A14: Pues…, bueno, no entiendo mucho la pregunta, la verdad.
11. Inv.: ¿Qué cualidades debe tener para ti un buen CM?
12. A12: ¿Un buen cuaderno? ¿O que te sirva?[66]
13. Inv.: Un buen CM para vosotras, que os sirva.
14. A12: Que te sirva.
15. Inv.: Sí.
16. A12: Porque a mí por ejemplo no me importa mucho que esté…, muy sucio (*se ríe*), pero, yo qué sé, igual a otra gente sí.

[66] La alumna A12 plantea una dicotomía con la que puede dar a entender que, para ella, no siempre coincide que un cuaderno sea útil al alumno con que ese cuaderno pueda ser considerado un "buen" cuaderno (¿Quizá a ojos de otras personas?)

17. Inv.: Bueno, pues tú a lo mejor a eso le das menos importancia.

18. A12: (*La alumna asiente y replica la respuesta*) Menos importancia.

19. Inv.: (*Dirigiéndome a A12*) ¿A qué le das importancia en un CM?

20. A12: Pues…, no sé, a que tenga lo necesario. Hombre, lo más importante, no sé… Las actividades y eso, los ejercicios, son importantes.

21. A14: Que estén hechos, más que…

22. A12: ¡Claro!

23. A14: Más que el orden y la limpieza.

24. A12: Que esté bien, claro.

25. A14: Aunque depende de la persona, claro[67].

26. Inv.: O sea que vosotras anteponéis un poco, digamos, el contenido, lo que haya reflejado en el cuaderno, a la organización y a la presentación, que quizás consideráis que es algo menos importante o que no os afecta tanto.

27. A12: Sí. (*La alumna A14 también asiente con la cabeza*)

28. Inv.: De acuerdo. Vosotras, más o menos, a lo largo de vuestra historia docente, en Secundaria, haced un poquito de memoria, ¿habéis siempre elaborado el CM más o menos de la misma manera, de una manera uniforme? ¿O adaptáis mucho vuestra manera de elaborar el CM a los temas, a los cursos, al profesor…?

29. A12: Yo siempre lo he hecho igual.

30. A14: Yo también.

31. A12: Siempre, o sea, sí.

32. Inv.: ¿Siempre igual?

33. A12: No ha cambiado… Hombre, no sé, que yo recuerde… (*ambas alumnas ríen*)

34. Inv.: ¿Tú tampoco, A14?

35. A14: Yo tampoco lo he cambiado, creo.

36. Inv.: Bueno, ya que veo que no decís así variables muy explícitas, os voy a comentar algunas cosas más concretas, ¿vale? Por ejemplo, dentro de las matemáticas hay diferentes temas: temas de álgebra, temas de geometría, temas de estadística, temas de análisis... ¿Hacéis algún cambio en la elaboración del CM dependiendo del tema que sea, o no? (*ambas alumnas se quedan pensando unos segundos*)

37. A14: Mmm… Yo no.

[67] La estudiante reconoce la posible diferencia entre estudiantes que puede existir en estas preferencias.

38. Inv.: Aparte del contenido, claro, los contenidos son distintos, pero la manera de reflejarlos, ¿es más o menos la misma?

39. A12: Yo creo que sí es la misma, más o menos. No sé si te refieres a que si… No sé.

40. Inv.: Si los plasmas de la misma manera, trabajas con ellos más o menos de la misma manera, sigues los mismos parámetros de elaboración…

41. A12: Es que, también… No sé, también depende de… O sea, por ejemplo, del profesor un poco también sí que depende[68], porque hay profesores que te dictan, y hay profesores que te lo escriben en la pizarra o lo hacen más a tu interpretación. Entonces, pues, depende, pero…, casi siempre tomas notas de lo que dice el profesor más o menos, y siempre en todos los temas igual (*se ríe*). No sé.

42. Inv.: O sea que en cuanto a los temas no hay mucha diferencia.

43. A12: Hombre, no, simplemente lo que pongas.

44. A14: Alguna nota o algo.

45. Inv.: Sí que el profesor me comentas que tiene un poco de influencia, ¿no? En cómo sea el profesor.

46. A12: Hombre, sí, obviamente. Porque…, por ejemplo, la profesora que tenemos ahora[69], es más…, tenemos que nosotros hacerlo más…, interpretarlo un poco más. El Docente 2 nos lo dictaba casi todo, nos lo ponía él todo.

47. Inv.: ¿Tú haces esas mismas adaptaciones?

48. A14: Pues…, sí. Yo es que lo pongo todo muy a mi manera. Aunque lo dictaba el Docente 2, pues lo ponía también más o menos como veía yo. E igual con la profesora que tenemos ahora.

49. Inv.: De acuerdo. Ahora os voy a comentar algo también relacionado con el docente. ¿Habéis tenido alguna vez profesores que os revisaran el CM? Estamos hablando en Secundaria, ESO y Bachillerato.

50. A14: En la ESO más yo creo.

51. A12: En la ESO sí.

52. A14: En la ESO todos los años, todos los meses casi.

53. A12: Hombre…, no, yo no. Yo he tenido el mismo profesor que en Bachillerato y…, bueno, alguno sí, pero no me acuerdo muy bien. Pero otros…, no mucho.

54. A14: Yo, en el colegio donde estaba antes era… Pues eso, todos los meses nos miraban cómo lo íbamos haciendo.

55. Inv.: ¿Y qué os revisaban en el CM? ¿De qué tipo era la revisión?

[68] La alumna A12 hace emerger la metodología del docente como variable.
[69] Omitimos o sustituimos el nombre de esta docente. Esta profesora había sustituido en el instituto al Docente 2, que se acababa de jubilar.

56. A14: Pues si íbamos haciendo los deberes y tal, y también miraban la limpieza y el orden.

57. Inv.: O sea que se centraba un poco en ver si habíais o no hecho los ejercicios, los deberes que pedía.

58. A14: Sí.

59. Inv.: Y en cómo lo teníais organizado. De acuerdo. ¿Qué cambios haríais, si es que haríais algún cambio, en caso de que supierais que el profesor os va a revisar el CM? ¿Haríais algún cambio con respecto a lo que hacéis normalmente?

60. A14: Pues un poco de orden, de limpieza yo creo, un poco más. Porque según lo tengo yo, me entiendo yo y ya está (*se ríe al terminar la frase*).

61. A12: Ya. Y no sé, también, pues hay cosas que…, por ejemplo, tú ves que…, hombre, si ves que te va a puntuar el cuaderno, y ves tú en el libro que están escritas y dices: “Bueno, pues esto no lo voy a copiar, porque para qué lo voy a copiar, pongo página no sé qué”. Pues eso lo copias si ves que te lo va a puntuar y te dice… Por ejemplo, a mí, un profesor que tenía hace mucho me lo revisaba para ver que lo tenía todo[70]. Entonces, pues si ves que te lo va a puntuar, pues lo escribes (*se ríe*). Haces todo lo que te diga.

62. Inv.: De acuerdo, sería más completo. Intentarías que tuviera más contenido. Os voy a plantear una serie de escenarios, relacionados con el desarrollo de la parte teórica: definiciones, ejemplos, fórmulas… ¿vale? Quiero que me comentéis que registraríais en vuestro CM, de qué cosas tomaríais nota en vuestro cuaderno en cada una de las situaciones. Son situaciones hipotéticas.

63. Inv.: La primera situación es que el profesor está desarrollando la teoría siguiendo el libro de texto. Es decir el profesor ha cogido el libro de texto, lo ha abierto y lo va siguiendo. ¿Registraríais algo en el CM a lo largo de la explicación? ¿Qué tipos de cosas podrían ser susceptibles de ser registradas por vosotras?

64. A12: Pues…, a lo mejor, algo que no entiendes o que…, que lo has visto tú del libro y no tienes ni idea, y luego te lo ha explicado el profesor y dices: “¡Ah, vale!” Y lo apuntas. O los ejemplos que ponga. Porque pondrá ejemplos el profesor, digo yo (*se ríe*), que no estarán en el libro y que te sirven para aclararte (*su compañera de entrevista, A14, asiente con la cabeza mientras oye la intervención de A12*).

65. Inv.: De acuerdo. ¿En tu caso, A14?

66. A14: Yo creo que lo mismo que A12.

67. Inv.: Lo mismo. Otra situación: el profesor os ha proporcionado unos apuntes, donde está la teoría desarrollada y va siguiendo sus apuntes. ¿Registraríais algo en el CM?

[70] Su respuesta puede estar influida por la experiencia que la alumna comenta.

68. A14: Pues…, pero los apuntes, ¿los ha hecho el profesor?

69. Inv.: Sí.

70. A14: Pues entonces…, sí, porque si no tienes tú…, no lo tienes en ningún lado, pues…

71. Inv.: Sí, pero los apuntes te los ha dado.

72. A14: Ah, vale, que te los ha dado.

73. Inv.: Tú tienes las fotocopias, digamos, de los apuntes del profesor. Y el profesor va siguiendo esos apuntes. ¿Tomaríais nota de algo en el CM?

74. A12: Yo creo que no. O sea, si sigue los apuntes… O lo mismo[71], ¿sabes? Porque es como un libro, o sea, es como una página. Lo mismo, o…, no sé, o apuntarlo en la hoja que te da en los apuntes.

75. Inv.: (*Pregunta dirigida a A14, que no decía nada*) ¿Tú igual?

76. A14: Sí. Haría lo mismo[72] (*se ríe mientras da la respuesta*).

77. Inv.: Y ahora imaginaros que el profesor expone oralmente, y con ayuda de la pizarra, la teoría, de una manera relativamente personal. Vosotras, ¿en qué os fijáis, o qué marcas os dicen qué es lo que tenéis que tomar y qué es lo que no tenéis que tomar, y qué elementos tomáis?

78. A14: Yo cuando lo pone en la pizarra, suelo copiar todo. Porque si no, luego, si te falta algo o así, lo vas a mirar en casa y no lo tienes.

79. A12: Yo…, no sé, sí que también lo suelo copiar todo pero…, no sé si veo que son cosas más importantes…

80. Inv.: ¿Y cómo ves tú que son cosas más importantes?

81. A12: Pues…, no sé. Por ejemplo, si pone una definición pues, a lo mejor, no la copio entera, la copio menos. O que está en el libro, no sé. Los ejemplos y eso sí que los suelo copiar[73].

82. Inv.: Los ejemplos sí que los copias más… Das más importancia a tomar los ejemplos.

83. A12: Sí.

84. Inv.: De acuerdo. Os voy a plantear también otra situación, a ver qué haríais, ¿vale? Imaginaros que un día habéis faltado a clase, porque no habéis podido asistir. ¿Tomáis alguna medida para poneros al día, en cuanto al CM?

85. A14: Depende. Si tú vas a la clase[74] y ves que no entiendes nada, pues sí. Si ves que sólo han hecho ejercicios o así, pues yo no lo pido. Pero si son cosas

[71] La alumna A12 indica una semejanza entre esta situación la anterior.
[72] Esta fórmula es utilizada en varias ocasiones por esta alumna en la entrevista. La alumna es bastante tímida y, en bastantes casos, asumió las respuestas de su compañera A12 como propias, sin aportar nuevas ideas.
[73] La alumna A12, espontáneamente, sí que hace emerger la influencia según sea el tipo de contenido presentado. Aquí en concreto habla de definiciones y de ejemplos.
[74] La alumna se refiere aquí a las clases posteriores a aquellas en las que has faltado.

nuevas que han dado, y te lo has perdido, y no entiendes nada pues…, habrá que pedirlo.

86. Inv.: Digamos que el comportamiento es diferente dependiendo de si es…, clase más teórica o más práctica.

87. A12: Hombre, yo…, no suelo pedirlo (*ambas alumnas se ríen*). Pero bueno, sí que, como dice A14, si no te enteras de nada, pues sí que tienes…, o preguntas en clase a la profesora o algo. Eso sí. Pero no…, yo sí que no suelo pedirlo si falto a clase[75]. Sinceramente, ¿no? Has dicho que fuéramos sinceras (*la alumna ríe*).

88. Inv.: Sí, sí. Lo he notado, lo he notado en alguna de las fotocopias, contrastándolo con el cuaderno del profesor. Vale. Una pregunta para A14. He visto que en dos de los tres temas que me entregaste el año pasado, en el tema de límites y en el tema de derivadas, hacías una diferenciación entre los contenidos teóricos y los contenidos prácticos. Digamos que los separabas en el cuaderno, ponías primero toda la teoría, y los ejercicios los desarrollabas a continuación, pero aparte de la teoría. ¿Qué razones te llevan a actuar así? ¿Es una manera de actuar que sigues tú habitualmente?

89. A14: Pues no…, o sea, no suelo hacerlo normalmente. Pero sí que es verdad que cuando lo hago así, lo hago porque luego, no sé, lo entiendo más. Primero me miro la teoría, por ejemplo, y luego pues me voy a hacer los deberes, o sea, los ejercicios. Entonces lo tengo separado y como que me es más fácil de verlo todo.

90. Inv.: Digamos que está relacionado luego con el estudio que haces de esos elementos.

91. A14: Mmm…, sí.

92. Inv.: Te facilita a ti el estudio, el orden que sigues al estudiarlo.

93. A14: Vamos tampoco lo estudiaba mucho el año pasado… (*risas*). Pero sí.

94. Inv.: Bueno… De acuerdo. Y era un comportamiento que no lo haces siempre, vamos que lo haces... Ahí surgió. (*La alumna A14 se ríe y asiente con la cabeza*).

95. Inv.: Pasamos a un bloque más de ejercicios y actividades. Os voy a leer dos frases, y me tenéis que decir con cuál de las dos frases estáis más de acuerdo, y por qué. La primera frase es: “El CM es un lugar donde, en gran medida, se registran ejercicios” y la segunda frase es: “El CM es un lugar donde, en gran medida, se hacen ejercicios”. Si os tuvierais que quedar con una frase, ¿con cuál os quedaríais y por qué? (*Ambas alumnas se quedan unos segundos en silencio, pensando sobre la pregunta planteada*)

---

[75] Se escogió realizar esta pregunta en la entrevista a las dos alumnas porque se había observado este comportamiento en el cuaderno de A12 analizado (que había faltado varios días durante el tema de límites, y que no lo había completado). La alumna confirma lo que habíamos detectado, indicándonos que es un comportamiento que suele tener generalmente.

96. A14: Yo creo que es donde se hacen los ejercicios, más que se registran. Bueno, depende, si no haces los ejercicios nunca, pues no. Pero si tú lo haces en tu casa, o en clase cuando lo mandan o algo…, no sé, lo haces en el cuaderno. Para poder ver todo el proceso y todo.

97. A12: Sí, yo también creo eso, que se hacen los ejercicios, no se registran.

98. Inv.: Dais más importancia a hacer los ejercicios.

99. A12: Hombre, es que, registrando los ejercicios pues no haces nada, o sea, no aprendes. Yo creo, vamos. Los tienes que hacer tú.

100. Inv.: De acuerdo. Cuando intentáis actividades de matemáticas que el profesor os ha propuesto o que no os ha propuesto y los hacéis porque lo consideráis interesantes, ¿lo soléis hacer siempre en el CM? ¿Generalmente? ¿Algunas veces? ¿Pocas veces? Es decir, ¿utilizáis el CM para realizar las actividades que el profesor propone?

101. A12: Sí, sí, siempre.

102. A14: Sí (*también asiente con la cabeza*).

103. Inv.: Siempre. O sea, no utilizáis otros lugares para intentar tareas.

104. A12: No.

105. A14: No.

106. Inv.: Siempre todo lo que intentáis está reflejado, lo reflejáis en el CM.

107. A12: (*Tras reflexionar durante unos segundos*) Bueno, no sé[76]. Es que a veces sí que, cuando estudio algo, sí que…, sí que cojo otro cuaderno. Pero vamos, muy puntualísimamente. Normalmente sí que lo hago en el cuaderno.

108. Inv.: Sería para estudiar. Pero en el día a día de realizar ejercicios que me proponen, lo hacéis en el cuaderno las dos.

109. A12: Sí. Sí, sí. (*La alumna enfatiza mucho su respuesta*)

110. A14: Sí.

111. Inv.: De acuerdo. Imaginaros que, en clase, el profesor está corrigiendo un ejercicio que vosotras habéis intentado realizar con anterioridad. Vosotras habéis intentado hacer el ejercicio, y el profesor lo está corrigiendo. ¿En qué fijáis vuestra atención mientras el profesor está corrigiendo la tarea? ¿En qué os fijáis?

112. A12: Pues en si está bien o no (*riéndose*). No sé. O sea, corrigiendo un ejercicio que ya tenemos hecho, ¿no?

113. Inv.: Sí, que habéis intentado.

114. A12: Sí. Pues en si está bien hecho el ejercicio. Si está mal, pues se corrige, ¿no? Si está bien hecho pues…, lo mismo, igual.

[76] La alumna A12 matiza su respuesta anterior.

115. Inv.: O sea, comparas más o menos lo que ha hecho el profesor con lo que has hecho tú, para ver si lo que has hecho tú está bien.

116. A12: Sí.

117. Inv.: ¿Tú también A14?

118. A14: También.

119. Inv.: También[77]. Y, por ejemplo, si el profesor realiza la actividad de un modo distinto a como lo habéis realizado vosotras, ¿qué hacéis?

120. A14: Yo lo copio… Lo copio otra vez, o sea, cómo lo ha hecho el profesor. Y el mío, que ya estaba hecho.

121. A12: Pero si da lo mismo, ¡para qué! (*riéndose*)

122. A14: Yo sí que lo copio.

123. A12: Pero si algo se puede hacer de distintas formas…, no sé. Yo no lo…, no lo…, si lo tengo bien no lo copio. Pero, vamos, que si lo tengo mal sí lo copio.

124. Inv.: O sea que si el profesor lo hace de una manera distinta a ti, pero resulta que el resultado es igual, tú a eso no le das tanta importancia…

125. A12: Sí, sí le doy importancia, pero… Digo: “Oye, profe, mira yo lo he hecho así, ¿está bien?” (*riéndose*). Si dice[78]: “Ah, bueno, pero se puede hacer así”. Pues ya está. Y si no, pues nada.

126. Inv.: Sí que te intentas asegurar de que lo que has hecho tú está bien.

127. A12: Sí, eso sí. Si está bien.

128. Inv.: De acuerdo. Otra situación: Pongamos que habéis hecho unas actividades, pero el profesor luego no las ha corregido en clase. A veces era el caso del Docente 2 el año pasado, que a veces planteaba alguna actividad y luego no la corregía en clase. ¿Seguís algún procedimiento para confirmar que lo que habéis hecho es correcto? ¿Qué tipo de procedimiento seguís?

129. A14: Hombre… Si estás muy segura de que lo que has hecho está bien pues no. Pero si no, pues… Si tienes dudas o algo…

130. A12: Si no te sale, pues preguntas: “Oye, profe, que no me sale esto”.

131. A14: Preguntas…, que nunca lo hemos hecho, la verdad[79].

132. A12: Pero bueno… (*ambas alumnas ríen*)

133. Inv.: Una cosa es lo que haríais en la situación ideal y luego otra es lo que se suele hacer, ¿no?

134. A12: Eh…, sí (*de nuevo riéndose*).

135. Inv.: ¿Y qué es lo que soléis hacer?

---

[77] Repito la respuesta que ha dado la alumna A14.
[78] Se refiere al docente. Busca confirmación sobre su método a través del docente.
[79] Parece que ambas alumnas dan a entender una diferencia entre el comportamiento hipotético, o lo que las gustaría hacer, y lo que realmente hacen.

136. A12: Pues nada. Dejarla ahí…

137. A14: Hombre, yo alguna vez sí que le he preguntado. Cuando los mandaba para hacer en clase, yo sí que le preguntaba. Pero vamos, que pocas veces también.

138. Inv.: De acuerdo. ¿Siempre el profesor era, digamos, la fuente de consulta? ¿O podía hacer otras, en algún caso concreto?

139. A12: No, hombre, puede haber otras. Yo, por ejemplo, cuando estudio…, pues mi padre es matemático[80] así que le pregunto a él (*se ríe*). Cuando estudio.

140. Inv.: ¿En tu caso, A14?

141. A14: Yo no.

142. Inv.: Pasamos ahora a ver cómo trabajáis con el CM fuera del aula y cómo lo utilizáis para estudiar, aunque ya ha salido alguna cosa. La pregunta es: En caso de hacerlo, ¿cómo utilizáis el CM para estudiar la asignatura? Vamos a empezar primero a hablar de los elementos teóricos: definiciones, teoremas… ¿Cómo utilizáis el CM para estudiar este tipo de elementos, si es que lo utilizáis? Y si no, ¿qué herramientas utilizáis?

143. A12: ¿Cómo utilizamos el cuaderno? Pues…, no sé. Yo lo que hago es hacer ejercicios y, en caso de duda, miro los ejemplos que tengo anteriormente, o la teoría y ya está. No, no me leo la teoría antes de hacer los ejercicios, ni nada.

144. Inv.: O sea que la teoría tampoco te la miras mucho para un examen…

145. A12: Me la miro cuando…, cuando tengo dudas en ejercicios. Pero si me salen los ejercicios no… (*riéndose*)

146. Inv.: No te miras la teoría[81].

147. A14: Yo tampoco la teoría la miro mucho. Y para el cuaderno y eso pues…, lo mismo que A12. Ejercicios y tal y…, a lo mejor, si tienes alguna duda o algo, miro la teoría yo también… Pero al estudiar.

148. Inv.: Y los ejercicios que hacéis de cara a un examen, ¿son ejercicios que ya se han hecho en clase y tenéis en el CM registrada la corrección, de modo que podéis revisar el CM para ver si lo habéis hecho bien o no? ¿O son otros ejercicios distintos?

149. A14: Yo siempre hago los que ya tenemos hechos antes. Y corregidos además.

150. A12: Yo depende. Sí que algunas veces sí que los hago los que tenemos de clase, y otras veces no. Otras veces hago otros ejemplos.

151. Inv.: ¿Y esos ejercicios los hacéis en el CM o fuera del cuaderno, a la hora de estudiar?

---

[80] El Docente 2 ya me había comentado esta circunstancia; aunque su padre no ejercía como matemático en su profesión.
[81] Completo la respuesta de la estudiante, al ver que se queda callada.

152. A14: En el cuaderno.

153. A12: En el cuaderno. Hombre, bueno, a veces fuera. A veces sí que cojo otro cuaderno pero, normalmente, en el cuaderno[82].

154. Inv.: De acuerdo. ¿Y el libro de texto lo utilizáis de cara a estudiar para un examen o no?

155. A12: El libro lo uso para coger ejercicios. Porque la teoría..., o sea, a no ser que tenga una duda en plan de que no me la ha resuelto la teoría del cuaderno, no lo suelo mirar, la teoría del libro. Yo estudio por el cuaderno.

156. A14: Yo el libro no le uso. Nada más que para eso, o sea, alguna duda o algo..., que no suelo tener tampoco.

157. A12: Pero vamos, el libro es que...

158. A14: Nada, no lo usamos nada.

159. A12: Para los ejercicios y ya está. Para coger los ejercicios y ya está.

160. A14: Sí.

161. Inv.: De acuerdo. ¿Y más o menos ese ha sido vuestro comportamiento a lo largo de estos cursos? ¿Siempre habéis actuado de la misma manera para estudiar?

162. A14: Sí

163. A12: Sí. (*A12 y A14 asienten también gestualmente, hay un momento de silencio esperando que completaran sus respuestas, pero no lo hacen)*.

164. Inv.: Vamos a pasar a aspectos organizativos y de presentación. ¿Qué aspectos de organización y presentación consideráis que es necesario seguir para que el CM sea un elemento eficaz para estudiar la asignatura? Si es que consideráis que son importantes...

165. A12: Yo es que a eso no le doy mucha importancia, ¿verdad? (*A14 ríe*) A la limpieza y al orden y todo eso... Bueno, hombre, sí que tienes que... No sé, pero por ejemplo, el año pasado, decían en plan[83]: "Primera pregunta, (apartado) a, b, c". Yo eso... ¡No ponía nada de eso! Porque es que me daba igual, o sea, no sé.

166. Inv.: ¿Te refieres a los títulos de los apartados?

167. A12: Pongo los títulos directamente, no pongo "a, b, c". O dentro de este apartado no sé qué. Esos..., no...

168. Inv.: No lo consideras necesario.

169. A12: Y no me afecta. No, no lo considero necesario. Sólo los títulos, y ya sabes a qué se refiere.

---

[82] Esto concuerda con una respuesta anterior de la alumna cuando se les preguntó si hacían las actividades en el cuaderno (intervención número 107).

[83] Se refiere a los diferentes apartados y subapartados en que el Docente 2 estructuraba la exposición de la teoría, en muchos casos dictada de manera oral por él mismo.

170. A14: Bueno, yo eso el año pasado sí que lo hacía[83]. Y..., pero..., no sé. ¡Que se me ha olvidado cuál era la pregunta! (*ambas alumnas se ríen*)

171. Inv.: ¿Qué aspectos de organización y presentación crees que es importante seguir para que el CM sea una buena herramienta de estudio?

172. A14: Pues... Yo creo que con tal de que puedas..., de que se entienda lo que pone...

173. A12: Que lo entiendas.

174. A14: Con que lo entienda yo, eso es. Que tampoco tiene que estar limpio y ordenado. Hombre, tampoco tiene que ser...

175. A12: Caótico.

176. A14: (*Sigue la frase suya anterior*) ...una basura el cuaderno. Pero lo justo, yo sé hasta qué punto me entiendo. Si luego está muy desordenado, pues no.

177. A12: Hombre, yo sí que hay veces que digo: ¡uy, qué es esto, qué he puesto aquí! (*risas de la estudiante*) Pero vamos, que sí que me suelo entender. Que a veces sí que digo que..., bueno, puede ser un poco importante, pero yo me..., me suelo entender, vamos.

178. Inv.: Digamos que no le dais mucha importancia, pero la suficiente para que a vosotras os sirva.

179. A14: Eso es.

180. A12: Sí, claro.

181. Inv.: De acuerdo. ¿Hasta qué punto pensáis que vuestro CM podría ser utilizado por otras personas para estudiar la asignatura?

182. A14: Yo creo que si alguien coge mi cuaderno..., no se entera de nada.

183. Inv.: ¿Y por qué piensas que no se entera de nada?

184. A14: Pues porque..., no pongo enunciados, o abrevio mucho cuando lo hago.

185. A12: Yo creo que..., tampoco. O sea..., bueno, sí que se podría entender pero...

186. A14: Pero le costaría.

187. A12: Pero vamos que..., habría dudas (*risas de ambas alumnas*). Tendría dudas para entender mi cuaderno. Pero vamos que..., sí, hombre, se puede entender un poco.

188. A14: Hombre, al fin y al cabo lo que ponemos en el cuaderno no son más que ejercicios y..., pues algo de teoría pero..., ejercicios.

189. Inv.: ¿Y vosotras pensáis que podríais estudiar la asignatura con el CM de otra persona? ¿Qué debería contener el CM de esa otra persona para que vosotras pudierais utilizarlo?

190. A12: Hombre, depende... Si es un cuaderno..., o sea, sí que daría importancia en otro cuaderno, para poder entenderlo yo, a que esté ordenado y

limpio. Si no, es lo mismo. O sea, yo el cuaderno de A14 pues no lo entiendo. Ella el mío tampoco. Pero de una persona ordenada yo creo que lo entendemos las dos.

191. A14: Sí, yo creo que sí.

192. Inv.: ¿Sólo esos aspectos? Organización y limpieza.

193. A12: O más o menos que..., esté en orden todos los... O sea, no sé.

194. A14: Y que tenga también pues más o menos lo que tienes tú, o sea, un poco de teoría y un poco de ejercicios. Lo más importante.

195. Inv.: De acuerdo.

196. A12: Hombre, y si lo has dado previamente. O sea, si te dan un cuaderno de un niño de 1º de ESO o de uno de la carrera, pues ni idea.

197. Inv.: Claro, entendemos que del mismo nivel. Una última pregunta: ¿Aceptaríais que un profesor de matemáticas os propusiera una manera determinada de trabajar con el CM? Es decir, un profesor os dice: “A partir de ahora, os voy a proponer que trabajéis con el CM de esta manera, que hagáis esto, esto y esto; que trabajéis con él así, así y así, y que tengáis esto, esto y esto”. ¿Vosotras lo aceptaríais? ¿Lo consideraríais apropiado?

198. A14: Yo creo que no. Porque si es mi cuaderno y yo lo hago así, es porque yo es como lo entiendo. Y si me lo cambian pues..., aparte de que me costaría cambiarlo, pues no sé. Me parece..., no me parecería bien. Me parecería un poco tontería, porque si yo me entiendo así... ¿Para qué cambiarlo? Mientras no esté mal, claro.

199. A12: Aceptar lo puedes aceptar, pero al final vas a acabar haciendo el cuaderno de tu forma (*risas*). Porque... yo que sé, por ejemplo, esto que te propones a principio de curso: “Este año limpio, no sé qué”. Y al final acabas como todos los años, es que... Es tu forma de hacerlo, es la forma en la que entiendes y..., no lo vas a hacer de otra forma porque... No sé, es una tontería como dice A14.

200. Inv.: O sea, que vosotras veis el CM más como un instrumento personal.

201. A12: Sí, exactamente.

202. Inv.: Es mío, me sirve a mí, y aunque a otra persona no le guste o no le sirva, lo importante es que me sirva a mí.

203. A12: Claro.

204. A14: Sí.

205. A12: Hombre, si ves que no te da buenos resultados, pues...

206. A14: Pues igual tienes que cambiarlo.

207. A12: Sí, pero... Te lo tendrías que plantear, pero vamos, que si tú funcionas bien con eso, no entiendo el problema. Y más a estas alturas. Si somos niños pequeños, pues bueno. Pero en segundo[84] ya..., pues no sé.

