Universidad de Valladolid

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Especialidad de Matemáticas). Curso 2015-2016

TRATAMIENTO DE LOS ESQUEMAS DE PRUEBA PRESENTES EN LOS LIBROS DE TEXTO EN CONTENIDOS DE GEOMETRÍA.

SU COMPRENSIÓN POR EL ALUMNADO.

Presentada por:

Sara Andérez Calvo

Dirigido por:

Tomás Ortega del Rincón

Valladolid, julio de 2016

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo Fin de Master forma parte de la formación del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria y Bachillerato de la especialidad de Matemáticas. Con dicho trabajo se pretende iniciar a los alumnos del master en la investigación educativa, realizando cada uno de nosotros un trabajo personal sobre un tema de nuestro interés.

La investigación educativa en Matemáticas tiene gran importancia en mi opinión, por varios motivos, entre ellos porque posibilita la introducción de medidas innovadoras (recursos didácticos, nuevas metodologías, etc.) en las aulas con grandes garantías de obtener una respuesta favorable en los alumnos. Como futuros docentes nuestra mayor preocupación profesional ha de ser que los alumnos aprendan, y para alcanzar dicho objetivo es de utilidad conocer la labor investigadora que se ha realizado sobre ese campo desde aspectos psicopedagógicos generales a aspectos específicos de las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas.

Por lo que respecta a la aportación de las diferentes asignaturas a la hora de realizar este trabajo cabe señalar que ha sido fundamental, desde los conocimientos adquiridos en la asignatura Diseño Curricular sobre el currículo legal que establece los contenidos que se imparten en cada curso, a las nociones básicas sobre investigación educativa desarrolladas en la asignatura Iniciación a la investigación educativa en Matemáticas.

El tema central del presente trabajo gira en torno a la demostración matemática, vista desde la perspectiva del alumnado. Por lo tanto se hace necesario definir un concepto más amplio, el de esquema de prueba, que abarca desde justificaciones mediante ejemplos (esquemas de prueba inductivos) hasta demostraciones axiomáticas. Siendo la demostración una de las bases fundamentales sobre las que se asienta el razonamiento matemático, esta debe ser tratada en las aulas desde la Educación Primaria empezándose con razonamientos inductivos para poco a poco ir derivando a razonamientos deductivos cuando los alumnos hayan alcanzado la madurez suficiente para su comprensión, lo cual se produce precisamente en la Educación Secundaria. Por su importancia y por las dificultades que presentan los alumnos en relación con esta, la demostración matemática ha sido objeto de numerosas investigaciones desde el punto de vista didáctico, siendo mi principal motivación al elegir este tema para mi Trabajo Fin de Master, intentar entender con mayor profundidad el punto de vista del alumnado al respecto.

Para acercarnos a la visión del alumnado, y puesto que una de las herramientas más utilizadas en el aula es el libro de texto, se define como objetivo principal del trabajo la clasificación de los esquemas de prueba que aparecen, en el bloque de contenidos de Geometría, en cuatro libros de texto de diferentes editoriales y años de edición correspondientes al curso de 2º Bachillerato de Ciencias, con lo que se pretende poder establecer una comparativa general atendiendo a varios aspectos. Otro de los objetivos generales de este trabajo es el análisis de las respuestas dadas por los alumnos a un cuestionario que les proporcioné tras mi intervención en el aula durante el periodo de prácticas en Centros de Enseñanza Secundaria. Con todo ello se pretende acercarnos a la perspectiva del alumno en lo que respecta a la demostración matemática, atendiendo en primer lugar a los tipos de esquemas de prueba predominantes en los libros de texto y, en segundo lugar, mediante el análisis de las respuestas al cuestionario, al tipo de esquema de prueba que resulta de más fácil comprensión a los alumnos y a las dificultades más usuales que se pueden presentar.

En lo que se refiere a su estructura este trabajo consta de siete capítulos, el primero de ellos se corresponde con esta introducción.

En el capítulo II se describe el marco teórico que guiará toda la investigación. En primer lugar se explica qué se entiende por esquema de prueba, siendo este un concepto más general que el de demostración matemática ya que este término abarca desde las justificaciones basadas en el razonamiento inductivo, a las demostraciones formales propiamente dichas. En dicho capítulo, además, se ofrece una clasificación de los diversos tipos de esquemas de prueba que pueden aparecer en los libros de texto, mostrándose un ejemplo de cada uno.

En el capítulo III se hace una descripción del marco metodológico definiendo las etapas que se seguirán en la investigación. Se utiliza como marco metodológico algunas de las etapas definidas por Fox (1981) siendo necesario el diseño del plan de investigación antes de realizar el análisis de los datos, ya se trate del análisis de los contenidos de los libros de texto o de los datos recogidos mediante el cuestionario que proporcioné a los alumnos.

En el capítulo IV se especifican los objetivos e hipótesis de investigación. Estas hipótesis reflejan mi postura ante el problema de investigación descrito, y en cierto modo guiarán la investigación ya que esta estará encaminada a recabar la información necesaria para confirmar o refutar dichas hipótesis.

En el capítulo V se procede al análisis de los libros de texto, haciéndose en principio observaciones generales sobre la distribución de los contenidos. A continuación, se ofrece un recuento de los resultados y definiciones que aparecen y se reflexiona sobre la forma en que, en cada libro de texto, se presentan los contenidos relativos al bloque de Geometría. Por último se ofrece una clasificación de los esquemas de prueba utilizados por los libros de texto en relación a cada contenido y un recuento general acompañado de una reflexión sobre los tipos de esquema de prueba que predominan.

En el capítulo VI se realiza el análisis de las respuestas de los alumnos al cuestionario. Se expone para cada una de las preguntas los objetivos que se perseguían al realizarla, se clasifican las respuestas y se ofrece una reflexión sobre las principales dificultades encontradas en la comprensión de aspectos generales de la demostración matemática o de aspectos específicos en relación con la demostración de la fórmula de la distancia de un punto a un plano que desarrollé en mi intervención en el aula.

En el capítulo VII se exponen las conclusiones del estudio en relación con las hipótesis formuladas. Se basan en el análisis de los libros de texto y de las respuestas a las preguntas del cuestionario. Además se exponen propuestas de mejora y de ampliación que podrían ser materia de futuros estudios.

TRATAMIENTO DE LOS ESQUEMAS DE PRUEBA PRESENTES EN LOS LIBROS DE TEXTO EN CONTENIDOS DE GEOMETRÍA. SU COMPRENSIÓN POR EL ALUMNADO.

Objetivo de la investigación:

Efectuar una clasificación de los tipos de esquema de prueba que aparecen en los libros de texto de la asignatura Matemáticas de 2º Bachillerato, sobre contenidos de Geometría y analizar las respuestas de alumnos de 2º Bachillerato a un cuestionario *ad hoc*.

MARCO TEÓRICO

MARCO METODOLÓGICO

Análisis de los contenidos de los libros de texto

Análisis de las respuestas al cuestionario

Conclusiones

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

En primer lugar, para el posterior análisis de los libros de texto, se hace necesario definir con precisión lo que entenderemos por esquema de prueba. El esquema de prueba fue definido por Harel y Sowder (1998) como aquello que *constituye persuasión y convencimiento para esa persona, entendiendo como convencimiento el proceso utilizado por un individuo para eliminar sus dudas sobre la veracidad de una afirmación y como persuasión el proceso utilizado por un individuo para eliminar las dudas de otros sobre la veracidad de una afirmación*. Es por tanto un concepto más general que el de demostración matemática, ya que abarca todas las justificaciones que sirven para el convencimiento personal, aunque no constituyan una demostración formal. En este caso estamos tratando los esquemas de prueba que aparecen en los libros de texto, esto es las justificaciones que buscan el convencimiento y la persuasión de los posibles lectores de dichos libros, en particular de los alumnos que los utilicen como recurso de aprendizaje.

Para el análisis de los libros de texto se tomará como referencia la clasificación de los esquemas de prueba que aparece en tesis doctoral: *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la ley general de educación a la ley orgánica de educación* presentada por Laura Conejo Garrote en la Universidad de Valladolid (2015), que parte de las categorías de clasificación descritas por Ibañes (2001) e Ibañes y Ortega (2001). Clasificaremos, por tanto, los esquemas de prueba en las siguientes categorías:

1. Esquema de prueba inductivo de un caso (EPi1): trata del convencimiento del alumno sobre la veracidad de un enunciado exponiendo que este se cumple para un caso particular.

2. Esquema de prueba inductivo de varios casos (EPiV): lo mismo que el esquema de prueba inductivo anterior pero mediante el tratamiento de varios casos particulares.

3. Esquema de prueba inductivo sistemático (EPiS): se trata de establecer la validez del resultado mediante varios casos particulares que tratan de cubrir toda la casuística.

4 Esquema de prueba transformacional (EPt): se realizan transformaciones de imágenes o signos por medio de la deducción.

5. Esquema de prueba axiomático (EPa): se trata de una verdadera demostración matemática en las que se llega a validar el resultado mediante un proceso deductivo a partir de unos axiomas o resultados previos ya demostrados.

6. Pruebas preformales (PP): se sigue una línea de razonamiento similar al de una demostración formal, pero trabajando con un elemento concreto y no general. Hereda el carácter axiomático y transformacional de los esquemas de prueba axiomáticos.

7. Esquema de prueba gráfico (EPg): se basan en la visualización de representaciones gráficas que aportan convencimiento sobre un enunciado determinado.

A continuación mostraré un ejemplo de cada uno de estos esquemas de prueba. Dichos ejemplos han sido extraídos del trabajo de Ortega, T. y Planas, M. (2016). *Razonamiento, argumentación y demostración en educación primaria. Capítulo 12.* Editorial Paraninfo, actualmente en proceso de publicación.

II.1.Esquema de prueba inductivo de un caso

Siguiendo este esquema, vamos a justificar que al cortar dos rectas paralelas por una secante se obtienen ocho ángulos cuatro a cuatro congruentes (misma amplitud).

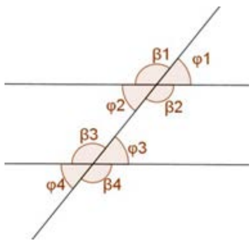

Figura 1

Los ocho ángulos se han denotado con las letras griegas β1, β2, β3, β4 y φ1, φ2, φ3, φ4.Los pares de ángulos β1y β2, β3y β4, φ1 y φ2, φ3 y φ4,se denominan opuestos por el vértice; los pares de ángulos β1y β3, β2y β4, φ1 y φ3, φ2 y φ4 se denominan correspondientes (mismo lado de la secante). Los pares de ángulos β1y β4, φ1 y φ4 se denominan alternos externos (distinto lado de la secante y fuera de la banda que determinan las paralelas). Los pares β2 y β3, φ2 y φ3 se denominan alternos internos (distinto lado de la secante y dentro de la banda que determinan las paralelas).

Para justificarlo según el esquema de prueba inductivo de un caso basta con considerar un esquema como el que aparece en la figura 2 y medir los ocho ángulos que se forman. Se comprueba entonces que solo hay dos medidas diferentes y que se verifican las congruencias de los ángulos opuestos por el vértice, de los correspondientes, de los alternos externos y de los alternos internos. Este caso particular puede constituir convicción para los alumnos respecto a la congruencia de dichos ángulos siempre que una recta corte a dos paralelas.

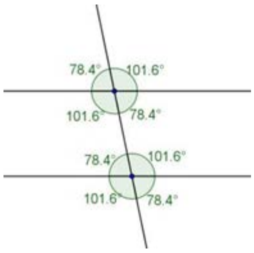

Figura 2

II.2.Esquema de prueba inductivo de varios casos

Como ejemplo se propone justificar mediante este esquema de prueba que un número es múltiplos de 9 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Se eligen varios ejemplos: 135,1852, 5678, 58986…

Se suman las cifras de estos números y se comprueba si el resultado es múltiplo de 9 o no. Después se determina si el número es múltiplo de 9 haciendo la división.

- Las cifras del número 135 suman 9 y se cumple que 135=15.9. por lo tanto 135 es múltiplo de 9.
- Las cifras de 1852 suman 16 que no es múltiplo de 9 y se comprueba que 1852=205.9+7. Por tanto 1852 no es múltiplo de 9.
- Las cifras de 5678 suman 26 que no es múltiplo de 9, y se comprueba que 5678=630.9+8. Por tanto 5678 no es múltiplo de 9.
- Las cifras de 58986 suman 36 que es múltiplo de 9, y se comprueba que 58986=6554.9.

Después de realizar varios ejemplos se induce el resultado general.

II.3.Esquema de prueba inductivo sistemático

Aunque este esquema de prueba sigue basándose en el razonamiento inductivo, es más exhaustivo que los anteriores ya que pretende probar el resultado considerando un ejemplo relativo a cada situación diferente encontrada.

Como ejemplo de este esquema de prueba se propone justificar el teorema del ángulo inscrito, según el cual la amplitud de cualquier ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de su central correspondiente.

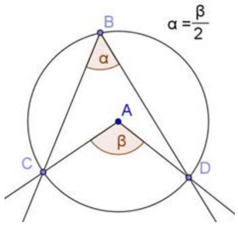

Figura 3

En la figura 4 se muestran todas las posibles posiciones del centro de la circunferencia, A, respecto de un ángulo inscrito: situado en uno de los lados, interior al ángulo y exterior al ángulo. En cada caso se miden la amplitud del ángulo inscrito y el central correspondiente y se comprueba que la amplitud del ángulo inscrito es la mitad de la de su central.

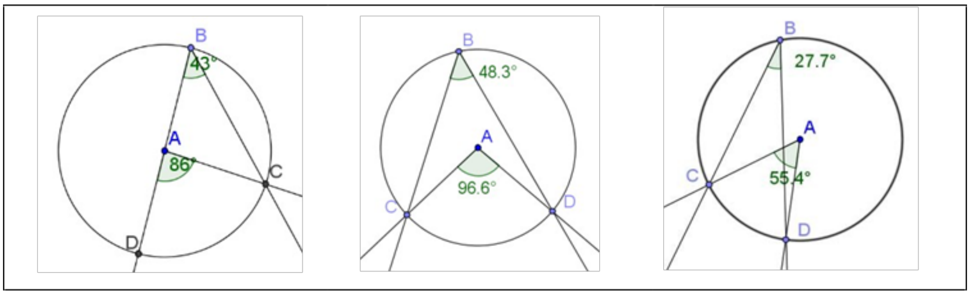

Figura 4

II.4.Esquema de prueba transformacional

Mediante este esquema probaremos que el área lateral de un cono recto de radio R y generatriz g es $A_l = \pi Rg$ unidades cuadradas.

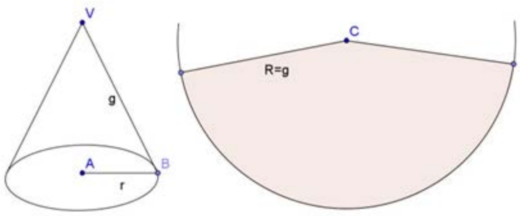

Figura 5

Al considerar el desarrollo del cono, como observamos en la Figura 5 podemos identificar el área lateral del cono con el área del sector circular, siendo en general $A_{sector} = \frac{logitud\ del\ arco \times radio}{2}$. En nuestro caso el radio es la generatriz del cono y la longitud de arco es $2\pi r$ siendo r el radio de la base. Sustituyendo tenemos que $A_l = \pi Rg$.

II.5.Esquema de prueba preformal

Para una mejor comprensión de en qué consiste, se proponen como ejemplo dos esquemas de prueba preformal: uno de fundamentos numéricos y otro de geometría.

- Esquema de prueba numérico

Se trata de probar que existen infinitos números primos, es decir que sea cual sea el número primo que consideremos siempre hay números primos posteriores a él. Razonando por reducción al absurdo supongamos que existiese un número finito de números primos. Supongamos que ese número es 1113. Todos estos números se pueden escribir en orden creciente uno tras otro así: p_1, p_2, p_3,…, p_{1113}. Es evidente que $k=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{1113}+1$ es un número mayor que p_{1113} y que no es múltiplo de ninguno de los números primos considerados (que eran todos) ya que al dividirlo por cualquiera de ellos el resto es 1. Por tanto, siempre se puede construir un número que no es múltiplo de los números primos considerados y, en suma, el conjunto de números primos debe ser infinito. Si en la prueba preformal se sustituye el número natural 1113 por n se obtiene una prueba axiomática. Los razonamientos son idénticos.

- Esquema de prueba geométrico

Se trata de probar el teorema generalizado de Pitágoras según el cual en un triángulo cualquiera, el cuadrado de uno de sus lados es la suma de los cuadrados de los otros dos lados más (menos) el doble producto de uno de estos lados multiplicado por la proyección del otro sobre él cuando el ángulo opuesto al lado que se calcula es obtuso (es agudo).Se considera la figura 6; se trata de determinar la longitud del lado b en función de la longitud de los otros dos lados(a=12 unidades y b=6 unidades) y de la proyección de lado c sobre el lado a (q=5 unidades).

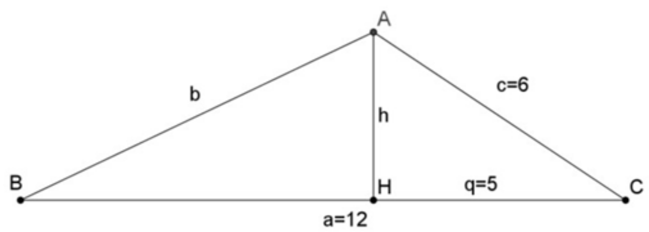

Figura 6

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABH, se tiene:

$$b^2 = (12 - 5)^2 + h^2$$

Ahora aplicando el teorema al triángulo rectángulo AHC, se tiene:

$$h^2 = 6^2 - 5^2$$

Sustituyendo este valor de h^2 en la primera igualdad, tenemos

$$b^2 = (12 -5)^2 + 6^2 - 5^2 =12^2- 2.5.12 + 5^2 + 6^2 -5^2=12^2 + 6^2-2.12.5$$

Sustituyendo ahora las longitudes concretas 12 y 6 por *a* y *c*, respectivamente, y la longitud de la proyección de c sobre a, 5, por $proy_a(c)$, se obtiene la expresión general:

$$b^2=a^2+c^2-2.a.\ proy_a(c)$$

Si se hubiesen realizado estas sustituciones al principio del esquema de prueba se habría obtenido la expresión general y el esquema de prueba hubiese sido axiomático.

