Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES, SOCIALES Y DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL:

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Presentada por: María Ástrid Cuida Gómez para optar al grado de
Doctora por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:
Dr. D. Tomás Ortega del Rincón

-AÑO 2016-

A Joshua

Emilio tiene pocos conocimientos, pero los que tiene son verdaderamente suyos; no sabe nada a medias. En el pequeño número de cosas que sabe y que sabe bien, la más importante es que hay muchas que ignora y que puede llegar a saber un día, muchas más que otros hombres saben y que él no sabrá en la vida, y una infinidad de otras que ningún hombre llegará a saber jamás. Tiene un espíritu universal, no por las luces sino por la forma de adquirirlas; un espíritu abierto, inteligente, dispuesto a todo y, como dijo Montaigne, si no instruido, por lo menos instruible. Me basta con que sepa encontrar el para qué de todo lo que hace y el porqué de todo lo que cree. Pues una vez más mi objetivo no es darle la ciencia, sino enseñarle a adquirirla cuando la necesite, hacerle estimar exactamente lo que vale y hacerle amar la verdad por encima de todo. Con este método se avanza poco, pero nunca se ve uno forzado a retroceder.

J. J. ROUSSEAU, Emilio o de la educación, libro III

Agradecimientos

Las obras de una persona son siempre el fruto de una vida compartida con muchas vidas, las de otras personas que a veces sin querer o sin influir directamente, sólo con su presencia y su ánimo cercano, nos ayudan a ver la luz. Por eso es de justicia recordar aquí algunos de sus nombres.

Mi más profundo agradecimiento es en primer lugar a mi tutor y director Dr. Tomás Ortega del Rincón cuya experiencia, sapiencia, comprensión, generosa orientación y apoyo incondicional hicieron posible que yo pudiese trabajar sobre un tema de gran interés para mí. Su entusiasmo inquebrantable por la Educación Matemática mantuvo viva mi ilusión por la investigación, y su disponibilidad personal hizo que mi tiempo en Valladolid fuese agradable. Le doy las gracias por hacerme ver la investigación y el trabajo durante el periodo doctoral desde diferentes perspectivas con el fin de abrir mi mente. Sus consejos fueron esenciales para lograr llegar hasta aquí.

Deseo hacer constar mi inmensa gratitud al Dr. José Ángel Domínguez Pérez, primer tutor en mi etapa de doctorado, por encontrar tiempo en su apretada agenda para atender y resolver mis inquietudes, por su amabilidad al mostrar interés en mi investigación y por ser un pilar importante para la recogida de datos y realización de la entrevista en la Universidad de Salamanca. Gracias por ser una fuente constante de motivación.

Quiero expresar mi gratitud también a la Dra. Paula Camelia Trandafir pues su ayuda fue imperativa en muchos aspectos de esta investigación. Gracias por estar siempre ahí, por la paciencia y dedicación con la que me ha resuelto las múltiples dudas informáticas y estadísticas que fueron surgiendo durante el proceso de escritura de este trabajo.

A mi amigo y colega Oscar Eduardo Gómez por sus sugerencias y apoyo incondicional. Cada conversación con Óscar fue para mí una fuente de ilusión y emoción por mejorar la enseñanza de las matemáticas. Su profundo amor por las Matemáticas es motivo de inspiración para aquellos que, al igual que yo, anhelan que esta pasión trascienda en el contexto educativo.

Mi gratitud también va dirigida a los compañeros de Departamento y de "pasillo", por su apoyo constante y por sus palabras de aliento en este largo camino recorrido.

A todos los docentes de las distintas universidades, Universidad de Valladolid, Universidad de Salamanca, Universidad Autónoma de Madrid, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia y Pontificia Universidad Católica de Perú, que aceptaron colaborar en esta tesis. Gracias por su inestimable ayuda.

Gracias a todos ellos y a quienes de alguna forma me prestaron su ayuda.

Y, por último, tengo que agradecer tantas cosas a mis seres queridos, que sostienen mi alma. A mi hijo, Joshua, mi mayor bendición y a Pochis que sigue cuidándonos desde el cielo.

Resumen

Esta investigación está centrada en la comprensión de procesos infinitos asociados a la integral definida.

La revisión bibliográfica realizada evidencia un escaso número de investigaciones con estudiantes del grado en Matemáticas centradas en este tópico y en el papel de la comprensión de procesos infinitos en la comprensión de la integral definida. Por ello, el objetivo principal de esta tesis es detectar y caracterizar diferentes niveles de comprensión tanto de procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida como del propio concepto de integral definida y analizar la posible implicación entre las dos comprensiones. Esto nos dará la oportunidad de tener un mejor conocimiento acerca de cómo comprenden los estudiantes estos conceptos, y poder aportar vías alternativas de aproximación a la comprensión en el avance de planteamientos de nuevas trayectorias de aprendizaje.

A partir del estudio epistemológico se ha constatado que muchos de los elementos importantes del contexto matemático de la integral definida han venido siendo eliminados en el proceso de formalización de la misma, lo cual se ha corroborado en el posterior tratamiento curricular, ya que las definiciones existentes de integral definida (Riemann, Darboux y vía de funciones escalonadas) tienen escasas semejanzas con las ideas que dieron origen al concepto, en las cuales, a diferencia de los antiguos, reposa el concepto de límite, que permite formalizar los procesos infinitos implícitos en el método de exhaución. También se evidenció que no hay consenso general sobre la manera de abordar un primer curso de Análisis Matemático.

En la fase empírica del estudio han participado estudiantes del grado en Matemáticas de cuatro universidades distintas (un total de 168 estudiantes) y de distintos cursos a partir del segundo. Todos los estudiantes ya habían cursado el bloque de contenidos correspondientes a los cursos de Análisis Matemático I y II.

El estudio se desarrolló con datos obtenidos de dos cuestionarios, dos encuestas y dos entrevistas semiestructuradas.

Se ha establecido una definición de proceso infinito como resultado del estudio exploratorio en el que participaron 13 investigadores en Didáctica de las Matemáticas, 2 profesoras de las asignaturas de Análisis Matemático I y II y sus alumnos. Tras una revisión exhaustiva de la literatura se ha elaborado una lista de dificultades asociadas a la comprensión de procesos infinitos y de la propia integral definida. Se amplió esta lista con un estudio en el que participaron 87 alumnos. A partir de esta relación de obstáculos se ha caracterizado la comprensión de los objetos de estudio a través de categorías de comprensión que integran las ideas de dificultad/obstáculo y se han contextualizado en el marco de la teoría de actos de comprensión de Sierpińska. A partir de este constructo, siguiendo una pauta estandarizada, se ha elaborado el cuestionario final, el cual fue cumplimentado por 76 estudiantes.

Las valoraciones numéricas de las respuestas del cuestionario han sido la base para realizar análisis de tipo cuantitativo y también cualitativo (análisis descriptivo; análisis correlacional; análisis cualitativo sobre obstáculos asociados que posteriormente son descritos en términos de categorías de comprensión; análisis estadístico implicativo; análisis de similaridad). Dicho análisis ha permitido encontrar elementos de comprensión relacionados con los procesos infinitos que inciden en elementos de comprensión vinculados a la integral definida. El análisis de similaridad permitió identificar ocho niveles de obstáculos que a su vez evidenciaron algunas trayectorias de aprendizaje de la integral definida indicando la manera en la que una mera comprensión procedimental de los conceptos de procesos infinitos no es suficiente para superar las demandas cognitivas generadas cuando se intenta comprender cabalmente el concepto de integral definida. Además, se han confirmado y perfilado características de las categorías de comprensión de integral definida y los procesos infinitos. Diversos actos de comprensión relacionados con los procesos infinitos influyen en actos inherentes a la comprensión del concepto de integral definida. También se han identificado algunas correspondencias entre esos elementos que permiten distinguir diversos niveles de implicación.

El análisis de la entrevista del estudiante participante ha evidenciado que aún para estudiantes universitarios de grado en Matemáticas la intuición tiene una marcada presencia en la resolución de algunos problemas relacionados con los procesos infinitos. Los alumnos pese a tener conocimientos previos de distintos conceptos formales relacionados con los procesos infinitos siguen poniendo de manifiesto dificultades intrínsecas a las contradicciones internas de los modelos intuitivos.

La tesis doctoral termina con la redacción de las conclusiones, las aportaciones de la misma y los nuevos problemas de investigación que se han abierto en ésta.

Índice de contenidos

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 0. Introducción

"Un naturalista que no hubiera estudiado nunca al elefante sino con el microscopio, ¿creería conocer suficientemente a este animal? Pues bien, en matemáticas ocurre algo análogo. El lógico descompone, por decirlo así, cada demostración en un número muy grande de operaciones elementales; cuando se hayan examinado estas operaciones, unas después de otras, y se haya comprobado que cada una de ellas es correcta, ¿se creerá haber comprendido el verdadero sentido de la demostración? ¿Asimismo, se habrá comprendido cuando, por un esfuerzo de memoria, nos hayamos capacitado para repetirla, reproduciendo todas esas operaciones elementales en el mismo orden en que las había colocado el inventor? Evidentemente, no; todavía no poseeremos la realidad completa; ese no sé qué que hace la unidad de la demostración, se nos escapará totalmente."

Henri Poincaré

0.1 Motivación y planteamiento general de esta investigación

Es natural que el sentimiento de dominar completamente un campo del conocimiento, de sentirse cómodo y tranquilo en el tratamiento de los temas, sea una de las razones para escribir sobre él. Sin embargo este no es el caso de esta tesis. Una razón de peso que tuve para elegir el tema es mi propia historia personal. Mi encuentro con el tema del infinito en matemáticas es uno de los hitos de mi vida intelectual en dos sentidos. Por una parte, desde niños el infinito es un tema que estimula la imaginación, el debate y produce cierta sensación de vértigo (al enfrentar dos espejos, mientras jugamos con ellos, ¿se producen realmente un número infinito de imágenes reflejadas? De no ser así ¿cuántas son en realidad?). Por otra parte, ya en la universidad, descubrir que las matemáticas habían logrado domesticar el infinito hasta convertirlo en una de sus herramientas me pareció un éxito formidable. Pero una cosa era el éxito de las matemáticas como ente abstracto y otra mi proceso particular de conquista del tema. Las definiciones, que adelantan algunos pasos de lo que serán las demostraciones, son muy ingeniosas pero, en principio, no de una gran evidencia intuitiva. El estudio, línea por línea, de las demostraciones, es satisfactorio. La dificultad radica en el momento de intentar hacer una mirada de conjunto, un enfoque holístico, un resumen mental de estas. Mi *construcción personal*, la huella que debe dejar en mi intelecto el haber realizado el proceso y que posteriormente me permita realizar un aporte, un cambio de enfoque, un trabajo autónomo. Me explico con un ejemplo: al leer la anécdota de Gauss cuando, aún niño, calculó la suma de los 100 primeros números naturales sentí una gran conmoción: Gauss no se había aplicado presuroso a realizar las 99 sumas pedidas sino que había exigido su ingenio hasta hacerlo producir esa bella y breve solución. El esfuerzo mental le había permitido librarse de un trabajo largo y tedioso y hacer una contribución a las matemáticas (el método ya había sido descubierto por los griegos pero Gauss no lo conocía). Su idea, si bien muy ingeniosa, puede ser fácilmente entendida en su totalidad. Además tiene una valiosa moraleja: no debemos detenernos al lograr la solución de un problema, una vez hecho esto debemos continuar la búsqueda de una solución óptima. De hecho, en apariencia, el reto no era interesante, pero la resistencia de Gauss a realizar una tarea tan larga y monótona activó su creatividad y con ello dio una de las primeras muestras de su genio. Esto como consecuencia de una decisión y autoconfianza, la decisión de buscar una solución alternativa y la confianza en sus capacidades y conocimientos.

Sin embargo mi contacto con las ideas que subyacen en los procesos infinitos no tuvo efectos parecidos. No me dejó mucho más que la constante admiración por el genio de quienes consolidaron la teoría. No hubo moraleja. No sentí tanta confianza y familiaridad con el tema como para ensayar algún enfoque, alguna variación. Las matemáticas no son un dogma, se han ido construyendo mediante éxitos de inteligencias, métodos y trabajos superiores y su práctica, por lo tanto, debe estimular la inteligencia y fortalecer el ingenio. Su estudio debe tener como fruto intelectual una gran plasticidad mental y no el efecto contrario: la rigidez, propia del dogma. Pero yo tuve que conformarme con asimilar la teoría tal como me había sido presentada. Esto conllevaba una ironía: Gauss con poco trabajo me había dado mucho, en tanto que mi gran esfuerzo asimilando el infinito me había dejado pocos frutos. Esta afirmación no debe ser asumida exclusivamente en un sentido negativo, el infinito no se deja asir tan fácilmente, no devela todos sus misterios de una vez por todas. Como una buena película o un buen libro no se agota en un primer contacto. Es fascinante. Está presente en las paradojas de Zenón y en la Biblioteca de Babel de Borges.

Han pasado los años y mi experiencia se ha enriquecido con la cátedra y con los estudios de postgrado (los menciono porque a medida que se asciende hacia el doctorado va apareciendo un cambio de metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje que privilegia cada vez más el aprendizaje personal y el pensamiento autónomo. Esto hace inevitable revisitar y replantear etapas anteriores del propio aprendizaje). Cuento además con el apoyo integral de mi director en el doble aspecto de un interés compartido por el tema así como con su capacidad y generosidad intelectual. No obstante, un interés estrictamente personal (o bipersonal en este caso) por un tema no es razón suficiente para dedicarle el tiempo y el esfuerzo de una tesis de doctorado. Muchas de las dificultades que tuve (o por lo menos dificultades análogas) en la apropiación del tema continúan vigentes. Sobre este punto el trabajo de campo no deja dudas. Por otra parte, el papel de la integral definida es de suma importancia por sí mismo y por su función en la solución de ecuaciones diferenciales que modelan una gran cantidad de fenómenos de nuestra realidad.

Intentar precisar dificultades que se presentan a la hora de asimilar los conceptos y métodos que subyacen al de integral definida, así como sus causas y eventuales soluciones es uno de los propósitos de este trabajo.

Los objetos matemáticos adquieren su carta de nacionalidad mediante las definiciones. La definición hace la diferencia entre una intuición y la precisión de un concepto. La mayoría de los estudiantes tiene, por ejemplo, la intuición del ángulo recto por su familiaridad con el cuadrado o con los ejes del plano cartesiano. Por otra parte responden a la pregunta de qué es un ángulo recto afirmando que es aquel que mide 90° o que es el formado por dos rectas perpendiculares. No son conscientes, sin embargo, de que en realidad no tienen definición alguna. Para evidenciarlo basta con preguntar qué es un grado o qué son rectas perpendicularespara que lleguen pronto a una definición circular, a uno de los bucles de Gödel. Lo único que los haría tomar conciencia de la carencia de significado de sus supuestas definiciones sería que se enfrentaran a una demostración que implique un ángulo recto ya que, si son honestos, no sabrían qué hacer con su *definición*. Los instrumentos que apoyan este trabajo han buscado, entre otras cosas, determinar el impacto que carencias conceptuales de este tipo tienen en el fracaso de la construcción de los conceptos de procesos infinitos, integral definida y su relación.

Considero muy iluminadora en cuanto a precisar un fallo metodológico en la introducción de conceptos matemáticos la siguiente cita de Poincaré: "¿Es posible entender una teoría si desde el primer momento se le da la forma definitiva que impone una lógica rigurosa, sin mencionar para nada el camino por el que ha llegado a adoptar esta forma? No, realmente no es posible entenderla, incluso resulta imposible retenerla si no es de memoria." Aclaro que considero verdadera la cita desde un punto de vista estadístico, esto es, se cumple en la *mayoría* de los casos, no obstante esta consideración no afecta su valor en la fundamentación de un trabajo de esta naturaleza. Esta posición de Poincaré es una constante en su pensamiento. Otra afirmación suya acerca de la manera como se deben enseñar los conceptos en matemáticas es la siguiente: "Reflexionar sobre la mejor manera de hacer penetrar las nociones nuevas en los cerebros vírgenes, es al mismo tiempo reflexionar sobre la manera en que estas nociones han sido adquiridas por nuestros antepasados y por consiguiente sobre su verdadero origen, es decir, en el fondo, sobre su verdadera naturaleza.” En la parte histórica vemos como el concepto de integral definida ha sido conquistado a pulso empleando muy ingeniosas construcciones para cada tipo de integral, avanzando cada vez más hacia resultados más generales. Todo esto a la vez que la complejidad de los cálculos disminuía gradualmente.

Como señalé antes, con el ejemplo del concepto de ángulo recto, en muchos casos coexisten la idea intuitiva, pero imprecisa, del concepto, con una definición en apariencia rigurosa pero que realmente no describe el concepto o, simplemente, una definición realmente rigurosa, memorizada por el estudiante, pero que éste no puede asimilar porque descansa sobre definiciones previas que a su vez tampoco domina. Los estudiantes que no pueden realizar cabalmente una demostración se ubican, de forma continua, en un rango que va de quienes comprenden correctamente tanto la hipótesis como la tesis pero son incapaces (por falta de dominio de las técnicas demostrativas en un campo particular de las matemáticas o, simplemente, porque no les llegó la inspiración) de construir la cadena de implicaciones que los lleven de la una a la otra, hasta aquellos que no tienen una correcta comprensión de los conceptos que contienen. Un factor de tipo *cultural* que no permite que los estudiantes, por si mismos, determinen su ubicación en este espectro de posibilidades es que, de forma tácita, no se considera grave operar entes matemáticos que no han sido realmente asimilados. En un texto de Salvat (1973), que tiene ya más de 40 años, pero cuya actualidad sigue vigente, encontramos la siguiente cita: “Nos encontramos con la paradójica situación de que el maestro explica abstracciones como “$f(x) = sen(x)$no es inyectiva” y los alumnos, mientras tanto, efectúan insensatos cálculos, bien concretos, como “ $\frac{senx}{cosx} = \frac{sen}{cos}$”. ¿Por qué después de casi medio siglo nos seguimos encontrando con estos tipos de confusiones? ¿Qué función intelectual puede cumplir un conocimiento tan distorsionado?

¿Cuál ha sido el destino de todos los estudios y políticas sobre enseñanza de la matemática durante todos estos años? ¿Se deberían implementar cambios de fondo como convertir las matemáticas, a partir de cierto grado, en una materia electiva de tal forma que sólo la cursen aquellos que sientan inclinación y gusto por su estudio? Y aun cuando para quienes sienten motivación por estudiarla, como es el caso de los participantes de este estudio (estudiantes de grado en Matemáticas) ¿por qué persiste este tipo de situaciones?

Aunque no tenemos una respuesta absoluta para estos interrogantes, lo que podemos aportar como primer (y a nuestro modo de ver el más importante) paso a cualquier propuesta para solucionar este tipo de situaciones que son comunes en todos los niveles de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es estudiar la comprensión que tienen los estudiantes de esos objetos matemáticos y detectar elementos que se relacionen con esa comprensión para lograr optimizarla. La investigación estudia dos constructos: la comprensión que tienen los estudiantes de la integral definida y de procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida o que siendo previos en los currículos influyen en su comprensión.

0.2 Objetivos de esta investigación

Orton (1980, 1983a, 1983b) fue pionero en el estudio de la comprensión de los conceptos relacionados con el cálculo infinitesimal y desde entonces han sido muchas las investigaciones que se han desarrollado con relación a conceptos inherentes a esta rama de las Matemáticas, particularmente las últimas dos décadas han sido prolíficas. Sin embargo, en lo que se refiere al concepto de integral definida, los estudios se han centrado principalmente en niveles de bachillerato, y, a nivel universitario, se han realizado mayormente en el contexto de funciones que satisfacen el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, y con enfoques físicos. Es nuestro interés, al igual que el de Orton y los distintos investigadores que señalaremos en los antecedentes, a través de este estudio, estrechar la brecha conceptual (de ser posible eliminarla) que impide que nuestros estudiantes comprendan algunos conceptos matemáticos.

El presente estudio ha sido llevado a cabo en varios grupos del grado de Matemáticas de distintas universidades. En esos grupos, escogidos por disponibilidad, la docencia planificada e implementada por los docentes no tuvo ningún tipo de intervención ni sugerencia alguna por parte del equipo investigador.

El bloque de contenidos en los que se centra este estudio corresponde al Análisis Matemático puesto que es el área en el que se introducen y desarrollan los conceptos que son objeto de esta investigación: la integral definida y procesos infinitos que subyacen, que están asociados, a este concepto.

Nuestra hipótesis principal es que uno de esos posibles elementos asociados a la comprensión del concepto de integral definida está relacionado con la comprensión de procesos infinitos que subyacen al concepto. De este modo, el objetivo principal de esta tesis doctoral es el siguiente:

OP: Detectar y caracterizar diferentes niveles de comprensión tanto de procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida como del propio concepto de integral definida y analizar la posible implicación entre las dos comprensiones.

El objetivo principal está recogido en cuatro objetivos específicos que se derivan y a la vez orientan la presente investigación:

- Analizar el desarrollo epistemológico de la integral desde la perspectiva de los procesos infinitos y distintas conceptualizaciones de la misma con el propósito de establecer conexiones con el currículo actual y fundamentar el estudio.

- Averiguar el tipo de obstáculos propios de los procesos infinitos que se activan al resolver problemas relacionados con el concepto de integral definida y caracterizar la comprensión del concepto de integral definida y la comprensión de procesos infinitos subyacentes al concepto.
- Determinar si existealguna relación entre la comprensión de procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida y la comprensión de la integral definida y, en caso de que exista, caracterizarla.
- Averiguar cuáles concepciones del concepto de proceso infinito subyacen en la manera en la que los estudiantes razonan problemas que lo invocan.

El instrumento principal de los que disponemos para realizar este análisis es un cuestionario que se aplicó a los estudiantes participantes. Para la elaboración de este instrumento específico de análisis de la comprensión de los conceptos que son objeto de estudio, se ha tomado como punto de partida una lista de obstáculos asociados a dichos conceptos, resultado de un estudio previo que se presenta en el quinto capítulo de esta tesis doctoral, y cuya síntesis aparece en(Cuida & Ortega, en prensa).

La información obtenida con este cuestionario se complementa con el análisis de una entrevista que indaga las concepciones que tiene el estudiante sobrelos conceptos de integral definida y proceso infinito. También inquiere sobre la relación de estas con las ideas y razonamientos utilizados en la solución del cuestionario.

En todas las universidades el bloque analizado se corresponde principalmente con los siguientes temas genéricos de Análisis Matemático: Generalidades de conjuntos numéricos, sucesiones de números reales, funciones de variable real. Límites y continuidad, funciones de variable real. Cálculo diferencial, series de números reales, cálculo de primitivas, integral de Riemann, integrales impropias, que se describen con más detalle en el segundo subapartado del capítulo 1.

El análisis de la información recopilada con el instrumento se inicia con un análisis primario de tipo descriptivo y correlacional y un análisis descriptivo general de las respuestas. Luego, se evalúan estos resultados desde el marco de los actos de comprensión de Sierpińska (1990). Posteriormente, se analiza la implicación entre los obstáculos relacionados con procesos infinitos y los que tienen que ver con la integral definida, emergentes de las respuestas para perfilar las características y la relación entre unos y otros a través del análisis estadístico implicativo. (Régis Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008). Por último, esta implicación se presenta en términos de categorías de comprensión que caracterizan la relación entre las comprensiones de nuestros objetos de estudio.

Además de lo ya descrito, se han realizado análisis específicos de problemas concretos relacionados con algunos procesos infinitos, considerados de especial interés por una parte, porque han sido objeto de estudio en investigaciones previas en otros contextos, y, por otra, porque en el ámbito de la integral definida han ampliado el conocimiento de posibles conexiones entre la comprensión de los dos conceptos.

0.3 Estructura de la memoria de tesis doctoral

La memoria de tesis doctoral se estructura en un total de siete capítulos, además del presente, el capítulo 0 (Introducción) y las referencias bibliográficas. Asimismo se adjunta un disco compacto (CD-ROM) que contiene una serie de Anexos con información de diversa índole, relacionada con los datos recogidos (transcripciones de entrevistas, cuestionarios, tablas de datos) y varias muestras de análisis desarrollados.

A partir de este momento, después de escribir, en cursiva, el título de cada capítulo presentamos un breve resumen del mismo para dar una visión general de su propósito y contenido.

El capítulo 1, "*Objeto de estudio*" se compone de dos apartados. En el primero de ellos se asienta la base epistemológica que nos permite explicar algunos de los elementos importantes del contexto matemático de la integral definida que han venido siendo eliminados en el proceso de formalización de la misma además de hacer evidente el nivel de profundidad del concepto en su dialéctica con los procesos infinitos que intervinieron en su desarrollo.Por otra parte, en el análisis curricular además de evidenciar la ausencia manifiesta de los elementos a los que nos referimosanteriormente, se hace un análisis conceptual de la integral definida en algunos libros de texto y se estudian los procesos infinitos que subyacen al modo en que se define el concepto en cada uno de ellos.Artigue (1994, 2008) destaca la importancia de realizar un buen análisis previo al diseño y desarrollo de la investigación en lo que se refiere a estos dos aspectos.

El capítulo 2, "*Marco teórico*" tiene como finalidad principal presentar el marco de comprensión para el análisis de los instrumentos que se han elaborado en esta investigación. En este capítulo se establecen las bases teóricas sobre las que descansan investigaciones desarrolladas hasta el momento, en torno a las nociones de integral definida y de procesos infinitos, compiladas en su mayoría en el capítulo 3; previo a esto, se abordan las perspectivas más significativas respecto a la idea de Pensamiento Matemático Avanzado, ya que tanto los procesos infinitos como la integral definida se sitúan en sus aspectos más abstractos en este tipo de pensamiento. A lo largo de este segundo capítulo se recorre el ámbito de nociones como imagen conceptual, obstáculos epistemológicos, dificultades, errores y otras relacionadas con estructuras cognitivas (objetos, procesos y conceptos). Posteriormente se estudian marcos teóricos de comprensión con características específicas pero no excluyentes, con elementos comunes, algunos de los cuales se consideran en diversos momentos de la investigación. Fijamos finalmente el "Modelo de comprensión de Sierpińska" como marco teórico para la presente investigación.

En el capítulo 3, "*Antecedentes*" se presentan los aspectos y resultados de trabajos relevantes para este estudio, realizados en el emergente campo de la Educación matemática a nivel Universitario. Se han revisado las aportaciones en torno a las dificultades y obstáculos que tienen los estudiantes para comprender los conceptos: integral definida, proceso infinito y el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

En el capítulo 4,"*Antecedentes metodológicos*" está dividido en dos partes bien diferenciadas. En la primera de ellas se establece una conceptualización de proceso infinito, a partir de un estudio exploratorio que, además de servir como punto de partida para el desarrollo posterior del trabajo de tesis proporcionó varias claves iniciales y direccionó al equipo investigador en la búsqueda de herramientas de investigación que han permitido estructurar una base sobre la cual sustentar el propio desarrollo del estudio. Esta definición supone uno de los aportes de esta tesis doctoral. En la segunda parte se trata de completar una relación de obstáculos de comprensión ligados al concepto de integral definida y a procesos infinitos que subyacen a este concepto: límite, series, sucesiones, variación infinita (interdependencia de las variables en un conjunto infinito), elección de particiones en un intervalo y variación funcional en los extremos de funciones reales de variable real. Para ello, se revisa de manera extensiva los antecedentes y se describe una primera relación de obstáculos ya descubiertos y que aparecen en la literatura y, una segunda que ha surgido del análisis de las respuestas de los estudiantes a un cuestionario ad hoc. Esta relación ampliada permite en el capítulo 5 definir el constructo que da significación a la comprensión delos conceptos estudiados.

En el capítulo 5, "*Metodología*", aparecen sintetizados todos los elementos relacionados con los aspectos metodológicos utilizados en este trabajo. El él se recogen las pautas seguidas para el diseño del cuestionario y entrevista, incluyendo los detalles de su validación, aplicación y posterior análisis.

En el capítulo 6, "*Análisis de los resultados*" se presenta el estudio cuantitativo y correlacional de los resultados y la descripción de los obstáculos emergentes de las diferentes categorías de comprensión (identificación, discriminación, generalización y sistematización) asociadas al concepto de integral definida y asociadas a los procesos infinitos registrados en las respuestas del cuestionario. Así mismo se ha considerado la influencia de los elementos de comprensión de los procesos infinitos en la comprensión del concepto de integral definida emergentes de las respuestas para perfilar las características y la relación entre unos y otros a través del análisis estadístico implicativo. Cada uno de estos elementos nos ofrece la oportunidad de profundizar en aspectos concretos de los conceptos y, a la vez establecer vínculos entre ellos. El análisis ha permitido establecer que sí existe relación entre la comprensión de procesos infinitos subyacentes a la integral definida y la del propio concepto de integral definida. También se ha logrado determinar un tipo de relación implicativa que guardan elementos de comprensión de ambos conceptos y se han detectado distintos niveles de implicación. El capítulo se cierra con el desarrollo y análisis de la entrevista realizada a uno de los estudiantes participantes. El objetivo fundamental de la entrevista fue profundizar en razonamientos que subyacen a las respuestas del cuestionario en relación al conocimiento que se moviliza, e indagar las concepciones de integral definida y proceso infinito que los sustentan.

Finalmente en el capítulo 7, "*Conclusiones, aportaciones, fortalezas, dificultades y perspectivas*" se recogen los resultados más destacados de la investigación. Ello dará paso al establecimiento de ciertas orientaciones didácticas así como a algunas perspectivas para futuras investigaciones encaminadas a desarrollar aspectos destacados sobre los que se dirige el presente estudio.

En el siguiente esquema (Figura 0.1) puede visualizarse la estructura que ha sustentado la elaboración de esta memoria de tesis doctoral. Igualmente, en la Figura 0.2 se recogen los procedimientos en torno a los cuales han girado los momentos principales de esta investigación, organizados en un esquema que se ha estructurado en tres fases.

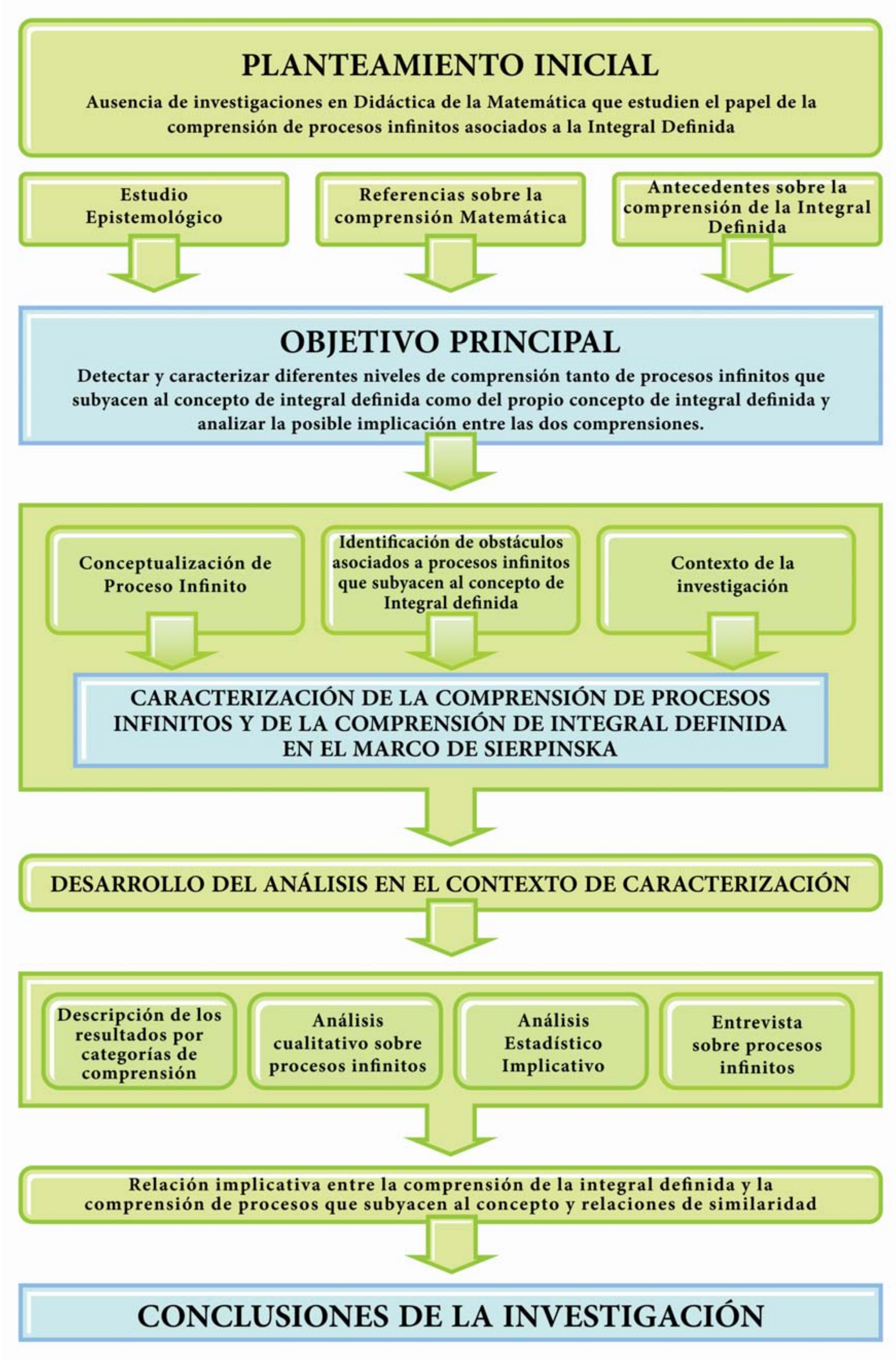


Figura 0.1 Esquema para visualizar la estructura de esta tesis doctoral.

Figura 0.2 Esquema para visualizar las fases globales de esta investigación.

Capítulo 1. Objeto de estudio

Como todas las ciencias, las matemáticas han llegado a su estado actual gracias a un proceso de continua evolución en el que aportes de diversas fuentes la han ido fortaleciendo hasta llegar a la construcción sólida que conocemos en la actualidad (proceso que continuará, esperamos, a la par que los de las demás ciencias). La construcción del objeto matemático actual obedece a las más refinadas reglas del rigor lógico que se han conquistado. En razón a ello puede presentarse de tal manera que guarde escasas semejanzas con el objeto original, del cual procede, y gracias al cual llega a ser lo que es luego de que este haya evolucionado. Gauss resume este hecho con su famosa afirmación de que "*cuando se finaliza un noble edificio no deben quedar visibles los andamios*". La ausencia de estos andamios no es echada en falta por los habitantes del noble edificio, pero si lo puede ser por aquellos arquitectos en potencia que quieren emplear la edificación como una inspiración para sus construcciones futuras.

En algunos casos la obra acabada presenta vestigios de las etapas de evolución. Esto ocurre porque, a diferencia de otros que a la postre resultan accesorios, algunos elementos tienen la fortuna de ser capitales para la obra final y por tal razón no son prescindibles. No es fácil, sin embargo, con solo contemplar la obra acabada, reconstruir los momentos cruciales en los que razones de fondo decidieron qué se eliminaba y qué se conservaba. Es función de la historia de las matemáticas llamar la atención sobre los elementos y momentos determinantes de la concepción y evolución de los conceptos. Sin embargo, a diferencia de los procesos axiomáticos de la matemática, la historia de la misma tiene un fuerte elemento subjetivo. En el prólogo de su libro Kline (2012) afirma "El objetivo seguido es el de presentar las ideas centrales, poniendo un énfasis especial en aquellas corrientes de desarrollo que se han mostrado como las más importantes a lo largo de los principales periodos de la historia de la matemática, y que han ejercido una influencia destacada orientándole y dándole forma a la actividad matemática posterior." (p.13). Cuando algún objeto ideado hace siglos perdura en la actualidad es fácil afirmar que "*ejerció una influencia en la actividad posterior*". No es igual de fácil hacerlo cuando el objeto, como los indivisibles de Cavalieri, florece, influye momentáneamente y luego desaparece. Tampoco es fácil ver como las ideas de un genio despiertan la creatividad en otro. Es el caso de Fermat reconociendo su gratitud a Arquímedes por haberle mostrado el uso de las progresiones geométricas, lo que le permitió cuadrar parábolas e hipérbolas generalizadas. El trabajo de Arquímedes estuvo a la vista de muchos durante dos mil años y solo Fermat fue capaz de hacer una generalización de este y demostrarla.

Este trabajo busca estudiar algunas causas de las dificultades que se presentan a la hora de entender los procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida. Estas son de diversa naturaleza. Algunas son exclusivas del tema, en tanto que otras trascienden a campos más amplios de la matemática. Esperamos que esta breve revisión histórica ilumine algunos de estos aspectos. Uno, en particular, nos parece muy importante. El cálculo combina conceptos profundos, cuya asimilación no es inmediata, con operaciones de tipo mecánico que es posible llegar a dominar más fácilmente. Esta característica se fue acentuando a medida que los trabajos de los diversos autores iban desbrozando el camino. Se evidencia que se trata con conceptos complejos en el hecho de que su consolidación requirió el concurso de muchos y grandes hombres de ciencia, que comenzaron enfrentando retos de naturaleza puramente geométrica y terminaron desarrollando una de las más poderosas herramientas de la ciencia. Citando nuevamente a Klein "Justamente después de la adopción del concepto de función vino el cálculo, el cual, junto con la geometría euclidiana, son la mayor creación de todas las matemáticas."

(Ibídem, p.452). De manera paralela a esta profundización conceptual, el trabajo de estos grandes matemáticos iba haciendo cada vez más simples los cálculos. Simplificación que termina con el teorema fundamental del cálculo de Newton y Leibniz, a propósito del cual, en cita que aparece más adelante, James Stewart afirma que convirtió en rutinarios cálculos que antes requerían capacidades de genio. Esta simplificación de los cálculos no coincide con una facilidad en la comprensión a fondo de las ideas que los sustentan. También citado más adelante E.T. Bell dirá que el cálculo no era fácil para Newton ni para Weierstrass, que solo es fácil para quienes lo entienden con *demasiada facilidad*. Tenemos aquí otra paradoja. Para los matemáticos que empleaban el cálculo, incluido Newton, éste era una poderosa herramienta cuyo uso era relativamente claro. Sin embargo, eran conscientes de que no descansaba sobre unas bases tan sólidas como la geometría de Euclides. Lo que hacía falta era, por lo tanto, una construcción basada en definiciones, axiomas y demostraciones que lo sustentaran. Cuando se hizo tal construcción los matemáticos debieron respirar tranquilos al ver que por fin se habían consolidado los fundamentos de esta herramienta que habían aprovechado ya de manera tan fructífera. Este proceso histórico no siempre es vivido por el estudiante quien, en ocasiones, entra en contacto con el concepto matemático directamente por medio de la definición formal, circunstancia propia de los estudios de grado universitario del título Matemáticas en España, los cuales se describen en la segunda parte de este capítulo. El estudiante es instruido con demostraciones formales acerca de la construcción de un objeto que, en ocasiones, no ha podido conocer previamente de forma intuitiva. Además, las analogías, justificaciones y ejemplos, con los que se busca afianzar su comprensión, en ocasiones, como se evidenció en el trabajo de campo, ahogan en detalles los elementos esenciales de la definición y se confunden con esta. Las definiciones en matemáticas, lo mismo que los aforismos en filosofía, no deben ser un punto de partida sino de llegada. "*Pienso, luego existo*" es una frase completamente vacía tomada fuera de contexto. Lo propio puede ocurrir en matemáticas con una frase que comience así: "$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 / \ldots$" Se pretende por una parte, que la revisión histórica incluya algunos de los elementos importantes del contexto matemático de la integral definida que han venido siendo eliminados en el proceso de formalización de la misma y, como ya se dijo, hacer evidente el nivel de profundidad del concepto. Por otra parte, en el análisis curricular además de evidenciar la ausencia manifiesta de los elementos a los que nos referimos, se hace un análisis conceptual de la integral definida en algunos libros de texto y se estudian los procesos infinitos que subyacen al modo en que se define el concepto en cada uno de ellos.

1.1 Procesos infinitos en la integral definida. Una historia ad hoc

Grecia

> *"En la historia de la civilización los griegos alcanzaron una posición preeminente, y en la historia de la matemática su época fue una de las más brillantes. A pesar de que tomaron muchos elementos prestados de las civilizaciones vecinas, los griegos edificaron una civilización y una cultura originales, de las más impresionantes de toda la historia de la humanidad, la que más ha influido en el desarrollo de la cultura occidental moderna, y que fue decisiva en la fundamentación de la matemática tal como la entendemos hoy. Uno de los grandes problemas de la historia de la cultura es el de dar cuenta de la brillantez y de la creatividad de los antiguos griegos."*
>
> Morris Kline

La historia del cálculo integral es extensa y fascinante. Como muchos elementos de nuestra cultura, que tuvieron su origen en la antigua Grecia, las matemáticas estaban más entrelazadas con otros campos del conocimiento de lo que lo están en la actualidad. La principal razón de ello es el alto nivel de especialización que han alcanzado las matemáticas, así como también los otros campos del conocimiento. Esta realidad tiene obviamente elementos positivos pero también negativos. Dentro de estos últimos es de resaltar la pérdida de una visión holística[1]cuya importancia no siempre es valorada en su justa dimensión. El estudio de la historia nos permite revivir esta refrescante época de las conquistas a pulso de ingenio. Aunque no tienen que ver con el tema que nos ocupa intentar no prestar atención a Arquímedes trisecando el ángulo gracias a la libertad que se permitió de hacer marcas en la regla o, a Newton haciendo pasar por un prisma un rayo de luz de un solo color que ya había separado con otro prisma, es una tarea imposible. Sus ingenios hicieron aportes a varios campos y a la vez que se alimentaban de ellos.

La etimología de la palabra filosofía, amor a la sabiduría, tenía entre los griegos un significado literal: se amaba la sabiduría, se la buscaba, existía un continuo e inacabado proceso de acercamiento a ella. La naturaleza inalcanzable de la sabiduría no era motivo alguno de frustración, al contrario, su carácter perfectible hacía de la práctica de la filosofía un ejercicio estimulante y siempre renovado. Una manera de resumir este espíritu de la indagación griega la encontramos en el aforismo del escritor checo Václav Havel "Acércate a quienes buscan la verdad, huye de los que ya la encontraron". Los objetos de la matemática y el método de las demostraciones deductivas propio de esta, hacían que su conocimiento formara parte del programa de estudios de los futuros filósofos. Se llegaba a su conocimiento exclusivamente por medio de la razón y la lógica. La primera persona que se designa con el calificativo de filósofo es Tales de Mileto. El requisito que llenó para ser digno de tal designación fue el haber abandonado cualquier tipo de explicación mítica a favor del uso de una construcción de base puramente racional.

El método para lograr este tipo de conocimiento tenía una base muy atractiva: la sencillez. Todo proceso debía partir de unos elementos fáciles de comprender y, a partir de ellos, gradualmente se iba conquistando la complejidad, que siempre iba

[1] La definición de holismo de María Moliner difiere un tanto de la RAE, como considero la primera más adecuada, la cito: "*Doctrina filosófica según la cual la realidad debe ser considerada como un todo en el que las partes están interrelacionadas entre sí y carecen de sentido por sí mismas*."

a estar conectada con sus raíces por un intangible hilo de Ariadna que le permitiría, a quien se aventurase por esta senda de descubrimiento, en cualquier momento de confusión, volver sobre sus pasos hacia terreno firme.