208. Inv.: A estas alturas ya no veríais tan apropiado dar este tipo de consejos.

209. A12: Claro.

210. Inv.: Los veis propio de niveles más bajos.

211. A12: Claro, para que no lleguen a estas alturas y estén como nosotras (*risas*).

212. Inv.: Lo malo es que muchas veces es una cosa que siempre se dice: "Bueno, ya tenéis que saberlo de antes".

213. A12: Ya.

214. Inv.: Os lo tienen que haber comentado antes, y luego nunca se comenta antes (*ambas alumnas se ríen*). Vamos bajando de años y, claro, uno no nace ya sabiendo esas cosas. Muchas gracias por haber participado en la entrevista.

215. A12: De nada.

216. A14: De nada.

[84] Se refiere a 2º de Bachillerato. La alumna A12 indica la madurez que se presupone a los estudiantes en estos niveles para haber desarrollado ya método de trabajo con el cuaderno, eficientes para ellos.

ANEXO E.4

Este anexo contiene la transcripción completa de la entrevista desarrollada por el doctorando (que se marcará en la transcripción como “Inv.”) al alumno A13 y la alumna A16, correspondientes al aula del Docente 2 durante el periodo analizado. Las anotaciones en cursiva entre paréntesis y algunas notas al pie tienen por objetivo completar la transcripción del discurso oral. En otras notas al pie se introducen reflexiones del EI derivadas de una lectura de las transcripciones y de las ideas emergidas en relación con el sentido global de la entrevista.

Datos identificativos básicos de la entrevista

- Pareja de alumnos entrevistada: Alumno A13 y alumna A16.
- Aula al que pertenecieron durante el periodo analizado: Aula del Docente 2, 1º Bachillerato Ciencias Sociales, Instituto Público.
- Día y hora de realización de la entrevista: Jueves 25/04/2013, 10:55 – 11:25 h.

Transcripción de la entrevista

1. Inv.: Hoy es jueves 25 de abril, estamos en el Instituto Público haciendo la entrevista a A13 y a A16. La primera pregunta de la entrevista es si pensáis que es necesario tener un cuaderno de matemáticas (*de ahora en adelante, CM*).
2. A13: Bueno, yo creo que sí que es necesario, porque ahí tenemos los ejercicios que hacemos en clase, y si da unos apuntes o así pues..., los tenemos para poder repasarlos de cara al examen.
3. A16: Hombre, yo la verdad es que, normalmente, salvo algo que lleve muy mal, no suelo repasar los..., todos los ejercicios. Miro alguno específico de lo que tengo dudas. Pero sí que está bien[85] para..., para tenerlo todo recogido, si lo necesitas.
4. Inv.: O sea, que consideráis que es útil tenerlo para, digamos, tener recogido lo que se ha hecho en clase.
5. A13: Sí, de cara al examen, pues sí.
6. Inv.: Tanto la teoría como la práctica.
7. A13: O si pone algún ejercicio... Se supone que pondrá ejercicios similares[86]. Entonces, pues para tenerlos recogidos.
8. Inv.: De acuerdo. ¿Y qué elementos o qué cualidades debe tener para vosotros un CM para que sea un buen cuaderno? Para vosotros, un buen cuaderno, ¿qué elementos o qué cualidades debe tener?
9. A13: Pues..., tiene que estar ordenado, o sea, bien separado la teoría de la práctica. Vamos, bien separado, que se entienda qué es cada una. Y bueno, después, los ejercicios, que estén corregidos, que estén bien corregidos.
10. A16: Y bien separados los temas. No poner simplemente la página y ya... Tema por tema y separado. Y los enunciados.
11. Inv.: Que esté organizado. ¿Y los enunciados?
12. A16: Sí, porque hay veces que... Que pones simplemente cuatro datos, y luego lo vas a mirar y no te enteras de nada. Entonces, yo sí que suelo poner todos los..., si no es el enunciado completo, todos, todos los datos[87].
13. Inv.: De acuerdo. Me habláis de cualidades de orden, de organización, de que tenga lo que se ha realizado en clase... Si tuvierais que establecer un orden de prioridades, o un orden de importancia, de todas las cosas que han

[85] Se refiere al cuaderno de matemáticas.
[86] Que la evaluación del docente se base en aspectos prácticos, y que las pruebas de evaluación consten de actividades similares a las hechas en clase son las que pueden justificar la utilidad del CM en este sentido.
[87] La alumna matiza su respuesta. Este último comportamiento (poner los datos o una referencia) fue mucho más común en el cuaderno analizado por esta alumna que la escritura de los enunciados.

ido saliendo, ¿qué es lo que consideráis imprescindible? ¿A lo qué dais más importancia?

14. A16: Que estén corregidos[88]. Porque luego, si lo vas a repasar..., si tienes la costumbre de repasarlo y está mal, no te va a valer para nada. Nada más que para confundirte.

15. A13: Sí que estén corregidos sobre todo, y la teoría, sí.

16. Inv.: De acuerdo. Vosotros, a la hora de elaborar el CM, ¿seguís un proceso de elaboración más o menos uniforme, que no cambia mucho según temas, cursos, profesor...? ¿O sí que hacéis adaptaciones dependiendo de estos factores, y qué factores son los que os hacen variar un poco el proceso de elaboración?

17. A16: Hombre... El profesor, yo creo.

18. A13: Si cambia el profesor pues se supone que cambia la manera de dar la materia, de estructurar también el curso, entonces cambia tu cuaderno y, normalmente, yo lo estructuro como lo va diciendo la profesora. O sea, cuando toca hacer ejercicios, pues pongo ejercicios, y cuando toca teoría lo intento separar pero que se..., para que..., como los ejercicios normalmente los solemos hacer después de la teoría, para que esté antes la teoría y pueda remitirme a ella.

19. Inv.: Digamos que, un poco, según la metodología que siga el docente, tú te adaptas un poco a esa metodología, ¿no?

20. A13: Sí, sí.

21. Inv.: Intentas seguir un poco cómo lo hace. O sea, que el profesor es un factor que sí que influye.

22. A16: Importante.

23. Inv.: ¿Para ti también, A16?

24. A16: Sí, porque, por ejemplo, con el Docente 2, él dictaba la teoría y..., yo por ejemplo no ponía teoría y luego ejercicios. Yo separaba[89]. Toda la teoría junta y luego todos los ejercicios juntos. Con esta profesora que tenemos ahora no, porque va haciendo esquemitas, y después de cada esquema, van los ejercicios.

25. A13: Lo va mezclando.

26. A16: Claro, porque manda ejercicios específicos de lo que ha explicado. Entonces no es..., no es lo mismo.

27. Inv.: De acuerdo. O sea, que el profesor, tiene influencia. Y, dentro de la asignatura de matemáticas, el tema que se esté tratando, ¿tiene influencia para

[88] Se refiere a los ejercicios existentes en el cuaderno.
[89] Esta característica había sido detectada por el EI en el análisis del cuaderno de A16. Luego se vuelve a preguntar explícitamente a la alumna sobre esta circunstancia (intervenciones 95 a 97)

vosotros? Es decir, ¿el proceso de elaboración del CM es el mismo si es un tema, por ejemplo, de álgebra, o es un tema de estadística, un tema de análisis? ¿Más o menos el proceso es uniforme?

28. A16: Sí.

29. A13: Sí.

30. Inv.: ¿O hacéis alguna adaptación especial?

31. A13: No. Yo hago lo mismo para todos los temas.

32. A16: Yo también.

33. Inv.: El profesor ya hemos comentado... ¿Habéis tenido alguna vez docentes en Secundaria que os revisaran el CM?

34. A13: En los primeros cursos de la ESO, en primero o en segundo de la ESO, sí. Después..., a mí no me han vuelto a revisar el cuaderno. Hasta el año pasado, que lo revisaste tú[90]. Yo, por lo menos, estaba en otro centro distinto de este, no estaba en este centro, y allí me lo revisaron en primero y en segundo[91]. Después, en tercero y en cuarto ya no.

35. A16: Que yo me acuerde... O sea, revisar en plan que lo recogían o tal, pocas veces. Pero sí que solían pasar, pues lo típico, a ver si has hecho los ejercicios, si... Y controlarlo un poco.

36. Inv.: ¿En tu caso también, A13? ¿Era una revisión de tipo "control", para ver si se habían hecho las tareas? ¿O cómo era?

37. A13: No. En mi centro..., es que era bastante grande. Éramos muchos alumnos, y el profesor no se pasaba para ver los ejercicios. Simplemente hacía los ejercicios en la pizarra, los corregíamos y ya está. O sea, no tenía un control de cada uno.

38. Inv.: Sí, pero me comentabas que en 1º y 2º de la ESO...

39. A13: Sí, sí, en primero y segundo sí.

40. Inv.: ¿Y cómo era esa revisión?

41. A13: Pues..., más o menos al finalizar cada trimestre, nos cogía el cuaderno a cada uno y se lo llevaba.

42. Inv.: ¿Y os comentaba algo?

43. A13: Nos ponía al final de cada página, al final de la página que acabase el cuaderno, nos ponía un..., pequeñas anotaciones y..., cómo lo había visto y qué podemos mejorar o no. Y nos ponía una calificación.

44. Inv.: ¿Y esa calificación luego tenía influencia en la evaluación? ¿Os lo comentaba o no?

---

[90] Mención del alumno a la investigación realizada.
[91] El alumno A13 estudió la ESO en un centro distinto del instituto público en que está haciendo el Bachillerato.

45. A13: Supongo que sería en el 10 o 15% de la nota que es de trabajo en clase y..., y ejercicios y eso. Trabajo en clase, sí.
46. Inv.: De acuerdo. ¿Qué tipo de anotaciones os podía hacer? ¿Te acuerdas?
47. A13: Pues..., sí, sería, o sea..., ten las cosas más limpias..., pues, él como tiene apuntados todos los ejercicios, si te faltaba alguno te decía: “Te faltan éste, éste y éste, vuelve a hacerlo para el segundo trimestre”. O así. Y esas cosas.
48. Inv.: O sea que aspectos, digamos, de organización y de completitud.
49. A13: Y de completitud, sí.
50. Inv.: Si el profesor os dijera que os va a recoger el CM, ¿haríais algún cambio en vuestra elaboración y uso del CM? ¿O no lo haríais?
51. A13: Yo creo que no porque..., este cuaderno que llevamos ya es para..., o sea, tienes que hacer un cuaderno para aprobar y para..., para entenderte tú, para aprobar la asignatura[92]. Entonces yo creo que lo haces lo mejor que..., lo mejor posible.
52. A16: Hombre, yo creo que ya cambia un poco. Porque antes lo hacías..., pues sí, por si te lo recogía. Ahora lo haces para ti, para un uso personal, no para el profesor.
53. A13: Sí, personalizado.
54. Inv.: O sea, que los dos anteponéis que el CM sea una herramienta que os sirva para vosotros para estudiar, a que alguien pueda revisarlo y no le guste..., o no le parezca bien cómo lo hagáis.
55. A13: Sí. (*La alumna A16 también asiente*).
56. Inv.: De acuerdo. Os voy a plantear ahora tres escenarios y me tenéis que comentar un poco cuál sería vuestro comportamiento respecto al cuaderno en cada situación. Es decir, qué registraríais en el CM. El primer escenario es que el profesor está exponiendo la teoría de un tema y lo hace siguiendo el libro de texto. ¿Registraríais algo en el CM? ¿Qué elementos podríais registrar?
57. A13: Si no cambia nada, no.
58. A16: Yo no.
59. A13: Si no cambia nada no, porque lo tienes en el libro. Muchas veces va rápido, entonces lo ves en el libro, que está mejor y no tienes ningún fallo de escritura, o de que te has confundido. Así que miraría en el libro.
60. A16: Yo tampoco.
61. Inv.: Nada.

[92] Estos alumnos evidencian su visión del cuaderno como un instrumento personal, para el beneficio del propio alumno, sin importar la posible revisión del mismo por el docente. Sobre todo en un curso elevado.

62. A16: No, simplemente estás atenta a la..., a la explicación y lo vas siguiendo en el libro.
63. A13: Claro, si ves que hace algún cambio, lo pones en el libro y ya está.
64. A16: Yo luego..., al estudiar, la teoría se sigue más del libro[93].
65. A13: O, en todo caso, pones una anotación en el cuaderno diciendo que esta teoría lo ha explicado en el libro y ya para, si tú sigues los apuntes, para que veas que está la referencia del libro.
66. Inv.: De acuerdo. Segunda situación: el profesor os proporciona unos apuntes que ha elaborado de la asignatura, y los va siguiendo. ¿Vale? Vosotros tenéis los apuntes, digamos, fotocopiados. ¿Registraríais algo en el CM del desarrollo de la teoría?
67. A13: O sea, un tema nos da, por ejemplo.
68. Inv.: Sí, os da, por ejemplo, un tema. Ha elaborado unos apuntes y os los da fotocopiados.
69. A13: Lo pondría seguidamente. O sea, después de las hojas del último tema, pondría ese tema..., después.
70. A16: Claro. Porque es que... Yo por lo menos, creo que tú también (*refiriéndose a su compañero A13*), es por hojas, no es de anillas[94] (*el alumno A13 asiente con la cabeza*). Entonces incluiría...
71. A13: Sí, lo tenemos por hojas.
72. Inv.: Los dos tenéis cuadernos de hojas sueltas.
73. A13: Sí.
74. A16: Claro.
75. A13: Entonces lo pondría detrás, y seguiría detrás.
76. Inv.: ¿Y haríais alguna anotación? Si hacéis alguna anotación, ¿la haríais en los propios apuntes?
77. A13: Claro, porque...
78. A16: Porque formaría ya parte del cuaderno.
79. A13: Claro, formaría ya parte.
80. Inv.: De acuerdo. Y la tercera situación es que el profesor está haciendo una exposición oral, combinándolo con el uso de la pizarra, relativamente personal, no va siguiendo algo que tengáis en ese momento. Entonces, ¿qué registraríais en el cuaderno en ese momento? ¿Cuáles son, un poco, las marcas que os hacen decidir qué registráis y qué no registráis?

---

[93] Relaciona y justifica este comportamiento a partir de los métodos de estudio de la teoría habituales en la alumna (siguiendo el libro de texto).
[94] Ambos alumnos dicen no tener un cuaderno de anillas, sino cuadernos con hojas microperforadas que se van arrancando.

81. A16: Lo que nos vaya a servir, principalmente, para los..., para los ejercicios. Y si pone algún ejemplo. Eso sí, los ejemplos sí. Y..., alguna fórmula o..., explicación que sea más destacable, sí.

82. A13: Sí, las cosas que tú veas que son más importantes, las que dice ella. Si tú ves que las entiendes, pues las apuntas[95]. Pero, vamos, eso.

83. Inv.: ¿Y cuáles serían esas marcas de importancia?

84. A13: Pues..., por ejemplo, si pone alguna fórmula, algunos..., sí, alguna fórmula. O un ejercicio práctico que haga referencia a esa fórmula, o alguna teoría que tengas que saberte... Algo de eso.

85. A16: Hombre, normalmente, el profesor dice “esto es más importante”, también. O esto..., para el examen. Entonces eso siempre..., siempre se apunta.

86. A13: Eso sí.

87. Inv.: De acuerdo. Os voy a hacer un par de preguntas concretas de lo que he observado de vuestro cuaderno. A13, yo he observado en tu cuaderno un exceso de abreviaturas.

88. A13: Sí.

89. Inv.: Sí que solías utilizar bastante, en ocasiones, no escribir la palabra completa sino escribir abreviaturas de las palabras. ¿Es algo que suelas hacer habitualmente?

90. A13: Sí.

91. Inv.: ¿Y a qué razones responde que lo hagas?

92. A13: Pues que, cuando estás escribiendo rápido y el profesor..., o sea, cuando te está dictando y vas escribiendo rápido, intento abreviar lo más posible para que me dé tiempo a..., a copiarlo todo.

93. Inv.: ¿Y eso luego tiene alguna influencia a la hora del estudio? ¿Te supone algún problema?

94. A13: No porque... yo entiendo mis abreviaturas (*risas del alumno*). Entonces, las entiendo y, no sé, no..., no me supone ningún problema.

95. Inv.: De acuerdo. Y ahora una para A16. Un poco me lo has comentado ya antes. Con el Docente 2, el año pasado, he visto que dividías por un lado la parte de teoría y por otro lado la parte práctica. Ya, según lo que me has comentado, he creído entender que es algo que con el Docente 2 sí que hacías, pero, a lo mejor, con otros profesores no lo haces.

96. A16: Por ejemplo, ahora, al no dar teoría, así en plan dictada[96], pues no... Está prácticamente todo en el libro, sí, porque sigue el libro la profesora que

[95] Este alumno parece ligar el registro de elementos teóricos a la comprensión y entendimiento de los mismos.

[96] Referencia a la característica fundamental que tenían las exposiciones teóricas del Docente 2.

tenemos ahora. Y yo..., tengo todos los ejercicios. Entonces no..., eso de teoría por un lado y ejercicios por otro no. Hago algunas anotaciones de teoría, las hago antes de los ejercicios que vendrán después.

97. Inv.: O sea que ese comportamiento responde a cómo daba Docente 2 la teoría (*la alumna A16 asiente con la cabeza, confirmando el comentario*).

98. Inv.: Pasamos a hablar un poco más de ejercicios y actividades. Os voy a leer dos frases, y me tenéis que decir con cuál de las dos frases estáis más de acuerdo, o simpatizáis más, y por qué. La primera frase es: "El CM es un lugar donde, en gran medida, se registran ejercicios". Y la segunda frase es: "El CM es un lugar donde, en gran medida, se hacen ejercicios". Si os tuvierais que quedar con una frase, ¿con cuál estaríais más de acuerdo y por qué?

99. A13: Yo creo que con la que se registran ejercicios. Porque tú, aparte de hacerlos, después los tienes que volver a mirar y a volver a recordar. Entonces, no solamente te sirve para hacerlos, sino también para, después, volver otra vez a recoger esos ejercicios.

100. A16: Pues yo me quedo con la segunda, con la de se hacen. Porque en el... yo por lo menos en el cuaderno los..., los hago, o sea, la verdad es que pocas veces..., es muy específico que yo luego vuelva otra vez. Yo sigo más la teoría del libro. Porque en el libro además vienen bastantes ejemplos y..., y bien hechos. Entonces yo hago muchos ejercicios para practicar la teoría de cara al examen, ¿sabes?

101. Inv.: O sea, para practicar la teoría vuelves a hacer ejercicios, y no basas tanto..., no utilizas tanto el CM con una componente de revisión como quizás sí que lo puede hacer A13, de lo que he entendido.

102. A16: Hombre, si... Con... O sea, cosas que me cuestan más, que no tengo claras. Por ejemplo, yo, lo de los temas de funciones y tal, eso sí que lo tengo que volver a revisar porque me cuesta más y no está tan claro. Pero, por ejemplo, esto que estamos dando ahora, de probabilidad, de estadística, se me da mejor y lo tengo más claro. Entonces hago más ejercicios para repasar.

103. Inv.: Sí. Digamos que tú, A16, le das más importancia al hecho de hacer ejercicios.

104. A16: Sí.

105. Inv.: Y A13, aparte de hacerlos, también le da importancia a que luego quedan en el cuaderno y pueden luego ser instrumento de revisión.

106. A13: Yo sobre todo hago... Prefiero hacer ejercicios que he hecho ya para saber que están bien o que están mal. Entonces, los registro ahí y, después, los miro.

107. Inv.: Cuando intentáis realizar actividades de matemáticas, bien que os haya propuesto el profesor o bien que hacéis porque consideráis apropiado hacerlas. ¿Es algo que hacéis siempre en el CM? ¿O hay ocasiones donde no hacéis las actividades en el cuaderno, las hacéis en otros lugares?

108. A16: Yo las hago en el cuaderno siempre.

109. A13: Yo..., los ejercicios de clase los hago en el cuaderno. Pero si hago... Los ejercicios que hago yo para el examen, o para..., otros ejercicios aparte, los hago fuera del cuaderno. En hojas aparte.

110. Inv.: Digamos que lo que se propone en clase, lo hacéis en el CM.

111. A16: Yo todos los ejercicios que hago, de clase, me hayan mandado, o los haga yo por mi cuenta, son todos en el cuaderno. Porque, al fin y al cabo, es el CM. Entonces, luego, las otras hojas, si no no me van a valer para nada.

112. Inv.: De acuerdo. A16, he observado que, en tu CM, al revisar la parte práctica, he llegado a la conclusión de que debes acudir a clases particulares o una academia, porque he visto anotaciones extrañas, he visto otros ejercicios distintos…

113. A16: Sí, sí[97].

114. Inv.: Entonces, en las clases particulares, la academia, o el apoyo exterior que utilices, ¿cómo utilizas el CM? ¿Utilizas allí también el cuaderno?

115. A16: Sí, porque normalmente voy a la par de como vamos en clase. Entonces, la profesora particular, cuando empieza un tema, me hace un esquema de todo lo que vamos a ver en el tema. Y luego ya, todos los ejercicios. O sea, como hacía más o menos el Docente 2. Teoría y luego... Entonces, hay..., durante los ejercicios, si hay alguna cosa que ve que fallo más, aunque ya me lo haya puesto en el examen, me vuelve a hacer la anotación de la teoría en..., en esa parte.

116. Inv.: De acuerdo. O sea que el CM también se utiliza, y lo que haces en clases particulares está también en el cuaderno.

117. A16: Claro porque luego hay anotaciones que tengo... Si en clase tengo alguna duda o tal, sí que..., me sirve[98].

118. Inv.: Cuando hacéis o transcribís un ejercicio en vuestro CM, ¿qué elementos suele contener esa resolución? Es decir, un poco antes A16 comentaba también la importancia del enunciado, de que estén reflejados los datos. Vosotros cuando hacéis o transcribís un ejercicio, ¿únicamente transcribís la resolución? ¿También consideráis importante transcribir otro tipo de cosas: explicación del proceso de resolución, observaciones de interés, registrar elementos que no hayáis entendido, marcar elementos no comprendidos? ¿Lo soléis hacer o no?

119. A13: Si los ejercicios vienen en el libro, simplemente anoto los datos principales..., los datos que me vienen en el enunciado, y después hago el ejercicio, lo resuelvo y ya está. Y después anoto alguna anotación si lo tengo

[97] La alumna confirma lo que habíamos inferido a partir del análisis detallado de su cuaderno.

[98] Esas anotaciones en el cuaderno sirven como punto de partida para el desarrollo de las clases particulares y, por ejemplo, la clarificación de las dudas de la alumna.

mal o..., lo corrijo y tal, pero vamos. No anoto ningún tipo de resolución ni nada. Simplemente, anoto..., los procesos y todo, pero no escribo[99].

120. A16: Yo, del enunciado, me quedo con todos los datos más importantes. Luego, por ejemplo, si estoy haciendo el ejercicio y veo algo que no entiendo, o cualquier cosa, pues sí que hago una marca para luego preguntarle al profesor, para acordarme. Pero..., pero luego, cuando resuelvo la duda, termino de hacer el ejercicio y no escribo "esto se ha hecho así porque tal". No.

121. Inv.: Vale. Cuando el profesor está corrigiendo un ejercicio que hayáis intentado ya con anterioridad en la clase. ¿En qué centráis vuestra atención, principalmente?

122. A13: ¿Si no lo tenemos bien? ¿O si lo tenemos bien?

123. Inv.: Puedes diferenciar. Si tu comportamiento es distinto, puedes diferenciar.

124. A13: Hombre, si no lo tienes bien, y tú lo has hecho, pues miras en lo que te has equivocado. Y si no lo has entendido directamente, lo copias y lo intentas entender por qué se hace así. Pero si lo tienes bien hecho simplemente compruebas que lo que tienes tú y lo de la profesora está bien y ya está. O sea, que prestas menos atención, vamos.

125. Inv.: Digamos que comparas: lo que has hecho tú con lo que ha hecho la profesora.

126. A13: Sí.

127. A16: Sí, yo también.

128. Inv.: ¿En tu caso también?

129. A16: Yo..., la resolución del ejercicio la hago a lápiz. Y si me equivoco, lo borro y lo vuelvo a hacer otra vez. Entonces así no tengo que volver otra vez a copiarlo y...

130. Inv.: O sea que si cometes errores, el lápiz te permite borrarlo y tú lo rehaces encima.

131. A16: Sí, porque si no... Lo del tippex y tal, tengo que estar esperando a que..., y me pierdo..., mientras lo hace la profesora o el profesor. Y más que nada también por el tema de que, como yo copio todos o la mayoría de los datos, para no tener que volver a copiarlos otra vez... Y porque, más que nada, normalmente después de ese ejercicio van más. Entonces, si lo tengo que volver a repetir ya está fuera de[100]... (*la alumna se calla, y no completa su respuesta*)

132. Inv.: De acuerdo. Pero eso, un poco, tiene una contrapartida[101]. A lo mejor has cometido algún error que no se debe cometer y, al borrarlo, luego, quizá, al

[99] Parece referirse a que no lo escribe verbalmente de un modo detallado.
[100] Parece justificar su comportamiento en el hecho de que permita que los ejercicios queden completos, no partidos, y siguiendo el orden cronológico en que fueron desarrollados.
[101] Intento que la alumna advierta una posible consecuencia de su comportamiento, para ver qué peso da a los argumentos que ha expuesto frente a los que se le comentan aquí.

revisarlo, aunque me dices que tampoco lo revisas mucho, pero quizá al revisarlo no ves explícitamente el error cometido: “¡Uy, mira, aquí cometí este error, es importante que no lo vuelva a cometer!”. A lo mejor esto luego puede ser causa de...

133. A16: Hombre, si son errores así muy... O errores, normalmente, que me pasa mucho. Si me pasa mucho, sí que hago una llamada..., pongo fuera, lo recojo. Pero, normalmente, a no ser que sea un error muy grave, sí que es verdad que lo borro y luego, lo mismo sí que..., sí que tienes razón, y tendría que dejarlo recogido, pero...

134. Inv.: Bueno, son diferentes maneras de proceder.

135. A16: Ya, pero... (*la alumna se queda en silencio y no prosigue*)

136. Inv.: Si el profesor, al resolver la actividad, al corregirla, lo hace de una manera distinta a como lo habéis intentado vosotros, ¿qué es lo que hacéis? ¿Soléis recogerlo en el cuaderno, o no? ¿Qué os hace recogerlo?

137. A13: Depende. Yo le pregunto si lo mío es igual que lo suyo. Si se puede resolver también por..., esta manera[102], y como esta manera es en la que..., supongo yo que lo entiendo mejor..., que la que ha hecho él, pues..., sigo haciéndolo así. Y si me dice que no..., que lo va a contar igual, y que está bien hecho igualmente, lo sigo haciendo como lo he hecho yo[103].

138. A16: Yo en el primer ejercicio que coincida eso, como se suelen hacer ejercicios..., de lo mismo.

139. A13: Sí.

140. A16: En el primero recojo las dos maneras. Pero luego me quedo..., si valen las dos, me quedo con la que es más fácil, con la que me resulta a mí más sencilla.

141. Inv.: De acuerdo. Y si hay un ejercicio que habéis intentado y luego no se ha corregido en clase, porque el profesor no lo ha considerado conveniente, ¿seguís algún procedimiento para confirmar que lo habéis realizado de manera correcta?

142. A16: Hombre, yo tengo la profesora particular.

143. Inv.: Tú tienes la profesora de clases particulares. ¿En el caso de A13?

144. A13: Pues..., hombre yo ahora ya también tengo clases particulares, así que se lo preguntaría a él. Pero en el caso del año pasado, que no tenía, pues..., o lo compararía con otro alumno a ver si le da igual o... Hombre, lo más lógico sería preguntarle al profesor pero..., no lo haría. No le preguntaría al profesor[104]. Compararía con otros alumnos, para ver si tenemos lo mismo o no.

---

[102] Se refiere a su manera de resolver la actividad.

[103] No contesta explícitamente, pero puede inferirse de la respuesta que no recogería esa otra manera distinta de resolverlo si la suya era correcta.

[104] Pareciera que la figura del profesor para hacer esa comprobación le da al alumno cierto miedo o respeto, y prefiere compartir su resolución con sus compañeros (mayor confianza).

145. Inv.: De acuerdo. Ya hemos comentado un poquito cómo trabajáis con el cuaderno fuera del aula, ha ido saliendo a lo largo de la conversación, sobre todo los elementos prácticos. Pero, a la hora de estudiar los elementos teóricos: definiciones, fórmulas, ejemplos de interés... ¿Utilizáis el CM a la hora de preparar, por ejemplo, la teoría para un examen, o no?

146. A13: Si la teoría está en el cuaderno recogida, sí. Si no del libro, o de las fotocopias, como has dicho antes. Entonces..., no, eso, si está la teoría en el cuaderno sí. Si no, pues utilizo el libro, fotocopias...

147. Inv.: ¿Y cómo utilizas el CM cuando tienes allí la teoría?

148. A13: Me la aprendo de memoria las fórmulas. De memoria. Porque..., se me dan bastante mal las matemáticas, así que de memoria[105].

149. Inv.: De acuerdo.

150. A16: Yo, prácticamente, estudio del libro. A no ser que haya algo que no..., que el profesor haya dado a mayores, o que no siga el libro, las fórmulas y eso..., también. Y yo, como A13, de memoria me las suelo aprender.