Una expresión equivalente a la anterior es:

$$b^2=a^2+c^2-2.c.\ proy_c(a)$$

Con razonamientos análogos se podrían obtener las correspondientes igualdades cuando el ángulo opuesto fuera obtuso.

II.6.Esquema de prueba axiomático

Mediante este esquema de prueba, demostraremos el teorema del cateto y el teorema de Pitágoras como una consecuencia del primero.

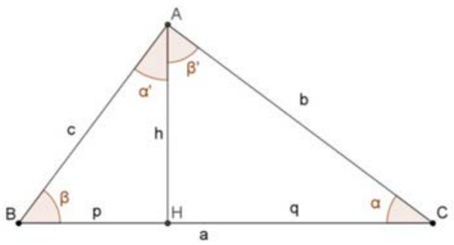

Figura 7

Según el teorema del cateto, en un triángulo rectángulo, cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de aquel (cateto) sobre ésta (hipotenusa). Este teorema permite calcular uno de los tres elementos (catetos, proyecciones o hipotenusa) dados dos de ellos. Por otra parte, el teorema de Pitágoras dice que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Tomando como referencia la figura 7 observamos que los triángulos ABC y ABH son semejantes ya que tienen los tres ángulos iguales: ambos son rectángulos y tienen un ángulo común, β. Por tanto los lados de ambos triángulos son proporcionales y se verifica la relación:

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{p}$$

Análogamente, los triángulos ABC y AHC son semejantes, ya que tienen los tres ángulos iguales: ambos son rectángulos y tienen un ángulo común, α. Por tanto los lados de ambos triángulos son proporcionales y se verifica la relación:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{q}$$

Una vez que se ha establecido el teorema del cateto, este se considera como un nuevo axioma y se puede utilizar para demostrar otros teoremas. Aquí se utiliza en la demostración (esquema de prueba axiomático) que se presenta del teorema de Pitágoras.

$\frac{a}{c} = \frac{c}{p}$ equivale a $c^2=a.p$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{q}$ equivale a $b^2=a.q$

Sumando, tenemos que $c^2+ b^2=a.p+a.q=a.(p+q)=a.a=a^2$,por lo que hemos conseguido demostrar el teorema de Pitágoras haciendo uso del teorema del cateto.

II.7.Esquema de prueba gráfico

Pueden ser estáticos o dinámicos. En el caso del presente trabajo, al tratarse de un análisis de libros de texto, solo se atenderá a los esquemas estáticos. Sin embargo en el desarrollo de la labor del aula son muy útiles los esquemas de prueba dinámicos generalmente desarrollados mediante medios informáticos.

Como ejemplo de esquema de prueba gráfico estático se considera una prueba visual de teorema de Pitágoras debida a Dudeney en 1917. Como se aprecia en la figura 8 los cuatro trapecios que componen el cuadrado de lado BC, junto con el cuadrado de lado AC, recubren sin fisuras y sin solapamientos el cuadrado de lado AB. Es decir, el cuadrado de la hipotenusa tiene igual área que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos.

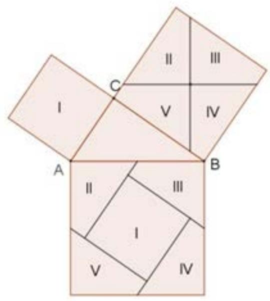

Figura 8

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

Se considerará para este estudio la metodología de investigación educativa de Fox (1981) quien en su obra *El proceso de investigación en educación*, describe una metodología de análisis dividida en 17 etapas secuenciales, estructuradas en tres partes, que organizarían el desarrollo de una investigación. Dichas etapas son las siguientes:

- Primera parte: diseño del plan de investigación

    1. Idea o necesidad impulsora y área problemática

    2. Examen inicial de la Bibliografía

    3. Definición del problema concreto de la investigación

    4. Estimación del éxito potencial de la investigación planteada

    5. Segundo examen de la bibliografía

    6. Selección del enfoque de la investigación

    7. Formulación de las hipótesis de la investigación

    8. Selección de métodos y técnicas de recogida de datos

    9. Selección y elaboración de los instrumentos de recogida de datos

    10. Diseño del plan de análisis de datos

    11. Diseño del plan de recogida de datos

    12. Identificación de la población y muestra a utilizar

    13. Estudios pilotos del enfoque de recogida de datos, métodos e instrumentos y del plan de análisis de datos

- Segunda parte: ejecución del plan de investigación

    14. Ejecución del plan de recogida de datos

    15. Ejecución del plan de análisis de datos

    16. Preparación de los informes de la investigación

- Tercera parte: aplicación de los resultados

    17. Diseminación (difusión) de los resultados y propuestas de medidas de actuación.

Señalo en negrita aquellas etapas que seguiré en el desarrollo de este trabajo. Para empezar es imprescindible definir la necesidad impulsora del mismo, que se enmarca en el contexto del Mater Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la especialidad de Matemáticas. Como se ha señalado en la introducción, puesto que la demostración matemática suele presentar dificultades para los alumnos, y una de las herramientas de trabajo en las aulas es el libro de texto, el análisis de los esquemas de prueba que aparecen en ellos puede resultar útil para dilucidar de qué forma puede enfocarse el tratamiento de estos esquemas en el aula y mejorar su compresión por parte del alumnado.

En el examen inicial de la bibliografía existente, como ya se apuntó en la sección correspondiente al marco teórico, me he centrado en el estudio de la clasificación de los esquemas de prueba descrita por Ibañes (2001) e Ibañes y Ortega (2001). Dicho marco teórico guiará el análisis de los libros de texto considerados en el estudio.

En la sección siguiente se explicitaran las hipótesis de la investigación, que podrán ser confirmadas o refutadas tras el análisis de los datos correspondientes al estudio de los esquemas de prueba de los libros de texto. También se extraerán conclusiones de los cuestionarios acerca de la demostración de la fórmula de la distancia de un punto a un plano que proporcioné a los alumnos tras mi intervención en el aula en el periodo de prácticas.

Es necesario por tanto diseñar un plan para la recogida y el análisis de los datos que serán presentados generalmente mediante tablas, lo cual permitirá organizar la información para su posterior análisis e interpretación. Por último, se procederá a dicho análisis.

CAPÍTULO IV

OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE TRABAJO

IV.1.Objetivos generales

Se establecen como objetivos generales del trabajo los siguientes:

- Efectuar una clasificación de los tipos de esquema de prueba que aparecen en los libros de texto de la asignatura Matemáticas de 2º Bachillerato. Para ello se han seleccionado cuatro libros de texto de diferentes editoriales y años de edición lo que permitirá realizar una comparativa de los libros en función de dichos aspectos. El análisis se centrará en los esquemas de prueba que aparecen en el bloque de contenidos de Geometría.
- Analizar las respuestas de alumnos de 2º Bachillerato a un cuestionario que les proporcioné durante el periodo de prácticas y en el cual se abordan aspectos generales sobre la demostración matemática y aspectos específicos sobre mi intervención en el aula que consistió en la demostración de la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

IV.2. Hipótesis de investigación

Se definen como hipótesis de investigación las siguientes:

- <u>En relación con el análisis de libros de texto</u>:

➢ Hipótesis 1: los esquemas de prueba que predominan en los libros de texto son los esquemas de prueba inductivos de un caso y los esquemas de prueba axiomáticos.

➢ Hipótesis 2: en los libros de texto correspondientes a la anterior ley educativa (LOGSE) aparecen más esquemas de prueba axiomáticos que en los libros correspondientes a la ley vigente este curso para 2º Bachillerato (LOE).

➢ Hipótesis 3: escasa presencia de esquemas de prueba inductivo sistemáticos, transformacionales, gráficos, o pruebas preformales.

➢ Hipótesis 4: en muchos casos aparecen asociados a un mismo contenido un esquema de prueba axiomático junto con un esquema de prueba inductivos, ya sea de un caso, de varios casos o sistemático.

- <u>En relación con el análisis de las respuestas al cuestionario</u>

➢ Hipótesis 5: para muchos alumnos un enunciado matemático es veraz si se cumple con un ejemplo.

➢ Hipótesis 6: algunos alumnos presentan dificultades a la hora de distinguir las demostraciones de otros procesos como comprobaciones o ejemplos.

- Hipótesis 7: los alumnos muestran en general una preferencia por los esquemas de prueba inductivos de un caso.
- Hipótesis 8: una vez demostrado un enunciado algunos alumnos pueden tener dificultades a la hora de ser conscientes de sus implicaciones, es decir que el resultado puede aplicarse directamente sin necesidad de más comprobaciones, que no pueden hallarse contraejemplos, etc.

Estas hipótesis reflejan mi postura respecto al problema de investigación descrito, teniendo en cuenta mis propias observaciones y lo aprendido en las diversas asignaturas del master. De alguna forma serán una guía en mi trabajo ya que este se centrará en la comprobación o refutación de las mismas.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE TEXTOS

V.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se pretende hacer un análisis pormenorizado de los libros de texto considerados, correspondientes a la asignatura Matemáticas II de 2º Bachillerato, en lo que respecta al bloque de contenidos de Geometría, centrándome en la clasificación y comentario de los esquemas de prueba que aparecen.

Los libros utilizados para este análisis son los siguientes:

- Bachillerato2. Matemáticas II. Editorial Anaya. Autores: José Colera, Mª José Oliveira, Leticia Colera. Año de edición: 2014.
- Matemáticas II. 2 Bachillerato. Editorial Santillana. Proyecto: La casa del saber Autores: Angélica Escoredo, María Dolores Gómez, José Lorenzo, Pedro Machín, Carlos Pérez, José del Río, Domingo Sánchez. Año de edición: 2009.
- Matemáticas M_2. Editorial Edelvives. Proyecto 2.2.Autores: Mª Felicidad Monteagudo Martínez, Jesús Paz Fernández. Año de edición: 2003.
- Matemáticas 2. Editorial SM. Colección Algoritmo. Autores: J.R Vizmanos, M. Anzola. Año de edición: 2001.

En primer lugar se expondrá la estructura de cada uno de los libros en lo que respecta al bloque de Geometría, refiriéndose a las unidades didácticas de que consta y a los contenidos generales que se tratan en cada una de ellas.

Editorial Anaya	
Unidad 5: Vectores en el espacio	• Operaciones con vectores • Expresión analítica de un vector(dependencia e independencia lineal, base, coordenadas de un vector) • Producto escalar de dos vectores y sus aplicaciones • Producto vectorial. Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial • Producto mixto de tres vectores. Interpretación geométrica
Unidad 6:Puntos, rectas y planos en el espacio	• Sistema de referencia en el espacio • Aplicaciones de los vectores a problemas geométricos • Ecuaciones de la recta • Posiciones relativas de dos rectas • Ecuación del plano • Posiciones relativas de rectas y planos
Unidad 7: Problemas métricos	• Medida de ángulos entre rectas y planos • Distancia entre puntos, rectas y planos • Medida de áreas y de volúmenes • Lugares geométricos en el espacio

	(plano mediador, plano bisector, esfera, elipsoides, paraboloides, hiperboloides)

Editorial Santillana	
Unidad 4: Geometría en el espacio	• Vectores en el espacio (coordenadas, operaciones, aplicaciones) • Ecuaciones de la recta en el espacio • Ecuaciones del plano en el espacio • Posiciones relativas(de dos rectas, de recta y plano, de dos planos, de tres planos)
Unidad 5: Producto escalar	• Definición, propiedades, expresión en coordenadas • Aplicaciones del producto escalar. • Ángulos entre rectas y planos. • Proyecciones ortogonales • Puntos simétricos • Distancias- fórmula de la distancia de un punto a un plano
Unidad 6:Productos vectorial y mixto	• Producto vectorial: propiedades, interpretación geométrica, expresión en coordenadas • Aplicaciones del producto vectorial • Área de un paralelogramo y de un triángulo dadas las coordenadas de sus vértices • Fórmula de la distancia de un punto a una recta. • Producto mixto: propiedades, interpretación geométrica, expresión en coordenadas. • Volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro. • Fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan • Lugares geométricos en el espacio • La superficie esférica(plano tangente a una esfera, posición relativa de una recta o un plano y una esfera)

Editorial Edelvives	
Unidad 2: Espacios vectoriales(*)	• El conjunto $\mathbf{R}^n$ • Definición de espacio vectorial • Combinaciones lineales • Sistema generador • Dependencia e independencia lineal • Bases de un espacio vectorial • Subespacios vectoriales

Unidad 6:Espacio afín	• Definición de espacio afín • Ecuaciones de la recta • Ecuaciones del plano • Ecuación canónica o segmentaria de un plano • Posiciones relativas (dos rectas, una recta y un plano, dos planos, tres planos) • Haz de rectas(haz de rectas que pasan por un punto, haz de rectas paralelas, haz de rectas que pasan por un punto y se apoyan en una recta) • Radiaciones de rectas • Haz de planos(planos paralelos, planos que se cortan en una recta)
Unidad 7:Espacio euclídeo	• Módulo o norma de un vector • Producto escalar • Ángulos entre dos vectores • Desigualdad de Schwarz y desigualdad triangular • Ángulo entre dos rectas(rectas bisectrices) • Vector normal de un plano. Ángulo diedro de dos planos(plano bisector) • Proyecciones ortogonales • Angulo entre una recta y un plano • Puntos simétricos
Unidad 8:Espacio métrico	• Definición de distancia, distancia euclídea y espacio métrico • Distancia de un punto a un plano • Distancia de un punto a una recta • Distancia de un plano a una recta • Distancia entre dos rectas(rectas paralelas, rectas que se cruzan) • Producto vectorial. Interpretación geométrica de su módulo • Producto mixto de tres vectores. Interpretación geométrica. • Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.
Unidad 9:Curvas y superficies	• Coordenadas cartesianas y coordenadas polares • Ecuaciones de algunas curvas en coordenadas polares(recta, circunferencia, espiral de Arquímides, espiral logarítmica, cardiode) • Coordenadas cilíndricas y esféricas • Curvas y superficies en el espacio. Superficie de revolución • La esfera(posiciones relativas de un plano respecto de una esfera, y de una recta y una esfera)

(*) Aunque la Unidad 2 pertenece en dicho libro al bloque de Álgebra, la incluyo puesto que los conceptos que trata sobre espacios vectoriales son mencionados en los demás libros en el bloque de Geometría.

Editorial SM	
Unidad 4:Curvas en el plano: lugares geométricos	• Coordenadas cartesianas(forma explícita e implícita, forma paramétrica) • Cónicas • Curvas mecánicas(cicloide, cardiode) • Coordenadas polares • Algunas curvas en polares(recta ,circunferencia) • Espirales(espiral de Arquímides)
Unidad 5:Los vectores en el espacio	• El conjunto $\mathbf{R}^3$ • Los vectores fijos del espacio • Los vectores libres del espacio • Operaciones con vectores libres • Bases de V^3. Coordenadas de un vector • Producto escalar de dos vectores libres(propiedades, expresión analítica) • Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores • Producto vectorial de dos vectores libres(definición, interpretación geométrica, expresión analítica) • Producto mixto de tres vectores(interpretación geométrica, expresión analítica, propiedades)
Unidad 6:Ecuaciones de rectas y planos	• Sistema de referencia en el espacio. Cambio de sistema de referencia • Ecuación de la recta • Ecuación del plano(ecuación normal del plano, ecuación del plano que pasa por tres puntos, ecuación segmentaria)
Unidad7:Posiciones de rectas y planos	• Posiciones de dos planos. Haz de planos paralelos • Posiciones de tres planos. Haz de planos secantes. • Posiciones de recta y plano • Posición de dos rectas
Unidad 8:Propiedades métricas	• Ángulo de dos rectas, de dos planos, de recta y plano • Distancia entre dos puntos. Propiedades de la distancia. • Distancia de un punto a un plano, de un punto a una recta. • Plano mediador, plano bisector • Distancia entre rectas que se cruzan. Perpendicular común • Área de paralelogramos y triángulos • Volumen de paralelepípedos y tetraedros
Unidad 9:Curvas y superficies	• Ecuaciones paramétricas de una curva • Ecuaciones paramétricas de una superficie • Coordenadas cilíndricas y esféricas • Superficies cilíndricas y cónicas

	• Superficies de traslación y de revolución • Hélices y helicoides • Esfera. Plano tangente a una esfera.

V.2. OBSERVACIONES GENERALES

Aunque el análisis de estos libros de texto no pretende hacerse desde una perspectiva histórica, es preciso reparar en las diferencias entre ellos en relación con el año de publicación. Mientras los libros de Anaya y Santillana son fácilmente comparables por estar publicados según el currículo de la Ley Orgánica de Educación (LOE) promulgada en 2006, estos difieren de manera notable de los libros de Edelvives y SM publicados según el currículo de Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo de España (LOGSE) de 1990. Esto es así, puesto que los contenidos referentes a curvas y superficies no se contemplan en el currículo actual de 2º Bachillerato salvo algunos aspectos generales referentes a la esfera y otros lugares geométricos en el espacio. Por lo tanto, en la comparativa de los libros me centraré en los conceptos tratados por todos ellos.

Otra apreciación que es preciso realizar es que, si bien se está llevando a cabo la implantación de una nueva ley educativa que modifica la anterior en algunos aspectos, la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), esto aún no se ha visto reflejado en los libros de 2º de Bachillerato por no estar implantada este curso en dicho nivel. Por lo tanto los libros más actuales de que se puede disponer están basados en el currículo LOE.

Como consideraciones generales, es preciso observar que, aun considerando la materia común en dichos libros, la estructura de los temas y el enfoque con que los tratan es distinto en cada uno de los casos. En lineas generales, el libro de Edelvives trata los conceptos con un mayor formalismo, introduciendo definiciones de espacio afín, espacio euclídeo y espacio métrico que no aparecen explícitamente en el resto de los libros. Los conceptos correspondientes a espacios vectoriales, tales como el de dependencia o independencia lineal, sistema generador, base, etc., aparecen en la Unidad 2 correspondiente al bloque de Algebra. Dichos conceptos se presentan de forma rigurosa para espacios vectoriales generales (se da la definición de espacio vectorial en base a sus propiedades) y en algunos casos se incluyen demostraciones axiomáticas de los teoremas formulados.

V.2.1.Organización de los contenidos

Aun cuando consideramos los contenidos comunes a los cuatro libros de texto, estos difieren en su organización como se muestra en el siguiente cuadro.