En geometría esta deseada sencillez se concretó en los cinco postulados de los que parte la construcción de los Elementos de Euclides. Su correlato en el mundo físico lo constituían la regla y el compás. Uno de los intereses que guiaron el desarrollo de la geometría fue el estudio de las áreas. Los pitagóricos afirmaban que *todo es número.* Por número entendían los números enteros y sus razones. Según la leyenda, ahogaron a Hipaso de Metaponto cuando este descubrió que $\sqrt{2}$ era no era un número racional. Como aclara el profesor Campos (2006) esto significaba que $\sqrt{2}$ no era un *número*, ya que hasta ese momento se suponía que todos los fenómenos del universo eran representables en números enteros y sus razones. La afirmación $\sqrt{2}$*es un número irracional* adquiere significado de manera posterior. Esto lleva a los griegos a desarrollar un álgebra geométrica como consecuencia de la, en ese momento, superioridad de la geometría sobre la aritmética. $\sqrt{2}$ era un objeto simple en geometría (la diagonal de un cuadrado de lado 1) en tanto que no tenía una representación en el campo de los números. Los griegos abandonan temporalmente la idea de asignar un número como área de una superficie y en cambio buscan construir figuras con igual área que una figura dada. El fin ideal de este proceso era la construcción, mediante el uso exclusivo de la regla y el compás, de un cuadrado de área igual al de una figura dada. El problema de esta construcción recibió el nombre de cuadratura. La proposición 35 del libro I de los *Elementos* afirma que los paralelogramos que tienen la misma base y están entre las mismas paralelas tienen áreas iguales. La bella demostración parte de dos triángulos congruentes que se intersectan, a los que se quitan y agregan regiones comunes, hasta llegar a los dos paralelogramos, estableciendo de esta forma la igualdad de sus áreas. Este proceso permite a Euclides demostrar la proposición I.47, el famoso teorema de Pitágoras, exclusivamente mediante transformaciones y equivalencias de este tipo.

La cuadratura de un polígono es, siguiendo a Euclides, fácil de realizar. Primero se descompone el polígono en n triángulos $T_1, T_2, \ldots, T_n$(Figura 1.1).

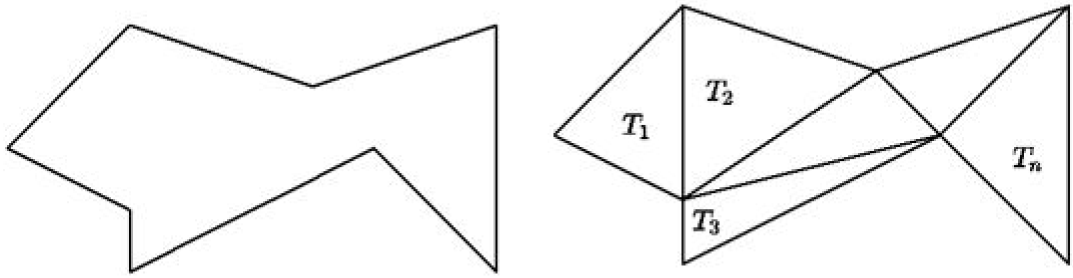


Figura 1.1 Descomposición de un polígono en$\boldsymbol{n}$triángulos.

Luego se construye un rectángulo cuya área sea igual a la suma de las áreas de los triángulos y, finalmente, un cuadrado de área igual a la del rectángulo.

Euclides dedica algunas de las proposiciones de sus *Elementos* a construcciones que permiten llevar a cabo cada uno de estos pasos. Su proposición I.42 dice "*Construir en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado*". En otras palabras, se tienen un triángulo y un ángulo dados (Figura 1.2) La proposición pide, y la demostración ilustra cómo construir un paralelogramo de área igual a la del triángulo y con uno de sus ángulos igual al ángulo dado (Figura 1.3).

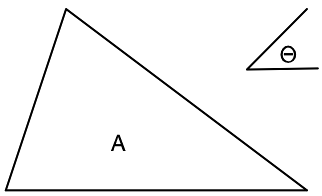


Figura 1.2 Triángulo de área $\boldsymbol{A}$ y ángulo rectilíneo$\boldsymbol{\theta}$ dados.

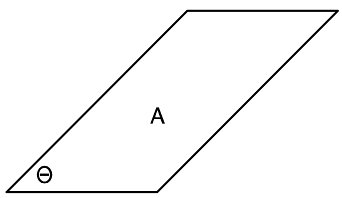


Figura 1.3 Paralelogramo de área $\boldsymbol{A}$y ángulo $\boldsymbol{\theta}$ igual a de la Figura 1.2.

La proposición I.44 dice "*Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado*". Esta proposición equivale a la anterior con un elemento adicional. Se tienen ahora el triángulo, el ángulo y un segmento (Figura 1.4) Se debe construir, como antes, un paralelogramo de área igual a la del triángulo, que tenga además uno de sus ángulos y uno de sus lados iguales a los dados (Figura 1.5).

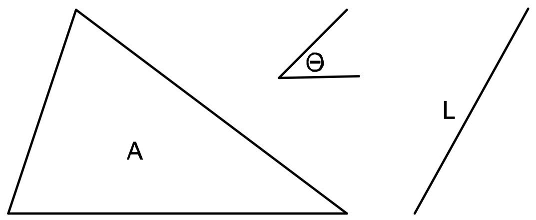


Figura 1.4 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{\theta}$ dados. $\boldsymbol{L}$ es la longitud del segmento.

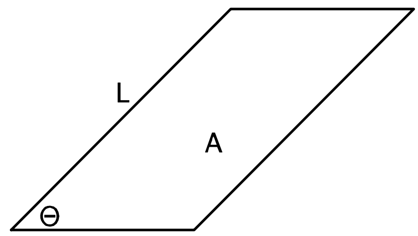


Figura 1.5 Paralelogramo con área $\boldsymbol{A}$, un ángulo $\boldsymbol{\theta}$y un ladode longitud $\boldsymbol{L}$.

Finalmente la proposición I.45 dice "*Construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada*". Se tiene entonces un polígono (Figura 1.1) y un ángulo (que por conveniencia asumimos recto), se debe construir un paralelogramo de igual área que el polígono y con un ángulo igual al dado. Después de triangular el polígono (Figura 1.1), empleamos la construcción proporcionada en I.42 y obtenemos un rectángulo de área igual a la de T_1. Posteriormente, siguiendo I.44, se consigue un segundo rectángulo de área igual a T_2 y con un lado igual a uno de los lados verticales del ya construido, el cual se adosa al anterior. Mediante la aplicación reiterada del último paso, construimos rectángulos de áreas iguales a las de los triángulos T_3, T_4, T_n , con uno de sus lados igual a uno de los lados verticales del anterior y adosado a este. Obtenemos así un rectángulo de área igual a la del polígono dado Figura 1.6.

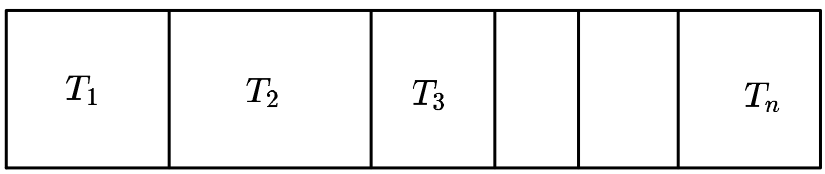


Figura 1.6 Rectángulo de igual área que el polígono dado en la Figura 1.1.

Finalmente Euclides en II.14 nos enseña a cuadrar el rectángulo (Figura 1.7). Dado el rectángulo ABCD prolónguese AB. En esta prolongación tómese el punto F de tal manera que $BC = BF$. Sea G el punto medio de AF. Con centro en G trácese una semicircunferencia de radio AG. Prolónguese CB y sea H la intersección de esta prolongación con la semicircunferencia. El cuadrado construido sobre el lado BH tiene área igual a la del rectángulo ABCD. En efecto, llamemos a a GH, b a GB y c a BH entonces $AG = GF = a$ ya que son radios de la semicircunferencia. El área de ABCD es igual a $AB * BC$ este producto, teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, es igual a $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = c^2$ esta última igualdad como consecuencia del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo GHB.

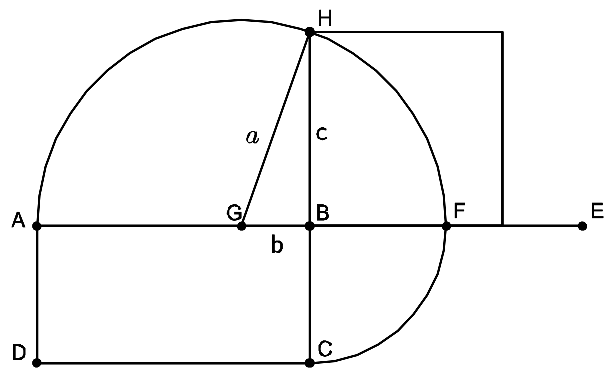


Figura 1.7 Cuadratura del rectángulo, de acuerdo con la proposición II.14.

Esta conquista del espíritu griego los llevó a dar el siguiente paso natural. Siendo la suya una geometría de la regla y el compás, y habiendo cuadrado cualquier polígono, figura trazada mediante el uso de la regla, faltaba la cuadratura del círculo, figura fruto del uso del compás. Esta construcción, como se sabe, resultó imposible. Sin embargo su historia está relacionada con el tema que nos ocupa. Arquímedes logra cuadrar el segmento de parábola con un proceso similar al seguido antes para cuadrar un polígono. Sin embargo, esta construcción, así como la que lleva a la determinación del área del círculo, implica la intervención de un número *infinito* de triángulos u otros polígonos, en lo que resulta ser un proceso de generalización del de triangulación. Podría pensarse que la razón de requerir este número infinito es el hecho de que, a diferencia de los polígonos, tanto la circunferencia como la parábola no están formadas por segmentos de recta. Sin embargo, Hipócrates de Quíos logra la cuadratura de la lúnula, figura limitada por arcos de circunferencia, de la siguiente manera (Figura 1.8). Sean A el centro de la circunferencia y AB y AC radios perpendiculares, sea E el punto medio de CB. Se traza una semicircunferencia con centro en E y que pase por B. La lúnula (figura sombreada de laFigura 1.8) tiene la misma área que el triángulo ABC. La verificación es sencilla: sea r el radio AB, entonces el área de un cuarto del círculo es $\frac{\pi r^2}{4}$. Además el radio del semicírculo es $\frac{\sqrt{2}r}{2}$, por lo tanto su área también es $\frac{\pi r^2}{4}$. Si de ambos, el semicírculo y el cuarto de círculo quitamos la intersección queda, por un lado la lúnula y por el otro el triángulo ABC, con lo que estas dos figuras tienen la misma área.

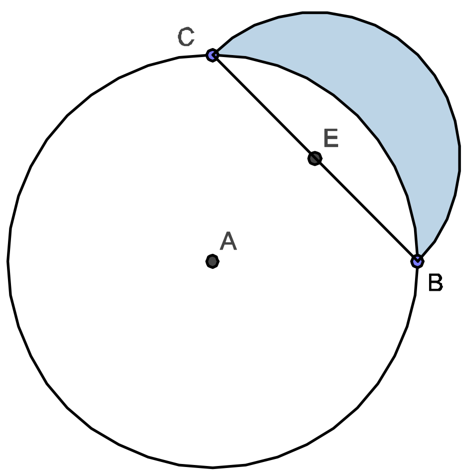


Figura 1.8 Cuadratura de la lúnula.

El proceso que lleva a entender el trabajo de Arquímedes pasa por los trabajos de Eudoxo que aparecen contenidos en los Elementos. En particular su método de exhaución[2]del que se servirá y que es un antepasado lejano del cálculo integral.

La proposición X.1 "*Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada*" contiene en el "*y así sucesivamente*" la base del método de exhaución y el germen de los procesos infinitos. Si se expresa en lenguaje moderno se tiene: dados A, ε y s tal que $\frac{1}{2} < s < 1$, al quitar de A una fracción igual a s queda $A(1-s)$, si del resto se quita de nuevo una fracción igual a s queda $A(1-s)^2$ y así en general. Entonces, para algún paso n se tendrá $A(1-s)^2 < \varepsilon$. Lo que equivale, en notación de límites, a

$$\lim_{n\to\infty} A(1-s)^n = 0$$

A pesar de su alusión al infinito Euclides hace la demostración en tres pasos que resumen lo esencial del proceso, se resume la idea de la demostración (Figura 1.9).

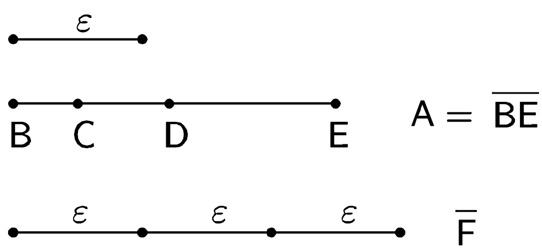


Figura 1.9 Aproximación al método de exhaución.

Sea $A = \overline{BE}$. Algún múltiplo de ε será mayor que A (Euclides asume $F = 3\varepsilon > A$). Tómese D en A tal que DE sea mayor que la mitad de A. Tómese C en BD tal que CD sea mayor que la mitad de BD. Se repite el proceso hasta que los dos segmen-

[2]"Hay que advertir que el nombre de "método de exhaución" no lo usaron los griegos, sino que es una desafortunada invención moderna introducida en el siglos XVII por Gregoire de St. Vincent (1584, 1667), pero se ha hecho de uso tan generalizado que nosotros también lo utilizaremos" (Boyer, 2001, p.129).

tos tengan el mismo número de subdivisiones. Ahora se quita, de derecha a izquierda, una subdivisión de cada segmento. De A se quita DE y de F se quita un segmento de longitudε. Como $F > A$ y de F se quitó un segmento menor que su mitad y de A uno mayor que su mitad así $BD < 2\varepsilon$. Luego se quitan CD y otro segmento de longitud ε de F. Como $BD < 2\varepsilon$ y del primero se quitó un segmento mayor que su mitad y del segundo uno igual a su mitad se tiene $BC < \varepsilon$. Q.E.D.

La existencia de un múltiplo de ε que supera a A es garantizado por un axioma que Arquímedes atribuye a Eudoxo, pero que actualmente se conoce como axioma de Arquímedes (Kline, 2012, p.118).

Esta proposición permite justificar el proceso de "agotar" el círculo inscribiendo en él un cuadrado y, acto seguido, bisecar los arcos correspondientes a los cuatro lados para así obtener los vértices de un octógono. Ahora sobre el octógono se repite el proceso de bisecar arcos para construir un polígono regular de 16 lados y así sucesivamente. La proposición permite afirmar que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un paso en las sucesivas construcciones de polígonos regulares inscritos de tal manera que la diferencia entre el área del círculo y la del último polígono construido sea menor que ε. En efecto (Figura 1.10), en el primer paso se extrae el cuadrado inscrito, cuya área es igual a la mitad del circunscrito y, por lo tanto, mayor que la mitad del área del círculo. En los sucesivos pasos siguientes se extrae un triángulo por cada uno de los lados del polígono regular construido en el paso anterior. El rectángulo KOPM contiene una ilustración de un caso típico. El área del triángulo extraído es la mitad de la del rectángulo y, en consecuencia, mayor que la mitad del área del segmento circular contenido en el rectángulo. Por lo tanto se cumplen las condiciones de la proposición X.1 y siempre será posible construir un polígono de área tan cercana a la del círculo como se quiera.

Aunque más arriba se dijo que esta proposición equivale al límite

$$\lim_{n\to\infty} A(1-s)^n = 0$$

el cual involucra al infinito, no por ello debe pensarse que los griegos consideraban en el proceso de construcción de polígonos una cantidad infinita de pasos. Siempre se llega a la condición deseada en un número finito de pasos.

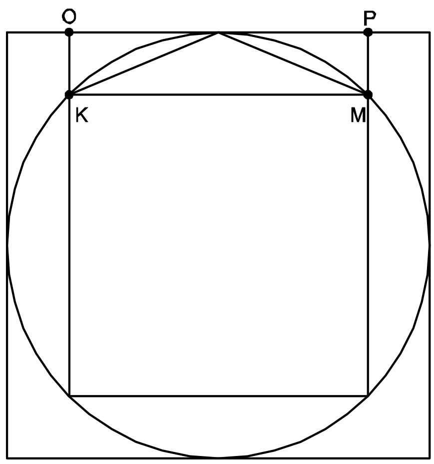


Figura 1.10 Primer paso en el método de exhaución.

La presencia del infinito en ciertas expresiones matemáticas leídas a la ligera tiende a causar confusión. Piénsese en la serie de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots$$

que se escribe de otra manera como

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Expresión cuyo significado exacto es

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{b\to\infty} \sum_{n=0}^{b} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Estas dos últimas expresiones conteniendo el infinito. Sin embargo, técnicamente

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si, y sólo si, $\forall\varepsilon > 0 \, \exists M$ tal que si $x > M$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Siendo M finito, parece que en la definición desaparece el infinito. ¿Dónde está? A pesar de que, en efecto, M es finito, su existencia está garantizada sólo mediante la presencia de un conjunto infinito.

Empleando el criterio para las series alternadas del propio Leibniz encontramos que para obtener π con una exactitud de 6 decimales (lo que equivale a un $\varepsilon = 0.000001$), la que emplea la mayoría de las calculadoras comerciales, es necesario sumar más de cinco millones de términos de la serie de Leibniz.

Dudas parecidas surgen al considerar las demostraciones por inducción que con su, en apariencia, poco ambicioso paso inductivo, pretenden demostrar propiedades sobre todo $\mathbb{N}$, nuestro primer conjunto infinito. ¿La explicación? A pesar de ser $\mathbb{N}$ un conjunto infinito, sus elementos son finitos, y por lo tanto es posible llegar a cada uno de ellos partiendo de 1 y sumando 1 un número finito de veces.

Antes de continuar con nuestra exploración histórica de las cuadraturas comentaremos algunos elementos de la relación entre áreas y la integral definida.

El concepto de área es un vehículo mediante el cual se concreta el más abstracto de integral definida. En otras palabras, el área es una representación del concepto más abstracto de integral. Sin embargo, desde una perspectiva histórica, esta afirmación debe ser puesta cuidadosamente en contexto, ya que podríamos estar tentados a afirmar que durante muchos años el área fue la única representación. Sin embargo se podría refutar diciendo que un objeto no puede ser una representación de un concepto que aún no existe. Una manera de verlo sería decir que al concepto de integral definida toma cuerpo cuando, precisamente, logra liberarse del concepto restrictivo de área. De hecho, si la existencia de la integral se justificara exclusivamente en el cálculo de áreas (y de volúmenes, al aumentar una dimensión) no sería el objeto matemático tan importante que es. Sería, simplemente, un ejemplo de arte por el arte. Por alguna razón los griegos, por motivos puramente estéticos, concentraron su atención en objetos abstractos que, posteriormente, demostraron poseer una utilidad en el mundo práctico, como es también el caso de las secciones cónicas. Volvamos a los tiempos de Arquímedes.

Como ya se dijo, Arquímedes logró la cuadratura del segmento parabólico mediante un proceso de triangulación que involucra un número infinito de triángulos. Veamos algunos de los preliminares y la demostración.

En primer lugar, se tiene un enunciado que determina la propiedad fundamental de la parábola (Figura 1.11).

La parábola es el conjunto de puntos P tales que su distancia a un punto fijo (F), llamado foco, es igual a su distancia a una recta fija, llama directriz. Se tiene entonces que $FP = PB, PC = PB - 2a$ y que $FC = VT$.

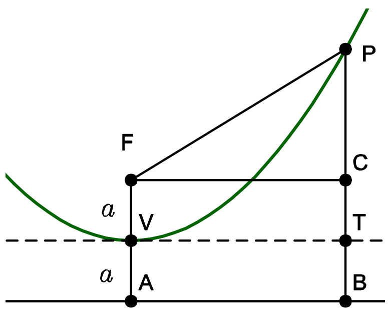


Figura 1.11 Propiedad fundamental de una parábola.

La propiedad 1: $VT^2 = 4aPT$ se deduce aplicando el teorema de Pitágoras y las igualdades mencionadas.

$$FP^2 = FC^2 + PC^2$$
$$PB^2 = VT^2 + (PB - 2a)^2$$
$$PB^2 = VT^2 + PB^2 - 4aPB + 4a^2$$
$$VT^2 = 4a(PB - A)$$
$$VT^2 = 4aPT$$

El procedimiento anterior es prácticamente idéntico a lo que se hace actualmente al calcular la ecuación de la parábola en coordenadas cartesianas. Ahora veamos un resultado mucho más interesante. La siguiente proposición justifica un método para la construcción de la tangente a una parábola.

En la Figura 1.12 sean L el eje y V el vértice de una parábola. Sea, además, A un punto cualquiera de la parábola diferente de V. Se traza una perpendicular de A a L, esta determina el punto B. Sea C en L de tal manera que $\mathrm{VC} = \mathrm{VB}$. Entonces la recta CA es tangente a la parábola en A.

La Figura 1.13 ilustra la demostración que procede por contradicción. Supongamos que CA corta a la parábola en D. Sea G un punto arbitrario en AD. Se traza por G una perpendicular a L, ésta determina los puntos F y E en L y en la parábola. Los triángulos CBA y CFG son semejantes, entonces se tiene

$$\frac{FG}{BA} = \frac{FC}{BC}$$

De donde

$$\frac{FG^2}{BA^2} = \frac{FC^2}{BC^2}$$

Además, como $FE > FG$

$$\frac{FE^2}{BA^2} > \frac{FG^2}{BA^2} = \frac{FC^2}{BC^2}$$

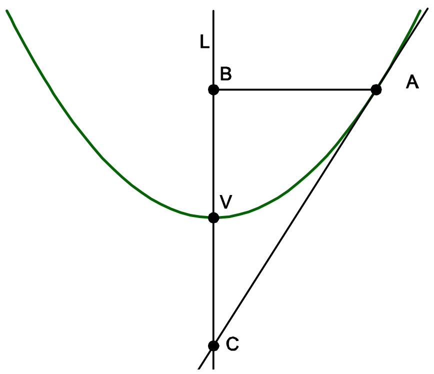


Figura 1.12 Método para construir la tangente a una parábola.

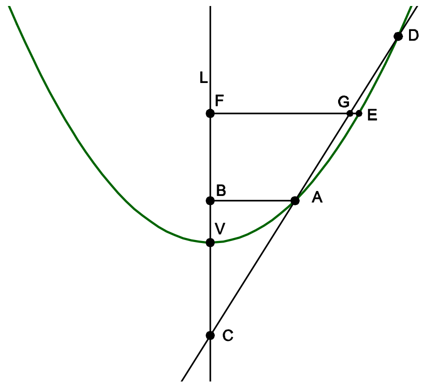


Figura 1.13 Prueba por contradicción de que $\boldsymbol{CA}$ es efectivamente tangente.

Como A y E son puntos de la parábola la propiedad 1 implica que $FE^2 = kFV$ y que $BA^2 = kBV$. Reemplazando estas igualdades en la expresión anterior y simplificando se tiene,

$$\frac{FV}{BV} > \frac{FC^2}{BC^2}$$

Lo que, multiplicando numerador y denominador del término de la izquierda, equivale a

$$\frac{4 * VC * FV}{4 * VC * BV} > \frac{FC^2}{BC^2}$$

De donde

$$\frac{4 * VC * FV}{FC^2} > \frac{4 * VC * BV}{BC^2}$$

Por otra parte $BC = 2BV$ entonces $BC^2 = 4 * BV^2 = 4 * VC * BV$, reemplazando en la expresión anterior se tiene

$$\frac{4 * VC * FV}{FC^2} > 1$$

En consecuencia $4 * VC * FV > FC^2$. Teniendo en cuenta que $FC = FV + VC$ esta última desigualdad constituye una contradicción[3].

La siguiente proposición (Figura 1.14), enuncia un hecho notable, si G es el punto medio de la cuerda y M es la intersección de la recta que pasa por G y es paralela al eje de la parábola, entonces, la recta que pasa por M y es paralela a la cuerda es, a la vez, tangente a la parábola.

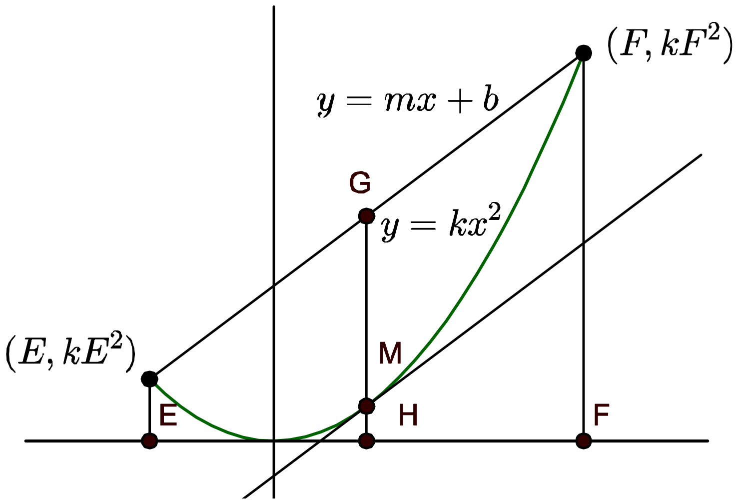


Figura 1.14 Recta paralela a la cuerda M y tangente a la parábola.

[3]Ya que tiene la forma $4xy > (x + y)^2$. Entonces $4xy > x^2 + 2xy + y^2$, de donde $0 > x^2 - 2xy + y^2$. Que equivale a $(x - y)^2 < 0$.

La demostración se hace con las técnicas actuales de la geometría analítica y el álgebra. Como G es punto medio, entonces su abscisa (que es la misma de M) es $\frac{E+F}{2}$, entonces $M = \left(\frac{E+F}{2}, k\left(\frac{E+F}{2}\right)^2\right)$, además $m = \frac{k(F^2-E^2)}{F-E} = k(F+E)$.

Así la ecuación de la recta paralela toma la forma,

$$y = k(F+E)x + b'$$

y como pasa por M

$$k\left(\frac{F+E}{2}\right)^2 = k(F+E)\frac{F+E}{2} + b'$$

Entonces

$$b' = -k\left(\frac{F+E}{2}\right)^2$$

De donde

$$y = k(F+E)x - k\left(\frac{F+E}{2}\right)^2$$

Resolvemos ahora el sistema de la parábola y la recta, obteniendo la ecuación

$$x^2 - (F+E)x + \left(\frac{F+E}{2}\right)^2 = 0$$

La cual tiene discriminante 0, lo cual confirma que la recta $y = mx + b'$ es tangente a la parábola $y = kx^2$.

Hasta ahora hemos trabajado con unos tácitos ejes ortogonales. La siguiente proposición generaliza la propiedad 1 al caso de “ejes oblicuos”.

En la Figura 1.15, sean B y C puntos cualesquiera sobre la parábola. Si el segmento que los une se desplaza hacia abajo de forma paralela, el último punto de contacto será V en donde, además, el segmento desplazado será tangente a la parábola. Sea A el punto medio de BC y D la intersección del segmento que pasa por C y es paralelo a AV con la tangente. E es un punto arbitrario entre V y D. F es la intersección del segmento que pasa por E y es paralelo a AV. Entonces,

$$\frac{EF}{DC} = \frac{VE^2}{VD^2}$$

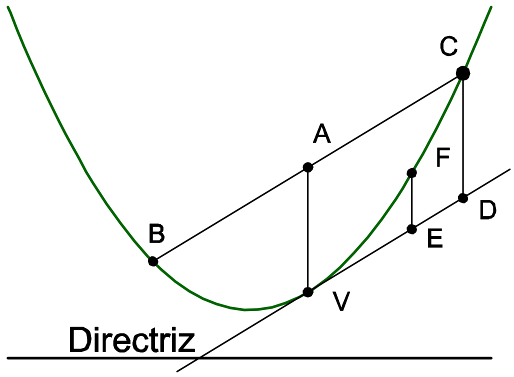


Figura 1.15 Desplazamiento de puntos de la parábola “ejes oblicuos”.

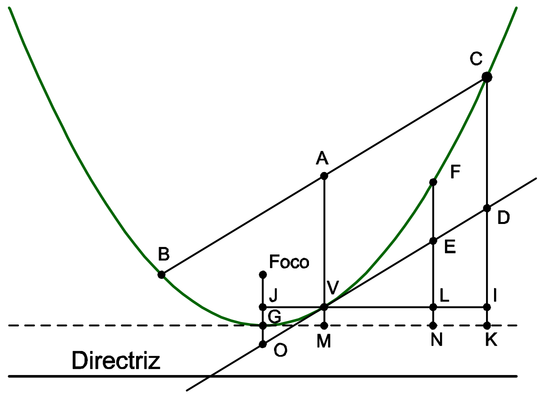


Figura 1.16 Recta paralela al segmento BCy tangente a la parábola.

En el caso particular de que BC sea paralelo a la directriz este enunciado es consecuencia inmediata de la propiedad 1, pues se tiene,

$$\frac{VE^2}{VD^2} = \frac{4aEF}{4aDC} = \frac{EF}{DC}$$

La demostración sigue la Figura 1.16 en donde G es el vértice de la parábola y O es la intersección del eje de la parábola con la tangente. Por el resultado anterior $\mathrm{JG} = \mathrm{GO} = y$.

Entonces $\mathrm{VM} = \mathrm{LN} = \mathrm{IK} = y$. Sean $x_1 = GM = JV$, $x_2 = GN = JL$ y $x_3 = GK = JI$. Entonces, por la propiedad 1, $x_1^2 = kMV = ky$,$x_2^2 = kFN$ y $x_3^2 = kCK$. Los triángulos $\mathrm{OJV}, \mathrm{FLV}$ y CIV son semejantes, entonces

$$\frac{JO}{JV}=\frac{EL}{VL}=\frac{DI}{VI}=\frac{2y}{x_1}=\frac{2\frac{x_1^2}{k}}{x_1}=\frac{2x_1}{k}$$

De donde

$$kEL=2x_1VL=2x_1(x_2-x_1)$$

y

$$kDI=2x_1VI=2x_1(x_3-x_1)$$

Además,

$$\frac{EF}{DC}=\frac{FN-LN-EL}{CK-IK-DI}=\frac{\frac{x_2^2}{k}-\frac{x_1^2}{k}-EL}{\frac{x_3^2}{k}-\frac{x_1^2}{k}-DI}=\frac{x_2^2-x_1^2-kEL}{x_3^2-x_1^2-kDI}$$

Entonces

$$\frac{EF}{DC}=\frac{x_2^2-x_1^2-2x_1(x_2-x_1)}{x_3^2-x_1^2-2x_1(x_3-x_1)}=\frac{(x_2-x_1)^2}{(x_3-x_1)^2}=\frac{VL^2}{VI^2}$$

Como los triángulos VEL y VDI son semejantes se tiene

$$\frac{VL}{VI}=\frac{VE}{VD}$$

De donde

$$\frac{VL^2}{VI^2}=\frac{VE^2}{VD^2}$$

Para finalmente concluir que

$$\frac{EF}{DC}=\frac{VE^2}{VD^2}$$

Después de este, un tanto pesado, estudio de los preliminares de la construcción de Arquímedes, pasemos a conocerla. El enunciado de la proposición es el siguiente (Figura 1.17): sea A el punto medio de BC, y sea D la intersección de la recta que pasa por A y es paralela al eje de la parábola, con la parábola. Entonces el área del segmento de parábola BCD es igual a $\frac{4}{3}$ del área del triángulo BCD. La demostración comienza estudiando laFigura 1.18.

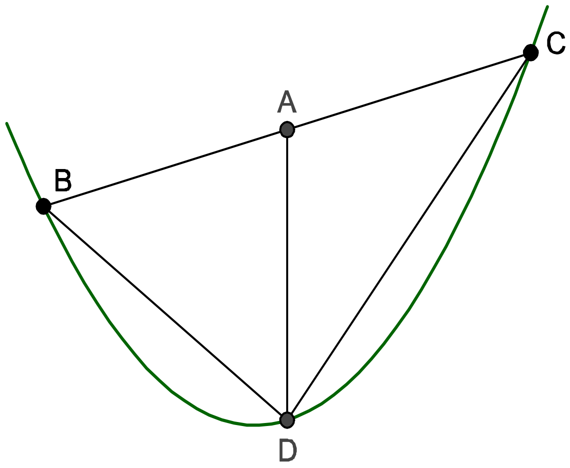


Figura 1.17 Cuadratura de la parábola. Primer paso de Arquímedes.

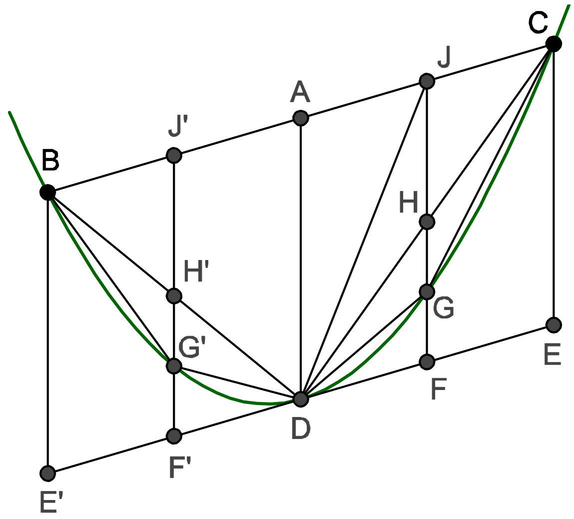


Figura 1.18 Cuadratura de la parábola construcción recursiva.

El procedimiento empleado por Arquímedes es eminentemente recursivo. De la misma forma que en la Figura 1.17se inscribe el triángulo CDB en el segmento de parábola CDB. Arquímedes inscribe en los segmentos CGD y DG'B los triángulos CGD y DG'B.

Demuestra que las áreas combinadas de estos dos últimos triángulos equivalen a una cuarta parte del área del triángulo BCD. Repite la inscripción de triángulos (ahora 4) en los segmentos definidos por las cuerdas CG, GD, DG' y G'B. Continúa este proceso *ad infinitum* y obtiene una serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$ que suma y llega así al resultado. Los detalles a continuación:

Se traza por D una paralela a BC que, como se sabe, también es tangente a la parábola. Se unen B y C con D. Sean J y J' los puntos medios de AC y BA respectivamente. Se trazan por B, J', J y C paralelas a AD. Las intersecciones de estas rectas con la tangente, con la parábola y con los segmentos BD y DC determinan los puntos E', F', F, E, G', G, H' y H respectivamente. Por ser F punto medio de DE y FJ paralela con EC, H es punto medio de FJ. Por otra parte

$$\frac{FG}{EC} = \frac{DF^2}{DE^2} = \frac{1}{4}$$

de donde se tiene que $EC = 4FG$. Pero como $JCEF$ es un paralelogramo $EC = FJ$, y así $FJ = 4FG$. Por lo tanto $FH = 2FG$. Lo que equivale a que $JH = 2HG$. Los triángulos JHD y HGD tienen la misma altura mientras que la base del primero es el doble de la del segundo, así que $\mathcal{A}(\Delta JHD) = 2\mathcal{A}(\Delta HGD)$, en donde $\mathcal{A}$ denota el área. En la misma situación están los triángulos JHC y HGC, en consecuencia, $\mathcal{A}(\Delta JHC) = 2\mathcal{A}(\Delta HGC)$. Sumando estás dos igualdades se tiene $\mathcal{A}(\Delta JCD) = 2\mathcal{A}(\Delta CGD)$. Además $\mathcal{A}(\Delta JCD) = \mathcal{A}(\Delta AJD)$ y por lo que $\mathcal{A}(\Delta ACD) = 4\mathcal{A}(\Delta CGD)$. Un razonamiento análogo lleva a concluir que $\mathcal{A}(\Delta BAD) = 4\mathcal{A}(\Delta BDG')$. Sumando las dos últimas igualdades se llega a que $\mathcal{A}(\Delta BCD) = 4(\mathcal{A}(\Delta CGD) + \mathcal{A}(\Delta BDG'))$. Al inscribir ahora 4 triángulos como se indicó arriba se llega a que las áreas de combinadas de estos equivalen a una cuarta parte de la suma de las áreas de los triángulos CDG y $DG'B$, y por tanto a $\frac{1}{16}$ del área del triángulo BCD. Entonces el área del segmento parabólico BCD:

$$\mathcal{A}(\Delta \mathrm{BCD}) \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right)$$

Suma esta última serie empleando un recurso geométrico (Figura 1.19).

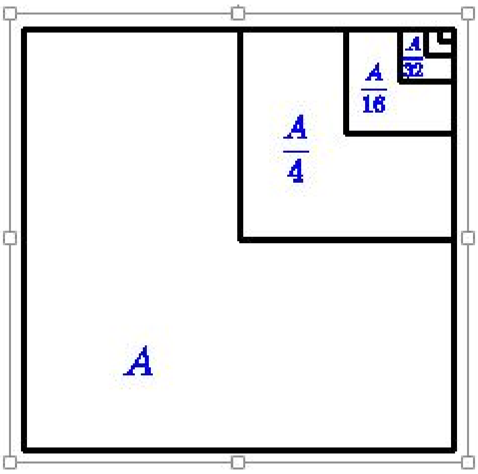


Figura 1.19 Representación gráfica de la serie geométrica de razón¼.

La gráfica insinúa el resultado $\frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \cdots = \frac{A}{3}$, de donde cancelando la A y sumando 1 a ambos lados se obtiene $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots$

Resultado con el que termina la demostración.

Realmente Arquímedes es más moderno en su tratamiento de la suma de la serie. Emplea, como se hace ahora, un resto. Lo cual le evita acudir al infinito. Vamos ahora a hacer un híbrido entre pasado y presente revisando la construcción que sobre el trabajo de Arquímedes hace Apostol (1965)en su *Calculus*. Esto nos permitirá ver de una manera limpia la esencia y el rigor de Arquímedes.

Apostol deduce la fórmula de la suma de los n primeros cuadrados empleando, de forma disimulada, sumas telescópicas. Sin embargo, estas fueron inventadas por Leibniz quien las empleó para resolver un problema que como reto le había planteado Huygens en 1672 (Terré, 2001, p.344): calcular la suma de los inversos de todos los números triangulares. Las sumas telescópicas logran mucho más, permiten emplear un algoritmo recursivo para deducir fórmulas para sumas de la forma $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ para k entero positivo. También se emplean para demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo. Mostraremos una deducción de Arquímedes.

Debemos a los pitagóricos además de las palabras *filosofía* y *matemáticas*, el estudio de los números figurados. Por ejemplo, la suma $1 + 2 + 3 + 4$ puede representarse como en la Figura 1.20. La cual es completada con una disposición idéntica, pero invertida, para obtener un arreglo rectangular (Figura 1.21) que permite hacer fácilmente la suma.

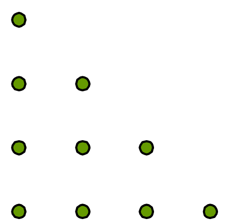


Figura 1.20 Números figurados.

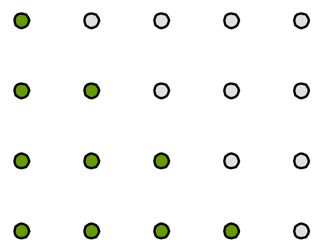


Figura 1.21 Arreglo rectangular con números figurados.

En este caso $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4*5}{2}$. En general $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Mediante una idea similar es posible encontrar una fórmula para $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$(Burton, 2011, p.100), sin embargo, veamos una deducción del propio Arquímedes (Ibídem, p.104).

Partiendo de la igualdad $n^2 = [k + (n - k)]^2 = k^2 + 2k(n - k) + (n - k)^2$. Tomando $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ se tienen las igualdades

$$n^2 = 1^2 + 2 * 1(n - 1) + (n - 1)^2$$

$$n^2 = 2^2 + 2 * 2(n - 2) + (n - 2)^2$$

$$\dots$$

$$n^2 = (n - 1)^2 + 2(n - 1)(1) + 1^2$$

Sumando todas estas ecuaciones además de la ecuación $2n^2 = 2n^2$, se llega a

$(n + 1)n^2 = 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 2(1(n - 1) + 2(n - 2) + \cdots + (n - 1)1)$(1)

Por otra parte de $1 + 2 + 3 + \dots + k - 1 = \frac{(k-1)k}{2}$ se obtiene

$$k^2 - k = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + (k - 1))$$

Tomando $k = 2,3, \dots, n$ se tienen las igualdades

$$1^2 - 1 = 0$$

$$2^2 - 2 = 2(1)$$

$$3^2 - 3 = 2(1 + 2)$$

$$\dots$$

$$n^2 - n = 2(1 + 2 + \cdots + (n - 1))$$

Que sumadas producen

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 - 1 - 2 - \cdots - n =$$

$$= 2(1(n - 1) + 2(n - 2) + \cdots + (n - 1)1 \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$(n + 1)n^2$ =3$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - (1 + 2 + \cdots + n)$

Lo que lleva a

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(n+1)n^2}{3}+\frac{n(n+1)}{6}$$

Para concluir que

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}. \qquad (*)$$

De (*) es claro que

$$\frac{n^3}{3}<1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

Restando n^2 ambos lados de (*) también se obtiene

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}. \quad (**)$$

Ahora bien si $n \geq 1$entonces $n^2 \geq n$ y $\frac{n^2}{2} \geq \frac{n}{2} > \frac{n}{6}$ y, por tanto, puede concluirse de (**) que

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2<\frac{n^3}{3}$$

En resumen

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2<\frac{n^3}{3}<1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 \quad (***)$$

Veamos entonces el trabajo de Apostol.

La idea es calcular el área bajo la curva de la parábola $y=x^2$ entre 0 y b (Figura 1.22). Arquímedes demostró que esta área es igual a un tercio de la del rectángulo en que está inscrita. Para ello se divide el intervalo [*a*, *b*] en *n* segmentos todos de igual longitud $\frac{b}{n}$. Luego se construyen sobre estos, rectángulos cuya altura es igual a la altura mínima (Figura 1.23) o máxima (Figura 1.24) de la parábola sobre ese segmento. El área del segmento parabólico A estará comprendida, por tanto, entre la suma de las áreas de los rectángulos interiores (Figura 1.23) y la de los exteriores (Figura 1.24). El intervalo $[a,b]$ se divide en n segmentos de igual longitud cuyos extremos son $0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{nb}{n} = b$. Las alturas de los rectángulos interiores corresponden a las ordenadas de los extremos izquierdos de cada rectángulo y las de los rectángulos exteriores a las de los extremos derechos. En otras palabras la altura del k-ésimo rectángulo interior es $\left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^2$. Que multiplicada por $\frac{b}{n}$, longitud de la base, da $(k-1)^2 \frac{b^3}{n^3}$ como valor de su área. De manera análoga el área del k-ésimo rectángulo exterior es $k^2 \frac{b^3}{n^3}$.

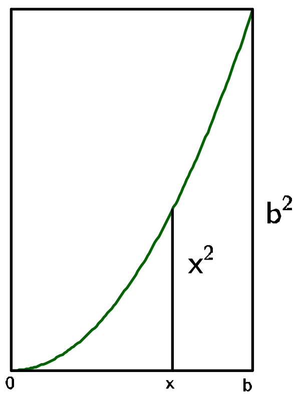


Figura 1.22 Curva de la parábola$y = x^2$.

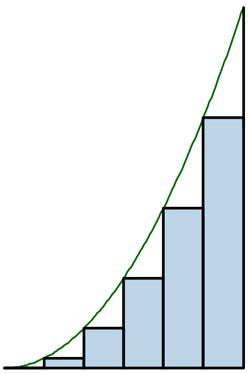


Figura 1.23 Rectángulos de igual base y altura el mínimo del subintervalo.

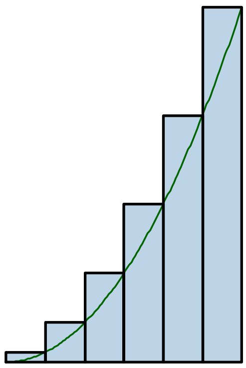


Figura 1.24 Rectángulos de igual base y altura el máximo del subintervalo.