151. Inv.: En tu caso, A13, si tienes la teoría en el CM, ¿el libro de texto lo utilizas de alguna manera?

152. A13: Para..., si..., para los ejercicios que hayamos hecho, para ver el enunciado. Y siempre la resolución la tengo en el cuaderno, así que para ver el enunciado simplemente.

153. Inv.: Simplemente para recoger ejercicios.

154. A13: Sí, exactamente.

155. Inv.: Vamos a ir finalizando. En cuanto a aspectos de organización y de presentación. ¿Qué aspectos de organización y de presentación creéis que es necesario o imprescindible seguir para que vuestro cuaderno sea una herramienta eficaz?

156. A13: Tenerlo limpio, no tener tachones, o los menos posibles. Tener todo bien diferenciado, orden.

157. A16: Orden, sobre todo.

158. Inv.: Sobre todo orden.

159. A13: Sí.

160. Inv.: De acuerdo. Una última pregunta: ¿qué cambios en la elaboración y uso del CM intentaríais hacer, si es que haríais alguno, para intentar mejorar vuestros resultados y vuestro aprendizaje de esta asignatura? Es decir, ¿tenéis en mente qué cambios podríais hacer que os pudieran ser de utilidad, tal como utilizáis el cuaderno, para que sea una herramienta más eficaz?

---

[105] El alumno A13 parece haber desistido de intentar entender los conceptos matemáticos, y opta por intentar un aprendizaje memorístico.

161. A13: Hombre, yo del año pasado a éste, por ejemplo, he cambiado en que tengo todo más ordenado, mejor escrito, tengo bien separadas las cosas, no tengo demasiados tachones, tengo las hojas bien ordenadas. Y, la verdad es que yo creo que este año lo tengo bastante bien, está más entendible. Yo creo que puedo cambiar algo, pero está muy cerca de rozar lo que podría ser el máximo en matemáticas[106].

162. Inv.: Esa mejora de organización, ¿tú has notado que te haya servido para..., que estudias ahora mejor, o que tienes más facilidad ahora para estudiar a través del cuaderno? ¿O no?

163. A13: Pues..., lo veremos en el examen de este trimestre (*risas*), porque lo acabo de hacer o sea que... Pero vamos, supongo que sí, porque por ahora me van bien las cosas en los ejercicios que voy haciendo, así que, yo creo que sí que van bien.

164. Inv.: ¿Tú, A16?

165. A16: Mmm..., yo..., es que también he cambiado pero, básicamente, porque también hemos cambiado de profesor y tal[107]. Pero yo, ahora mismo, como..., doy mucha importancia a hacer ejercicios, yo creo que lo que podría cambiar es lo que me has dicho tú, lo de reflejar los errores para no volver a cometerlos. Porque sí que es verdad que hay veces que lo borro, lo vuelvo a hacer, y luego vuelvo a cometer el error. Entonces, eso es lo que yo creo que..., que cambiaría. Porque yo siempre he sido muy ordenada para esas cosas.

166. Inv.: Sí que he visto que la teoría sí que la tenías... Intentabas reflejar bien la organización de los apartados y tal[108].

167. A16: Sí, sí.

168. Inv.: Bueno, pues muchas gracias por haber participado en la entrevista.

169. A13: De nada.

170. A16: De nada.

---

[106] Como podemos observar, el alumno A13 todas las mejoras que plantea están asociadas a aspectos de organización y de puntuación. No hay ninguna referencia al contenido.

[107] Recordemos que el Docente 2 era su profesor el año pasado, y que después de jubilarse le ha sustituido en el centro otra profesora.

[108] Este es uno de los aspectos característicos que habíamos detectado al analizar el cuaderno de esta alumna.

ANEXO E.5

Este anexo contiene la transcripción completa de la entrevista desarrollada por el doctorando (que se marcará en la transcripción como "Inv.") a la alumna A24 y al alumno A28, correspondientes al aula de Bachillerato Científico-Tecnológico del Docente 3 durante el periodo analizado. Las anotaciones en cursiva entre paréntesis y algunas notas al pie tienen por objetivo completar la transcripción del discurso oral. En otras notas al pie se introducen reflexiones del EI derivadas de una lectura de las transcripciones y de las ideas emergidas en relación con el sentido global de la entrevista.

Datos identificativos básicos de la entrevista

- Pareja de alumnos entrevistada: Alumna A24 y alumno A28.
- Aula al que pertenecieron durante el periodo analizado: Aula del Docente 3, 1º Bachillerato Científico-Tecnológico, Centro privado-concertado.
- Día y hora de realización de la entrevista: Lunes 06/05/2013, 11:15 – 11:45 h.

Transcripción de la entrevista

1. Inv.: Hoy es lunes, 5 de mayo, y estamos en el colegio privado-concertado con A24 y con A28. Vamos a hacer la entrevista sobre la elaboración y el uso del cuaderno de matemáticas (*de ahora en adelante, CM*). La primera pregunta que quiero haceros es si pensáis que es necesario tener un CM.
2. A24: Eh... Yo creo que sí. Porque es la mejor forma y método[109] para estudiar, teniéndolo organizado en el cuaderno, y es lo mejor.
3. A28: Yo apoyo lo que dice A24 y..., también para, a la hora del examen, pues mirar los ejercicios y tener una pauta para..., para poder sacar buena nota en el examen.
4. Inv.: De acuerdo. ¿Qué elementos o cualidades debe tener para vosotros un CM para que lo consideréis un buen cuaderno, para que sea útil para vosotros?
5. A24: Pues, sobre todo, que esté organizado, bien organizado. Y tener los ejercicios claros, para luego repasar y estudiar..., que sea más sencillo.
6. A28: También, pero... Vamos, organizar sí, también es una cualidad bastante buena, pero... Que esté ahí alguna cosa en rojo, que te hayas equivocado y que sepas dónde y en qué ejercicio has cometido el error pues..., también es bueno.
7. Inv.: Destacar las correcciones.
8. A28: Claro.
9. Inv.: (*Pregunta dirigida a A24*) ¿Tú también lo consideras importante?
10. A24: Sí.
11. Inv.: Y si tuvierais que establecer un orden de prioridades de todas estas cosas que me habéis comentado: organización, que recoja lo que se ha hecho en la clase, las correcciones de los ejercicios... ¿A qué le daríais más importancia de todo eso? ¿Cuál sería la cualidad primordial? O estableced un orden: esto lo considero más importante, luego esto...
12. A24: Sí, igual, a lo mejor, marcar de cada apartado, o de cada cosa que das el ejercicio..., los más importantes o relevantes.
13. Inv.: ¿Eso lo consideras lo más importante?
14. A24: Sí.
15. A28: Yo las correcciones. Porque es donde tú te has equivocado, pues..., es donde puedes fallar a la hora de hacer el examen[110].

[109] La alumna habla del cuaderno como un "método" de estudio, en lugar de como un instrumento.
[110] A pesar de que acaba de comenzar la entrevista, este alumno ya ha sacado dos veces los exámenes de evaluación de la asignatura, lo que parece indicar una influencia grande de esta evaluación en su comportamiento.

16. Inv.: De acuerdo. Vosotros, cuando elaboráis el CM, ¿lo soléis hacer siempre de una manera más o menos uniforme, elaborado de la misma manera? ¿O hacéis adaptaciones dependiendo de diversos factores y cuáles son esos factores que os hacen cambiar, si es que hacéis cambios?
17. A24: Yo, normalmente, lo hago igual. Pero, dependiendo de los bloques, pues..., de lo que me cueste también, lo organizo diferente.
18. A28: Yo igual. También lo de los bloques, por ejemplo, cuando tienes..., estás dando ecuaciones o algo así, pues igual lo haces un poco más desordenado y tal. Pero cuando haces geometría y..., figuras, pues lo intentas hacer más detallado y más..., más concreto[111].
19. Inv.: Digamos que el tipo de materia... Dentro de las matemáticas hay diversas ramas, la rama que se esté dando sí que tiene cierta influencia en el cuaderno.
20. A28: Alguna, sí.
21. A24: Sí, sí. Bastante.
22. Inv.: ¿Y cuáles son esos cambios que soléis hacer? (*tras la pregunta, los alumnos se quedan callados unos segundos, pensando la respuesta*)
23. A24: Pues, por ejemplo, en geometría, o cuando necesitamos hacer dibujos, pues te esfuerzas más a la hora de realizar el cuaderno, para entenderlo mejor. No es como en aritmética...
24. A28: Sí, eso mismo.
25. Inv.: En geometría tienes más cuidado. ¿Qué te hace a ti a llegar a tener más cuidado?
26. A24: Pues para..., los dibujos que tienes que realizar igual te ayudan más a entenderlo que con los números. Entonces te esfuerzas más en el dibujo.
27. Inv.: ¿Sólo en los gráficos? He visto que estás centrando tu respuesta en los dibujos, en los gráficos...
28. A24: Sí, sí, y en las funciones también, para entenderlo mejor, sí.
29. A28: Sí.
30. Inv.: Digamos que el apoyo gráfico es más importante y lo hacéis con más cuidado (*Ambos alumnos asienten con la cabeza ante este comentario*). Y en otros temas que tienen menos..., apoyo gráfico, que son más, digamos, rutinarios, comentábamos antes un poco el caso de las ecuaciones.
31. A28: Sí, ahí un poco más..., a mano alzada.

[111] Ambos alumnos han hecho emerger espontáneamente los diferentes bloques de contenidos como un aspecto que influye en el modo en que elaboran su cuaderno, sobre todo para A28.

32. Inv.: En cuanto al profesor, al docente. No sé si, a lo largo de Secundaria y Bachillerato, habéis tenido siempre a la misma profesora[112] o habéis cambiado.

33. A28: No.

34. A24: No, hemos tenido varios diferentes en Secundaria, y en Bachillerato la misma[112].

35. Inv.: Y la manera de trabajar del profesor, ¿os hace a vosotros hacer algún cambio en la manera de elaborar el cuaderno? ¿Tiene influencia la metodología del profesor, o no es algo que sea muy relevante para vosotros?

36. A24: Sí, yo creo que un poco sí que influye. Porque dependiendo de sus explicaciones y también de lo que escriba en la pizarra, pues te influye a la hora de elaborar tu cuaderno.

37. Inv.: ¿Cómo te influye?

38. A24: Pues..., si se esfuerza más, escribiendo más en la pizarra, pues tú, quieras que no, tomas más apuntes y te esfuerzas más.

39. A28: Yo creo que, a la hora en sí de elaborar el cuaderno, yo creo que, tanto en matemáticas como en diversas asignaturas, da igual el profesor, lo sigo realizando igual. O sea..., ordenado, no ordenado, igual.

40. Inv.: No tiene mucha influencia para ti (*el alumno asiente ante mi comentario*). De acuerdo. ¿Habéis tenido alguna vez en Secundaria profesores de matemáticas que os revisaran el cuaderno de matemáticas?

41. A24: Sí.

42. A28: Sí.

43. Inv.: ¿Cómo os lo revisaban? ¿De qué forma os lo revisaban?

44. A24: Pues..., nos lo solían pedir, ¿no?

45. A28: Sí.

46. A24: En primero y segundo[113]. Y nos lo devolvían, pues, con alguna observación, dependiendo de cómo viera nuestro orden, o si nos faltaban ejercicios... Lo controlaban también.

47. A28: Sí, básicamente, para controlar que teníamos hechos los ejercicios y que... (*el alumno se queda en silencio, y no completa su respuesta*)

48. A24: Sí.

49. Inv.: Y esa revisión, ¿qué periodicidad tenía? ¿Cada cuánto tiempo os lo podía revisar?

50. A28: Igual cada mes, cada trimestre una o dos veces.

51. A24: Sí.

---

[112] Me refería a la Docente 3, la docente que han tenido en todos los cursos en Bachillerato, como indican los alumnos en la intervención número 34.
[113] Se refiere a los dos primeros cursos de la ESO, no de Bachillerato.

52. Inv.: Y se centraba sobre todo, si no he entendido mal, en llevar un control de los ejercicios, ver si teníais los ejercicios que se habían propuesto realizados y en aspectos de organización.

53. A24: Sí.

54. A28: Sí.

55. Inv.: ¿Os acordáis si tenía influencia esa revisión del CM luego en la evaluación de la asignatura, si lo tenía en cuenta?

56. A24: Sí. Creo que un 10%, ¿no? Al final contaba, sí.

57. A28: Sí. Siempre, porque siempre hay el típico..., los típicos alumnos que no traen los ejercicios y tal. Pues en ese 10% pues sí que se reflejaba en la nota. Si lo traes, pues, te suman el 10%[114].

58. Inv.: De acuerdo. Y vosotros, si supierais que el profesor os va a revisar el CM, ¿haríais algún tipo de cambio en la elaboración del CM? ¿O lo haríais igual, aunque os lo vaya a revisar el profesor?

59. A24: No, la verdad es que yo sí, lo hago igual. Me lo revise o no.

60. A28: Yo es que como soy un poco más desordenado que A24... (*risas*). Ya te habrás dado cuenta...

61. Inv.: Sí (*risas de ambos estudiantes*).

62. A28: Pues, si me lo piden y tal, pues..., bueno, intento tener más cuidado, pero bueno. Es mi letra, es mi forma, y de momento no me va mal teniéndolos así los ejercicios y los cuadernos.

63. Inv.: De acuerdo. Os voy a plantear ahora tres escenarios distintos para el desarrollo, digamos, de la teoría de la asignatura. Tres maneras distintas de presentar la teoría por parte del profesor. Me tenéis que comentar qué es lo que registraríais en vuestro CM en cada una de las situaciones. Son casos hipotéticos, no concretos, pero qué es lo que soléis hacer en estas situaciones.

64. Inv.: El primer escenario es que el profesor va exponiendo la teoría de la asignatura siguiendo, en gran medida, el libro de texto de la asignatura. ¿Tomáis en el cuaderno nota de algo a lo largo de la exposición? Y en caso de que toméis nota, ¿de qué podéis tomar nota? ¿Qué es lo que puede ser susceptible de ser tomado?

65. A24: Mmm... Yo, normalmente, si lo explica del libro no..., no suelo tomar nota. Pero..., si lo hago sería de los cuadros que suelen aparecer destacados en la teoría del libro.

66. A28: Sí, yo... Si lo está dando directamente del libro, pues haces alguna anotación en el margen del libro, pero el cuaderno yo..., yo creo que no.

[114] De las respuestas de los estudiantes, se infiere que la revisión del cuaderno podría ser utilizada por los docentes para llevar un control del trabajo diario de los estudiantes.

67. Inv.: Las anotaciones las haces en el propio libro de texto, en el caso de que surjan.

68. A28: Hombre, si son bastante grandes y tal... Pues si no entran, pues sí cojo el cuaderno y lo marco... Con el bloc y tal... Pero no, en el libro.

69. Inv.: Otra situación: El profesor ha elaborado, en un tema, unos apuntes de ese tema, y os los entrega fotocopiados. A lo largo de la exposición de la teoría va siguiendo esos apuntes. La pregunta es la misma: ¿Registraríais algo en el cuaderno a lo largo de la exposición? ¿Qué cosas podríais registrar?

70. A24: Mmm... No, yo creo que tampoco. Como nos lo da fotocopiado ya..., me lo miraría de la fotocopia, pero sin apuntar nada.

71. A28: Yo también, igual. Y si hago alguna anotación, pues en la misma fotocopia.

72. Inv.: En la misma fotocopia, de acuerdo[115]. El tercer escenario: el profesor ya no sigue algo que os ha proporcionado, sino que realiza una exposición combinando aspectos verbales y de pizarra, una exposición que es relativamente personal, que no tenéis en otro lugar registrada. ¿Qué registráis en el cuaderno en esa situación? ¿Qué es lo que hace a vosotros a decidir qué elementos registrar y qué elementos no registrar?

73. A24: En ese caso yo copiaría lo que estuviera escribiendo en la pizarra[116], y alguna anotación de..., de lo que pone más énfasis o más..., o a lo que le da más importancia.

74. A28: Sí, yo también. Cuando él lo va explicando y lo va repitiendo, pues esas cosas sí que las vas apuntando. Pero, vamos, siempre lo que él escribe en la pizarra, yo por lo menos, lo copio todo y así no tengo problema.

75. Inv.: O sea, que en el aspecto de la pizarra, lo soléis copiar todo; y en el aspecto oral, ya es más selectivo.

76. A24: Sí.

77. A28: Lo más destacable, sí. Yo, por lo menos, no puedo copiar todo, ni me da tiempo ni nada (*risas*).

78. Inv.: ¿Y qué marcas son las que os hacen a vosotros ver que el profesor está poniendo mucho énfasis en algo?

79. A28: Hombre, tú lo consideras. A veces, tú eres, no sé, como autocrítico, y tú puedes considerarlo más importante o no[117]. Y a veces pues lo repite él muchas veces, y es lo que te hace copiarlo.

80. A24: Sí.

---

[115] Replico el final de la respuesta del estudiante, para enlazarlo con la presentación de la siguiente situación.

[116] De nuevo, esta alumna A24 vuelve a hacer emerger la influencia que tiene en su comportamiento que el docente decida escribir algo en la pizarra.

[117] El alumno A28 también destaca la posibilidad de que sea el propio estudiante el que valore la importancia de los elementos presentados.

81. Inv.: De acuerdo. He observado que vosotros dos utilizabais, en algunas ocasiones, una marca para resaltar algunas observaciones o algunos comentarios importantes. Utilizabais una señal de..., un triángulo con una exclamación dentro.

82. A24: El peligro, sí.

83. Inv.: En ambos casos lo he visto en algunas ocasiones. ¿Cuándo utilizáis esta marca? ¿Es vuestra propia? O, como he visto que aparecía en los dos, ¿es algún consejo que os dio algún profesor?[118]

84. A24: Sí. La verdad es que yo lo pongo porque, en francés, desde 1º de la ESO, la profesora nos lo ponía. Entonces, ya, pues lo pongo en la mayoría de los cuadernos, cuando veo algún ejercicio que me cuesta más, o que tengo que mirarme para el examen, o que es algo diferente. Y lo pongo.

85. A28: Sí, lo mismo. Y lo de la profesora de francés igual.

86. Inv.: De acuerdo. ¿Y qué utilidad tiene para vosotros esa marca?

87. A24: A la hora de estudiar, que digo: "Este ejercicio me lo tengo que mirar fijo, porque me ha costado". Para repetirlo.

88. A28: Claro, porque ves esa marca y ya... ¡Exclamación! Pues te fijas más... Cuando estamos con lo de aritmética, las ecuaciones pues, bueno, las sabemos hacer casi todos, y pasas un poco más de largo. Pero ese ejercicio te centras más y lo miras con más detalle.

89. Inv.: O sea, que tendría, digamos, una componente..., para luego el estudio posterior. En el sentido de revisión del CM. Que a la hora de revisar el cuaderno salte a la vista, y decir, ¡cuidado! Que en esto me tengo que centrar.

90. A24: Sí.

91. A28: Sí.

92. Inv.: Imaginad que un día no podéis asistir a clase. ¿Tomáis algún tipo de medida, con respecto al cuaderno, para poneros al día? ¿O no?

93. A24: Sí, yo suelo pedir los ejercicios..., a las personas que hayan estado en clase. Y los copio, según los tienen.

94. A28: Sí, yo también. O a veces, si faltas bastante tiempo, pues los fotocopias porque..., copiarlos, pues...

95. Inv.: O sea que digamos que recurrís a los cuadernos de matemáticas de compañeros para poneros un poco al día.

96. A24. Sí.

97. A28: Sí.

98. Inv.: ¿Y es algo que hacéis siempre?

---

[118] Dado que esta marca ha aparecido en varios alumnos de este centro (entre ellos, estos dos alumnos entrevistados), el EI infirió que podría tratarse de una marca introducida por algún docente.

99. A24: Sí.

100. A28: Sí.

101. Inv.: A24, una pregunta para ti[119]. He visto que, al principio del primero de los temas que me pasaste[120], creo que era el de funciones elementales, vi que había un folio con un resumen de teoría, donde aparecían los diversos tipos de funciones, la expresión analítica que tenían... ¿Es usual en ti el hacer un resumen de la teoría? ¿Cómo la utilizas, qué utilidad tiene para ti?

102. A24: Sí, me lo suelo hacer en todos los bloques. Señalo los puntos importantes de teoría, o alguna cosilla, algunos esquemas, para estudiar más rápido... Y que me viene muy bien a la hora de hacer los ejercicios o de dibujar las gráficas...

103. Inv.: Y es usual, lo sueles hacer.

104. A24: Sí, sí.

105. Inv.: De acuerdo. Pasamos a hablar de ejercicios y actividades en el CM. Os voy a leer dos frases, y me tenéis que decir con cuál de las dos frases estáis más de acuerdo, o simpatizáis más. La primera frase es: “El cuaderno es un lugar donde, en gran medida, se registran ejercicios” y la segunda frase es: “El cuaderno es un lugar, donde, en gran medida, se hacen ejercicios”. Si os tuvierais que quedar con una de las dos frases, ¿con cuál os quedaríais? ¿Con cuál simpatizáis más? (*ambos alumnos piensan la respuesta en silencio durante unos segundos*)

106. A24: Yo con la de “se hacen ejercicios”.

107. A28: Sí, yo también. Se hacen.

108. Inv.: ¿Por qué?

109. A24: Porque..., es donde trabajas las matemáticas, donde..., te esfuerzas. Y es con lo que estudias, al fin y al cabo, con el cuaderno.

110. A28: Sí, lo mismo.

111. Inv.: Le dais más importancia al hecho de hacer los ejercicios.

112. A28: Claro.

113. Inv.: Que al hecho de que luego queden en el cuaderno realizados.

114. A24: Sí.

115. A28: Sí.

116. Inv.: Bien. Cuando intentáis realizar actividades de matemáticas, bien que os haya propuesto el profesor o bien porque las hacéis vosotros porque consideráis interesante hacerlas, ¿las intentáis hacer siempre en el cuaderno? ¿O en ocasiones utilizáis otros lugares para realizar las tareas?

[119] Se plantea a la alumna una situación concreta que se ha detectado en su cuaderno, para que nos confirme y explique la misma.

[120] Para poder hacer las fotocopias de los cuadernos.

117. A24: No, yo lo hago siempre en el cuaderno.
118. A28: Yo también, porque..., si empiezas con que lo haces en un folio aparte pues..., es un desastre.
119. Inv.: Siempre en el cuaderno en los dos casos.
120. A28: Siempre.
121. A24: Sí.
122. Inv.: De acuerdo. Imaginad que habéis intentado realizar un ejercicio y el profesor o la profesora lo está corrigiendo en la pizarra. ¿Cuál es vuestro comportamiento en ese momento? ¿En qué fijáis vuestra atención en el proceso de corrección?
123. A24: Pues..., sobre todo en si lo tengo igual hecho. Y también intento pues entenderlo, cuando me confundo, y corregirlo bien.
124. A28: Sí. En el método con que lo está haciendo la profesora, en los pasos que está dando y en el resultado, a ver si lo has hecho bien.
125. Inv.: O sea que os centráis tanto en la corrección, en comparar lo que habéis hecho vosotros con lo que hace ella, como en el proceso también, en el método que sigue (*Ambos alumnos asienten ante este comentario*).
126. Inv.: De acuerdo. Y si el profesor o la profesora realiza la actividad de una manera distinta a como lo habéis resuelto vosotros, entendiendo que las dos resoluciones son correctas, ¿tomáis nota de ello en el CM? ¿O no consideráis que sea importante hacerlo?
127. A24: Si considero que es un método más sencillo, que no se me hubiera ocurrido, sí que lo copio. Pero si no, dejo mi método y ya está.
128. A28: Claro, con el método que te resulte más sencillo y más fácil para ti pues es con el que te quedas, al fin y al cabo.
129. A24: Sí.
130. Inv.: De acuerdo. Una última pregunta respecto a actividades. Imaginad que vosotros habéis intentado realizar una serie de tareas, que luego posteriormente no se han corregido en clase, porque al profesor no le ha dado tiempo, o no lo ha considerado conveniente, por lo que sea. ¿Seguís algún procedimiento para confirmar que lo que habéis realizado vosotros está realizado de manera correcta?
131. A24: Mmm... Yo la verdad, es que no. Porque..., creo que si no lo ha corregido el profesor en clase será que le da menos importancia.
132. A28: Sí, igual. Y a veces, cuando no te sale algún ejercicio, pues igual sí que se lo preguntas a la profesora: “Oye, ¿cómo se hace este ejercicio, que no me sale?”. Aunque ella no lo considere importante[121].

[121] Ambos alumnos parecen relacionar que un ejercicio planteado no haya sido corregido en la clase con que dicho ejercicio es considerado como menos importante para el docente.

133. Inv.: ¿Siempre sería la profesora a quien acudes para confirmar?

134. A28: Sí, sí.

135. Inv.: De acuerdo. ¿En tu caso? (*pregunta referida a la alumna A24*)

136. A24: También[122].

137. Inv.: Bien. Pasamos ahora a hablar de cómo trabajáis con el CM fuera del aula y cómo lo utilizáis para estudiar. Vamos a separar elementos teóricos y prácticos. En cuanto a los elementos teóricos, ¿cómo utilizáis el cuaderno, si es que lo utilizáis, para estudiar definiciones, resultados teóricos, observaciones de importancia...? ¿Cómo lo utilizáis a la hora de estudiar, por ejemplo, para un examen?

138. A24: Pues... Yo, vamos, no escribo mucha teoría[123], pero alguna definición o lo que va diciendo el profesor sí que lo tengo y..., me lo aprendo de memoria. Como suele caer alguna pregunta siempre..., de teoría.

139. A28: Yo a la hora de estudiar las definiciones o la teoría pues no..., en el cuaderno no apunto nada. Me lo hago en una hoja aparte, con todas las definiciones de, por ejemplo, de los temas, pues todas las definiciones que van a entrar en el examen, y de ahí me las estudio. Yo separo la teoría de los ejercicios.

140. Inv.: O sea que reescribes, digamos...

141. A28: Claro.

142. Inv.: En el cuaderno sí que, cuando lo he revisado, sí que...

143. A28: Había algo.

144. Inv.: Tenías alguna cosa de teoría que iba saliendo.

145. A28: Pero nada, pero..., eso de ahí no me lo miraba.

146. Inv.: Tú lo reescribes fuera.

147. A28: Claro. Sí, me resulta más sencillo y más claro que no ir a una página y mirar, y a otra... Todo seguido me resulta más..., sencillo.

148. Inv.: Un poco también es..., parecido a lo que hacía A24, ¿no? De resumir un poco lo más importante de la teoría para tenerlo todo agrupado.

149. A28: Sí, pero ya te digo, no en el mismo cuaderno.

150. Inv.: Os es más cómodo para estudiar.

151. A24: Sí.

152. A28: Sí.

153. Inv.: De acuerdo. Eso que hacéis, ¿lo combináis con el libro de texto, en algún momento, a la hora de estudiar? ¿Utilizáis el libro? ¿Cómo lo utilizáis?

---

[122] Hace suya la respuesta de su compañero, aunque, por lo que ha indicado, no suele ser un comportamiento que la alumna tenga habitualmente.
[123] Parece referirse a que tiene poco contenido teórico en su cuaderno de matemáticas.

154. A24: Yo, la verdad, es que el libro no lo miro mucho. Prefiero tenerlo todo en el cuaderno, y estudiarlo todo de ahí.

155. Inv.: ¿Y nunca sueles utilizar el libro de texto?

156. A24: No, normalmente, no.

157. A28: Yo cuando pues..., copio las definiciones, pues sí, ahí lo utilizo. Pero tampoco, porque todo lo que te puede entrar en el examen, y lo que considero importante lo has dado en el cuaderno.

158. Inv.: De acuerdo. Y para preparar elementos prácticos, ejercicios usuales, digamos, de temas... ¿Cómo utilizáis el cuaderno en ese estudio de..., de los ejercicios?

159. A24: Pues, a la hora de estudiar, me suelo mirar los ejercicios que corregimos en clase, los que ha considerado más importantes, o los que son diferentes y tienen alguna peculiaridad.

160. Inv.: Y qué haces, ¿los revisas simplemente?

161. A24: No, los repito. Los suelo repetir.

162. Inv.: Los repites.

163. A24: Sí.

164. Inv.: Digamos que los ejercicios que haces para estudiar el examen son ejercicios que ya tienes en el cuaderno y que tú intentas realizar.

165. A24: Sí, los repito[124].

166. Inv.: Y si..., te atascas, o lo que sea, revisas el cuaderno.

167. A24: Claro.

168. Inv.: No haces ejercicios, digamos, distintos.

169. A24: No, ni a mayores... No, los repito.

170. A28: Yo cojo... Si me entran dos temas, cojo desde el principio y empiezo a hacer todos, pero no les..., no les hago, sólo que les miro, miro los pasos, si tengo claro el método de hacer los ejercicios, pues..., paso al siguiente ejercicio. Y algunos, cuando te trabas un poco, pues sí que insistes y lo hace aparte, pero si no, no. Y..., por ejemplo, ahí, en funciones, pues, de cada tipo de función haces un ejemplo de cada una y así te sirve..., para estudiártelo, teniendo un ejemplo de cada cosa[125].

171. Inv.: Y esos ejemplos, ¿del cuaderno?

172. A28: Del cuaderno, claro.

173. Inv.: Tampoco haces ejercicios, digamos, distintos de los que tuvieras.

---

[124] Anteriormente, la alumna A24 consideró que, prioritariamente, el cuaderno es un lugar para hacer ejercicios (intervenciones 106 y 109). Sin embargo, su forma de estudiar también pone de manifiesto que dan importancia al hecho de que queden registrados los ejercicios, puesto que se utilizan estos ejercicios registrados en la preparación de una prueba de evaluación.