Libro de texto	Secuenciación de los contenidos
Anaya	1)Vectores: producto escalar, vectorial y mixto 2) Ecuaciones de rectas y planos. Posiciones relativas 3) Problemas métricos: ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
Santillana	1) Vectores. Ecuaciones de rectas y planos. Posiciones relativas 2) Producto escalar. Aplicaciones: ángulos, fórmula de la distancia de un punto a un plano, etc. 3) Producto escalar y mixto. Aplicaciones: fórmula de la distancia de un punto a una recta, distancia de dos rectas que se cruzan, áreas y volúmenes
SM	1) Vectores: producto vectorial, escalar y mixto 2) Ecuaciones de rectas y planos 3) Posiciones relativas de rectas y planos 4) Propiedades métricas: ángulos, distancias, áreas y volúmenes
Edelvives	1)Espacio vectorial 2)Espacio afín: ecuaciones de rectas y planos; posiciones relativas 3) Espacio euclídeo: producto escalar. Ángulos entre rectas y planos 4) Espacio métrico. Fórmula de la distancia de un punto a un plano. Producto vectorial y mixto. Áreas y volúmenes

Se observa una estructura similar en la organización de los contenidos en los libros de Anaya y SM. En ellos se trata en el primer tema del bloque de Geometría aspectos generales sobre vectores y los productos escalar, vectorial y mixto que se utilizarán en el contexto de los problemas métricos para la obtención de la fórmula de la distancia de un punto a un plano, de un punto a una recta y de dos rectas que se cruzan, respectivamente. En el libro de Santillana existen dos unidades didácticas diferenciadas en las que se explica el producto escalar y sus aplicaciones (Unidad 5) y el producto vectorial y mixto junto con las fórmulas y situaciones en que aparecen (Unidad 6). En el libro de texto de Edelvives asimismo se expone en primer lugar el producto escalar en la Unidad 7 (Espacio euclídeo) y en la siguiente unidad didáctica el producto vectorial y mixto.

Se podría decir entonces que en los libros de texto de Anaya y SM predomina una visión más general, presentándose en primer lugar las herramientas que servirán para la resolución de los problemas métricos, pudiéndose mostrar la solución a estos desde varias perspectivas en la última unidad didáctica del bloque de contenidos. En el caso del libro de Santillana se prefiere otro enfoque que pretende ante todo asociar cada producto de vectores (escalar, vectorial o mixto) a las situaciones en que se emplea; sin embargo, en mi opinión se pierde un poco la perspectiva global al tratar los problemas métricos. En el libro de texto de Edelvives sí se distingue entre problemas afines y métricos dedicando a estos últimos la Unidad 8 (Espacios métricos) y parte de la Unidad 7(espacio euclídeo) en la que se explica cómo calcular los ángulos formados por rectas y planos.

V.2.2. Presentación de los conocimientos previos

En lo que se refiere a la presentación de los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de los contenidos de geometría, tanto en libro de Anaya como en el de Santillana, en la segunda página de cada unidad didáctica, proponen una serie de ejercicios encaminados a una mejor comprensión de los nuevos conceptos. En el libro de Anaya aparecen bajo el título *Reflexiona y resuelve* y en el de Santillana bajo el título *Antes de comenzar… recuerda.* Estos recordatorios se centran en lo que los alumnos debieran conocer para una mejor comprensión y asimilación del nuevo contenido, por ejemplo en el libro de Santillana se hace mención al cálculo de determinantes y al rango de una matriz, lo cual será fundamental para establecer las posiciones relativas de rectas y planos.

En los libros de texto de SM y Edelvives no aparece un recordatorio de aquellos conocimientos previos necesarios para el nuevo aprendizaje, aunque se hace mención en el desarrollo de la teoría a aquellos aspectos de álgebra (discusión y resolución de sistemas) imprescindibles en la determinación de las posiciones relativas de rectas y planos.

En el caso del libro de SM al finalizar la Unidad 8(Propiedades métricas) se expone un cuadro resumen en el que se relacionan los conceptos y fórmulas desarrollados en las anteriores unidades con los que corresponden en el espacio real bidimensional (el plano), en caso de tener sentido en este. Asimismo, en el libro de texto de Anaya, al finalizar el bloque de Geometría se expone bajo el título *Con vistas a la prueba de acceso a la universidad, organiza tu aprendizaje* una serie de consejos útiles a la hora de resolver problemas sobre vectores o lugares geométricos, o problemas afines y métricos, aludiendo a los ejercicios resueltos en los que se desarrollan las técnicas expuestas.

V.3. RECUENTO DE DEFINICIONES Y RESULTADOS

En este capítulo realizaré un recuento de las definiciones y resultados más importantes que aparecen en cada uno de los libros. En los cuatro textos considerados se utilizan recuadros para remarcar los conceptos y resultados más importantes. Para poder establecer una comparativa general consideraré únicamente las unidades didácticas de contenidos comunes a los cuatro libros, es decir, excluiré las correspondientes a curvas y superficies y su parametrización. En el caso del libro de Edelvives consideraré además la unidad 2 correspondiente a espacios vectoriales ya que en ella se detallan conceptos como el de dependencia e independencia lineal, sistema generador, base etc., que son necesarios para el desarrollo del bloque de Geometría (en el resto de libros estas nociones aparecen directamente en el contexto geométrico del espacio vectorial tridimensional $\mathbf{R}^{3)}$.Sin embargo habrá que tener en cuenta que, al presentar en el libro de Edelvives el concepto de espacio vectorial como estructura algebraica general y desarrollarlo a lo largo de todo un tema aparecerán un mayor número de definiciones y teoremas relativos a él.

Tabla V.1. Recuento de definiciones y resultados del libro de texto de la editorial Anaya

Editorial Anaya			
Unidad	**Definiciones**	**Resultados o teoremas**	**Justificaciones**
Unidad 5: Vectores en el espacio	9	10	16
Unidad 6: Puntos, rectas y planos en el espacio	8	12	22
Unidad 7: Problemas métricos	11	20	25
Total	28	42	63

Tabla V.2. Recuento de definiciones y resultados del libro de texto de la editorial Santillana

Editorial Santillana			
Unidad	**Definiciones**	**Resultados o teoremas**	**Justificaciones**
Unidad 4: Geometría en el espacio	13	10	22
Unidad 5: Producto escalar	12	19	23
Unidad 7: Productos vectorial y mixto	7	15	24
Total	32	44	69

Tabla V.3. Recuento de definiciones y resultados del libro de texto de la editorial Edelvives

Editorial Edelvives			
Unidad	**Definiciones**	**Resultados o teoremas**	**Justificaciones**
Unidad 2: Espacios vectoriales	10	5	7
Unidad 6: Espacio afín	17	14	25
Unidad 7: Espacio euclídeo	13	16	15
Unidad8:Espacio	11	13	18

métrico			
Unidad 9:Curvas y superficies(resultados y definiciones referentes a la esfera)	1	2	4
Total	52	50	69

Tabla V.4. Recuento de definiciones y resultados del libro de texto de la editorial SM

Editorial SM			
Unidad	**Definiciones**	**Resultados o teoremas**	**Justificaciones**
Unidad 5: Los vectores en el espacio	13	11	12
Unidad 6: Ecuaciones de rectas y planos	10	10	13
Unidad 7: Posiciones de rectas y planos	2	6	11
Unidad8:Propiedades métricas	10	15	23
Unidad 9:Curvas y superficies(resultados y definiciones referentes a la esfera)	2	1	2
Total	37	43	61

Tabla V.5.Comparativa de las editoriales

	Anaya	Santillana	Edelvives	SM
Año de publicación	**2014**	**2009**	**2003**	**2001**
Definiciones	**28**	**32**	**52**	**37**
Resultados o teoremas	**42**	**44**	**50**	**43**
Justificaciones	**63**	**69**	**69**	**61**

V.3.1.Observaciones

Como se puede apreciar en la tabla V.5 existe una mayor abundancia de definiciones en el libro de Edelvives; esto es debido en gran parte al mayor formalismo con que este libro de texto trata los conceptos, incluyendo definiciones de espacio vectorial, y otras asociadas a él como sistema generador, dimensión, subespacio vectorial, que no se incluyen en el resto de libros de texto considerados. También define de manera formal los conceptos de espacio afín, espacio euclídeo y espacio métrico, introduciendo para este último la noción de distancia como una aplicación que satisface unas determinadas propiedades. En el desarrollo de las diferentes unidades se incluyen además definiciones comunes a los otros libros de texto, como la definición de haz de planos, o las correspondientes a las proyecciones ortogonales (proyección ortogonal de un punto sobre un plano y proyección ortogonal de un punto sobre una recta). En concreto, estas definiciones también aparecen en el libro de texto de Santillana.

En cuanto a los resultados el libro de texto de Edelvives, algunos no se contemplan en el resto de libros de texto como la desigualdad de Schwarz ($|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$) y la desigualdad triangular ($|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$) que aparecen acompañadas de sus respectivas demostraciones. Por otra parte, este libro de texto carece de otros resultados presentes en el resto, por ejemplo no incluye las fórmulas correspondientes a la distancia de un punto a una recta, o la distancia entre dos rectas que se cruzan. Otra particularidad del libro de texto de Edelvives se refiere al hecho de que algunos de los resultados más importantes vienen enunciados como teoremas.

V.3.2. Definiciones y resultados asociados al concepto de espacio vectorial

Como ya se ha comentado el libro de texto de Edelvives dedica una unidad (Unidad 2) en el bloque de Algebra al estudio de los espacios vectoriales definiéndolo como estructura algebraica caracterizada por las propiedades que ha de cumplir la ley interna (suma de vectores) y la ley externa (multiplicación de un vector por un escalar).El resto de libros de texto se refieren directamente a $\mathbf{R}^3$ como espacio vectorial definiendo sus operaciones. En el caso del libro de texto de Anaya se hace mención de las propiedades que cumplen dichas operaciones indicando que *todas esas propiedades confieren al conjunto de vectores de estructura de espacio vectorial*, haciendo alusión a la existencia de una estructura algebraica general.

En los libros de texto de Anaya, Santillana y SM, tras definir el concepto de dependencia e independencia lineal, se define base del espacio vectorial real tridimensional como tres vectores no coplanarios cualesquiera. Se hace además el siguiente comentario: ‘Tres vectores no coplanarios son linealmente independientes, y además cualquier otro vector del espacio se puede poner como combinación lineal de ellos Por eso decimos que forman una base’. En dicha aclaración aparece la noción de sistema generador al afirmarse que cualquier vector del espacio se puede poner como combinación lineal de los vectores considerados. Además, en el libro de texto de Anaya se insiste en la unicidad de dicha combinación lineal lo cual es una consecuencia de la independencia de los vectores de la base. En el libro de texto de Edelvives también se presta atención a las nociones de dependencia e independencia lineal, así como de sistema generador, y aparecen demostrados teoremas relacionados que no se contemplan en los otros tres libros de texto.

V.3.3.Concepto de espacio afín

Existen diferentes formas de introducir el concepto de espacio afín y así se observa en los libros de texto considerados. Entre ellas cabe señalar:

1) Definición explícita de espacio afín
2) Distinción entre vectores fijos (asociado al concepto de espacio afín) y vector libre (asociado al concepto de espacio vectorial) considerando este último como cada una de las clases de equivalencia al considerar la siguiente relación: dos vectores son equipolentes (están relacionados) si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.
3) Definiendo la relación de equipolencia de vectores, pero sin usar los términos vector fijo y vector libre.
4) Definición de sistema de referencia afín en el espacio, puntualizando que a cada punto P le corresponde el vector $\overrightarrow{OP}$, siendo O el punto que tomamos como origen de la referencia.
5) Definiendo la operación ‘suma de un punto más un vector’ (que para un espacio afín general correspondería a la acción del espacio vectorial sobre el conjunto de puntos considerado). En nuestro caso estaríamos considerando $\mathbf{R}^3$ como conjunto de puntos y como espacio vectorial.

   Muestro en la siguiente tabla la forma en que introducen el concepto los libros de texto considerados:

Tabla V.6. Presentación del concepto de espacio afín en los libros de texto

Libro de texto	Definición	Vectores fijos/libres	Relación de equipolencia	Sistema de referencia afín	Suma de un punto más un vector
Anaya			×	×	
Santillana				×	×
SM		×		×	
Edelvives	×			×	

Se observa que en los cuatro libros de texto considerados se define sistema de referencia afín ya que es necesario para el posterior desarrollo de la teoría, considerando en el caso del libro de Anaya directamente el sistema de referencia canónico, es decir $R=\{O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ con origen en el origen de coordenadas y base, la canónica $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$). Sin embargo cada uno de ellos presenta el concepto de espacio afín de un modo diferente.

V.3.4. Ecuaciones de recta y plano

Por lo que respecta a las diferentes ecuaciones de la recta y el plano, las he tomado como definiciones, aun cuando partir de una de ellas podemos obtener las demás. En los cuatro libros de texto considerados se parte de la ecuación vectorial de la recta, que puede ser expresada también mediante sus ecuaciones paramétricas, y a partir de ellas se obtiene la ecuación continua sin más que despejar el parámetro en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualar. A partir de la ecuación continua se obtienen las implícitas, que caracterizan la recta como intersección de dos planos.

Sin embargo no he observado en los libros de texto ninguna mención al paso de ecuaciones implícitas a paramétricas, que simplemente se realizaría resolviendo el sistema compatible indeterminado que forman dichas ecuaciones.

Una apreciación que aparece en los libros de Anaya y SM y que me parece interesante se refiere a que tiene sentido la expresión de las ecuación continua de la recta aun cuando alguno de los denominadores sean nulos. En el libro de texto de Anaya se puntualiza que aun no siendo correcta aritméticamente, pude admitirse tal expresión con carácter simbólico(los denominadores nos proporcionan información sobre las coordenadas del vector director de la recta).

En cuanto a las ecuaciones del plano se parte de sus ecuaciones paramétricas, y se procede a la eliminación de los parámetros para obtener sus ecuaciones implícitas. Se razona del siguiente modo:

Se parte de las ecuaciones paramétricas del plano donde P=(p_1, p_2, p_3)

es un punto del plano y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *y* $\vec{v}$=(v_1, v_2, v_3), *dos vectores generadores del plano.*

$$\begin{cases} x = p_1 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = p_2 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = p_3 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}$$

Se considera el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} u_1\lambda + v_1\mu = x - p_1 \\ u_2\lambda + v_2\mu = y - p_2 \\ u_3\lambda + v_3\mu = z - p_3 \end{cases}$$

Para que el sistema tenga solución (y ha de tenerla para los puntos (x, y, z) que pertenecen al plano) el determinante de la matriz ampliada ha de ser cero

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando dicho determinante se obtienen la ecuación implícita del plano.

Dicho argumento aparece explícitamente en los libros de texto de Anaya y Edelvives. En los libros de Santillana y SM, se hace alusión a la dependencia lineal de los vectores $\overrightarrow{PX} = (x - p_1, y - p_2\ z - p_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *y* $\vec{v}$=(v_1, v_2, v_3), para cualquier punto X=(x, y, z) del plano, lo cual sería otra forma de justificar que el determinante antes indicado ha de valer cero.

Por lo que respecta a la ecuación del plano a partir de un punto y un vector normal, se plantea en los libros de texto desde dos perspectivas distintas. En los libros de Anaya y

SM se expone cómo calcular la ecuación de un plano dado su vector normal (perpendicular al plano) $\vec{n} = (A, B, C)$ y un punto P=(x_0, y_0, z_0), ya que si tomamos un punto cualquiera X=(x, y, z) del plano ha de cumplirse $\vec{n}.\overrightarrow{PX}$=0 por ser ambos vectores perpendiculares. En coordenadas tendríamos

$$A.(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

lo que nos conduciría de nuevo a la ecuación implícita del plano

$$A.x + B.y + C.z + D = 0$$

En los libros de texto de Santillana y Edelvives, tras desarrollar la teoría sobre el producto escalar, se parte de la ecuación implícita del plano y se comprueba que cualquier vector contenido en él es perpendicular al vector $\vec{n} = (A, B, C)$ al que se denomina vector normal. En el texto de Edelvives también se lo denomina vector director del plano, pero esta nomenclatura me parece más confusa, ya que los alumnos podrían confundirlo con los vectores generadores del plano.

V.3.5. Posiciones relativas de rectas y planos

En general, el estudio de las posiciones de rectas y planos se aborda desde la discusión de los sistemas formados por sus ecuaciones. Sin embargo en cada libro de texto se hace un tratamiento particular.

- Posición relativa de dos rectas.

a) Se estudia mediante los rangos de las matrices M (formada por las coordenadas de los vectores directores de las rectas) y M´ (formadas por las coordenadas de los vectores directores y de un vector que une dos puntos de la recta).

b) En primer lugar se intenta detectar si los vectores directores son proporcionales o no lo son. En caso de serlo hay dos posibilidades: que las rectas sean coincidentes (se comprueba si un punto de una de las rectas está en la otra) o que sean paralelas (no tienen puntos en común). En caso de que los vectores directores no sean proporcionales las rectas pueden cortase o cruzarse. Para determinarlo se considera el determinante

$$\begin{vmatrix} d_1 & d'_1 & p'_1 - p_1 \\ d_2 & d'_2 & p'_2 - p_2 \\ d_3 & d'_3 & p'_3, - p_3 \end{vmatrix}$$

donde $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2, d_3)$, $\overrightarrow{d'} = (d'_1, d'_2, d'_3)$ son los vectores directores de las rectas y $\overrightarrow{P\,P'}$=$(p'_1 - p_1, p'_2 - p_2, p'_3, - p_3)$es un vector que une un punto de una recta con un punto de la otra. Si dicho determinante es cero los vectores son linealmente dependientes (son coplanarios) y las rectas se cortan. Si el determinante es distinto de cero las rectas se cruzan.

c) Discusión del sistema que surge de igualar las ecuaciones paramétricas

d) Partiendo de sus ecuaciones implícitas, para lo que sería necesario el estudio del sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

Cada libro de texto considerado expone cómo determinar la posición relativa de dos rectas utilizando uno o varios de los métodos anteriores, siendo el a), el b) y el c) muy semejantes ya que en ambos casos el planteamiento se reduce al estudio del rango de las matrices M y M´.

Tabla V.7. Tratamiento del contenido sobre posiciones relativas de dos rectas

Libro de texto	Método a)	Método b)	Método c)	Método d)
Anaya	×	×		
Santillana	×			×
SM	×			×
Edelvives			×	×

Se observa que en los libros considerados predomina la exposición del método a) y d), siendo dos libros de texto los que tratan ambos métodos.