Sea
$$S_n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\frac{b^3}{n^3}$$

Y s_n la suma de los n rectángulos interiores, entonces

$$s_n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2)\frac{b^3}{n^3}$$

En otras palabras, si multiplicamos (***) por $\frac{b^3}{n^3}$ y tenemos en cuenta las dos ecuaciones anteriores, se tiene

$$s_n < \frac{b^3}{n^3} < S_n$$

Para todo $n \geq 1$. Arquímedes demuestra ahora que $\frac{b^3}{n^3}$ es el único número que satisface estas desigualdades y como también se tiene $s_n < \mathrm{A} < S_n$, necesariamente

$$A = \frac{b^3}{n^3}$$

Para hacer esto último se suma n^2 a ambos lados de la desigualdad izquierda de (***) y se obtiene

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2$$

Se multiplica ahora por $\frac{b^3}{n^3}$ y se obtiene

$$S_n < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}$$

De manera análoga restando n^2 a ambos lados de la desigualdad derecha de (***) y multiplicando por $\frac{b^3}{n^3}$ se obtiene

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n$$

Entonces, como $s_n < \mathrm{A} < S_n$, necesariamente

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}$$

Si suponemos $A > \frac{b^3}{3}$, entonces $A - \frac{b^3}{3} > 0$en a desigualdad de la derecha se tiene

$$A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n}$$

De donde se llega a

$$n < \frac{b^3}{A - \frac{b^3}{3}}$$

Para todo n. Lo cual es obviamente falso para

$$n > \frac{b^3}{A - \frac{b^3}{3}}$$

La suposición $A < \frac{b^3}{3}$ conduce a una contradicción análoga. Por lo tanto, necesariamente

$$A = \frac{b^3}{n^3}$$

A esta brillante demostración, sin embargo, opone Apostol una objeción moderna. Arquímedes nos lleva de la mano, y con brillantez nos convence de que el área del segmento parabólico es en efecto $\frac{1}{3}$ del área del rectángulo que lo circunscribe. Pero hemos llegado hasta aquí ¡sin una definición de área! Una definición que debe garantizar la certeza de las asunciones que se hicieron de manera tácita: que si una región contiene a otra su "área" es mayor o igual que la de la contenida. O que el "área" de una región es igual a la suma de las de las regiones disjuntas en las que se haya dividido. De hecho, Euclides en las 23 definiciones del libro I de los Elementos no dedica ninguna al concepto de área. La primera alusión a este concepto la hace en el enunciado de la proposición 35: "*Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí* " en donde *iguales entre sí* quiere decir que tienen áreas iguales.

En su libro *Matemática elemental desde un punto de vista superior* Félix Klein afirma: "La diferencia esencial entre este método y el moderno radica en el hecho de que asume tácitamente como evidente la existencia de un número que mide el área, mientras que el cálculo infinitesimal moderno rechaza aceptar esta evidencia intuitiva pero recurre al concepto abstracto de límite y define a este valor como el límite de los valores de las áreas de los polígonos inscritos." (Klein, 2006, p.293).

El renacimiento

El estilo matemático del Renacimiento hasta el siglo XIX se resume muy bien en este párrafo de Pedro González Urbaneja:

> A partir del Renacimiento la matemática empieza a presentar una inflexión respecto a la clásica griega. El paradigma formal y demostrativo que impuso la filosofía platónica en los Elementos de Euclides y demás obras clásicas evoluciona bajo el principio de que lo que importa es la consecución de nuevos resultados, aunque sea sin expresión rigurosa. Se impone el lema "primero inventar, después demostrar". Bajo el nuevo enfoque se trata de crear y descubrir más que de expresar axiomática y apodícticamente."
>
> (González, 2008, p.299)

Cavalieri

Consecuente con esta filosofía Cavalieri enuncia su famoso principio y lo usa con éxito para encontrar resultados como el volumen de la esfera. Su principio dice: "*Se dan dos cuerpos sólidos y un plano. Supongamos que todo plano paralelo al plano dado que interseca a uno de los cuerpos, interseca también al otro y se obtienen secciones transversales con áreas iguales. Entonces los cuerpos tienen el mismo volumen.*". La Figura 1.25 ilustra el enunciado.

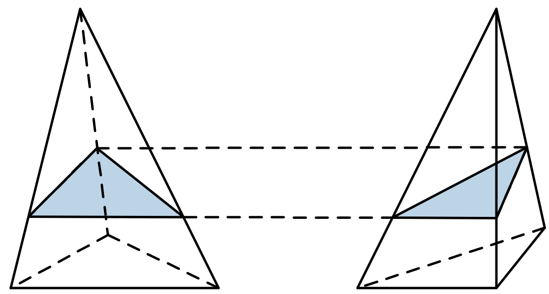


Figura 1.25 Principio de Cavalieri.

La forma de emplear este principio para calcular el volumen de la esfera, conocidos el del cono y el del cilindro, obedece a una aguda observación: el área de una sección de un hemisferio de radio r es igual a la de un cilindro de radio y altura r menos un cono de igual radio y altura (Figura 1.26).

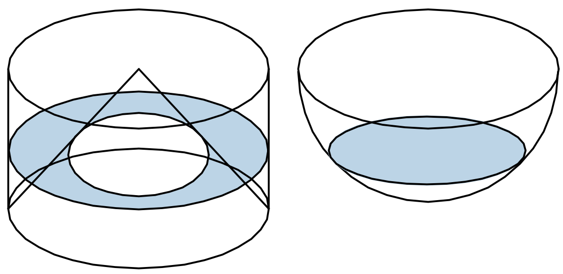


Figura 1.26 Principio de Cavalieri para calcular el volumen de la esfera.

La comprobación se hace de manera sencilla (Figura 1.27).

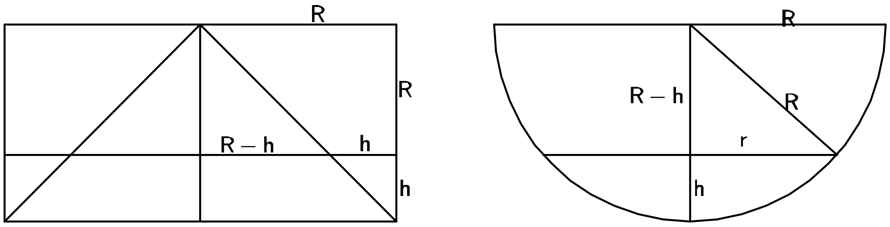


Figura 1.27 Secciones transversales del cilindro, cono y esfera de la Figura 1.26

En el cilindro menos el cono el área de la sección en forma de corona esta dada por $\pi(R^2 - (R-h)^2)$ en tanto que en la semiesfera el área de la sección circular es πr^2 pero, como consecuencia del teorema de Pitágoras,$r^2 = R^2 - (R-h)^2$, y por lo tanto es lícito emplear el principio de Cavalieri. El volumen V de la semi-esfera es igual a la del cilindro menos el cono, esto es

$$V = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Roberval

Empleando en los indivisibles de Cavalieri en versión bidimensional, Roberval logra cuadrar la cicloide. Para ello procede de la siguiente forma (Figura 1.28).

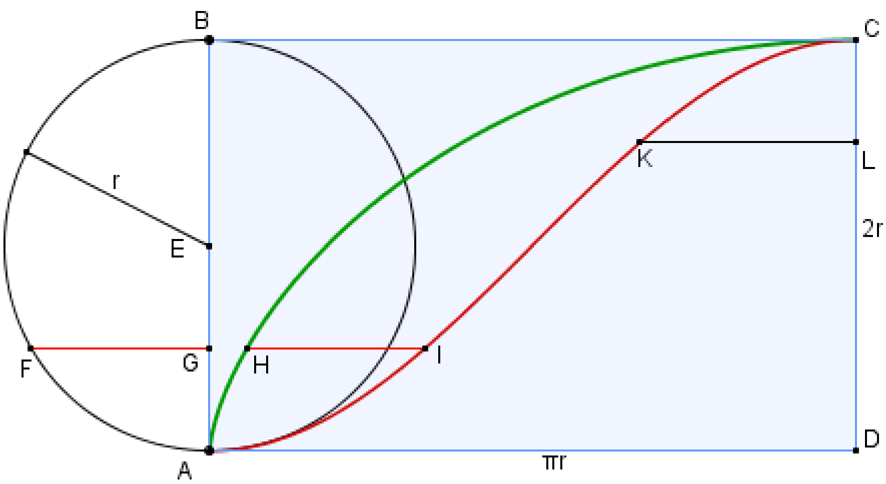


Figura 1.28 Roberval. Cuadratura de la cicloide.

Sea AHC media cicloide. Se traza por H una perpendicular al diámetro AB. Sean F y G las intersecciones de la perpendicular con la circunferencia generatriz y el diámetro AB respectivamente. Sea I, también sobre la perpendicular, tal que $HI = FG$. El lugar geométrico descrito por el punto I a medida que el punto G se desplaza de A a B es la curva AIC. Por la forma como está construida la curva AIC y, según el principio de Cavalieri, el área de la región $AHCI$ es igual a la mitad del área del círculo. Se tiene también el rectángulo $ABCD$ cuya base es πr y cuya altura es $2r$, su área es, por tanto, $2\pi r^2$ que es dos veces el área del círculo. Además Roberval hace la muy interesante observación de que la curva AIC divide al rectángulo en dos partes iguales. Con lo cual el área de la región $AICD$ es igual a la del círculo y, por tanto, el área total de la cicloide es tres veces la del círculo.

Queda por demostrar que, en efecto, la curva AIC divide al rectángulo en dos partes iguales. Para ello Roberval se vale nuevamente del principio de Cavalieri afirmando que si CL = AG entonces $KL = GI$. La demostración sigue laFigura 1.29.

Como $CL = AG$, entonces $KO' = OI$. Además $HO = FO' = r$. Por último, los ángulos FKO' y HIO son rectos, por lo tanto los triángulos FKO' y HIO son congruentes. Entonces también son congruentes los ángulos HOI y $KO'F$ que se designan por θ. $GI = AM$, pero AM es igual al arco HM y $HM = r\theta$. Con lo que GI $= r\theta$. Por otra parte KL = ND = AD – AN $= \pi r - (\pi - \theta)r = r\theta$. Con lo que, en efecto,$KL = GI$.

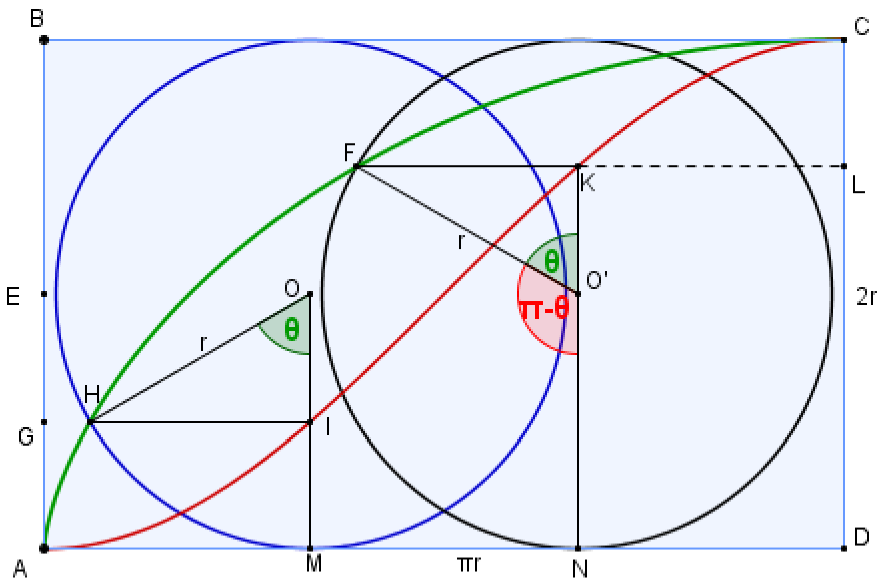


Figura 1.29 La curva AIC divide al rectángulo en dos partes iguales.

La sencillez de los cálculos contrasta, sin embargo, con la carencia de rigor. El profesor Roger L. Cooke comenta al respecto:

> No obstante, este método para encontrar áreas y volúmenes estaba sujeto a objeciones. Por ejemplo, el volumen de cada sección plana de una figura es cero; ¿cómo es posible reunir una colección de ceros para obtener algo que no es cero? Además, ¿por qué el método no funciona en una dimensión? Considere las secciones de un triángulo rectángulo paralelas a uno de sus catetos. Cada sección corta a la hipotenusa y al otro cateto en figuras congruentes; a saber, en un punto a cada uno. Sin embargo, la hipotenusa y el otro cateto no miden lo mismo. Objeciones como ésta eran preocupantes. Los resultados obtenidos con estos métodos fueron espectaculares. No obstante, los matemáticos prefirieron aceptarlos como un acto de fe, seguir usándolos e intentar construir sus fundamentos más tarde, justo como en un árbol cuando la raíz y las ramas crecen al mismo tiempo.
>
> (Zill & Warren, 2011, p.XXIII)

Fermat

Fermat logra un gran avance demostrando que

$$\int_0^a x^{p/q}dx = \frac{a^{p/q+1}}{p/q+1} = \frac{a^{\frac{p+q}{q}}}{\frac{p+q}{q}}$$

Donde $p/q > 0$. Lo hace empleando una muy ingeniosa partición que emplea una progresión geométrica. En González(2008, p.329), se lee la cita de Fermat:

> Arquímedes solo empleó progresiones geométricas para la cuadratura de la parábola; en sus otras comparaciones entre cantidades heterogéneas se restringió a progresiones aritméticas. ¿Sería así porque encontrara que la progresión geométrica sirviera menos a la cuadratura? ¿O quizá es que el artificio particular del que se sirvió Arquímedes para cuadrar con esta progresión la primera parábola puede difícilmente aplicarse a las otras? Cualquiera que sea la razón, yo he probado que la progresión geométrica es muy útil para las cuadraturas y deseo presentar a los geómetras actuales mi invención, que permite cuadrar por un método absolutamente similar, tanto parábolas como hipérbolas[4].

[4] Fermat se refiere aquí a parábolas e hipérbolas *generalizadas*, esto es, de la forma $y = x^{p/q}$ e $y = x^{-p/q}$ $(p/q > 0)$ respectivamente.

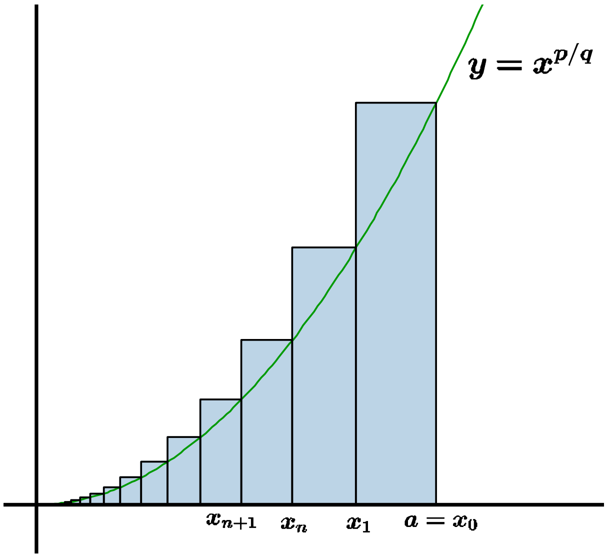


Figura 1.30 Rectángulos de altura "y".

Veamos el trabajo de Fermat (Figura 1.30). Consideremos la función $y = x^{p/q}$, donde$p/q > 0$. Mediante la sucesión $\{x_n = ar^n\}$ donde $0 < r < 1$ se divide el intervalo $[0, a]$ en infinitos subintervalos de la forma $[x_{n+1}, x_n]$. Sobre cada uno de ellos se levanta un rectángulo de altura $x_n^{p/q}$. Entonces la suma de las áreas de todos estos rectángulos es

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{p/q}(x_n - x_{n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n)^{p/q}(ar^n - ar^{n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{p}{q}+1}(r^n)^{\frac{p}{q}} r^n(1 - r)$$

$$= a^{\frac{p+q}{q}}(1 - r)\sum_{n=0}^{\infty} r^{n\frac{p+q}{q}}$$

$$= a^{\frac{p+q}{q}}(1 - r)\sum_{n=0}^{\infty} s^n \text{ donde } s = r^{\frac{p+q}{q}} < 1$$

$$= a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1 - r}{1 - s}$$

$$= a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1-r}{1-r^{\frac{p+q}{q}}}$$

$$= a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1-r}{1-t^{p+q}} \text{ donde } t = r^{1/q}$$

$$= a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1+t+t^2+\cdots+t^{q-1}}{1+t+t^2+\cdots+t^{p+q-1}}$$

El área bajo la curva se obtiene tomando el límite cuando r tiende a 1 en $A(r)$, lo que equivale a tomar el límite cuando t tiende a 1 en la última expresión, con lo cual se obtiene

$$a^{\frac{p+q}{q}} \frac{q}{p+q} = \frac{a^{\frac{p+q}{q}}}{\frac{p+q}{q}}$$

como el valor del área bajo la curva. Esta ingeniosa construcción, al emplear una progresión geométrica para generar la partición, implica el cálculo de dos límites: uno en el cálculo de la suma $\sum_{n=0}^{\infty} s^n$ y el del último paso.

Es difícil saber de qué manera el trabajo de Arquímedes pudo haber inspirado a Fermat a realizar este razonamiento. Con él cerraba un largo ciclo de conjeturas que matemáticos como Cavalieri, Pascal y Roberval habían considerado. El caso $p/q < 0$ también es resuelto por Fermat mediante un procedimiento similar en el que $r > 1$ y considera el intervalo $[a, \infty]$.

John Wallis

Wallis lleva al extremo el espíritu temerario de su tiempo. Espíritu que no tiene ningún problema en aceptar las más osadas suposiciones sin demostración. Enfrentado a la integral

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$$

de la cual conocía el resultado, ya que es el área de la semicircunferencia de centro en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}$ y, por lo tanto, es igual a $\pi/8$, deseaba, sin embargo, obtener el resultado de forma analítica. No lo consiguió. (Cabe reslatar que Wallis es considerado, después de Newton, el matemático inglés más importante de la época. La integral puede ser calculada con los métodos estudiados en los cursos actuales de cálculo. Métodos basados en el Teorema Fundamental del Cálculo). Sin embargo, estudió la integral

$$\int_0^1 (x - x^2)^n \, dx$$

para diversos valores de n. Observó los resultados $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \ldots$ obtenidos para los valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$ llegando a la conclusión de que el valor de la integral es

$$\int_0^1 (x - x^2)^n \, dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Generalización que no demostró. Pero lo que sí hizo fue suponerla válida para n racional, con lo cual conjeturó que

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2} \, dx = \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{\left(2\frac{1}{2} + 1\right)!}.$$

Y, en consecuencia, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}!\right)^2 = \frac{\pi}{8}$ y entonces $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ temeraria conclusión que fue confirmada posteriormente por Euler cuando desarrolló su función gamma.

Newton y Leibniz

La historia de las matemáticas atribuye la creación del cálculo a Newton y Leibniz. A cada uno de ellos de manera independiente. Sin embargo muchos otros matemáticos ya habían obtenido resultados de lo que se conoce como cálculo y habían estado muy cerca de descubrir la relación entre tangentes y cuadraturas. De

Fermat dice Boyer que habiéndose interesado por muchos problemas como tangentes, cuadraturas, volúmenes, longitudes de arco, etc., que involucran tanto derivadas como integrales, difícilmente pudo haber ignorado el hecho de que se trataba de procesos inversos. Supone que probablemente, sí fue consciente de ello pero que no lo considerócomo un hecho particularmente importante (Boyer, 2001, p.444). Por su parte C. H. Edwards dice, refiriéndose al profesor de Newton, Isaac Barrow "De hecho, Barrow enunció y demostró un teorema geométrico que muestra claramente la relación inversa entre tangentes y cuadraturas. Sin embargo no fue consciente de que su "teorema fundamental" implicaba la existencia de un nuevo objeto que se caracterizaba por requerir métodos específico de trabajo" (Edwards, 2012, p.190). Boyer tiene una explicación para este hecho "Barrow parece haber reconocido claramente el carácter inverso de los problemas relativos a tangentes y cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer un uso efectivo de esta relación". (Boyer, 2001, p.489)

¿Por qué, en cambio, Newton y Leibinz sí pudieron llevar esta relación a sus últimas consecuencias? No es claro. Sin embargo, es posible aventurar una explicación. Newton, un hombre dotado de una enorme capacidad de observación, concentración y trabajo. Quien poseía, además, una genialidad asombrosa. No era un matemático diletante, creó poderosas herramientas matemáticas para resolver los retos que le presentaban sus trabajos y teorías en el campo de la física. Recordemos lo que sobre él dijo Isaac Asimov:

> "Si la pregunta fuese «¿Quién fue el segundo científico más grande?» sería imposible de contestar. Hay por lo menos una docena de hombres que, en mi opinión, podrían aspirar a esa segunda plaza. Entre ellos figurarían, por ejemplo, Albert Einstein, [...] Arquímedes y otros. Incluso es muy probable que ni siquiera exista eso que hemos llamado el segundo científico más grande. [...] Pero como la pregunta es «¿Quién es el más grande?», no hay problema alguno. En mi opinión, la mayoría de los historiadores de la ciencia no dudarían en afirmar que Isaac Newton fue el talento científico más grande que jamás haya visto el mundo. Tenía sus faltas [...] Pero como científico no tenía igual. Fundó las matemáticas superiores después de elaborar el cálculo. Fundó la óptica moderna mediante sus experimentos de descomponer la luz blanca en los colores del espectro. Fundó la física moderna al establecer las leyes del movimiento y deducir sus consecuencias. Fundó la astronomía

> moderna estableciendo la ley de la gravitación universal. Cualquiera de estas cuatro hazañas habría bastado por sí sola para distinguirle como científico de importancia capital. Las cuatro juntas le colocan en primer lugar de modo incuestionable."
>
> (Asimov & Paredes, 1977)

Newton, personaje paradigmático para todos quienes nos interesamos por las matemáticas y la ciencia, es un personaje colosal, un héroe que a la vez atrae y repulsa. Esta paradoja se refleja en la manifestación de Aldous Huxley: "Si desarrolláramos una raza de Isaac Newtons, esto no sería progreso. Pues el precio que tuvo que pagar Newton por ser un intelecto supremo fue que era incapaz de amistad, amor, paternidad, y muchas otras cosas deseables. Como hombre fue un fracaso; como monstruo fue soberbio".

En principio Newton trabajó el cálculo en forma paramétrica, con el tiempo como parámetro. Consideró las variables como cantidades en movimiento y centró su atención en las velocidades. Empleó la letra o para representar un pequeño intervalo de tiempo y p para la velocidad de la variable x. Así el cambio de x en el tiempo o es op. De manera análoga q representa la velocidad de y. Si se tiene la relación $y^m = x^n$, entonces $(y+oq)^m = (x+op)^n$

de donde

$$y^m + my^{m-1}oq + \frac{m(m-1)y^{m-2}(oq)^2}{2} + \cdots$$
$$= x^n + nx^{n-1}op + \frac{n(n-1)x^{n-2}(op)^2}{2} + \cdots$$

Ahora como $y^m = x^n$ se cancelan, y dividiendo por o a ambos lados se llega a una expresión de la forma

$$my^{m-1}q + o(\text{términos en} y) = nx^{n-1}p + o(\text{términos en } x)$$

donde se desprecian los términos que multiplica o ya que es "pequeño".

$$my^{m-1}q = nx^{n-1}p$$

Entonces

$$\frac{q}{p} = \frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}}$$

Pero como $y = x^{n/m}$

$$\frac{q}{p} = \frac{nx^{n-1}}{mx^{n\frac{m-1}{m}}} = \frac{n}{m}x^{n-1-n\frac{m-1}{m}} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$$

Teniendo en cuenta que oq es el cambio en y y op es el cambio en x la última expresión ilustra el concepto de derivada como una razón de cambio relativo.

Años después Newton reemplazó la p y la q por $\dot{x}$ e $\dot{y}$, respectivamente; se tiene entonces:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad y \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

Y así, $\frac{q}{p} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$

Para la verificación del proceso inverso Newton “deriva” la función de área.

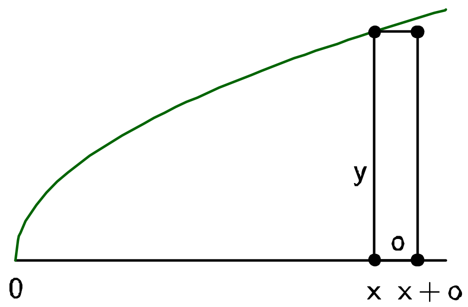


Figura 1.31 Incremento infinitesimal de la función de área según Newton.

Considérese una función tal que el área bajo la curva, desde 0 hasta x, viene dada por la función

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{m+n}{n}} (*)$$

Si o es un incremento infinitesimal en x, entonces el área desde 0 hasta $x + o$ está dada por $z + oy$ y se tiene

$$z + oy = \left(\frac{n}{m+n}\right) a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}$$

Newton aplica el teorema del binomio en el lado derecho y obtiene

$$z + oy = \left(\frac{n}{m+n}\right) a(x^{\frac{m+n}{n}} + \frac{m+n}{n}x^{\frac{m+n}{n}-1}o + \frac{m+n}{2n}\left(\frac{m+n}{n} - 1\right)x^{\frac{m+n}{n}-2}o^2 + \cdots)$$

Resta a esta última ecuación (*) y divide por o a ambos lados

$$y = \left(\frac{n}{m+n}\right) a \frac{m+n}{n} x^{\frac{m+n}{n}-1} + \frac{m+n}{2n}\left(\frac{m+n}{n}-1\right) x^{\frac{m+n}{n}-2} o + \cdots)$$

Finalmente, deshecha los términos que contienen $\boldsymbol{o}$ y llega a

$$y = ax^{\frac{m}{n}}.$$

Aunque Newton trabaja sobre una función particular, su desarrollo contiene la esencia de la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Los libros actuales de cálculo la emplean acompañándola de algún otro resultado como el teorema del valor medio para integrales o el teorema de valores extremos de funciones continuas en un intervalo cerrado.

Esta manera de hacer las cosas motivó las famosas críticas del obispo George Berkeley (1685-1753) "¿Y que son estas fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. ¿Y que son estos mismos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas ni cantidades infinitamente pequeñas, ni tampoco se reducen a la nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de cantidades difuntas?" Sobre estas críticas comenta Boyer: "La descripción que hace Berkeley del método de las fluxiones es totalmente correcta y sus críticas están bien fundamentadas. En ellas hacía notar que al calcular o bien las fluxiones o las razones de las diferenciales, los matemáticos suponen en primer lugar que se les da ciertos incrementos no nulos a las variables, para eliminarlos más tarde suponiéndolos iguales a cero". (Boyer, 2001, p.539).

Leibniz

El otro creador del cálculo fue Leibniz, quien es considerado el último *genio universal* pues trabajó en campos como la metafísica, epistemología, lógica, filosofía, matemáticas, física, geología, historia, leyes, diplomacia, ingeniería y teología. Inventó una máquina calculadora que realizaba las cuatro operaciones además de la extracción de raíces cuadradas. De él hace el siguiente comentario Eric T. Bell "A primera vista puede parecer que las tentativas de Leibniz hacia una lógica simbólica no tienen nada que ver con el desarrollo del cálculo. Nada más lejos de la realidad. [...] Newton, en sus primeros encuentros con lo continuo se perdió en la pista de Zenón, de cuyas paradojas quizá nunca había oído hablar. [...] esas antiguas dificultades han dejado perplejos a todos los matemáticos desde Newton, en el siglo XVII, a Weierstrass en el XIX, quien trató no solo de obtener resultados útiles e interesantes por medio de diferenciaciones e integraciones rutinarias, sino de comprender la esencia del cálculo. El cálculo les resultaba difícil a Newton y a Weierstrass; es fácil solo para los que lo comprenden con demasiada facilidad" (Bell, 2000, p.159). Además de la ironía de la última frase llamamos la atención sobre que la imposibilidad de dar un sustento riguroso a toda esta nueva construcción se veía compensada con la fertilidad del nuevo campo del conocimiento recién inventado. Comentando sobre esta época afirman Courant y Robbins: "La revolución en las matemáticas y en la ciencia comenzó su fase vigorosa en el siglo XVII con la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral. [...] El razonamiento lógicamente preciso, a partir de definiciones claras y axiomas "evidentes", no contradictorios, parecía indiferente a los nuevos pioneros de la ciencia matemática. En una verdadera explosión de conjeturas intuitivas, de razonamiento sólido entretejido con misticismo disparatado, en una confianza ciega en el poder sobrehumano del razonamiento formal, se conquistó un mundo matemático de riquezas inmensas". (Courant & Robbins, 2002, p.18). Al cesar esta explosión frenética de creatividad y al apaciguarse las aguas del frenesí matemático se hizo evidente la necesidad de revisar los fundamentos de todo lo creado, en especial, se desarrolló un riguroso concepto de límite que vino a dar sustento a las construcciones del cálculo diferencial e integral. Es en este proceso de fundamentación donde cobra capital importancia el aporte de Leibniz. Continúa Bell (2000): "Parece que se puede afirmar sin miedo a equivocarse que sin la lógica matemática que preconizó Leibniz, y que empezó a crear, la obra crítica del siglo XX sobre los fundamentos del análisis, y en realidad de toda la matemática, hubiera sido humanamente imposible". (p.159). Los fantasmas de todos estos elementos: pragmatismo, paradojas, cálculos mecánicos y fundamentación rigurosa cobran vida cada vez cualquiera emprende la empresa de apropiar el conocimiento de estos temas.

Veamos ahora como una mente profunda puede sacar provecho de una situación simple. Leibniz consideró la siguiente situación (Figura 1.32). Una curva y una partición cuyos elementos tienen una longitud igual a la unidad. En este caso el área de cada uno de los rectángulos coincide con la ordenada de la izquierda, entonces un cálculo aproximado del área se obtiene sumando estas ordenadas. Por otra parte, la diferencia de dos ordenadas consecutivas coincide con la pendiente de la recta secante. Leibniz consideró que si pudiera hacerse la unidad infinitamente pequeña, el área bajo la curva sería igual a la suma de las ordenadas y la pendiente de la recta tangente igual a la diferencia de dos ordenadas *consecutivas*. Al ser la suma y la diferencia operaciones inversas Leibniz intuyó la relación inversa entre los cálculos de cuadraturas y rectas tangentes (Pérez, 2015, p.322).

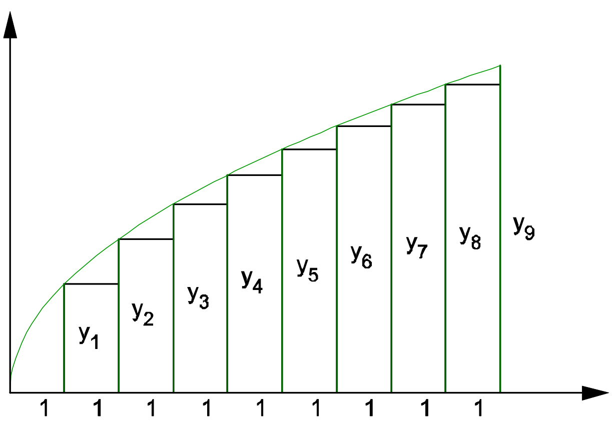


Figura 1.32 Partición cuya distancia entre elementos consecutivos es 1.

En Kline (2012) encontramos una cita que nos permite ir redondeando esta visita histórica: “Tanto a Newton como a Leibniz se les debe reconocer que vieron el cálculo como un método nuevo y general, aplicable a muchos tipos de funciones. Después de su contribución, el cálculo dejó de ser un apéndice y una extensión de la geometría griega para convertirse en una ciencia independiente capaz de manejar una cantidad de problemas ampliamente extendida [...]. La tercera contribución vital que comparten Newton y Leibniz es la reducción a la antidiferenciación del área, volumen y otros problemas que habían sido tratados anteriormente como sumaciones. Así, los cuatro problemas principales –máximos y mínimos, tangentes, cambio relativo y sumación- quedaron reducidos todos a diferenciación y antidiferenciación” (p.500). Convergen entonces, en Newton y Leibniz, dos elementos fundamentales. Por un lado, el reconocimiento definitivo de la relación inversa entre derivación e integración. Y por otro, y fundamental, el reconocimiento del cálculo como herramienta valiosísima del trabajo científico de propósito muy general: “*el cálculo dejó de ser un apéndice y una extensión de la geometría griega*”.

Sin embargo el pasado histórico del área como la principal representación de la integral sigue pesando. El hacer un énfasis excesivo en una única representación de un concepto puede llevar a caer en un peligroso sesgo conceptual: la identificación del concepto con su representación. En este caso la identificación absoluta de la integral definida con el área. El estudiante poco avezado en sutilezas teóricas, y acostumbrado a esta identificación, en el momento de resolver problemas de longitudes de arco y volúmenes mediante integrales definidas puede caer en confusión: ¿Es el área una longitud de arco? ¿Es el área un volumen? ¿Qué significado tiene una integral triple?

Es posible enfocar el estudio de la integral cambiando el objeto con el que se la representa. Si se estudia, por ejemplo, un móvil del cual se conoce su velocidad como función del tiempo, es posible emplear sumas de Riemann como un método de aproximación de la distancia recorrida sin acudir al concepto de área. Sin embargo, esta forma de proceder parece pecar de ser excesivamente concreta. Una máxima de las matemáticas es trabajar los conceptos en su forma más general. El cálculo de la distancia recorrida, el del trabajo al estirar un resorte y el del volumen de un sólido de revolución (casos concretos) tienen la misma estructura. Esta estructura puede generalizarse en el proceso de cálculo del área bajo la curva (caso abstracto general). Es sobre éste que se vuelca todo el aparato matemático para hacer demostraciones, generalizaciones, estudio de casos patológicos, etc. Todo este trabajo enriquece al objeto abstracto y hace que sea una herramienta muy efectiva a la hora de usarlo en casos concretos.

Habría que hacer aquí una distinción entre los objetos matemáticos ideales que viven en el mundo de las ideas de Platón, que son creados a partir de proceso de generalización y abstracción, y las "sombras" de estos objetos que habitan en la mente de cada uno de nosotros. Los objetos platónicos son perfectos (por lo menos bajo los estándares de rigor vigentes en cada época) en tanto que sus sombras son parciales y fragmentarias. Se crean a partir de representaciones particulares y van enriqueciéndose o deformándose en el proceso de interacción del sujeto con los conceptos y sus representaciones. Una manera de evaluar una construcción conceptual abstracta y general es enfrentar al estudiante a casos concretos que, es de esperarse, deberá poder resolver. Si es necesaria una adición conceptual a cada caso particular entonces la generalización no está construida de forma adecuada.

Volviendo a nuestra historia, hemos visto cómo mediante una lucha titánica, abonada con brillante creatividad, se fueron haciendo conquistas parciales paso a paso. Lográndose pequeñas generalizaciones como el principio de Cavalieri, las cuadraturas de Fermat y las sumas telescópicas de Leibniz, para llegar finalmente a la gran generalización: el Teorema Fundamental del Cálculo Integral. De este logro dijo James Stewart: "Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el teorema más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que solo un genio podía afrontar el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz moldearon como el teorema fundamental, veremos que estos estimulantes problemas son accesibles para todos" (Stewart, 2006, p.382). Como hemos visto la afirmación es exacta. Tiene, sin embargo, un dejo de nostalgia. El profesor Roger Cooke tiene una visión muy particular de la razón por la cual se estudian los temas del cálculo tanto diferencial como integral:

> Resulta que cuando se usa la intuición para pensar en ciertos fenómenos [...] se llega a postular ciertas relaciones entre estas variables y sus razones de cambio. Estas relaciones se escriben en una forma conocida como ecuaciones diferenciales. Así, el objetivo principal de estudiar cálculo diferencial consiste en comprender qué son las razones de cambio y cómo escribir ecuaciones diferenciales. El cálculo integral proporciona métodos para recuperar las variables originales conociendo sus razones de cambio. La técnica para hacer esto se denomina integración, y el objetivo fundamental del estudio del cálculo integral es aprender a resolver las ecuaciones diferenciales proporcionadas por el cálculo diferencial. A menudo estos objetivos están encubiertos en libros de cálculo, donde el cálculo diferencial se utiliza para encontrar los valores máximo y mínimo de ciertas variables, y el cálculo integral se usa para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Hay dos razones para recalcar estas aplicaciones en un libro de texto. Primero, la utilización completa del cálculo usando ecuaciones diferenciales implica una teoría más bien complicada que debe presentarse de manera gradual; entre tanto, al estudiante debe enseñársele algún uso de las técnicas que se proponen. Segundo, estos problemas fueron la fuente de las ideas que condujeron al cálculo; los usos que ahora hacemos del tema sólo se presentaron después del descubrimiento de aquél.
>
> (Zill & Warren, 2011, p.XXV)

Podemos agregar una tercera razón: todo trabajo en matemáticas debe fomentar la correcta construcción de los conceptos, construcción que debe permitir conocer su naturaleza así como llegar a emplearlos de forma creativa.

1.2 Tratamiento en el currículum universitario

Un proyecto coordinado y llevado a cabo por la Conferencia de Decanos de Matemáticas (CDM) para actualizar de manera precisa la definición de la profesión de matemático y planificar de forma armonizada los estudios superiores de esta ciencia en España derivó en un informe de la Comisión de Evaluación del diseño del Título de Grado en Matemáticas en concordancia con el proceso de convergencia europea de la Educación Superior. En este informe se realizó además una propuesta de objetivos del título, estructura general, distribución de contenidos y asignación de créditos europeos. La Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA) fue quien recogió en lo que se conoce como el Libro Blanco del Título de Grado en Matemáticas los aspectos fundamentales de dicho informe algunos de los cuales se tratarán en este epígrafe. Aunque no de manera profusa sí para ponernos en situación, principalmente en lo relacionado con los contenidos curriculares que tienen que ver con nuestro objeto de estudio.

Estructura de los estudios del Título de Grado en Matemáticas en España

En el informe se propone que la duración del grado sea de 240 ECTS[5] y que éste contenga la troncalidad (contenidos comunes obligatorios) mínima que permita la legislación[6]. De acuerdo con las necesidades de cada universidad se contempla la posibilidad de aumentar 6 créditos sobre los 144 asignados a los contenidos comunes obligatorios. Con el lema de "no hay enseñanza sin aprendizaje" se quiere plasmar el cambio que implicó la implementación del crédito europeo. Un estudiante debe completar 240 créditos europeos[7] en 4 años (60 créditos por curso).

[5] El crédito ECTS o crédito europeo integra las enseñanzas teóricas y prácticas, así como otras actividades académicas dirigidas, con inclusión de las horas de trabajo del estudiante necesarias para la consecución de los objetivos de cada asignatura.

[6] En el último borrador del Real Decreto de Grado un 60% (44 créditos europeos).

[7] Cada Universidad toma individualmente la decisión sobre el número de créditos asignados a contenidos propios sobre el total del título a la hora de elaborar su plan de estudios, siempre y cuando no superen los 240 créditos europeos.

Cada crédito europeo supone el trabajo de entre 25 y 30 horas por parte del estudiante (incluidas las horas de contacto con el profesor[8]) y las horas de trabajo personal[9].

Aunque en el informe se redactan distintas recomendaciones relacionadas con la orientación dentro del grado, el proyecto fin del carrera, la diversificación lingüística, el uso de software, asignaturas de libre configuración y consideraciones relacionadas con las áreas de conocimiento, no abordaremos tales cuestiones puesto que nuestro propósito es estudiar primordialmente temas relacionados con contenidos curriculares.

Contenidos

En virtud del continuismo de lo establecido por la legislación acerca de que las directrices de los planes de estudio incorporen una vinculación de los bloques de contenidos comunes obligatorios a las áreas del conocimiento se señalan las siguientes conclusiones.

- Todos los bloques temáticos de contenidos comunes obligatorios deben vincularse a las cinco áreas de conocimiento de Matemáticas (Álgebra, Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa).
- El bloque de Métodos Numéricos e Informática debe añadir a esas áreas las de Lenguajes y Sistemas Informáticos y Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial.
- El bloque de Modelización, por su carácter interdisciplinar, no debería vincularse a áreas de conocimiento para que en su impartición pudieran intervenir profesores de cualquier área en la que las matemáticas sean utilizadas como lenguaje, ó como herramienta.

[8]Como clases magistrales, clases de problemas, tutorías, trabajos tutorizados, exposición de dichos trabajos, prácticas de ordenador.

[9]Como estudio de teoría, resolución de problemas, preparación de trabajos y exámenes, lecturas recomendadas.

En cuanto a la asignación de los créditos europeos a los contenidos comunes obligatorios se instó a las universidades a que en la elaboración y desarrollo de sus planes de estudio mantuviesen abierta la adscripción a la docencia de estos contenidos comunes obligatorios de los profesores de las cinco áreas de conocimiento que ya hemos mencionado antes.

La Tabla 1.1 relaciona los contenidos comunes obligatorios y el rango de asignación de créditos europeos:

Tabla 1.1 Contenidos comunes obligatorios y asignación de ECTS.

ASIGNACIÓN DE CRÉDITOS EUROPEOS	
Cálculo Diferencial e Integral y Funciones de Variable Compleja	34,5 $(32 \leq x_1 \leq 37)$
Álgebra Lineal y Geometría	16,5 $(14 \leq x_2 \leq 19)$
Estructuras algebraicas	13,5 $(11 \leq x_3 \leq 16)$
Topología y Geometría Diferencial	15 $(12{,}5 \leq x_4 \leq 17{,}5)$
Probabilidad y Estadística	15 $(12{,}5 \leq x_5 \leq 17{,}5)$
Ecuaciones Diferenciales	12 $(9{,}5 \leq x_6 \leq 14{,}5)$
Métodos Numéricos e Informática	19,5 $(17 \leq x_7 \leq 22)$
Matemática discreta y Optimización	12 $(9{,}5 \leq x_8 \leq 14{,}5)$
Modelización	6 $(3{,}5 \leq x_9 \leq 8{,}5)$
$144 \leq \text{TOTAL}= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 150$	
Troncalidad: 144 créditos europeos	
Margen: 6 créditos sin superar el extremo superior del intervalo	

Podemos observar que el tema que nos compete está en el primer bloque de contenidos que en el caso de las tres universidades en las que se sitúa nuestro estudio se desarrolla bajo la denominación que aparece en la Tabla 1.2 y con los créditos correspondientes en cada caso y su situación temporal dentro del plan. Las asignaturas en los tres casos se imparten durante el primer año del grado:

Tabla 1.2 Denominación de la asignatura con contenidos del cálculo integral.

Denominación de la asignatura			
Universidad de Valladolid	Cálculo Infinitesimal	12 ECTS	Anual
Universidad Autónoma de Madrid	Cálculo I	9 ECTS	Semestral
Universidad de Salamanca	Análisis Matemático I	6 ECTS	1er Semestre
	Análisis matemático II	6 ECTS	2º Semestre

En el Anexo 1 se incluyen los contenidos completos de cada una de las asignaturas que se señalan en la Tabla 1.1. Sin embargo, con el fin de contextualizar los conocimientos subyacentes a los temas relacionados con el concepto de la Integral Definida, presentamos aquí la tabla de contenidos correspondientes a los cursos de Análisis I y II de la Universidad de Salamanca (USAL), particularmente porque en su plan de estudios se muestra una distribución de los temas muy coherente con las estructuras cognitivas que tratamos en nuestro trabajo, y lo que es más importante, también porque se han considerado estudiantes de esta universidad para realizar la experimentación. A manera de resumen, podemos ver que básicamente en su primer curso de Análisis se trabajan los procesos infinitos y en el segundo la Integral Definida como muestran las tablas 1.3 y 1.4.

Tabla 1.3 Contenidos de la asignatura Análisis Matemático I de la USAL.

Análisis Matemático I	
Contenidos teóricos	
Tema 1	Sucesiones de números racionales. Definición de los números reales mediante sucesiones de Cauchy en$\mathbb{Q}$. Estructura de anillo en $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ como subanillo de $\mathbb{R}$. Números reales positivos y números reales negativos. $\mathbb{R}$ como cuerpo ordenado. Cortaduras en $\mathbb{R}$. Existencia del supremo y del ínfimo de un conjunto acotado de números reales. Forma decimal de un número real. Sucesiones no convergentes. Subsucesiones. Límites superior e inferior de una sucesión acotada.
Tema 2	Igualdad y desigualdad de cardinales. Teorema de Cantor-Bernstein. Desigualdad entre el cardinal de un conjunto y el cardinal de su familia de subconjuntos. Conjuntos numerables. Subconjuntos de un conjunto numerable. Numerabilidad de Q. No numerabilidad de$\mathbb{R}$.