[125] Lo que hemos comentado en la nota al pie anterior también es trasladable a este alumno.

174. A28: No, aparte no.

175. Inv.: Y este método de estudio, ¿es un método que ha sido en vosotros más o menos uniforme a lo largo de los años, o le habéis ido modificando o cambiando, esta manera de trabajar con el cuaderno?

176. A24: No, yo lo he hecho así... Desde siempre, vamos. Me ha sido muy útil para estudiar, entonces, lo he mantenido.

177. A28: Sí, yo también. Cuando obtienes buenos resultados con este método, pues lo..., sigues haciendo.

178. Inv.: De acuerdo. He visto que los dos teníais bastantes buenos resultados[126]...

179. A24: Sí.

180. A28: Sí.

181. Inv.: O sea que..., pensáis que para qué cambiarlo, si me va así bien.

182. A28: Claro.

183. A24: Sí (*risas*).

184. Inv.: Unas últimas preguntas. Vamos a centrarnos en aspectos organizativos y de presentación del CM. ¿Qué aspectos de organización y de presentación creéis que es necesario o es imprescindible seguir en un CM para aumentar su eficacia? Para vosotros, siempre hablando desde un punto de vista vuestro, personal.

185. A24: Pues... Que esté limpio el cuaderno, y bien señalados los diferentes apartados, y los ejercicios. Para aclararte lo que estás estudiando en cada momento, y separarlo bien.

186. A28: Yo es que tampoco... Orden tampoco tengo mucho, como habrás podido comprobar (*risas*). Pero..., pero bueno, no sé, me sale así, mi caligrafía es así y... Yo, personalmente, me entero. Cuando estoy estudiando me entero de cada ejercicio, cada cosa y..., con el tema de las correcciones que antes decíamos. Pues claro, yo, si lo marco en rojo, lo marco con una flechita o un triángulo, pues es donde presto atención y ya está.

187. Inv.: Digamos que, aunque le prestes menos atención a aspectos organizativos...

188. A28: Me sigo entendiendo igual.

189. Inv.: A ti no te supone mucho problema el que, a lo mejor, no esté tan perfectamente organizado como podía estar si uno lo hiciera...

190. A28: Claro, sí.

191. Inv.: De acuerdo. ¿Hasta qué punto pensáis que vuestro cuaderno podría ser utilizado por otra persona para estudiar la asignatura?

[126] Información académica en el curso pasado proporcionada por la Docente 3.

192. A24: Mmm... Bueno. Yo creo que el cuaderno de cada uno es personal, y cada uno lo organiza como mejor le viene, y como piensa que puede estudiarlo mejor. Entonces, creo que cada cuaderno..., cada uno debe de usar el suyo. Aunque..., sí que..., yo creo que el mío sí que se podría usar. Pero..., que cada uno debe de tener el suyo, que es como mejor te enteras, con el tuyo.

193. A28: Sí[127].

194. Inv.: ¿Por qué crees que el tuyo se podría usar?

195. A24: Porque sí que lo tengo bien organizado..., y limpio..., y sí que se entiende bien.

196. A28: Yo también apoyo lo que ha dicho A24. Pero, vamos, yo no dejaría mi cuaderno porque no..., no lo entenderían (*risas del alumno*). Y cada persona tiene que hacer su cuaderno personal, porque de ahí va a estudiar.

197. Inv.: Para los dos el cuaderno, ante todo, es una herramienta de estudio personal.

198. A28: Claro.

199. A24: Sí.

200. Inv.: Y para el que tiene que ser útil es para uno mismo y, como tal, pues así actuáis.

201. A28: Para mí.

202. A24: Sí.

203. Inv.: De acuerdo. ¿Aceptaríais que un profesor os propusiera una manera determinada de trabajar con el CM? ¿O no, o hasta qué punto?

204. A24: Bueno... Si me gusta el método que propone, y creo que es mejor que el mío, sí. Pero no creo que lo cambiara.

205. A28: Yo también. Igual sí que te dejas guiar un poco por el orden. Porque..., te dicen que el orden, a la hora de los exámenes pues no..., no es bueno, y tal[128]. Y sí que intentas mejorarlo. Pero, al fin y al cabo, tu método y tu manera de hacer el cuaderno lo vas a mantener igual.

206. Inv.: ¿Y no cogeríais...?

207. A28: Hombre, te estaba comentado. Si me dicen un poco de orden y tal, pues sí. Pero, como yo me entiendo a mí mismo con mis ejercicios a la hora de estudiar, pues..., lo sigo manteniendo.

---

[127] Las intervenciones de ambos alumnos dejan claro que estos estudiantes ven el cuaderno como un instrumento personal del alumno, que lo pueden organizar y elaborar de diferentes maneras debido al diferente rol para el alumno y sus diferentes métodos de estudio.

[128] Según me comenta la Docente 3, a este alumno le han comentado en reiteradas ocasiones aspectos de este tipo a lo largo de su historial en este centro, pues los profesores tienen dificultad para corregir sus exámenes por su mala organización y caligrafía

208. Inv.: De acuerdo. ¿Y os parecería algo apropiado, algo conveniente, que el profesor hiciera eso, que os propusiera una manera de trabajar con el CM? ¿O no lo consideraríais apropiado?

209. A28: Nos serían todo ventajas, claro. Pero..., no sé.

210. A24: Cada uno yo creo que vamos desarrollando ya nuestro método y..., además, ya, a estas alturas, no creo que nos cambien ya.

211. A28: Claro.

212. Inv.: ¿Y en cursos anteriores? Ahora, claro, ya estamos... Sois ya alumnos de 2º de Bachillerato, tenéis cierta madurez ya. ¿En cursos anteriores lo podríais ver apropiado, conveniente? ¿Y en qué cursos?

213. A28: Sí. Pues cuando empiezas.

214. A24: Sí.

215. A28: En primero y segundo de Bachillerato... De la ESO, perdón. Pues..., sí que te guían un poco. Y, ya ves, lo de los triangulitos[129] pues es una cosa que siempre vamos a utilizar, y nos lo propusieron hacer en 1º de la ESO.

216. A24: Sí.

217. Inv.: De acuerdo. Muchas gracias por haber aceptado la entrevista.

218. A28: De nada.

219. A24: De nada.

[129] La marca que se comentó anteriormente (un triángulo con una señal de exclamación en su interior), y que fue adoptada por estos alumnos como propia como consejo de una profesora en los primeros cursos de la ESO.

ANEXO E.6

Este anexo contiene la transcripción completa de la entrevista desarrollada por el doctorando (que se marcará en la transcripción como “Inv.”) al alumno A21 y a la alumna A27, correspondientes al aula de Bachillerato Científico-Tecnológico del Docente 3 durante el periodo analizado. Las anotaciones en cursiva entre paréntesis y algunas notas al pie tienen por objetivo completar la transcripción del discurso oral. En otras notas al pie se introducen reflexiones del EI derivadas de una lectura de las transcripciones y de las ideas emergidas a partir del análisis global de la entrevista.

Datos identificativos básicos de la entrevista

- Pareja de alumnos entrevistada: Alumno A21 y alumna A27.
- Aula al que pertenecieron durante el periodo analizado: Aula del Docente 3, 1º Bachillerato Científico-Tecnológico, Centro privado-concertado.
- Día y hora de realización de la entrevista: Viernes 10/05/2013, 11:15 – 11:45 h.

Transcripción de la entrevista

1. Inv.: Hoy es viernes, 10 de mayo, y estamos en el colegio privado-concertado con A21 y con A27. La primera pregunta que quiero haceros sobre el cuaderno de matemáticas (*de ahora en adelante, CM*) es si pensáis que es necesario tener un CM.
2. A27: ¡Obvio! Claro que sí. Sí, sí. Para organizarte y saber los ejercicios que haces..., al día.
3. A21: Yo creo que es necesario, porque las matemáticas es práctica, en el fondo.
4. Inv.: ¿Y por qué consideráis que es útil tenerlo?
5. A27: Pues porque..., para cuando tengas exámenes o lo que sea pues puedes repasar, mediante el cuaderno.
6. Inv.: Como herramienta de estudio.
7. A27: Sí.
8. A21: Yo lo veo como una especie de organización de lo que has hecho. Yo no lo veo tan productivo para repasar, porque para repasar, yo por lo menos, creo que es hacer ejercicios más. Pero sí como para tener, bueno, "esto que hice", "esto cuándo lo hice"...
9. Inv.: De acuerdo. ¿Qué elementos o cualidades debe tener para vosotros un CM para que sea un buen cuaderno? Siempre estamos hablando que para vosotros.
10. A27: Ordenado. Ordenado, sobre todo ordenado. Y que sepas dónde está cada cosa.
11. A21: Yo..., creo que ninguna cualidad así..., por encima de otra. Vamos, en mi caso, mi cuaderno siempre fue un poco anárquico (*risas de su compañera de entrevista*), y entonces yo nunca..., nunca tuve un orden. Vamos, lo dividía por temas y..., vamos, mi cuaderno era mi cuaderno, estaba perfecto, y no tenía..., ninguna cualidad. Era un poco desorden. O sea, el problema..., para qué..., es que no acabo de ver..., no sé, a mí... yo no necesito ninguna cualidad para mi cuaderno. O sea, ni buscaba que estuviera bien presentado, ni que estuviera todo... Simplemente como..., eso, acumulación de trabajo. No buscaba ni pasarlo a limpio ni nada.
12. Inv.: De acuerdo. A lo largo de vuestra carrera como alumnos en Secundaria, ¿habéis siempre elaborado el cuaderno de una manera más o menos uniforme, siempre de la misma manera, o habéis ido cambiado esa manera de trabajar con él, y de acuerdo a qué factores? ¿Qué os ha hecho cambiar esa manera de trabajar, si es que habéis cambiado?

13. A27: El mío no ha cambiado nunca, o sea, siempre he intentado..., tenerle bien *[sic]*. Nunca lo he tenido bien, siempre he acabado teniéndole[130] *superdesordenado*, pero... Y siempre he intentado cambiar..., pero nada, imposible.
14. A21: Durante la ESO mi cuaderno era un *multicuaderno* de varias asignaturas (*risas de su compañera de entrevista*). Entonces, en el de matemáticas[131], probablemente, hacía ejercicios, los deberes de vez en cuando los hacía. Pero nunca tuve un CM. Hasta 1º de Bachillerato, que ya vi que la cosa se complicaba y entonces tenía que tener un poco más de orden. Y ya en segundo[132] también, claro.
15. Inv.: Y..., la manera en la que elaboráis o trabajáis con el cuaderno es uniforme o depende un poco de los diferentes temas de la asignatura, o de las características del profesor... ¿Eso os hace cambiar mucho vuestra manera de elaborar el CM, o no?
16. A27: No, a mí no. Yo siempre le[133] hago..., de la misma forma. O sea..., no. No, vamos, yo no veo la diferencia.
17. A21: Sí, porque como..., si el profesor exige tener un cuaderno y presentarlo para nota...
18. A27: ¡Ya! (*risas de la alumna*)
19. A21: *(continúa con la intervención anterior)* ...yo necesitaba, o sea, yo me tenía ahí que aplicar mucho. Y yo creo que sí influye. Por ejemplo, había temas en matemáticas, sobre todo, que se me daban mal..., o sea, que se me complicaban más, sobre todo en primero, que era el tema de los vectores. Yo me acuerdo que ese apartado le tenía mucho más ordenado, mucho más colocado que otros temas que se me daban mucho mejor.
20. Inv.: ¿En tu caso, A27, no hay esa diferenciación?
21. A27: No... O sea, como él ha dicho, pues si un profesor te pide que debes tener el cuaderno *superordenado*[134] y tal, pues sí que lo intentas. Pero..., pero, si no, no..., vamos, el mío no ha variado (*risas de la alumna*).
22. Inv.: De acuerdo. Los cambios, digamos, según me comentas, A21, los cambios debidos al docente, ¿irían únicamente encaminados a que te lo va a pedir después? ¿O también a su manera de trabajar en la clase?
23. A21: Hombre, depende. Si el profesor está haciendo continuamente ejercicios en clase y les corregimos, yo creo que ahí, por lo menos a mí me pasaba, el cuaderno tiende a estar un poco menos ordenado. Porque el profesor va dando saltos, vamos a poner un ejercicio de repaso... En cambio, si

---

[130] Respetamos la transcripción de la intervención de la alumna, ésta comete dos leísmos.
[131] Se refiere a la parte correspondiente a la asignatura de matemáticas en ese *multicuaderno*.
[132] Se refiere a 2º de Bachillerato.
[133] Vuelve a aparecer un leísmo.
[134] Aunque estamos en el inicio de la entrevista, esta alumna realiza alusiones, casi exclusivamente, al orden y la organización del cuaderno.

solo manda deberes, y explica como teoría, tú puedes tener un apartado de teoría y otro de ejercicios, y tú lo puedes ordenar más porque lo haces en casa. Pero, vamos, no creo que influya de una forma como la que influye si te pide el cuaderno.

24. Inv.: De acuerdo. O sea, que habéis tenido profesores en Secundaria que os han pedido el cuaderno.

25. A27: Sí.

26. A21: Sí.

27. Inv.: ¿De qué forma os los pedía? ¿Qué hacía con ellos? ¿Cómo los revisaba? ¿Qué miraba?

28. A21: Que recuerde…

29. A27: Yo…, no sé lo que miraba, pero…, no sé, cada…, cada trimestre, creo yo, te lo miraba así…, una pasada y te ponía visto y…, vamos, no recuerdo que te pusiera…

30. A21: No sé qué año, te acuerdas (*se dirige a A27*) que nos…, cuando acababas el cuaderno, y empezabas otro, tenías que entregar el que habías acabado…

31. A27: ¡Ah, sí! Sí.

32. A21: …, y entonces te lo corregía, te lo miraba. Y…, vamos, matizaba nota, no era una nota…

33. A27: Sí, valía algo.

34. Inv.: Os lo revisaba, os lo miraba, ¿y os decía algo sobre él?

35. A21: Simplemente, yo creo que calificaba más el orden, el que estén las fechas puestas… Yo me acuerdo de una profesora de matemáticas que ponía mucho interés en que cada día, cuando empezáramos en el cuaderno, teníamos que poner la fecha.

36. A27: Sí.

37. A21: Y entonces eso lo valoraba mucho, y el orden.

38. A27: O sea, no te mira…, no te mira lo que son los ejercicios.

39. A21: Y, ¿te acuerdas? A mí por lo menos me decía mucho que tuviera mucho cuidado a la hora de los signos, que estuvieran bien colocados (*su compañera de entrevista asiente y hace un gesto de afirmación*). O sea que estoy escribiendo y que el igual esté en el medio de la fracción (*hace el gesto de la fracción y el igual mientras habla, enfatizando su comentario*), que a veces es raro… Entonces, que en eso tuviera cuidado. Yo creo que, sobre lo demás, a mí por lo menos no me han dicho nada.

40. Inv.: De acuerdo. Vamos a pasar a un bloque centrado en elementos teóricos, en apuntes teóricos. Os voy a plantear tres escenarios distintos que se pueden dar en una clase, que se diferencian en la manera en la que el

profesor expone la teoría, y los medios que utiliza, y me tenéis que comentar qué es lo que registraríais en el cuaderno a lo largo de esa exposición, si es que registraríais algo, y qué os lleva a vosotros según qué cosas y qué no registraríais.

41. Inv.: El primer escenario es el siguiente: tenéis el libro de texto de la asignatura y el profesor va siguiendo el libro, básicamente sigue el libro de texto de la asignatura a la hora de exponer la teoría. Vosotros, en esa situación, ¿tomáis nota de algo en el cuaderno? ¿Lo utilizáis para algo a lo largo de la exposición teórica?

42. A27: No.

43. A21: En el cuaderno no. Como mucho, en el libro algo a lápiz, y poco.

44. A27: En el libro…, si dice algo nuevo, pues sí. Pero en el cuaderno no.

45. Inv.: O sea, que si hay algún añadido, o algo a mayores…

46. A21: A no ser que diga explícitamente: “Bueno, esto apuntarlo”.

47. A27: Sí.

48. A21: Que si te cabe en el margen[135], lo procuras poner en el margen. Si no te queda más remedio, usas el cuaderno. Pero, en principio, si está siguiendo el libro, no coges el cuaderno.

49. Inv.: De acuerdo. La segunda situación es que el profesor ha elaborado unos apuntes de un determinado tema, y os los proporciona fotocopiados. La teoría del tema la va siguiendo de esos apuntes. La pregunta es la misma, sobre el cuaderno.

50. A21: Yo creo que…, ahí apuntaría incluso menos. Porque si no, el profesor…, sé que, en el fondo, lo que me va preguntar es lo que está ahí puesto. No un añadido que le gusta al profesor de repente…, poner…, no sé. O sea, los libros normalmente no se adaptan siempre a lo que quiere poner el profesor, y si nos da los apuntes ellos…, claramente es justo lo que quiere que pongamos. Entonces yo no añadiría nada. A no ser que diga: “Añadir esto”.

51. A27: Sí, sí, lo mismo.

52. Inv.: La tercera situación es que el profesor, ahora, realiza una exposición relativamente personal de un modo oral combinándolo con la pizarra, pero no es algo que tengáis vosotros: que esté en el libro de texto explícitamente ni que tengáis fotocopiado en apuntes. ¿Cuál es vuestra actitud con respecto al CM? ¿Ahí sí que tomaríais nota de elementos en el cuaderno?

53. A27: Sí, ahí sí, porque te da más seguridad apuntarlo, ¿no? Porque no lo tienes en ningún sitio, lo está diciendo oralmente, pues…, pues dices, pues esto lo apunto y ya lo recuerdo, ya se queda ahí.

54. A21: Yo…, el año pasado copiaba tanto la teoría como el ejemplo que venía posterior, normalmente. Y ahora lo que hago, normalmente, es diferenciar el

[135] Se refiere a los márgenes del libro de texto.

tipo de teoría que está aplicando y copiar sólo el ejemplo. Porque la teoría del principio…, no me servía. O sea, la copiaba, luego no me enteraba muy bien del ejemplo… Y casi prefería enterarme del ejemplo, porque es realmente lo que se basan… A mi entender las matemáticas, sobre todo, es práctica. Hay muy poca teoría. O sea, más que demostraciones, que es aprendérselas de memoria, sí. Pero…, creo que es más práctica. Y entonces, esa pequeña teoría que nos daba no me acababa de convencer[136]. Igual que en los ejemplos que se daban con letras[137], que luego había que aplicar con números, yo también prefería copiar los de letras, y el ejemplo numérico no. Pero, al igual, cuando era una demostración, una explicación en plan: "Pues esto es el módulo de vectores, hay que coger un vector…" Y eso la gente lo copiaba. Yo simplemente me quedaba con el ejemplo numérico, o de letras, en este caso.

55. Inv.: O sea, que das preferencia, digamos, a los ejemplos.

56. A21: Sí.

57. Inv.: A los ejemplos prácticos, si ves que luego te van a servir…

58. A21: Y entre ambos ejemplos, prefiero el genérico. En el que no se aplican números[138].

59. Inv.: De acuerdo. ¿Y definiciones, resultados teóricos?

60. A21: Hombre, a no ser que… Sí, pero, normalmente, esos no salen en la explicación. Estamos haciendo un ejercicio tal que, justamente, ese ejercicio requiere una explicación teórica. Entonces ahí nos dice el profesor: "Bueno, añadir esto"… En el ejercicio. Y los propios…, los propios teoremas…, pues hombre, si es un teorema nuevo, pues sí se copia textualmente. Porque es teoría, o sea, no puedes inventarte un teorema, ni puedes aplicarlo más que citándolo[139]. Así que, en ese caso, sí.

61. Inv.: De acuerdo. Os voy a plantear ahora otro tipo de elementos que podrían aparecer en una clase de teoría, que serían observaciones o comentarios de interés que puede realizar el profesor a lo largo de la explicación de elementos teóricos. Digamos que no sería tanto una definición, o un ejemplo, sino un comentario de interés, una observación de interés. ¿Lo soléis tomar en el CM? ¿O no lo soléis tomar?

62. A27: Si yo veo que sirve para lo que estamos dando, y que con ello me puedo acordar mejor, o lo puedo aprender mejor mediante lo que ha dicho, entonces sí que lo apunto. Pero si no, no.

63. A21: (*En un tono de voz muy bajo*) Yo creo que no. Casi en ningún caso.

64. Inv.: No lo tomas. No crees necesario tomarlo.

---

[136] ¿Puede referirse a definiciones, introducciones de conceptos…?
[137] Se refiere a los ejemplos generalizados, con datos genéricos en lugar de concretos.
[138] Se refiere a los ejemplos con elementos genéricos (por ejemplo, representantes genéricos de un conjunto) en lugar de con elementos concretos.
[139] El alumno tiene una concepción muy práctica de la teoría: parece dar importancia a registrar aquellas definiciones, explicaciones o teoremas que se van a aplicar en los ejemplos o ejercicios que se hacen.

65. A21: No, yo lo veo como ayuda… O sea, siempre que…, las típicas reglas. Pues ahora que recuerdo, justamente la de las integrales, la de “un día vi un unicornio…”[140] (*risas de su compañera de entrevista*). Pues, este tipo de cosas, pues, normalmente son absurdas, normalmente son bobadas. Que te ayudan, pero no…, vamos, yo no las apuntaría en el cuaderno. Porque…, en primera parte no lo puedes poner en un examen y, segundo, porque si tienes que recordarlo, lo tienes que recordar mucho más fácil que lo otro. Si te tienes que aprender la regla para recordar la propia regla, pues es un poco absurdo.

66. Inv.: De acuerdo. Pasamos a hablar de ejercicios y actividades. Os voy a leer dos frases, y me tenéis que decir con cuál de las dos estáis más de acuerdo, o simpatizáis más, y por qué. La primera frase es la siguiente: “El CM es un lugar donde, en gran medida, se registran ejercicios”. Y la segunda frase es: “El CM es un lugar donde, en gran medida, se hacen ejercicios”. ¿Con cuál de las dos frases estáis más de acuerdo y por qué?

67. A27: Yo con la primera estoy más de acuerdo. Porque, a lo mejor en clase, no estás tan atento como en casa, que te pones a hacer los ejercicios. En clase únicamente les copias, no les razonas[141]. Y a lo mejor llegas a casa y dices: “Bueno, pues voy a hacer este ejercicio”. Y ya lo razonas, realmente[142].

68. Inv.: ¿Tú diferenciarías un poco tu comportamiento en clase y en casa con respecto a esta frase?

69. A27: Sí. Sí, sí.

70. Inv.: O sea que, en clase, crees que el CM tiene, sobre todo, una componente de registro de lo que se hace.

71. A27: Sí.

72. Inv.: Y en casa…

73. A27: Más de hacer ejercicios.

74. Inv.: De acuerdo. ¿Tú, A21?

75. A21: Yo es que no veo una diferenciación, porque yo creo que es una unión de ambas. El cuaderno es un lugar donde se hacen ejercicios y…, en el fondo, el cuaderno, si no lo harías en hojas en sucio y lo tirarías, es para registrar esos ejercicios. Lo cual es una unión de ambas. O sea que no…, no sé. Pero vamos, si yo quisiera sólo hacer ejercicios, los haría en folios, y esos folios, para no cargar con ellos, los dejarías en casa o les…, tirarías. Si solo fuese para registrar, lo vería como…, casi una enciclopedia (*risas de A27*).

76. Inv.: Y si tuvieras que quedarte con una, dar más peso a una de las dos.

---

[140] El alumno parece referirse a una de las reglas mnemotécnicas que suelen utilizarse para memorizar la regla de integración por partes. La intervención del alumno muestra que éste no cree útiles este tipo de reglas.

[141] La alumna vuelve aquí a cometer un leísmo, hasta en dos ocasiones en esta intervención.

[142] Por la respuesta de la alumna A27, parecería que esa realización de ejercicios en casa fuera siempre posterior a haber registrado o copiado la resolución del mismo en el aula, no anteriormente.

77. A21: Con la segunda, daría más peso a la segunda.

78. Inv.: Consideras que es más importante el hecho de hacer…

79. A21: Que el de volver a verlos, sí.

80. Inv.: De acuerdo. Esta pregunta va dirigida a A21. He visto que…, bueno, me ha dado a mí la sensación, me confirmas tú si es que sí o si es que no, que en algunas ocasiones, algunos de los ejercicios que se hacían en la clase o algunos de los ejemplos que hacía la profesora ilustrando las técnicas, tú intentabas resolverlos de manera simultánea a la realización de la profesora[143].

81. A21: Sí, muchas veces.

82. Inv.: Lo he visto, sobre todo, en ejemplos de resolución de límites. Me ha dado a mí la sensación de que, aunque la profesora estuviera explicando el ejemplo, tú intentabas resolverlo un poco por tu cuenta.

83. A21: Sí.

84. Inv.: ¿Es un comportamiento que sueles hacer habitualmente? ¿Por qué sueles actuar así?

85. A21: Lo suelo hacer muy habitualmente, y lo suelo hacer en muchas asignaturas, no sólo en matemáticas. Y…, trato de…, bueno, más o menos cómo es la idea, intentar sacar cómo continuaría la explicación. Muchas veces lleva a que acabe haciendo borratajos porque realmente no tengo ni idea. Otras veces me sale. Y otras veces pues…, más o menos voy a la par. Y no sólo me pasa en eso, también me pasa en ejercicios que está explicando pues…, tengo el pensamiento de decir: “Bueno, ¿esto no se podría hacer de otra forma?” Y entonces, no sé si cogiste justamente esa parte del cuaderno, pero había anotaciones a lápiz, que empiezo a hacer operaciones absurdas. Que a veces llegan al mismo resultado, que tardas mucho más, pero bueno. Y el motivo por el que lo hago…, motivos, realmente pues, a mí…, vamos, yo tengo mucha facilidad para las matemáticas[144]. Con lo cual, no tengo que prestar un 100% de atención a la explicación, a no ser que no me esté enterado de nada, que entonces ya me pongo. Pero…, el hecho de que pueda intentar hacerlo por otro modo…, y, vamos, a mí me parece más fácil: bueno, yo he llegado aquí, ¿cómo he llegado? Porque yo en el fondo ahí…, casi no tengo ayudas. Bueno, tengo que llegar a este objetivo porque me lo ha dicho la Docente 3. Me lo está explicando e intento llegar. Entonces, me resulta mucho más fácil recordar cómo he llegado que recordar la fórmula final[145]. Por lo menos a mí. Y, sobre todo también, pues…, es una forma de estar un poco más entretenido en clase.

---

[143] Le pregunto directamente al alumno para que nos confirme este comportamiento que el EI había inferido al analizar su cuaderno de matemáticas.

[144] Como muestra esta intervención, el alumno tiene un alto autoconcepto matemático.

[145] El alumno A21 parece valorar muy positivamente la comprensión de los procesos seguidos, y la ayuda que le supone esa comprensión, por ejemplo, para aprender las fórmulas o resultados.

86. Inv.: De acuerdo, curioso. Cuando intentáis hacer actividades de matemáticas, bien que os hayan propuesto o bien que las hacéis porque consideráis oportuno. ¿Utilizáis siempre el cuaderno para hacerlas? ¿O también las podéis hacer en otros lugares?

87. A27: Yo lo hago siempre aparte, nunca lo hago en el cuaderno. Porque si… No me gusta tener cosas mal en el cuaderno y luego poder confundirme cuando lo estudie[146]. Entonces siempre lo hago aparte.

88. Inv.: ¿Siempre?

89. A27: Sí, siempre.

90. Inv.: ¿Y qué lugares utilizas?

91. A27: Folios. Folios u otros cuadernos en sucio o…, cosas así.

92. Inv.: Y luego, con esos folios, ¿tú qué haces?

93. A27: Eso…, pues les[147] guardo, y…, y luego lo estudio si lo tengo bien. Y si lo tengo mal pues…, pues lo tacho o lo corrijo, también.

94. Inv.: En tu cuaderno sí que había ejercicios[148]. Esos ejercicios que aparecen en tu CM, ¿serían transcripciones de lo realizado, digamos, durante la corrección de la profesora en la pizarra? ¿O luego tú, en algunas ocasiones, esos intentos de resolución que haces en folios los pasas al cuaderno?

95. A27: Sí…, sí, lo segundo. O sea, si, por ejemplo, ha mandado un ejercicio, y yo lo hago en un folio y digo…, y bueno, lo corregimos y tal. Lo corrijo, lo tengo ya bien, pues lo paso al cuaderno para…, por si se me pierde esa hoja o para tenerlo todo ahí, en el cuaderno.

96. Inv.: De acuerdo. ¿Tú, A21?

97. A21: Yo…, lo que…, o sea, yo, todo lo que se ha dado en clase, todo lo que manda el profesor, lo hago en el cuaderno. Y de primeras[149]. Si veo que algo es muy difícil, como mucho lo hago a lápiz y luego lo paso a boli. Y si lo tengo mal, pues nada, tacho y lo hago a continuación. O corrijo si es poco, un número[150]. Y en cambio lo que sí hago aparte son todos los ejercicios que haría por mi cuenta para repasar o para preparar un examen. Los suelo hacer en folios, sin realizar todas las operaciones, más como… ¿esto cómo lo haría? Tal, tal y tal. Y esos folios luego pues…, al final de la tarde acaban en la papelera (*risas de ambos*). No tiene ningún…, no se van a archivar en ningún sitio.