- <u>Posición relativa de recta y plano</u>

a) Teniendo en cuenta que una recta está contenida o es paralela a un plano, si y solo si, su vector director y el vector normal del plano son perpendiculares. En caso contrario la recta corta al plano en un punto.

b) Estudiando el sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta y la ecuación general del plano.

c) Considerando la expresión de un punto genérico de la recta, y sustituyendo las coordenadas de ese punto genérico en la ecuación general del plano obteniéndose una única ecuación lineal que podrá tener una única solución (la recta corta al plano), infinitas soluciones (la recta está contenida en el plano) o ninguna solución (la recta es paralela al plano).

Tabla V.8. Tratamiento del contenido sobre la posición relativa de recta y plano

Libro de texto	Método a)	Método b)	Método c)
Anaya	×		
Santillana		×	
SM		×	×
Edelvives		×	×

Se observa que predomina la exposición de método b) aun cuando según mi opinión el método a) y el método c) permiten determinar la posición relativa de una recta y un plano con mayor rapidez. Sin embargo la elección de un método u otro depende de en qué forma se expresen las ecuaciones de la recta (paramétricas o implícitas) por lo que dos de los textos consideran ambos métodos.

En el libro de SM, aun cuando no lo menciona en el desarrollo de la teoría, expone, en el contexto de un ejemplo, que en el caso particular del mismo (recta paralela a un plano) el vector director de la recta y el vector normal del plano son ortogonales, comprobando que su producto escalar es cero.

- Posiciones relativas de planos.

Para determinar las posiciones relativas de dos o tres planos se procede a la discusión del sistema formado por sus ecuaciones generales, estudiando el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.

La posición relativa de dos planos puede determinarse en la práctica, observando si los coeficientes y los términos independientes de las ecuaciones de los dos planos en forma general son o no proporcionales, lo cual equivale al estudio de los rangos de las matrices mencionadas. En los libros de Anaya, Edelvives y SM se hace dicha observación, mientras que el libro de Santillana solo hace referencia a la discusión del sistema formado por las ecuaciones generales de los planos.

Por otra parte me llama la atención que a diferencia de los otros libros de textos, en los que se expone de manera exhaustiva las posibles posiciones relativas de tres planos, discutiendo el sistema formado por sus ecuaciones generales, en el libro de Anaya no aparece explicado este supuesto aludiendo de forma general, en una nota al margen, a la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones. En los otros tres libros de texto considerados sí se muestra una explicación de la posición relativa de tres planos con representaciones gráficas que ilustran cada uno de los casos posibles.

V.3.6.Problemas métricos

Por lo que respecta a la medida de ángulos entre rectas y planos, en todos los libros considerados se hace un tratamiento similar, haciendo uso de la definición de producto escalar para calcular el coseno del ángulo correspondiente. Además en el libro de texto de Edelvives se incluyen definiciones formales sobre el concepto de ángulo diedro de dos planos.

En el caso del cálculo de distancias existen numerosas maneras de abordar dichos problemas. Dada la diversidad de métodos se hace necesario que los libros de texto se centren en algunos de ellos; estableceré por tanto una comparativa de los libros considerados en el estudio sobre los métodos que se tratan en cada caso.

- Distancia de un punto P a un plano π

a) Método constructivo: calculando la proyección ortogonal del punto sobre el plano, y determinando la distancia entre esos dos puntos.

b) Mediante el uso de la fórmula.

d (P, π)= $\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ siendo el plano π: Ax+By +Cz +D=0 y el punto P(x_1,y_1, z_1)

Tabla V.9. Tratamiento del contenido sobre la distancia de un punto a un plano

Libro de texto	Método constructivo	Fórmula
Anaya	×	×
Santillana	×	×
SM		×
Edelvives	×	×

Observamos que en todos los libros considerados se hace uso de la fórmula de la distancia de un punto a un plano. Además, aparece justificada en todos ellos.

También se menciona el método constructivo en tres de los cuatro libros considerados. En el libro de SM también se define la distancia de un punto a un plano como la distancia entre ese punto y su proyección sobre el plano, pero no especifica la forma de calcularlo.

- Distancia de un punto P a una recta r

a) Método constructivo: hallando el plano perpendicular a la recta que pase por el punto, calculando las coordenadas del punto intersección (que sería la proyección ortogonal del punto sobre la recta) y la distancia entre dicho punto y el punto P.

b) Método del punto genérico: se considera un punto genérico de la recta al que denominaré R, y se impone que $\overrightarrow{PR}$ sea perpendicular a r (producto escalar por $\vec{d}$ igual a cero siendo $\vec{d}$ el vector director de la recta). De esta forma se obtiene el valor del parámetro para el cual R es la proyección ortogonal de P sobre r.

c) Método del producto vectorial: mediante la fórmula siguiente

$$dist(P,r) = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

donde R∈r y $\vec{d}$ es el vector director de r.

d) Método de la distancia mínima: que consiste en minimizar el cuadrado del módulo del vector $\overrightarrow{PR}$ siendo R un punto genérico de la recta. Dicho método utiliza técnicas propias del análisis; se trata de un problema de optimización por lo tanto se hace necesario el cálculo de la derivada de la función cuadrado de la distancia.

Tabla V.10.Tratamiento del contenido sobre la distancia de un punto a una recta

Libro de texto	Método constructivo	Método del punto genérico	Método del producto vectorial(fórmula)	Método de la distancia mínima
Anaya	×	×	×	×
Santillana	×		×	
SM			×	
Edelvives	×			

Se observa que el libro de texto de Anaya es el más exhaustivo, ya que es el que trata más variedad de métodos (trata el método correspondiente a la distancia mínima como ampliación en un CD- ROM de venta conjunta con el libro). El método que más predomina es el correspondiente al producto vectorial que por su sencillez es una buena alternativa al método constructivo. Sin embargo me ha llamado la atención que en el libro de texto de Edelvives no se hace mención a la fórmula que nos permite calcular la distancia de un punto a una recta.

- <u>Distancia de dos rectas que se cruzan r y s</u>

a) Método del plano paralelo: hallando las ecuaciones de un plano paralelo a s que contiene a r (o viceversa). La distancia de las dos rectas es la distancia de s a dicho plano.

b) Método del vector variable: tomando un punto genérico de r, R, y un punto genérico de s , S; se considera el vector $\overrightarrow{RS}$ (cuyas coordenadas dependen de dos parámetros)y se impone que ha de ser perpendicular a r y a s (el producto escalar de $\overrightarrow{RS}$ por el vector director de r y por el vector director de s ha de ser cero).Se resuelve el sistema asociado y se obtienen las coordenadas de los puntos R_0 y S_0 para los que se cumple la condición. La distancia de las rectas corresponde a la distancia de dichos puntos.

c) Método del producto mixto: mediante la fórmula siguiente

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}, \overrightarrow{R_0S_0}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s}\right|}$$

Donde $\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}$ son los vectores directores de r y s respectivamente y $\overrightarrow{R_0S_0}$ es un vector que une dos puntos particulares de r y s.

c) Método de la distancia mínima: similar al empleado para el cálculo de la distancia de un punto a una recta, salvo que en este caso las coordenadas del vector $\overrightarrow{RS}$, donde R es un punto genérico de r y S es un punto genérico de s, dependen de dos parámetros por lo que se deberán igualar a cero las derivadas parciales del cuadrado del módulo de dicho vector e igualarlas a cero.

Tabla V.11. Tratamiento del contenido sobre la distancia de dos rectas que se cruzan

Libro de texto	Método del plano paralelo	Método del vector variable	Método del producto mixto (fórmula)	Método de la distancia mínima
Anaya	×	×	×	×
Santillana	×		×	
SM	×	×	×	
Edelvives	×			

De nuevo el método de la distancia mínima es tratado mediante un ejemplo en un CD-ROM de venta conjunta con el libro de Anaya. Todos los libros considerados, salvo el de Edelvives, se centran en la obtención de la fórmula que nos da directamente la distancia entre dos rectas que se cruzan, como alternativa al método del plano paralelo.

En lo que respecta a la distancia entre recta y plano paralelos, planos paralelos y rectas paralelas en todos los libros se hace mención a cómo calcularlas remitiéndose a los casos anteriores.

En lo que se refiere al cálculo de áreas y de volúmenes haciendo uso del producto escalar y el producto mixto, los contenidos de los cuatro libros son similares, explicándose como obtener el área de un paralelogramo y de un triángulo y el volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro, conocidas las coordenadas de sus vértices.

V.3.7.Lugares geométricos

Por lo que respecta a los planos bisectores de dos planos dados, aparece la definición en los libros de texto de Anaya, de SM y Edelvives. En ellos se definen como *el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de ambos planos.* Sin embargo en el libro de Edelvives, para el cálculo de las ecuaciones de los planos bisectores, no se hace uso de la fórmula de la distancia de un punto a un plano, por no haberla desarrollado en la Unidad 7: Espacio euclídeo. Ofrece otra forma alternativa para calcular las ecuaciones de los planos bisectores de dos planos dados, considerando los vectores normales $\vec{n}, \overrightarrow{n'}$ normalizados(es decir con módulo la unidad) de dichos planos: $\overrightarrow{n_1} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ $\overrightarrow{n_2} = \frac{\overrightarrow{n'}}{|\overrightarrow{n'}|}$. De esta forma un plano bisector tendrá como vector normal $(\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2})$y el otro, $(\overrightarrow{n_1} - \overrightarrow{n_2})$. Las ecuaciones de dichos planos podrán expresarse en su forma normal sin más que considerar un punto de la arista de los planos (recta de intersección), y los vectores normales determinados.

En los libros de SM y Anaya también se menciona el plano mediador de un segmento como lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de sus extremos Aunque en el libro de Santillana no aparece esta definición, se propone el cálculo de las ecuaciones del plano mediador de un segmento como ejercicio.

En lo que se refiere al estudio de la esfera como lugar geométrico, en todos los libros considerados se enuncia la definición y se deduce la ecuación correspondiente. En el desarrollo de la teoría se explica, salvo en el libro de Anaya en el que se presenta cómo ejercicio resuelto, cómo determinar el plano tangente a una esfera en un punto. Además en los libros de Santillana y Edelvives se indica cómo determinar las posiciones relativas de una recta y una esfera o de un plano y una esfera, en función de si la distancia de dicha recta o plano al centro de la esfera es mayor, igual o menor que el radio.

V.4 CLASIFICACIÓN DE LOS ESQUEMAS DE PRUEBA DE LOS LIBROS DE TEXTO

Una vez contabilizados los resultados y justificaciones que aparecen en los libros de texto considerados, procederé a la clasificación de dichas justificaciones según el marco teórico. Se trata pues de clasificar los esquemas de prueba atendiendo a las categorías descritas en el marco teórico:

- EPi1:esquema de prueba inductivo de un caso
- EPiV :esquema de prueba inductivo de varios casos,
- EPiS: esquema de prueba inductivo sistemático,
- EPt: esquema de prueba transformacional
- EPa: esquema de prueba axiomático
- PP: pruebas preformales.
- EPg: esquema de prueba gráfico.

V.4.1.Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre espacios vectoriales

Como ya se ha comentado, en el libro de texto de Edelvives se trata el concepto de espacio vectorial como estructura algebraica, apareciendo por tanto un mayor número de resultados asociados a él. Los esquemas de prueba utilizados para justificar estos resultados son en su mayor parte axiomáticos aunque también aparecen esquemas de prueba inductivos de un caso. Los resultados que aparecen justificados son los siguientes:

_Contenido1. Ciertas propiedades que son consecuencia de la definición de espacio vectorial.

_Contenido 2. Caracterización de los conjuntos de vectores linealmente dependientes o independientes; esto es, se da como definición de conjunto de vectores linealmente dependientes, $S = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$, aquel tal que alguno de los vectores se puede poner como combinación lineal de los demás, y se demuestra que esto es equivalente a la existencia de escalares,$(r_1, r_2, \dots, r_n)$ no todos nulos tales que $r_1.\overrightarrow{v_1} + r_2.\overrightarrow{v_2} + \cdots + r_n.\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$. En el libro de texto de Edelvives este resultado se expone con el enunciado ‘si y solo si’.

_ Contenido3. Si tenemos $S = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$, un conjunto linealmente independiente y

$\vec{u}$=$r_1.\overrightarrow{v_1} + r_2.\overrightarrow{v_2} + \cdots$+$r_n.\overrightarrow{v_n}$, $\vec{u}$=$s.\overrightarrow{v_1} + s_2.\overrightarrow{v_2} + \cdots$+$s_n.\overrightarrow{v_n}$, entonces r_1=s_1,…,r_n=s_n

_Contenido 4. Si tenemos una base B de un espacio vectorial V, cualquier vector de B se expresa de forma única como combinación lineal de los vectores de B.

_Contenido 5. Condición que debe cumplir un subespacio W de un espacio vectorial para ser subespacio vectorial: para cualesquiera $\vec{v}, \vec{w} \epsilon W \; y \; \alpha, \beta \epsilon \boldsymbol{R}$ se cumple que $\alpha.\vec{v} + \beta.\vec{w} \; \epsilon W$.

En el resto de los libros de texto estos resultados no aparecen explícitamente, aunque en algunos casos se alude a alguno de ellos; por ejemplo cuando se menciona que la coordenadas de un vector respecto de una base han de ser únicas (lo cual sería consecuencia de la independencia lineal de los vectores de la base).

Tabla V.12. EP correspondientes al contenido sobre espacios vectoriales

Libro de texto	Contenido1	Contenido2	Contenido3	Contenido4	Contenido5
Anaya (2014)	-	-	-	-	-
Santillana (2009)	-	-	-	-	
SM (2001)	-	-	-	-	-
Edelvives (2003)	EPa	EPa EPi1	EPa	EPa EPi1	EPi1

V.4.2.Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre el producto escalar.

_Contenido1. Propiedad fundamental: el producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y solo si son perpendiculares.

_Contenido2. Otras propiedades: propiedad conmutativa (propiedad 1), propiedad respecto al producto por números reales (propiedad 2), propiedad distributiva (propiedad 3)

_Contenido 3.Interpretación geométrica del producto escalar, ya que el producto escalar de dos vectores equivale al producto del módulo de cualquiera de ellos por la proyección del otro sobre él.

_Contenido 4.Expresión analítica del producto escalar.

Tabla V.13. EP correspondientes al contenido sobre el producto escalar

Libro de texto	Contenido1	Contenido 2			Contenido 3	Contenido4
		Prop 1)	Prop 2)	Prop 3)		
Anaya (2014)	EPa EPi1	EPa	EPa	EPa	EPa EPi1	EPa
Santillana (2009)	EPa	EPa	_	_	EPa EPi1	EPa
SM (2001)	-	EPa	EPa	EPa	EPa Epi1	EPa
Edelvives (2003)	EPa	-	-	-	-	-

Observamos que, en lo que respecta a estos resultados, el esquema de prueba que predomina es el esquema de prueba axiomático. En el libro de Anaya los esquemas de prueba correspondientes a las propiedades del producto escalar se ofrecen como ampliación en un CD- ROM de venta conjunta con el libro.

El libro de texto de Edelvives aunque expone la mayor parte de estos resultados no los justifica. Relacionados con el producto escalar y el módulo de vectores se establecen otros resultados que no aparecen en el resto de libros de texto considerados. Son los siguientes:

- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales se verifica que $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$
- Desigualdad de Schwarz $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$
- Desigualdad triangular $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Dichos resultados son justificados mediante esquemas de prueba axiomáticos, basados en la definición y propiedades del producto escalar. En el caso de la desigualdad triangular se hace una reflexión sobre su interpretación geométrica que nos permitiría obtener la condición para que tres segmentos dados formen un triángulo, esto es que en todo triángulo la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la del tercero. Sin embargo, no se menciona el teorema de Pitágoras en relación con la primera igualdad, cuya demostración constituiría una prueba de dicho teorema.

Por lo que respecta al libro de texto de SM un aspecto que lo caracteriza es que para introducir el concepto de producto escalar, hace mención a una de sus aplicaciones en el contexto de la Física, en concreto se refiere al cálculo del trabajo W, realizado por una fuerza constante $\vec{F}$ que actúa sobre un cuerpo en reposo y que produce un movimiento rectilíneo de este.

V.4.3.Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre el producto vectorial.

Los resultados asociados al producto vectorial de dos vectores que aparecen en los libros de texto son los siguientes.

_Contenido1. El producto vectorial de dos vectores no nulos es el vector nulo, si y solo si los vectores tienen la misma dirección.

_Contenido2. Propiedades: propiedad anticonmutativa ($\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$) (propiedad 1), propiedad respecto al producto por números reales (propiedad 2), propiedad distributiva respecto de la suma (propiedad3).

_Contenido3. Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial

_Contenido4. Expresión analítica del producto vectorial.

Tabla V.14 EP correspondientes al contenido sobre el producto vectorial

Libro de texto	Contenido1	Contenido 2			Contenido 3	Contenido 4
		Prop 1)	Prop 2)	Prop 3)		
Anaya (2014)	_	_	_	EPa	EPa EPi1	EPa EPi1
Santillana (2009)	EPa	_	_	_	EPa EPi1	EPa EPi1
SM (2001)	_	EPi1	_	_	EPa EPi1	_
Edelvives (2003)	_	_	_	_	EPa EPi1	_

En los libros de texto de Anaya, Santillana y SM se define producto vectorial de dos vectores como un vector caracterizado por su módulo ($|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}})$) , dirección (perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$) y su sentido (determinado por la regla del sacacorchos). A partir de ahí se justifican algunas de sus propiedades y su expresión en coordenadas. En el libro de texto de Anaya, se comprueba mediante un esquema de prueba axiomático que la expresión analítica cumple las características expuestas en la definición sobre el módulo y la dirección del producto vectorial de dos vectores, demostrando a continuación la propiedad distributiva respecto a la suma de vectores. Por otra parte en el libro de Santillana se parte del producto vectorial de los vectores de la base canónica,$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, y considerando los vectores $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}, \vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$, se obtiene la expresión analítica del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ haciendo uso de sus propiedades, que no se justifican. En el texto de SM se expone cuál es la expresión en coordenadas del producto vectorial pero no se demuestra.

En contraposición, en el texto de Edelvives se parte de la expresión analítica del producto vectorial como definición y a partir de ella se justifican alguna de sus propiedades; haciendo especial mención al módulo, dirección y sentido del mismo. En concreto para probar que $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ se parte de la siguiente propiedad que no se justifica: $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$.

Se observa que todos los libros de texto considerados demuestran, mediante un esquema de prueba axiomático, la interpretación geométrica del módulo del producto vectorial y además ofrecen un ejemplo de su aplicación.