	Análisis Matemático I
Tema 3	Distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}$. Entornos de un punto. Subconjuntos abiertos y subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Puntos de acumulación. Caracterización de los subconjuntos cerrados. Interior, exterior y frontera de un conjunto. Espacios métricos. Generalización para espacios métricos de los conceptos de subconjunto abierto, subconjunto cerrado, etc., y de las propiedades fundamentales ya estudiadas en el caso particular de $\mathbb{R}$. Sucesiones en un espacio métrico. Completitud. Subconjuntos compactos de un espacio métrico. Caracterización de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, e idea sobre la generalización para $\mathbb{R}_n$. Subconjuntos conexos de un espacio métrico. Caracterización de los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$. Límite en un punto de una aplicación entre espacios métricos. Aplicaciones continuas. Condiciones equivalentes a la continuidad. Imágenes de conjuntos compactos y conjuntos conexos por las aplicaciones continuas. Generalizaciones de los clásicos teoremas de Weierstrass y Bolzano. Continuidad uniforme. Teorema de Heine.
Tema 4	Funciones reales de una variable real. Límite funcional. Límites laterales. Continuidad. Homeomorfismos entre intervalos cerrados. Derivada en un punto. Derivadas laterales. Interpretación geométrica de la derivada. Función derivada. Derivadas de orden superior. Idea sobre la derivación parcial de funciones de dos o más variables. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos locales. Teorema de Rolle. Teorema de Lagrange o de los incrementos finitos. Teorema de Cauchy o del valor medio. Regla de L'Hopital. Fórmula de Taylor. Propiedades de los desarrollos de Taylor. Formas del resto del desarrollo de Taylor. Concavidad. Convexidad. Puntos de inflexión. Aplicación de la fórmula de Taylor al estudio local de una función.

Contenidos prácticos

Números reales. Principio de Inducción. Intervalos. Sumatorios. Valor absoluto. Supremo, ínfimo, máximo y mínimo.
Números complejos. Operaciones elementales: suma, producto, cociente. Forma polar. Fórmula de Moivre. Logaritmos y raíces. Resolución de ecuaciones.
Sucesiones de números reales. Convergencia. Indeterminaciones. Cálculo efectivo de límites: infinitésimos equivalentes y criterio de Stolz. Sucesiones recurrentes.
Límites y continuidad. Conjuntos abiertos y cerrados. Puntos de acumulación. Cierre e interior de un conjunto. Frontera. Cálculo efectivo de límites: infinitésimos equivalentes. Estudio de la continuidad de funciones. Aplicación de los teoremas fundamentales.
Cálculo diferencial. Derivada en un punto. Aplicación de las reglas de derivación para el cálculo efectivo de derivadas de funciones y de sus inversas. Aplicación de los teoremas de Rolle y del valor medio. Regla de L'Hôpital. Fórmula de Taylor. Cálculo de límites mediante desarrollos limitados. Crecimiento y decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Representación aproximada de funciones. Problemas de optimización mediante la aplicación de la derivada.

Tabla 1.4 Contenidos de Análisis Matemático II de la USAL.

Análisis Matemático II (1/2)

Contenidos teóricos

Tema 1	Primitivas de una función dada. Integral indefinida. Método del cambio de variable para el cálculo de primitivas. Integración por partes. Integración de funciones racionales. Integración de funciones trigonométricas. Otros tipos de integrales reducibles a integrales de funciones racionales.
Tema 2	Particiones de un intervalo cerrado. Sumas de Riemann de una función acotada. Aumento de la proximidad entre las sumas de Riemann cuando se sustituye una partición por otra más fina. Integrales superior e inferior. Integral de Riemann. Idea sobre la generalización a funciones de dos o más variables. Criterio de integrabilidad. Integrabilidad de las funciones continúas. Convergencia de las sumas de Darboux de una función continúa al valor de su integral. Linealidad de la integral. Subdivisión del intervalo de integración. Teorema del valor medio. Paso al límite bajo el signo integral. Continuidad y derivabilidad de funciones definidas por una integral dependiente de un parámetro. La integral de Riemann de una función continúa como función de su límite superior de integración. Regla de Barrow. Cambio de variable e integración por partes para la integral definida. Integrales impropias.
Tema 3	Cálculo de áreas de figuras planas; cálculo en coordenadas polares. Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Áreas laterales de sólidos de revolución. Cálculo de longitudes de curvas planas; cálculo en coordenadas polares. Idea sobre la posibilidad de generalizar la derivación y la integración para las funciones continuas en un intervalo cerrado con valores en$\mathbb{R}^n$, para su aplicación al cálculo de la longitud de una curva rectificable en $\mathbb{R}^n$.

Análisis Matemático II (2/2)

Contenidos prácticos

Cálculo de primitivas: métodos de cálculo. Integrales inmediatas. Cambio de variable Integración por partes. Integrales de funciones racionales, trigonométricas e hiperbólicas. Integrales de funciones irracionales. Métodos de recurrencia.

Integral de Riemann. Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo integral al cálculo de límites y extremos relativos: relación con el cálculo diferencial. Aplicaciones geométricas del cálculo integral: áreas, volúmenes y longitudes. Aplicaciones físicas: masa, centro de gravedad.

Integrales impropias. Criterios de convergencia: criterios de comparación directa y de comparación por paso al límite. Convergencia absoluta. Criterio de Dirichlet.
Series de números reales. Criterios de convergencia: criterios de comparación directa, del cociente, de la raíz, de Raabe, del logaritmo y de condensación. Convergencia absoluta. Criterio de Leibnitz. Sucesiones y series de funciones. Convergencia uniforme y puntual de una sucesión de funciones. Continuidad, derivabilidad e integrabilidad del límite puntual. Criterios de convergencia de series de funciones: criterio de Dirichlet. Continuidad, derivabilidad e integrabilidad de la función suma. Series de potencias. Cálculo del radio de convergencia.

Métodos de enseñanza y evaluación

En las universidades españolas, en general, la mayoría de asignaturas del grado de Matemáticas se imparten mediante clases magistrales (que incluyen teoría y resolución de problemas por parte del profesor). Además la presentación de los trabajos que se dejan a los estudiantes tiende a ser escrita.

Aunque hay bastante variedad en los detalles, la evaluación suele tener dos componentes diferenciadas, la evaluación continua y la realización de exámenes escritos, con una ponderación que contempla particularidades propias tanto de la institución como del profesor ya que existen múltiples maneras en las que se pueden combinar los trabajos dirigidos, los exámenes parciales y los finales para obtener una nota de evaluación continua. En el espíritu de los ECTS, cualquier forma de evaluación continua debe animar a los estudiantes a distribuir su trabajo equilibradamente a lo largo de todo el semestre con vistas a mejorar sus resultados.

Formación inicial del profesor de Matemáticas de enseñanza secundaria

El modelo que está actualmente en vigor en España para la formación inicial y la acreditación de futuros profesores de Matemáticas en secundaria pasa por la obtención de un título de Grado Universitario y del título de Máster: Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. Sin embargo en el Libro Blanco del Título de grado en Matemáticas de la ANECA señalan la pertinencia de incorporar aspectos que aún no se han implementado en el sistema español y que han mostrado ser eficaces en otros modelos (finés, sueco, francés, alemán):

- Integrar dentro del Grado en Matemáticas algunas materias de formación didáctica específica en matemáticas, así como algunas materias de "Matemáticas elementales desde un punto de vista superior".

- Sin excluir a priori a graduados en otros campos, sería importante garantizar que todos los Profesores de Matemáticas en Secundaria tengan suficientes conocimientos de Matemáticas. Un requisito razonable sería que conociesen los contenidos formativos comunes del Grado en Matemáticas.

Estos aspectos a nuestro modo de ver, desde nuestra experiencia como investigadores y docentes son más que pertinentes y necesarios para la consecución de una estrategia colectiva que permita ayudar tanto a profesores como estudiantes a superar las dificultades inherentes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Definición de la integral definida

El desarrollo riguroso de la teoría de la integración se debe a la contribución de personajes como Dirichlet o Cauchy, y especialmente, a la de Riemann, cuyo trabajo incluye los anteriores.

La primera definición moderna de integral basada en el concepto de límite, aparece en las *Lecciones sobre el cálculo infinitesimal* de 1823 (Cauchy, 1821). Estas lecciones se editaron a partir de algunos cursos dictados por Augustin-Louis Cauchy en la Escuela Politécnica de París. Cauchy trabajó con funciones continuas. Dada la importancia de las series de Fourier, cuyos coeficientes se daban en términos de integrales, se hizo necesario definir una integral para funciones más generales. El primero en dar una definición fue Riemann, y ésta se generalizaba a funciones con un número finito de discontinuidades.

A continuación daremos las distintas definiciones y teoremas relacionados con el cálculo integral para más adelante hacer mención del tratamiento curricular en distintos libros de texto.

El orden en que presentamos la integral definida es coherente con su desarrollo histórico. Primero enunciamos la integral de Riemann, luego la integral definida por Darboux, a continuación enunciamos el teorema de equivalencia entre las dos integrales y culminamos el epígrafe exponiendo la definición a través de las funciones escalonadas.

Definición 1. Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Se llama *partición* de $[a,b]$ a todo conjunto:

$$P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\} \ ,$$

donde $x_{i-1} < x_i$, $i = 1,2, \dots ,n$. Los intervalos $[x_{i-1}\,, x_i]$ con $i = 1,2, \dots ,n$ son los *subintervalos* de la partición, y su *amplitud* se define como $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Se le llama *diámetro* de la partición al número:

$$\|P\| = \max\{\Delta x_i : i = 1,2, \dots, n\}.$$

Denotaremos por "$\mathcal{P}([a,b])$" el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

Definición 2. Sean P y Q dos particiones del intervalo $[a,b]$. Se dice que P es más fina que Q si $P \supset Q$ es decir si P se puede obtener añadiendo puntos a Q (se denota $P > Q$).

Dadas dos particiones arbitrarias P y Q, la partición $P \cup Q$ se denomina *refinamiento común* a ambas.

Integral de Riemann

Definición 3. Sea f una función real definida y acotada en $[a,b]$. Dada una partición $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$, de [a,b], y elegido un punto ξ_i en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2, \dots ,n$, el conjunto $\mathrm{T} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ se denomina *conjunto de puntos intermedios asociado a*P, y al punto intermedio $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ se le denomina etiqueta del i −ésimo subintervalo.

Denotaremos por "$\mathcal{T}(P)$" la familia de los conjuntos de puntos intermedios o etiquetas asociados a la partición P.

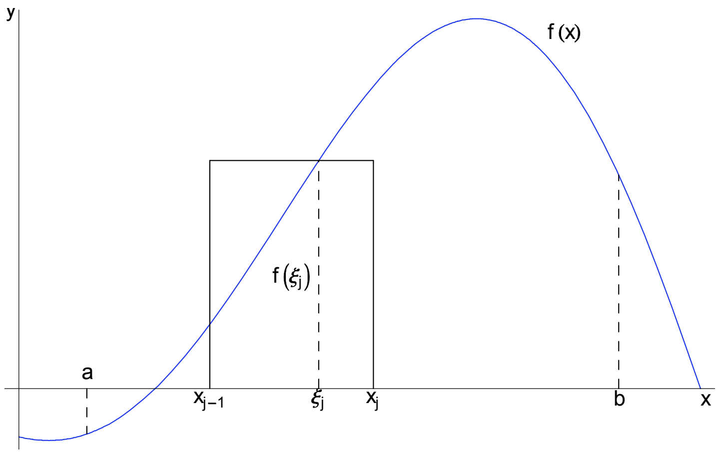


Figura 1.33 Área del $\boldsymbol{j}$-ésimo rectángulo.

Si $T \in \mathcal{T}(P)$ se llama suma de Riemann asociada a f, P y T al número:

$$\sigma(f, P, T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,.$$

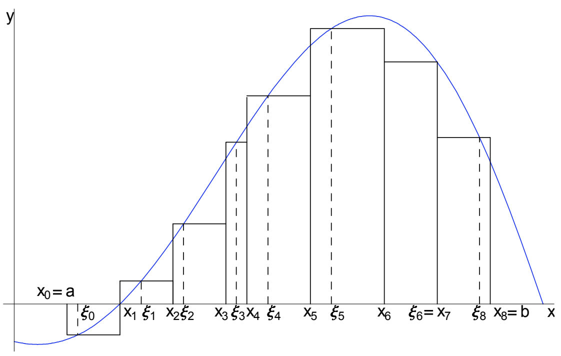


Figura 1.34 Partición heterogénea.$\boldsymbol{n} = \mathbf{8}$.

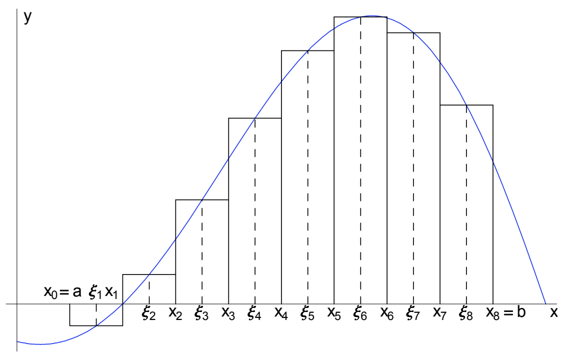


Figura 1.35 Partición equidistribuida.$\boldsymbol{n} = \mathbf{8}$.

Teorema 1. Sea f una función real definida y acotada en $[a, b]$. Son equivalentes:

i) f es integrable en $[a, b]$.

ii) Existe un número real $I(f)$ que verifica la siguiente propiedad: "para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para toda partición P de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$ y para cada $T \in \mathcal{T}(P)$ se tiene que:

$$|I(f) - \sigma(f,P,T)| < \varepsilon" .$$

Si se verifica alguna de las dos condiciones anteriores, entonces se tiene,

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Hay quienes resumen el resultado de la anterior definición que "la integral es el límite de las sumas de Riemann cuando el diámetro de la partición tiende a cero".

Si se denota por $\mathcal{R}([a,b])$, a la clase de funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$, es bien conocido que las funciones escalonadas, las monótonas y las continuas sobre un intervalo $[a,b]$ pertenecen a $\mathcal{R}([a,b])$.

La figura que mostramos a continuación nos permite visualizar una aproximación al área bajo una curva $y = f(x)$, con $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a,b]$ a través de las sumas de Riemann $\sigma(P,f,T)$ en $[a,b]$ tomando como etiquetas el conjunto de puntos medios de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, es decir $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, y con una partición equidistribuida de norma $\|P\| = \frac{b-a}{n}$, con $n = 7$.

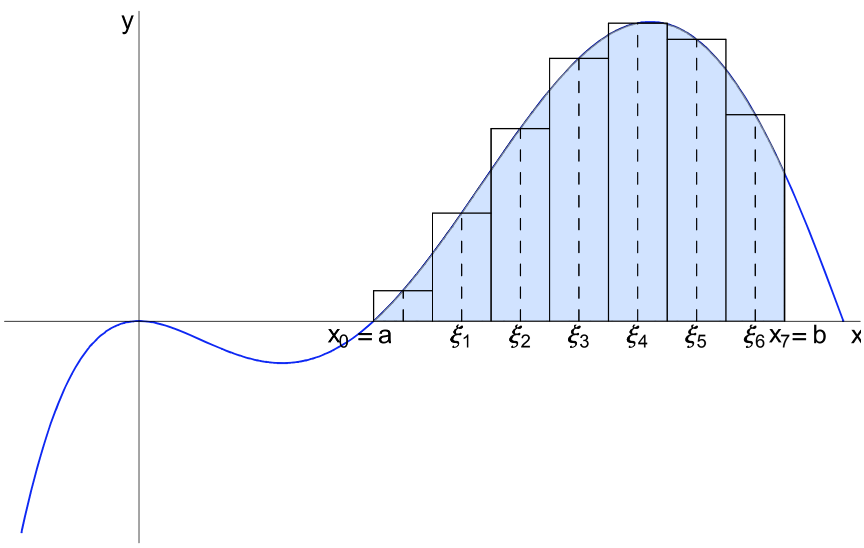


Figura 1.36 Aproximación al área por sumas de Riemann con $f \geq 0$.

Teorema 2. (Criterio de Cauchy). Sea f una función real definida y acotada en $[a,b]$. Son equivalentes:

i) f es Riemann integrable en $[a,b]$.
ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si P y Q son particiones de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$ y $\|Q\| < \delta$ entonces $\left|\sigma(f,P',T_P) - \sigma(f,Q',T_Q)\right| < \varepsilon$, cualesquiera que sean las particiones $P' > P$ y $Q' > Q$.

Corolario 1. Sea f una función real definida y acotada en $[a,b]$, y sea $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de [a,b] con $\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$ y $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de conjuntos de puntos intermedios asociados a las particiones $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sigma(f,P_k,T_k)\,.$$

Procesos infinitos en la integral de Riemann

La construcción de la integral de Riemann involucra un conjunto infinito de posibles infinitesimales ($\varepsilon > 0$) cuya potencia es la del continuo, y el proceso infinito con el que nos encontramos es con el del paso al límite, que incluye el *'clasificar'* de entre las infinitas P particiones posibles del intervalo $[a,b]$, aquellas que satisfacen que su respectivo diámetro $\|P\|$ es menor que un $\delta > 0$, otro infinitesimal que depende del primero. En efecto, aquí seguimos teniendo en cuenta las infinitas particiones que satisfacen esta condición $\|P\| < \delta$. En segundo lugar, se debe satisfacer que para cualquier colección de etiquetas $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ relacionadas con una partición fija, de las particiones 'elegidas', se debe satisfacer la desigualdad $|I(f) - \sigma(f,P,T)| < \varepsilon$, esto es, la distancia de la suma de Riemann (de cada una de las (infinitas) particiones y para cualquier colección de sus correspondientes etiquetas), al valor de la integral (si existe) puede hacerse *tan pequeña como sea* *preciso.*Veamos también, por otra parte, que la medida de finura de una partición está dada por el diámetro de la partición y no depende de la elección de las etiquetas, puesto que $\|P\| < \delta$, se debe cumpir para cualquier colección de etiquetas que se elija dada una partición P del intervalo. Una debilidad de esta definición de Riemann, es precisamente que la elección de las etiquetas es arbitraria.

Por otra parte, podemos observar que la $\delta > 0$ que acota la norma de la partición es constante, en consecuencia los intervalos de partición no tienen en general una longitud adecuada. Un ejemplo de ello, se puede evidenciar en la función de Dirichlet, en donde se esperaría poder asignar a cada número racional r_n, un intervalo de longitud a lo más $\frac{1}{2^n}$ en cualquier partición, ya que de esta manera, las sumas de Riemann serían arbitrariamente pequeñas.

La integral de Riemann se ha construido contemplando en esencia dos aspectos que la determinan: por un lado el geométrico, que en última instancia, es en el que se fundamenta el principio de exhaución, y por otra parte el numérico, el de la convergencia de sumas infinitas y sus límites. Límites que como podemos ver, aún sabiendo que la función es integrable en un intervalo compacto, no se tiene necesariamente conocimiento del valor de esta integral, que es el valor de un límite. Esta definición de integral definida y el paso final la confiere un carácter estático, pero la acotación menorsupone una infinitud.

Integral de Darboux

Definición 4. Sea f una función real definida y acotada en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Dada una partición P de $[a, b]$, $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$, para $i = 1,2, \dots, n$ se definen los números reales:

$$m_i(f, P) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad M_i(f, P) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Cuando no haya lugar a confusión escribiremos simplemente m_i y M_i en lugar de $m_i(f, P)$ y $M_i(f, P)$ respectivamente.

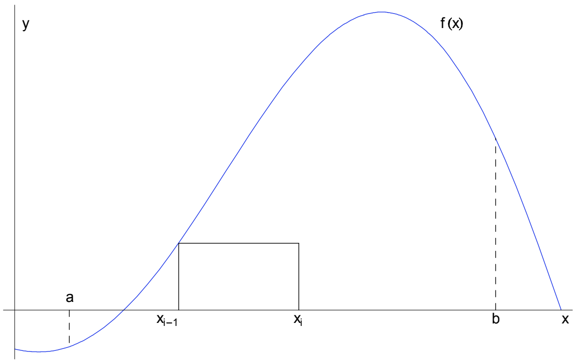


Figura 1.37Área inferior en el$\boldsymbol{i}$-ésimo subintervalo.

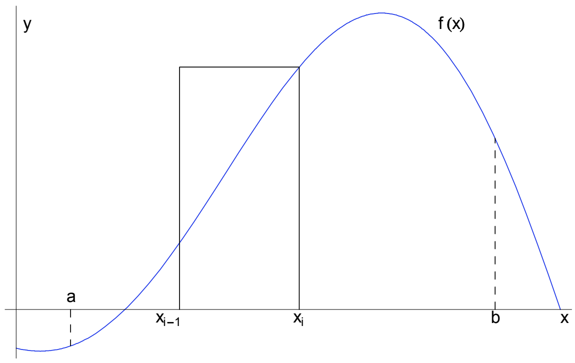


Figura 1.38 Área superior en el$\boldsymbol{i}$-ésimo subintervalo.

Se llama *suma inferior de Darboux* asociada a f y P al valor:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

y *suma superior de Darboux*asociada a f y P al valor:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \ .$$

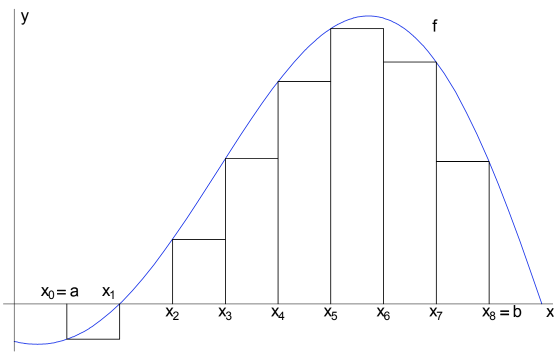


Figura 1.39 Suma inferior de $\boldsymbol{f}$en$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$,$\boldsymbol{n} = \mathbf{8}$.

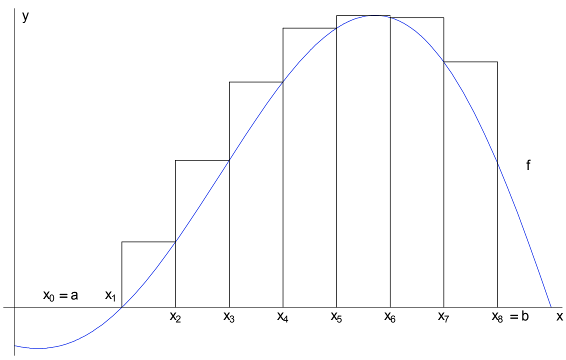


Figura 1.40 Suma superior de $\boldsymbol{f}$ en $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\boldsymbol{n} = \mathbf{8}$.

Definición 5. Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se define *la integral superior* de f en $[a,b]$ como:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,P): P \in \mathcal{P}([a,b])\},$$

y la *integral inferior* de f en $[a,b]$ como:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{S(f,P): P \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

Definición 6. Una función real f, definida y acotada en $[a,b]$, es *integrable en el sentido de Darboux* o simplemente *integrable Darboux* en $[a,b]$ si:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

Y en este caso, al valor común de ambas integrales se le denomina integral de f entre a y b , y se le representa por:

$$\int_a^b f \text{ o } \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

Si se denota por $\mathcal{D}([a,b])$, a la clase de funciones Darboux integrables sobre $[a,b]$, es bien conocido que las funciones escalonadas, las monótonas y las continuas sobre un intervalo $[a,b]$ pertenecen a $\mathcal{D}([a,b])$.

Teorema 3. Teorema de caracterización. Sea f una función real definida y acotada en $[a,b]$. Son equivalentes:

i) f es Darboux integrable en $[a,b]$.
ii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Teorema 4. Sea f una función real definida y acotada en $[a,b]$. Son equivalentes:

i) f es Darboux integrable en $[a,b]$.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para toda partición P de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$ se tiene que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Corolario 2. Sea f una función real definida y acotada en $[a,b]$, y sea $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de [a,b] con $\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$. Son equivalentes:

i) f es Darboux integrable en $[a,b]$.

ii) $\lim_{k\to\infty} |S(f,P_k) - s(f,P_k)| = 0$.

Además en este caso se verifica que:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S(f,P_k) = \lim_{k\to\infty} s(f,P_k)\,.$$

Lema 1. En las condiciones de las definiciones anteriores se tiene que:

i) Para cada $T \in \mathcal{T}(P)$, $s(f,P) \leq \sigma(f,P,T) \leq S(f,P)$.

ii) $s(f,P) = \inf\{\sigma(f,P,T) : T \in \mathcal{T}(P)\}$.

iii) $S(f,P) = \sup\{\sigma(f,P,T) : T \in \mathcal{T}(P)\}$.

Procesos infinitos en la integral de Darboux

Como es sabido, la integral de Darboux es una variante de la integral de Stieltjes[10] y, aunque se cite con la connotación de Riemann (Rudin, 1980), hemos de resaltar que la integral a la que se refiere Rudin es la de Darboux.

En la definición de Darboux vemos que la integral depende esencialmente de las sumas superiores e inferiores, que en la práctica son difíciles de obtener si no se cuenta con software adecuado para minimizar las labores algorítmicas propias de este proceso[11] y, por ende, poco útiles. Luego de calcular en cada una de las posibles infinitas particiones sus correspondientes sumas superiores e inferiores, que,

[10] Véase Rudin(1980, p. 131).

[11] De hecho ya existen bastantes aplicaciones especialmente diseñadas para aproximar estas sumas en entornos muy amigables como Geogebra, Cabri, Mathematica.

de hecho, también resultan ser dos sucesiones infinitas de números reales, viene el proceso infinito de 'comparación' para hallar respectivamente el ínfimo y el supremo de estas dos sucesiones de sumas parciales de números. Aunque en la definición, en última instancia, lo que se debe verificar es que coincidan los valores extremos de las sumas, la virtud que tiene es traer consigo el valor de la integral y no es necesario comparar los valores de estas sumas con el valor de la integral que, por otra parte, es desconocido. Aunque como decíamos antes, es complicado en general efectuar estos cálculos en general.

Al igual que en la integral de Riemann, existen infinitas particiones, y a diferencia de ella, pese a que aquí las 'etiquetas' ya están determinadas por M_i y m_i de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, vemos que son dos por cada subintervalo y no una como en el caso de las sumas de Riemann, es decir, se trabaja con dos sumas y no con una, la superior $S(f, P)$ y la inferior $s(f, P)$. Finalmente, para la integral de Darboux lo que se debe conseguir es una partición para que los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, tengan una longitud adecuada que, permita controlar cada una de estas sumas, puesto que ese es el otro factor del cual dependen estas sumas de Darboux.

Podemos observar que en el teorema 3 de caracterización se da un proceso infinito inherente al paso al límite, y aquí, lo que se reduce (a uno) es el número de particiones que están en escena; el corolario 1 ofrece un modo (teórico al menos) de hallar la integral en el que ésta resulta ser el límite de las sumas de Darboux (inferiores y superiores) cuando el diámetro de la partición tiende a cero, también recordemos en esta parte, que el proceso infinito ligado a la sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, consiste en conseguir que la distancia de $S(f, P_n)$ y $s(f, P_n)$ al valor de la integral pueda hacerse *'tan pequeña como sea preciso'*, con tal de tomar n suficientemente grande (este proceso como hemos mencionado anteriormente, es característico del método de exhaución).

Podemos apreciar que tanto en la integral de Riemann como en la de Darboux, a diferencia de los antiguos, reposa el concepto de límite el cual, permite formalizar los procesos infinitos implícitos en el método de exhaución y ambas igualmente empiezan estableciendo una partición.

Podemos observar que el **Lema 1**es en esencia el teorema de equivalencia entre las integrales de Darboux y Riemann, es decir, demostrado el lema poco faltaría para demostrar el teorema que garantiza la equivalencia entre las dos integrales y, a partir de él, ya se podrá hablar indiscriminadamente de la integral definida y se entenderá que se refiere ya sea a la de Darboux o a la de Riemann como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 5. Si f es acotada sobre $[a,b]$, entonces f es integrable en el sentido de Darboux en $[a,b]$ si y sólo si también es integrable Riemann en el mismo intervalo, y las dos integrales coinciden.

Los *corolarios 1* y *2* en sus respectivos contextos (sumas de Riemann o sumas de Darboux) nos reducen la integral al límite de una sucesión de sumas y dan una vía para hallar el valor de la integral.

Cabe anotar igualmente que la construcción de la integral de Riemann, a diferencia de la de Darboux, se puede generalizar para funciones que toman valores en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}$, claro está, sustituyéndose en este caso el valor absoluto por la norma del vector o módulo del número complejo según sea el caso.

Definición de la integral vía funciones escalonadas

Definición 7. (Función escalonada). Una función s definida en $[a,b]$ es escalonada si existe una partición P de $[a,b]$ tal que s es constante en cada subintervalo de P.

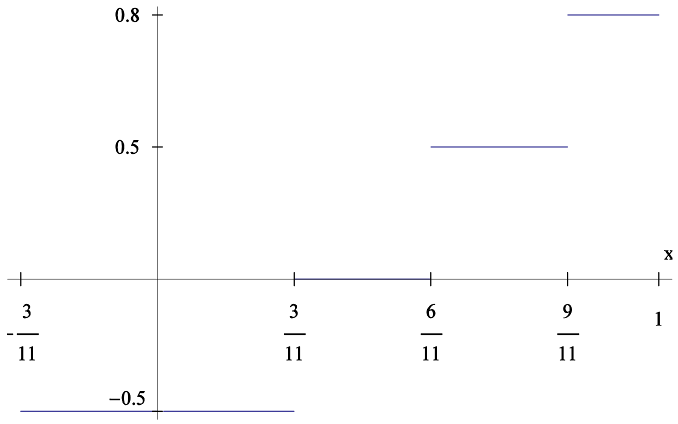


Figura 1.41Función escalonada $s(x)$en el intervalo$[-3/11, 1]$.

La función escalonada de la figura anterior acepta la siguiente representación:

$$s(x) = -\frac{1}{2}\chi_{\left[-\frac{3}{11},\frac{3}{11}\right)}(x) + 0\chi_{\left[\frac{3}{11},\frac{6}{11}\right)}(x) + \frac{1}{2}\chi_{\left[\frac{6}{11},\frac{9}{11}\right)}(x) + \frac{4}{5}\chi_{\left[\frac{9}{11},1\right]}(x)$$

En donde $\chi_{[\alpha,\beta)}$ es la función característica del intervalo $[\alpha, \beta)$ definida de la siguiente forma.

$$\chi_{[\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha,\beta) \\ 0, & x \notin [\alpha,\beta) \end{cases}$$

Recordemos que la representación algebraica de una función escalonada no es única. Por ejemplo para la función s que dimos anteriormente, otra representación puede ser:

$$s(x) = -\frac{1}{2}\chi_{\left[-\frac{3}{11},\frac{3}{11}\right)}(x) + 0\chi_{\left[\frac{3}{11},\frac{6}{11}\right)}(x) + \frac{1}{2}\chi_{\left[\frac{6}{11},\frac{7}{11}\right)}(x) + \frac{1}{2}\chi_{\left[\frac{7}{11},\frac{9}{11}\right)}(x) + \frac{4}{5}\chi_{\left[\frac{9}{11},1\right]}(x)$$

Si s es una función escalonada definida en $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ la partición de $[a, b]$, tal que s es constante en los subintervalos abiertos de P, y $s_i$el valor constante que toma s en el i −ésimo subintervalo abierto, es decir:

$$s(x) = s_i \qquad \text{si} \qquad x_{i-1} < x < x_i, \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Definición 8. (Integral de funciones escalonadas). La integral de s de a a b, que se designa por el símbolo $\int_a^b s(x)\,dx$, se define mediante la siguiente fórmula:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Definición 9. (Integral vía funciones escalonadas). Sea f una función real definida y acotada en $[a,b]$. Sean s y t funciones escalonadas arbitrarias definidas en $[a,b]$ tales que

$$s(x) \leq f(x) \leq t(x), \text{ para cada } x \text{ en } [a,b]. \qquad (1)$$

Si existe un número I, y sólo uno, tal que

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\,dx \qquad (2)$$

para cada par de funciones escalonadas s y t que verifican(1), entonces este número I se denomina *la integral de* f *en*$[a,b]$ y se denota por el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$. Cuando I existe se dice que f es integrable en $[a,b]$[12].

Teorema 6. Si para cada $\varepsilon > 0$ existen por lo menos un par de funciones escalonadas s y t aproximadoras, tales que

$$0 \leq \int_a^b t(x)\,dx - \int_a^b s(x)\,dx < \varepsilon\,,$$

entonces f es integrable en $[a,b]$.

Procesos infinitos en la integral vía funciones escalonadas

Como en los casos anteriores, aquí los procesos infinitos están asociados a la partición del intervalo y a la variación de épsilon.

[12]Una función acotada dejará de ser integrable si y sólo si hay más de un número I que cumpla (2), (Apostol, 1965, p.71)

Tratamiento de la integral en los libros de texto

Al parecer no hay un consenso general sobre la manera de abordar un primer curso de cálculo. Por una parte hay quienes sostienen que el camino correcto para entender el cálculo es comenzar inicialmente con un estudio completo del sistema de los números reales desarrollándolo concienzudamente de manera lógica y rigurosa. Por otra parte hay quienes insisten en apelar a la intuición y utilizan el cálculo para realizar estudios de tipo técnico en donde prima el aspecto aplicado del cálculo para formar destrezas procedimentales como suele suceder en los estudios propios de ingenieros y físicos. Es decir, el cálculo se utiliza como instrumento para el adiestramiento en sus métodos.

Estas dos formas de enfocar el estudio del cálculo no son excluyentes. La propia historia del cálculo habla de su naturaleza deductiva, su génesis se ubica en problemas físicos y su inmensa belleza y potencial se evidencian en sus diversas aplicaciones. Los libros de texto se decantan por alguna de estas dos tendencias, y, en algunos casos intentan establecer un equilibrio entre las dos.

En general, todos los textos que vamos a señalar tratan los contenidos habituales de la asignatura Análisis Matemático I en el grado de Matemáticas, o en cualquier curso introductorio de Análisis. Particularmente incluimos los libros de consulta que se proponen en las asignaturas de Análisis Matemático o Cálculo Diferencial e Integral en las universidades de Valladolid y Salamanca, y que en general han sido ampliamente divulgados.

El análisis que hemos hecho va encaminado a determinar la manera en que se expone en los distintos libros de texto el concepto de integral definida, en particular, vislumbrar qué tipo de procesos infinitos y en qué sentido se desarrolla: a partir de la definición de Riemann, de la definición de Darboux o en el contexto de funciones escalonadas.

Los libros que hemos escogido son Apostol (1965), de Burgos Román(1994), Escuadra, Rodríguez, & Tocino(1991), Fernández Viña (1986), Fischer (1983), Galindo, Sanz, & Tristán(2003), Larson, Hostetler, Edwards, & López (1988),Linés (1988), Martínez (1964), Riaza & Álvarez (1997), Rudin (1980), Spivak (1991) y Stewart(1999).

La primera categorización que se expone en las tablas 1.5, 1.6, 1.7, corresponde a la clasificación de los libros que preparan el terreno para abordar el concepto de integral, ya sea con base en las sumas de Riemann, sumas de Darboux o funciones escalonadas respectivamente; en este caso (**TR, TD, TE**)corresponde al título de la sección que desarrolla el concepto de integral, y hace referencia a que en el título se entiende que todos los procesos infinitos que subyacen a la definición de la integral se desarrolla en el contexto de las sumas de Riemann, de Darboux o de funciones escalonadas. De igual forma, (**AR, AD, AE**)expone la clasificación de aquellos libros que presentan los antecedentes al concepto de integral definida en el contexto correspondiente a la misma clasificación que hemos mencionado. Por último, el aspecto relacionado con el criterio de integrablilidad (**CR, CD, CE**),especifica que el libroha dado como condiciónde integrabilidad la que aparece en las tablas 1.5, 1.6 o 1.7.

Tabla 1.5 Categoría asociada al concepto de ID en el sentido de Riemann.

	En el sentido de Riemann
TR	Título del capítulo: La integral Definida (o de Rieman).
AR	Los antecedentes del capítulo se presentan con sumas de Riemann.
DR	La definición de la integral es la de Riemann, **Teorema 1**, (p. 68).
CR	El criterio de integrabilidad es el de Cauchy,**Teorema 2**, (p.70).

Tabla 1.6 Categoría asociada al concepto de ID en el sentido de Darboux.

	En el sentido de Darboux
TD	Título del capítulo: La integral Definida (explicita el sentido de Darboux).
AD	Los antecedentes del capítulo se presentan con sumas de Darboux.
DD	La definición de la integral es la de Darboux, **Definición 6** , (p.73).
CD	El criterio de integrabilidad es el del **Teorema 3**, (p.73).

Tabla 1.7 Categoría asociada a la ID en el contexto de funciones escalonadas.

En el contexto de funciones escalonadas	
TE	Título del capítulo: La integral Definida (explicita el uso de escalonadas).
AE	Los antecedentes del capítulo se presentan con funciones escalonadas.
DE	Define la integral vía funciones escalonadas, **Definición 9**, (p.78).
CE	El criterio de integrabilidad es el del **Teorema 6**, (p.78).

Haciendo un recopilatorio de los contenidos de los libros hemos podido 'discriminar' los contenidos, contextualizándolos en alguna de las tres construcciones que hemos mencionado anteriormente, y, teniendo en cuenta las categorizaciones de las tablas 1.5, 1.6, 1.7. Cuando no mencionemos específicamente alguna de ellas, es porque el texto asume la integrabilidad directamente a través de un criterio establecido.

Presentaremos a través de la Tabla 1.8 la forma en que cada texto presenta los contenidos de acuerdo con las especificaciones que hemos marcado anteriormente, según la categorización de las tablas 1.5, 1.6, 1.7.

Tabla 1.8 Presentación de la ID en algunos libros de texto.

Autor	Título	Antecedentes	Definición	Criterio
Apostol (*)	TE	AE	DE	CE
de Burgos	TR	AD	DD	CD
		AR	DR	Teorema 5, p.76
Escuadra	TR	AD	DD	CD
		AR	DR	DR
Fernández (**)	TE	AE	$I = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx$ Fernández (1986, p.241)	No hay
		AR	DR	CD
Fischer	TD	AD	DD	CD
		AR	DR	Teorema 5, p.76
Galindo	TD	AD	DD	CD
		AR	DR	DR
Larson(***)	TR	AD	DR	CD
Linés	TR	AD	DD	CD
Martínez	TR	AR	DR	CD
Riaza	TR	AD	DD	CD
		AR	DR	Teorema 5, p.76
Rudin	TR	AD	DD	CD
Spivak	TD	AD	DD	CD
		AR	DR	CR
Stewart(****)	TR	AR	DR	DD

(*) Apostol en realidad enuncia la condición de Riemann pero en términos de funciones escalonadas.

(**) Fernández Viña, enuncia la integral para funciones regladas[13] no habiendo problema en ello, ya que toda función real reglada definida en un intervalo compacto es acotada[14]. También se debe tener en cuenta que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión cualquiera de funciones escalonadas definidas en $[a,b]$ que converge hacia la función f, y que I denota el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$.

(***) Larson a la hora de presentar tanto la definición como el criterio de integrabilidad, efectúa un proceso inductivo carente de rigor matemático y de coherencia con los antecedentes (cuyo propósito aparente[15] es motivar la definición de la integral de Riemann).

(****) Stewart define la integral solo para funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, y, además trabaja sólo con particiones equidistribuidas. Podemos notar con esto que los antecedentes y presentación va encaminado a explorar el cálculo integral desde el punto de vista aplicado.

Otros textos que se contemplan en la bibliografía básica o en la complementaria recomendada en la asignatura y que no hemos tenido en cuenta a la hora de elaborar la tabla, son de referencia para el aprendizaje de los métodos de integración, refuerzan el trabajo de todo el curso mediante ejercicios varios y concluyen con las aplicaciones del cálculo integral a la resolución de problemas, razón por la cual fueron excluidos de nuestra investigación.

Antes de comenzar la comparativa entre los diversos enfoques con que los libros de texto presentan los procesos infinitos subyacentes al concepto de integral, qui-

[13]Una función real definida en un intervalo compacto $[a,b]$ se dice reglada cuando es el límite uniforme de una sucesión de funciones escalonadas definidas en $[a,b]$, (Fernández Viña, 1986, p.237).

[14]Teorema 10.3.6 (Fernández Viña, 1986, p.239).

[15]En el sentido que aquí no se hace explícita la conexión entre la motivación y la definición y, en este sentido lo que generaría son posibles dificultades en su comprensión.

siéramos mencionar que en aquellos en que se presenta la integral definida en el contexto de Darboux y luego se hace referencia a la integral de Riemann, salvo algunas excepciones (Escuadra et al., 1991; Fischer, 1983; Galindo et al., 2003; Spivak, 1991) no se discrimina de manera explícita el hecho de que la integral de Darboux, con sus respectivas sumas e integrales superiores e inferiores, son fruto de un trabajo independiente al que exhibió Riemann. De hecho, en algunos libros se definen las integrales superiores e inferiores de distinta forma, y, en ninguno de ellos se presenta una prueba de equivalencia entre las dos.

Observemos que en 9 de los 13 libros se ha definido la integral con base en las sumas de Darboux, y de acuerdo con nuestra clasificación, 8 de ellas encajadas completamente en AD, la única definición que no fue consistente con los antecedentes fue la que se dio en el Larson. Esto significa que, en el acercamiento a los procesos infinitos que se presentan en este contexto, se opta por tomar las *etiquetas* fijas, es decir, por establecer en primera instancia los puntos sobre los cuales se definen las sumas (en este caso aquellos en donde se alcanzan los extremos de cada subintervalo de la partición) para puntualizar más el trabajo, tanto en la partición que se elige como en la garantía de que la norma de dicha partición ofrezca control sobre los valores de las sumas. El criterio que se da, ofrece en la mayoría de los casos (8 de 9) una buena conexión con los antecedentes, y, así mismo, coherencia con nuestra categorización. De nuevo insistimos en que en cinco de las referencias que hemos mencionado, se habla de la integral en el sentido de Riemann, sin discriminar ciertamente que se debe dilucidar que en realidad es en el sentido de Darboux, o para mayor comprensión, precisar mediante algún comentario la relación entre las dos.

Por otra parte, nótese que 2 de los 9 textos (Martínez y Stewart) que exhiben los procesos infinitos inherentes a la categoría AR, exponen la definición DR, pero no la correspondiente condición de integrabilidad CR, afín con la categorización. Aunque se definen las sumas de Riemann, se da como definición de integrabilidad el criterio de Cauchy Teorema 2 o un criterio que se puede deducir del Teorema

4(p.70). Es más, en el caso de Martínez, el criterio viene relacionado con sumas de Darboux y no con las de Riemann directamente, es decir que se habla de sumas superiores e inferiores en el contexto de las sumas de Riemann, con lo cual vemos que las deducciones y equivalencias dan un salto que no se justifica con claridad. En cinco de los casos (de Burgos, Fernández, Fischer, Galindo y Riaza) la definición DR coincide con la de nuestra categorización DR, y, aunque el criterio vinculado a la misma en cada caso es el Teorema 5 de equivalencia (p.76), y no el compatible con CD podemos entender y justificar este hecho, puesto que en los tres casos, ya se ha desarrollado un trabajo profuso y coherente de las dos construcciones. Así pues, es bastante razonable no exponer el criterio de Cauchy, puesto que ya está dada la condición de integrabilidad de Riemann. En efecto, con la relación ya determinada, entre las dos integrales se pueden utilizar (o deducir) más ampliamente otros resultados teóricos que ofrecen más criterios como los del Corolario 1 (p.70) y Corolario 2 (p.74). Sobre el texto restante, Spivak, da una buena presentación ya que construye la integral en el contexto de Darboux, y luego construye la de Riemann, aunque a modo de anexo, y, en cada caso se caracteriza de manera coherente con AD y AR, respectivamente. Un caso particular es el de Larson (Larson et al., 1988) que presenta una amplia gama de ejemplos introductorios que compaginan con la categoría AD y da una antesala a la definición de la integral con base en las sumas de Darboux para luego, contradictoriamente definir la integral en el contexto de Riemann DR, luego de dar una definición de suma de Riemann más bien descontextualizada de los antecedentes. De hecho, esto generó cierto aire de incoherencia y falta de rigor en lo que se refiere a los procesos infinitos correspondientes a cada definición.