---

[146] Este comportamiento está relacionado con su visión del cuaderno como lugar donde registrar ejercicios, que anteriormente ha comentado esta alumna.
[147] Leísmo.
[148] Interpelo a la alumna con este hecho que hemos detectado en el análisis de su cuaderno, para completar su respuesta y la explicación de su comportamiento.
[149] El alumno A21 enfatiza un contraste en su comportamiento con respecto a su compañera de entrevista.
[150] Se refiere a una equivocación en una operación o similar.

98. Inv.: De acuerdo. Cuando transcribís un ejercicio o cuando hacéis un ejercicio en vuestro CM, os voy a preguntar sobre una serie de elementos para ver si los registráis o no. El enunciado, ¿consideráis importante que aparezca el enunciado de un ejercicio? ¿O no? ¿O sólo en ocasiones?

99. A27: Sí, sí que lo considero importante. Pero, estás diciendo no para el cuaderno, para los apuntes. ¿O para el cuaderno?

100. Inv.: Hablo del enunciado en el cuaderno.

101. A27: Es que yo en el cuaderno nunca lo pongo. En el cuaderno no. Pero cuando repaso, en hojas, en folios, sí que los pongo, sí.

102. Inv.: ¿Incluso si es del libro?

103. A27: Sí.

104. A21: Yo no. A no ser que le dicte, que no tenga una fuente que pueda volver a mirar. Y la mayoría de las veces es que tampoco… Sobre todo en matemáticas, no. Porque con poner…, o sea, los datos, por así decirlo, saber lo que me están pidiendo[151], más o menos a la hora de repasar… Bueno, ¿qué es lo último que calculé? Eso es lo que me piden. ¿Cuáles son los datos? Lo que tengo al principio. Con lo cual tampoco…, no suelo ver importante que esté el enunciado.

105. Inv.: De acuerdo. Pongámonos ahora en la situación de que, al intentar resolver un ejercicio, habéis encontrado una duda, un elemento que no comprendéis, ¿vale? Y os habéis atascado. ¿Hacéis alguna marca en el cuaderno indicando esa circunstancia? ¿O no? ¿Consideráis que puede ser interesante hacerlo?

106. A27: Sí. Yo pongo un triangulito en…, en lápiz. Para asegurarme…, para ver, más que nada.

107. Inv.: ¿Y luego cómo actúas?

108. A27: Pues luego, si me he quedado ahí, pues se lo pregunto al profesor. Le digo: “¿Esto cómo es?” Y, bueno, ya si me resuelve la duda, pues quito el triangulito o lo que sea, y ya pongo lo que…, lo que tengo que poner.

109. A21: Y yo, pues… Si por el motivo que sea me atasco, no soy capaz de acabar el ejercicio… Yo suelo ir a clase, corregimos, si llego a entenderlo, bien; si no, lo pregunto. Y si aún así el ejercicio veo que me puede seguir dando problemas, entonces ya sí que podría hacer una marca. No tal vez una marca en el cuaderno, pero sí, a la hora de repasar… Sí, una marca, sí podría hacer una marca. Luego a la hora de repasar pues, repasando el cuaderno muy por encima, digo: “Este tipo de ejercicio no me sale”. Entonces ya me pongo a hacer de ese tipo de ejercicios.

110. Inv.: De acuerdo. Cuando la profesora está corrigiendo una actividad en la pizarra, ¿dónde centráis vuestra atención? Es un ejercicio que vosotros habéis

[151] El alumno A21 parece dar poco valor a la situación que puede plantear una actividad.

intentado, ¿vale? Y la profesora lo está corrigiendo. ¿En qué centráis, principalmente, vuestra atención?

111. A27: Pues… En lo que pone y a lo que he puesto yo en mi cuaderno. O sea, lo corrijo, vamos.

112. Inv.: Lo comparas.

113. A27: Sí, lo comparo.

114. Inv.: Ahí es donde centrarías, principalmente, tu atención.

115. A27: Sí.

116. A21: Yo no. Yo creo que me centro muchísimo más en lo que pone en la pizarra. Y entonces eso lo veo, de una forma u otra, como re…, como verdad[152]. O sea, así es como se hace. Entonces, desde ese punto de vista, ya comparo con lo que he hecho yo. Y si lo que he hecho yo tiene sentido, si no tiene sentido, si es lo mismo… Y entonces ahí es cuando, una vez más, me replanteo: "Bueno, ¿esto no se podría haber hecho de otra forma?". Pero, normalmente, me fijo mucho más en lo que pone en la pizarra, porque…, de cara a que yo también suelo hacer muchos caminos absurdos. Que me dedico…, pues eso, a la hora de hacer un ejercicio, a veces la idea o el planteamiento es muy sencillo y yo lo veo muy abstracto. Entonces…, me centro muchas veces: "Bueno, esto es mucho más claro". Y copio lo claro, porque… O sea, me centro mucho más en la pizarra.

117. Inv.: Te centras más en el proceso seguido.

118. A21: Y, sobre todo, doy mucha más importancia a lo que pone en la pizarra que a lo que pone en mi cuaderno.

119. Inv.: De acuerdo. Si la profesora lo realiza de una manera distinta a como lo habéis intentado vosotros, ¿soléis tomar nota de esa resolución distinta a la vuestra en el CM, o no?

120. A27: Si a mí me da el mismo resultado, no. No copio lo que ha puesto la profesora. En el caso de tenerlo mal, claro. Pero, si me da el mismo resultado, no.

121. Inv.: En ningún caso.

122. A27: En ningún caso. A no ser que diga: "Copiad esto, porque es un proceso que tenéis que hacer" O…, yo que sé. Pero no, si no, no.

123. A21: Yo…, no suelo copiarlo entero, sino más bien los pasos. O sea, qué habría que hacer. Por ejemplo, estamos ahora justo con vectores y con rectas: "Hallar la ecuación de una recta que sea perpendicular a tal", luego "en esa recta hallar un punto". O sea, no a calcularlo numéricamente, pero sí saber cómo se haría. Sobre todo si, más o menos, me da lo mismo. Si es un fallo numérico, corrijo los números y no suelo volver a copiarlo.

[152] El alumno se refiere a lo escrito en la pizarra, al menos en la corrección de actividades, como una verdad absoluta y como un modelo a seguir.

124. Inv.: Y ante ejercicios que vosotros habéis intentado realizar, pero luego, posteriormente, no se han corregido en la clase, la profesora no los ha corregido. ¿Seguís algún procedimiento para confirmar que los habéis realizado de manera correcta? ¿O no?

125. A27: No sé… ¿Si no los ha corregido? Pues… (*ambos alumnos se callan y no parecen saber qué responder*)

126. Inv.: Sí, digamos que la profesora, pongamos por caso, ha propuesto una serie de ejercicios, vosotros los habéis intentado, y luego resulta que no ha corregido esos ejercicios. Porque no le ha dado tiempo, porque no lo ha considerado conveniente… Por lo que sea.

127. A27: Pues, a lo mejor, si no lo ha corregido, es que no es importante[153]. Con lo cual pues…, pasaría un poco de esos ejercicios. No les haría mucho caso.

128. A21: Yo lo que vería… Hombre, te encuentras con dos posibilidades: un fallo numérico, que te hayas confundido y no te dé el mismo resultado; o un fallo que realmente no sepas cómo se hace el ejercicio, o por dónde cogerlo. Si es el primero… Respecto al primero[154], si no sé cómo hacerlo, preguntaría[155]: "Oye, ¿cómo se haría este ejercicio?" Y si sé hacerlos…, o sea, les hago[156], luego no se corrigen, y yo sé que el método es el correcto, a mí, realmente, que los números sean justo esos, que sean otros, o que tenga resultado y a mí me dé que no tenga resultado, no me importa mucho. En un caso muy específico, creo. Yo le doy mucha importancia a…, bueno, sé hacer este ejercicio, le he hecho, el resultado numérico… Claro, como yo, cuando repaso no repaso los ejercicios anteriores, más que cuáles son los difíciles, sino que hago más; pues no le doy mucha importancia[157]. Por eso, tampoco veo la preocupación ante un ejercicio no corregido en el cuaderno que pueda estar mal.

129. Inv.: De acuerdo. Aunque ya ha salido un poquito, pasamos a hablar de cómo trabajáis con el CM fuera del aula y cómo lo utilizáis para estudiar. En cuanto a aspectos teóricos, ¿soléis utilizar el cuaderno para estudiar aspectos teóricos de la asignatura de matemáticas? ¿O no?

130. A27: Sí, si tengo algún apunte de teoría en el cuaderno, pues claro. Pero…, bueno, si no, no.

131. Inv.: ¿Y cómo utilizas ahí el CM?

132. A27: Pues yo siempre lo que hago es pasar todo lo que hecho en el cuaderno a folios. O sea, lo teórico, todo lo paso a folios. Y lo práctico pues…, copio los

[153] Al igual que los alumnos A24 y A28, esta alumna parece relacionar que el docente no corrija actividades planteadas con que esas actividades son menos importantes para dicho profesor.
[154] El alumno hace referencia, realmente, a la segunda de las posibilidades que ha planteado, no a la primera.
[155] Suponemos que se lo preguntaría al docente, aunque no lo explicita.
[156] Otro leísmo del alumno. Estos dos alumnos cometen bastantes veces esta incorrección lingüística durante el desarrollo de la entrevista.
[157] Al no existir una concepción del cuaderno como instrumento de revisión, el alumno da una menor importancia al hecho de que puedan existir ejercicios no bien resueltos en su cuaderno.

enunciados, lo intento hacer, y si no me sale pues lo miro en el cuaderno a ver cómo se ha hecho.

133. A21: Yo, normalmente, a no ser que no venga en el libro de texto, uso el libro. Y cuando ya estamos en los finales, para repasar y para tenerlo más claro y, sobre todo, para no tener que cargar con el libro, porque en matemáticas hay poca teoría y muchos ejercicios; lo suelo copiar en unas hojas aparte, en el cuaderno, pero sin tener relación con el cuaderno[158].

134. Inv.: De acuerdo. O sea que los dos, digamos, hacéis un repositorio de teoría.

135. A27: Sí.

136. Inv.: Aunque A27 lo pueda sacar, a lo mejor, más del cuaderno y A21 más del libro de texto. Y de ahí estudiáis la teoría. Y para los ejercicios, me acabas de comentar A27, que sueles intentar repetir los ejercicios que tienes en tu cuaderno, ¿no?

137. A27: Sí.

138. Inv.: Y tú, A21, ya me has comentado un poco antes que, lo que intentas, es hacer…

139. A21: Otros ejercicios.

140. Inv.: Más ejercicios. Distintos de los que tienes en el cuaderno.

141. A21: Muchas veces cojo el libro de texto… Y bueno, de este tipo de ejercicio hago este, hago este y este[159]… A no ser que sea un ejercicio muy específico, que no sepa encontrar uno parecido, que hago justo el del cuaderno. Pero suelo… O sea, no me suele preocupar, como he dicho antes, no me suele preocupar justo el resultado numérico, con lo cual no necesito comparar un resultado. Solo comparo…, bueno, este ejercicio, ¿cómo se haría? Tal, tal, tal. ¿Cómo se ha hecho el resto? Tal, tal, tal. Entonces, si cuadra, el resultado numérico, realmente, no me intranquiliza[160].

142. Inv.: Siempre le das más importancia, digamos, a entender el proceso seguido y el método a seguir que a que luego pueda haber un fallo a la hora de hacer las cuentas…

143. A21: Sí, porque, realmente, en un examen, confundirte en un dato numérico es lo que menos vale. Y, sobre todo, confundirte en un fallo numérico, muchas veces, es un despiste tal que no influye que el ejercicio sea difícil o fácil. Simplemente que a la hora de un menos, o ver un sumar que es un restar, o un multiplicar que se te va… O sea, como que no depende tanto de si te lo sabes o no, simplemente es que has dedicado…, o sea, has estado menos

[158] Es decir, fuera del desarrollo natural del cuaderno.

[159] El alumno sí que parece tener presente una “tipología” de ejercicios dentro de un tema.

[160] El alumno vuelve a hacer emerger este criterio, que ha comentado anteriormente. El entrevistador se lo pone de manifiesto y en estas intervenciones, el alumno vuelve a abundar sobre ello.

consciente de hacerlo con cuidado. Pienso yo. Que puede ser un fallo tal vez algo más humano y menos de saberlo o no saberlo.

144. Inv.: De acuerdo. Pasamos a un último bloque ya, unas últimas preguntas. Sobre aspectos de organización y de presentación. ¿Qué aspectos de este tipo, de organización y de presentación, creéis que es necesario o imprescindible seguir para aumentar la eficacia del CM como elemento de estudio para vosotros?

145. A27: Sobre todo, que esté claro, o sea, que esté limpio y que sepas…, este es un ejercicio, este es otro… Que esté todo bien estructurado, que era lo que me faltaba a mí en todo (*risas*), pero…, era eso, el orden.

146. Inv.: La estructuración y el orden…, es a lo que tú le das más importancia.

147. A27: Sí.

148. A21: Yo lo que más…, el cuaderno, lo que más voy a buscar en el cuaderno es saber, más o menos, el tipo de ejercicios que hemos hecho[161]. O sea, a mí lo que realmente busco en el cuaderno y, sobre todo, verlo fácil, es…, bueno, este tipo de problema que hemos hecho, ¿de qué tipo es? ¿De qué tema trata? Aunque luego lo divida por temas, saber…, bueno, pues dentro de todas las funciones, o dentro de todos los límites, estos límites se resuelven de un tipo, estos de otro… Entonces, saber eso, tenerlo claro, yo creo que es lo más importante. Algo que muchas veces no lo he conseguido, ha sido un poco…, anárquico[162], pero bueno. Es lo que más premiaría en un cuaderno.

149. Inv.: Sí, porque he visto (*haciendo referencia a A21*) que te organizabas con hojas sueltas.

150. A21: Sí, sí.

151. Inv.: Que tenías como folios sueltos, y no he visto marcas de orden…

152. A21: Numéricas.

153. Inv.: De orden de esas hojas, numéricas, es decir, que las tuvieras numeradas. Sí que he visto alguna marca al principio, que ponías "Matemáticas" en la hoja y el tema, ponías, el número de tema.

154. A21: Sí.

155. Inv.: Esa es un poco la única organización que he visto. Tú te organizas bien así con el cuaderno, no te supone inconvenientes.

156. A21: Sí, no me supone inconveniente, porque, de cara a repasar un tema, no me importa haberlo visto antes, al principio del tema que al final, el ejercicio. O sea, dentro del tema no me importa ese desorden. Sobre todo, muchas veces, en ese desorden, pues están: todos los ejercicios que hemos hecho de este tipo están al principio, pero lo que pasa es que luego están mezclados algunos,

[161] Vuelve a emerger la "tipología" de actividades dentro de un tema como aspecto clave para el alumno.
[162] Se refiere a tener un cuaderno de matemáticas un poco anárquico, desde la visión del propio alumno.

porque justamente al repasar uno anterior, al corregir… Dentro del tema no me importa que esté desordenado, a no ser que sea muy evolutivo, en plan…, el caso de los vectores: vectores de rectas, de rectas a planos… Entonces es muy evolutivo. En ese caso, pues lo dejas ordenado.

157. Inv.: Ahí sí tienes más cuidado.

158. A21: Sí, para que sea…, o sea, que tenga un sentido. No vas a empezar un ejercicio de planos y luego te expliquen cómo hacer una recta. Pero, normalmente, en ejercicios sobre todo de…, cuando eran inecuaciones, ecuaciones, sistemas, matrices… Ahí ya me daba igual el orden, lo veo menos importante[163].

159. Inv.: De acuerdo. Os voy a hacer una última pregunta. Va sobre el tipo de lenguaje que podéis utilizar en el CM. Vosotros, en el cuaderno, cuál de estos dos tipos de escritura que os voy a decir soléis utilizar más: una escritura formal y precisa, donde lo importante sea que la terminología matemática y los aspectos matemáticos queden bien reflejados; o una escritura más libre y expresiva donde lo que sea más importante de la escritura no es que pueda haber algún fallo, sino que a vosotros os sirva para estudiar, os transmita. ¿Cuál de estos dos tipos de escritura soléis utilizar vosotros habitualmente? ¿Cuál es el predominante en vosotros, y por qué?

160. A27: Yo creo que siempre, o casi siempre, he tenido la segunda porque…, o sea, yo las matemáticas no he sido buena, o sea, yo me tenía que explicar todo y que decir cómo era todo para…, para hacerme una idea. Con lo cual, si ponía…, como la primera, en plan todo matemáticas, todo tipo en plan… Pues no lo entendía. Entonces siempre he puesto la segunda, siempre.

161. A21: Yo…, la primera. Siempre he preferido abreviaturas, signos… Sobre todo también, de cara a tomar los datos. Muchos…, todo lo que pudiera poner… Pues igual que, en mis compañeros más, eso lo veía mucho, que ponían mucho… ¡Es que ahora justo tenemos lo de las rectas y lo tengo muy clavado! Una recta paralela a otra, o intersección. Copiaban “p intersección s”, con la palabra, por ejemplo. Entonces yo ponía, simplemente, pues una cruz de corte, una “T” boca abajo si fuera ángulo recto… Procuraba siempre usar símbolos matemáticos siempre que pudiera, y siempre que los supiera, porque hay cosas que no… Pero vamos, siempre preferiría la primera.

162. Inv.: Y en tu caso A27, a eso que comenta A21, tú tendrías más dificultades para…

163. A27: Sí, yo… Claro, porque luego pasa un tiempo, lo vuelvo a mirar, y digo: “¿Qué es esto?” Con lo cual tengo que explicarlo para…, para enterarme.

164. Inv.: De acuerdo. Pues muchas gracias por haber participado en la entrevista.

165. A21: De nada.

[163] Aparece una relación entre el cuidado en la organización del cuaderno por parte del alumno y las características del tema desarrollado.

166. A27: De nada.

ANEXO E.7

Este anexo contiene la transcripción completa de la entrevista desarrollada por el doctorando (que se marcará en la transcripción como “Inv.”) a las alumnas A31 y A36, correspondientes al aula de Ciencias Sociales del Docente 3 durante el periodo analizado. Las anotaciones en cursiva entre paréntesis y algunas notas al pie tienen por objetivo completar la transcripción del discurso oral. En otras notas al pie se introducen reflexiones del EI derivadas de una lectura de las transcripciones y de las ideas emergidas en relación con un análisis global de la entrevista.

Datos identificativos básicos de la entrevista

- Pareja de alumnos entrevistada: Alumnas A31 y A36.
- Aula al que pertenecieron durante el periodo analizado: Aula del Docente 3, 1º Bachillerato Ciencias Sociales, Centro privado-concertado.
- Día y hora de realización de la entrevista: Martes 14/05/2013, 11:15 – 11:45 h.

Transcripción de la entrevista

1. Inv.: Hoy es martes, 14 de mayo, y estamos en el Colegio privado-concertado con A31 y con A36. Vamos a hacer la entrevista sobre elaboración y uso del cuaderno de matemáticas (*de ahora en adelante, CM*). La primera pregunta que quiero haceros es si pensáis que es necesario tener un CM.
2. A31: ¡Por supuesto! Es imprescindible.
3. A36: Bastante.
4. A31: Yo creo que las matemáticas se basan en eso. Porque, al fin y al cabo, como se aprenden las matemáticas es haciendo ejercicios, y si no pues... Y yo lo preferiría antes que hojas[164], incluso, porque está todo como más recogido, más..., más organizado, vamos.
5. A36: Pienso igual. Yo, de hecho, siempre utilizo hojas y, en matemáticas, utilizo siempre cuaderno[165] porque me parece que es más organizado, y ves perfectamente la evolución, los problemas o la forma de organizarse.
6. Inv.: O sea que pensáis que es necesario, y consideráis que es útil desde el punto de vista de...[166]
7. A36: Estudiar. Sí, organización, estudiar, a la hora de practicar los ejercicios, a la hora de mirar... Si lo tengo organizado en temas, puedes mirar para atrás, para adelante. Te organizas mejor en un cuaderno que en unas hojas[167].
8. Inv.: De acuerdo. ¿Y qué elementos o cualidades debe tener un CM para vosotras para que sea un cuaderno “bueno”, para que sea un cuaderno útil?
9. A36: Limpieza.
10. A31: Orden, limpieza.
11. A36: Nosotras, que somos chicas, colores.
12. A31: (*Risas*) Colores, sí.
13. A36: Para mí son imprescindibles (*la alumna A31 también asiente con la cabeza*). A mí me gusta poner los temas en colores...
14. A31: Las cosas subrayadas...
15. A36: Las soluciones o..., vamos, yo sí que suelo utilizar bastantes colores.
16. A31: Utilizar, para corregir, el rojo siempre.
17. A36: Sí.
18. A31: Porque hay gente que..., bueno, a lo mejor, pues yo que sé... No sé cómo decirte. Y eso, ¿no?[168]

[164] La alumna se refiere aquí a la posibilidad de tener hojas sueltas, o folios sueltos.
[165] Se refiere a un cuaderno de anillas.
[166] Buscando que las dos alumnas completaran la frase con sus respuestas.
[167] Ambas alumnas parecen estar contraponiendo un cuaderno o bloc de “anillas” con unas hojas sueltas. Según hemos conceptualizado “cuaderno” en un sentido amplio en esta investigación, nosotros no hemos realizado esa diferenciación.

19. A36: Sí. Limpieza, orden, color. A mí me gusta que esté bien estructurado. Aparte, yo soy bastante maniática (*risas*). Así que tiene que estar todo muy cuadriculado para verlo bien.

20. Inv.: ¿Sólo ese tipo de aspectos: aspectos de organización, de estructura, de limpieza...? (*Me callo tras hacer la pregunta, pero ninguna de las alumnas contesta, y se quedan en silencio*). Esos son los principales para vosotras.

21. A31: Sí.

22. A36: Yo creo que sí.

23. Inv.: De acuerdo. A lo largo de vuestro historial como alumnas en Secundaria, ¿siempre habéis elaborado el cuaderno más o menos de una manera uniforme, siempre de la misma manera, o habéis hecho cambios a lo largo de los cursos?

24. A31: Yo pienso que sí. Hay gente que lo estructura... Pues, yo que sé, en plan: “funciones”, “programación lineal”... Van por apartados. Pero yo lo que hago es, conforme vamos dando los temas, los voy así poniendo: “uno”, “dos”, tal, tal, tal... Y no he cambiado nunca la metodología, vamos.

25. A36: Yo también soy... O sea, desde siempre he utilizado lo mismo. Quizá los teoremas encuadrarlos... Todo igual, nunca... No he hecho ningún cambio, suelo mantenerme igual que cuando empecé con matemáticas en Secundaria[169].

26. Inv.: De acuerdo. ¿No hay, digamos, factores que os hagan hacer cambios en vuestra manera de elaborar el cuaderno?

27. A31: A lo mejor, quizá algún profesor. Porque como hemos ido cambiando de profesores, pues te aconsejan: “En las cosas importantes pon un triangulito” ¿Sabes? En plan..., una señal así de..., de alerta. Pero que, en general, todos te dicen lo mismo. Y, lo que hemos dicho antes, la limpieza y orden lo primero de todo.

28. Inv.: ¿Y en cuanto al tema dentro de la asignatura? Porque en matemáticas hay distintos temas: de álgebra, de estadística, de geometría, de análisis matemático... ¿Elaboráis el cuaderno de la misma manera independientemente de los temas? ¿O podéis hacer algunos cambios en según qué temas, porque tengan alguna característica especial...?

29. A36: Quizá a lo mejor... Pues, yo que sé. Hay temas que a lo mejor les metes más color. Por ejemplo, ahora me baso en el color, por ejemplo, temas de programación lineal. Pues evidentemente el resultado de la gráfica lo vas a poner en un color, o áreas, cosas de esas. Pero yo creo que, por lo menos para mí, la estructura suele ser la misma, porque la base es lo mismo. Quizá..., pues eso, cambias un tono, un color... Pero la base sigue siendo la misma

[168] La alumna A31 parece querer aportar alguna idea que finalmente no verbaliza, resultando un comentario vacío de contenido.
[169] De las intervenciones de las alumnas, pareciera que siguieran centrando su atención únicamente en aspectos propios de la organización y la presentación.

(*Durante toda esta intervención, la alumna A31 también asentía de forma continuada con la cabeza ante el comentario de su compañera*).

30. Inv.: (*Pregunta dirigida a A31*) ¿Tú igual?

31. A31: Sí (*risas de la alumna*).

32. Inv.: O sea, que en temas donde, quizá, hay más gráficas, tienen más importancia los dibujos, porque son la propia solución...

33. A31: Le das colorido, porque así lo ves mejor.

34. A36: Sí.

35. Inv.: Sí que le dais más importancia a eso. De acuerdo. En cuanto al profesor, ya me has comentado un poquito antes, A31, que sí que podía influir que os diera algún consejo o algo así. ¿Os influyen mucho las diferentes maneras de trabajar que tenga el profesor, de exponer la teoría, de trabajar con los ejercicios? ¿Os influye mucho en luego cómo lo reflejáis en el CM, cómo lo elaboráis?

36. A31: Sí, porque... Hay profesores que a lo mejor les gusta... Pues te dicen, por ejemplo, cuando empiezas en Secundaria, pues te dicen: “Obligatorio copiar los enunciados”, por ejemplo. Porque eso ya depende también de la persona, de copiarlos o de poner “ejercicio tal, página tal”. Que parece una bobada, pero luego no lo es, porque a la hora de estudiar pues..., cambia de tener el enunciado copiado a tener que andar buscándolo en el libro de texto y tal[170]. Pues hay profesores que eso sí que lo recalcan, o dicen “cópialo”, o “no hace falta”. Y, básicamente, es así lo único que creo que...

37. A36: Sí, yo... A la hora de exponer la materia pues... Quizá hay algunos[171] que hay partes, por ejemplo, que empiezan directamente explicando un ejercicio, o que primero te pone la...

38. A31: El orden, vamos.

39. Inv.: La teoría.

40. A36: Sí, más o menos el orden, la teoría. Es lo único que puede cambiar.

41. A31: O que se basan más en el libro de texto, o que por sus propios conocimientos lo dicen así tal cual[172].

42. A36: Sí.

43. Inv.: ¿Y eso os hace a vosotras cambiar la manera de elaborar el CM?

44. A31: Sí.

45. A36: Sí. Porque, a lo mejor, a mí por ejemplo me gusta tener primero, a lo mejor, el título, con el teorema[173]...

---

[170] La alumna hace emerger aquí un aspecto del bloque 4, sobre tareas y contenido práctico.
[171] Se refiere a algunos profesores.
[172] La alumna parece hacer referencia aquí a una exposición y un desarrollo más libre y personal de los contenidos por parte del docente (la alumna al hacer emerger estos aspectos, sobre los que estaba planificado profundizar más en el tercer bloque de la entrevista).

46. A31: Algo de teoría y luego ya los ejercicios.

47. A36: Sí. Y luego ya empezar con un ejercicio como ejemplo. Pero hay veces que se explica directamente con un ejemplo... Pero bueno, claro, tampoco es un gran cambio, que digas... Sigue siendo un poco lo mismo. Te puede gustar más o menos de una manera u otra, pero... Influye también en lo que vaya a dar ese día el profesor.

48. Inv.: ¿Habéis tenido en Secundaria profesores de matemáticas que os revisaran el CM?

49. A31: Sí, yo sí. (*A36 también asiente*) Es que, depende también porque, al estar en diferentes clases, a lo mejor algún curso coincidía que teníamos... O, por ejemplo, una profesora que se dio de baja en su momento, vamos, excedencia, y tuvo que venir otro para sustituir... Pues sí que algunos te dicen... Bueno, a medida que... Según vas avanzando los cursos, te dicen: "Pues mira, tienes una edad, no te voy a revisar el cuaderno".

50. A36: Sí.

51. A31: Pero yo creo que en lo que es 1º ESO y 2º ESO sí que están más pendientes de..., de lo que vas haciendo, de tu organización..., para enseñarte.

52. A36: Cuando empezamos en Secundaria sí que algo se revisaba. Porque veníamos un poco también... Como vienes de Primaria, que es también un poco más así...

53. Inv.: ¿Y cómo os lo revisaban? ¿Qué revisión os hacían?

54. A36: Nos pedían los cuadernos, yo creo. Miraban a ver si tenías corregidos los ejercicios todos los días, cómo lo hacías. Muchas veces, pues sobre todo a los chicos[174], que son un poco más..., más..., más un poco desastre con los cuadernos (*ambas alumnas se ríen*), les decían: "Pues tú lo tienes que hacer un poco mejor, no hagas tanto borratajo".

55. A31: Yo recuerdo de los profesores que se pasaban por las mesas.

56. A36: Sí.

57. A31: Más que recogerlo, yo creo, era más pasarse por las mesas y mirar: "Bueno, enséñame estos ejercicios, qué has hecho para hoy". Y te lo iban así..., quieras o no, te lo iban...

58. A36: Mirando.

59. A31: Te lo iban..., teniendo en cuenta.

60. Inv.: Sí, o sea que quizá no era tanto una revisión donde se los llevara, sino que era más diario, os los revisaba diariamente.

---

[173] Esta alumna, A36, parece preferir que el profesor les proporcione ya las matemáticas como un producto terminado: primero los resultados y luego su aplicación.

[174] Es curioso observar cómo esta alumna, A36, ya ha hecho diferenciaciones en un par de ocasiones al modo de elaborar el cuaderno en relación al sexo de los alumnos, siempre haciendo referencia a la mayor limpieza y organización en las chicas que en los chicos.