V.4.4.Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre el producto mixto.

_Contenido1. El producto mixto de tres vectores no nulos es cero si, y solo si los vectores son linealmente dependientes

_Contenido2. Propiedades del producto mixto: propiedad distributiva respecto de la suma, propiedad respecto al producto por números reales, cambio del signo del producto mixto si permutamos dos de los vectores, se mantiene el signo del producto mixto cuando se permutan cíclicamente los vectores.

_Contenido3. Interpretación geométrica del producto mixto de tres vectores.

_Contenido4. Expresión analítica del producto mixto.

Tabla V.15. EP correspondiente al contenido sobre producto mixto.

Libro de texto	Contenido 1	Contenido 2	Contenido 3	Contenido4
Anaya (2014)	_	_	EPa EPi1	EPa
Santillana (2009)	EPa	_	EPa EPi1	EPa EPi1
SM (2001)	_	_	EPa EPi1	EPa
Edelvives (2003)	_	_	EPa	EPa

Se observa que predominan los esquemas de prueba axiomáticos y los inductivos de un caso. Las propiedades del producto mixto no se justifican en ninguno de los textos pero se hace mención en el libro de SM a la sencillez de la prueba utilizando la expresión analítica del producto mixto. Se llega a dicha expresión en los libros de Anaya, SM y Edelvives utilizando las expresiones en coordenadas del producto vectorial y el producto escalar, con lo que se obtiene el desarrollo por los elementos de una fila del determinante formado por las coordenadas de los tres vectores. Por otra parte en el libro de Santillana se exponen primero las propiedades, y a partir de ellas, y del producto mixto de los vectores de la base canónica, se llega a la expresión en coordenadas del producto mixto como el desarrollo del determinante.

Por lo que respecta al contenido1 en el libro de texto de Santillana se presenta lo que pretende ser un esquema de prueba axiomático. Se razona del siguiente modo

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 0 \Rightarrow \vec{u}\ es\ ortogonal\ a\ \vec{v}\times\vec{w} \Rightarrow$$
$$\vec{u}\ es\ combinación\ lineal\ de\ los\ vectores\ \vec{v}\ y\ \overrightarrow{w}$$

Considero que para que el argumento esté completo deberían tenerse en cuenta también las implicaciones en el otro sentido, ya que se trata de un enunciado de ‘si y solo si'.

V.4.5. Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre aplicaciones de vectores a problemas geométricos.

_Contenido1. Punto medio de un segmento.

_Contenido 2. Dividir un segmento en varias partes iguales.

_Contenido3. Baricentro de un triángulo

_Contenido4. Cómo determinar si varios puntos están alineados.

_Contenido5. Cómo determinar si varios puntos son coplanarios.

Tabla V.16. EP correspondientes al contenido sobre aplicaciones de los vectores

Libro de texto	Contenido1	Contenido2	Contenido3	Contenido4	Contenido5
Anaya (2014)	EPa EPi1	EPi1	EPi1	EPa EPi1	_
Santillana (2008)	EPa EPi1	_	_	Epi1	EPi1
SM (2001)	EPa EPi1	EPi1	_	_	EPi1
Edelvives (2003)	EPa EPi1	_	_	EPa	EPa

Predominan los esquemas de prueba inductivos de un caso siendo el libro de texto de Anaya el más completo en lo que se refiere a estos resultados. En el libro de texto de SM se expresan los resultados correspondientes a puntos alineados y a puntos coplanarios estableciendo como condición necesaria y suficiente, que la matriz de los vectores determinados por dichos puntos tenga rango igual a 1 o rango igual a 2 respectivamente.

Se observa que tanto en el libro de texto de Anaya como en el de SM, una vez que se ha determinado cómo calcular el punto medio de un segmento, se generaliza al caso de querer dividir un segmento en varias partes iguales. En ambos libros de texto se expone mediante un esquema de prueba inductivo de un caso.

V.4.6.Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre ecuaciones de rectas y planos.

_Contenido1.Cómo obtener la ecuación continua de la recta a partir de las ecuaciones paramétricas

_ Contenido2.Cómo obtener las ecuaciones implícitas de la recta a partir de las ecuaciones paramétricas o de la ecuación continua.

_Contenido3.Determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos

_Contenido4. Cómo obtener la ecuación general del plano a partir de las ecuaciones paramétricas o a partir de las coordenadas de los vectores generadores del plano y un punto por el que pasa.

_Contenido5. Obtener la ecuación normal de un plano conociendo un punto del plano y su vector normal.

_Contenido6. Determinar el vector normal a un plano dado su ecuación general.

_Contenido7. Determinar la ecuación de un plano que pasa por tres puntos.

_Contenido8. Determinar la ecuación de un plano que contiene a una recta y a un punto exterior a ella.

Tabla V.17. EP correspondientes al contenido sobre ecuaciones de rectas y planos.

Libro de texto	**Cont1**	**Cont2**	**Cont3**	**Cont4**	**Cont5**	**Cont6**	**Cont7**	**Cont8**
Anaya (2014)	EPa	EPiV	EPi1	EPa EPi1	EPa EPi1	_	EPi1	_
Santilla-na (2009)	EPa	EPa EPi1	EPi1	EPa EPi1	_	EPa EPi1	EPi1	EPi1
SM (2001)	EPiV	_	EPi1	EPiV	EPa EPi1	_	EPa EPi1	EPa EPiV
Edelvi-ves (2003)	EPa EPi1	EPa	_	EPa EPi1	_	EPa	EPa EPi1	EPa EPi1

Se observa que aunque no todos los resultados son justificados por todos los libros de texto, en lo que concierne a estos contenidos aparecen esquemas de prueba inductivos de varios casos, es decir se ofrecen más ejemplos sobre un mismo resultado, buscando ante todo que el alumno tenga claro cómo aplicarlo. Constituye un esquema de prueba más rico que el de los esquemas de prueba inductivos de un caso, ya que permite al alumno, que es el potencial lector del libro de texto, darse cuenta de que el resultado es válido en varios casos, con lo que aumenta su convicción acerca de su validez en el caso general. Se observa además de que para varios resultados se ofrecen esquemas de prueba axiomáticos junto a esquemas inductivos de un caso; se consideran los ejemplos como complementos importantes a la demostración en el caso general ya que permite a los alumnos ser más conscientes de cómo deben aplicar el resultado.

V.4.7. Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre posiciones relativas de rectas y planos.

_Contenido1.Posiciones relativas de dos rectas.

_Contenido2. Posiciones relativas de recta y plano.

_Contenido3. Posiciones relativas de dos planos.

_Contenido4. Posiciones relativas de tres planos

Tabla V.18.EP correspondientes al contenido sobre posiciones relativas.

Libros de texto	Contenido1	Contenido 2	Contenido3	Contenido 4
Anaya (2014)	EPa EPiS	EPiV	EPa EPi1	EPi1
Santillana (2009)	EPa EPiV	EPa EPi1	EPa EPi1	EPa EPi1
SM (2001)	EPa EPiV	EPa EPiV	EPa EPiS	EPa
Edelvives (2003)	EPa EPiV	EPa EPiV	EPa EPiS	EPa EPiV

Se observa la utilización en algunos casos de esquemas de prueba sistemáticos con los que se intenta cubrir todas las posibles situaciones; esto es, por ejemplo en el caso de posiciones relativas de dos rectas se trata un ejemplo en el que las rectas son paralelas, uno en el que son coincidentes, otro en el que se cortan y por último, se ofrece un ejemplo de dos rectas que se cruzan. Aparecen también bastantes esquemas de prueba de varios casos, aunque a veces se corresponden a una misma situación tratada de manera distinta; por ejemplo en el libro de texto de Edelvives aparecen dos esquemas de prueba inductivos referentes a la posición relativa de una recta y un plano, ambos corresponden a la situación en que la recta está contenida en el plano pero en uno de ellos se determina considerando un punto genérico de la recta y sustituyendo en la ecuación general del plano, y en el otro se discute el sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta y la ecuación general del plano.

Considero que el libro de texto de Anaya, es el más exhaustivo en lo que respecta a la posición relativa de dos rectas, pero en él aparecen pocos aspectos teóricos y ejemplos sobre la posición relativa de una recta y un plano y la posición relativa de tres planos. En concreto en este último caso no desarrolla un esquema de prueba axiomático sino que lo trata simplemente con un ejemplo. Aunque es cierto que alude en un margen a la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones como el método para determinar posiciones relativas, considero que para los alumnos es importante repasar esos conceptos en el contexto geométrico y que les pueden ayudar a visualizar la situación las representaciones gráficas que aparecen en el resto de libros de texto considerados. Además los ejemplos que considera en el caso de la posición relativa de recta y plano se corresponden ambos a la situación en que la recta corta al plano. Sin embargo también cabe señalar que junto con el libro de SM, establece la posición relativa de una recta y un plano, determinando si el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares (en cuyo caso la recta es paralela o está contenida en el plano) o no lo son (en ese caso la recta corta al plano). Este método me parece especialmente acertado ya que simplifica los cálculos, y además permite visualizar la situación geométricamente de forma más simplificada, que considerando los sistemas de ecuaciones implícitas de la recta y el plano. Por supuesto, la elección del método a seguir puede variar dependiendo de la forma en que aparezca la ecuación de la recta en el enunciado del problema.

V.4.8. Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre haces de planos.

_Contenido1. Forma de obtener la ecuación del haz de planos secantes determinado por una recta

_Contenido2. Forma de obtener el haz de planos paralelos a uno dado, o el haz de planos perpendiculares a una recta dada

Tabla V.19. EP correspondientes al contenido sobre haces de planos.

Libro de texto	Contenido1	Contenido2
Anaya (2014)	_	_
Santillana (2009)	EPa EPi1	EPa EPi1
SM (2001)	EPa EPi1	EPa EPi1
Edelvives (2003)	EPa EPi1	EPa EPi1

Observamos que, salvo en el libro de texto de Anaya en el que no se consideran estos resultados, en el resto de libros de texto se ofrecen esquemas de prueba axiomático e inductivo de un caso para cada uno de ellos. Los ejemplos de SM y Edelvives son aplicaciones directas del resultado; en ellos se pide calcular la ecuación del plano del haz (ya sea de planos paralelos o de planos que se cortan en una recta) que pasa por un punto, con lo que el plano queda completamente determinado.

En el libro de texto de Edelvives, además aparecen como recordatorio resultados sobre haces de rectas en el plano (haz de rectas que pasan por un punto, haz de rectas paralelas) y como ampliación, sobre haces de rectas en el espacio (haz de rectas que pasan por un punto y se apoyan en una recta) Asimismo, incluye resultados sobre radiaciones de rectas en el espacio (radiación de rectas que pasan por un punto y radiación de rectas que se apoyan en dos rectas que se cruzan). En primer lugar define radiación de rectas como un *conjunto doblemente infinito de rectas,* en el sentido de que se expresa en función de dos parámetros. Para obtener la radiación de rectas que pasan por un punto (x_0, y_0 ,z_0) considera todas las rectas que pasan por ese punto con vector director arbitrario $\vec{v}$=(m, n ,p); puesto que alguna de las coordenadas ha de ser no nula un vector proporcional a $\vec{v}$ será de la forma (1, n', p’), (m’,1,p’) o (m’,n’,1). En el libro de Edelvives se considera la primera opción donde n’, p’ varían en todo **R**, faltaría por tanto considerar el caso en que la primera coordenada del vector director es cero.

V.4.9. Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre proyecciones ortogonales

_Contenido1. Cómo calcular la proyección ortogonal de un punto sobre una recta

_Contenido2. Cómo calcular la proyección ortogonal de un punto sobre un plano

_Contenido3. Cómo calcular la proyección ortogonal de una recta sobre un plano

Tabla V.20. EP correspondientes al contenido sobre proyecciones ortogonales.

Libro de texto	Contenido 1	Contenido 2	Contenido 3
Anaya (2014)	_	_	EPi1
Santillana (2009)	EPi1	EPi1	EPi1
SM (2001)	_	_	_
Edelvives (2003)	EPi1	EPa EPi1	EPi1

Estos resultados se justifican, excepto en el libro de SM donde no aparecen reflejados, mediante esquemas de prueba inductivos de un caso. Dichos ejemplos son similares en los tres libros. Respecto al resultado sobre cómo calcular la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, en el ejemplo de los libros de texto de Anaya y Santillana se calcula la ecuación del plano perpendicular al plano dado, que contiene a la recta y después se halla la intersección de los dos planos, que es la recta proyección. En el libro de texto de Edelvives se procede en el ejemplo calculando la proyección ortogonal de dos puntos de la recta sobre el plano, con lo que la recta proyección sería aquella que pasa por dichos puntos. Distingue el caso en el que la recta dada corta al plano ya que en ese caso podríamos tomar como uno de los puntos el punto intersección, proyectando otro punto cualquiera de la recta sobre el plano para hallar así la ecuación de la recta proyección sobre el plano. Considero que ambos métodos son adecuados y tienen una complejidad de cálculo similar.

V.4.10. Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre puntos simétricos.

_Contenido 1Cómo calcular el simétrico de un punto respecto a otro punto.

_Contenido2.Cómo calcular el simétrico de un punto respecto de una recta.

_ Contenido3. Cómo calcular el simétrico de un punto respecto de un plano.

Tabla V.21.EP correspondientes al contenido sobre puntos simétricos.

Libro de texto	Contenido1	Contenido2	Contenido3
Anaya (2014)	EPa EPi1	EPi1	EPi1
Santillana (2009)	EPi1	EPi1	EPi1
SM (2001)	_	_	_
Edelvives (2003)	_	EPi1	EPi1

Estos resultados se justifican, excepto en el libro de texto de SM, mediante esquemas de prueba inductivos de un caso. Resulta de utilidad y así se pone de manifiesto en los libros de Santillana y Edelvives, haber desarrollado con anterioridad los resultados referentes a proyecciones ortogonales de un punto sobre una recta y de un punto sobre un plano, ya que dichas proyecciones corresponden a los puntos medios de los segmentos de extremos el punto del cual conocemos sus coordenadas y el punto simétrico (respecto de una recta y respecto de un plano, respectivamente). En estos dos libros de texto se exponen estos resultados en el desarrollo de la teoría mientras que en el libro de texto de Anaya los ejemplos correspondientes aparecen al final de la unidad didáctica 7(Problemas métricos)

V.4.11. Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre ángulos entre rectas y planos

_Contenido1. Ángulo que forman dos vectores.

_Contenido2. Ángulo entre dos rectas.

_Contenido3. Ángulo entre una recta y un plano

_Contenido4. Ángulo entre dos planos.

Tabla V.22 EP correspondientes a contenidos sobre ángulos entre rectas y planos

Libro de texto	Contenido1	Contenido2	Contenido3	Contenido4
Anaya (2014)	EPa EPi1	EPi1	EPi1	EPi1
Santillana (2009)	EPa EPiV	EPi1	EPi1	EPi1
SM (2001)	EPa EPi1	EPa EPiV	EPa EPiV	EPa EPiV
Edelvives (2003)	EPi1	EPa EPi1	EPa EPi1	EPa EPi1

Predominan los esquemas de prueba axiomáticos y los inductivos de un caso, siendo el libro de SM el más completo ya que ofrece esquemas de prueba inductivos de varios casos. En el libro de Edelvives, aunque no aparece tanta variedad de ejemplos, las explicaciones son muy completas, mencionando las relaciones entre los ángulos que intervienen: si son iguales, complementarios o suplementarios. Se explica de manera muy acertada la necesidad de considerar el módulo del producto escalar para que de esta forma el coseno del ángulo hallado sea siempre positivo (pues estamos considerando el menor de los ángulos que pueden formar dos rectas, dos planos o una recta y un plano). En los libros de texto de Anaya y Santillana se limita a exponer el resultado con un ejemplo de su aplicación.

V.4.12. Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre cálculo de distancias.

_Contenido1. Distancia de un punto a un plano.

_Contenido2.Distancia entre planos paralelos.

_Contenido3.Distancia de una recta a un plano.

_Contenido4. Distancia de un punto a una recta

_Contenido5.Distancia entre rectas paralelas

_Contenido6.Distancia entre rectas que se cruzan.

Tabla V.23.EP correspondientes al contenido sobre cálculo de distancias

Libro de texto	Cont1	Cont2	Cont3	Cont4	Cont5	Cont6
Anaya (2014)	EPa EPi1	EPi1	EPi1	EPa EPiV	EPi1	EPa EPiV
Santillana (2009)	EPa EPi1	EPi1	EPi1	EPa EPi1	_	EPa EPiV
SM (2001)	EPa EPi1	EPi1	_	EPa EPiV	_	EPa EPiV
Edelvives (2003)	EPa EPi1	EPa	EPiV	EPiV	EPi1	EPa EPi1

En lo que respecta a estos resultados predominan los esquemas de prueba axiomáticos e inductivos de un caso, aunque también aparecen esquemas de prueba inductivos de varios casos. El libro más completo en lo que se refiere a estos resultados es el libro de texto de Anaya, ya que en él se exponen más métodos para el cálculo de la distancia de un punto a una recta y la distancia entre dos rectas que se cruzan. Aunque considera un mismo ejemplo para cada uno de estos contenidos, lo he contemplado como esquema de prueba inductivo de varios casos al tratar diferentes métodos; de esta forma se aporta mayor convicción a los alumnos ya que se comprueba que sea cual sea el método utilizado, se obtiene el mismo resultado.

En lo que respecta al cálculo de la distancia de un punto a un plano todos los libros considerados ofrecen un esquema de prueba axiomático, basándose este en el método constructivo en el libro de texto de Edelvives(es decir para un plano π y un punto P arbitrarios se calcula la proyección ortogonal del punto sobre el plano; la distancia entre los dos puntos será la distancia del punto al plano) y en el producto escalar de vectores en el resto de libros de texto(se pretende calcular la distancia del punto P a su proyección ortogonal Q sobre el plano sin necesidad de calcular las coordenadas de esta, sino estableciendo el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$).

Como ya se ha comentado anteriormente, mientras que en los libros de texto de Anaya, Santillana y SM se expone y se demuestra la fórmula de la distancia de un punto a una recta y la de la distancia entre dos rectas que se cruzan, en el libro de texto de Edelvives, se muestra el proceso para obtener dichas distancias aunque sin mencionar la fórmula que en muchos casos puede ser útil para simplificar los cálculos. Esto se debe a la secuenciación de los contenidos en este libro de texto en el cual los resultados referentes al producto vectorial y al producto mixto de vectores aparecen al final de la unidad didáctica correspondiente al espacio métrico, por lo que no puede hacer uso de ellos para el cálculo de las distancias ya que los resultados sobre ellas se desarrollan con anterioridad. En el caso de dos rectas que se cruzan r y s, para determinar la distancia entre ellas se calculan las ecuaciones del plano que contiene a una de ellas y es paralelo a la otra; la distancia de la recta paralela al plano será la distancia buscada. En ese caso se justifica mediante un esquema de prueba axiomático que dadas dos rectas que se cruzan siempre existe un plano que contiene a una de ellas y es paralelo a la otra.