Son dos, los autores que hacen alusión a la integral en un contexto que se ajusta a los contenidos de AE, que va por la vía de las funciones escalonadas. El primero de ellos, Apostol ofrece una caracterización muy natural de la integral acotando a f por exceso y por defecto a través de funciones escalonadas, brindando una definición de integral, con un estilo muy intuitivo, cómodo, sencillo y, por qué no decirlo, bonito a nuestro modo de ver. La condición de integrabilidad es la misma condición de Riemann delTeorema 4, (p.73), sólo que se presenta en términos de funciones aproximadoras, y, nos garantiza la integrabilidad de la función con el Teorema 6, (p.78). la belleza añadida a este trabajo, la hallamos en la posibilidad de abordar con fluidez cualesquiera de las otras dos construcciones de la integral (AD o AR) como efectivamente se hace en este libro donde, a manera de suplemento al capítulo, se construyen las integrales superiores e inferiores a partir de funciones escalonadas aproximadoras, y se da la condición de integrabilidad a través de la igualdad de las integrales superior e inferior. En el otro caso, Fernández Viña, define la integral para funciones regladas como el límite de una sucesión de números reales, correspondientes a la integral de la respectiva sucesión de funciones escalonadas que converge a f, ya sea por exceso o por defecto. Esto, en efecto, exige un trabajo más exigente en lo que concierne al manejo de conceptos relacionados con la convergencia de sucesiones de funciones, y no sólo de números reales. Por otra parte, para esta definición no se da de forma directa un criterio de caracterización, sino que se presenta la equivalencia con la integral vía sumas de Riemann, pero a través de un criterio que se deduce del Teorema 6, (p.78).

Teniendo en cuenta la información recopilada de la experiencia docente de profesores que han impartido los cursos relacionados con el cálculo integral (información que hemos recogido asistiendo a sus clases, los apuntes de clase y sus aportaciones al desarrollo de los temas relacionados con el tema y el diálogo pedagógico en torno al tema en cuestión), el estudio que realizamos de los procesos infinitos subyacentes al concepto de integral definida inmersos en los libros de texto que examinamos, y nuestra propia experiencia docente, hemos logrado vislumbrar que en los libros en los que se ofrece de una manera coherente, clara, concisa, lógica y rigurosa el concepto de integral definida, y que, en consecuencia, a nuestro modo de ver permiten entender de forma más sencilla el desarrollo de los procesos infinitos propios de su caracterización, son aquellos que inician el tema en sus respectivos contextos a nivel de antecedentes y con la discriminación de cada una de ellas, con la integral de Riemann en el sentido de Darboux, y, luego, definen en términos de sumas de Riemann para después concluir con el tema de equivalencia.

Pese a que esto no coincide con el desarrollo epistemológico de la integral, sí que permite primero manejar por cada partición dos sumas generadas por los extremosm_i y M_i de cada subintervalo, y luego poder ampliar el rango de sumas sobre las que se trabajan, que dependen de un posible conjunto infinito de etiquetas por cada subintervalo. Los seis libros que trabajan en esta dirección son el de Burgos (de Burgos Román, 1994), Escuadra (Escuadra et al., 1991), Fischer (Fischer, 1983), Galindo (Galindo et al., 2003), Riaza (Riaza & Álvarez, 1997) y Spivak (Spivak, 1991), que dan un desarrollo del tema, encajando las dos presentaciones AD y AR (Tabla 1.5 y Tabla 1.6).

Es interesante observar que,después del estudio realizado el concepto de la integral, se desarrolla con coherencia didáctica en un 46% de los textos analizados. En más de un 50% de los libros de texto, se ocupan de los procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida a partir de un solo enfoque (usualmente el de Darboux) y, a la hora de tomar referencias de otros textos, el hecho de que la integral de Darboux tenga una formulación más débil, si el paso de la equivalencia no se facilitan algunos precedentes que las relacionen, el trabajo con los procesos infinitos implicados en cada uno de ellos resulta complicado.

Por último, quisiéramos señalar que el único libro que desarrolla el cálculo integral de acuerdo con su desarrollo epistemológico es el libro de Apostol. La estructura del libro plantea la integración antes que la diferenciación y, posteriormente hace la conexión entre ambas.

A nivel pedagógico nos parece muy adecuada la disposición de los temas que tiene el Apostol ya que define primero la integral para funciones escalonadas, como él mismo lo afirma, "la integral de funciones escalonadas no es más que una suma", así que la teoría de la integración en este caso es muy sencilla y, como valor agregado, el trabajo que pueden realizar los estudiantes con estas sumas les permitirá aprender las propiedades de la integral primero para funciones sencillas como son las escalonadas, podrán adquirir experiencia en la notación de sumación, a la vez que se familiarizan con el simbolismo de la integral. Más adelante la transición a funciones más generales resultará menos difícil y vendrá de una manera más natural y familiar. El tema suplementario a la construcción de la integral vía funciones escalonadas es la definición de las integrales superior e inferior de Darboux, esta conexión es más natural que la que se da del paso de Darboux a Riemann porque los elementos de partida son distintos, salvo la partición del intervalo.

Somos conscientes que las propias condiciones a nivel temporal que se suelen dar en estos cursos no permitirían este desarrollo tan minucioso de la integral y por eso entendemos que se tenga que partir directamente de la integral de Darboux.

En esencia las funciones escalonadas[16] determinan los rectángulos inferiores y superiores de Darboux, pero es posible que sea una complicación añadida para la comprensión del concepto de ID ya que se introduce otro concepto nuevo, el de función escalonada, que en cierto modo es ajeno a la función integrando. Sin embargo, los rectángulos surgen de la propia función y su construcción puede resultar más intuitiva.

[16] Para profundizar en el tema véase (Apostol, 1965).

Capítulo 2. Marco teórico

En este capítulo se considera el estado de la cuestión tras la revisión de la literatura que se ha llevado a cabo. El eje fundamental que establecerá las bases teóricas de la presente investigación es el marco de los actos de comprensión de Sierpińska en el contexto del Pensamiento Matemático Avanzado. Como dimensiones complementarias se tendrán en cuenta las ideas de obstáculo epistemológico, y de descomposición genética que se deriva de la teoría APOE. También se recogen brevemente la filosofía de otros marcos de comprensión dentro de la investigación en educación matemática, que de una u otra forma poseen elementos afines.

2.1 Pensamiento Matemático Avanzado

A principios de la década de los 80 para complementar el grupo previo del PME (*International Group for the Psychology of Mathematics Education*) que trabajaba principalmente sobre el pensamiento matemático elemental, algunos miembros del PME[17]pusieron de manifiesto las falta de atención que existía en este grupo hacia las matemáticas propias del nivel universitario, o que requieren de procesos de pensamiento más complejos[18]. Como resultado se constituyó el grupo de traba-

[17] Principalmente Chiefly GontranErvynck y David Tall.

[18]"quisieron considerar las matemáticas que en la escuela condujeron a las matemáticas universitarias [...] vinculadas al pensamiento matemático" (Tall comunicación personal, citada por Selden & Selden (2005).

jo Pensamiento Matemático Avanzado que se reunió en 1986 para trabajar en el libro de nombre homónimo Tall (1991). Dentro del grupo PME se tenía claro un rango completo de pensamiento matemático a partir de los últimos años de secundaria ya que a partir de este nivel las matemáticas se basan en la definición y la prueba mediante axiomáticas formales, por ello debía incluirse en el *pensamiento matemático avanzado* (PMA).

Del Pensamiento Matemático Elemental al Avanzado

Hay una gran variedad de formas de pensamientos, algunas de ellos viciadas, ya sea porque se generan básicamente a partir de observaciones empíricas para poder justificar argumentos matemáticos, o por el exceso de generalización de las ideas matemáticas como las inferencias comunes que hacen los estudiantes sobre la validez de algún argumento, y otras más sólidas como las soluciones elegantes a problemas o la generalización de ideas matemáticas. Dada la diversidad de formas de pensamiento cabe preguntarse entonces ¿cuál de ellas es la del pensamiento matemático avanzado? El término “avanzado” ¿se refiere a las matemáticas?, ¿al pensamiento?, ¿a ambos? No sólo surgieron estos interrogantes con la llegada del PMA.

Harel & Sowder (2005) en su intento por responder a la pregunta: ¿qué es pensamiento matemático avanzado? Plantearon aún más interrogantes:

> ¿En qué sentido es el “pensamiento matemático” avanzado? ¿“avanzado” implica “efectivo”, “eficiente”, o “elegante”? ¿El pensamiento matemático no avanzado implica carencias o errores? ¿“avanzado” implica que también es elemental? Si esto es así, ¿en qué sentido es elemental el “pensamiento matemático”? Resulta muy difícil caracterizar estas propiedades, incluso comprendiendo intuitivamente su significado y, todavía resulta más complicado construir una taxonomía que diferencial entre las propiedades del pensamiento matemático. (p.33)

La expresión *pensamiento matemático avanzado* suscitó el debate desde el principio. Jean Piaget fue el primero en intentar determinar las características propias de lo que es el pensamiento matemático avanzado (Piaget, 1979) y sitúa el asentamiento del pensamiento formal de un individuo en virtud del momento en que éste sea capaz de razonar de un modo hipotético-deductivo, es decir, que adquiera la capacidad de elaborar hipótesis más allá de los datos concretos, partir de premisas concretas (casos particulares o específicos) y a partir de ellos deduzca conclusiones generales.

Ya en la publicación seminal del PMA, *Advanced Mathematical Thinking,* aparece un artículo Robert & Schwarzenberger (1991), por una parte, señalan la complejidad inherente a la transición entre las matemáticas elementales y las avanzadas, y, por otra, revelan rasgos del pensamiento matemático avanzado:

> [...] los conceptos a menudo implican no sólo una generalización, sino también una abstracción y una formalización [...] El estudiante se ve obligado a absorber de forma rápida conceptos formalizados, que históricamente han evolucionado más lentamente a partir de un agregado de soluciones especiales muchos matemáticos que dieron a problemas especiales [...] Al mismo tiempo, se espera que el estudiante adopte nuevos, y a menudo extraños, estándares de pruebas rigurosas [...] Esta formalización implica abstraer propiedades específicas que se aplican no sólo a los objetos de donde fueron extraídas sino a cualquier objeto que obedezca a esas propiedades. Esto implica la construcción de un nuevo objeto mental que es diferente de los viejos objetos y que seguramente entrará en conflicto con ellos. Esto ocasiona que los estudiantes en su primer año de universidad se enfrenten a un largo periodo de confusión, lo cual es una barrera importante para el pensamiento matemático avanzado formal. A su vez, da lugar a una discontinuidad fundamental en la difícil transición desde las matemáticas elementales a las matemáticas avanzadas. (p.128)

Tall (1991) caracterizó el pensamiento matemático avanzado como una transición significativa en la que “se pasa de *describir* a *definir* y de *convencer* a *demostrar-*

de una manera lógica a partir de esas definiciones" (Tall, 1991, p.20). Esta transición requiere de una reconstrucción cognitiva que se puede ver como una lucha inicial de los estudiantes con las abstracciones formales durante su primer año de universidad. Es la transición de la coherencia de las matemáticas elementales a la consecuencia de las matemáticas avanzadas, basadas en entidades abstractas que el individuo debe construir a través de las deducciones de las definiciones formales; podemos ver, que el pensamiento matemático avanzado difiere del elemental en que, básicamente, se requiere una reconstrucción cognitiva para pasar de la descripción del concepto a la definición y de la convicción a la prueba lógica basada en la definición[19].

> El punto de partida del crecimiento cognitivo desde el pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado son las "*percepciones de*", y las "*acciones sobre*", objetos del entorno, construidos por medio de dos desarrollos paralelos —uno visual-espacial al verbal-deductivo, el otro mediantes encapsulaciones sucesivas proceso-a-concepto- utilizando símbolos manipulables— que conducen a la utilización de toda una estructura para inspirar el pensamiento creativo basado en objetos formalmente definidos y pruebas sistemáticas.
>
> (Tall, 1995, p.3)

Tall considera además, que el pensamiento matemático avanzado debe empezar en la escuela primaria y no se debe esperar hasta culminar la secundaria.

En concordancia, con esta idea, Harel & Sowder (2005) afirman que el pensamiento matemático avanzado usualmente se concibe como el pensamiento en matemáticas avanzadas, y que sin embargo podría verse de forma más apropiada como el pensamiento avanzado en matemáticas, es decir, visualizarlo como un punto de

[19] "It may be hypothesized that mathematical thinking in every level can include the phases entry, attack and review, including level of mathematical justification, but that elementary mathematical thinking lacks the process of formal abstraction and does not include the "final precising" phase in its most formal guise".(Tall, 1991, p.20).

partida potencial en la educación primaria. Para ellos, es de vital importancia caracterizar las cualidades del pensamiento matemático para traducirlas en objetivos cognitivos esenciales, es decir, objetivos que posicionen el contenido de las matemáticas elementales para la consecución de un posterior aprendizaje del contenido matemático avanzado.

Por su parte, Edwards et al. (2005) proponen una definición de pensamiento matemático avanzado: "Es el pensamiento que requiere razonamiento riguroso y deductivo de las nociones matemáticas y no es completamente accesible a través de los cinco sentidos". (p.1). Esta definición no está conectada necesariamente a un tipo particular de experiencia educativa; ni está supeditado a un nivel particular de las matemáticas. El pensamiento es avanzado si depende básicamente del razonamiento deductivo riguroso y no de la percepción sensorial. El pensamiento matemático ejemplar se puede dar acualquier edad y a cualquier nivel de matemáticas, sin embargo, el descriptor que lo particulariza como pensamiento matemático avanzado aparece solamente bajo ciertas condiciones que involucran el razonamiento riguroso y deductivo de objetos fuera del alcance de los cinco sentidos. Según los propios autores, su definición puede ayudar a que los educadores direccionen sus esfuerzos en elperiodo de transición hacia lo abstracto y teórico.Un ejemplo que dan es el del concepto de límite en el Análisis Real. Mientras que el límite es una noción cuya total comprensión requiere del razonamiento abstracto y riguroso de un proceso, no podríamos afirmar que todos los pensamientos relacionados con los límites son avanzados. En los cursos de cálculo los estudiantes a menudo necesitan evaluar límites, sin embargo esta actividad no requiere necesariamente el pensamiento matemático avanzado, puesto querecurrentemente todo se reduce a una manipulación simbólica automatizada.

El PMA reside en un proceso continuo de pensamiento matemático que parece trascender, pero no ignora, las experiencias de procedimiento o intuiciones del pensamiento matemático elemental. Ambas condiciones −el razonamiento deductivo y riguroso y la inaccesibilidad de las nociones matemáticas a nuestros sentidos – son para que un pensamiento sea considerado como matemático avanzado.

Como podemos observar no existe aún una demarcación evidente de la transición entre el pensamiento matemático elemental y pensamiento matemático avanzado, sin embargo lo que es evidente a los ojos de las aserciones es el consenso general sobre la dificultad no sólo en la propia transición sino en su delimitación (Azcárate, Camacho, & Sierra, 1999; B. Edwards et al., 2005; Zaskis & Applebaum, 2007).

Caracterización del Pensamiento Matemático Avanzado

Ya en los párrafos anteriores se vislumbraron algunos rasgos propios del pensamiento matemático avanzado.Al igual que algunos de los autores que hemos mencionado en el anterior epígrafe, Azcárate y Camacho-Machín (2003) destacan el papel de la abstracción en el desarrollo del PMA:

> Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar. (p.2)

Según Harel & Sowder (2005) la definición del pensamiento matemático implica considerar los *obstáculos epistemológicos* y *didácticos*[20]para una forma particular de pensar. Para tener una visión global más comprensible del pensamiento matemático y para poder examinar las consecuencias de las prácticas educativas debe haber interacción entre las formas de pensar y las formas de entender. Para estos autores el PMA se basa en una importante distinción entre *formas de comprender* y *formas de pensar*. Señalan concretamente que "el pensamiento matemático es avanzado, si su desarrollo involucra al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico" (p.35). Por tanto, el nivel de adquisición de un conocimiento se mide en términos de obstáculos superados.

Para Gray, Pinto, Pitta, & Tall (1999) el pensamiento matemático es avanzado si el individuo crea en su mente nuevos mundos mentales que pueden ser completamente hipotéticos. Los matemáticos reflexionan sobre sus intuiciones visuales y simbólicas para sugerir situaciones útiles a estudiar y luego para especificar criterios necesarios para que la situación requerida se cumpla. Se puede hacer formulando definiciones de conceptos matemáticos como una lista de axiomas de una estructura dada para después desarrollar otras propiedades de esa estructura a través de las definiciones inicialmente dadas. La idea de dar una definición verbal como una lista de criterios y construir el concepto desde la definición es inversa a la mayor parte del desarrollo en las matemáticas elementales en donde los objetos son pensados como objetos con propiedades que se pueden descubrir estudiando los objetos y procesos relacionados. El paso de la construcción *objeto* ⟶ *definición* a la construcción *definición* ⟶ *objeto*es una parte esencial de la transición del pensamiento matemático elemental al avanzado.

Igualmente Tall (como se cita en Blázquez 1999, p.50) fija una serie de consideraciones cognitivas acerca del pensamiento matemático avanzado, que tendremos en cuenta en nuestra investigación:

[20] Estos conceptos se detallan posteriormente en la página 20.

- Existen muchos tipos de *"mentes"* matemáticas, es decir, los matemáticos tienen diferentes percepciones de las matemáticas (intuicionistas, formalistas, logicistas, constructivistas, etc.), así como también existen diferentes puntos de vista sobre un concepto matemático, dependiendo de las experiencias previas; por tanto, no existe un modo absoluto de pensar acerca de las matemáticas.

- Es posible que en la mente de un individuo convivan puntos de vista conflictivos, pero que no provocan conflictos en la práctica si no se evocan simultáneamente.

- La psicología constructiva de Piaget da una explicación de cómo se crean las ideas en la mente de cada individuo que se puede aplicar a los procesos de pensamiento matemático avanzado. Según Piaget (1979) existe la necesidad individual de un equilibrio dinámico en la mente. Este equilibrio puede ser perturbado por la confrontación entre conocimientos nuevos y antiguos, dando lugar así a un periodo de transición que lleva a la reconstrucción de la estructura cognitiva y a la adquisición de un nivel de madurez superior. En este proceso de transición el individuo adquiere datos nuevos -*asimilación*- obligando a que la estructura cognitiva se modifique -*acomodación*-. Skemp (1978) distingue entre aquellos procesos de aprendizaje en los que hay una simple expansión de la estructura individual cognitiva y aquellos donde hay un conflicto cognitivo y requieren una reconstrucción mental.

- Siguiendo el esquema anterior, los problemas surgen cuando las nuevas ideas no se acomodan satisfactoriamente. Así aparecen los *obstáculos epistemológicos*, que son un ejemplo de conflicto cognitivo entre partes inconsistentes de la *imagen conceptual*[21](en el siguiente epígrafe desarrollaremos

[21] *Imagen*conceptual como traducción de la expresión original inglesa “concept image” en el sentido de (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 2002). Otros autores (Azcárate et al., 1999) lo traducen como*esquema conceptual*. Otros autores lo traducen como concepto imagen.

este concepto) del individuo. Una explicación para algunos de los obstáculos viene dada por lo que Tall llama *principio de extensión genérica*, que consiste en generalizar las propiedades conocidas a otros contextos, cuando se han trabajado ejemplos del mismo tipo, sin contraejemplos, en un contexto determinado.

- En el aprendizaje de matemáticas avanzadas hay que distinguir dos procesos: por un lado, la *generalización*, que consiste en extender procesos familiares, y puede ser *expansiva* si no requiere cambios en las ideas, *reconstructiva* si requiere reconstrucción de la estructura cognitiva existente, o *disyuntiva* si se añaden nuevas ideas en la estructura cognitiva que no se integran con las antiguas; y, por otro lado, la *abstracción*, que requiere una gran reorganización mental. La generalización expansiva es una buena técnica de enseñanza porque aplica un proceso conocido en un contexto distinto[22] y es también un primer paso hacia la abstracción formal, sin necesidad de reconstrucción mental.
- La intuición y el rigor se toman habitualmente como términos opuestos, pero, al igual que las funciones en el cerebro, se encuentran íntimamente relacionados. La intuición es el producto de las imágenes conceptuales del individuo y son más lógicas cuanta más información tiene éste. El desarrollo de esta intuición lógica debe ser uno de los mayores objetivos de la educación matemática más avanzada.

Tall (1991) da además una descripción del ciclo completo de la actividad en el pensamiento matemático avanzado y considera que éste avance comienza en el acto creativo de considerar un problema contextualizado en investigación mate-

[22]Considérese, por ejemplo, la generalización del método de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas para resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

mática que lleva a la formulación creativa de conjeturas y termina en el estado final de refinamiento mediante un gran trabajo de selección de ideas y relaciones útiles. Con la lógica y la deducción no basta; se requiere además una actividad mental flexible para relacionar conceptos que se encuentran desvinculados. Tall establece una analogía entre las actividades que ocurren en este ciclo y las que se llevan a cabo en la resolución de problemas de matemática elemental (aunque muchos consideran la resolución de problemas no como una actividad creativa, en el sentido tanto de los matemáticos como de los investigadores en educación matemática, sino como aplicación de una serie de contenidos específicos a cuestiones que se plantean), aunque la definición formal y la deducción sean factores distintivos propios del pensamiento matemático avanzado.

Durante el ciclo interactúan la *síntesis* y el *análisis* cuyas funciones son complementarias en el pensamiento matemático: la *síntesis* interviene en el momento consciente de organizar las ideas, seguida de una actividad más intuitiva, en la que tiene lugar la interrelación entre imágenes conceptuales, es decir, en la construcción de teorías; el análisis es una actividad que organiza las nuevas ideas de forma lógica y las refina, esto supone entonces dar coherencia a la estructura lógica que se ha creado. En la enseñanza elemental enfatizamos la síntesis del conocimiento, partiendo de conceptos simples; sin embargo, en la enseñanza superior se acentúa el análisis del conocimiento. A los estudiantes universitarios, sin embargo, se les acentúa normalmente el análisis del conocimiento, a partir comenzando por la abstracción general y creando cadenas de deducción aplicables a otros contextos. También señala Tall respecto de las palabras de Skemp "a los estudiantes universitarios que se les muestra el *producto del pensamiento matemático* en lugar del *proceso* en sí mismo". (Tall, 1991, p.3).

Una de las dificultades subyacente al concepto de integral definida está relacionada con el doble estatus estructural y operacional de la misma. Este doble estatus guarda relación con lo que Gray & Tall (1994) llaman *procepto, es decir,* la combinación de proceso y concepto evocados por el mismo símbolo. Este término tiene sus orígenes en las investigaciones de Piaget (1979), Dubinsky (1991) y Sfard (1991), que teorizan el conocimiento humano mediante la interiorización de algunas acciones que se convierten en procesos, y, posteriormente, por un fenómeno de *encapsulación* se conciben como objetos; según Tall (1996), el conjunto de los números enteros y el álgebra se construyen sobre proceptos, por tanto una teoría de proceptos y su uso en matemáticas tiene un enorme potencial en el dominio de aplicación. Tall también señala que los conceptos básicos del cálculo son proceptos (función, límite, derivada e integral) y propone un tratamiento de éstos basado en diferentes representaciones: la visual, los cálculos numéricos o las manipulaciones simbólicas con ayuda de programas de software matemático adecuado.

En el caso que nos ocupa, por ejemplo, un proceso sería la construcción de sumas de Darboux para una partición dada y el concepto sería la culminación del proceso de refinamiento y la consideración del superior e inferior de estas sumas para llegar al concepto propiamente de integral definida.

2.2 Imagen Conceptual y Definición Conceptual

El pensamiento matemático se desarrolla a través de los objetos mentales, entidades conceptuales que se manipulan en la mente durante el pensamiento matemático avanzado, y como entidades están representados por diferentes tipos de simbolismo. Como resultado de la manipulación de un concepto mental (matemático) el individuo desarrolla una *imagen conceptual* idiosincrásica propia, producto de la experiencia y la actividad mental. Investigaciones empíricas han evidenciado cómo esto puede dar lugar a conflictos sutiles en el desarrollo típico de la mente del estudiante que causan los *obstáculos cognitivos* y actúan como una barrera para adquirir las ideas de la teoría formal (Tall, 1991).

Tall &Vinner (1981) consideran que el funcionamiento del cerebro no siempre es lógico y esto se manifiesta cuando se cometen errores. Para explicar la razón de tales éxitos o fracasos, hacen una distinción entre la *imagen conceptual*, y la *imagen conceptual evocada*:

> El cerebro humano no es una entidad puramente lógica. Su complejo funcionamiento a menudo está en desacuerdo con la lógica de las matemáticas. No siempre es la lógica pura la que nos da una idea, ni es la oportunidad la que nos hace cometer errores…usaremos el término *imagen conceptual* para describir toda la estructura cognitiva que se asocia con el concepto, y que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados. Esta imagen se construye a lo largo de los años a través de todo tipo de experiencias, y va cambiando a medida que el individuo encuentra nuevos estímulos y madura […] A la parte de la imagen conceptual que se activa en un instante determinado la llamaremos *imagen conceptual evocada.* En momentos distintos, se pueden evocar imágenes conceptuales evocadas aparentemente conflictivas. (p.152)

La imagen conceptual es algo no verbal asociado a nuestra mente con el nombre del concepto. Esta imagen puede ser una representación visual del concepto en caso de que el concepto la tenga; también puede ser una colección de impresiones o experiencias.

Las representaciones visuales, las imágenes mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el concepto se pueden traducir en formas verbales. Muchos de los conceptos que utilizamos a diario no se definen del todo formalmente (e.g. lápiz, perro, casa, etc.), aprendemos a reconocerlos por experiencia y por el uso apropiado en determinados contextos. Posteriormente estos conceptos pueden ser redefinidos en su significado y reinterpretados incrementado con más o menos lujo su definición exacta. Por lo general, en este proceso se le da al concepto un símbolo o nombre que permite la comunicación y ayuda a la manipulación mental.

Una *definición conceptual*[23] es la reconstrucción personal de la definición con palabras del individuo. En palabras de Tall & Vinner (1981):

> [...] La definición de un concepto (si la tiene) es una cuestión muy distinta. Consideramos la *definición conceptual* como un conjunto de palabras para especificar el concepto. El individuo puede aprenderlas de memoria o de manera más significativa y relacionarlas con un mayor o menor grado en el concepto como un todo. También puede ser una reconstrucción personal que el estudiante hace de una definición. Este conjunto de palabras que el estudiante utiliza para su propia explicación es su imagen conceptual evocada. Si le dan la definición conceptual o él mismo la construye, puede variar con el tiempo. Así, una definición conceptual personal puede diferir de una definición formal, es decir, de la que es aceptada por la comunidad matemática en general. En cada individuo, una definición conceptual genera su propia imagen conceptual (que podría llamarse *"imagen de la definición conceptual"*) que es por supuesto, parte de la imagen conceptual. En algunos individuos puede estar vacía o, prácticamente no existir. (p.152)

Para Vinner (2002) adquirir un concepto significa formar una imagen conceptual del concepto. Saber de memoria un concepto no garantiza comprender el concepto. Comprender significa tener una imagen conceptual, pero el recíproco no tiene por qué ser cierto. Sin embargo, algunos conceptos, incluso los de uso cotidiano, se deben introducir por definiciones. Cuando la imagen se forma, las definiciones se tornan prescindibles. Éstas permanecerán inactivas o incluso serán olvidadas al manejar enunciados relacionados con el concepto en cuestión. De esta forma se puede aludir a la "metáfora del andamiaje" en el rol que juega la definición en la formación del concepto: en el momento en que se termina una construcción el andamiaje se retira.

A la parte de la imagen conceptual o de la definición conceptual que puede entrar en conflicto con otra parte de la imagen o la definición conceptual Tall &Vinner (1981) la denominaron *factor de conflicto potencial.* Estos factores no tienen por

[23] Definición conceptual como traducción de la expresión original inglesa "concept definition" en el sentido de Tall & Vinner (1981) y Vinner (2002). Azcárate et al. (1999) lo traducen como definición del concepto y otros autores como concepto definición.

qué ser evocados en circunstancias que causen el conflicto cognitivo real, pero, si lo son, se estaría hablando entonces de *factores de conflicto cognitivo.* Un tipo de factor de conflicto potencial más serio es aquel en que la imagen conceptual está en desacuerdo con la definición conceptual formal y no con otra parte de la imagen conceptual. Estos factores pueden impedir de manera significativa el aprendizaje de una teoría formal, ya que no se convertirán en verdaderos factores de conflicto cognitivo a menos que la definición conceptual formal desarrolle una imagen conceptual que pueda producir un conflicto cognitivo. Los estudiantes que tienen un factor de conflicto potencial de su imagen en su imagen conceptual pueden estar seguros en sus propias interpretaciones nociones en cuestión y considerar la teoría formal simplemente como inoperante y superflua, es decir, si la imagen se ha construido sobre experiencias que entran en conflicto con la definición formal, esto puede conducir a respuestas que difieren de la teoría formal.

En el caso que nos ocupa, la definición conceptual integral definida es la que está institucionalizada. Una imagen conceptual asociada a integral definida puede ser la representación gráfica del área bajo la curva integral, otra las sumas de Darboux o de Riemann, un factor de conflicto personal puede ser la no coincidencia entre área e integral definida.

Vinner (1983) representa la estructura cognitiva a través de la existencia de dos "celdas[24]". En una celda residirán las definiciones conceptuales, en la otra las imágenes conceptuales; cualquiera de ellas, o ambas podrían estar vacías. Aunque las celdas se puedan formar independientemente éstas pueden interactuar. Cuando se introduce un concepto primero a través de una definición al principio la celda de la imagen conceptual está vacía y después de muchos ejemplos y explicaciones se

[24] Traducción de la palabra inglesa "cell".

va llenando gradualmente, sin embargo, esto no refleja necesariamente todos los aspectos de la definición conceptual.

En el término que nos ocupa la celda de las imágenes conceptuales relativas a una partición se puede ir llenando de ejemplos muy sencillos representados de forma numérica $P = \{0,\ 0'5,\ 1\}$, $P' = \{0,\ 0'1, 0'2,\ 0'3,\ 0'5,\ 1\}$ de representaciones gráficas, la finura y la finitud de las mismas, al igual que la representación simbólica $P = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

Conocer la definición no significa conocer el concepto, ya que, de hecho, muchos conceptos se adquieren sin definición. Si se parte de que el alumno tiene una imagen conceptual, cuando recibe la definición puede ocurrir: que la imagen conceptual la incluya de forma satisfactoria (se produce una *acomodación*), que la imagen conceptual no cambie y el individuo no asimile ni utilice la definición, o que no cambien ni la imagen conceptual ni la definición y ésta sólo se utilice cuando se le pregunta directamente por ella, mientras que en cualquier otro momento se evoca una imagen conceptual distinta. Si se parte de la definición formal puede ocurrir algo similar a lo anterior. Los profesores esperan que la imagen conceptual de los alumnos se forme a través de la definición del concepto y, la imagen, esté controlada por la definición.

En los procesos de resolución de problemas o perfeccionamiento de tareas el proceso puede pasar por consultar la definición, como sería deseable, según se recoge en los esquemas de la Figura 2.1 donde la entrada es la tarea a realizar, las flechas ascendentes simbolizan el proceso y la salida es la respuesta del alumno; cada estudiante puede decantarse por una de las tres vías, no necesariamente excluyentes: *Interacción entre imagen y definición conceptual, deducción puramente formal o deducción que sigue al pensamiento intuitivo.*

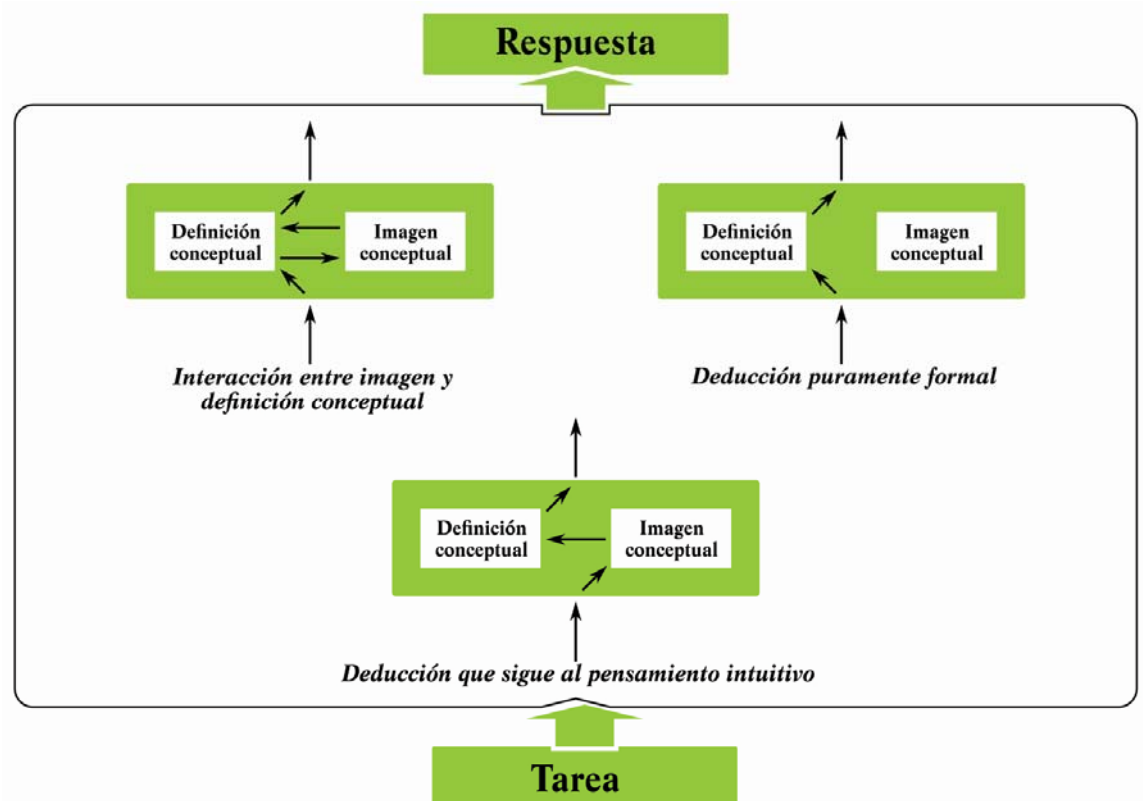


Figura 2.1 Posibles itinerarios deductivos esperados.

Sin embargo, en la práctica el esquema utilizado es el de la Figura 2.2 en donde la respuesta que se da es intuitiva, puesto que no existe interacción con la definición formal; este esquema suele tener éxito puesto que en la mayoría de los problemas la utilización de imágenes conceptuales incompletas lleva a la conclusión correcta. En el artículo de Edwards & Ward (2004) aparece un ejemplo de una estudiante (Stephanie) que fue capaz de dar la definición de decimal infinito que vio en su curso de análisis real. Utilizó la definición para explicar porqué $0.333\ldots = \frac{1}{3}$ y sin embargo, excluía la definición al argumentar que $0.9999\ldots$ era distinto de 1. En lugar de la definición ella usó su imagen conceptual, basada el algoritmo de la división. Se puede conseguir 0.333...dividiendo 1 por 3, pero no sepuede obtener 0.99... dividiendo uno entre 1, infería Stephanie. Ella ignoraba la definición[25].

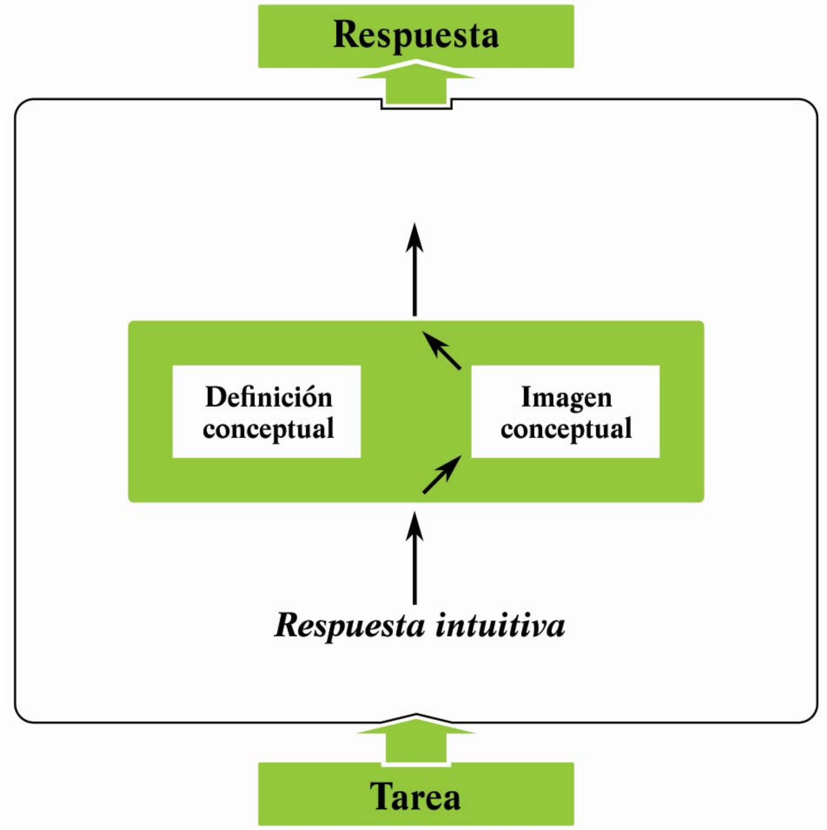


Figura 2.2 Posible itinerario de respuesta inducida.

En cuanto a las implicaciones para la enseñanza, Vinner destaca que deben evitarse conflictos cognitivos innecesarios en los estudiantes y sólo iniciarlos cuando esos conflictos les permitan pasar a un estado intelectual superior. Los conceptos deben adquirirse por medio de experiencias reales y no de forma técnica, empezando por ejemplos del concepto y de lo que no es el concepto, para que se forme la imagen conceptual. El profesor no debe conformarse con introducir la defini-

[25]La definición dada en el curso era: Sean$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4, \dots,\ c_n, \dots$ una sucesión infinita de enteros con $0 \le c_i \le 9$. El número Sup$\{0.c_1c_2c_3 \cdots c_n : n = 1,2,\dots\}$ se denota por $0.c_1c_2c_3 \cdots c_n \cdots$ y se denomina decimal infinito.

ción, más bien, debe proponer ejemplos atípicos para provocar conflictos entre la imagen conceptual y la definición y profundizar en ésta; asimismo, ha de proponer tareas que no se resuelvan correctamente refiriéndose sólo a la imagen conceptual, para convencerles de la necesidad de utilizar la definición.

En resumen, prevalecen los hábitos del pensamiento de la vida corriente y el estudiante no es consciente de la necesidad de consultar la definición formal, así pues, parece adecuado actuar sobre la imagen del concepto para transformarla y mejorarla mediante la ayuda de lo que Tall (1985) llama *organizadores genéricos*, que son micromundos dentro de los cuales el estudiante puede manipular un concepto u objetos relacionados con él; unas veces serán programas de ordenador, otras, material curricular, etc. Tall & Vinner (1981) estiman que, antes de establecer la definición de cualquier concepto, es aconsejable proponer ejemplos, visualizar y construir una buena imagen conceptual, incluso, elaborando nuevo material curricular.

Según Cornu (1981) las imágenes conceptuales provienen la mayoría de las veces de ejemplos que pueden funcionar en cierto tipo de ejercicios. Los ejercicios en un contexto escolar específico suelen ser bastante similares entre sí, y, los estudiantes sin mucha dificultad suelen tener éxito con imágenes conceptuales matemáticamente erróneas porque estas imágenes les bastaron para cubrir ese conjunto de problemas determinados. Al enfrentar problemas inusuales, la imagen va en dirección contraria a la imagen clásica y emerge una imagen deficiente, que pasa a ser un obstáculo.

Por su parte, Ouvrier-Buffet (2003) observa un paralelismo entre la construcción de un concepto y la construcción de su definición. Siguiendo la idea de Vergnaud afirma que "un concepto que no puede limitarse a su definición, al menos cuando se trata de su aprendizaje y su enseñanza". De la dialéctica entre la construcción de una definición (definición-construcción) y la construcción de un concepto surgen cuestiones relacionadas con la aplicación de las actividades en la educación y su finalidad desde dos puntos de vista: por una parte, la adquisición de conocimientos acerca de la noción de definición y por otra, la comprensión del concepto. Para este autor, la comprensión se entiende en función de las relaciones o conexiones con otras cosas (inclusive de otros campos) que se conocen. El propósito es subrayar las relaciones entre conceptos en matemáticas, y retomar la importancia y el interés del enfoque heurístico, la experimentación e investigar además, de forma diferente a razonamientos previamente escritos. Los estudiantes podrán ser capaces de construir una definición a través de actividades de (definición-construcción) que permitan que la (definición-construcción) evolucione de forma paralela con la construcción del concepto matemático. Para desarrollar estas actividades se deben tener en cuenta concepciones que tienen los estudiantes relacionadas con la definición del concepto matemático que se pretende comprender. Esto significa entonces que las concepciones sobre las definiciones matemáticas podrían convertirse en un obstáculo para la formación del concepto.

2.3 Objetos, procesos y conceptos

Según el modelo cognitivo Piagetiano todo conocimiento supone la aparición de estructuras generales (estructuras cognitivas) del conocimiento que poseen un carácter necesario o universal. Piaget quería entender la naturaleza de esas estructuras cognitivas y determinar el porqué se convierten en necesarias si son consecuencia de construcciones no predeterminadas.

En su artículo, Gray & Tall(1994) estudian la dualidad entre el *proceso* y el *concepto*en matemáticas, particularmente cuando se usa el mismo simbolismo para representar simultáneamente un proceso como el producto de ese proceso. La ambigüedad de notación brinda al “buen” pensador flexibilidad para mover el pensamiento entre el proceso para llevar a cabo una tarea matemática y el concepto para ser mentalmente manipulado como parte de un esquema mental amplio. Con el fin de reflejar la realidad cognitiva observada, estudian además, la creciente compresibilidad de conocimientos propios de matemáticos destacados, bajo la hipótesis de que el buen pensador matemático usa una estructura que es una amalgama un concepto resultante de este proceso y un símbolo que puede evocar tanto el proceso como el concepto, a la cual denominaron *procepto elemental. A* fin de reflejar la creciente flexibilidad de la noción y la versatilidad de los procesos de pensamiento la definición la extendieron como sigue: un *procepto* es una colección de *proceptos elementales* que tienen el mismo objeto.

Por su parte, Puig (1997) desde una perspectiva fenomenológica. Distingue entre objeto mental y concepto desde el análisis didáctico, un análisis que examina las matemáticas y sus estructuras teniendo en cuenta tanto a los individuos que quieren aprenderlas como al sistema escolar en el que están inmersos. Para Puig, por una parte, los *objetos mentales* son los conocimientos que los estudiantes elaboran y por otra, los *conceptos* son aquellos conocimientos a los que se quiere que el estudiante acceda; estos conocimientos tienen un contenido social y culturalmente establecidos. Los objetos mentales se sitúan en la mente de las personas y los conceptos en las matemáticas como disciplina, siendo simultáneamente organizadores de fenómenos. En el individuo ya preexisten los conceptos en un determinado fenómeno y a través del sistema lo que se pretende es que constituya un objeto mental a mediante el organice estos fenómenos para tener acceso a los conceptos establecidos históricamente. Los "objetos matemáticos son cristalizaciones de objetos mentales". (p.78). La creación de nuevos conceptos matemáticos se hace incorporando al sistema de las matemáticas los análisis de los objetos mentales que los matemáticos están usando. Estos análisis se usan como medios de organización de fenómenos con el fin de definirlos conceptualmente. Según esto, la actividad matemática produce conceptos a partir de objetos mentales. Los objetos mentales y los conceptos encierran diversas relaciones. Ambos se constituyen como organizadores de fenómenos. Los conceptos vienen después de los objetos mentales pero no con intenciones sustitutivas, sino más bien para contribuir en la construcción de objetos mentales más complejos y amplios.