61. A31: Sí.
62. A36: Sí.
63. Inv.: ¿Sobre todo para los ejercicios? ¿O en general?
64. A36: Sí, porque, yo creo que lo de revisar los ejercicios... Es como que te obligaban un poco cuando eras pequeña a hacerlo (*A31 también lo repite*) cada día, por si acaso me ponen un negativo...
65. A31: Y ya, de paso, también pues te decían... Tachones, cuidado, porque en matemáticas, yo creo que es una de las asignaturas donde tienes que tener más en cuenta el factor de la limpieza[175]. Porque, a la hora de poner... Son números, al fin y al cabo. Entonces...
66. A36: Como pongas flechas o...
67. A31: Eso, sobre todo el tema de signos... En las ecuaciones no puedes poner ahí..., igual al final, ¿sabes? Eso también, que nos confundíamos al principio, pues te lo van enseñando así.
68. Inv.: ¿Y tenía influencia esa revisión luego en la evaluación de la asignatura? ¿Lo tenía en cuenta?
69. A31: Sí, personalmente, sí.
70. A36: Sí, yo creo que sí. Lo típico, para subir nota o para... Yo creo que es verdad que, para los profesores, se veía la evolución diaria, el trabajo diario, que en Secundaria es bastante importante.
71. A31: Sí, lo tienen muy en cuenta. Vamos, yo creo que también es una..., es algo que les puede luego también ayudar a..., a evaluarte. Porque no es igual una persona que..., pues..., no sé cómo explicarlo, que tiene ahí todo hecho un barullo, que no hace los ejercicios al día... Es una forma de motivación también, yo creo, revisar los cuadernos. Porque tú sabes, pues..., estás haciéndolo en casa y dices: "Mañana me lo van a mirar". Entonces pones más énfasis, más empeño, más cuidado..., al hacer las cosas[176].
72. Inv.: De acuerdo. Vamos a pasar a hablar de elementos teóricos: definiciones, resultados teóricos, fórmulas, ejemplos... De teoría. Os voy a plantear tres escenarios distintos, en los cuales un profesor puede exponer la teoría de un tema de la asignatura. Me tenéis que comentar qué es lo que registraríais en vuestro CM en cada caso, si es que registraríais algo, y qué os haría registrar algo o no registrarlo, qué tenéis en cuenta para tomar la decisión.
73. Inv.: El primer escenario es que el profesor expone un tema siguiendo el libro de texto. Es decir, vosotras tenéis el libro de la asignatura, y el profesor,

---

[175] Las alumnas continúan enfatizando durante todo el desarrollo de la entrevista aspectos de limpieza y orden como características esenciales y prioritarias en un cuaderno de matemáticas, A31 parece ligarlo a la correcta identificación de números y signos matemáticos.
[176] La alumna A31 aporta varias razones interesantes en relación a lo que puede aportar la revisión del cuaderno de matemáticas por parte del docente.

esencialmente, lo va siguiendo. Vosotras, en esa situación, ¿registráis algo en el CM a lo largo de la explicación teórica?

74. A31: Yo no.

75. A36: Yo tampoco.

76. A31: Yo pongo: "Página tal". Es que a mí, personalmente, me gusta más, que a lo mejor nos lo dirás luego, que lo explique él o ella, que lo ponga en la pizarra. Porque a lo mejor es lo mismo, ¿sabes? Pero también los libros de texto, por la experiencia que yo tengo, noto que lo..., la nomenclatura es distinta... A ver, no varía mucho, pero..., la forma de nombrar las cosas pues..., pues cambia[177]. Y yo cuando lo hacen ahí, por el libro, que... Vamos, yo por lo menos ha sido poco habitual para mí que lo expliquen por el libro, pero no suelo... Vamos, a lo mejor sí, yo que sé, si es una fórmula de tal pues claro, la copias. Pero si es así..., cosas más así, más generales, pongo "Página tal", "Explicación en página tal"[178]. Y no... No ando copiando, la verdad.

77. A36: Yo, si está en el libro de texto, tampoco, porque... A ver, si cambiara algún dato o alguna cosa que el profesor diga que tiene que cambiar, pues no. Pero si lo sigue a rajatabla, es más... Quizá es un poco actitud de vago, pero... (*risas*) Quiero decir, podría copiarlo y tal pero, no sé, estando en el libro, normalmente, pues para qué voy a copiarlo.

78. Inv.: De acuerdo. Segunda situación: El profesor ha elaborado unos apuntes de un tema y os los entrega fotocopiados. Y va siguiendo, a lo largo de la explicación teórica, esos apuntes que él ha elaborado. En ese caso, ¿tomáis nota de algo en el cuaderno?

79. A36: En el cuaderno como tal no. Yo creo que más en los apuntes, si hay... Pues eso, alguna cosa... Subrayar lo más importante, hacer recuadros... Sobre todo tomar apuntes en el propio folio, más que en un cuaderno externo, porque ¡luego es un lío de papeles!

80. A31: Yo, cuando se me ha dado esa situación, lo que hecho es pues, directamente, como yo hago mucho uso del cuaderno, grapar los apuntes al propio cuaderno. Entonces, así... De tal forma que lo tengo ahí, no me hace falta volver a..., a hacerlo. Por ejemplo, cuando vimos el tema de los límites en funciones, nuestra profesora, en este caso la Docente 3, nos dio una hoja con todas las indeterminaciones. Y, pues eso, pues lo tienes ahí, no lo andas copiando. Pero lo grapé, entonces...

81. Inv.: Intentas que quede junto con el CM.

82. A31: Claro, sí[179].

---

[177] Esta alumna parece indicar la presencia de dificultades cuando se producen cambios entre la notación utilizada por el libro de texto y la que puede utilizar el docente de la asignatura.

[178] No tomaría nota en el cuaderno de la teoría, pero sí que habría una referencia explícita en el cuaderno a que esa teoría se ha desarrollado siguiendo el libro de texto.

[179] Las respuestas de la alumna A31 en la situación anterior y en esta parecen inferir que el cuaderno es el instrumento base para la alumna, sobre el cual pivota el estudio y aprendizaje, y

83. Inv.: La tercera situación es que el profesor o la profesora hace una explicación oral, relativamente personal, combinada con el uso de la pizarra, ¿vale? Pero no va siguiendo algo que tengáis vosotras tan directamente. Puede tomarlo como base pero no lo va siguiendo directamente, lo va explicando oralmente y con la pizarra. En ese caso, ¿qué es lo que registráis en el CM? ¿Qué marcas, o qué os lleva a vosotras a decidir: "esto lo tomo" o "esto no lo tomo"?

84. A36: Sobre todo suele ser... Es verdad que los profesores suelen poner en la pizarra las cosas más importantes. Sobre todo, pues teoremas o fórmulas o cosas de esas. Y es lo que tú sobre todo... Yo pues lo principal que pondría es el título de lo que estamos dando, escucharía a la profesora y si veo que algo es muy importante, en plan: una definición, o "esto sirve para esto", o "esto se puede comparar con esto". Esas sí que son cosas que se apuntan, pero, sobre todo, fórmulas y definiciones de lo que es, o "esto sirve para..." Yo que sé, pues para multiplicar..., o para tal. Y el ejemplo, sobre todo el ejemplo[180].

85. A31: Yo, en el caso de que la profesora exponga algo de forma oral y apunte[181], lo copio todo. Porque es lo que..., más que nada porque es como nos lo suelen explicar. Sobre todo en Bachillerato ha sido así. A mí, personalmente, es la metodología que más me gusta, no basándose en nada. Porque es como que... Estás más atenta. Porque si tú sabes que lo tienes en el libro, no te digo que te pueda distraer más, pero dices: "Pues está ahí" Si lo haces así, con una explicación propia, pues como que estás más atenta a lo que está diciendo.

86. A36: Y porque se te queda más. La fórmula se te queda más. Porque, quieras o no, de escucharlo, luego lo recuerdas y... Siempre dices: "¡Ay, pues esto lo dijeron en clase!" Y sí, siempre algo más se te queda de la fórmula o lo que sea.

87. A31: A mí es lo que más me gusta.

88. A36: A mí también[182]. Me gusta más que lo expliquen de forma oral y con la pizarra que siguiendo un libro de texto.

89. A31: Es más, yo no tendría libro de texto. Si me dijeran de quitarlo[183]... Yo no estudio nunca con el libro de matemáticas, yo siempre el cuaderno, cuaderno, cuaderno. Y vamos, que muy bien ha ido todo, hasta ahora[184].

---

en el que intenta dejar referencia de otros posibles instrumentos o materiales utilizados en las clases.

[180] La alumna A36 marca con su intervención diferentes tipos de contenidos que considera de mayor importancia, además del hecho de la pizarra.

[181] Se refiere a la pizarra.

[182] Ambas alumnas muestran su preferencia por una metodología docente como la que se plantea en esta situación, indicando algunas razones para ello.

[183] La alumna corta aquí la frase, pero da a entender que estaría de acuerdo con no tener libro de texto.

[184] Según sabemos por la información proporcionada por la Docente 3, esta alumna, al menos el año pasado, tuvo unas calificaciones muy altas en la asignatura de matemáticas.

90. Inv.: Sí. Me decías... (*dirigiéndome a A31*) Me acabas de decir que lo sueles copiar todo.

91. A31: Sí.

92. Inv.: Es algo que sí que he observado al revisar un poco vuestros cuadernos. Sí que he visto una diferencia entre vosotras dos en que el número de cosas que tienes apuntadas. En el caso de A31, es muy grande, tienes muchas observaciones, muchos comentarios... Intentas tenerlo todo, todo, registrar todo lo que dice la profesora, lo intentas tener.

93. A31: Yo lo que hago es... Lo importante, como dice A36... A lo mejor ella copia eso. Y yo lo copio, pero luego, aunque a lo mejor no me hiciera falta, pero me ayuda a mí, cojo el lápiz y apunto... Pues comentarios que, a lo mejor son un poco..., no voy a decir tontos, pero..., que luego a lo mejor se te pueden...

94. A36: Aclaraciones.

95. A31: Aclaraciones, exactamente. Pues lo cojo con el lápiz. Y ahora, en segundo[185], más todavía. Y me lo apunto. Y así luego, a la hora de estudiar, pues es muy fácil para mí, ¿sabes? Lo veo y digo: “Pues sí, pues sí, pues sí”. Y a mí eso me ayuda un montón. Las aclaraciones en lápiz me ayudan un montón[186].

96. Inv.: De acuerdo. Tú, A36, he visto que no llegabas a tanto. Era un poco más esquemático.

97. A36: No, tanto no. Soy bastante más esquemática. Aparte, yo creo que juego con un factor que para mí es la memoria. Que tengo buena memoria, y a lo mejor se me queda mucho más apuntar solamente la fórmula, y el resto de la explicación ver a la profesora y escucharla... Y recordarlo. Es verdad que hay cosas que sí que puedo apuntar si pienso que de esto no me voy a acordar. Pero sí que es verdad que sí que puedo tener..., quizá, jugar con la memoria. Muchas veces me puede fallar, pero sí que... No soy muy de apuntar, apuntar, apuntar porque..., no sé, creo que se me queda bastante bien en la cabeza todo.

98. Inv.: De acuerdo. También he visto, A31, que solías utilizar bastante... Me acabas de comentar lo del lápiz, y también he visto que utilizas mucho el rotulador, para marcar cosas e, incluso, para escribir[187].

99. A31: Sí, cierto.

100. Inv.: ¿Tienes alguna estrategia del tipo “ahora utilizo el rotulador”? ¿Qué te lleva a ti a utilizar el rotulador y qué te aporta?

---

[185] Se refiere a 2º de Bachillerato.
[186] Parece que esas anotaciones tienen una función más a posteriori (para la revisión) que en el momento en que las copia, para enfatizar o recordar aspectos en la preparación de una prueba de evaluación.
[187] Pregunta concreta sobre la elaboración del cuaderno dirigida a esta alumna, a partir de lo que el EI ha detectado en su cuaderno de matemáticas.

101. A31: A mí, lo primero, claridad. Veo un cuaderno todo escrito en azul, del mismo color, es muy monótono. Sin embargo, si utilizas un rosa para poner “Estadística”, por ejemplo, o los cuadraditos, las fórmulas… Como que es más visual. Yo..., memoria fotográfica tengo bastante, creo. Entonces me ayuda mucho el tema de los colores. Además es una cosa que he hecho siempre, desde pequeña. Y luego, también es verdad, cuando te haces mayor te van diciendo: “Deja de utilizarlo así, un poco”. Pero el cuaderno, que es una cosa personal[188]... Hombre, en los exámenes no, ¿sabes? Pero, en el cuaderno, a mí me ayuda mucho..., eso.

102. Inv.: De acuerdo. A36, he visto que en algunos casos, me ha sorprendido que..., he visto algunas hojas[189] poco utilizadas[187]. En el sentido de que había muchas en las que escribías, a lo mejor, un trozo y luego ya pasabas a la hoja siguiente y...

103. A36: Sí, porque a veces soy muy “desastre”, y lo dejo para luego corregirlo, para tal, y a veces se me olvida. Es verdad que el cuaderno de primero de Bachillerato le tengo un poco desastroso para cómo soy yo, está bastante desastroso. Pero es verdad que sí, para luego tomar apuntes o para ver si me he dejado algo... Pues esas cosas que luego se me van olvidando, que... No sé, que son..., que a lo mejor tengo que corregir y lo dejo ahí, y digo: “¡Ay!”, y luego se me olvida. Pero..., sobre todo eso. Pero..., está bastante más desastroso de lo que soy yo de normal, el de primero.

104. Inv.: O sea, que no sueles hacer eso habitualmente.

105. A36: No, no, no, no... (*risas de la alumna*).

106. Inv.: Vale. Pasamos a hablar más de ejercicios y actividades en el cuaderno. Os voy a leer dos frases, y me tenéis que decir con cuál de las dos frases estáis más de acuerdo, con cuál simpatizáis más y por qué. La primera frase es: “El CM es un lugar donde, en gran medida, se registran ejercicios” y la segunda frase: “El CM es un lugar donde, en gran medida, se hacen ejercicios”. Si os tuvierais que quedar con una de las dos, ¿con cuál os quedaríais? (*Ambas alumnas se quedan pensativas unos segundos*)

107. A31: Es difícil.

108. A36: Sí...

109. Inv.: ¿A cuál le dais más importancia? Las dos cosas pueden ser importantes...

110. A31: Yo más a la segunda, a la de que se hacen ejercicios. Porque..., lo que..., me repito un poco, lo que he dicho antes, matemáticas es una asignatura que mejoras o aprendes a base de hacer ejercicios. Una cosa es registrar o escribir los ejercicios que haces es clase. Y otra cosa aparte es, tú, esforzarte en tu casa, hacer ejercicios. El hecho de hacerlos, de ponerte y decir: “Voy a hacer tantos de este tema, tantos del otro, tantos del otro”. Y

[188] La alumna enfatiza el carácter personal del cuaderno como instrumento para el estudiante.
[189] Referencia a las hojas de su cuaderno.

luego, también, pues..., las cosas así que puedan diferir de unos ejercicios a otros, aunque sean del mismo tema, pues señalarlas. Que luego, al fin y al cabo, es lo que te hace..., aprender.

111. A36: Yo creo que lo mismo. Matemáticas es una asignatura totalmente práctica. Y las matemáticas se aprenden haciendo, y no te queda otra. Puedes registrar ejemplos, puedes... Pero, sobre todo, hacer es lo importante, es con lo que te quedas.

112. A31: Porque..., luego está la diferencia de la gente que copia los ejercicios, que me parece que más o menos es lo de la primera frase, que los registras...

113. Inv.: Sí.

114. A31: A hacerlo. Está la..., no sé cómo decirlo, el cambio de la actitud de la persona hacia la asignatura. Que tú te limitas a copiar o te limitas..., o sea, o aumentas tu trabajo también a un esfuerzo personal, el que conlleva hacer los ejercicios por tu cuenta.

115. Inv.: De acuerdo. Cuando intentáis hacer actividades de matemáticas, bien que os las hayan propuesto o bien que las hacéis vosotras porque consideráis importante hacerlas... Esos intentos de resolución, ¿los hacéis siempre en el CM? ¿O podéis utilizar otros lugares para intentar resolver las tareas?

116. A36: Yo hay veces que sí que hay una hoja... Lo típico, una hoja en sucio. Pues..., pues lo típico, si ves que no te sale o que no te va a cuadrar, primero lo haces en sucio y luego ya... Yo suelo utilizar bastante el lápiz, la verdad, para resolver los ejercicios. Me ayuda a borrar y así. Pero..., hay veces que sí que la hoja en sucio me viene bien: para una fórmula, o para ver si esto es así... Para, a veces, aclarar un poco la idea. Pero, principalmente, suelo utilizar el cuaderno. Al utilizar lápiz, para mí es más fácil. Que luego, si hay un error, poder corregirlo en el momento, al hacer el ejercicio.

117. A31: Yo, en mi caso, lo que hago es, sobre todo para estudiar... A la hora de estudiar, de prepararte un examen, tengo un cuaderno en casa que es..., o sea, solamente... Vamos, que no se lo enseño a nadie, es un cuaderno personal, en sucio. Que lo hago todo así, la verdad, bastante desastre. Pero, oye, yo me entero, ¿sabes? (*risas de la alumna*). Y lo tengo así en sucio y es en el que hago los ejercicios para..., para estudiar para el examen. En plan..., lo repito. Pues si veo... Este ejercicio, que veo mucho rojo en el cuaderno, pues me lo repito aparte[190]. Pero..., vamos, que es lo que hago yo para...

118. Inv.: Sí, eso para estudiar[191].

119. A31: Sí, para estudiar.

[190] Es decir, el instrumento base sobre el que pivota ese estudio es el cuaderno de la alumna y lo que dicho cuaderno contiene.

[191] Intento centrar la respuesta de la estudiante A31, puesto que se ha enfocado en los posibles ejercicios que realiza para estudiar la asignatura o preparar un examen, no para, por ejemplo, tareas propuestas como deberes.

120. Inv.: Pero... ¿Para el día a día? Es decir, la profesora te ha propuesto unas actividades de hoy para mañana.

121. A31: No, yo los hago directamente.

122. Inv.: Los haces directamente en el cuaderno.

123. A31: Sí. Y si veo incluso... Ya, ahora, menos; pero, sobre todo, cuando era un poco más pequeña, tenía así más tiempo y tal, si veía... Yo soy muy maniática para el tema del orden y la limpieza. Entonces si veía que un ejercicio me lo mandaban, y lo hacía directamente en boli y no me salía y me quedaba todo "emborronado", arrancaba la hoja y lo repetía. Porque, es una costumbre que... Es que de pequeña era, me acuerdo, era exagerado lo que hacía yo eso. Arrancar la hoja y repetirlo. Hasta que no me quedara ahí todo perfecto[192] no... Ahora ya no, pero, vamos, que antes sí.

124. Inv.: De acuerdo. Habéis intentado realizar una actividad, y la profesora la está corrigiendo en la pizarra. ¿En qué centráis vuestra atención durante el proceso de corrección? ¿En qué os fijáis más?

125. A31: En su explicación. Y luego ya, secundario, pues... Yo me fijo a ver si el proceso que ella está haciendo o él está haciendo es el mismo que yo hice en mi cabeza al hacer el ejercicio. Y luego ya pues secundariamente, bueno, también es importante, el resultado. Obviamente, no sabes si lo tienes bien o mal. Pero vamos, más que nada, el proceso porque, aunque lo tengas bien o mal, es como un... Te lo están repitiendo, es una forma de volver a retenerlo, lo que ha dicho antes A36. Y luego ya pues ves el..., el resultado. Porque si te fijas de entrada en el resultado, y no te fijas en la explicación, estás en las mismas. Sabes que lo tienes mal, pero no sabes en lo que has fallado. Sin embargo, si lo haces de la otra forma, pues... Yo creo que es más fácil encontrar dónde ha estado tu fallo.

126. A36: Yo es eso también. Principalmente en fijarte si lo has hecho tú igual, o si a la hora de mirar el resultado te da lo mismo pero a lo mejor tú lo has hecho con otro proceso, y preguntar: "Yo lo he hecho así, ¿también se puede hacer así?". Sobre todo en el proceso porque... Bueno, el resultado... Pues puedes haber sumado mal o multiplicado mal...

127. A31: Claro, errores de cálculo.

128. A36: Errores de cálculo. Pero el proceso, plantear bien una fórmula, es lo que es más importante. Porque un resultado... Pues siempre te puede fallar un más o un menos o una multiplicación, o que te confundas en un número. Pero, sobre todo, el proceso, porque es como se aprende.

[192] Subyace en este comentario un comportamiento similar al derivado de concepciones del cuaderno más propias de los cuadernos de rotación o de honor que existían antiguamente (Hébrard, 2001; Pozo y Ramos, 2001), del cuaderno del alumno como herramienta para controlar el trabajo del docente o de los "*cyphering books*" estudiados por Clements y Ellerton (2012); aunque aquí el comportamiento de la alumna pueda derivar de la autoexigencia ante la "autoinspección" posterior, en el proceso de estudio de la asignatura y la preparación de pruebas de evaluación, y su papel para facilitar ese estudio y preparación.

129. A31: Como en el tema de matrices, por ejemplo, sin ir más lejos. Si tú estás multiplicando dos matrices, y estás obcecado con el resultado y dices: “El elemento a_{32} no me da esto”. Pues..., lo importante será que sepas cómo se multiplica una matriz, que tú digas: “fila uno por columna uno”[193]. Y eso (*risas*).

130. Inv.: O sea que centráis sobre todo, mayoritariamente, vuestra atención en el proceso de resolución y en la explicación.

131. A31: Sí.

132. A36: Sí.

133. Inv.: Si habéis cometido un error en vuestro intento de resolución... Ya he visto que soléis corregir los errores, pero, ¿soléis explicar los errores que cometéis? ¿O no?

134. A31: Sí, yo sí. Yo con el lápiz, lo que he dicho antes. Pongo..., no sé, pues esto es así porque... Es que no sé qué ejemplo poner. Por ejemplo, en los dominios de funciones. Si tú tienes una función polinómica y yo pues, por cualquier cosa, se me fue la cabeza y puse..., puse otra cosa, pues pongo en lápiz: “No, porque las funciones polinómicas siempre tienen dominio en todos los reales”. Pues eso lo pongo en lápiz, y luego es lo que me ayuda a mí. Dices: “Ah, pues esto lo puse en lápiz, porque falle aquí y tal”.

135. A36: Yo no. En eso corrijo en rojo lo que tengo mal, si he puesto mal la fórmula o tal... Pero es verdad que no tomo apuntes[194].

136. Inv.: Y si la profesora lo ha realizado de una manera distinta a como lo habéis intentado vosotros, teniendo en cuenta que los dos están bien, ¿soléis añadir esos procesos de resolución alternativos en vuestro CM?

137. A31: Sí, yo siempre.

138. A36: Yo a veces.

139. A31: Yo pongo: “esto se puede hacer...” Flechita así y flechita así[195]. Lo hago mucho además, porque... No sé, me parece que luego... (*se calla*)

140. A36: Yo a veces. Sí, cuando veo pues que, a lo mejor, la otra fórmula es más fácil. O es más corto el proceso, a lo mejor me he liado más, sí que a veces lo hago. Pero no siempre, porque cuando..., normalmente cuando lo realizo de una manera, sé que cuando llegue el examen o la hora de estudiar, me va a salir de esa manera aunque la otra... Siempre que lo tenga bien asentado en la cabeza.

---

[193] Ambas alumnas indican el establecimiento de un diferente nivel de gravedad a los errores: mayor gravedad de posibles errores en los procesos de resolución que en los cálculos derivados.

[194] La alumna se refiere a que no explica los errores que comete, no realiza ningún apunte ni comentario relacionado con el error cometido.

[195] Se refiere a que realiza bifurcaciones, ayudándose de flechas, en el espacio dedicado al ejercicio en el cuaderno, indicando los diferentes procesos posibles de resolución.

141. Inv.: O sea que tú (*refiriéndome a A31*) siempre lo harías y tú (*refiriéndome a A36*) lo harías en ocasiones *(ambas alumnas asienten con la cabeza*). De acuerdo. Ante ejercicios que habéis intentado realizar, pero luego no se han corregido en la pizarra, en la clase, ¿seguís algún procedimiento para confirmar que los habéis realizado de manera correcta? ¿Cuáles son esos procedimientos?

142. A31: Sí, preguntárselo a la profesora. Hombre, si estás seguro de que lo tienes bien, o lo has..., no sé... Si dices: “Pues está claro que está bien porque lo compruebas y te da bien”, pues tal. Pero si tienes dudas..., además siempre, en nuestro caso, los profesores siempre han estado dispuestos a ayudarnos.

143. A36: Sí.

144. A31: Y eso, vamos. Tú se lo dices y nunca tienen ningún problema en... Y es más, si ven que el ejercicio sí que es verdad que tiene una cierta complicación, complejidad, pues lo repiten en clase para que lo vean todos los alumnos.

145. Inv.: O sea que, en los dos casos, es el profesor el apoyo que utilizáis.

146. A31: Sí.

147. A36: Sí.

148. Inv.: No utilizáis otro tipo de apoyos.

149. A36: Hombre, a veces lo típico de... Bueno, pues esto es muy fácil, no lo corriges. Pues con el compañero de al lado: “Oye, ¿cuánto te ha dado?”. Y si ves que a todos nos da lo mismo...

150. A31: Claro.

151. A36: Es muy raro que todos...

152. A31: Compañeros y profesores, pero mayormente, yo creo que el profesor.

153. A36: Profesor. Sí, sobre todo, profesor.

154. Inv.: De acuerdo. Pasamos ahora, aunque ya ha salido un poco a lo largo de la entrevista, a ver cómo trabajáis con el CM fuera del aula y cómo lo utilizáis para estudiar. Desde el punto de vista de los aspectos teóricos: definiciones, fórmulas, teoremas, ejemplos importantes... ¿Utilizáis el cuaderno para estudiar de cara, por ejemplo, a una prueba escrita?

155. A31: Sí.

156. A36: Sí.

157. A31: Yo es lo único que utilizo, el cuaderno. Y, sobre todo, cuando estás comenzando un tema, yo suelo poner las explicaciones y tal, como he dicho antes, pues en colores o señaladas o... No sé... “Teorema de tal” subrayado, y el ejemplo principal. Y luego, básicamente, es lo que me miro. Luego me fijo en eso, en las explicaciones teóricas, y luego, en los ejercicios que tengo mal. Porque se supone que los que tienes bien, los vas a saber hacer..., pero... Yo

básicamente es en lo que me fijo: explicaciones teóricas y en los ejercicios que tenía mal.

158. Inv.: Y la teoría la estudias directamente del CM.

159. A31: Sí... Hombre, tampoco... A ver, en las matemáticas aplicadas tampoco hay mucha teoría. En plan que digas... Bueno, sí que hay, pero tampoco... Menos que en... No hay que comparar tampoco con, yo que sé, vectores de los de matemáticas...[196] ¿Sabes?

160. Inv.: Sí, hay menos carga teórica, sí.

161. A31: Claro. Yo creo que es todo más así enfocado a..., a otro fin. Entonces lo poco que tenemos sí que me lo estudio, no me cuesta nada. En funciones..., cuándo es continua una función, tipos de discontinuidades... Pues eso te lo tienes que aprender. Pero vamos, que tampoco es gran carga teórica lo que tenemos.

162. A36: Yo igual. Sobre todo... Las fórmulas las suelo recuadrar con colores, para que se vea bien. Y luego a la hora... y luego las fórmulas, a la hora de estudiármelas, las suelo apuntar en una hoja aparte. Las estudio, las retengo[197], las intento... O sea, de lo que me acuerdo[198]. Y nada, luego sobre todo mirar los ejercicios que tengo mal. Lo que más rojo vea[199], pues los repito, miro a ver por qué lo he hecho mal, y así.

163. Inv.: Y el libro de texto, por lo que deduzco, no lo soléis utilizar mucho a la hora de estudiar.

164. A36: Para..., mirar los enunciados de los...

165. Inv.: ¿Desde el punto de vista de la teoría?

166. A36: Nada.

167. A31: Yo nada, nunca.

168. Inv.: ¿Y para ejercicios? A lo mejor para coger ejercicios...

169. A31: Sí, para eso sí.

170. A36: Sí, nos mandan ejercicios de clase y luego para estudiar pues tienes que coger el libro de texto porque a lo mejor no copias el enunciado porque... Copiar los enunciados es... Entonces luego sí que lo consultas para leerte el enunciado del problema.

---

[196] La alumna A31 es consciente de la menor carga teórica existente en las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales con respecto a las matemáticas de la modalidad Científico-Técnica.

[197] El estudio de la teoría que pone de manifiesto la alumna tiene un alto componente memorístico.

[198] La alumna A36 hace referencia a que, al estudiar, suele intentar retener y, posteriormente, escribir las diferentes definiciones o fórmulas que debe conocer, para ver si es capaz de reproducirlas adecuadamente o no sin ayuda del cuaderno de matemáticas.

[199] Como ha indicado A36 número 135, esta alumna realizaba marcas con color rojo durante la corrección en su cuaderno de las actividades corregidas en el aula.

171. A31: Y los ejercicios siempre que hacemos son del libro de texto. Este año ya, como estamos ya enfocados a Selectividad, pues hacemos de pruebas de años anteriores[200]. Pero de 1º de Bachillerato hacia atrás... Desde 1º ESO siempre hemos hecho los ejercicios del libro. Aunque no nos fijemos en la teoría, pero los ejercicios sí que es... No sé cómo decirte. Como que nuestros dos pilares son: el libro de texto para los ejercicios y ya luego el cuaderno, y en el cuaderno te pones la teoría tú.