En lo que se refiere al cálculo de la distancia entre planos paralelos o de una recta paralela a un plano, los libros de texto remiten al lector al cálculo de la distancia de un punto a un plano ya que basta con considerar un punto de uno de los planos o de la recta paralela, y calcular su distancia al otro plano. De la misma forma para calcular la distancia entre dos rectas paralelas basta con tomar un punto de una de ellas y calcular su distancia a la otra recta.

V.4.13. Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre cálculo de áreas y volúmenes

_Contenido1. Cálculo del área de un paralelogramo conocidos sus vértices.

_Contenido2. Calculo del área de un triángulo, conocidos sus vértices.

_Contenido3. Cálculo de volumen de un paralelepípedo, como el módulo del producto mixto de los tres vectores que lo determinan.

_Contenido 4 Cálculo del volumen de un tetraedro conocidos sus vértices, determinando que es la sexta parte del volumen del paralelepípedo construido sobre sus aristas.

Tabla V.24. EP correspondientes al contenido sobre el cálculo de áreas y volúmenes

Libro de texto	Contenido	Contenido	Resultado3)	Resultado4)
Anaya (2014)	(*)	EPt EPi1	(*)	EPt EPiV
Santillana (2009)	(*)	EPt EPi1	EPi1	EPg EPi1
SM (2001)	(*)	EPt EPiV	(*)	EPa EPiV
Edelvives (2003)	(*)	EPt EPi1	EPi1	EPa

(*)Por lo que respecta al contenido 1 y al contenido 3 los libros de texto considerados se remiten a la interpretación geométrica del producto vectorial y mixto, respectivamente, desarrollada con anterioridad.

Se observa la utilización de esquemas de prueba transformacionales para determinar que el área del triángulo es la mitad que el área del paralelogramo que comparte con él dos de sus lados; y para establecer que el volumen del tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo correspondiente. Dichos esquemas consisten en realizar transformaciones en la figura, explicando cada una de ellas; por ejemplo en el caso del libro de texto de Anaya descompone el paralelepípedo en dos prismas triangulares iguales, y cada uno de ellos en tres tetraedros, razonando a continuación por qué dichos tetraedros tienen igual volumen. En el libro de texto de Anaya se muestra directamente la descomposición del paralelepípedo en seis tetraedros mediante una representación gráfica, pero esta no se acompaña de ningún texto explicativo. Por otra parte en los libros de texto de SM y Edelvives se prefiere un esquema de prueba axiomático haciendo uso de que el volumen de una pirámide (y por tanto de un tetraedro que es una pirámide de base triangular) es la tercera parte del área de la base por la altura.

Son especialmente interesantes los ejemplos del libro de texto de SM ya que no se trata simplemente de aplicaciones directas de los resultados, sino que involucran el cálculo de ecuaciones de planos para que sus puntos de corte con los ejes coordenados formen triángulos con un área determinada, o para que el volumen del tetraedro determinado por dicho plano y los planos coordenados tenga un volumen determinado. En el libro de texto de Anaya se ofrece un ejemplo similar en el que hay que calcular el cuarto vértice de un tetraedro sabiendo el volumen de este y que dicho vértice está sobre una recta de la cual conocemos sus ecuaciones paramétricas.

V.4.14 Esquemas de prueba correspondientes al contenido sobre lugares geométricos

_Contenido1.Cálculo de la ecuación de la recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan.

_Contenido2. Cálculo de la ecuación del plano mediador de un segmento.

_Contenido3. Cálculo de las ecuaciones de los planos bisectores de dos planos dados.

Resultados relacionados con la superficie esférica:

_Contenido4. Cálculo de la ecuación del plano tangente a la esfera en un punto.

_Contenido5. Posición relativa de planos y rectas con la esfera

Tabla V.25. EP correspondiente al contenido sobre lugares geométricos.

Libro de texto	Contenido1	Contenido2	Contenido3	Contenido4	Contenido5
Anaya (2014)	EPiV	EPi1	EPi1	EPi1	_
Santillana (2009)	EPi1	EPi1	_	EPa EPi1	EPi1
SM (2001)	EPa EPiV	EPiV	EPi1	EPa EPiV	_
Edelvives (2003)	EPa EPi1	_	EPi1	EPa EPi1	EPa EPi1

Se observa que predominan los esquemas de prueba inductivos de un caso aunque también aparecen esquemas de prueba axiomáticos e inductivos de varios casos. Para determinar la ecuación de la recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan tanto en el libro de texto de Anaya como en el de SM consideran dos métodos: el correspondiente a considerar la intersección de los planos que contienen a una de las rectas y a la perpendicular común(cuyo vector director es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas), y el que consiste en considerar puntos genéricos de las rectas e imponer que el vector que los une ha de ser perpendicular a los vectores directores de ambas rectas. Así obtenemos las coordenadas de los puntos de corte de la recta perpendicular con las rectas dadas, y podemos calcular la ecuación de la recta pedida. En ambos libros de texto se ofrece un ejemplo en el que se obtiene la recta perpendicular a otras dos dadas mediante cada uno de los dos métodos por lo que lo he considerado como esquema de prueba inductivo de varios casos. Aunque no aparece en los libros de texto, una forma de reforzar la convicción de los alumnos sobre este resultado sería comprobar que se obtiene la misma recta en los dos casos (en uno de ellos su ecuación aparece expresada como intersección de planos y en el otro en su forma paramétrica).

En lo que respecta a la ecuación del plano mediador de un segmento en el libro de SM se explican dos maneras de obtenerla: la primera, considerando el plano mediador como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento y la segunda, teniendo en cuenta que el plano buscado es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio. En lo concerniente al cálculo de las ecuaciones de los planos bisectores de dos planos dados salvo en el libro de texto de Edelvives, se procede teniendo en cuenta que se trata del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de ambos planos.

En lo que se refiere al cálculo de la ecuación del plano tangente a la esfera en un punto, los ejemplos que aparecen en el libro de texto de SM, según mi opinión, están muy bien elegidos ya que en alguno de ellos se va más allá de una aplicación directa del resultado. Se pretende que los alumnos se percaten de que el plano tangente a una esfera en un punto es perpendicular al radio de la esfera que une el centro con dicho punto, y que sepan utilizar esta información para resolver problemas enunciados de manera distinta.

V.4.15 Recuento de los esquemas de prueba.

Para finalizar el análisis de los libros de texto atendiendo a la clasificación de los esquemas de prueba utilizados ofrezco en las siguientes tablas un cómputo de la cantidad de esquemas de prueba según su categoría, que aparecen en cada uno de los libros de texto.

En la tabla V.26 se muestra un recuento del número de veces que aparece cada tipo de esquema de prueba en cada libro de texto, mientras que en la tabla V.27 se relaciona el número de esquemas de prueba axiomáticos con el número de veces que estos aparecen junto con esquemas de prueba inductivos, ya sea de un caso, de varios casos o sistemáticos.

Tabla V.26. Recuento de los EP que aparecen en los libros de texto

Libro de texto	EPi1	EPiV	EPiS	EPt	EPa	PP	EPg	Total
Anaya (2014)	31	6	1	2	23	_	_	63
Santillana (2009)	38	3	_	1	26	_	1	69
SM (2001)	16	15	1	1	28	_	_	61
Edelvives (2003)	28	5	1	1	34	_		69

Tabla V.27.Recuento de las ocasiones en que aparecen EPa junto con EPi

Libro de texto	EPa	EPa junto con EPi
Anaya (2014)	23	16
Santillana (2009)	26	20
SM (2001)	28	24
Edelvives (2003)	34	23

- <u>Reflexión sobre la tabla V.26 y V.27</u>

A la vista de la tabla V.26 pueden extraerse algunas conclusiones acerca de los tipos de esquemas de prueba que predominan en los libros de texto.

En primer lugar se aprecia que aunque el número de resultados que se justifican es similar en todos los libros de texto considerados, existen diferencias significativas en el tipo de esquema de prueba utilizado. Se observa que los esquemas de prueba inductivos de un caso son los que predominan en los libros de texto más actuales, seguidos de los esquemas de prueba axiomáticos. Sin embargo, en el libro de texto de Edelvives que corresponde a la ley educativa LOGSE se aprecia que predominan los esquemas de prueba axiomáticos. En el libro de SM que también se enmarca en dicha ley educativa aparece también un mayor número de esquemas de prueba axiomáticos al compararlo con los libros más actuales. Además, un aspecto que caracteriza este libro de texto es la abundancia de esquemas inductivos de varios casos. Estas diferencias pueden ser debidas al año de edición, siendo evidente la progresiva disminución de esquemas de prueba axiomáticos o su sustitución por esquemas de prueba inductivos de un caso.

En cuanto a los aspectos comunes se observa que apenas aparecen esquemas de prueba inductivos sistemáticos (salvo el libro de texto de Santillana que no recoge ningún esquema de prueba de ese tipo el resto están asociados al contenido referente a las posiciones relativas de rectas y planos) y transformacionales. Hay que señalar también que no aparecen pruebas preformales en ninguno de los textos; dicho esquema de prueba podría ser muy útil para los alumnos ya que en él se sigue el mismo razonamiento del esquema de prueba axiomático pero utilizando unos datos concretos, lo cual podría facilitar su comprensión.

Como se puede apreciar en la tabla V.27 en numerosas ocasiones los esquemas de prueba axiomáticos aparecen junto a esquemas de prueba inductivos, lo cual resulta de gran utilidad a los alumnos ya que el ejemplo les permite comprender mejor cómo deben aplicar el resultado. Sin embargo ha de insistirse en que una vez desarrollado el esquema de prueba axiomático, no es necesario comprobar que el enunciado matemático se cumple con un ejemplo para poder aplicarlo sino que, puesto que este ya ha sido demostrado, no son necesarias más comprobaciones y se puede aplicar directamente.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS AL CUESTIONARIO.

Durante el periodo de prácticas en Centros de Enseñanza de ESO y Bachillerato, que realicé en el IES Jorge Manrique (Palencia) bajo la supervisión de mi tutora de prácticas Dña. Mª del Rosario Fátima Zamora, y que se enmarca dentro del Master Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, proporcioné a un total de 23 alumnos (6 de ellos del curso 2º Bachillerato Internacional y el resto de 2º Bachillerato Ciencias) un cuestionario referente a conceptos sobre la demostración matemática en general, y sobre mi intervención en el aula en particular, la cual consistió en demostrar la fórmula de la distancia de un punto a un plano. Planteé mi intervención del siguiente modo:

_En primer lugar mostraba con un ejemplo cómo se puede calcular la distancia de un punto P a un plano π sin hacer uso de la fórmula: tomando una recta perpendicular al plano que pasa por el punto, intersecando dicha recta con el plano obtenemos el punto P' (proyección ortogonal del punto P sobre el plano π); por último calculando la distancia entre el punto P y el punto P’ obtenemos la distancia del punto P al plano π, es decir, la mínima distancia entre un punto del plano y el punto P.

_Después desarrollaba la demostración de la fórmula de la distancia de un punto a un plano, distinguiendo dos etapas: en la primera desarrollaba la fórmula para los datos del ejemplo, y en la segunda generalizaba el resultado para cualquier plano y cualquier punto. Se comprobaba además que para los datos del ejemplo utilizando la fórmula obteníamos el mismo resultado que habíamos conseguido antes sin utilizarla.

Por tanto la formula quedaría justificada de tres maneras distintas:

- Esquema de prueba inductivo de un caso: al comprobar con el ejemplo que se obtenía el mismo resultado razonando sin utilizar la fórmula y utilizándola.
- Esquema de prueba preformal: al seguir el razonamiento propio de una demostración formal, pero utilizando los datos del ejemplo.
- Esquema de prueba formal o axiomática: al generalizar el razonamiento para cualquier punto y plano.

El objetivo general del cuestionario es analizar lo que los alumnos entienden por demostración matemática y cuáles consideran que son sus implicaciones, además de comprobar si los alumnos entendieron plenamente el contenido que desarrollé en mi intervención. El cuestionario consta de doce preguntas que pueden clasificarse en dos grupos:

_ Preguntas generales sobre lo que los alumnos entienden por demostración, así como sobre las demostraciones que se habían estudiado con anterioridad durante el curso.

_Preguntas específicas sobre la demostración que desarrollé en el aula.

VI.1 ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LA 1ª PREGUNTA

_Pregunta 1: Define con tus propias palabras qué entiendes por demostración matemática

_Objetivo de la pregunta 1: Conocer qué entienden los alumnos por demostración matemática, si explicitan que se trata de un conjunto de razonamientos lógicos o silogismos con los que partiendo de una hipótesis se llega a establecer la veracidad de la conclusión o tesis.

_Respuestas:

TablaVI.1. Respuestas a la 1ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Respuestas correctas	2	8.7%
Respuestas parcialmente correctas	17	73.9%
Respuestas incorrectas	4	17.4%
Respuestas en blanco	0	0%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

_ De las respuestas correctas cabe destacar que mencionan que una demostración es un proceso de argumentos lógicos en el que partiéndose de una hipótesis se busca establecer que se cumple una conclusión o tesis. Uno de los dos alumnos incluso utiliza esas mismas palabras (hipótesis y tesis) mientras que otro se refiere a la hipótesis como premisa.

_ De las respuestas parcialmente correctas o incompletas cabe destacar que ,aunque no mencionan que se parte de una hipótesis para, mediante un encadenamiento de razonamientos lógicos, establecer la veracidad de la conclusión, insisten en el proceso deductivo inherente a la demostración matemática y en algunas de las funciones que puede tener esta: de comprobación o verificación y explicativa.

_ Algunos errores en que he encontrado en las respuestas incorrectas son los siguientes:

- Definir demostración como un ejemplo del que podría deducirse la veracidad del resultado. Dichos alumnos no serán capaces de distinguir un ejemplo de una demostración formal o axiomática, considerando los esquemas de prueba inductivos suficientes para su convencimiento.

- Otro alumno lo define como un *método para llegar a un resultado tras haber realizado una serie de operaciones matemáticas*; en este caso conviene señalar que en una demostración matemática los argumentos lógicos pueden no basarse exclusivamente en operaciones algebraicas.
- Errores en la terminología por ejemplo un alumno define demostración matemática como una *sucesión de pasos que permiten asegurar la certeza de un axioma matemático*. En este caso el alumno manifiesta una confusión entre axioma y proposición o resultado matemático ya no ha tenido en cuenta que precisamente los axiomas no requieren demostración, sino que se consideran la base sobre la cual se construye la teoría.

VI.2 ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LA 2ª PREGUNTA

Pregunta 2: Según tu opinión ¿cuál es el papel de las demostraciones en matemáticas?

Objetivo de la pregunta 2: Indagar sobre las funciones de la demostración que los alumnos consideran más importantes.

Respuestas: al tratarse de una pregunta de opinión no tiene sentido la clasificación anterior en respuestas correctas, parcialmente correctas o incorrectas, sino que se trata más bien de observar en qué función de la demostración inciden más los alumnos: si en la función de verificación o en la función explicativa.

Tabla VI.2.Respuestas a la 2ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Inciden en la función de verificación	11	47.8%
Inciden en la función explicativa	10	43,5%
Respuestas ambiguas	2	8,7%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

Según se aprecia en la tabla aproximadamente la mitad de los alumnos hacen alusión a la función de verificación, mientras que la otra mitad se refieren a la función explicativa.

_ Entre los alumnos que se refieren a la función de verificación las expresiones más utilizadas son *'validar un teorema'*, *'dar veracidad a las afirmaciones matemáticas'*, etc. Incluso un alumno hace mención la necesidad de la demostración de los teoremas para, una vez que se ha establecido la veracidad de estos, poder utilizarlos siempre que se cumplan las hipótesis de dichos enunciados, ya sea en los casos concretos de los problemas o en los razonamientos correspondientes a otras demostraciones.

_Entre los alumnos que aluden a la función explicativa las expresiones más utilizadas son *'nos permiten saber de dónde vienen las fórmulas y teoremas'*, *'explicar cómo se llega a un enunciado o fórmula'*, *'llegar a entender el origen de una fórmula o teorema'* etc. Varios de los alumnos insisten en la importancia de entender la demostración de algún resultado sencillo o fórmula, para poder reproducirla en caso de no acordarse de esta, pudiendo así deducirla siempre que sea necesario.

VI.3 ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LA 3ª PREGUNTA.

Pregunta 3: ¿Puede ser un ejemplo una demostración? Justifica la respuesta.

Objetivo de la pregunta 3: Determinar si los alumnos distinguen un ejemplo de una demostración, y a la vista de sus argumentaciones detectar las principales confusiones.

Respuestas:

Tabla VI.3. Respuestas a la 3ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Respuestas correctas	7	30.44%
Respuestas parcialmente correctas	3	13.04%
Respuestas incorrectas	13	56.52%
Respuestas en blanco	0	0%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

_ Entre las respuestas incorrectas se encuentran las de los alumnos que han contestado afirmativamente a la pregunta. Los argumentos que utilizan para justificar dicha afirmación se refieren en su mayoría a que con un ejemplo también se persigue una finalidad explicativa, otros alumnos hacen mención a la función de verificación. Para estos últimos, por tanto, un ejemplo constituye un argumento suficiente para validar el enunciado matemático. Otro de los alumnos se expresa del siguiente modo: *'en mi opinión un ejemplo puede ser una demostración si lo explica de forma similar a esta'*. En este caso el alumno, expresándolo con sus propias palabras, hace alusión a los esquemas de prueba preformales que para él constituirían un esquema de prueba válido para demostrar el resultado.

Otros alumnos no son conscientes de que comprobar que el enunciado matemático se cumple con un ejemplo no es suficiente para poder generalizarlo al resto de situaciones; lo expresan del siguiente modo:*' yo creo que sí, ya que es lo mismo demostrar algo para x=3,5 que para un valor general, 'sí porque con un ejemplo se verifica que se cumple, para todos los problemas iguales, también'.*

De entre los alumnos que responden incorrectamente a la pregunta tres de ellos no justifican su afirmación.