Para Thompson (1985) los objetivos de un plan de estudios deben expresarse en términos cognitivos si se han de tomar como objetivos de la instrucción. Partiendo de la hipótesis de que el aprendizaje de las matemáticas es un proceso constructivo, Thompson propone un marco teórico que caracteriza el conocimiento en términos de *objetos* y *procesos* en donde la esencia del aprendizaje matemático consiste en transformar procesos en objetos. Los objetos (números, variables, funciones) están conectados por medio de relaciones que generan estructuras entre ellos. Los procesos están compuestos de operaciones sobre los objetos que los transforman. Las estructuras no siempre se conservan al aplicar estas transformaciones.

Para Piaget la abstracción reflexiva era de suma importancia en las matemáticas superiores, y, en virtud de desarrollar este concepto para el pensamiento matemático avanzado. Dubinsky (1991)define la abstracción reflexiva en términos de objetos mentales: "La abstracción reflexiva es la construcción de los objetos mentales y de las acciones mentales en estos objetos" (p.102). Y a través de esta abstracción reflexiva describe cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, asimilación) que puede realizar un estudiante en la construcción de un concepto matemático determinado. La teoría APOE[26] postula que un concepto matemático comienza a formarse cuando el individuo aplica una transformación en los objetos para obtener otros objetos. Una transformación es concebida primero como una *acción*, que requiere instrucción específica, así como la habilidad para ejecutar cada paso de la transformación explícitamente(B. Edwards et al., 2005)

[26] El marco teórico APOE: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (Traducido del inglés: APOS: Actions, Process, Objects, Schemes) ha sido desarrollado y refinado por (Asiala et al., 1997; Dubinsky & McDonald, 2001) como resultado de la interpretación de la teoría constructivista de Piaget y sus ideas relativas a la abstracción reflexiva, aplicadas al estudio cualitativo del desarrollo del pensamiento avanzado.

La teoría y los conceptos específicos de las matemáticas se relacionan a través de los *esquemas:* "esquema es más o menos una colección coherente de objetos y procesos" (Ibídem, p.102) y constituyen las construcciones más complejas que se pueden establecer de una parte del conocimiento matemático. Según Roa-Fuentes & Oktaç (2010) en esta colección también se encuentran las acciones y otros esquemas. La tendencia del sujeto a invocar un esquema para entender, abordar, organizar o darle sentido a una situación problemática dada es su conocimiento de un concepto en matemáticas. De hecho, un individuo puede tener varios esquemas que deben estar interrelacionados en una estructura grande y compleja. Dubinsky utiliza el término, *proceso* o *proceso mental* en lugar de acción mental para hacer énfasis en su naturaleza interna; cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, ésta puede ser *interiorizada* en un proceso mental. Esta interiorización consiste en construir una estructura mental que actúa de manera análoga a la de una acción externa; cuando el individuo puede reflexionar sobre el concepto sin realizar acciones específicas sobre él que posee una concepción *proceso.* Si se toma conciencia de un proceso en su totalidad y de que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad, y, si además se pueden construir tales transformaciones (explícitamente o en la propia imaginación), entonces se dice que el individuo ha *encapsulado* el proceso en un objeto cognitivo.

2.4 Obstáculos epistemológicos, dificultades y errores

La teoría de los *obstáculos epistemológicos* tiene sus raíces en el trabajo de Bachelard (1993), y, en el contexto de la educación matemática fue desarrollada por Guy Brousseau (1983, 2006).

En el proceso de construcción de los conceptos matemáticos es primordial estudiar los errores que los estudiantes cometen de manera recurrente puesto que a través de ellos se pueden localizar posibles problemas cognitivos de naturaleza epistemológica relacionados con la comprensión de dichos conceptos. La noción de *obstáculo epistemológico* fue introducida por Gastón Bachelard en su libro *La formación del conocimiento matemático,* editado por primera vez en 1938:

> Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es el acto mismo de conocer, íntimamente, dónde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (Bachelard, 1993, p.15)

Como podemos observar Bachelard hace evidente la relevancia de realizar disquisiciones sobre las causas de los obstáculos epistemológicos y la necesidad de enfrentarlos de manera consciente, ya que para él, el lenguaje del conocimiento científico se desarrolla en términos de obstáculos. Señala además, la importancia de estudiar los errores, la falta de reflexión y la ignorancia de los estudiantes durante el proceso de adquisición del conocimiento de una idea científica:

> Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad en un verdadero estado de arrepentimiento intelectual. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización. (p.15)

La idea de obstáculo epistemológico se adapta en un sentido más amplio en la *teoría de las situaciones didácticas de Brousseau*, como un tipo de dificultad que se encuentra en situaciones escolares, incluso cuando tanto estudiantes como profesores tienen un rendimiento adecuado en sus respectivas tareas. Brousseau describe un obstáculo general de la siguiente forma:

> “Los errores no son únicamente efecto de la ignorancia, la incertidumbre o del azar, como defienden los teóricos del aprendizaje empiristas o conductistas, sino también el efecto de una pieza previa del conocimiento que es interesante y buena, pero que ahora se revela como falsa o simplemente inadaptada. Los errores de este tipo no son erráticos e inesperados, constituyen obstáculos. El error es una componente del significado de la pieza del conocimiento que adquieren tanto el profesor como el estudiante” (citado por Ely, 2007, p.5)

De esta forma, un obstáculo para el aprendizaje no es simplemente una *ausencia* de conocimiento, sino una *pieza* del conocimiento que a la vez interfiere y es parte de un aprendizaje más amplio. Esta idea tiene una perspectiva Piagetiana. El estudiante enfrenta una situación problemática ya con un conocimiento funcional que quizás necesite reconstruir, su mente no llega como una pizarra en blanco. Un obstáculo es un caso particular de adaptación de Piaget; suele ser bastante resistente, soporta algunas contradicciones y, a veces, incluso el establecimiento de una pieza de conocimiento mejor(Duroux, 1982, citado en Ely, 2007).

Bachelard utilizó inicialmente la palabra “epistemológico” para indicar una conexión con el sistema de creencias que tiene el estudiante sobre el conocimiento. En el trabajo de Brousseau el término “epistemológico” cobraba un sentido puramente estructural en la construcción del concepto, es parte del conocimiento en sí mismo y no es accidental. Sendos significados de la palabra “epistemológico” prevalecen en las investigaciones sobre obstáculos epistemológicos, por ejemplo Sierpińska(1994) contempla obstáculos epistemológicos que operan en dos ámbitos; por una parte el que se ocupa de las creencias o perspectivas globales acerca de lo que son las matemáticas y el conocimiento, y por otra el que atiende la comprensión de un objeto específico:

> Los obstáculos epistemológicos son formas de comprensión basados en algunos esquemas inconscientes de pensamiento que han sido adquiridos culturalmente y en creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas y acerca de las categorías fundamentales como número, espacio, causa, azar, infinito que son inadecuados con respecto a la teoría actual.(p.xi)

Un obstáculo epistemológico es un tipo de obstáculo que es inherente al concepto mismo, y que no tiene causalidad externa, es decir, su existencia no depende por ejemplo de la forma particular en que se ha enseñado al estudiante, si fuese así, en términos de Brousseau se trataría entonces de un obstáculo didáctico. Para Brousseau, el obstáculo epistemológico es la vía de acceso al conocimiento. En el camino recorrido en devenir histórico de las Matemáticas han estado presentes los obstáculos epistemológicos en forma de ideas falsas particulares.

Nuestro estudio se enmarca en ese segundo enfoque de obstáculos epistemológicos, en el sentido de Brousseau, que atiende la comprensión de un objeto específico.

Para Barrantes (2006) dejar al margen a los obstáculos epistemológicos en la enseñanza de las matemáticas trae consecuencias:

- Enseñar, de entre los conocimientos definitivos, aquellos que parece pueden ser comprendidos por los estudiantes y que simplemente deben ajustarse a los precedentes, estos conocimientos incompletos producen "culturas temporales" pues son obstáculos que pueden ser más o menos bien remontadas por el estudiante y por el profesor pero que provocan numerosas dificultades.
- Enseñar los conocimientos definitivos bajo la forma y organización definitiva como un lenguaje, con el riesgo de un uso meramente formal carente de sentido; ese lenguaje puede no estar adaptado al desarrollo de los estudiantes.

Respecto de las dificultades, Gonzalez-Martín & Camacho-Machín (2005) consideran que existen cuatro elemento básicos como productores de las dificultades en el currículo de matemáticas: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares. Estas dificultades se relacionan y forman redes en las que se refuerzan, concretándose en la práctica en forma de obstáculos y manifestándose en forma de errores.

Por último, en relación con los errores, Rico (1995) señala algunas reflexiones relacionadas con su presencia en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas:

- Enseñar los conocimientos definitivos bajo la forma y organización definitiva como un lenguaje, con el riesgo de un uso meramente formal carente de sentido; ese lenguaje puede no estar adaptado al desarrollo de los estudiantes.
- Los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje.
- Los errores no aparecen por azar, surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente.
- Es necesario que cualquier teoría de instrucción modifique la tendencia a condenar los errores culpando a los estudiantes de los mismos, reemplazándola por la previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje.
- Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunos de los cuales surgen inevitablemente.
- Los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las matemáticas, son datos objetivos que encontramos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Los errores también son función de otras variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social, etc.

Cabe destacar características generales de errores que cometen los estudiantes: a) los errores son sorprendentes, incluso se mantienen ocultos al profesor durante algún tiempo, b) los errores son extremadamente persistentes, son resistentes a cambiar por sí mismos ya que la corrección de los mismos puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos, c) los errores pueden ser sistemáticos o por azar, los primeros son mucho más frecuentes y se manifiestan efectivos para revelar procesos mentales subyacentes donde los estudiantes consideran que proceden correctamente, los segundos son debidos a despistes de los alumnos, d) los errores ignoran los significados, dando soluciones que no se ponen en cuestión aunque a todas luces sean incorrectas y e) los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas.

Igualmente Rico, establece seis categorías descriptivas para clasificar los errores:

- Datos mal utilizados, considerados como tales los errores cometidos por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en el enunciado de la cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno, por ejemplo: una lectura incorrecta del enunciado, se añaden datos extraños, se olvidan datos necesarios para la solución, se contesta algo que no es necesario, etc.

- Interpretación incorrecta del lenguaje, debido, generalmente, a una traducción errónea de los hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.

- Inferencias no válidas lógicamente, entre otras destacamos: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y del consecuente, el antecedente; afirmar que el consecuente no se deduce del antecedente; utilizar incorrectamente los cuantificadores.

- Teoremas o definiciones deformados, tales como aplicar un teorema sin las condiciones necesarias, aplicar la propiedad conmutativa al producto de matrices, realizar una valoración o un desarrollo incorrecto de una definición.

- Falta de verificación de la solución, el alumno ha realizado toda la tarea correctamente, sin embargo, la solución no es la pedida. Si el estudiante hubiera contrastado su solución con una posterior lectura del problema, probablemente, el error pudiera haber sido evitado.

- Errores técnicos, incluimos en esta categoría los errores de cálculo, de toma de datos y los derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

Consideramos que los errores pueden ayudarnos a investigar más cuestiones abstractas relativas a la naturaleza de las matemáticas a las que es difícil acercarse por otra vía, utilizar los errores como motivación y medio para interrogar sobre las Matemáticas pueden mejorar la comprensión de las matemáticas como disciplina.

2.5 Comprensión matemática

> "Un hecho nos debe asombrar o más bien nos asombraría sino estamos acostumbrados a ello. ¿Cómo es posible que haya gente que no entiende las matemáticas?Si esta ciencia invoca únicamente las reglas de la lógica, aceptadas solo por las mentes bien estructuradas... ¿Cómo es posible que hay tantas personas que son totalmente impermeables a ella?"(Poincaré, 1946)

¿Porqué un estudiante no entiende las matemáticas? Esta es una pregunta recurrente que nos ha acompañado desde hace mucho tiempo y que actualmente sigue siendo frecuente en el ámbito escolar. Muchos de nuestros estudiantes, ya sea después de alguna explicación o en el desarrollo de alguna situación problemática siguen pronunciando expresiones tales como "no entiendo" o "no lo comprendo". Esa pregunta lleva asociada otra y la respuesta a esa segunda puede ayudarnos a encontrar la respuesta de la primera ¿Qué significa comprender? El interés que se ha suscitado por dilucidar esta cuestión ha derivado en el desarrollo diversas perspectivas teóricas que abordan la forma en que los estudiantes le dan sentido a esta pregunta desde las matemáticas (Asiala et al., 1997; Byers & Erlwanger, 1985; Duffin & Simpson, 2000; Godino, 2002; Hiebert & Carpenter, 1992; Kieren, Pirie, & Calvert, 1999; Pirie & Kieren, 1989; Sierpińska, 1990, 1994; Skemp, 1978; Tall & Vinner, 1981; Von Glasersfeld, 2008; Vygotsky, 1978).

Antes de la llegada de la teoría de la comprensión de Skemp, normalmente los investigadores identificaban la comprensión como la capacidad de realizar operaciones algorítmicas (Meel, 2003). Según Skemp (1978), entender algo significa asimilarlo en un esquema apropiado. Ya sea un concepto, un grupo de conceptos o un símbolo se deben asimilar en un esquema adecuado, lo que significa formar conexiones entre ideas, hechos o procedimientos que son en general aceptados. Un concepto se construye a partir de datos recogidos, y luego se relaciona con otros conceptos para crear otro concepto más complejo. La obra de Skemp distingue entre el conocimiento y la comprensión, y contempla dos categorías de comprensión, la relacional y la instrumental. La primera de ellas se refiere a la relevancia que tiene tanto el saber "qué se hace como el porqué se hace". La comprensión instrumental va más encaminada a las "reglas sin razones". Mediante la comprensión instrumental se accede de manera rápida a las respuestas de manera que tiende a promover una recompensa inmediata. Por su parte, la comprensión relacional proporciona una base para realizar una transferencia más eficiente, de tal forma que se facilite el crecimiento de la comprensión.

Basándose en el trabajo de Skemp, Byers & Erlwanger (1985) introdujeron cuatro categorías distintas de comprensión: instrumentales, relacionales, intuitivas y formales. En las dos primeras mantienen el sentido de Skemp y las dos últimas las definen por una parte la comprensión intuitiva como la capacidad de resolver un problema sin experiencia previa y por otra parte la comprensión formal, como la capacidad de conectar con la notación matemática ideas matemáticas pertinentes y combinar las ideas en cadenas de razonamiento lógico.

El artículo de Meel (2003) presenta un panorama muy completo de la evolución histórica sobre la comprensión desde la incursión de Skemp, así que nos detendremos en algunos puntos de vista recientes sobre este tópico[27]. En particular en tres propuestas constructivistas del concepto de comprensión, el modelo sobre el crecimiento de la comprensión de Pirie Kieren, la teoría APOE, y por último el marco de comprensión de los obstáculos epistemológicos de Sierpińska.

[27] Para profundizar en el desarrollo de la comprensión matemática, se puede encontrar en el artículo de Romero y Mari (2011) una representación de la literatura relevante que ha surgido durante las dos últimas décadas.

Modelo sobre el crecimiento de la comprensión de Pirie Kieren

La teoría del crecimiento de la comprensión de Pirie & Kieren (1994) provee la estructura subyacente para examinar los procesos de construcción de la comprensión de los estudiantes. La definición inicial que dieron Pirie & Kieren de comprensión matemática parte de la idea que Pirie (1989) desarrolló sobre la visión constructivista de von Glasersfled respecto de la comprensión:

> La función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo de la experiencia, no el descubrimiento de la realidad ontológica. (p.182).
>
> Desde un explorador que está condenado a buscar 'propiedades estructurales' de una realidad inaccesible, el organismo que experimenta ahora se convierte en un constructor de estructuras cognitivas destinadas a resolver determinados problemas que el organismo percibe o concibe [...] entre los cuales está el problema sin fin de organizaciones consistentes [o estructuras cognitivas] que llamamos comprensión. (p.50).
>
> Citados en (Sriraman & English, 2010, p.41)

Para von Glaserfeld la comprensión es un proceso continuo de organización de las estructuras cognitivas propias para resolver problemas.Pirie & Kieren (1989, 1994) comenzaron a desarrollar su perspectiva de la comprensión matemática tomando como base esta definición. Para estos autores, la comprensión matemática es un fenómeno que no puede distinguirse a partir de unas pocas categorías, ni identificarse como una única adquisición. Su teoría elabora la naturaleza de la comprensión como la construcción y la reorganización de las estructuras del conocimiento de la persona.

Para Pirie (1988), la comprensión es un proceso dinámico completo que constituye un todo, no se trata de una simple combinación lineal de categorías de conocimiento. Este modelo identifica diferentes niveles que se representan de forma anidada para destacar que cuando un individuo pasa a un nivel superior, mantiene lo que caracterizaba a los niveles inferiores que ha superado(Martin, 2008). Según este modelo, el crecimiento de la comprensión no tiene lugar de forma lineal ni unidireccional. Estos niveles[28] son: Conocimiento primitivo (CP). Creación de imagen (CR-I),Comprensión de la imagen (C-I), Observación de la propiedad (OP),Formalización (F), Observación(O), Estructuración (E), Invención (I). En la Figura 2.3 se muestra la característica fractal del modelo de Pirie & Kieren y las complementariedades de la acción y la expresión

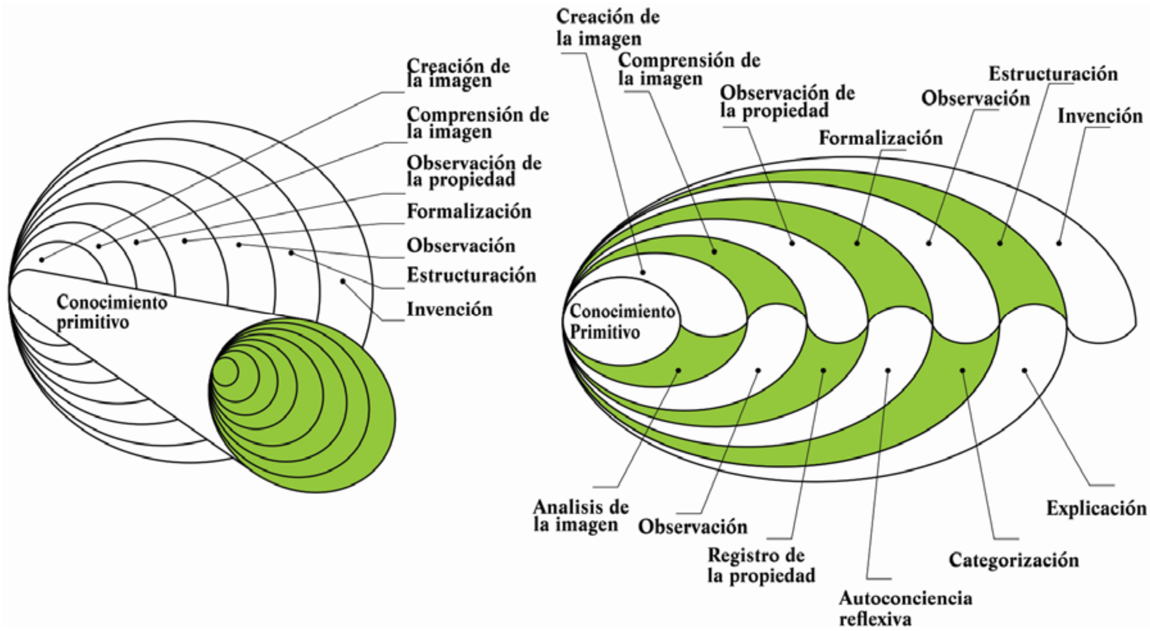


Figura 2.3. Modelo de Pirie & Kieren.Tomada de (Meel, 2003b).

Teoría APOE

En la teoría APOE de la comprensión de Dubinsky (1991) el desarrollo intelectual de un individuo no consiste en la adquisición de porciones específicas de conocimiento, más bien, requiere del surgimiento de mecanismos poderosos a través de

[28] La interpretación de los estratos de comprensión del modelo se encuentra en (Meel, 2003a).

los cuales el sujeto aumenta su habilidad para comprender situaciones matemáticas complejas. Estos mecanismos incluyen: la abstracción reflexiva, las dicotomías asimilación-acomodación y desequilibración-reequilibración, y la tricotomía intra, inter y trans (Asiala et al., 1997; Dubinsky & McDonald, 2001; Dubinsky, 1991; Tall, 1996).

De acuerdo con este marco de comprensión, una *acción*es una transformación de un objeto (u objetos) matemático impulsada desde el exterior. En el individuo, una acción puede representar un hecho en la memoria, requerir un algoritmo, o una fórmula a seguir. Después de que las acciones se *interiorizan* y se reflexionan, éstas llegan a convertirse en un *proceso*. A diferencia de la acción el proceso se impulsa internamente. Dependiendo del nivel del proceso, el individuo es capaz de reflejar y describir cada paso de una transformación. Una vez que el individuo ha construido el proceso, éste puede ser invertido, coordinado o conectado con otros procesos. Cuando las reflexiones individuales sobre las acciones se aplican a un proceso particular, percibe el proceso en su totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar sobre el propio proceso, y de que en realidad puede construir estas transformaciones, es entonces cuando ha logrado *encapsular* el proceso. Como mencionamos en la página107esta colección de procesos y objetos constituyen un esquema. De hecho, un individuo puede tener varios esquemas que deben estar interrelacionados en una estructura grande y compleja. La idea de la comprensión acción-proceso-objeto de un concepto matemático que se puede organizar en los esquemas se ilustra en la siguiente figura:

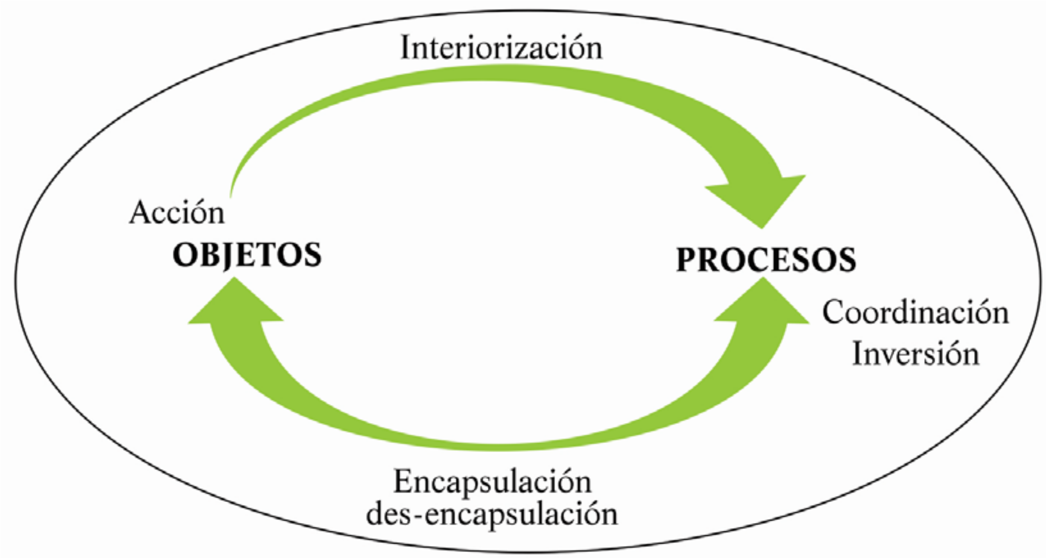


Figura 2.4 Construcciones mentales para el conocimiento matemático.

Esta teoría tiene como objetivo aislar pequeñas porciones de esa compleja estructura y dar descripciones explícitas de las posibles relaciones entre los esquemas. Si esto se hace para un concepto en particular se habla entonces de una *descomposición genética* del concepto, en otras palabras, esta descomposición describe los aspectos constructivos de una porción del conocimiento matemático. Aunque cada concepto tiene una única descomposición genética, esto no implica que sea válida para todos los estudiantes. La descomposición genética constituye una forma razonable que los estudiantes podrían usar para construir un concepto, y según Asiala et al.(1997)se espera que determinen aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza del conocimiento; es por ello, que la descomposición genética es la principal herramienta para describir la construcción del conocimiento desde la perspectiva de la teoría APOE que es una perspectiva epistemológica y psicológica (B. Edwards et al., 2005).

Descomposición genética de la integral y del límite

Meel (2003, p.247) define una descomposición genética de la siguiente forma:

> Una descomposición genética es una descripción idealizada de las representaciones, vínculos, objetos, procesos y acciones esperadas matemáticamente, que casi siempre se atribuyen al concepto. Además, la descomposición genética proporciona un trayecto posible para la formación de un concepto por parte del estudiante; sin embargo, puede no ser representativa de la trayectoria que tienen todos los estudiantes.

La descomposición genética (en adelante DG) permite estructurar el concepto matemático objeto de estudio, es la base para el diseño de las instrucciones y además, ofrece categorías conceptuales y analíticas para el diseño de la recogida de datos, el análisis de las construcciones mentales de los alumnos cuando adquieren el concepto matemático que se pretende estudiar y el análisis de los objetos matemáticos en el contexto institucional en el que son transmitidos.

Por su parte, Arnon et al (2014) en el marco de la teoría APOE definen la descomposición genética como secuencias hipotéticas que describen el desarrollo de la comprensión.

Para esta investigación se han utilizado descomposiciones genéticas de los conceptos de integral definida (ID) y del límite funcional, la primera elaborada en el desarrollo de una investigación previa realizada en el seno de nuestra universidad (Porres, 2012) y la segunda elaborada por Cottrill et al. (1996).

La descomposición genética de Porres, contempla la epistemología, el concepto, los teoremas, las propiedades y las caracterizaciones. Las siguientes tablas muestran cinco esquemas claramente diferenciados, en cuyo encabezamiento aparece el título que aglutina los conceptos que se incluyen en cada una de ellos:

Tabla 2.1 Descomposición genética de la ID. Conocimientos y prerrequisitos.

ESQUEMA I: CONOCIMIENTOS PRERREQUISITOS		
1.	Representación gráfica en sistema de coordenadas cartesianas de los objetos matemáticos.	(a) Reconocimiento de los ejes; del significado del origen; de las unidades y de las escalas. (b) Representación gráfica de puntos. (c) Representación gráfica de rectas.
2.	Coordinación de representaciones de puntos de las funciones.	(a) Interpretación de (x, y) cuando viene dado por los pares de las soluciones de la ecuación $y = f(x)$. (b) Interpretación de (x, y) cuando viene dada por la gráfica de la función $y = f(x)$. (c) Definición de las condiciones necesarias para que una relación sea una función e interpretación gráfica de dichas condiciones. (d) Superar la necesidad de tener una fórmula (expresión analítica) para interpretar una función.
3.	Coordinación de los diferentes aspectos de la continuidad de una función.	(a) En un punto: continuidad y discontinuidad (evitable e inevitable). (b) En un intervalo.
4.	Coordinación y traducción de diferentes modos de representación de una función.	
5.	Cálculo de áreas de rectángulos.	(a) Los lados de un rectángulo son de longitud entera. (b) Los lados de un rectángulo son de longitud racional. (c) Los lados de un rectángulo son de longitud irracional.
6.	Cálculo de áreas de triángulos y polígonos regulares.	
7.	Establecimiento del número π.	(a) Longitud de la circunferencia. (b) Área del círculo.
8	Cálculo de áreas de superficies que pueden descomponerse como suma (resta) de triángulos, cuadrados, polígonos regulares, círculos y sectores circulares.	

Tabla 2.2 Descomposición genética de la ID. Contextos.

ESQUEMA II: CONTEXTO GRÁFICO, ANALÍTICO, ALGEBRAICO Y NUMÉRICO DE LA ID.		
1.	Gráfico: Particiones, sumas inferiores y superiores de Darboux.	(a) Representar y expresar una particiónP asociada a un intervalo I. (b) Representar el área A, que se pretende calcular. (c) Representar y expresar los mínimos y máximos absolutos de una función en cada uno de los subintervalos de la partición P. (d) Representar las sumas inferiores y superiores de Darboux de una función asociadas a la partición P. (e) Comparar, gráficamente, las sumas inferiores y superiores de Darboux y el área, A, representada anteriormente.
2.	Algebraico-numérico: Particiones, sumas inferiores y superiores de Darboux.	(a) Calcular la partición P del intervalo I. (b) Aproximar el área A, por medio del área del rectángulo inferior y el rectángulo superior, es decir, $m(b-a) \leq A \leq M(b-a)$. (c) Calcular las sumas inferiores y superiores-Darboux. (d) Comparar y ordenar de menor a mayor los diferentes valores obtenidos en los dos puntos anteriores.
3.	Gráfico: Refinamiento de una partición.	(a) Construcción y representación de una partición P' más fina que P. (b) Representación de los mínimos y máximos absolutos asociados a los subintervalos de la partición P'. (c) Representar las sumas inferiores y superiores asociadas aP'. (d) Comparar, gráficamente, las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a P y a P' junto con el área$A$.
4.	Algebraico-numérico: Refinamiento de una partición.	(a) Calcular la partición refinada P'. (b) Calcular las sumas inferiores y supriores de una función en un intervalo asociadas a la partición P'. (c) Comparar y ordenar de menor a mayor las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a las particiones P y P' junto con el área A.
5.	Algebraico-analítico: Integral de Darboux.	(a) Interiorización de la integral inferior de Darboux como el extremo superior de las sumas inferiores. (b) Interiorización de la integral superior de Darboux como el extremo inferior de las sumas superiores. (c) Comparar las integrales inferior y superior de Darboux con el área A. (d) Interiorización del concepto de integral de Darboux (e) Interiorización del teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.
6.	Gráfico-analítico: Integral de Riemann.	(a) Representar los valores de una función en un punto intermedio de cada subintervalo de P. (b) Representar la suma de Riemann asociadas a una partición P y a un conjunto de puntos intermedios. (c) Comparar las sumas inferior y superior de Darboux con la suma de Riemann de una función $f(x)$ en un intervalo I asociadas a la partición P.

ESQUEMA II: CONTEXTO GRÁFICO, ANALÍTICO, ALGEBRAICO Y NUMÉRICO DE LA ID.		
7.	**Algebraico-analítico:** Integral de Darboux↔ Integral de Riemann.	(a) Interiorización del teorema del encaje. (b) Equivalencia entre las integrales de Darboux y de Riemann, en lo sucesivo, integral definida (ID). (c) Interiorización de la existencia de funciones integrables, por ejemplo: las continuas (lineales, afines, parabólicas, etc.), escalonadas y monótonas. (d) Comprensión de la existencia de funciones no integrables.
8.	**Aplicación:** Cálculo de la integral definida por medio de sumas inferiores y superiores de Darboux de la función $f(x) = x$ en el intervalo $I = [0, 1]$.	(a) Representación del área determinada por la función $f(x) = x$el eje de abscisas y las rectas$x = 0$ y $x = 1$. (b) Determinación de una partición, P_4, del intervalo $I = [0, 1]$de 5 nodos con una amplitud de cada subintervalo de $\frac{1}{4}$. (c) Representación y cálculo de las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a P_4. (d) Determinación de una partición, P_n del intervalo $I = [0, 1]$ de $n + 1$ nodos con una amplitud de cada subintervalo de $\frac{1}{n}$. (e) Representación y cálculo de las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a P_n. (f) Cálculo de la integral inferior y superior de Darboux de la función anterior en el intervalo I. (g) Cálculo del área del triángulo de vértices $O(0, 0), A(0,1)$y $B(1,1)$. (h) Comparación de los valores obtenidos antes. (i) Interiorización de la necesidad de calcular las áreas por procedimientos distintos al de las sumas inferiores y superiores de Darboux.

Tabla 2.3 DG de la ID. Primitiva. TVM, TFCI y propiedades.

ESQUEMA III: PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN, TVM, TFCI Y PROPIEDADES DE LA ID.		
1.	Concepto de primitiva de una función	
2.	Teorema de los incrementos finitos o del valor medio (TVM).	(a) Determinación de la hipótesis y la tesis del TVM. (b) Cálculo de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(a, f(a))$y $B(b, f(b))$. (c) Equivalencia entre la derivada de una función en un punto y la pendiente de la recta tangente en dicho punto. (d) Confirmación de la tesis del TVM mediante la igualdad de los dos puntos anteriores.
3.	Teorema fundamental del cálculo (TFC).	(a) Determinación de la hipótesis y la tesis del TFC. (b) Sumas de Riemann y teorema del valor medio del cálculo diferencial. (c) Igualdad entre integral inferior y superior de una función integrable Darboux, lo cual concluye la demostración del TFC. (d) Regla de Barrow.
4.	Propiedades de la integral definida.	(a) Linealidad de la integral definida. (b) Coincidencia de los límites de integración. (c) Teorema del valor medio del cálculo integral.

Tabla 2.4 Descomposición genética de la ID y cálculo de primitivas.

ESQUEMA IV: INTEGRAL INDEFINIDA Y CÁLCULO DE PRIMITIVAS	
1.	Concepto de integral indefinida.
2.	Linealidad de la integral indefinida.
3.	Tabla de primitivas.
4.	Primitivas inmediatas.
5.	Cálculo mental de primitivas.
6.	Cambio de variable en el cálculo de primitivas.

Tabla 2.5 DG de la ID. Integral indefinida y cálculo de primitivas.

ESQUEMA V: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA		
1.	Representación de la integral indefinida como área barrida entre la función $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = t$.	
2.	Asociación entre el cálculo de áreas y la integral definida.	La curva está por encima del eje de abscisas. La curva está por debajo del eje de abscisas. La curva corta al eje de abscisas.
3.	Área encerrada entre dos curvas.	
4.	Generalización del cálculo integral.	Resolución de problemas de economía. Resolución de problemas de física.

La descomposición genética de la integral tiene mayor grado de concreción que las de Czarnocha, Loch, Prabhu, y Vidakovic (2001) y Boigues, Llinares y Estruch (2010); surge de la larga experiencia del equipo investigador de la tesis doctoral de Porres (2012), de la implementación de cada uno de los seis ciclos de Investigación-Acción con los que se desarrolló su investigación y del estudio y análisis de la descomposición genética de la derivada realizada por (Badillo, 2003). Además, consideramos que debe ser así puesto que esta investigación se desarrolla con estudiantes de matemáticas, y muchos de ellos tienen grandes dificultades para comprender conceptos. Pensamos que los esquemas propuestos están conformados por varios subesquemas que no detallamos, pero creemos que no resultaría difícil establecerlos.

Tabla 2.6 DG del concepto de límite. (Cottrill et al., 1996).

1.	Acción de evaluar f en un punto x que se considera estar cerca a, o incluso ser igual a a.	
2.	Acción de evaluar f en varios puntos que se aproximan a a.	
3.	Construcción de esquemade coordinación	(a) Proceso en el que x se acercaa a.
		(b) Proceso en el que y se acerca a L.
		(c) Coordinación de (a) y (b) vía f.
4.	Encapsulación de 3. : Objeto límite	
5.	Reconstrucción de 3(c) en términos de intervalos y desigualdades.	
6.	Cuantificación de 5.: obtención de la definición $\varepsilon - \delta$.	
7.	Aplicación de la definición $\varepsilon - \delta$.	

Modelo de comprensión de Sierpińska

Anna Sierpińska (1990) planteó las siguientes preguntas acerca de la comprensión:

> ¿Es la comprensión de un acto, una experiencia emocional, un proceso intelectual, o una forma de saber?
>
> ¿Cuáles son las relaciones entre comprensión y: conocimiento, concepción, explicación, sentido, significado, obstáculo epistemológico, perspicacia?
>
> ¿Hay niveles, grados o m tipos de comprensión?
>
> [...]¿Cuáles son las condiciones para entender como un acto que se produce?
>
> [...]¿Cómo llegamos a comprender?
>
> [...]¿Puede medirse la comprensión? ¿Cómo?"(p.24).

Su trabajo se encaminó principalmente en la primera y tercera de las cuestiones. Sierpińska partió de las ideas de Dewey, Dilthey, Hussler, y Ricoeur, y consideró que la comprensión puede ser tanto un acto como un proceso. La comprensión es un proceso que puede ser recompensado al final por una experiencia momentánea como una "iluminación", que aparece después de pasar por dos períodos de trabajo mental, el primero inconsciente y el segundo consciente. El desarrollo de la comprensión se puede describir en distintos casos como esa consciencia respecto de un obstáculo, una consciencia que abre nuevas vías de conocimiento que a su vez pueden traer consigo nuevos obstáculos epistemológicos. La comprensión puede ser reconocida a través de un acto, la rapidez de comprensión no es una propiedad discriminante, lo que debe contar es la calidad o el "nivel" de comprensión. El nivel de comprensión cambia con el crecimiento del conocimiento, la complejidad y la riqueza de su estructura, entonces si consideramos estos cambios de nivel ya se ve la comprensión como un proceso y no como un acto. La comprensión es un acto mental que consiste en percibir directamente la "esencia de las cosas". Este acto "no está preparado para un análisis preliminar de las relaciones relevante entre los elemento de situación de un problema" (Sierpińska, 1990, p.25).

Podemos decir entonces que, en particular, el acto de superar un obstáculo epistemológico puede abrir al estudiante un dominio mayor que contenga obstáculos epistemológicos adicionales y más complejos. Desde esta perspectiva, los obstáculos epistemológicos actúan como la dualidad de comprender debido a que los obstáculos epistemológicos se enfocan en forma retrógrada en los errores, y la comprensión observa hacia el futuro de nuevas formas de conocer.

Por otra parte, Sierpińska (1990) concibe la comprensión en los siguientes términos:

> La comprensión es un acto, pero un acto envuelto en un proceso de interpretación, siendo esta interpretación un desarrollo dialéctico entre afirmaciones más y más elaboradas y la validación de esas afirmaciones (pág. 26). Comprender el concepto será concebido como el acto de aprehender su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión (pág. 27). Una descripción de los actos de comprensión de un concepto matemático contendría de este modo una lista de los obstáculos epistemológicos relacionados a este concepto, proveyéndonos de información más completa sobre su significado (pág. 28). La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos (pág. 35).

Según Meel (2003), desde esta perspectiva, la comprensión deriva su fundamento en las ideologías, predisposiciones, preconcepciones, conexiones y esquemas de pensamiento no percibidos del estudiante. Su fundamento igualmente está expuesto a la concurrencia de factores que actúan como obstáculos para una construcción futura de comprensión. Para que un estudiante supere dicho obstáculo, el estudiante debe experimentar un conflicto mental que cuestione sus propias convicciones. Respecto de las convicciones, Sierpińska (1987) afirmó “si la presencia de un obstáculo epistemológico en un estudiante se relaciona con una convicción de cualquier tipo, entonces la superación de dicho obstáculo no consistirá en reemplazar dicha convicción como opuesta. Esto significa caer en un obstáculo dual” (p.374). Cuando un estudiante supera un obstáculo, implica entonces que ha de despojarse de sus convicciones y analizar las creencias desde un punto de vista externo. Al hacer este abandono de convicciones, el estudiante reconocerá las suposiciones tácitas de la disonancia cognitiva y estará en posición de evaluar las hipótesis alternativas. Para realizar esta evaluación el estudiante debe identificar los objetos asociados con el concepto, identificar tanto las propiedades comunes como las que no los son de diversos objetos y sintetizar las relaciones entre las propiedades, hechos y objetos para organizarlos en un todo consistente.

Sierpińska (1990) considera que no todos los actos de comprensión están asociados con un acto de superación de un obstáculo epistemológico, sin embargo, establece que son complementarios:

> Superar los obstáculos epistemológicos y llegar a la comprensión son dos formas distintas de hablar sobre lo mismo. La primera es “negativa” y la segunda “positiva”. Esto sugiere un postulado para análisis epistemológicos de conceptos matemáticos: deberían ambos contener imágenes “positivas” y “‘negativas”, los obstáculos epistemológicos y las condiciones de comprensión (pág. 28).

Sierpińska nos ofrece entonces un criterio para medir la comprensión, ya que para ella los actos de comprensión y los obstáculos epistemológicos son complementarios, por tanto, la medición de la profundidad de la comprensión puede lograrse mediante el número de obstáculos epistemológicos superados o mediante la identificación del número y calidad de los actos de comprensión logrados. Según esto, el uso de un análisis epistemológico del concepto matemático ayuda a determinar la comprensión lograda por un estudiante a través de la observación atenta de las diversas maneras en que percibe un concepto, y de los riesgos subyacentes a las distintas percepciones.

Sierpińska (1990) entiende la comprensión como un acto inmerso en un proceso de interpretación, que se desarrolla en forma de dialéctica entre conjeturas cada vez más elaboradas, de manera similar desde el punto de vista de la autora, a lo que Lakatos propone en sus *Pruebas y refutaciones*, o Ricoeur cuando explica el proceso de validación de una conjetura. Cabe señalar que la comprensión así entendida es coherente con lo que Tall llamaba el ciclode actividad del pensamiento matemático avanzado o con la forma que tiene Brousseau deconcebir el conocimiento como interacción dialéctica entre el individuo y el medio (Blázquez & Ortega, 1998, p.146). Sierpińska, señala además que la comprensión trae consigo un nuevo modo de conocimiento, por ende, se puede clasificar ésta en función del conocimiento que produce, y establece cuatro categorías de actos de comprensión:

- *Identificación:* Este acto consiste en la repentina percepción de objetos que corresponden a la denominación del concepto (relacionado con el concepto en cuestión) o a la identificación de un término como si tuviera estatus científico.

- *Discriminación:* Es la diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas que estaban anteriormente confundidas.

- *Generalización:* Consiste en darse cuenta de la no esencialidad de una presunción o de la posibilidad de extender el rango de las aplicaciones.

- *Síntesis:* Consiste en aprehender relaciones entre dos o más propiedades, hechos u objetos y organizarlos en un todo consistente.

2.6 Marco de investigación. Actos de Comprensión de Sierpińska

Las teorías que hemos descrito en los párrafos anteriores responden a algunos de los interrogantes que Sierpińska ha planteado durante el desarrollo de sus investigaciones (Ver página 128).

Tanto la teoría APOE como el marco de la evolución de la comprensión de Pirie & Kieren proporcionan al observador de las acciones externas del estudiante un medio de recolectar, organizar y analizar dichas observaciones. Las descripciones de ambas teorías igualmente proporcionan no sólo la clasificación de los elementos y sus vínculos, sino que identifican sus relaciones con otras perspectivas relacionadas.

El alcance de la teoría APOE contempla un amplio rango de aplicación ya que se han tratado diversos temas relacionados con: funciones, álgebra abstracta, matemáticas discretas, cuantificadores, análisis, estadística, teoría de números, fracciones, etc. En efecto estos temas están vinculados con las matemáticas superiores y, en particular el concepto de integral definida como concepto inherente al campo del Análisis también está en el rango de actuación de esta teoría. Por el contrario, la teoría de Pirie & Kieren sobre la evolución de la comprensión se enfoca generalmente en el desarrollo de la comprensión de niños pequeños y, aunque ya se estén realizando estudios que sugieren la ampliación de este rango (Meel, 2003a) vemos que el campo de actuación de esta teoría es menor que el de la teoría APOE y, en nuestro caso particularmente el tipo de conceptos que tratamos está fuera de este rango, y por ende descartamos utilizarla en nuestro estudio.