172. Inv.: De acuerdo. Y a la hora de practicar actividades para el examen, ¿cómo utilizáis ahí el CM?

173. A36: Mirar los ejercicios que tienes mal, y volverlos a hacer y comprobar si los tienes bien. Y si no te salen, volverlos a hacer y mirar por qué no los tienes bien. Sobre todo como apoyo y referencia a la hora de volver a realizar un ejercicio que tienes mal.

174. A31: Yo como referencia, lo que he dicho[201]. Lo cojo y voy pasando desde la primera página hasta la última. Voy pasando las páginas, fijándome sobre todo... Bueno, un poco en todos los ejercicios, porque cada ejercicio tiene su cosa, aunque sean del mismo tipo. Pero te vas fijando, sobre todo, en lo que tienes mal. Los que tienes mal... Yo, la verdad es que, me parece que no lo suele hacer mucha gente, pero a mí con leerme los ejercicios y, aunque los tenga mal, me fijo y digo: “Ah, pues esto”. Hay mucha gente que..., que los repite. Pero yo a lo mejor, como tal, no los repito. A mí me sirve con mirar lo que tengo mal y decir: “¡Ah, vale!”. Sí que se me queda, la verdad. Pero eso ya es, yo creo, bastante personal. Porque la gente tiende más a, otra vez, a repetir el ejercicio. Yo, personalmente, no. Yo..., me vale, simplemente, con mirarlo. Y hacer el proceso, pero mentalmente. No escribirlo otra vez.

175. Inv.: Tú, A36, sí que los repetirías.

176. A36: Yo sí, sí que los repito, porque me gusta ver si puedo llegar a hacerlo, o cuál es el... O si me he vuelto a estancar en el mismo punto que antes. O si he conseguido completarlo, o si lo tengo que volver a hacer tres veces hasta que me salga.

177. Inv.: Y siempre, las actividades que..., tenéis como base en el CM. A la hora de estudiar para un examen, ¿no intentáis actividades nuevas, distintas de las que se pudieran haber hecho en clase?

178. A31: Yo la verdad es que no. Porque pienso que, a lo mejor... A lo mejor sería bueno, pero también puede dar lugar a nuevas, no sé cómo decirte...

179. A36: Dudas.

---

[200] La alumna evidencia la influencia de la presencia de la Selectividad en las fuentes de las que se extraen actividades para su planteamiento y resolución por los alumnos en el aula.

[201] Ambas alumnas muestran una utilización del cuaderno como “plantilla de referencia” que contiene los ejercicios realizados en el aula y el modo en que se resuelven. En ese sentido, sí que hacen uso del valor que tiene el cuaderno como herramienta en la que se van registrando las actividades realizadas a lo largo de un tema.

180. A31: Dudas. Entonces prefiero quedarme con lo que hemos dado, que sé que es lo que me va a preguntar en el colegio[202], a andar buscando por ahí más ejercicios. No soy curiosa en el tema ese.

181. A36: Y, aparte, como no lo tienes corregido, también juegas con el factor de que creas que lo tienes bien, lo haces de esa manera en el examen y... y metas la pata.

182. A31: Claro.

183. Inv.: De acuerdo. Pasamos a unas últimas preguntas. ¿Hasta qué punto pensáis que vuestro CM podría ser utilizado por otra persona para estudiar la asignatura de matemáticas?

184. A31: Yo personalmente creo que..., que sí que sería útil para otras personas, y bastante claro. Porque, como ya he dicho antes, como yo tiendo mucho a hacer aclaraciones, apuntes, tal. Me ayudaría a mí y..., también les ayudaría a los demás. Porque si eres... Por ejemplo, no sé vamos. Pero A36, que es más esquemática. Pues, a lo mejor, eso te sirve para ti, te vale. Pero a lo mejor otra persona, pues dice: "¿Y esto por qué?". Yo lo apunto todo, entonces por eso pienso que en mi caso sí que sería útil para otras personas.

185. A36: Yo creo que... A ver, puede ser útil a la hora pues... De la claridad o del orden, quizá. Pero es verdad que, al ser tan esquemático... Yo me entiendo a mí misma, y sé por qué pongo la mayoría de las cosas. Pero entiendo que una persona que viene de nuevas a ver un cuaderno, y no sabe la materia que ha dado puede tener dudas o algo. Entonces, a lo mejor sí que, al no tener tantas aclaraciones como A31 pues sí que puedo tener más... Ser más mío, más... Yo lo entiendo, a lo mejor la otra persona puede tener ciertas dudas.

186. Inv.: De acuerdo. Cambiamos un poco la pregunta. ¿Pensáis que podríais estudiar la asignatura con el CM de otra persona? ¿Qué tendría que contener ese cuaderno de forma imprescindible para vosotras, cómo tendría que ser para que a vosotras os sirviera?

187. A36: Yo es que soy muy maniática (*risas de su compañera de entrevista*). A mí si no me dan una cosa muy limpia y muy ordenada, yo me pongo muy nerviosa. Entonces, yo, sobre todo, claridad, limpieza, colores[203]. Me gusta mucho que tenga color, que se enmarquen muchas cosas. Y depende, hombre, si conozco la asignatura y a lo mejor me dejan un apunte, pero... Soy muy mía, entonces sí que es verdad que a lo mejor me puede costar con el de otra persona. Quizá con una persona que sea muy clara, que tenga muchas aclaraciones, sí que puedo llegar a entenderlo. Pero..., no es lo mismo que si realizas tú tu propio trabajo y sabes por qué haces cada cosa.

188. A31: Yo ídem que A36, igual.

[202] La alumna da por supuesto que el docente va a basar la prueba de evaluación en actividades muy similares a las que ha planteado y desarrollado en el aula.
[203] De nuevo vuelve a evidenciarse la importancia de estas características para estas alumnas.

189. Inv.: De acuerdo. Una última pregunta. ¿Aceptaríais que un profesor de matemáticas os propusiera una manera determinada de trabajar con el CM? ¿Os parecería apropiado? ¿Os parecería conveniente? ¿O no?

190. A36: Sí, si lo tengo que hacer lo hago...

191. A31: Proponer sí, imponer no.

192. A36: ¡Eso! O sea, me puede decir: “Pues a lo mejor es mejor que eso lo pongas así” O tal, pero...

193. A31: Hombre, a estas edades claro. Si te lo dicen en 1º de la ESO, pues...

194. A36: Lo haces.

195. A31: Te lo dicen por algo. Lo suyo es que lo sigas, sigas las pautas, que es lo que te hará aprender, te hará..., tener tu propia metodología. Pero ya, en un 2º de Bachillerato...

196. A36: Ya estamos muy hechas a nuestra manera de...

197. A31: Te pueden aconsejar, pero...

198. A36: Sí, te pueden aconsejar: “Esto lo haces más claro”, “No utilices tal” o “Intenta que sea...”. Pero, a mí, que me digan: “Esto de un color, esto tal” o “Organízalo de esta manera”, a mí me costaría mucho, porque yo ya estoy muy hecha a mi manera de hacer un cuaderno y no..., no sé...[204]

199. A31: Y si te va más o menos bien tampoco tienes por qué cambiarlo.

200. A36: Sí.

201. A31: Vamos, te puede ayudar o no, pero... Hombre, si te va mal, pues a lo mejor sí que tienes que pensar: “Pues, sí, a lo mejor debería hacer caso”... O a lo mejor sí que me ayudaría, o probar. Pero si te va bien... Escuchas pero..., escuchas[205].

202. Inv.: De acuerdo. A lo mejor en niveles más bajos sí que lo veríais más conveniente.

203. A31: Sí, ahí sí.

204. A36: Para los niños que sobre todo llegan a una asignatura más o menos nueva... Porque es verdad que las matemáticas de Primaria a unas matemáticas de la ESO son muy distintas. Y, a la hora de trabajar, pues se ha cambiado, entonces va a haber cosas nuevas. Yo creo que si se les “impone”, entre comillas, una manera de trabajar: un cierto orden, una cierta limpieza, un cierto uso de ciertas cosas; les va a venir bien para cuando sean mayores tener una organización que les va a venir muy bien. Porque en un Bachillerato

[204] Ambas alumnas destacan la influencia del nivel educativo para tener más o menos en cuenta estos posibles métodos. En Bachillerato, ambas comentan que ya tienen métodos asentados de trabajo con el cuaderno, derivados de su historial escolar con la asignatura.
[205] Se fían más de sus métodos de elaboración y uso desarrollados especialmente si han ido acompañados de buenos resultados académicos en la asignatura.

se dictan muchos..., son muchos datos, son muchas cosas, y tener limpieza y orden en unas matemáticas me parece bastante imprescindible.

205. Inv.: De acuerdo. Pues, por mi parte, nada más. Muchas gracias por haber participado en la entrevista.

206. A36: De nada.

207. A31: De nada.

ANEXO E.8

Este anexo contiene la transcripción completa de la entrevista desarrollada por el doctorando (que se marcará en la transcripción como "Inv.") a la alumna A38 y el alumno A39, correspondientes al aula de Ciencias Sociales del Docente 3 durante el periodo analizado. Las anotaciones en cursiva entre paréntesis y algunas notas al pie tienen por objetivo completar la transcripción del discurso oral. En otras notas al pie se introducen reflexiones del EI derivadas de una lectura de las transcripciones y de las ideas emergidas en relación con un análisis global de la entrevista.

Datos identificativos básicos de la entrevista

- Pareja de alumnos entrevistada: Alumna A38 y alumno A39.
- Aula al que pertenecieron durante el periodo analizado: Aula del Docente 3, 1º Bachillerato Ciencias Sociales, Centro privado-concertado.
- Día y hora de realización de la entrevista: Viernes 17/05/2013, 11:15 – 11:45 h.

Transcripción de la entrevista

1. Inv.: Hoy es viernes, 17 de mayo, y estamos en el colegio privado-concertado con A38 y con A39, para hacer la entrevista sobre elaboración y uso del cuaderno de matemáticas (*de ahora en adelante, CM*). La primera pregunta que quiero haceros es si pensáis que es necesario tener un CM.
2. A38: Sí.
3. A39: Sí.
4. Inv.: ¿Y por qué consideráis que es útil tener un CM?
5. A38: Para saber cómo hacer los…, copias…, o sea, haces los ejercicios para poder repetirlos más adelante para estudiar para el examen[206]. O…, vamos, para saber cómo hacer los demás.
6. A39: Para tener un orden de…, los ejercicios.
7. A38: Claro. Y para repasar luego todos los ejercicios juntos.
8. A39: Sí, porque con el cuaderno tienes un orden, por unidades suele ser. Y, también, los exámenes que hacemos les…, las soluciones las ponemos en el cuaderno, y a la hora de repasar nos viene bien porque si no, todo tirado, estaría… Si tuviéramos hojas[207] a lo mejor estaría un poco más…
9. A38: Porque si no, desde el libro de texto… Los ejercicios no los puedes resolver en el libro. Entonces…, hay que saber cómo hacerlos, vamos.
10. Inv.: Sobre todo lo centráis en aspectos de ejercicios. La utilidad del CM.
11. A38: Hombre, la Docente 3[208] también copia la teoría. Yo la copio. Al principio del tema, siempre da…, pues las fórmulas y eso (*A39 asiente con la cabeza mientras habla la alumna*), pues las marco más para saber luego cuál tengo que usar, e ir más rápido para encontrarlas.
12. Inv.: De acuerdo. ¿Qué elementos o cualidades debe tener para vosotros un CM para que sea un buen cuaderno?
13. A38: Orden. O sea, que esté ordenado el ejercicio, lo que tienes tú hecho, y bien corregido. Si lo has tenido mal, pues bien puesta la solución; y yo, si es algo que tengo mal hecho, copio los pasos que va haciendo en la pizarra la Docente 3 para saber cómo repetirlo… Para hacer más ejercicios.

[206] La alumna ya anticipa, aquí, una utilidad asociada al uso posterior del cuaderno en el estudio de la asignatura.
[207] El alumno se refiere a la utilización de hojas sueltas en lugar de un bloc o cuaderno de anillas.
[208] La Docente 3 también fue la docente de los alumnos en 2º de Bachillerato, de ahí que hagan referencias continuas a la misma aunque las preguntas planteadas tengan una pretensión más general.

14. A39: Yo, aparte del orden, también… Bueno, el orden y tener…, tener sobre todo bien puesto qué ejercicio es del libro de texto para, a la hora de repasar o de hacerle[209]…

15. A38: Claro, porque no copiamos el enunciado…

16. Inv.: La referencia.

17. A38: Sí.

18. Inv.: De acuerdo. A lo largo de vuestro historial como alumnos en Secundaria, ¿habéis elaborado siempre el CM de una manera más o menos uniforme, siempre de una misma manera? ¿O lo habéis cambiado?

19. A38: Siempre…, yo creo que más o menos siempre igual.

20. A39: Yo, al principio, no lo tenía muy ordenado, pero luego sí que empecé a…, a poner un poco la fecha y el número de ejercicio y la página sobre todo, que al principio no lo ponía.

21. Inv.: Al principio. ¿A cuándo te refieres?

22. A39: Pues es que en los primeros años de matemáticas, como se me daban bien, pues…, hacía lo que hacía en clase, iba al examen y no… O sea, no le daba mucha importancia al cuaderno a la hora de repasar[210].

23. Inv.: O sea, que ahora sí que intentas ser más ordenado.

24. A39: Sí porque antes… A poco sacaba buena nota y ahora ya cuesta un poco más, ya.

25. Inv.: Habla un poco más alto, para que se oiga bien[211].

26. A39: Que antes iba bien, bastante bien en matemáticas. Y ahora me cuesta un poco más, hasta casi aprobar que… Que a partir de 4º ESO se nota mucho el cambio, yo creo, de…, de la asignatura.

27. A38: De las matemáticas, sí.

28. A39: Porque, vamos, yo 4º ESO lo hice en ciencias[212] y sí que se notaba.

29. A38: Y yo, es que además, en la ESO, en primero y segundo, yo recuerdo que todos los días te miraban el cuaderno para ver si tenías los ejercicios hechos. Entonces pues ya…, pues intentabas tenerlo bien, porque si te lo miraban… Para que diese buena imagen, o algo de eso. Y luego, para la hora

[209] El alumno comete aquí una incorreción lingüística: leísmo.
[210] El rol y la importancia que el alumno concede al cuaderno parece haber ido aumentando a medida que se veía más “apurado” o exigido para poder superar la evaluación de la asignatura.
[211] El alumno A39 mantenía un tono de voz muy bajo durante esa parte de la entrevista y tenía miedo de que no se escuchara bien la grabación para poder hacer una transcripción adecuada. Finalmente, este problema no ha existido.
[212] El alumno menciona el itinerario que tomó en 4º de la ESO. Recordemos que el alumno cursó el Bachillerato en la modalidad de Ciencias Sociales.

de repasar, siempre es más fácil tenerlo todo bien que lleno de tachones o sin corregir, o tal. Es más fácil[213].

30. Inv.: Pero la elaboración, digamos, en tu caso (*comentario dirigido a A38*) ha sido más o menos similar a lo largo de los años.

31. A38: Sí, sí.

32. Inv.: Y tú, A39, has tenido que ir cambiándola por motivo de… (*me callo, buscando que el alumno complete y clarifique los cambios que dice haber efectuado en el transcurso de su trayectoria escolar en Secundaria*)

33. A39: Sí, yo hasta 4º ESO no le di mucha importancia a la elaboración y a la hora de repasar. Y luego ya… Sí que le he dado importancia, pues eso, para tenerlo ordenado y…, más que nada a saber qué ejercicio es[214] a la hora de repasar para hacerlo bien.

34. Inv.: De acuerdo. ¿A vosotros os influye en algo los diferentes temas que puede haber dentro de las matemáticas, es decir, álgebra, geometría, estadística…? ¿Os influye en algo que el tema sea distinto para que hagáis algún cambio en la elaboración del CM? ¿O soléis tratar más o menos todos los temas igual?

35. A38: Pues…, no sé.

36. A39: Pues yo creo que los temas, más o menos, les[215] tratas igual. Pero, por ejemplo… No sé, algún tema que te resulte un poco más fácil, o…, o algún tema que sea de otros años, pues a lo mejor le das menos importancia y en vez de hacer… O sea, en un tema más difícil a lo mejor haces más ejercicios que están en el libro de texto, repasas más y haces más apartados que, a lo mejor, en un tema que tienes más…

37. A38: Yo creo que, en los temas nuevos, te esfuerzas más en copiar la teoría y el proceso y cómo lo estás haciendo, para poder repetirlo más veces. Porque si es algo que ya lo tienes adquirido desde primero o segundo de la ESO, ya no te detienes, por ejemplo, en aprender a dividir… Bueno, dividir es de mucho más atrás. Pero…Lo nuevo como que intentas ponerlo más detallado para repetirlo[216], para volverlo a hacer.

38. A39: Sobre todo lo que dices tú (*refiriéndose a A38*), lo de los pasos.

39. A38: Sí.

40. A39: Para que no te pases ninguno.

---

[213] La alumna A38 hace emerger la mayor facilidad y acicate para trabajar que provoca a los estudiantes el hecho de que los docentes les revisen su cuaderno de matemáticas.
[214] De nuevo, el alumno A39 hace mención a la toma adecuada de las referencias de los ejercicios que realiza en su cuaderno como un aspecto importante para él.
[215] De nuevo existe un leísmo en esta frase.
[216] Son continuas las referencias de la alumna A38 al hecho de "repetir" y repasar posteriormente lo que se hace en el cuaderno.

41. A38: Y si son cosas de representaciones y eso pues yo también las suelo hacer y que… En el cuaderno, que lo puedes hacer bien con los cuadros y tal, que queden bien para poder luego repasar el ejercicio.

42. Inv.: De acuerdo. En cuanto al profesor, ¿os influyen mucho las diferentes metodologías que puede tener el profesor a la hora de que hagáis cambios en vuestra elaboración del CM?

43. A39: Pues yo creo que a mí, particularmente, sí que me ha influido porque, los primeros años, los profesores que tuvimos siempre solían hacer una especie como de repaso los días antes del examen. Y ahora, estos últimos dos o tres años, esa especie de repaso no se hace, y a la hora de enfocar para estudiar o para repasar el examen como que… Si es algo que has visto hace un mes pues, a lo mejor, te cuesta más que si lo hubieras repasado, a lo mejor, con un ejercicio el último día y…, cuesta más[217].

44. A38: Yo creo que, en la ESO, daban a lo mejor también más importancia a la teoría, y te preguntaban teoría en los exámenes. Y la tenías copiada, las definiciones y tal. Pero ahora, en Bachillerato la teoría[218]… En primero más, pero en segundo vemos la teoría para hacer el ejercicio, no sobre lo que es en sí… Por ejemplo, las funciones y eso. Pues antes, a lo mejor, le dabas más importancia que ahora.

45. Inv.: Sí, pero la manera en que lo presenta el profesor en la clase, ¿a vosotros os hace…, hacer adaptaciones en vuestra elaboración del CM?[219]

46. A38: Yo creo que no.

47. A39: Yo lo único eso[220]. Que no, pero en el detalle, a la hora de repasar pues que, a lo mejor, a mí…, me venía mejor la metodología de repasar los últimos días. Y al no hacerlo pues me cuesta a lo mejor un poco más a la hora de repasar, o acordarme… Si no tengo ayuda externa, a lo mejor, si tengo que hacer un ejercicio de hace un mes, pues no…, no sé cómo sacarle o me cuesta más que si hubiéramos hecho uno el día antes.

48. Inv.: De acuerdo. Me comentabas un poco antes, A38, que habías tenido profesores en 1º y 2º de ESO que te revisaban el CM.

49. A38: Sí.

50. Inv.: ¿En tu caso también, A39?

51. A39: Sí.

52. Inv.: ¿Solo en esos años, en esos primeros años?

---

[217] El alumno centra su respuesta en el comportamiento del profesor previo al examen, no en las características de la metodología docente al desarrollar los temas.

[218] Parece asociar la importancia de un aspecto a su presencia explícita en las evaluaciones de un docente, para reproducir la misma, sin darse cuenta del hecho de aplicar la teoría en la resolución de actividades.

[219] Se repite la pregunta para enfatizar el propósito de la misma y obtener respuestas de los estudiantes que sean más cercanas a ese propósito.

[220] El alumno A39 vuelve a incidir en este aspecto concreto, con un cambio que parece haber tenido mucha influencia para este estudiante en su estudio de la asignatura.

53. A38: Es que ya no me acuerdo casi… Pero yo creo que…, vamos, durante toda la ESO yo creo que tenían… Todos los profesores estaban pendientes de que hicieses el cuaderno y que tuvieses todos los ejercicios. Yo creo que también porque les resultaba luego más fácil a ellos a la hora de evaluar la asignatura. Pero yo creo, en mi caso, me ayudó a que, ahora en Bachillerato, que lo del cuaderno es más: "Hazlo tú como quieras", pues que tengas un orden y que sigas siendo constante a la hora de tener el cuaderno en orden.
54. A39: Es que yo creo que… En mi caso, por ejemplo, en cuatro años de la ESO he tenido cinco profesores. O sea, nunca creo que he coincidido[221]… Y a lo mejor sí que algún año me lo han pedido, pero a lo mejor otros no.
55. Inv.: Y los que os pedían el CM, los que os revisaban el cuaderno, ¿de qué forma lo hacían?
56. A38: Te miraban si tenías el ejercicio bien hecho o, por lo menos, que lo hubieses intentado. Pero, a la hora de la presentación, no sé…
57. Inv.: Digamos que era una revisión en la propia clase…
58. A38: Sí. Sí, sí.
59. Inv.: Que pasaba por las mesas…
60. A39: Sí pero, por ejemplo, la Docente 3, el año pasado, si acababas el cuaderno a mí sí que me lo cogió cuando lo acabé[222].
61. A38: Sí, te lo revisaba.
62. A39: Y te revisaba y te decía: "Oye, de este apartado te faltan un par de ejercicios" o "Esto tienes que hacerlo un poco más separado…"
63. A38: Sí. Y en la ESO también, yo creo que, no sé si fue con otra de las profesoras del colegio. También, cuando acababa el trimestre, te recogía el cuaderno para ver si lo tenías todo hecho.
64. A39: Sí, y en caso de que tuvieras una nota…, más o menos…
65. A38: También para redondear la nota. Si estabas con un cinco y pico pues… A ver si lo podías subir y tal.
66. Inv.: De acuerdo. Y sí que tenía influencia en la evaluación en ese sentido de que podía servir para redondear la nota, para valorar el trabajo…
67. A38: Sí, yo creo que valía un 10%.
68. A39: Sí, sí que se valoraba.
69. Inv.: Vamos a pasar a un bloque de apuntes y elementos teóricos en el CM. Os voy a plantear tres situaciones diferentes, en las cuales un profesor podría presentar la teoría en una clase. Me tenéis que comentar, en cada una de las

[221] Se refiere a que no ha tenido un docente en la ESO con el que coincidiera durante varios cursos.
[222] El comentario nos ha resultado extraño, puesto que la Docente 3 no nos comentó esta circunstancia en ningún momento. Puede ser que esté mezclando hechos de distintos cursos anteriores.

situaciones, qué es lo que registraríais en vuestro cuaderno, de qué tomaríais nota, y qué os lleva a vosotros a tomar nota de unas cosas sí y de otras cosas no, qué os lleva a vosotros a decidir qué tomar y qué no tomar.

70. Inv.: La primera situación, el primer escenario es: tenéis el libro de texto de la asignatura y el profesor va siguiendo, de una manera más o menos literal, el libro de la asignatura a lo largo de la explicación. En esa situación, ¿vosotros tomáis nota de algo en el CM, a lo largo de la explicación teórica?

71. A38: No.

72. A39: En mi caso no.

73. A38: Si está en el libro de texto tal cual no. Lo subrayaría en el libro y ya está.

74. A39: Claro, subrayar lo que da más importancia, pero a la hora de pasarlo…

75. A38: ¡Porque es tenerlo dos veces! A lo mejor en el cuaderno sí que pondría, por ejemplo, el título del tema y “Teoría, página tal”[223]. Pero…, copiarlo dos veces no.

76. A39: Claro.

77. Inv.: En ningún caso.

78. A39: No.

79. A38: Yo creo que no. Si añade algo nuevo..., si está la mayoría en el libro de texto, lo apuntaría en el libro.

80. Inv.: ¿Tú también, A39?

81. A39: Yo también.

82. Inv.: Segunda situación: El profesor ha elaborado unos apuntes de un determinado tema y os los entrega fotocopiados. Y, a lo largo de la explicación, va siguiendo esos apuntes que él ha elaborado. La pregunta es la misma: ¿Registraríais algo en el CM? ¿Qué tipo de cosas podríais registrar?

83. A38: Yo creo que pondría…, a lo mejor, en el cuaderno, pegaría los apuntes, para tenerlo ahí. Y luego haría como un resumen de eso, creo, vamos, no sé.

84. Inv.: ¿Y qué tipo de resumen?

85. A38: Pues…, como…, los pasos. Si es, por ejemplo, no sé, cómo hacer un tipo de ejercicio determinado, pues los pasos más básicos. Y, si son fórmulas, pues las fórmulas. Para tenerlo más concentrado en una parte y, a la hora de repasar, no tener que leerte todos los apuntes.

86. Inv.: Destacarías, digamos, lo más importante. Lo que ves tú que más te va a poder ayudar, eso lo destacarías.

87. A38: Sí. Porque a la hora de repasar luego también es más fácil.

88. A39: Yo creo que también. O sea, a lo mejor, cuando te da los apuntes en clase no…, no tomaría nada en el cuaderno. Pero luego, a la hora de repasarlo

[223] Ambos alumnos indican que podrían añadir una referencia en el cuaderno a la circunstancia.

en casa, si veo, como dice A38, una fórmula o algo…, o un ejercicio resuelto, a lo mejor lo intentaría hacer en el cuaderno para… (*se queda en silencio, no completa la respuesta*)

89. Inv.: De acuerdo. Y la tercera situación, que quizá es la más usual, es que el profesor expone, de una manera relativamente personal, la teoría de la asignatura, combinando aspectos orales con la escritura en la pizarra. En esa situación, ¿qué registráis en vuestro CM a lo largo de la explicación? ¿Qué marcas o qué os lleva a vosotros a decidir: "esto lo tomo", "esto no lo tomo"?

90. A38: Pues no sé…

91. A39: Yo, en mi caso, yo creo que la explicación… Lo de la pizarra, la mayoría sí.

92. A38: Sí, lo de la pizarra yo sí que siempre lo copio[224].

93. A39: A no ser que sea muy común, visto de otras veces, la mayoría lo suelo apuntar en el cuaderno. Y del oral cogería a lo mejor algún apunte que sea de teoría como…, no sé, alguna excepción en el ejercicio, algo que dicte más como teoría, no todo lo que dice… Quizá alguna norma o algo.

94. A38: Sí, yo también copiaría lo de la pizarra. Y luego, después de escuchar la explicación, por ejemplo, si es… También lo que he dicho antes de los pasos, diciendo: "Primero se hace…, igualar dos ecuaciones". O cosas así. Poner lo más general, también por pasos. Y luego si hacemos… Porque a nosotros, en la mayoría de las veces, explica la teoría y luego pone algún ejemplo para acabar de entenderlo bien. Entonces, ese ejemplo, preocuparme de hacerle[225] bien poniendo…, escribiendo con letra todo lo que hay que hacer, para luego poderlo repasar[226].

95. A39: Yo, aparte de los símbolos que puede poner en la pizarra, luego pongo qué es cada símbolo para poder enterarte. O sea, si es un símbolo y es nuevo, poner debajo la explicación y luego, a lo mejor, en el cuaderno ya no lo vas a poner. Pero para tenerlo la primera vez (*A38 asiente con la cabeza, mostrando su acuerdo con el comentario de su compañero de entrevista*).

96. Inv.: De acuerdo. A38, te voy a hacer una pregunta[227]. He visto que, en tu cuaderno, había bastantes de los comentarios y observaciones que iba haciendo la profesora a lo largo de las explicaciones teóricas. Tú sí que tomabas nota de bastantes de esas cosas.

97. A38: Sí, a lápiz.

---

[224] Ambos alumnos destacan la importancia que ellos le dan a lo que el docente escribe en la pizarra durante una exposición de este tipo de la teoría: mayor importancia de este medio frente al discurso oral.

[225] Leísmo.

[226] La alumna parece dar una mayor importancia a los ejemplos desarrollados a modo de ejercicio resuelto, y a que estos elementos queden bien registrados en su cuaderno.

[227] Esta pregunta se dirige a la alumna A38, para conocer más sobre un comportamiento concreto que había detectado el EI en el análisis de su cuaderno de matemáticas.

98. Inv.: Y he visto que lo hacías a lápiz, en un tono distinto del resto de la explicación. ¿Es un comportamiento habitual esto de hacerlo a lápiz?

99. A38: Sí. Porque lo que está a boli es como lo más…, lo que dice para todo el mundo. Por ejemplo, si es una duda que yo he preguntado o que no lo entiendo yo por algo, pues lo pongo más detallado, y con mis palabras, para poderlo entender bien y ya no tener esa duda. Pero yo creo que lo he hecho siempre eso.

100. Inv.: ¿Y a qué es debido que lo hagas a lápiz? ¿Qué te aporta a ti que esté…

101. A38: Pues que lo puedo borrar luego.

102. Inv.: (*Continúo la formulación*) …que esté en un tono distinto del resto?

103. A38: Pues no sé. Yo creo que es porque…, con el lápiz, como que queda menos…, más informal en el cuaderno, ¿sabes? Queda como que es algo más tuyo y que, por ejemplo, luego lo puedes borrar, o cambiarlo, o añadir más cosas sin que quede sucio. Vamos, yo es por eso.