Cabe destacar además que los alumnos que definían demostración como un ejemplo, han contestado incorrectamente a esta pregunta.

_Entre las respuestas parcialmente correctas he considerado las que aun contestando negativamente a la pregunta no lo justifican con argumentos válidos. Por ejemplo uno de los alumnos escribe: *'no, porque no se usan números sino letras'*. Para dicho alumno la mera aparición de expresiones algebraicas le sugiere que se trata de una demostración cuando esto no es necesariamente cierto. Por otra parte intuye acertadamente la necesidad de generalización del resultado más allá de la comprobación de que este se cumple para un caso particular.

_ En las respuestas correctas se insiste en la necesidad de comprobar que el enunciado matemático es cierto en el caso general, lo cual no puede realizarse mediante un ejemplo. Dos de los alumnos insisten en que comprobándolo con un ejemplo no podríamos saber si el resultado es cierto o no ya que, en caso de no ser cierto, podrían encontrarse otros ejemplos en los que no se verifica.

VI.4 ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LA 4ª PREGUNTA.

Pregunta 4: Enumera los resultados de los cuales has visto demostraciones durante el curso.

Objetivo de la pregunta 4: Habiendo sido informada por mi tutora de prácticas, de los resultados que habían sido demostrados, buscaba comprobar si los alumnos sabían distinguir una demostración de otros procesos (enunciados, ejemplos, fórmulas, etc.)

Respuestas:

Tabla VI.4. Respuestas a la 4ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Respuestas correctas	3	13.04%
Respuestas parcialmente correctas	18	78,26%
Respuestas incorrectas	1	4.35%
Respuestas en blanco	1	4.35%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

Según se aprecia en la tabla la mayor parte de las respuestas son parcialmente correctas. En ellas los alumnos han indicado los resultados que ellos consideran que se han demostrado en clase durante el curso. Según me informó mi tutora de prácticas la mayor parte de los teoremas demostrados correspondían al bloque de Análisis siendo los más importantes el teorema de Rolle, el teorema del valor medio o teorema de Lagrange, el teorema del valor medio para integrales, teorema fundamental del cálculo integral y la regla de Barrow. En el bloque de Geometría se demuestran las fórmulas de las distancias: distancia de un punto a un plano, distancia de un punto a una recta, distancia entre dos rectas que se cruzan.

_ En lo que respecta a las respuestas parcialmente correctas, 6 de ellas pueden considerarse incompletas y las 12 restantes incluyen algún teorema del que no se ha estudiado demostración durante el curso por ejemplo el teorema de Bolzano, cuya demostración rigurosa requeriría del teorema de los intervalos encajados que no es materia en los cursos de Bachillerato. Dichos alumnos identificaron los ejemplos desarrollados en clase con una demostración, ya que para ellos constituye un esquema de prueba válido para su convencimiento. Es curioso percatarse de que algunos alumnos, que a la anterior pregunta habían contestado que un ejemplo no puede considerarse una demostración sin embargo incluyen el teorema de Bolzano en la lista de teoremas demostrados durante el curso. Esto pone de manifiesto las dificultades que presenta para los alumnos distinguir qué procesos constituyen una demostración matemática.

_ Por lo que se refiere a las respuestas correctas es interesante señalar que los tres alumnos habían respondido correctamente a la pregunta 3.

VI.5. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LA 5ª PREGUNTA.

Pregunta 5: Elige uno de los resultados de los cuales has visto demostración durante el curso. A continuación revisa la demostración y escribe los resultados y conceptos previos que se utilizan.

Objetivo de la pregunta 5: el objetivo de esta pregunta es determinar si los alumnos son capaces de identificar qué conceptos o teoremas previos se requieren para demostrar un determinad resultado. Además se buscaba que los alumnos se viesen obligados a repasar la demostración del teorema elegido y profundizar sobre ella.

Respuestas:

Tabla VI.5. Respuestas a la 5ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Respuestas correctas	12	52.17%
Respuestas parcialmente correctas	3	13.04%
Respuestas incorrectas	6	26.09%
Respuestas en blanco	2	8.7%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

_Aunque no era el objetivo de la pregunta la mayor parte de los alumnos que responden acertadamente reproducen totalmente la demostración del teorema elegido, con lo que no queda claro si han ahondado en su comprensión. Los teoremas más elegidos por los alumnos son el teorema de Rolle, el teorema de Lagrange o del valor medio, el teorema de la media para integrales y la regla de Barrow.

_Entre las respuestas parcialmente correctas están aquellas que son incompletas, en las que no se especifican los resultados que se requieren en la demostración. Por ejemplo una alumnos refiriéndose al teorema de Rolle afirma que *'se necesita conocer el concepto de continuidad y derivabilidad de una función'* .Sin embargo no hace mención del teorema de Weierstrass que es fundamental en su demostración.

_ En lo que respecta a las respuestas incorrectas cuatro de ellas se refieren al teorema de Bolzano del que, como ya he comentado, no se estudia una demostración formal en los cursos de Bachillerato. Dichos alumnos para justificar el teorema ofrecen ejemplos gráficos de funciones que verifican las hipótesis del teorema. Otro de los alumnos opta por el teorema de la media para integrales pero en vez de justificarlo mediante un esquema de prueba axiomático ofrece un ejemplo en el que se verifica. Cabe señalar que de los seis alumnos que responden incorrectamente a esta cuestión cinco de ellos habían manifestado que un ejemplo podía considerarse una demostración.

VI.6. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LA 6ª PREGUNTA.

Pregunta 6: Explica cómo calcularías la distancia de un punto a un plano sin utilizar la fórmula. Ayúdate en tu explicación representando los planos, rectas y puntos que intervienen.

Objetivo de la pregunta 6: Comprobar que los alumnos habían entendido el proceso para obtener la distancia de un punto a un plano. Pretendía además que les sirviera como repaso.

Respuestas:

Tabla VI.6. Respuestas a la 6ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Respuestas correctas	10	43.48%
Respuestas parcialmente correctas	10	43.48%
Respuestas incorrectas	2	8.69%
Respuestas en blanco	1	4.35%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

_ Las respuestas correctas se refieren a la primera parte de mi intervención en la que mediante un ejemplo ilustré a los alumnos de cómo podía obtenerse la distancia de un punto a un plano sin hacer uso de la fórmula.

_ He considerado como respuestas parcialmente correctas aquellas en las que no se especifican cada uno de los pasos del proceso o las de aquellos alumnos que simplemente reproducen el ejemplo desarrollado en clase. En tres de estas respuestas, en vez de describir el proceso para la obtención de la distancia de un punto a un plano, los alumnos reproducen la demostración de la fórmula.

_Las respuestas incorrectas aportan poca información ya que no están bien expresadas. Por ejemplo en una de ellas se expone como método para calcular la distancia de un punto a un plano el siguiente*: ’calcularía el plano perpendicular que uniese ese punto y el plano’*. Lo más probable es que el alumno se refiriese al cálculo de la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto, siendo la intersección de esta con el plano la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

VI.7. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LA 7ª PREGUNTA.

Pregunta 7: Escribe la fórmula para calcular la distancia de un punto a un plano. Teniendo en cuenta los ejemplos desarrollados en clase, ¿eres consciente de la utilidad de la fórmula para simplificar los cálculos?

Objetivo de la pregunta 7: el objetivo de esta pregunta es que los alumnos se percaten de que la fórmula nos ofrece un modo directo de obtener la distancia de un punto a un plano y que puedan compararlo con el proceso descrito en la respuesta a la pregunta anterior.

Respuestas:

Tabla VI.7. Respuestas a la 7ª pregunta.

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Respuestas correctas	10	43.48%
Respuestas parcialmente correctas	13	56.52%
Respuestas incorrectas	0	0%
Respuestas en blanco	0	0%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

Al tratarse de una pregunta cuya respuesta se sugiere, la mayor parte de los alumnos responden de la manera esperada. Reflexionando sobre el cuestionario, opino que podría ser perfeccionado sustituyendo esta pregunta por el enunciado de un ejercicio de aplicación, sin aportar ninguna indicación previa. Esto permitiría observar el número de alumnos que optan por utilizar directamente la fórmula, siendo estos por tanto conscientes de la utilidad de esta, y el de los que repiten una vez más todo el proceso para la obtención de la distancia de un punto a un plano.

_ He considerado como respuestas parcialmente correctas aquellas en las que los alumnos escribían la fórmula de la distancia de un punto a un plano pero no hacían ningún comentario sobre su utilidad.

_ Entre las respuestas correctas destacan los siguientes comentarios: *´con la fórmula evitamos realizar todo un proceso' 'de esta forma únicamente se debe aplicar la fórmula y no dedicar demasiado tiempo al desarrollo del razonamiento seguido para llegar a ella'*

VI.8. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LA 8ª PREGUNTA

Pregunta 8: En la obtención de la fórmula, ¿qué conceptos previos se utilizan?

Objetivo de la pregunta: el objetivo de la pregunta es comprobar si los alumnos son conscientes de que la demostración de la fórmula se basa en el producto escalar de dos vectores.

Respuestas:

Tabla VI.8. Respuestas a la 8ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Respuestas correctas	2	8.69%
Respuestas parcialmente correctas	11	47.83%
Respuestas incorrectas	7	30.43%
Respuestas en blanco	3	13.04%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

_He considerado como respuestas correctas aquellas en las que se hace referencia explícita del producto escalar siendo únicamente dos alumnos quienes lo mencionan. Sin embargo hay una gran variedad de respuestas que pueden considerarse parcialmente correctas, en ellas los alumnos se refieren a conceptos utilizados en la explicación como el de vector normal a un plano, vector director de una recta, módulo de un vector, distancia entre dos puntos, etc. que en su mayoría se utilizaron en la primera parte de la sesión de clase en la que se describía mediante un ejemplo el proceso de obtención de la distancia de un punto a un plano. Llamó particularmente mi atención la respuesta de dos de los alumnos que relacionaban con acierto la fórmula obtenida con la estudiada el curso anterior para la distancia de un punto a una recta en el plano.

_Entre las respuestas incorrectas se registran los siguientes errores: se menciona en varias de ellas el producto vectorial; otro alumno menciona el concepto de volumen que estaría relacionado con el producto mixto. Otras de las respuestas son demasiado ambiguas refiriéndose en ellas a igualdades entre vectores o a las ecuaciones de rectas y planos.

VI.9. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LA 9ª PREGUNTA

Pregunta 9: En el desarrollo de la explicación se ha justificado la fórmula de la distancia de un punto a un plano utilizando distintos esquemas de prueba:

- Esquema de prueba inductivo: al comprobar con el ejemplo que se obtenía el mismo resultado sin utilizar la fórmula y utilizándola.
- Esquema de prueba preformal: al seguir el razonamiento propio de una demostración formal, pero utilizando los datos del ejemplo.
- Esquema de prueba formal o axiomática: al generalizar el razonamiento para cualquier punto y plano.

Indica con qué tipo de razonamiento has entendido mejor de qué manera se obtiene la fórmula correspondiente a la distancia de un punto a un plano.

Objetivo de la pregunta: el objetivo de estas preguntas es hacer un estudio del tipo de esquema de prueba cuya comprensión resulta más fácil a los alumnos.

Respuestas:

Tabla VI.9.Respuestas a la 9ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Esquema de prueba inductivo de un caso	12	52.17%
Esquema de prueba preformal	4	17.39%
Esquema de prueba axiomático	3	13.04%
Respuestas en blanco	4	17.39%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

Se observa que más de la mitad de los alumnos manifiestan su preferencia por el esquema de prueba inductivo considerando que es el que más les ha ayudado a entender cómo se obtiene la fórmula de la distancia de un punto a un plano. Aunque en realidad mediante este esquema de prueba se describe un proceso para calcular dicha distancia en vez de mostrar la manera de obtener la fórmula, la mayor parte de los alumnos comprenden mejor el ejemplo que el esquema de prueba formal o axiomático. Uno de los comentarios que considero interesantes a este respecto es el siguiente: *'el esquema de prueba inductivo de un caso es el que mejor entiendo porque al razonar se comprende qué se quiere hallar. Luego con la fórmula es posible hallar el resultado* *con más facilidad pero el razonamiento previo permite que nos imaginemos la situación y la entendamos'*. Queda pues clara la necesidad de ilustrar a los alumnos con ejemplos, pero también es importante introducir demostraciones formales cuando sea posible para que los alumnos se habitúen a los argumentos lógicos que aparecen en ellas y mejoren en su comprensión.

VI.10. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A 10ª PREGUNTA.

Pregunta 10: Indica qué tipo de razonamiento te ha ayudado más a entender cómo debes aplicar la fórmula de la distancia de un punto a un plano en los casos concretos que aparecerán en los problemas.

Objetivo de la pregunta: el objetivo de esta pregunta es hacer un estudio del tipo de esquema de prueba que permite comprender mejor a los alumnos cómo deben aplicar el resultado.

Respuestas:

Tabla VI.10.Respuestas a la 10ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Esquema de prueba inductivo de un caso	5	21.74%
Esquema de prueba preformal	5	21.74%
Esquema de prueba axiomático	8	34.78%
Respuestas en blanco	5	21.74%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

Aproximadamente la tercera parte de los alumnos consideran que el esquema de prueba que más les ayuda a comprender cómo aplicar el resultado es el esquema de prueba axiomático. Aunque la mayor parte de los alumnos no justifican su elección, uno de ellos hace alusión a la que demostrando la fórmula en el caso general también es más fácil entender cómo aplicarla a los casos concretos.

VI.11 ANÁLISIS DE LA 11ª PREGUNTA.

Pregunta 11: Hemos demostrado un enunciado matemático, ¿necesitas ver que se cumple con un ejemplo para poder aplicar el resultado?

Objetivo de la pregunta: Determinar si los alumnos son conscientes de las implicaciones de la demostración realizada en el aula, o si por el contrario requieren de ulteriores comprobaciones antes de aplicar el resultado.

Respuestas

Tabla VI.11. Respuestas a la 11ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Respuestas correctas	9	39.13%
Respuestas parcialmente correctas	2	8.7%
Respuestas incorrectas	9	39.13%
Respuestas en blanco	3	13.04%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

_ He considerado como respuestas correctas aquellas en las que se afirma que una vez demostrada la fórmula no es necesario comprobar que se cumple en un caso particular, antes de aplicarla. Sin embargo son significativas los comentarios que realizan los alumnos: *'en principio no, pero para afianzar conocimientos es recomendable hacer algún ejemplo en el que se aplique el resultado', 'no es necesario el ejemplo tras ver la demostración de la fórmula pero ayuda a su comprensión'*. Con estos comentarios se pone de manifiesto que los alumnos consideran los ejemplos necesarios para una mayor comprensión de los enunciados matemáticos. Sin embargo es importante que sean conscientes de que habiendo sido demostrado un enunciado, no es preciso comprobar que se cumple en un caso particular antes de aplicarlo, sino que el hecho de ofrecer algún ejemplo cumple únicamente una función explicativa y no de verificación.

De las 9 respuestas correctas solo dos afirman categóricamente que no es necesario porque ya está demostrado.

_ Las respuestas parcialmente correctas son más ambiguas. En ellas los alumnos no dan una respuesta clara a la pregunta. Por ejemplo un alumno afirma*: ´en teoría ya está demostrado, pero nunca está de más'*.

_En cuanto a las respuestas incorrectas los alumnos insisten en considerar necesario el ejemplo ya que de esta forma les resulta más fácil la comprensión y asimilación del resultado. Por otra parte, un alumno responde del siguiente modo: *'sí; el resultado del ejemplo aplicado nos ayuda a determinar si el enunciado matemático es verdadero o falso'*. Para dicho alumno el ejemplo tendría función de verificación.

VI.12 ANÁLISIS DE LA 12ª PREGUNTA

Pregunta 12: Hemos demostrado un enunciado matemático. ¿Puede haber alguna situación en la que no se cumpla?

Objetivo de la pregunta: Comprobar si los alumnos son conscientes de que una vez que se ha demostrado un enunciado matemático, podemos afirmar que este es cierto siempre.

Respuestas:

Tabla VI.12 Respuestas a la 12ª pregunta

Respuestas	Alumnos	Porcentaje
Respuestas correctas	8	34.78%
Respuestas parcialmente correctas	0	0%
Respuestas incorrectas	10	43.48%
Respuestas en blanco	5	21.74%
Total	23	100%

Análisis de las respuestas:

_ He considerado como respuestas correctas aquellas en las que se afirma que el resultado es cierto siempre. Muchos de los alumnos que responden acertadamente a la pregunta insisten en la exactitud de las matemáticas como ciencia. Otros aluden a que habiéndose demostrado el enunciado en el caso general este debe cumplirse en todos los casos particulares.

_ He considerado como respuestas incorrectas aquellas en las que se afirma que puede haber situaciones en las que no se cumpla el enunciado. Algunos de los alumnos expresan sus dudas del siguiente modo: *'siempre puede haber excepciones, pero en su gran mayoría se cumple'*, *'normalmente un ejemplo de cualquier proposición sí se cumple'*. Otros distinguen entre leyes y enunciados refiriéndose sin duda a otras disciplinas científicas, afirmando que son las leyes las que se cumplen siempre.

Otra de las respuestas que reproduce un error muy común de los alumnos al entender los enunciados matemáticos es la siguiente: *'puede ocurrir que un ejemplo no cumpla las condiciones que plantea el enunciado matemático, entonces este ya no es verdadero por completo'*. Con esta respuesta se alude a que si en la situación concreta no se cumplen las hipótesis de un teorema, no puede garantizarse en ese caso que se dé la tesis. Sin embargo, esto no significa que el teorema no sea cierto, como sugiere el alumno.

Entre los alumnos que entendieron la pregunta referida no a una proposición general sino al enunciado demostrado en clase también hay algunas respuestas incorrectas entre ellas la de un alumno que afirma que para poder aplicar la fórmula de la distancia de un punto a un plano, es necesario que el punto no esté contenido en el plano (lo cual no es cierto ya que la fórmula se cumple también en ese caso en el que nos daría como resultado cero). Otras respuestas incorrectas son las de alumnos que entienden que la fórmula $d(\pi,P)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (siendo el punto $P=(x_1,y_1,z_1)$ y la ecuación general del plano π: $Ax+By+Cz+D=0$) no se cumple en el caso de que A, B y C fuesen iguales a cero, ya que estaríamos dividiendo por cero, pero este supuesto no puede darse, ya que en ese caso no tendría sentido hablar del plano considerado.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

VII.1. CONCLUSIONES

En este capítulo se enunciarán las conclusiones a las que he podido llegar tras el análisis de los libros de texto y de las respuestas de los alumnos al cuestionario. Para ello se partirá de las hipótesis expresadas en el capítulo IV, que en base a los datos del estudio podrán ser confirmadas o refutadas, haciéndose en cada caso las aclaraciones pertinentes.