Con respecto a la teoría APOE, puesto que este enfoque teórico contempla tres componentes a saber: el análisis teórico inicial, el diseño del tratamiento instruccional, la implementación y recolección de datos de investigación (Asiala et al., 1997), la segunda de estas componentes no la podemos contemplar en este estudio ya que no se va a realizar ningún procedimiento de este tipo. Sin embargo, en este trabajo se ha optado por considerar esa primera componente de su enfoque como punto de partida para la investigación. En primer lugar se realizará un análisis epistemológico detallado y posteriormente con la descomposición genética que es fruto de ese análisis teórico, se desarrollará el estudio en el marco teórico de los actos de comprensión de Sierpińska (véase la página 128 de este capítulo).

El marco teórico que mejor se adapta a las condiciones de esta investigación es el modelo de actos de comprensión de Sierpińska, que como se ha especificado anteriormente, propone cuatro categorías de actos de comprensión: *identificación, discriminación, generalización* y *síntesis*.

> Para Sierpińska la comprensión y los obstáculos son dos caras de la misma moneda, una es la parte negativa, los obstáculos, puesto que prestan atención a lo erróneo, mientras que la otra, la comprensión, es la parte positiva puesto que busca nuevas formas de conocimiento. Algunos actos de comprensión son actos de superación de obstáculos y otros se convierten en la adquisición de nuevos obstáculos. Una descripción de los actos de comprensión debería completarse con una lista de los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto, aportando más información sobre su significado. (Blázquez & Ortega, 1998, p.120).

Tanto la teoría APOE como el marco de la evolución de la comprensión de Pirie & Kieren son marcos más depurados y son más apropiados para realizar un análisis del progreso o crecimiento de la comprensión conceptual. Las aportaciones son escasas para analizar el estado de comprensión de una colectividad en un momento determinado respecto de un concepto concreto. Sin embargo, para analizar este estado, que es nuestro objetivo, es muy apropiado el marco de los actos de comprensión de Sierpińska y, en el caso que nos ocupa contamos con la ventaja de haber sido utilizado en el seno de nuestra universidad en investigaciones previas (Blázquez, 1999; Porres, 2012). Además, disponemos de una tabla de actos de comprensión y sus obstáculos asociados a la comprensión del concepto, que ha sido utilizada exitosamente.

El modelo teórico de los actos de comprensión de Sierpińska, es un buen marco teórico para la investigación en didáctica de la matemática pues satisface los ocho criterios de Schoenfeld (2000), matizados por Meel (2003b).

Capítulo 3. Antecedentes

El objetivo de este capítulo es mostrar los aspectos y resultados de investigacionesrelevantes para este estudio, realizadas en el emergente campo de la Educación matemática a nivel Universitario. Se han revisado las aportaciones en torno a las dificultades y obstáculos que tienen los estudiantes para comprender los conceptos: integral definida, proceso infinito y el Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Sin embargo, dada la relevancia que tuvo en su momento la definición que dio Lebesgue (1875-1941) de la *integral* que lleva su nombre, comenzaremos citando un fragmento del prólogo de su libro *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives* en el que se vislumbra a la luz de sus declaraciones, la dificultad inherente a la comprensión de la *integral de Riemann*[29].

> ...entre las numerosas definiciones que han sido sucesivamente propuestas para la integral de funciones reales de (una) variable real, no he retenido aquéllas que es, en mi opinión, indispensable conocer para comprender bien todas las transformaciones que ha recibido el problema de integración y por introducir los documentos (artículos, papers...) que hay entre la noción de área, tan simple en apariencia, y, ciertas definiciones analíticas de la integral con aspectos muy complicados.
> Uno se puede preguntar, es cierto, si hay algún interés en ocuparse de tales complicaciones y si no es mejor limitarse al estudio de las funciones que no necesitan más que definiciones simples. Esto no tiene más que desventajas cuando se trata de un Curso elemental; pero,

[29] Para funciones reales de una única *variable real*.

> como se verá en estas Lecciones, si aun así, quisiéramos limitarnos a la consideración de buenas funciones, haría falta renunciar a resolver muchos problemas con enunciados simples planteados durante mucho tiempo. Es por la resolución de esos problemas, y no por amor a las complicaciones, que he introducido en el libro una definición de la integral más general que la de Riemann y comprendiendo ésta como un caso particular.
> Los que me lean con atención, posiblemente lamentando que las cosas ya no sean simples, me reconocerán, pienso yo, que esta definición es necesaria y natural. Me atrevo a decir que, ella es, en cierto sentido, más simple que la de Riemann, tan fácil de entender como ésta y que, solamente los hábitos anteriormente adquiridos pueden hacerla parecer más complicada. Es más simple porque pone en evidencia las propiedades más importantes de la integral, mientras que la definición de Riemann no pone en evidencia más que un procedimiento de cálculo. Es por esto que también es casi siempre fácil, a veces incluso más fácil, con la ayuda de la definición general de integral, demostrar una propiedad para todas las funciones a las cuales se aplica esta definición, es decir para todas las funciones sumables, que demostrarla sólo para las integrables, apoyándose en la definición de Riemann.
>
> (Lebesgue, 2003, p.vi)

Las declaraciones de Lebesgue evidencian la problemática ya existente en torno a la comprensión del concepto de área. Igualmente manifiesta la complejidad inherente a definiciones analíticas de la integral y hace ver la llegada de la suya como una alternativa que no sólo generaliza la *integral de Riemann* (en la que no se consideran *"buenas funciones"*) sino que también es apropiada para subsanar las complicaciones detectadas en otras definiciones analíticas. Por otra parte, vemos que Lebesgue considera su *integral* "más simple"; se ratifica que, sea cual sea el punto desde el que se mire la *integral de Riemann* es un concepto complejo hasta para matemáticos de "*primera clase"* en términos de Turégano (2007). Cabe resaltar también que Lebesgue sugiere que la comprensión de su definición puede verse comprometida por *"los hábitos anteriormente adquiridos"*, una cuestión que, extrapolada al aprendizaje en general de las matemáticas nos haría pensar que Lebesgue reflexionaba acerca de los procesos de pensamiento de los estudiantes, aunque no de manera explícita[30].

[30] Que no pretende de manera alguna contradecir a Turégano (2007), sino más bien evidenciar que no se vieron reflejadas en las reflexiones de Lebesgue cuestiones que dejó abiertas, relacionadas con el pensamiento de los estudiantes.

Por último, y aludiendo al interés de esta investigación, se percibe que para el propio Lebesgue en su quehacer como matemático, las dos *integrales* son conceptos "fáciles" de comprender. De aquí surge la inquietud acerca de si para estudiantes de matemáticas con formación específica en esta disciplina, este concepto también debiera resultar de fácil comprensión y, de no ser así, cuáles podrían ser esos *"hábitos anteriormente adquiridos"* que serían causa de tal situación.

En la revisión de la literatura se examinan investigaciones relacionadas con la comprensión de elementos y estructuras ligadas a la *integral definida* en el *sentido de Riemann*, y a la forma en que éstas se relacionan con el propio concepto; particularmente, examinamos literatura significativa sobre *procesos infinitos* subyacentes a la *integral*.

3.1 La integral Definida

Dos estudios recientes exponen algunos de los resultados obtenidos en investigaciones realizadas sobre la enseñanza-aprendizaje de las *integrales* durante las últimas tres décadas (Camacho-Machín & Moreno, 2015; Gonzalez-Martín, 2015). Sendas revisiones dan cuenta de nuevas perspectivas y enfoques teóricos emergentes en la apertura de posibilidades a la profundización en la comprensión, estudio y desarrollo de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de la *integral*.

La última década ha sido especialmente prolífica en el desarrollo de investigaciones relacionadas con la comprensión y el uso de la *integral definida*[31]en el contexto de funciones que satisfacen el teorema fundamental del cálculo (Bajracharya & Thompson, 2014; Barjracharya, 2012; Jones, 2015a, 2015b; Kouropatov &Dreyfus, 2014; Sealey & Oehrtman, 2005; Sealey, 2014; Thompson & Silverman, 2008).

[31]En el sentido de Riemann.

La literatura especializada (Artigue, 1995, 2001; Bajracharya & Thompson, 2014; Barjracharya, 2012; Jones, 2013; Orton, 1983b; Rasslan & Tall, 2002; Sealey, 2006; Tall, 1992; Thomas & Hong, 1996) y nuestra experiencia evidencian que la mayoría de los estudiantes no poseen una comprensión conceptual de la *integral definida*, de nociones que le subyacen ni de cómo interactúan, o, en el mejor de los casos su comprensión se reduce al desarrollo de habilidades procedimentales, o, en palabras de Skemp, poseen una comprensión *instrumental* y no *relacional*[32].

En un estudio temprano Orton (1983b) evidenció las dificultades que tienen algunos estudiantes con el aprendizaje del cálculo. En su trabajo utilizó el sistema de clasificación de errores[33] de (Donaldson, 1963) con estudiantes británicos, 60 de bachillerato y 50 universitarios, para determinar el grado de comprensión, los errores comunes y las dificultades relacionados con procesos infinitos (*sucesiones, límites, sumas y aproximaciones)* que ellos tenían, en el contexto de la *integral*.

El estudio reveló que los estudiantes tuvieron problemas para comprender la relación *integral*-área *"bajo"* la curva, y que inclusive en los mejores se manifestaron dificultades en un núcleo de los ítems relacionados con el *límite* de una *suma*, interpretando el *límite* como una *aproximación* y no como el valor exacto de la suma cuando les preguntó si era posible obtener una respuesta exacta para el *área* bajo la curva de $y = x^2$ en el intervalo $[0\,, a]$, tomando cada vez más y más rectángulos bajo la curva[34].También concluyó que los estudiantes fueron capaces de obtener el *límite* de una sucesión cuando la *sucesión* se da explícitamente pero no lo hacían al resolver un problema en que iba implícito calcular el *límite.*

Según Orton, los estudiantes no dimensionan el alcance que subyace a los procesos de paso al *límite* en matemáticas. Además, reflexiona acerca de las reacciones que tienen los profesores frente a las dificultades relacionadas con la comprensión

[32]Véase por ejemplo (Skemp, 1978) para las nociones de comprensión instrumental y relacional.

[33]Estructurales, operativos y arbitrarios.

[34]Disminuir la norma de una partición equidistribuida del intervalo $[\,0, a]$.

de la *integral* como *límite* de una suma, y distingue entre aquellos que asumen un currículo que omita tópicos que exijan el uso de *procesos de paso al límite*, los que introducen la *integral* como una primitiva y, por último, los que tratan de mejorar la comprensión del concepto de *límite* y sus fundamentos algebraicos con la esperanza de que los estudiantes sean capaces de enfrentar los retos que tendrán en su encuentro con el cálculo infinitesimal.

Cuando se aplican las matemáticas a fenómenos reales, por ejemplo si la función $f(x)$ representa la velocidad de un objeto, entonces el área bajo la curva representa la distancia recorrida por el objeto. Los estudiantes necesitan entender *por qué* el área bajo la curva representa la distancia recorrida. Para que los estudiantes vean que el área bajo la curva representa una cantidad más que un área (i.e., distancia), es esencial que ellos entiendan cómo se crean las cantidades acumuladas (Thompson & Silverman, 2008).

Diversas investigaciones que se han presentado en el avance del tema verifican el bajo rendimiento de los estudiantes en los cursos de cálculo[35], entre ellas, (Turégano, 1998a) localizó las causas subyacentes de tales dificultades en los terrenos epistemológico, didáctico y psicológico. En su trabajo Turégano (1993, 1998, 2007), después de caracterizar la complejidad del concepto de *integral definida* estableció una secuencia curricular del cálculo y un enfoque de la integración, desde su perspectiva, coherentes con la génesis histórica de ambos. Según la autora, su propuesta pasa por comenzar la teoría de la integración independiente de la diferenciación y como primera introducción al concepto de *límite.*

> Para poder tener una imagen descriptiva del concepto de integral es necesario que el estudiante haya desarrollado el concepto de área como magnitud, que admita la divisibilidad infinita de un segmento y la existencia del límite, y que pueda tener una visión holística del gráfico, que, en determinadas ocasiones, puede descomponer en partes para poderlas después integrar de nuevo en un «todo»

[35]Una de las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades en aprender un objeto en cálculo es la deficiencia en el entendimiento conceptual. De acuerdo con un estudio de Aspinwall & Miller (1997), los estudiantes efectúan los cálculos de forma mecánica, desarrollando escasamente el conocimiento conceptual.

(Turégano, 1998a)

En su investigación Turégano (1998) distingue dos fases bien diferenciadas que se enmarcan por una parte en el campo del desarrollo de las ideas matemáticas y por otra, en el de la investigación educativa.

Del análisis interpretativo de las respuestas dadas por los estudiantes de bachillerato (14-16 años) a su propuesta didáctica para introducir el concepto de *integral* cabe citar algunas de sus conclusiones, relacionadas con *procesos infinitos*:

- La utilización de expansiones decimales en los términos de las sucesiones de números racionales en lugar de su expresión racional es un obstáculo para la obtención del término general. A pesar de ello, los estudiantes de la muestra mostraron facilidad en la utilización de procesos de inducción y generalización.

- Al dividir un intervalo en subintervalos, algunos estudiantes se quedan pensativos si al determinar los extremos ya no son números naturales sino racionales los números obtenidos. Piensan que entre dos naturales ya no hay más números sobre la recta, lo que implica que no hay un dominio de la recta racional.

- La utilización de las sucesiones $\{H(f,a,n)\}$ y$\{h(f,a,n)\}$ ha sido de gran utilidad para razonar sobre la situación de la gráfica de $f(x)$con respecto al eje$x$, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, la forma del gráfico, etc. Además, las hemos utilizado para sembrar el germen de número real. Esta definición permite establecer una relación integral-medida que favorece la transferencia a otros contextos y organizar la experiencia previa a la formalización de los conceptos de cálculo.

- Para poder tener una imagen descriptiva de integral es necesario que el estudiante haya desarrollado el concepto de área como magnitud, admita la divisibilidad infinita de un segmento y la existencia del límite, y pueda tener una visión holística del gráfico.

- Los estudiantes que parten de la premisa falsa de que el continuo está formado por elementos indivisibles tienen dificultades para reconocer y calcular el área bajo la curva velocidad como el espacio recorrido; no así los que recurren a una relación funcional entre las tres variables: $e = v \cdot t$. Es indudable que el acercamiento a la integral como medida del área de un rectángulo congruente con la región curvilínea permite una transferencia inmediata a esta relación, ya que asocian el tiempo con la base y la velocidad con la altura.

(Turégano, 2007)

Las tres primeras aserciones de Turégano manifiestan la dificultades que tienen los alumnos para comprender la naturaleza de ciertos procesos infinitos asociados al concepto de número y recta real (convergencia a números irracionales de sucesiones racionales y en los dos últimos apuntes alude a las dificultades que tienen los alumnos en el paso de lo finito a lo infinito relacionado con el continuo, bien sea como segmento o como área y en ellos se apunta a las dificultades que encierra la comprensión de procesos infinitos.

Artigue (1995) en su investigación realizada con estudiantes de primer ciclo universitario, señala que los estudiantes tienen la sensación de que para todo lo concerniente a los procedimientos relacionados con *integrales* o *diferenciales* basta desenvolverse en el campo de las mecanizaciones y dejan en un segundo plano lo relacionado con su comprensión. Agrega además que los estudiantes no evidencian en muchos casos la razón de ser de algunas *aproximaciones* relacionadas con el proceso integral. La misma autora Artigue (2001) revela que, a pesar de que algunos estudiantes muestren habilidades operativas[36] ejemplares para calcular *integrales definidas*, "poseen dificultades significativas en la comprensión de los procesos de *paso al límite* subyacentes a las nociones de *integral* y *derivada*".

En su trabajo con estudiantes universitarios de física Bajracharya & Thompson (2014) afirman que inclusive aquellos estudiantes que comprenden adecuadamente conceptos subyacentes al *teorema fundamental del cálculo* (por ejemplo, *función, variación, área*) a menudo tienen dificultades en identificar las conexiones entre ellos. También Barjracharya (2012) encontró que los estudiantes tenían muchas dificultades en determinar el signo de la *integral* cuando por ejemplo el *límite* inferior de integración era mayor que el superior; además, señaló que para que los estudiantes tuviesen éxito en la comprensión de aspectos relacionados con la *integral* definida debían *"invocar"* un contexto físico; es decir, el concepto de *integral definida* por sí sólo les era ajeno cuando no se interpretaba en un escenario sujeto a problemas físicos.

En Mahir (2009) se presenta una investigación realizada con un grupo de 62 estudiantes de segundo año de universidad, relacionada con *el conocimiento concep-*

[36] En el sentido de (Donaldson, 1963).

tual[37] *y procedimental*[38] de la teoría de la integración. En su trabajo concluye que los alumnos no tienen un conocimiento conceptual satisfactorio del concepto de *integral*, y señala además que aquellos que comprenden conceptualmente también tienen éxito en las acciones procedimentales. Mahir informó además sobre la falta de flexibilidad de sus estudiantes y su inhabilidad para realizar las conexiones necesarias entre los conceptos/ideas y su falta de entendimiento de los procesos cognitivos subyacentes.

La presentación inicial del concepto de integral se basa en las sumas de Riemann (Taylor, 1992; Courant, 1934; Apostol 1969), o sobre la base ecuaciones diferenciales (Shtein, 1995) citado en (Kouropatov & Dreyfus, 2013).

En su intento por proporcionar vías de progreso en la comprensión del concepto de integral, Kouropatov & Dreyfus (2014) proponen otra aproximación al concepto de integral para estudiantes de bachillerato destacados y aportan pruebas del potencial de este enfoque que evidencian la adquisición de una vista proceptual más profunda del concepto de integral. Este enfoque se basa en la idea matemática de acumulación. Partiendo de la idea de que los estudiantes construyen el conocimiento conceptual relacionado con la integral cuando se aproximan a éste como la totalidad de pequeñas partes de un todo, es decir, se toma como base la propuesta de usar el concepto de acumulación como idea esencial para aproximar el concepto de integral (Kouropatov & Dreyfus, 2013, 2014; Thompson & Silverman, 2008).

[37] Mahir se refiere al conocimiento conceptual como aquel que se conecta con otras piezas de conocimiento y quien posee este conocimiento también reconoce la conexión. Y las conexiones entre las piezas del conocimiento son tan importantes como las piezas en sí mismas(Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert & Lefevre, 1986).

[38] El conocimiento procedimental está formado por el lenguaje formal de las matemáticas y por reglas, algoritmos y procedimientos utilizados para resolver tareas matemáticas (Hiebert & Lefevre, 1986).

Sumas de Riemann

Es escasa la literatura relacionada con el tópico del razonamiento del estudiante sobre las sumas de Riemann y la integral definida. Encontramos tres excepciones en los trabajos de Orton (1983b), Thompson (1994) y Sealey (2006).

Orton (1983b) estudió la comprensión que tienen los estudiantes de la integral definida documentando las habilidades para evaluar las sumas de Riemann y las integrales definidas. El artículo se enfocó en los cálculos que debían hacerse para encontrar sumas de Riemann, expresar la integral como el límite de una suma e interpretar dicha integral como el "área bajo la curva". Teniendo en cuenta estas ideas, se puede pensar que no se necesita entender ni la suma de Riemann ni el concepto de integral para evaluar el área.

Artigue (1991) discutió los estudios de Orton (1983a, 1983b) relativos a la comprensión de la diferenciación y la integración en estudiantes de cálculo. Muchos de los estudiantes de Orton realizaban procedimientos rutinarios para encontrar el área bajo la curva, pero, difícilmente explicaban sus procedimientos y aún más, admitían que no entendían por qué los hacían (Artigue, 1991).

Thompson (1994), por su parte, enfocó su investigación en el desarrollo de la comprensión conceptual de las sumas de Riemann de tal forma que esta comprensión llevase a los alumnos a entender el Teorema Fundamental del Cálculo como un resultado obvio. El trabajo se realizó por medio de una serie de materiales instruccionales utilizados con futuros profesores durante diez sesiones divididas en cuatro fases en las que analizaba el comportamiento gráfico de funciones, la tasa de variación media, las acumulaciones de variaciones determinadas por las sumas de Riemann y las relaciones entre cantidad variable, acumulación de variación, y tasa de variación de acumulación.

Otra parte del estudio se enfocó a proporcionar a los estudiantes herramientas para que conceptualizasen las sumas de Riemann como una situación dinámica y los resultados del estudio mostraron que algunas de las ideas involucradas en las sumas de Riemann son intuitivas para los estudiantes.

Sealey (2006) partió de la hipótesis de que si se utilizan materiales instruccionales sobre estas ideas intuitivas, entonces los estudiantes serán capaces de construir en profundidad la comprensión de la estructura de la integral de Riemann y de aplicar esta estructura a problemas más complejos. Sealey examinó la comprensión que tienen los estudiantes de las sumas de Riemann y de las integrales definidas. Para entender cómo los estudiantes desarrollan la estructura de la integral de Riemann, Sealey se basó en la descomposición matemática de la integral de Riemann y lo organizó en lo que ella denominó las cuatro capas[39]: Producto, suma, límite y función, tomando particiones equidistribuidas. Los mayores obstáculos que se encontraron estaban relacionados con la capa del Producto. El estudio sugiere que la enseñanza de los conceptos de suma de Riemann e integral definida debe direccionarse a solucionar estas dificultades para dar a los estudiantes la oportunidad de desarrollar actividades en los que ellos sientan la necesidad de explorar las conexiones entre la comprensión de las aproximaciones a la suma de Riemann y su capacidad para establecer integrales definidas que pueden ser calculadas por medio del área bajo la curva o vía el TFC.

3.2 Procesos y conceptos infinitos

En matemáticas existen distintos tipos de procesos infinitos. Hay procesos límite continuos como $\lim_{x \to a} f(x)$, la noción de continuidad en sí misma, desarrollos decimales de números irracionales, el límite geométrico de una secante a una curva cuando se aproxima a la tangente. También hay procesos discretos, incluyendo los

[39] Layers.

límites de sucesiones y series, expansiones decimales, procesos iterativos para calcular números o aproximaciones de formas geométricas, y objetos definidos por procesos de paso al límite como el que ya Arquímedes había utilizado hace más de dos mil años para determinar que el área del círculo que es el *límite* de las áreas de los polígonos regulares inscritos cuando n (el número de lados del polígono) aumenta tanto como se quiera. Los estudiantes se encuentran muchas veces con este tipo de procesos. Por ejemplo, en Inglaterra se introduce este concepto primero de manera informal y mucho más tarde se da una definición formal, cuando es posible[40](Tall, 1980b). Esto significa que la imagen conceptual se construye mucho antes.

Con respecto a los procesos infinitos y, en virtud de que la idea de acción iterativa se utiliza de varias formas sintácticas para expresar la noción de acción continua, Lakoff y Nuñez (2000) caracterizan este fenómeno a partir de una *metáfora conceptual*[41]*denominada* Metáfora Básica del Infinito (MBI) y que definen:

> Consideramos que todos los tipos de infinito —conjuntos infinitos, puntos en el infinito, límites de series infinitas, infinitas intersecciones, mínima cota superior—son casos especiales de una metáfora conceptual particular cuando conceptualizamos procesos que siguen indefinidamente y tienen un estado resultante final único. Nosotros llamamos a esta metáfora la Métafora Básica del Infinito, o MBI para resumir[42].

El *dominio origen* de la MBI se basa en un proceso iterativo simple *paso-a-paso*[43] *y* el *dominio de destino* de la MBI es el dominio de los procesos infinitos, y su efecto es añadir una compleción metafórica a los procesos que continúan.

[40]Las definiciones formales de límites de funciones y sucesiones se dan a final de curso.

[41]La función primaria de las metáforas conceptuales es permitirnos razonar sobre dominios relativamente abstractos utilizando la estructura de inferencias de dominios relativamente concretos. Según Lakoff & Nuñez (2000) son "correspondencias" que conservan la estructura de inferencias en un dominio de origen (SourceDomain) al proyectarse en un dominio de destino (Target Domain).

[42]"We hypothesize that all cases of infinity—infinite sets, points at infinity, limits of infinite series, infinite intersections, least upper bounds—are special cases of a single conceptual metaphor in which processes that go on indefinitely are conceptualized as having an end and an ultimate result. We call this Metaphor the Basic Metaphor of Infinity, or the BMI, for short.

[43]Traducción de Step-by-step

Para Núñez y Lakoff esta metáfora es esencial en la conceptualización del infinito puesto que es aplicada usualmente a procesos infinitamente continuos como si fueran procesos iterativos infinitos en los que aunque cada iteración tiene final, el proceso continúa indefinidamente.

En la metáfora, el estado inicial, los procesos iterativos, y el resultado después de cada iteración son proyectadas sobre los correspondientes elementos del *dominio de destino,* de la MBI es el de los procesos sin fin y su efecto. Pero el efecto crucial de la metáfora es "añadir al dominio de destino la compleción del proceso y su estado resultante" para de esta manera obtener el concepto de infinito actual.

Nótese que la proyección conceptual impone un "estado resultante final" a un proceso infinito. Además, hay una condición crucial subyacente al dominio de origen y se impone sobre el dominio de destino mediante la metáfora a saber: la *unicidad* del estado final resultante de un proceso completado. La MBI aplica esta propiedad de unicidad para el estado resultante final del proceso sobre el infinito actual. El Infinito Potencial, como se caracteriza por *cualquier aplicación de la MBI,* es único. La existencia de distintos grados de infinito, (como los cardinales transfinitos) requeriría entonces múltiples aplicaciones de la metáfora del infinito. Asimismo, Garbin & Azcárate (2002) trataron de identificar inconsistencias además de representar, categorizar y analizar las situaciones de coherencia que manifiestan los alumnos en relación con sus esquemas conceptuales asociados al concepto de infinito actual.

Podemos advertir que la naturaleza del proceso no se especifica en la metáfora. La MBI es un mecanismo cognitivo general y cubre cualquier tipo de proceso, con lo cual, se pueden formar casos especiales de esta metáfora general, especificando el proceso que se tenga en mente.

Los procesos se suelen conceptualizar como si fuesen entes estáticos - a menudo como contenedores, trayectorias de movimiento u objetos físicos-. Por tanto hablamos de que estamos a *mitad* de un proceso en su *parte final.* Percibimos un proceso como el que se refiere a tener una longitud dada -corta o larga- susceptible de ser ampliada/reducida o truncada. Hablamos de las partes de un proceso, como si ellas fuesen un objeto, con partes y tamaño. Esto se extiende a los procesos infinitos también: Algunos infinitos son "más grandes" que otros. De hecho, a partir del cardinal de los números naturales $\aleph_0$ se puede crear una sucesión creciente de transfinitos: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3 \ldots$ (Ortiz, 1994).

Los procesos como normalmente los pensamos, se han instalado en el tiempo. Sin embargo, en matemáticas, los procesos se conceptualizan como atemporales; se ve esto reflejado en las sucesiones de Fibonacci por ejemplo: En estas sucesiones cada término (a partir del tercero) es la suma de los dos anteriores. La sucesión puede conceptualizarse como un proceso infinito que nunca deja de producir más términos o bien como un objeto, una sucesión infinita atemporal. Esta dualidad de conceptualizaciones no es exclusiva de las matemáticas sino que forman parte del conocimiento cotidiano.

Según Brown, Mcdonald, & Weller (2008, p.123) un proceso iterativo infinito es un tipo de construcción mental que entra en la categoría de proceso en el sentido de la teoría APOE. Un proceso iterativo infinito es una coordinación de un proceso de iteración a través de $\mathbb{N}$ con una transformación que puede aplicarse repetidamente. Se forma una sucesión infinita de objetos (e.g. un número, un conjunto, una figura geométrica) agregando un objeto a la sucesión en cada paso. En algunos casos el proceso consiste en seleccionar objetos secuenciados a partir de una colección de objetos ya construidos, mientras que en otros los objetos deben construirse al mismo tiempo que se construye la iteración. Para construir un proceso iterativo infinito, primero se necesita construir un proceso iterativo completo a través de los enteros positivos, que debe encapsularse en un objeto (llamado convencionalmente "∞") como un intento para aplicar una acción de evaluación al proceso para intentar determinar qué sigue después (Brown et al., 2008; Dubinsky, Weller, McDonald, & Brown, 2005). La esencia de esta aproximación es vislumbrar que un prerrequisito para construir un proceso iterativo infinito yace en la habilidad para construir un proceso de iteración completo a través de los números naturales con la transformación que asigna un objeto a cada número natural; una vez identificado como una totalidad, este proceso puede encapsularse en un objeto aplicándole una acción de evaluación; el objeto que se obtiene "el estado ∞" y entendido como más allá de los objetos que se corresponden con los números naturales (un objeto trascendente).

Para Radu & Weber (2011) la perspectiva de la MBI no ofrece una orientación clara acerca de las propiedades que debería tener el metafórico estado final, sólo que éste debe existir, ser único, y seguir cada estado intermedio. Hasta el momento no se tiene conocimiento de investigadores que hagan uso explícito de la MBI en sus investigaciones sobre procesos iterativos infinitos. Weller, Dubinsky, Stenger, & Vidakovic (2008) se muestran escépticos de la utilidad de la MBI puesto que, cuando los estudiantes usan razonamiento metafórico para responder cuestiones relacionadas con procesos iterativos infinitos usualmente les conduce a conclusiones que no son "normativamente"[44] correctas (Brown et al., 2008; Weller et al., 2008), sin embargo, Ely (2007) afirma que la MBI algunas veces ofrece una mejor perspectiva que la APOE en lo relacionado con el sentido conductual de los estudiantes.

Concepciones

Algunas de las dificultades relacionadas con los conceptos de *límite*, *suma infinita*, *división infinita*, son consecuencia de la forma en que se interpreta el concepto de infinito. Según Tall (1980b) para entender la naturaleza de los procesos de pensamiento, es insuficiente hacerlo desde la propia matemática, es decir, se deben tratar de entender los procesos de pensamiento por sí mismos. La intuición matemática juega un papel importante pues allí el pensamiento no se desarrolla a través de líneas lógicas.

[44] En su versión original "normatively". Nosotros lo interpretamos como un razonamiento matemáticamente correcto.

Un trabajo pionero en el estudio sobre las concepciones del infinito titulado "The intuition of infinity" (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979) abrió las puertas a casi una centena de trabajos que versan sobre las características cognitivas del infinito entre los que destacamos a Belmonte (2009) y a Sierpińska (1987), cuyas investigaciones se encaminaron también a estudiar diferentes caracterizaciones de la forma de entender el infinito.

Por su parte Fischbein et al. (1979) sugieren que el concepto natural de infinito es el concepto de *infinito potencial,* vinculado a la reiteración de un proceso finito que nunca termina, que puede repetirse *tanto como se desee* y que se caracteriza por la idea de *uno más* (menos), *posterio*r (anterior). Por ejemplo la posibilidad de dividir ilimitadamente un segmento en partes cada vez más pequeñas, tan pequeñas como se quiera, se puede hacer cada vez una división más, o toda división tiene una división posterior. Sin embargo, Cornu (1981, 1991) encontró que los estudiantes, a menudo, conciben la convergencia de unasucesiónnumérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en términos de la variación de un término particular a_n[45].

Si destacamos la "totalidad" del concepto de infinito como una unidad, como uno, tendremos la versión actual del infinito. Esta idea corresponde a "aquello cuyo mayor no puede ser pensado"[46].Según Tirosh (2002), el infinito *actual* puede tener distintos significados técnicos dependiendo del contexto en el que se utilice, ya sea en el sentido de *cardinal infinito* en el sentido de Cantor, *ordinal infinito* también en el sentido de Cantor representando correspondencias entre conjuntos ordenados, o *infinito no-estándar* derivado del análisis no-estándar, y, a diferencia de los otros , admite todas las operaciones de la aritmética, incluyendo la división para dar lugar a las interpretaciones infinitesimales.

[45]Por ejemplo, en la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{1}{n}$, el término particular $a_n = \frac{1}{n}$ "se hace arbitrariamente pequeño" cuando$n$ crece

[46]Esta es la definición que San Anselmo utiliza para describir su idea de Dios (Millán-Puelles, 1955,p.390).

En su trabajo, Belmonte y Sierra (2011), al estudiar la evolución del concepto de infinito, admiten la existencia de una idea intuitiva del infinito como resultado del análisis de las respuestas de los estudiantes sobre el infinito y los procesos infinitos. De su trabajo emergen tres modelos intuitivos que operan cuando un individuo aborda cuestiones que exigen de manera tácita el uso del concepto de infinito: los modelos de *indefinición*, de *divergencia* y de *acotado-finito/no acotado-infinito*, que se suman a los ya reconocidos en trabajos anteriores[47]: *inclusión*, *infinito=infinito* y *punto marca*, que "son recursos e imágenes que alberga la imagen conceptual[48] asociada, los cuales sirven para solventar la deficiencia o ausencia de elementos formales".

En los últimos años se han desarrollado investigaciones exhaustivas sobre las dificultades que los estudiantes experimentan con el concepto de límite Contreras &García (2015), en lugar de concebir un límite como un *objeto mental* por derecho propio, interpretan que hay una fuerte tendencia a verlo como un proceso potencialmente infinito que no termina nunca y que nunca alcanza su objetivo deseado. Esto ha marcado una línea divisoria en el curso las matemáticas desde el debate griego, tal y como concebía Aristóteles hace más de dos milenios (Ortiz, 1994), la distinción entre el infinito potencial, asociado a un proceso, y el infinito actual, como una totalidad completa.

En su artículo, Tall & Vinner(1981) señalan, desde la perspectiva de la imagen conceptual que los alumnos tienen del concepto de límite secuencial como proceso sin fin, inacabado, donde los términos de la sucesión *se aproximan pero no llegan* al límite. Haciendo alusión a la misma idea, Vinner (2002) evidencia imágenes conceptuales incorrectas que tienen los estudiantes y que les llevan a cometer algunos errores, entre ellos:

[47] Véase(Fischbein et al., 1979; Fischbein, 1999; Tirosh, 2002).

[48] Véase (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 2002).

- Una sucesión "no debe alcanzar su límite" (así, se diría que la sucesión $1,1,1,\ldots$ no converge a un límite)

- La sucesión debe ser monótona creciente o monótona decreciente (así, la sucesión cuyo $\boldsymbol{n}$-ésimo elemento está dado por $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ no tendría límite)

- El límite es el "último" término de la sucesión. Se alcanza el límite después de "pasar por" un número infinito numerable de elementos.

Asimismo, Tall (1980c y 2001) encuentra que las ideas de *límites* e *infinito,* suelen considerarse conjuntamente, y a la vez referirse a paradigmas distintos y opuestos. La noción de infinito potencial, formulado como un proceso de conteo se extiende a la idea de *cardinal infinito*. Este proceso tiene propiedades muy distintas de las propiedades de una cantidad variable que se hace arbitrariamente grande, que él denomina *número de medida infinita.*Como los cardinales infinitos no tienen inversos, los números de medida infinita pueden tomarse como variables que se hacen arbitrariamente grandes y tienen inversos que son cantidades variables que se hacen arbitrariamente pequeñas. Aquí Tall incorpora a la imagen conceptual los "números de medida infinita" como una *imagen mental* que puede favorecer el acceso a la noción de infinito. Por ejemplo en la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n} = 0'\underbrace{999\ldots9}_{nveces} = 1 - \frac{1}{10^n}$, se tiene que s_n tiende a un valor que difiere de uno por una cantidad $\frac{1}{10^n}$"arbitrariamente pequeña" cuando n crece, los alumnos sostienen que los términos de la sucesión se aproximan pero no alcanzan el límite, que finalmente les lleva a la imagen de tendencia con términos distintos al límite (difieren en una cantidad $\frac{1}{10^n}$) lo que les lleva a la no aceptación de términos iguales, argumentando que no es lo mismo tender que ser igual (de aquí que los estudiantes sostengan que $0'99999\ldots$ sea distinto de 1); esto, es consistente con la idea de que el límite tiene las mismas propiedades que los objetos que tienden al límite. Esa observación coincide con la aportación de Fischbein et al. (1979) en la cual comunicaron el caso de un estudiante que defendía la idea de que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ era $2-\frac{1}{\infty}$. Esta fue la misma idea a la que apelaron Lakoff & Nuñez (2000) en su metáfora del infinito.

De acuerdo con Cornu (1981 y 1983), los estudiantes tienen una idea de la palabra “ límite” que proviene de la vida cotidiana; en el lenguaje habitual es evocado con distintos significados y, en la mayoría de ocasiones con significados que difieren del matemático. El estudiante, que trae asumido el concepto de límite a través de *modelos espontáneos* entra en conflicto cuando le es enseñado el *modelo matemático*, que será en adelante el protagonista de muchos de los conceptos a desarrollar en el curso de análisis. Estos dos modelos cohabitarán en las ideas de alumno, derivaran mezclas que darán lugar a adaptaciones denominadas *modelos propios*. De hecho, hay estudiantes que tiene distintas ideas sobre un mismo concepto, que pueden resultar (y con frecuencia) matemáticamente incorrectas. Para Cornu, la mayor parte de los errores que cometen los estudiantes cuando se enfrentan a un problema son efectos lógicos derivados de las ideas inherentes a sus modelos propios.

En relación al término “límite” y a la expresión “tender a” Cornu señaló:

- Respecto a la expresión “tender a”, los alumnos tienen las siguientes concepciones: aproximarse, aproximarse sin llegar, aproximarse hasta que alcanza, semejanza (sin variación como en la expresión “este azul tiende a violeta”).

- Respecto al límite aparecen: límite inmóvil alcanzable, punto al que uno se acerca sin alcanzarlo, punto al que uno se acerca y alcanza, máximo o mínimo, límite inferior o superior, intervalo, lo que viene “inmediatamente después” de lo que se puede alcanzar, restricción, fin.

En Fernández (2015), utilizando el marco del análisis didáctico (Rico, Lupiáñez, & Molina, 2013) se analizan los significados de alumnos de bachillerato asociados. En concreto se realizó un análisis conceptual de los términos asociados al concepto de límite finito de una función en un punto, los significados de los alumnos, las definiciones personales, la estructura conceptual y los razonamientos que utilizaban a partir de sus definiciones. Otra vez se corroboraron las enormes dificultades asociadas a este concepto y se confirman los significados ya señaladas por Cornu.

En el contexto matemático, se distinguen (Tabla 3.1) cuatro modelos en la mente de los alumnos con relación a la expresión "tender a":

Tabla 3.1 Modelos matemáticos de la expresión "tender a"

EXPRESIÓN	MODELO	SENTIDO	
TENDER A	A	Se aproxima a (posiblemente permaneciendo lejos). Así, si x aumenta de 1 a 3, se puede decir que sí que tiende hacia 10.	VARIACION
	B	Se aproxima a... para llegar. Por ejemplo, si x aumenta de 1 a 3, entonces $1+x$ tiende hacia 4. Puede cambiar con el tiempo: tan pronto como se alcanza el valor designado, "aquí ya no tiende más"	
	C	Se aproxima a... sin alcanzarlo nunca. Por ejemplo, $\frac{1}{x}$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito.	
	D	"tiende a parecerse a", "está cerca de". Por ejemplo: 2,8 tiende hacia 3.	

Podemos observar que los modelos A, B, C contienen el concepto de variación ya que: "una cantidad que tiende hacia un número, debe variar. Una función constante no puede tender hacia algo".

Modelos espontáneos: Con respecto a la palabra "límite" que es de uso más común en el lenguaje cotidiano, vemos que, en general sugiere un objeto físico estático: límites geográficos, límites que no deberán superarse (de normativas legales, reglamentarias), frontera prohibida de cruzar "límites a priori que esbozan situaciones fundamentales en el universo"…mi paciencia llegó a su límite…

Modelos Propios: cuando entra en escena la noción de dificultad de alcanzar el límite, y por ende el concepto de "acercarse indefinidamente". En ocasiones se concibe el límite como aquello que separa dos cosas: el propio límite y el objeto con el que limita, un país y su propia frontera; el 0 es el límite entre positivo y negativo, el límite es el final: no hay nada al otro lado.

Los principales significados que emergen del concepto de límite se muestran en la Tabla 3.2:

Tabla 3.2 Significados emergentes del concepto de límite.

EXPRESIÓN	MODELO	SENTIDO
LÍMITE	α	Un límite es infranqueable, es una frontera (no se puede rebasar).
	β	Coincide con la noción de cota superior o cota inferior.
	γ	El límite puede ser alcanzado.
	δ	El límite es imposible de alcanzar.

Los resultados de Cornu mostraron que el carácter de no rebasabilidad del límite es el que predomina, se deduce que, posiblemente incidirá en el desarrollo posterior de la actividad matemática. Un punto importante que hemos de resaltar de las evidencias es que muchos estudiantes piensan que al concepto de límite no le subyacen ideas de cambio, de movimiento, de variación, de aproximación a ese límite, lo que se convierte directamente en un obstáculo de cara al aprendizaje de conceptos a los que precisamente le subyacen procesos infinitos como es el de la integral definida.

En su trabajo Williams (1991) de acuerdo con los modelos recopilados del trabajo de Cornu (1983) sugiere que los estudiantes establecen y dan sentido a las nociones informales del concepto de límite a través de extensiones metafóricas de las experiencias físicas (e.g., moverse a través de un camino, aproximarse a una pared, o dibujar una gráfica que se vaya acercando a una asíntota). Williams concluye que las concepciones dinámicas y la de límite como valor inalcanzable coexisten con la definición formal, lo que significa que los alumnos describen su comprensión sobre el límite en términos de dos o más modelos informales y que aceptan diferentes descripciones de límites como válidas Blázquez (1999).

En su estudio sobre la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en el nivel universitario, Sánchez (1997) establece (Tabla 3.3) las concepciones ligadas a la génesis histórica del concepto de límite, de acuerdo con las etapas señaladas por Cornu (1983) y Robinet (1983).

Tabla 3.3 Concepciones del concepto de límite ligadas a la génesis histórica.

<table>
<tr><th>CONCEPCIÓN</th><th>SENTIDO</th><th>VARIANTE</th><th>SENTIDO</th></tr>
<tr><td>GEOMÉTRICA</td><td>El límite se aplica a magnitudes y no a números. Surge principalmente en la matemática griega, a partir de la resolución de problemas principalmente geométricos.</td><td>GEOMÉTRICO-GRÁFICA</td><td>Aparece cuando se utiliza la representación gráfica en el estudio de límites.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">NUMÉRICA O ARITMÉTICA</td><td rowspan="2">Las cuestiones de convergencia y aproximación están ligadas al cálculo numérico. Aparecen principalmente en las obras de Newton, Euler, D´Alembert y Lagrange</td><td>ESTÁTICA</td><td>Ligada a la idea del continuo</td></tr>
<tr><td>DINÁMICA</td><td>Ligada a la noción de aproximación.</td></tr>
<tr><td>MÉTRICO ANALÍTICA</td><td colspan="3">Aparece cuando se enuncia la definición en términos de ε y δ, dejando atrás la geometría y los infinitésimos. La definición fue dada por Weierstrass.</td></tr>
<tr><td>TOPOLÓGICA</td><td colspan="3">El límite se define de forma más general utilizando la noción de abierto y punto de acumulación. Esta concepción se introduce a finales del siglo XIX tras la llegada de la teoría de conjuntos de Cantor y la teoría de funciones de Weierstrass.</td></tr>
</table>

Los investigadores señalan que existe una identificación de las concepciones históricas con las concepciones de los alumnos, y recalcan que de las respuestas analizadas evidencian otras concepciones como la geométrico-gráfica. Encontraron igualmente que tras la introducción formal del concepto, la concepción numérica estática predomina sobre la dinámica, contrariamente a lo que suele suceder inicialmente, seguramente por el cálculo algorítmico de límites, que se trabaja al margen del concepto de aproximación y se desarrolla en el contexto puramente algebraico.

En el trabajo de Sierra, González, y López (1998) se proponen concepciones de límite coherentes con la historia que luego relacionan con *criterios de justificación* (como lo denominan los autores) que los alumnos utilizan cuando trabajan el concepto de límite.

Tabla 3.4 Concepciones de límite desde la perspectiva de los criterios de justificación histórica.

CONCEPCIÓN	SENTIDO
MATEMÁTICA HASTA FINALES DEL XVII	Idea de aproximación de procesos geométricos iterativos.
EULER Y LAGRANGE	Centrada en los aspectos relacionales de la función sin tener en cuenta los entornos.
WEIERSTRASS	Se relaciona con el proceso de aritmetización del análisis
TOPOLÓGICA DE HAUSDORFF	La idea de límite se asocia la convergencia con un subconjunto acotado infinito de números reales sin consideraciones métricas.