104. Inv.: O sea que digamos que utilizas más el lápiz para cosas más…

105. A38: Más personales.

106. Inv.: Más personales, y el bolígrafo para lo que es la toma de la exposición.

107. A38: Sí, como… Por ejemplo, si es una duda que tengo yo sola en clase, o que se lo pregunto a la Docente 3, y que ella viene y me lo dice, pues lo apunto. Por ejemplo, en un ejercicio que me ha salido mal pues porque he cambiado las filas si es de sistemas o algo de eso. Es algo más personal, sí[228].

108. Inv.: De acuerdo. Pasamos a un bloque de ejercicios y actividades en el cuaderno. Os voy a leer dos frases, y me tenéis que decir con cuál de las frases simpatizáis más, con cuál estáis más de acuerdo de las dos y por qué. La primera frase es: “El CM es un lugar donde, en gran medida, se registran ejercicios”. Y la segunda frase: “El CM es un lugar donde, en gran medida, se hacen ejercicios”. Si os tuvierais que quedar con una de las dos frases, ¿con cuál estáis más de acuerdo? ¿Con cuál simpatizáis más?

109. A38: Con la segunda.

110. A39: Con la segunda, es un lugar para hacer ejercicios.

111. Inv.: Con la segunda.

112. A38: Porque registrar ejercicios es, por ejemplo, lo hace la profesora en la pizarra y lo copias tal cual. Y no…, no es trabajo tuyo, personal. Y yo creo que el ejercicio le tienes que hacer en el cuaderno, para darte cuenta en lo que tienes dudas y volverlo a preguntar, y así aprender a hacerlo.

---

[228] La contestación de la alumna muestra que el hecho de utilizar un bolígrafo o un lápiz tiene un significado propio para la alumna, para distinguir un desarrollo teórico general en la clase de posibles aclaraciones o dudas más particulares o personales, de ayuda para la alumna.

113. A39: Yo creo que también la segunda por eso, porque si haces el ejercicio luego ves lo que tienes mal y pues…, te fijas más que si copiaras sólo de la pizarra lo que pusiera la profesora.

114. Inv.: O sea, que los dos le dais más importancia al hecho de hacer ejercicios en el CM…

115. A39: Sí.

116. A38: Sí.

117. Inv.: …que al hecho de que, luego, esos ejercicios…, de que registren ejercicios de clase o que luego esos ejercicios queden registrados.

118. A38: Hombre es que, no sé, también registrar ejercicios…

119. Inv.: Está claro que en la contraposición entre “lo tomo de lo que hace la profesora en la pizarra” y “lo intento”, elegís la segunda opción.

120. A38: Sí, porque, vamos, yo creo que en matemáticas se aprende haciendo. Porque copiándolo… Vale, puedes tener una idea. Pero luego, cuando tengas que volver a hacer otro ejercicio igual, en el examen u otro día, que te pongan, no es igual porque no te acuerdas. Vamos, por lo menos en mi caso.

121. A39: Sí.

122. Inv.: Os pongo la situación, que luego quizás salga en un bloque que hay sobre trabajo con el CM: Vosotros habéis hecho ejercicios en el CM, ¿vale? Luego esos ejercicios… ¿No es importante también, para vosotros, el hecho de que quedan en el CM esos ejercicios hechos, y luego pueden ser motivo de revisión por vuestra parte?[229]

123. A38: Ah, sí. Sí, porque para estudiar les tienes que mirar todos…

124. Inv.: ¿Para ti también, A39, o no?

125. A39: Es importante… Vamos, yo a lo mejor no hago todos, pero sí que coges a lo mejor de referencia de los del libro de texto o del cuaderno que puedan estar corregidos, o alguno que puede estar en el libro resuelto, y le intentas hacer tú y luego ves la corrección, cómo tendría que ser, dónde has fallado, qué se te da peor…

126. Inv.: De acuerdo. Cuando intentáis realizar actividades de matemáticas, ¿lo hacéis siempre en el CM? ¿O podéis utilizar otros lugares, aparte del cuaderno, para hacerlas? Me refiero más a las actividades del día a día.

127. A38: A los deberes.

128. Inv.: A lo que la profesora os propone. Sí, a los deberes.

[229] Decido plantear esta pregunta, puesto que en comentarios anteriores, especialmente de la alumna A38, se parecía enfatizar este hecho como algo importante (en varias ocasiones ha hablado de “repasar” o de “repetir” ejercicios para estudiar la asignatura). Este hecho se refleja en la intervención 123.

129. A39: Yo los deberes les[230] hago en el cuaderno. Pero a la hora de repasar para un examen sí que lo hago en folios, o sea, no les pongo en el cuaderno. Sino que, a la hora de repasar…

130. A38: En hojas en sucio.

131. A39: …, o si tengo que hacer una hoja del tema de lo que creo que puede ser un poco más importante, lo hago en un folio. No lo suelo dejar en el cuaderno.

132. A38: Yo sí, por ejemplo, si es un ejercicio que..., pues que tiene representaciones o que te puedes confundir muy fácilmente, primero lo intento en un folio aparte y luego lo paso al cuaderno. Porque es mejor para…, lo puedes hacer como más detallado, las cuentas más extendidas, y equivocarte y hacer alguna…, algún cambio y que no quede todo manchado en el cuaderno. Y para repasar también lo hago en folios aparte[231].

133. Inv.: O sea, que si es un ejercicio que ves que puede ser más complicado para ti, o que no sabes muy bien cómo atacarlo…

134. A38: Claro, sí, primero lo hago en sucio.

135. Inv.: Primero intentas hacerlo en sucio.

136. A38: O a lápiz.

137. Inv.: O a lápiz, y luego ya lo pasarías al CM.

138. A38: Sí.

139. Inv.: De acuerdo. He visto que ambos solíais tomar nota de las tareas que proponía la profesora en el CM: en los márgenes o[232]…

140. A38: ¡Ah, sí!

141. Inv.: Sobre todo A39, he visto que lo hace mucho. A38 también algunas veces.

142. A38: Sí, cuando no tengo la agenda.

143. Inv.: ¿Por qué lo hacéis? ¿Qué os aporta el tomar nota de lo que se os propone en el CM? Porque he visto que poca gente lo hacía, casi erais vosotros los únicos que lo hacíais.

144. A38: Yo, normalmente, lo hago en la agenda. Si algún día no tengo la agenda, o no la tengo a mano, lo apunto en el margen o en alguna esquina o algo. Para saber que lo tengo que hacer, porque si no se me olvida.

145. A39: Yo lo suelo apuntar en el margen porque…, la agenda la utilizo más para planificar la tarde y, a lo mejor, no la uso tanto para copiar los ejercicios o

[230] De nuevo, hay dos leísmos en esta intervención. Ambos alumnos cometen con cierta frecuencia esta incorrección lingüística.

[231] Ambos alumnos también hacen alusión en sus respuestas a su comportamiento para estudiar o repasar la asignatura, por ejemplo, al preparar una prueba de evaluación. Sobre estos aspectos se vuelve en el bloque 5 de la entrevista.

[232] Planteo este hecho que se ha mostrado como característico de ambos estudiantes en la revisión de sus cuadernos de matemáticas, especialmente del alumno A39.

qué hemos hecho en cada asignatura. Y lo pongo en el cuaderno y, nada, cuando llegas, abres el cuaderno y haces los ejercicios…, y ya lo tienes ahí.

146. A38: Además también hay gente que los ejercicios los marca en el libro de texto. Pero yo, si…, lo primero que abro es el cuaderno para ver lo que hemos hecho ese día en clase. Y si lo tengo ahí sé que lo voy a hacer, y si lo tengo en el libro… A lo mejor el libro no lo abro.

147. A39: Yo lo marco en el cuaderno, pero también luego, cuando ya le he hecho, le[233] marco en el libro de texto para repasar[234].

148. A38: Sí, para saber los que están hechos, para repasar.

149. Inv.: Os es más fácil a vosotros utilizar el CM para ver eso que, a lo mejor en el libro de texto, que sí que es verdad que muchas veces se hace una marquita al lado del ejercicio.

150. A38: Sí.

151. Inv.: Y luego se empiezan a confundir las marcas de los días, ¿verdad?

152. A39: Y luego llegas al siguiente día y no sabes la marca, claro.

153. A38: Claro.

154. A39: O se te olvida la agenda a lo mejor o algo… Y también lo tienes si lo has apuntado ahí.

155. Inv.: De acuerdo. Os voy a comentar algunos elementos concretos que puede haber en un ejercicio, para ver si vosotros soléis tomarlos o no. El enunciado del ejercicio. ¿Vosotros soléis tomar el enunciado del ejercicio en el CM? ¿O no?

156. A38: Este año los ejercicios que son de Selectividad, como los vemos directamente desde el ordenador, esos sí, porque no estás imprimiendo todo el día las hojas. Pero, si son del libro, no los copio. Pongo la página y ya está.

157. A39: No, yo solo tomo… Bueno, y ella también lo hará (*refiriéndose a su compañera de entrevista*), porque nos lo manda, que…

158. A38: Los datos.

159. A39: Los que hacemos en…, a la hora del examen, que luego le[235] pasamos al cuaderno el examen corregido, esos sí que les tomamos.

160. A38: El examen sí, porque es un tipo de ejercicio que te puede volver a caer en el examen, y tal.

161. A39: Sobre todo los exámenes vienen muy bien a la hora de repasar para cuando tienes un global, hacer los tres o cuatro exámenes que tienes hechos del curso.

[233] De nuevo, hay dos leísmos en esta frase del alumno.
[234] Así los alumnos sí saben qué ejercicios del libro han sido trabajados en la clase, lo cual le supone a A39 una ayuda para repasar los ejercicios a través del libro de texto.
[235] Otro leísmo.

162. Inv.: La profesora os lo indica, que copiéis los enunciados.

163. A38: Sí, nos los dicta. Nos dicta el enunciado. Pero los de los deberes no. Tú pones, por ejemplo, “Ejercicio 1, página 250”, y ya está, porque luego acudes al libro de texto y ya está.

164. A39: Yo en los de PAU tampoco.

165. Inv.: ¿Pero tú tienes esos ejercicios en algún sitio?

166. A39: Sí.

167. Inv.: ¿Os los pasa fotocopiados?

168. A39: No, están en Internet.

169. A38: Están en Internet, los sacamos de Internet.

170. A39: Yo pongo el año y pongo tercero…

171. Inv.: Lo buscarías en Internet y pones una referencia.

172. A39: Claro, y lo busco en Internet o a lo mejor… O lo coges en el móvil, si estás…

173. A38: Yo pongo la referencia y copio el ejercicio porque no es plan de estar todo el día en el ordenador. Pues si nos dice la Docente 3: “Os dejo los cinco últimos minutos para que vayáis copiando estos dos enunciados”. Lo copio en clase y ya lo tengo.

174. A39: Yo copio alguno… O, a veces, imprimo…, imprimo la hoja. Si a lo mejor son dos o tres, pues dices: “Bueno, ya la imprimo y hago los que hay”. Y tal[236].

175. Inv.: De acuerdo. ¿Soléis tomar notas de los pasos seguidos o los comentarios durante el proceso de resolución que puedan surgir, que sean de importancia?

176. A38: Sí, yo sí.

177. A39: Yo en estos años últimos sí, porque… Sobre todo ahora, que son, a lo mejor, más complicados o tienen más pasos; si te olvidas uno de los pasos pues… Y al principio, a lo mejor, el primer día apunto el paso y qué es cada paso, y luego ya apunto el número en los dos o tres primeros ejercicios… Y luego ya pues más o menos lo has mecanizado[237].

178. Inv.: Sí, digamos que la primera vez que se hace un ejercicio de un determinado tipo…

179. A38: Sí, eso siempre.

180. A39: Sí, apuntas el tipo y luego apuntas el número: primer paso, tal. Y se te van quedando. Y ya cuando, más o menos, crees que lo tienes…

[236] Como observamos a partir de la respuesta de los alumnos, en la decisión de los alumnos sobre si tomar o no el enunciado de una actividad tiene influencia tanto el medio del que lo extraigan, como su acceso y dependencia de dicho medio para un estudio o repaso posterior.
[237] Este comentario puede mostrar una concepción de estos procesos a seguir como una serie de instrucciones o de algoritmos que deben mecanizarse para resolver las actividades.

181. A38: Sí, yo creo que también.

182. Inv.: Y si en algún ejercicio habéis tenido alguna duda o algún elemento que no habéis terminado de comprender, o no habéis comprendido, ¿hacéis alguna marca en el cuaderno indicándolo? Es decir, tengo una duda aquí y…, tengo que tomar medidas para intentar eliminar esa duda: bien preguntárselo a la profesora o bien volverlo a revisar…

183. A38: Yo sí, algunas veces, rodeo la página que es o tal. Luego cuando le[238] corregimos en clase o…, o antes del examen dice: "¿Tenéis alguna duda?", pues ya lo pregunto y luego copio a lápiz lo que me dice la profesora.

184. Inv.: Lo sueles rodear…

185. A38: Sí, o algo… Sí, vamos, hacer alguna marca, o poner un *post-it* o algo de eso.

186. A39: Yo le pongo los dos signos de interrogación a lo que tengo duda e intento pues, a la hora de corregir, ver si lo ha solucionado. Y si no lo ha solucionado, pues preguntar. O intentar mirarlo por el libro e intentar sacarlo.

187. Inv.: De acuerdo. Cuando la profesora está corrigiendo en clase un ejercicio que vosotros habéis intentado con anterioridad, que ha sido propuesto y lo habéis intentado, ¿en qué centráis vuestra atención, en el proceso de corrección? ¿Cuál es vuestro comportamiento a lo largo de ese proceso de corrección? (*Ambos alumnos se quedan unos segundos pensativos*)

188. A38: Depende. Porque, a veces corregimos nosotros los ejercicios, sale un compañero a la pizarra y lo hace. Entonces miras si lo tienes bien o mal y, en lo que tienes mal, intentas buscar el fallo. Y si ves que, por más vueltas que lo des, no lo encuentras, pues ya preguntas a la Docente 3.

189. A39: Yo, en mi caso, como… Vamos, primero miramos a ver si está bien el ejercicio y corregir lo que tienes mal. También doy mucho… Que yo a veces, cuando hago los ejercicios, pues…, pongo lo básico y no pongo a lo mejor todos los pasos y, a la hora de corregir, pues intento copiar los pasos para… Porque a veces los veo tan…, a veces les[238] veo que son muy…, que te les[238] puedes saltar entre comillas. Pero luego, como a la hora del examen, tienes que poner todos, pues a lo mejor les[238] copio. O digo: "Este paso no me acordaba que era así". O, si me he saltado un enunciado, para decir: "Oye, hay que poner el enunciado".

190. Inv.: Si la profesora lo realiza de una manera distinta a como lo habéis realizado vosotros, suponiendo que las dos resoluciones son válidas, ¿tomáis nota en el CM de esas resoluciones alternativas que puedan surgir?

191. A38: Sí, yo sí. Lo copio en otro color. En rojo, por ejemplo. Pongo que mi opción también está bien, pero que hay otra opción posible, que a lo mejor es más corta, o…, o que tiene menos operaciones, o tal, y parece… Por ejemplo

[238] Leísmo.

luego, a la hora de repasar, también puedes comprobar si de la otra forma también lo tienes bien.

192. A39: Yo lo copio con el mismo color. Lo copio… Pues si ese ejercicio es el último, pues lo copio debajo y pongo: “Otra opción”. O lo pongo en otra página: “Página tal, ejercicio tal, opción b”.

193. Inv.: Pero sí que es un comportamiento habitual, que toméis nota de otros procesos.

194. A39: Sí, porque a lo mejor tú lo has hecho de esa manera que crees que es más fácil. Pero luego, a la hora de repasar, dices: oye, pues…

195. A38: A lo mejor le has dado más vueltas, o haces más pasos…

196. A39: A la hora de repasar, a lo mejor dices: “Oye, pues esta es más fácil”. O tiene menos pasos, como dice ella. Te puede ayudar. Mejor tener las dos, por si en el examen no te sale bien una pues…, pues hacer la otra en caso de que…

197. A38: Sí.

198. Inv.: Y ante ejercicios que habéis intentado pero luego la profesora no ha corregido en la pizarra, ¿seguís algún procedimiento para confirmar que los habéis realizado de manera correcta?

199. A38: Preguntar a la profesora, si te lo puede echar un vistazo. O, vamos, cuando acaba la clase, antes de que se vaya: “Oye, profesora, ¿me puedes mirar a ver si tengo esto bien?”. Te dice: “Pues no, has fallado aquí, vuélvelo a mirar y mañana te digo si lo tienes bien”.

200. A39: Yo lo miro en Internet (*risas de su compañera de entrevista ante esta respuesta*). En “Averroes matemáticas”[239], que es de la Junta de Andalucía, y viene el cuaderno…, solucionado, en caso de que no…

201. Inv.: Sí, porque sí que es cierto que los ejercicios de esa editorial suelen venir allí en esa página web, yo creo. Entonces lo consultarías ahí, en ese caso.

202. A39: Sí.

203. Inv.: Y tú (*refiriéndome a A38*)…

204. A38: Preguntaría a la profesora.

205. Inv.: Preguntarías más a la profesora.

206. A38: O a algún compañero que sepa que también lo puede haber hecho.

207. Inv.: O a algún compañero. De acuerdo. Vamos a pasar a hablar de cómo trabajáis con el CM fuera del aula, y cómo lo usáis para estudiar. Hablamos primero de elementos teóricos, ¿utilizáis el cuaderno para estudiar elementos

[239] En esa página web pueden encontrarse resueltos los ejercicios de los libros de texto de la editorial ANAYA, que es la editorial que han utilizado en Bachillerato.

teóricos: definiciones, teoremas, ejemplos importantes..., de cara a preparar un examen?

208. A38: Si son ejemplos que no vienen en el libro de texto y que los he copiado precisamente para repasar, sí. Pero si no… Si son los del libro normalmente no los miro, para estudiar para el examen no.

209. A39: Yo en la actualidad pues sí que miro un poco más lo del libro de texto o lo que pueda haber dictado en el cuaderno. Pero yo, hasta el año pasado, no le he dado importancia a la teoría. No sé, siempre he ido bastante bien y…, ni el punto de teoría que nos daban en la ESO le[240] hacía. Es verdad. Y ahora que me cuesta un poco más pues sí que miro… Sí que ahora, por ejemplo, en segundo[241], tiene mucha importancia, porque si no te sabes la teoría, la mayoría de ejercicios no puedes saber ni cómo empiezan ni cómo…

210. Inv.: ¿Y utilizáis el libro de texto también para estudiar la teoría?

211. A38: Sí, porque vienen muchísimos ejercicios resueltos[242]. Entonces, puede ser un ejercicio similar al que te han mandado para deberes y puedes saber los pasos, y si no entiendes bien alguno y ves cómo está resuelto, pues lo intentas adaptar al que tienes tú que hacer. O para repasar.

212. A39: Yo primero me miro la teoría y el que está resuelto abajo, le hago. Y si me queda alguna duda, pues siempre, en la parte de atrás, te vienen un par de ellos más para…

213. A38: Sí vienen, de autoevaluación o cosas de esas. También puedes hacerlos.

214. Inv.: O sea que miráis el libro tanto para repasar la teoría fundamental como también os sirven…

215. A38: Algún ejercicio.

216. Inv.: …los ejercicios resueltos también los soléis mirar del libro de texto.

217. A38: Sí.

218. Inv.: De acuerdo. Y a la hora de preparar elementos prácticos, ejercicios y tal, para un examen, me habéis dicho que sí que revisáis el libro de texto, los ejercicios resueltos. ¿Y el CM cómo lo utilizáis a la hora de preparar un examen?

219. A38: Yo, normalmente, busco los ejercicios que me han salido mal o que veo que tengo muchas anotaciones, busco la página que es del libro de texto, hago el del libro otra vez, y si lo tengo igual, pues ya intento… Si lo tengo igual pues es como que ya lo he aprendido a hacer. E intento buscar otro parecido para volverlo a hacer…, en un folio aparte o en unas hojas aparte.

[240] De nuevo, el alumno comete aquí un leísmo.
[241] Se refiere a 2º de Bachillerato.
[242] Pudiera ser que la alumna asociara el estudio de la teoría a saber cuáles son los pasos a seguir en las actividades propias de un tema, ya que su respuesta se desliza hacia esos aspectos. No hay referencia a otros aspectos teóricos: definiciones, teoremas…

220. A39: Yo lo que hago es mirar lo del libro de texto y los ejercicios resueltos. Hago la autoevaluación y del cuaderno, en el caso de que sea ya un global y ya esté hecho el parcial, pues suelo hacer el parcial otra vez[243], pero no… A lo mejor los del libro, a no ser que haya alguno que diga: "Oye, pues este…, está muy claro que me costó mucho". O…, que ya haya acabado de repasar y diga: "Oye, pues tengo alguna duda de este". Pues, a lo mejor, o cojo algún otro del libro o alguno que esté hecho ya en clase.

221. Inv.: Sí, pero, digamos que revisas menos del CM, te fías más del libro de texto. Tú (*dirigiéndome a A38*) sí que miras a lo mejor más ejercicios… Revisas y repites más ejercicios del…

222. A38: Sí, sí, del cuaderno.

223. Inv.: A lo mejor los que hayas tenido más dificultades…

224. A38: Sí.

225. A39: A mí me gusta más hacer…, nuevos. Alguno que no hayamos hecho… De la autoevaluación.

226. A38: A mí me gusta más hacer algunos que ya tengamos hechos en clase, porque tienes la corrección y la certeza de que lo que ha hecho la profesora ya está bien y lo puedes… Luego, a lo mejor, cuando ya acabas de repasar, dices: "Bueno, voy a hacer otro, a ver si lo tengo…, lo he aprendido a hacer". O algo de eso.

227. Inv.: Tú (*dirigiéndome a A39*) prefieres más ejercicios nuevos. ¿Qué te aporta a ti hacer ejercicios nuevos?

228. A39: Pues, no sé. Es que en los que ya hemos hecho, pues a lo mejor te acuerdas de algún tipo de[244]… Como al examen al que te vas a enfrentar suele ser nuevo, pues haces alguno nuevo para ver qué tal se te dan. Y en caso de tener alguna duda, pues a lo mejor sí que…, o que te cueste un poco más, pues ya miras la solución o intentas hacer alguno que esté hecho también para… (*Deja la frase inconclusa*). Sobre todo cuando eso pasa pues subrayas lo que tienes duda y tal.

229. Inv.: De acuerdo. Pasamos a hacer unas últimas preguntas ya, ¿vale? En cuanto a aspectos de organización y de presentación. He visto un gran contraste entre vosotros en este aspecto (*ambos alumnos ríen*).

230. A39: Es que yo…, soy un poco desastre.

231. Inv.: Porque sí que A38 lo tenía bastante ordenado, pero… A39, la verdad es que tu cuaderno es un poco caótico. ¿Qué aspectos de organización y de

---

[243] La Docente 3 realiza la corrección detallada en la clase de las actividades de cada examen que se haya hecho.

[244] El alumno parece comentar que esos ejercicios ya hechos no tendrían para él la misma dificultad "real", puesto que sí que podría recordar algunos pasajes de su corrección, frente a otros ejercicios nuevos. Habla de los ejercicios de "autoevaluación", de los cuales el libro de texto sí que aporta su solución (en un CD adjunto al libro de texto).

presentación es necesario o es imprescindible que sigáis vosotros para que el CM sea un cuaderno útil para vosotros?

232. A38: Dividir bien los temas. O sea, cuando acaba uno y empieza otro, poner: "Tema 5", el título del tema y luego, por ejemplo, si es un tema de límites, los límites que tienden a infinito pues lo pongo en un color y, ahí, la teoría de cómo se hacen y algún ejemplo que hayamos hecho en clase o que nos hayan mandado para hacer y corregido. Y así todos los temas, todas las partes que tiene cada tema.

233. A39: Es verdad que el mío es más caótico (*risas de ambos alumnos*). Pero, por ejemplo, este año pues pongo, lo que es el título y todo en el mismo color, y a lo mejor si hago la autoevaluación o los exámenes que hacemos…, que corregimos otra vez les[245] pongo en negro, distinto, para darles más importancia a la hora de repasar.

234. Inv.: Utilizas diferentes colores para diferenciar un poco…, diferentes elementos.

235. A39: Sobre todo lo que dice A38, saber dónde empieza un tema y dónde acaba otro, porque si te pones a hacer ejercicios…

236. A38: Sí porque si no te acabas… Y también si es algún examen resuelto también. Porque al final luego tienes un lío de ejercicios y se te acaban mezclando unos con otros.

237. A39: Por ejemplo ahora, en un global, no te da tiempo a hacer todos. Entonces pues…, si lo que has dado más importancia lo tienes, vamos, yo en este año, en otro color pues intentas hacer esos y si ya te sobrara tiempo pues puedes hacer algún otro. Pero…, principalmente, se supone que si les has dado más importancia serán más importantes.

238. Inv.: Y esa, digamos, poca organización que he visto yo, ¿a ti te repercutía de alguna manera a la hora de utilizar el cuaderno? ¿O no, aunque esté poco organizado no es un impedimento para ti, a la hora de trabajar?

239. A39: Lo que me costaba a mí un poco antes era, si no lo tenía bien organizado y tal, pues si no tenía… Me costaba el encontrar, a lo mejor, el ejercicio específico… Como dice A38 que, a veces, si uno te cuesta más, le repasas. Pues yo antes no lo marcaba y, a lo mejor, pues a la hora de repasar dices: "Quiero hacer este que me cuesta un poco más"… Y te cuesta un poco más, pero… No sé, es que…, yo, hasta hace dos días, como quien dice, siempre lo he hecho un poco… O sea, me ha costado mucho lo de la presentación[246].

240. Inv.: Sí. Un poco lo que comentabas al principio, ¿no? Que como tenías buenos resultados, a lo mejor, tampoco era algo a lo que necesitabas prestar demasiada importancia. Y ahora, a lo mejor, sí que intentas cambiar…

[245] Leísmo.

[246] El alumno reconoce la presencia de carencias en estos aspectos, pero también sus respuestas muestran la presencia de progresos que le repercuten en un mejor estudio.

241. A39: Es que es muy drástico. De los diez puntos. Si uno era de teoría, si antes tenías un ocho y medio de nueve[247]…, en 4º de ESO ya vas con un seis, y ahora vas sufriendo, pues intentas mejorar para... (*Se calla y no completa su respuesta*).

242. Inv.: De acuerdo. Una última pregunta. ¿Aceptarías que un profesor de matemáticas os propusiera trabajar con el CM de una manera determinada? ¿Os parece algo apropiado, algo conveniente? (*Ambos alumnos se quedan unos instantes callados, pensativos*)

243. A38: (*Suspira antes de responder*) No sé.

244. A39: A lo mejor… Yo en mi caso, como lo tenía un poco desorganizado, pues sí que tengo un profesor aparte[248] que me dice… Pues a lo mejor la gráfica que la ponga en varios colores para marcar si son distintas rectas, o que ponga la teoría toda junta en un folio para tenerlo, o si algún ejercicio me ha costado un poco más pues que lo marque. Me va dando consejos y sí que le suelo hacer caso.

245. Inv.: ¿Un profesor de clases particulares?

246. A39: Sí.

247. A38: Yo si es algo que me va a beneficiar a la hora de repasar y que va a ser una forma de que, a la hora de trabajar yo en casa sola, sea más fácil y más rápido y que lo vea mejor, pues a lo mejor sí. Pero tendría que ver primero cómo es su forma. Porque si es una pérdida de tiempo de copiar todos los enunciados y eso, no[249]. Vamos, yo creo que no. Porque me parecería una pérdida de tiempo.

248. Inv.: O sea que valorarías cuáles de las cosas que él está intentando deciros pueden encajar mejor con lo que hacéis vosotros.

249. A38: Claro, a lo mejor adaptaría lo que él propone. Si te dice pues: “Señala los datos en el…” Vamos, copiar el enunciado pues me parecería una pérdida de tiempo[249]. Poner los datos y eso pues a lo mejor sí que lo haría yo. Intentaría mezclar las dos, su forma y la mía, vamos.

250. A39: Claro.

251. Inv.: No sé si os han dado alguna pauta, a lo mejor a lo largo de la ESO, en los primeros cursos. ¿Os han dado alguna pauta en cuanto a matemáticas, a la hora de elaborar el CM?

252. A38: Sí, te decían… Vamos, yo me acuerdo, no sé si era en 1º o en 2º de ESO, te decían que pusieras el enunciado y luego datos, lo que te preguntan y la solución, así como en tres columnas (*dibuja con sus brazos las columnas*), para tenerlo todos igual y era todo el cuaderno igual: datos, pregunta, solución,

[247] Se refiere a la puntuación de la parte práctica en un hipotético examen de hace unos años.
[248] El profesor hace aquí referencia a un profesor particular, aspecto que no había emergido en el resto de la entrevista, y que confirma en la intervención 246.
[249] La alumna asocia la escritura de todos los enunciados de los ejercicios con una pérdida de tiempo.

datos, pregunta, solución… Pero luego ya yo no lo he seguido haciendo. Ahora pones los datos, para tenerlos más a mano, pero ya nada más.

253. A39: No, yo sí que había lo del enunciado y a mí pues, por ejemplo luego, cuando ya dejaron de mirarnos el cuaderno, pues a lo mejor yo hacía el ejercicio y no copiaba lo que son los datos. Y ahora pues les suelo copiar a la izquierda, en el margen, al lado, los datos, para tenerlos todos ahí juntos y poner luego la solución más a la derecha.

254. Inv.: Bueno, pues muchas gracias por haber aceptado la entrevista.

255. A39: De nada.

256. A38: De nada.