- Hipótesis 1: los esquemas de prueba que predominan en los libros de texto son los esquemas de prueba inductivos de un caso y los esquemas de prueba axiomáticos.

Conclusión 1. Efectivamente, los esquemas de prueba que predominan en los libros de texto considerados, con respecto a los enunciados correspondientes al bloque de contenidos de Geometría, son los esquemas de prueba inductivos de un caso y los esquemas de prueba axiomáticos, siendo los primeros los que predominan en los libros de texto de Anaya (2014) y Santillana (2009), y los segundos los que predominan en el libro de texto de SM (2001) y Edelvives (2003). Se ha observado además que el libro de texto de SM utiliza menos esquemas de prueba inductivos de un caso, prefiriéndose esquemas de prueba inductivos de varios casos, con el objetivo de ofrecer a los alumnos varias situaciones de aplicación del enunciado matemático de que se trate.

- Hipótesis 2: en los libros de texto correspondientes a la anterior ley educativa (LOGSE) aparecen más esquemas de prueba axiomáticos que en los libros correspondientes a la ley vigente este curso para 2º Bachillerato (LOE).

Conclusión 2. Esta hipótesis se ha visto confirmada ya que en los libros de SM (2001) y Edelvives (2003) aparecen más esquemas de prueba axiomáticos que en los libros de texto más actuales. Se puede sacar como conclusión que se ha producido una progresiva sustitución de los esquemas de prueba axiomáticos por esquemas de prueba inductivos de un caso. Además en el caso del libro de texto de Edelvives aparecen teoremas (por ejemplo teoremas sobre espacios vectoriales, y otros enunciados como la desigualdad de Schwarz y la desigualdad triangular) con sus respectivas demostraciones axiomáticas que no se recogen en el resto de libros de texto. Podría decirse que este libro de texto se caracteriza por su mayor formalismo al tratar los conceptos, por lo que en él aparecen más definiciones y resultados que en los restantes libros de texto considerados.

- Hipótesis 3: escasa presencia de esquemas de prueba inductivos sistemáticos, transformacionales, gráficos, o pruebas preformales.

Conclusión 3. Después del análisis realizado se ha podido confirmar que apenas aparecen esquemas de prueba inductivos sistemáticos (solamente hay un esquema de prueba de este tipo en cada libro de texto excepto en el libro de Santillana en el que no aparece ninguno). Estos esquemas de prueba están asociados a los resultados sobre la posición relativa de rectas y planos, y con ellos se busca ofrecer un ejemplo de cada una de las situaciones posibles.

También es escasa la presencia de esquemas transformacionales (solo aparece un esquema de prueba de este tipo en cada libro de texto salvo en el libro de Anaya en el que aparecen dos). Estos esquemas de prueba se utilizan para determinar que el área de un triángulo es la mitad de la del paralelogramo construido sobre dos de sus lados. En el libro de texto de Anaya también se utiliza un esquema de prueba transformacional para establecer que el volumen de un tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo construido sobre sus aristas, mientras que en el libro de Anaya se prefiere un esquema de prueba gráfica para justificar dicho resultado, siendo este el único esquema de prueba gráfica que aparece en los libros de texto considerados.

Asimismo tras la clasificación de los esquemas de prueba de los libros de texto se ha observado la total ausencia de pruebas preformales, lo cual puede ser debido al desconocimiento de este tipo de esquema de prueba que sin embargo puede ser de gran utilidad para los alumnos.

- Hipótesis 4: en muchos casos aparecen asociados a un mismo contenido un esquema de prueba axiomático junto con un esquema de prueba inductivo ya sea de un caso, de varios casos o sistemático.

Conclusión 4. Se ha observado en el análisis que ciertamente en numerosas ocasiones aparecen esquemas de prueba axiomáticos junto con esquemas de prueba inductivos en relación al mismo contenido. Aunque una vez justificado el enunciado matemático mediante un esquema de prueba axiomático, o demostración formal, no son necesarias más comprobaciones para garantizar el convencimiento de los alumnos en relación a la veracidad del enunciado, resulta siempre útil para ellos un ejemplo de aplicación del mismo. Esta apreciación está corroborada con las respuestas de los alumnos a la pregunta 11 del cuestionario (*Hemos demostrado un enunciado matemático, ¿necesitas ver que se cumple con un ejemplo para poder aplicar el resultado?)* en la que varios de los alumnos insisten en la conveniencia de presentar un ejemplo ya que les ayuda a la comprensión del enunciado y de su aplicación.

- Hipótesis 5: para muchos alumnos un enunciado matemático es veraz si se cumple con un ejemplo.

Conclusión 5. Se ha visto confirmada esta hipótesis en el análisis de las respuestas de los alumnos al cuestionario. En concreto a la pregunta 3 *(¿Puede ser un ejemplo una demostración? Justifica la respuesta)* más de la mitad de los alumnos afirman que sí (en concreto el 56.52%). Algunos de los alumnos que contestaron incorrectamente a la pregunta insisten en que un ejemplo cumple la función explicativa (que asocian a la demostración matemática) y otros afirman que cumple la función de verificación del resultado. Para estos alumnos, por tanto, un esquema de prueba inductivo es suficiente para su convencimiento.

- Hipótesis 6: algunos alumnos presentan dificultades a la hora de distinguir las demostraciones de otros procesos como comprobaciones o ejemplos.

Conclusión 6. Para comprobar si esta hipótesis era cierta plantee la siguiente pregunta en el cuestionario que diseñé para los alumnos: *Enumera los resultados de los cuales has visto demostraciones durante el curso.* Habiendo sido informada por mi tutora de prácticas de cuales habían sido los teoremas demostrados durante el curso, buscaba comprobar si los alumnos distinguían las demostraciones realizadas en el aula de otros procesos como comprobaciones o ejemplos. La mayor parte de las respuestas fueron parcialmente correctas (78,26%) ya que aunque las enumeraciones incluían teoremas de los que se había visto demostración en clase, algunas de ellas eran incompletas y otras (12 de las respuestas parcialmente correctas) incluían teoremas que no habían sido demostrados, por ejemplo el teorema de Bolzano y el teorema de Rouché-Frobenius. Esto pone de manifiesto la dificultad que presenta para los alumnos distinguir las demostraciones de los ejemplos desarrollados en clase para una mayor comprensión de los enunciados. Con la respuesta a la pregunta 5 *(Elige uno de los resultados de los cuales has visto demostración durante el curso. A continuación revisa la demostración y escribe los resultados y conceptos previos que se utilizan)* se ratifica dicha apreciación ya que de los 23 alumnos que realizaron el cuestionario 6 de ellos (26.09%) expusieron ejemplos en los que se cumplían las hipótesis del teorema elegido, en lugar de demostraciones formales, por las que se preguntaba.

- Hipótesis 7: los alumnos muestran en general una preferencia por los esquemas de prueba inductivos de un caso.

Conclusión 7. Para determinar si era cierta esta hipótesis plantee la siguiente pregunta en el cuestionario: *Indica con qué tipo de razonamiento has entendido mejor de qué manera se obtiene la fórmula correspondiente a la distancia de un punto a un plano.* Dicha pregunta se refiere a mi intervención en el aula durante el periodo de prácticas, en la que justifiqué la fórmula de la distancia de un punto a un plano utilizando varios esquemas de prueba: esquema de prueba inductivo de un caso, prueba preformal y esquema de prueba axiomático. Más de la mitad de los alumnos (52.17%) afirmaron que el esquema de prueba que preferían era el esquema de prueba inductivo de un caso. Sin embargo en lo que respecta a la aplicación del resultado y en respuesta a la pregunta 10 *(Indica qué tipo de razonamiento te ha ayudado más a entender cómo debes aplicar la fórmula de la distancia de un punto a un plano en los casos concretos que aparecerán en los problemas)* los alumnos manifestaron su preferencia por el esquema de prueba axiomático (34.78%) ya que al obtener la fórmula para un caso general, es más fácil para ellos sustituir en esta los valores concretos que aparecerán en los enunciados de los problemas.

- Hipótesis 8: una vez demostrado un enunciado algunos alumnos pueden tener dificultades a la hora de ser conscientes de sus implicaciones, es decir que el resultado puede aplicarse directamente sin necesidad de más comprobaciones, que no pueden hallarse contraejemplos, etc.

Conclusión 8. Dicha hipótesis se ha visto confirmada con el análisis de las dos últimas preguntas del cuestionario con las que se pretende determinar si los alumnos son conscientes de las implicaciones de la demostración realizada en el aula. A la pregunta: *Hemos demostrado un enunciado matemático, ¿necesitas ver que se cumple con un ejemplo para poder aplicar el resultado?,* el 39.13% de los alumnos respondieron afirmativamente, e incluso entre los que afirmaban que se podía aplicar el resultado directamente puesto que ya estaba demostrado, se hablaba de la conveniencia de realizar con anterioridad algún ejemplo que ayude a la asimilación del resultado. Esto nos habla de la importancia que tienen los ejemplos para los estudiantes de Secundaria, pero también de la necesidad de recalcar que, tras haber demostrado un teorema no son necesarias más comprobaciones sino que este se puede aplicar directamente.

En la última pregunta del cuestionario se preguntaba a los alumnos si se podría encontrar alguna situación en la que el enunciado matemático no fuese cierto. A esta pregunta respondían incorrectamente el 43.48% de los alumnos que no se mostraban convencidos acerca de la veracidad del enunciado en toda situación sino que manifestaban sus dudas acerca de si podría haber excepciones.

VII.2. APORTACIONES DEL ESTUDIO

Las principales aportaciones de este trabajo han sido:

- La clasificación de los esquemas de prueba de los libros de texto considerados, en lo referente al bloque de contenidos de Geometria. Dicha clasificación se ha basado en el marco teórico expuesto en el capítulo II.
- El análisis de las respuestas de los alumnos al cuestionario, que ha permitido detectar algunas de las principales dificultades de los alumnos respecto a la demostración matemática.

Con carácter personal este estudio me ha resultado muy útil ya que, teniendo en cuenta las dificultades de los alumnos con respecto a la demostración matemática, se podría elaborar un programa de docencia en la que se atendiera a dichos aspectos, además de suplir las carencias de los libros de texto, por ejemplo incluyendo pruebas preformales que pueden ayudar a la comprensión del proceso de la demostración del enunciado matemático correspondiente.

Asimismo, un análisis de los libros de texto como el del presente trabajo, haciéndolo extensible al resto de bloque de contenidos, y en el que se atendiese a la riqueza y variedad de los esquemas de prueba utilizados, podría ser de utilidad a la hora de recomendar el uso de un libro de texto determinado para el curso de que se trate.

VII.3.PUNTOS DÉBILES Y PROPUESTAS DE MEJORA

Las dificultades más importantes que me encontré a la hora de la realización de este trabajo son las siguientes:

- En principio tuve algunas dificultades para disponer de libros de texto actuales con los que realizar el estudio. Por lo tanto se amplió la selección de libros a aquellos correspondientes a la ley educativa LOGSE, lo cual permitió poder realizar comparaciones entre los libros de texto desde el punto de vista histórico.
- Dudas a la hora de elegir las preguntas más significativas en la elaboración del cuestionario, puesto que por una parte pretendía detectar con él las dificultades más usuales de los alumnos con respecto a la demostración matemática y por otra que les sirviera como repaso del contenido desarrollado durante mi intervención en el aula. Por supuesto conté con la guía de mis tutores de Trabajo Fin de Master que me sugirieron algunas preguntas interesantes que incluí en el cuestionario.

Entre las propuestas de mejora o ampliaciones cabe mencionar las siguientes:

- El trabajo podría hacerse extensible a otros bloques de contenidos, pudiéndose así realizar una comparativa general de los libros de texto considerados.
- Aunque se ha elegido como curso de referencia 2º Bachillerato de Ciencias por ser el curso de Educación Secundaria en el que más abundan las demostraciones matemáticas, se podría realizar el estudio con libros de texto de otros cursos, pudiéndose observar así qué tipo de justificaciones utilizan y de qué forma se introducen los esquemas de prueba axiomáticos o demostraciones formales en los cursos anteriores.
- Otro aspecto en el que se podría profundizar es en el análisis de los libros de texto desde una perspectiva histórica, pudiéndose de este modo determinar la evolución del tratamiento de la demostración matemática dependiendo de la legislación educativa vigente. Para ello se necesitaría contar con un libro de texto de cada editorial correspondiente a cada periodo, para poder determinar cómo ha ido cambiando el tratamiento de la demostración a lo largo de los años. De hecho esta idea es la que se fundamenta la tesis doctoral *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la ley general de educación a la ley orgánica de educación* presentada por Laura Conejo Garrote en la Universidad de Valladolid (2015), y que me ha servido como referencia en la elaboración del presente trabajo.
- Por lo que respecta a la elaboración del cuestionario sería interesante haber incluido una pregunta de aplicación directa de la fórmula de la distancia de un punto a un plano. El objetivo sería comprobar si los alumnos son conscientes de la utilidad de la fórmula y de si son capaces de aplicarla correctamente. Podrían dividirse las respuestas entre las de aquellos alumnos que utilizasen la fórmula para resolver el ejercicio y los que prefiriesen realizar todo el proceso. Además dicha pregunta podría servirles como un ejercicio de repaso.

VII.4.CUESTIONES ABIERTAS

La demostración matemática por su importancia y por las dificultades que presenta para los alumnos ha sido objeto de numerosos estudios desde el punto de vista didáctico. Tras la realización de este trabajo se plantean nuevos interrogantes que podrían ser materia para estudios posteriores.

- Un estudio interesante podría consistir en analizar de qué manera se introduce la demostración matemática en los libros de texto correspondientes a los diferentes cursos de Educación Secundaria: qué esquemas de prueba se utilizan con más frecuencia en cada etapa, de qué forma se introduce la demostración formal y asociada a qué tipo de enunciados, etc.
- Sería de utilidad, además, realizar propuestas didácticas sobre los contenidos del currículo de forma que se diera más importancia al razonamiento deductivo y desde edades más tempranas, para así conseguir disminuir las dificultades que encuentran los alumnos en relación con la demostración matemática favoreciendo su comprensión.
- Efectuar un estudio no solo de los tipos de esquemas de prueba que aparecen en los libros de texto, sino también de la forma en que se enuncian los teoremas, creando además material didáctico para que los alumnos puedan comprenderlos plenamente, ayudándoles a identificar las hipótesis y la tesis de los teoremas y a entender la forma de enunciarlos (enunciados ‘si, entonces’; enunciados de condición necesaria, de condición suficiente, de condición necesaria y suficiente de si y solo si, etc.).
- Recogida de información por medio de cuestionarios que además sirvan como instrucción a los alumnos, realizando actividades con las que se busque clarificar aspectos sobre los enunciados matemáticos y sus demostraciones

BIBLIOGRAFÍA

Ortega, T. y Planas, M. (2016). *Razonamiento, argumentación y demostración en educación primaria. Capítulo 12.* Editorial Paraninfo. En prensa.

Conejo Garrote, L. (2015) *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la ley general de educación a la ley orgánica de educación.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática. Universidad de Valladolid.

Libros de texto utilizados en el estudio

- Bachillerato2. Matemáticas II. Editorial Anaya. Autores: José Colera, Mª José Oliveira, Leticia Colera. Año de edición: 2014.

- Matemáticas II. 2 Bachillerato. Editorial Santillana. Proyecto: La casa del saber Autores: Angélica Escoredo, María Dolores Gómez, José Lorenzo, Pedro Machín, Carlos Pérez, José del Río, Domingo Sánchez. Año de edición: 2009.

- Matemáticas M_2. Editorial Edelvives. Proyecto 2.2.Autores: Mª Felicidad Monteagudo Martínez, Jesús Paz Fernández. Año de edición: 2003.

- Matemáticas 2. Editorial SM. Colección Algoritmo. Autores: J.R Vizmanos, M. Anzola. Año de edición: 2001.

ANEXOS

ANEXO 1: CUESTIONARIO.

LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

- Pregunta 1: Define con tus propias palabras qué entiendes por demostración matemática.

- Pregunta2: Según tu opinión, ¿cuál es el papel de las demostraciones en matemáticas?

- Pregunta 3: ¿Puede ser un ejemplo una demostración? Justifica la respuesta.

- Pregunta 4: Enumera los resultados de los cuales has visto demostraciones durante el curso.

- Pregunta 5: Elige uno de ellos y enúncialo. A continuación revisa la demostración y escribe los resultados y conceptos previos que se utilizan.

FÓRMULA DE LA DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Nos centraremos en esta sesión de clase en la obtención de la fórmula que nos da la distancia de un punto a un plano.

- Pregunta 6: Explica cómo calcularías la distancia de un punto a un plano, sin utilizar la fórmula. Ayúdate en tu explicación representando los planos, rectas y puntos que intervienen.

- Pregunta 7: Escribe la fórmula para calcular la distancia de un punto a un plano. Teniendo en cuenta los ejemplos desarrollados en clase, ¿eres consciente de la utilidad de la fórmula para simplificar los cálculos?

- Pregunta 8: En la obtención de la fórmula ¿qué conceptos previos se utilizan?

_En el desarrollo de la explicación se ha justificado la fórmula de la distancia de un punto a un plano utilizando distintos esquemas de prueba:

Esquema de prueba inductivo de un caso: al comprobar con el ejemplo que se obtenía el mismo resultado razonando sin utilizar la fórmula y utilizándola.

Esquema de prueba preformal: al seguir el razonamiento propio de una demostración formal, pero utilizando los datos del ejemplo.

Esquema de prueba formal o axiomática: al generalizar el razonamiento para cualquier punto y plano.

- Pregunta 9: Indica con qué tipo de razonamiento has entendido mejor de qué manera se obtiene la fórmula correspondiente a la distancia de un punto a un plano.

- Pregunta 10: Indica qué tipo de razonamiento te ha ayudado más a entender cómo debes aplicar la fórmula de la distancia de un punto a un plano en los casos concretos que aparecerán en los problemas.

_Teniendo en cuenta lo visto en clase durante el día de hoy responde a las siguientes cuestiones:

- Pregunta 11: Hemos demostrado un enunciado matemático. ¿Necesitas ver que se cumple con un ejemplo para poder aplicar el resultado?

- Pregunta 12: ¿Puede haber alguna situación en la que no se cumpla?