Los autores afirman que los estudiantes hacen uso casi exclusivo de tres de los once criterios que establecieron, que en su orden de evocación fueron: utilización de límites laterales, aproximación (asociado a la concepción de D`Alembert y Cauchy) y por último el valor de la función en un punto (asociado a concepción de Euler y Lagrange).Igualmente señalan que el uso de la definición formal es ocasional. Concluyen además que: “los alumnos utilizan evocaciones de éstas concepciones cuando se enfrentan a las tareas”, o, en palabras de Cornu: utilizan *modelos propios* cuando se enfrentan a tareas relacionadas con el concepto de límite.

Límites

En su trabajo,Artigue (1995) señala algunos resultados de diferentes investigadores (Cornu, 1991; Schneider, 1991; Sierpińska, 1985) que evidencian algunas dificultades en el aprendizaje de conceptos propios y las clasifica en tres tipos (Tabla 3.5):

Tabla 3.5 Dificultades en el aprendizaje del concepto de límite.

ASOCIADAS CON	OBJ. BÁSICO	DIFICULTADES
COMPLEJIDAD DE LOS OBJETOS BÁSICOS DELCÁLCULO	Número Real	• Confusión en la asociación entre número real y decimal finito (reforzado por el uso de la calculadora). • Asociación entre número real y punto de la recta que no corresponde necesariamente con la visión del continuo numérico. • Formación de concepciones topológicas de $\mathbb{R}$ inadecuadas.Por ejemplo para muchos estudiantes la propiedad $\forall n > 0,\ \lvert a - b \rvert < \frac{1}{n}$no implica no implica la igualdad de los reales a y b, sino sólo una gran proximidad entre ellos.
	Función	• Confusión/desconocimiento en la identificación del concepto. • Falta de desarrollo de la flexibilidad para dar el salto cualitativo[49] de la función como proceso a la función como entidad conceptual. • Conflictos cognitivos en la articulación de los diferentes registros simbólicos de las expresiones de la noción de función. • Falta de pluralidad en el trabajo con los distintos registros (cuya causa se atribuye al predominio del registro simbólico en la enseñanza tradicional). • Escaso posicionamiento de la función como herramienta verdadera del trabajo matemático. • Manejo insuficiente del lenguaje para traducir problemas desde el cuadro de las funciones a otros cuadros matemáticos (numérico, geométrico, o externos a las matemáticas).
CONCEPTUALIZACIÓN Y FORMALIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE LÍMITE		El sentido común que evoca el término límite como algo inalcanzable.
		Descuido de aquello que diferencia esta operación particular (paso al límite) de las operaciones algebraicas comunes como por ejemplo, transferir al límite las propiedades comunes de los elementos del proceso.
		Falta de claridad en la identificación de los objetos sobre los cuales se efectúa el proceso del límite y la topología subyacente.
		Percepción inadecuada del juego dialéctico entre cuadro numérico y cuadro geométrico que subyace al proceso del límite.
		Falta de disociación entre los estatus operacional y estructural del límite
		Dificultades en la formalización estándar del concepto.
		Tendencia a considerar la formalización estándar del límite como dos procesos distintos: uno que se efectúa sobre la variable y el otro sobre los valores de la función.
		Existencia de un salto cualitativo entre el manejo relativamente intuitivo de la noción de límite y la noción formalizada estándar.
VINCULADAS A LA RUPTURA ÁLGEBRA/CÁLCULO		L a incursión en los modos de razonamiento que subyacen al entrar en el campo del cálculo es difícil, se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.

[49]Llamado “encapsulación” o “reificación”.

En Inglaterra se introducen las definiciones formales de límites de funciones y sucesiones mucho tiempo después de que se hayan realizado aproximaciones informales al concepto, cuando es posible[50](Tall, 1980b). Esto significa que la imagen conceptual se construye mucho antes de que se dé una definición conceptual formal. Pese a la debilidad conceptual es una aproximación razonable, y seguramente la *única* práctica, lo que significa que ciertas propiedades implícitas que no forman parte de la definición conceptual llegan a formar parte de la imagen conceptual.

En una investigación temprana Schwarzenberger y Tall (1978) señalaron que un gran número de estudiantes destacados en matemáticas que seguían estudios en la universidad asumían que si $s_n \longrightarrow s$, entoncess_n nunca sería igual a s. El siguiente comentario es de uno de estos alumnos:

> $s_n \longrightarrow s$ significa que s_n se acerca a s cuando n se hace muy grande, pero en realidad no alcanza a s hasta el infinito…El infinito es un concepto imaginario inventado por los matemáticos, útil para describir límites etc.

Aquí la imagen conceptual, que incluye el hecho de que $s_n \neq s$, no forma parte de la definición conceptual, y ella sobrevive a ésta, pese a la instrucción prolongada de las matemáticas formales. En un seminario impartido para futuros profesores de matemáticas, cuatro estudiantes interesados insistían en que s_n nunca es igual a s.

En un artículo presentado en el ICME IV Tall (1980a) comunicó los resultados de un cuestionario sobre procesos infinitos de paso al límite que aplicó a 70 estudiantes universitarios destacados de primer año de matemáticas, en el cual se les pidió que respondieran a la siguiente cuestión:

> ¿Utilizó la notación $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)$ en el instituto? Si responde sí, explique (si puede) qué son: $\delta x, \delta y, dx, dy, \frac{dy}{dx}, \delta, d$.

[50] Las definiciones formales de límites de funciones y sucesiones se dan a final de curso.

Éstas no son preguntas típicas de matemáticas, pero ayudan a comprender la imagen conceptual individual. Tall se mostró particularmente interesado en la interpretación del significado de dy así que incluyó 22 de las 70 posibles respuestas tipo-infinitesimal dadas. Específicamente, 16 de ellas se referían a cantidades "infinitesimales", "infinitamente pequeñas" o "la más pequeña posible" (la expresión "el más pequeño" ciertamente usado casi siempre en un sentido superlativo, más que matemático). Los otros seis respondieron a algunas de las cuestiones con frases tales como:

> "dy es el límite cuando δy tiende a cero", o
> "el único significado posible que puedo dar es que $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \delta x = 0$".

Las últimas respuestas subrayan una vez más el hecho de que muchos estudiantes tienden a visualizar un límite como un proceso dinámico en lugar de una cantidad numérica.

Otros tópicos del cuestionario muestran que la mayoría de estudiantes consideran el límite como un proceso dinámico.

En su tesis doctoral, Cornu (1983) a través de una secuencia didáctica, desarrolló un estudio exhaustivo sobre los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de límite cuyos resultados señalan una estrecha relación entre los obstáculos epistemológicos que han de superar los estudiantes para comprender el concepto de límite y los que aparecen en el desarrollo histórico del concepto, e identificó cuatro tipos de obstáculos (Tabla 3.6).

Tabla 3.6 Obstáculos epistemológicos relacionados con el límite según (Cornu, 1983).

OBSTÁCULO	CARACTERIZACIÓN	CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES
ASPECTO METAFÍSICO DE LA NOCIÓN DE LÍMITE	Es uno de los principales obstáculos para el estudiante: el Análisis presenta un salto importante de dificultad ya que el concepto de límite supone un tipo de pensamiento más abstracto: las matemáticas no se reducen solo a cálculos, a propiedades algebraicas simples. El infinito interviene y su aceptación no es sencilla. Este obstáculo hace difícil la comprensión de lo que puede ser el límite de una sucesión, sobre todo cuando este límite no puede ser calculado directamente por métodos algebraicos. ¿Cómo estar seguro de que un número existe, si no se puede calcular?	"no es muy riguroso…pero funciona"
		"no existe…es abstracto"
		"el método es justo si uno se contenta con un valor aproximado"
NOCIÓN DE INFINITAMENTE PEQUEÑO O INFINITAMENTE GRANDE	Todo se mueve como si existiesen números muy pequeños, más pequeños que los "verdaderos" números, pero sin embargo no son nulos. El símbolo ε contiene para muchos alumnos un significado de este tipo. ε es más pequeño que cualquier número real, pero no es nulo. De forma análoga, parece existir un entero mayor que los otros, pero no llega a ser infinito. La reacción a las nociones que surgieron al trabajar con cantidades variables no nulas, que pasan a ser "nulas en un instante" o de cantidades mayores que cualquier otra supusieron el desarrollo del concepto actual de límite, lo que evidencia un obstáculo inherente a la propia génesis del concepto.	"lo más justa posible"
		"se aproxima lo más posible al 0 absoluto"
		"cuando A y M se tocan pero no se confunden"
		"los puntos son en un momento muy poco distintos, pero no iguales.
		" el mayor número, es 0,999… : es el último número antes que 1"
ALCANCE DEL LÍMITE	El debate para saber si tal límite se alcanza o no, se encuentra en los alumnos, aproximadamente bajo la misma forma que en la historia. Según las expresiones utilizadas -se aproxima, se acerca- el límite se alcanza o no, aunque la mayoría piensan en una convergencia monótona sin que se alcance el límite. A propósito de 4 frases de la actividad sobre $\frac{\sin x}{x}$	"¿Cuándo m tiende a 0, es porque m puede ser igual a 0?"
		"cuánto más crece n entonces $\frac{1}{n}$, más se aproxima a 0"
		¿Tanto como se quiere?
		"No, ya que un día esto tocará"

OBSTÁCULO	CARACTERIZACIÓN	CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES
TRANSPOSICIÓN NUMÉRICA	Un obstáculo importante en la historia extinto hoy día en los procesos enseñanza-aprendizaje debido a que los estudiantes hoy día utilizan los números para tratar problemas relacionados con lo situaciones que relacionan magnitudes. Antiguamente había que abstraer el concepto del contexto geométrico y cinemático, para poder trabajar más con números que con magnitudes. El método de exahución griego podría haberse parecido a la idea actual de límite si no hubiera estado tan vinculado a la geometría	
PASO DE LO FINITO A LO INFINITO	Los estudiantes tienen tendencia a aislar "lo que pasa en el infinito." O aún, los valores aproximados se ponen "en bloque", sin idea de "aproximarse a". Se trata de una visión estática, que obstaculiza una visión más dinámica, en la cual lo que ocurre "en el infinito" permite prever lo que ocurre "en el infinito", y luego hablar de límite. Pero el paso de estático a dinámico debe sucesivamente ser por el paso estático, donde lo estático es esta vez el de la definición cuantificada del límite, definición donde nada se mueve: se da ε. Estos dos pasos son dos obstáculos importantes. Corresponden al paso de la noción de valor aproximado a la de valor aproximado "tanto como se quiera", después de la noción "$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \ldots$"	

Entendemos que la adquisición del concepto de límite necesita superar otros obstáculos: desigualdades, condiciones suficientes, valor absoluto, paso de la convergencia monótona a la convergencia, etcétera; pero los obstáculos no son propios del concepto de límite, son exteriores. Para tratar de salvar estos obstáculos y facilitar el aprendizaje de los alumnos, en (Blázquez, 1999) se presenta una definición que siendo tan rigurosa como la $\varepsilon - N$ no tiene asociado el formalismo de ésta y, en consecuencia, facilita el aprendizaje del concepto y que debiera preceder a la definición $\varepsilon - N$. Es ésta:

$\text{Lím}_{n\to\infty} a_n = L$ si, y sólo si, para cualquier aproximación K de L $(K \neq L)$, existe un n_0 tal que a partir de él, todos los términos mejoran dicha aproximación.

Los obstáculos a superar no están, forzosamente, "secuenciados": están organizados entre ellos de una forma muy compleja, y un tema interesante de investigación podría ser analizar esta organización, y poner a punto las secuencias que permitan seguir al alumno para franquear los obstáculos, sabiendo en cada instante dónde se está.

Un paso adelante en este aspecto lo propuso Sierpińska en su estudio sobre los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de límite. Sierpińska

(1985) da cuenta de una serie de obstáculos fundamentándose en las dificultades inherentes a la génesis y evolución histórica del concepto de límite, a partir de un estudio de casos. El estudio se efectúa a partir de una experiencia en los contextos geométrico y numérico, cuyo contenido trata la definición de la recta tangente a una curva en un punto.

Sus resultados derivaron en una clasificación de obstáculos en cuatro grupos:

Tabla 3.7 Obstáculos epistemológicos relacionados con el límite según (Sierpińska, 1985).

<table>
<tr><th></th><th>OBSTÁCULO</th><th colspan="2">CARACTERIZACIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="6">HORROR
INFINITI</td><td rowspan="3">RESISTENCIA A ACEPTAR EL INFINITO ACTUAL</td><td rowspan="3">Negar el estatus de operación matemática al "paso al límite".</td><td>Concebir el paso al límite como método de demostración que elimina el problema del infinito.</td></tr>
<tr><td>Efectuar razonamientos basados en inducción incompleta.</td></tr>
<tr><td>Buscarlo que no se conoce sólo por aproximaciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ALGEBRAICOS</td><td colspan="2">Transferir propiedades de los términos de una sucesión a su límite.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Transferir propiedades de los métodos del álgebra propios de cantidades finitas a cantidades infinitas</td></tr>
<tr><td>FÍSICOS</td><td colspan="2">Subyacentes a la noción dinámica de acercamiento.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">SUBYACENTES AL CONCEPTO DE FUNCIÓN</td><td rowspan="4">Todos los obstáculos relacionados con el concepto de función lo son también del de límite, puesto que este requiere una comprensión completa del primero</td><td colspan="2">Restringir sucesiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Olvidar el dominio</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reducir el estudio de las funciones monótonas</td></tr>
<tr><td colspan="2">No distinguir función de los valores que toma</td></tr>
</table>

	OBSTÁCULO	CARACTERIZACIÓN
		Confusión entre los extremos y el límite
GEOMÉTRICOS	La idea de frontera de conjuntos se asocia con la intuición geométrica de límite.	
	La idea geométrica de la diferencia entre una cantidad variable y su límite.	
LÓGICOS	Surgen en la formalización del concepto	Surgen en el intercambio de cuantificadores.
		Surgen en el uso del símbolo para el límite.

Podemos vislumbrar la similitud que existe entre esta clasificación de obstáculos y lo que hemos presentado anteriormente (Tabla 3.6).

Sucesiones

Las dificultades relacionadas con los límites no sólo afectan la comprensión del límite en sí mismo, sino que también causa dificultades en tópicos subyacentes como la continuidad y derivabilidad de funciones Cornu (1991) y, las series infinitas (Sierpińska, 1987).

Incompatibilidad entre las imágenes de límite con la definición $\varepsilon - N$

Los problemas relacionados con el aprendizaje del límite aumentan cuando se introduce el concepto de convergencia de una sucesión con la definición rigurosa vía $\varepsilon - n_0$(la definición $\varepsilon - N$), a saber:

> Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales se dice que converge a un número real Lsi para cada número positivo $\boldsymbol{\varepsilon}$, existe otro número positivo N (que depende de $\boldsymbol{\varepsilon}$) tal que:
>
> $$|a_n - L| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N.$$
>
> (Apóstol, 1965)

El primer encuentro riguroso que tienen los estudiantes con esta definición es en su curso de Análisis Real o cálculo avanzado. Después de todo, la relación entre ε y N en esta definición se aplica rigurosamente de manera similar para definir otros conceptos, como las sucesiones de Cauchy, el límite de una función en el infinito y la suma de series infinitas. La relación entre estos dos objetos $(\varepsilon - N)$ tiene una fuerte incidencia en la enseñanza y el aprendizaje de la propia definición así como de otros conceptos matemáticos. Los estudiantes tienen dificultades en comprender el significado del límite a partir de esta definición (B. S. Edwards, 1997) citado por Edwards y Ward (2003). Además, los estudiantes no utilizan correctamente la definición $\varepsilon - N$ para resolver problemas que implican límites (Cottrill et al., 1996).

Antes de estudiar la definición $\varepsilon - N$ la mayoría de los estudiantes han establecido una concepción informal de límite en contextos relacionados o con sus clases de matemáticas o con experiencias de la vida cotidiana. Sin embargo, para aprender el concepto de límite informalmente, los estudiantes deben construir imágenes relacionadas con procesos infinitos de una sucesión en sí misma (Cornu, 1991; Tall, 1980c; Williams, 1991) o imágenes de asíntotas o puntos de acumulación de una sucesión (Roh, 2008). Inicialmente, los estudiantes imaginan el límite como un proceso infinito en una sucesión, por ejemplo la mayoría de universitarios en el estudio (Schwarzenberger & Tall, 1978) afirmaban que 0.999... era menor que uno. Parece que la respuesta dada por los estudiantes se debe a que consideran el decimal infinito 0.999... como un proceso secuencial que nunca termina y no como el resultado de tal proceso; incluso puede ser síntoma de que no conocen que todos los números decimales al representarlos con coma tienen dos expresiones: la propia decimal y la periódica ($7{,}5$ y $7{,}4\hat{9}$ representan al mismo número racional). Más adelante, muchos estudiantes universitarios imaginan el límite de una sucesión como una asíntota de la sucesión, y creen que las sucesiones $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ son divergentes (Roh, 2008). En tercer lugar, los estudiantes tienden a considerar una sucesión convergente si infinitos términos de la sucesión están en un entorno suficientemente pequeño de un determinado valor; es decir, de un *punto de acumulación.*

Aunque ya se haya introducido y trabajado con la definición $\varepsilon - N$ los estudiantes se siguen inclinando por el uso de imágenes de límite asociadas con sus experiencias de aprendizaje previas (Pinto & Tall, 2002; Przenioslo, 2004)

Complejidad de la estructura lógica de la definición $\varepsilon - N$

La complejidad subyacente a la estructura lógica de la definición vía $\varepsilon - N$ ejerce una fuerte influencia sobre la comprensión de la propia definición. En particular, no es sencillo entender qué rol desempeñan los cuantificadores de la definición $\varepsilon - N$ en la definición del límite de una sucesión ni tampoco porqué los cuantificadores se describen de esa forma (Burn, 2005; Cornu, 1991; Durand-Guerrier & Arsac, 2005; Mamona-Downs, 2001). Quizás esto se deba a que los estudiantes tienen dificultades para entender la razón por la cual la representación "$\lim_{n\to\infty} a_n = L$" puede deducirse de las desigualdades "para cualquier $\varepsilon > 0 \ldots |a_n - L| < \varepsilon$". La adquisición de estas cuantificaciones no se puede generar fácilmente desde las definiciones matemáticas (Cornu, 1991; Dubinsky, Elterman, & Gong, 1988; Dubinsky, 1997).

Por otra parte, Alcock & Simpson (2005) afirman que para estudiantes que posean conexiones firmes entre la estructura lógica y el significado subyacente a la definición de convergencia, podrían reconstruir y utilizar la definición de convergencia de manera adecuada. Sin embargo, la comprensión que tiene el estudiante del concepto de convergencia no suele atribuirse a la estructura lógica de la definición. En la investigación llevada a cabo por Selden & Selden (1995), se confirmó que muchos estudiantes poseen poca habilidad para asociar un enunciado informal con su estructura lógica formal en contextos matemáticos. De forma similar, sin la correcta adquisición de la estructura lógica, los estudiantes pueden crear su propio sentido de la definición $\varepsilon - N$, que difiere considerablemente del sentido matemático del límite de una sucesión (Davis & Vinner, 1986). Se ve que los estudiantes no pueden encontrar conexiones relevantes entre la definición $\varepsilon - N$ y el significado del límite de una sucesión y, por tanto, puede ser que para los estudiantes sea difícil a considerar la definición $\varepsilon - N$ apropiada del límite de una sucesión.

Obstáculos y actos de comprensión

En su artículo Sierpińska (1990) aporta una lista de obstáculos relativos al límite secuencial y los actos de comprensión necesarios para superar dichos obstáculos[51]. Utiliza la definición*: "Casi todos los términos de una sucesión numérica infinita se acercan tanto como queramos a un número llamado límite"*. Los obstáculos y actos de comprensión se recogen en las tablas 3.8, 3.9, 3.10 según tengan que ver con el sujeto, con el verbo y la frase adverbial o con el objeto y su relación con el sujeto de la frase anterior, respectivamente, y en Tabla 3.11 si tienen que ver con la definición formal. La relación que existe entre obstáculo y acto de comprensión ya se explicita en el capítulo anterior.

Tabla 3.8 Obstáculos y actos de comprensión relacionados con el sujeto.

ACTOS DE COMPRENSIÓN	OBSTÁCULOS
Identificación de sucesiones infinitas como objetos dignos de estudio	La convergencia es un fenómeno natural (es imperso nal, no existe sujeto)
	Una sucesión es una secuencia de cálculos (el sujeto es el que hace los cálculos).
	Una sucesión es una lista muy larga de números.
Identificación de diferentes concepciones de infinito (potencial, actual, números indefinidamente grandes, etc.).	Diferentes conceptos de infinito.

[51] En el sentido de Sierpińska (1990), conceptos definidos en el marco teórico.

ACTOS DE COMPRENSIÓN	OBSTÁCULOS
Identificación de conjuntos infinitos y acotados.	Lo infinito es ilimitado.
Identificación del problema de alcanzar el límite como problema filosófico relacionado con la naturaleza de las matemáticas y en infinito.	El problema de alcanzar el límite es matemático y tiene solución matemática.
Identificación de diferentes actitudes filosóficas en las matemáticas.	Actitudes filosóficas diferentes en las matemáticas.
Síntesis del concepto de sucesión numérica.	
Identificación del sujeto de acercar.	
Síntesis de los conceptos de "acercamiento" y número.	El significado del término "acercarse" depende de contexto: difiere en el dominio de número y en el de las magnitudes físicas o geométricas.
Discriminación entre "infinitos términos se acercan al límite" y " casi todos los términos se acercan al límite"	La convergencia es cuando un número infinito de términos de la sucesión se aproxima a algo.

Tabla 3.9 Obstáculos y actos de comprensión relacionados con el verbo y la frase adverbial.

ACTOS DE COMPRENSIÓN	OBSTÁCULOS
Identificación de sucesiones que se acercan a algo.	
Discriminación entre número y forma del número.	El número es una forma escrita (se centra en la forma y no en el valor).
Discriminación entre convergencia y estabilización de cifras decimales.	Convergencia es la estabilización de las cifras decimales.
Discriminación entre sucesión y regla para producir números.	Una sucesión es una regla para producir números.
Identificación del orden de los términos como un hecho importante en sucesiones.	Una sucesión es un conjunto.
Discriminación entre "acercamiento" y "acercamiento tan cerca como deseemos"	Sucesiones convergentes son sucesiones que se acercan a algo.

Tabla 3.10 Obstáculos y actos de comprensión relacionados con el objeto-sujeto.

ACTOS DE COMPRENSIÓN	OBSTÁCULOS
Discriminación entre sucesiones de Cauchy y sucesiones convergentes.	La convergencia consiste en un decrecimiento de la distancia entre términos de la sucesión.
Identificación del "objetivo" del "acercamiento" (es decir, del límite)	
Síntesis del paso al límite como operación matemática definida sobre las sucesiones convergentes con valores reales.	Pasar al límite es un método heurístico útil para resolver cierto tipo de problemas.
Síntesis de la noción del paso al límite como operación matemática bien definida (unicidad del límite).	Pasar al límite es un método riguroso para probar relaciones entre sucesiones y números que se llaman su límite.
Discriminación entre números y conceptos tales como cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes.	Límite de una sucesión es el valor de la sucesión en el infinito.
Discriminación entre los conceptos límite y valor.	

Tabla 3.11 Obstáculos y actos de comprensión. Relación con la comprensión de la definición formal.

ACTOS DE COMPRENSIÓN	OBSTÁCULOS
Discriminación entre el uso de letras en álgebra y lógica.	Las letras sirven como variables o como magnitudes constantes.
Identificación del rol de los argumentos en una sucesión como índices de los valores.	
Identificación de índices de términos de una sucesión como números.	Los índices de los términos de una sucesión no son números.
Síntesis de discusiones alrededor del problema de alcanzar el límite a la luz de la definición formal.	

El rol de la visualización

Los resultados de algunas investigaciones revelan que los estudiantes tienen dificultades para comprender la convergencia de series y sucesiones (Alcock & Simpson, 2004, 2005; Alcock, 2001).

En el trabajo de Alcock & Simpson (2005) se aborda el problema de la convergencia de sucesiones y series desde la perspectiva de la visualización. Se examina el trabajo de estudiantes que en su razonamiento sobre el análisis real no propenden a incorporar imágenes visuales, es decir, hacen inferencias casi exclusivamente desde el razonamiento verbal y algebraico (estudiantes no-visualizadores). Algunos de estudiantes no-visualizadores operan con las definiciones y otras representaciones algebraicas de una manera que es consistente con la teoría formal, y aparentemente entienden la forma en la que éstas encajan en la estructura general de la teoría. Otros parecen centrarse en características simbólicas aisladas, sin relacionarlos con los conceptos matemáticos subyacentes en contraste con los alumnos que visualizan. Los resultados de este estudio se contrastan con los de un trabajo previo (Alcock & Simpson, 2004), en el que se han estudiado los mismos conceptos observando estudiantes que visualizan. Se puede destacar el marcado contraste entre los estudiantes no-visualizadores de los que los son, ya que para los primeros las cuestiones conceptuales clave están estrechamente relacionados con sus definiciones mientras que los segundos creen entender los conceptos sin hacer referencia a ninguna definición. También observaron que los estudiantes visualizadores tienen un marcado sentido de los "objetos" y son a menudo rápidos y fiables al efectuar juicios de corrección de algún enunciado; sin embargo, el éxito del trabajo visual a este nivel parece depender de que el estudiante prefiera y sea capaz de establecer y utilizar las conexiones entre sus representaciones visuales y algebraicas formales. De hecho, aquellos estudiantes que tengan un sentido interno de autoridad, quienes identifiquen las conexiones entre todas las representaciones probablemente desarrollarán un buen conocimiento acerca de qué objetos satisfacen determinadas propiedades e incorporarán esta información a sus imágenes. Ellos pueden aprender a traducir de ida y vuelta entre las imágenes visuales, designación conceptual y representación algebraica de los conceptos para situarse en una posición fuerte en el uso de sus representaciones visuales para orientar su razonamiento formal.

Es oportuno destacar otros trabajos que, aunque no han sido mencionados se refieren a procesos infinitos muy particulares. Si bien no se ha profundizado en ellos parece muy interesante tenerlos en mente ya que también tratan dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático.

Conceptos relacionados con el límite y los procesos infinitos que intervienen en los conceptos de derivada e integral (Azcárate & Camacho-Machín, 2003). Estudios profusos relacionados con la caracterización y causalidad de las dificultades, obstáculos y errores inherentes en la comprensión del concepto de límite y la determinación de propuestas didácticas para solventarlas

Blázquez(1999); Claros, Sanchez, & Coriat (2007) han arrojado importantes resultados que optimizan el entendimiento del estudiante, el conocimiento establecido por la comunidad matemática y los valores pedagógicos que el profesor incorpora en su quehacer como docente a la hora de trabajar la noción de límite. Se han desarrollado estudios relacionados con el concepto de proceso infinito. Así, Tall (1980b) trabajó con el proceso infinito de *"paso al límite"*; Tirosh, Stavy, & Cohen (1998)analizaron el proceso de subdivisión; Tsamir & Tirosh(1999) la comparación; Ely (2007) procesos de iteración, Garbin (2005) procesos geométricos, y también procesos de aproximación, de paso al límite, de recursión, de división; Mamona-Downs(2001) sucesión de objetos geométricos (curvas zigzagueantes) y la medición de estos objetos; Gardiner (1982) presenta un examen detallado de algunos procesos infinitos, y realiza un análisis minucioso de algunos procesos específicos. Tall (1993) ya ofrece algunas perspectivas para la realización de investigaciones relacionadas con algunas dificultades de los estudiantes en la comprensión de los procesos infinitos y, por su parte, (Scaglia & Coriat, 2003) caracterizan obstáculos epistemológicos relacionados con el proceso infinito sugerido por las infinitas cifras decimales de la escritura posicional de algunos números construibles.

3.3 Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Nada se considera más básico en el cálculo que el Teorema Fundamental del Cálculo Integral el cual se presenta como sigue:

Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI). Para cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \qquad \text{para } a < x < b, \qquad (1)$$

y, si $F'(x) = f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

La ecuación (1) se conoce como la *parte antiderivada* del TFCI porque muestra cómo usar la integral definida para construir una antiderivada. La ecuación (2) se conoce como la parte *de la evaluación* del TFCI porque muestra cómo usar la antiderivada para evaluar la integral definida.

El problema esencial ligado al enunciado de este teorema fundamental es que pocos estudiantes lo entienden. La interpretación común es que la integración y la diferenciación son procesos inversos[52]. Esto está bien en sí mismo; el problema radica en que la integral definida ha sido definida como un límite de sumas de

[52] Una idea que tomó fuerza gracias a Sylvestre-Francois Lacroix, autor de la amplia mayoría de los libros de cálculo leídos en la primera mitad del siglo XIX. Lacroix escribió su enorme *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de 1797-1798 para consolidar todo el conocimiento del cálculo y la versión corta *Traité Élementaire.*

Riemann. Para la mayoría de los estudiantes una definición práctica es asumirla como la diferencia de los valores de "la" antiderivada. Cuando esta interpretación del teorema se combina con la definición común de integración, el teorema carece de cualquier significado.

Una dificultad inherente a la comprensión del TFCI es el hecho de que el enunciado del teorema que se ha dado en el párrafo anterior es un resultado matemático del siglo XIX sumamente refinado (Bressoud, 2011). A menudo nos acomodamos y afirmamos simplemente que los problemas de las áreas y las tangentes son inversos el uno del otro. Recapitular en el cómo Leibniz se enfrentó con esta complementariedad quizás nos diga algo acerca de las dificultades que probablemente se encuentren nuestros estudiantes cuando traten de entenderlo. Existen dos corrientes distintas de comprensión del TFCI: la que considera el punto de vista *geométrico* desarrollado en el trabajo de Leibniz y la más primitiva, la *dinámica,* que se contextualiza en el trabajo de Newton.

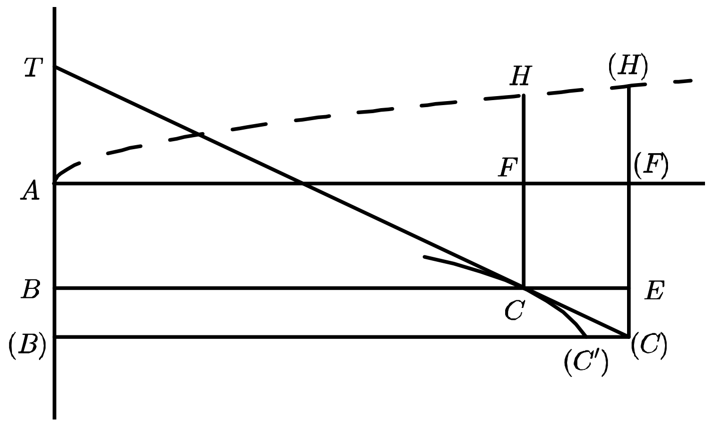


Figura 3.1 Ilustración de Leibniz de su prueba del TFCI.

Cuando retornamos al siglo XVII, vemos que las integrales y las derivadas no se pueden encontrar como operadores en el sentido moderno, ni siquiera los objetos de estos operadores, las funciones existían en algo parecido a nuestra moderna comprensión. En lugar de funciones, los objetos a los que se les aplicaba el cálculo eran curvas. Las integrales se entendían como áreas y las derivadas se definían como la razón del *triángulo característico*, el triángulo formado por el eje horizontal, el segmento de recta desde este eje al correspondiente punto sobre la curva (usualmente vertical, pero en el siglo XVII, la ordenada no fue siempre medida perpendicular al eje), y la línea tangente a la curva en el punto(el triángulo TBC de la Figura 3.1). Más que restringirse por sí mismo a la derivada, Leibniz trabajó con el *triángulo diferencial* (El triángulo $CE(C)$ de la Figura 3.1), un triángulo similar al característico, pero con lados que representan las diferenciales de las variables y la pendiente de la recta que contiene la hipotenusa, que representa la derivada. Leibniz en su interés por buscar el área bajo una curva, demostró cómo construir una curva auxiliar para la cual la tangente (la razón de los lados del triángulo característico) es proporcional a la altura vertical de la curva original. Se dio entonces la oportunidad para emplear el argumento de sumación para demostrar que el área en cuestión es proporcional a la ordenada de la curva auxiliar. Si se conoce una forma explícita para la curva auxiliar, ésta provee una fórmula para el área. En notación moderna, si encontramos una función F para la cual la curva original se describe por $y = F'(x)$, entonces el área se expresa en términos de F, lo que nos lleva a la parte de la evaluación de TFCI. Según Víctor Katz (citado en Bressoud 2011) "lo que le permitió a Leibniz encontrar esta prueba fue su comprensión de áreas y tangentes como manifestación de sumas y diferencias" (p.102). Como tales, su naturaleza inversa es obvia.

Por otra parte, Newton reconoce la integración como una acumulación o sumación de áreas infinitesimales. Newton usa modelos geométricos para razonar sobre la relación de la aceleración, la velocidad y la distancia. La comprensión dinámica del TFCI considera la función a ser integrada como una razón de cambio y a la integral definida como un acumulador de este cambio. El resultado que halló Newton sobre la razón de cambio del área surgió como respuesta a la siguiente pregunta: ¿Si tenemos una expresión para el área bajo una curva como una función y de la abscisa (distancia ab de la Figura 3.2), entonces cómo encontramos ahora la ecuación de la curva acotada?[53] La solución que dio Newton consistía en observar que "el movimiento por el cual $y$se incrementa sería $bc = q$" la ordenada de la curva. Ésta es la parte antiderivada del TFCI: la razón de cambio del área está dada por la ordenada de la curva acotada. La clave de la comprensión dinámica del TFCI radica en la habilidad para reconocer la ordenada como la razón de cambio del área. Como podemos observar esto está íntimamente ligado al viejo problema de graficar la velocidad como una función del tiempo y reconocer que la distancia acumulada es el área bajo la curva de esta gráfica, una "idea con "pedigree" que nos remonta por lo menos al siglo XIV" (Bressoud, 2011, p.104).

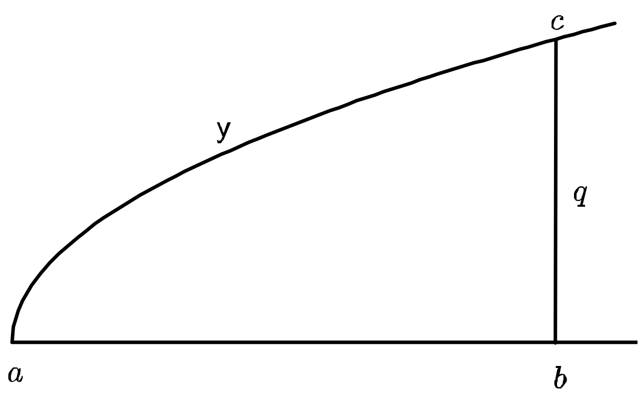


Figura 3.2 Ilustración de Newton para su enunciado del TFCI.

Cauchy ya en el siglo XIX empezó su estudio sobre la integración en Lecture 21 de *Resumé des leçons... sur le calcul infinitésimal (resumen de lecturas...sobre el cálculo infinitesimal)* con la única restricción en el enunciado de que las funciones de su estudio fuesen continuas. Cauchy formó lo que conocemos hoy día como suma de Riemann a izquierda:

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_3 - x_2)f(x_2) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

[53] Esta pregunta está expresada en lenguaje moderno, y corresponde al problema 5 del manuscrito de Newton *Theoctover 1666 TractonFluxions* (tomado de (Bressoud, 2011)).

y usó el teorema del valor intermedio para mostrar que cada una de estas sumas se pueden expresar como $(X - x_0)f(x_0 + \theta(X - x_0))$ para algún $\theta \in (0,1)$ y, justificó que ésta aproxima un límite señalando: "los valores de los intervalos llegan a ser muy pequeños y el número n muy grande" (Cauchy 1823, citado en Bressoud, p.108).

Igualmente Cauchy utilizó el teorema del valor medio para integrales,

$$\mathcal{F}(x+a) - \mathcal{F}(x) = a\mathcal{F}(x+\theta a), \qquad \text{para algún } 0 < \theta < 1,$$

y asumió que f es continua para probar que $\mathcal{F}'(x) = f(x)$, la parte de la antiderivada del TFCI. Después, utilizando el teorema del valor medio, Cauchy demostró que cualquier función cuya derivada es 0 debe ser constante, y por lo tanto, cualesquiera dos antiderivadas de f difieren por una constante. Puesto que $\mathcal{F}$ es una antiderivada de f, se sigue que si F es cualquier antiderivada de f, entonces:

$$F(x) - F(x_0) = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Que es la parte de la evaluación del TFCI. Ésta es aún la prueba estándar del TFCI. Cauchy lo que pretendió al probar este resultado fue establecer la conexión entre su definición de integral definida y la concepción común de la integral como antiderivada.

Actualmente tendemos a mezclar los aspectos geométricos y dinámicos del cálculo (después de todo, la única diferencia real entre ellos radica en si se ve la variable independiente como las distancias recorridas o el tiempo transcurrido). Sin embargo, conceptualmente son distintos. El cálculo emergió porque las concepciones dinámicas y geométricas de la integral y la derivada llegarona ser vistas como manifestaciones de principios generales comunes, pero se requirió de tiempo y genios para deducir estos principios generales, que a día de hoy se presentan como un producto bastante refinado y entendido de manera distinta a lo que en sus orígenes significó. Por esta razón, no debiera sorprendernos cuando nuestros estudiantes no consiguen entender estos principios de manera inmediata ni intuitiva.

El desarrollo histórico de la conceptualización del TFCI en el siglo XVII nos ha enseñado que la integración y la diferenciación han tenido dos escenarios conceptuales distintos, el geométrico y el dinámico, con lo cual, no ha de extrañarnos que para los estudiantes pueda resultar, en general, difícil entender su equivalencia, más aún cuando en las matemáticas actuales no se introduce el concepto por ninguna de esas dos vías. La historia nos enseña que debemos fijarnos primero en la comprensión dinámica y después usarla para construir la conceptualización geométrica del teorema. Pese a nuestros esfuerzos por definir la integración como un límite de sumas, la idea que persiste en los estudiantes como definición continúa siendo la de antidiferenciación.

En la actualidad, hay al menos dos formas de establecer el TFCI: una, considerando la función $F(x)$ anterior junto con la regla de Barrow y, otra, aplicar el teorema del valor medio a la función integrando en los subintervalos definidos por la partición. Se reproducen esquemáticamente ambos procedimientos en la Tabla 3.12.

Tabla 3.12 Procedimientos deductivos del TFCI.

Vía Límite+Primitivageneral+Barrow	Vía teorema del valor medio
I. Sea f integrable sobre $[a,b]$. Se define F sobre $[a,b]$ por $$F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$ si f es continua en $c\in[a,b]$, entonces F es derivable en c, y $F'(c)=f(c)$.	Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y $G(x)$ es una primitiva suya sobre este intervalo, entonces: $$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$$

Vía Límite+Primitivageneral+Barrow	Vía teorema del valor medio
Prueba: Suponemos que c está en (a,b); para $c=a$ o $c=b$, los razonamientos son análogos con las derivadas laterales. Sea $h>0$. Entonces, si $m_h=\inf\{f(x): c<x<c+h\}$, y $M_h=\sup\{f(x): c<x<c+h\}$, $$m_h\cdot h\leq F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f(t)dt\leq M_h\cdot h$$ o bien: $$m_h=\frac{F(c+h)-F(c)}{h}\leq M_h$$ Una expresión similar se obtendría para $h<0$. Tomando límites cuando $h\longrightarrow 0$, y puesto que f es continua en $x=c$, se obtiene:$F'(c)=f(c)$.	Si $P=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ es una partición de $[a,b]$, entonces se tiene: $$G(x_1)-G(x_0)+G(x_2)-G(x_1)+\cdots+G(x_n)-G(x_{n-1}) = G(x_n)-G(x_0)=G(b)-G(a).$$ Aplicando el teorema del valor medio a cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\dots,n$, por ser G una primitiva de f, existe un α_i, interior a cada subintervalo tal que $$G(x_i)-G(x_{i-1})=G'(\alpha_i)(x_i-x_{i-1})= =G'(\alpha_i)\Delta x_i=f(\alpha_i)\Delta x_i$$ Y de forma más explícita: $$G(x_1)-G(x_0)=f(\alpha_1)\Delta x_1,$$ $$G(x_2)-G(x_1)=f(\alpha_2)\Delta x_2,\dots,$$ $$\dots,G(x_n)-G(x_{n-1})=f(\alpha_n)\Delta x_n$$
II. Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de $f(x)$ en $[a,b]$, difieren en una constante $(G(x)-F(x)=K)$. **Prueba:** Si $c\in(a,b)$, para cualquier $x\in[a,b]$, se tiene $$(G-F)(x)-(G-F)(c)=(G-F)'(t)(x-c) =(G'(t)-F'(t))(x-c)=0).$$ Por tanto,$G(x)-F(x)=G(c)-F(c)=K$.	Por tanto, $$G(b)-G(a)=f(\alpha_1)\Delta x_1+f(\alpha_2)\Delta x_2+\cdots+f(\alpha_n)\Delta x_n= =\mathcal{R}(f,P,T)$$ Si $T=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n\}$ es el conjunto de puntos intermedios asociados a P, al estar acotadas las sumas de Riemann por las de Darboux, como P arbitraria se obtiene: $$s(f,P)\leq\mathcal{R}(f,P,T)\leq S(f,P).$$
III. Por tanto, cualquier primitiva $G(x)=F(x)+K$, $$G(a)=\int_a^a f(t)dt+K=K \quad \text{y} \quad G(b)=\int_a^b f(t)dt+K$$ En consecuencia si $G(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$ en $[a,b]$, $$\int_a^b f(t)dt=G(b)-G(a) \quad \text{(Regla de Barrow)}$$	Considerando las integrales inferior y superior: $$\inf\int_a^b f(x)dx\leq G(b)-G(a)\leq\sup\int_a^b f(x)dx$$ $$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$$ c. q. d.

Las demostraciones del TFCI que se dan en la tabla anterior y que son las que aparecen en los libros de texto que hemos estudiado son muy distintas entre ellas, a la vez que de naturaleza totalmente diferente a la que en un principio dio lugar al surgimiento del teorema.

Porres (2012) realiza un análisis de los procedimientos contenidos en la Tabla 3.12, y verifica que el segundo resultado es más fuerte que el primero, ya que a éste hay que añadirle la regla de Barrow para llegar al mismo resultado. Igualmente evidencia que las dificultades de paso al límite en el primero de los casos son insuperables para buena parte de los estudiantes, máxime cuando no se comprende la definición de la función $F(x)$ y cuando se establece una conexión ajena al teorema, contraria al segundo procedimiento, en donde los intervalos están dados por la propia partición y se aplica un teorema muy importante del Análisis que ya debe ser conocido por los estudiantes. En cuanto a la sistematización de la demostración, en el segundo, se observa una mejor organización de las ideas puesto que la demostración fluye de manera continua, y, aunque se recurre al teorema del valor medio, los razonamientos que se siguen en el proceso son propios del concepto de la integral definida y no, como en el primer caso, al aplicar el concepto de límite a una acotación de la integral. En su investigación Porres también encuentra que los estudiantes entienden con menor dificultad el segundo procedimiento, comprobando así que la comunicación matemática dada es mejor que la del primero.

Abrahamson (1998) constata la idea que mantienen muchos estudiantes acerca de que el TFCI es una definición y propone que sea introducido por medio de sumas telescópicas discretas de la forma,

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{i-1}) = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i = y_n - y_0$$

Si existe una función F, y puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$ en donde se cumple $y_i = F(x_i)$, entonces se verifica,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i)} - F(x_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{n} \Delta F(x_i) = F(b) - F(a),$$

Cuando tomamos la aproximación $\Delta F(x_i) \approx F'(x_i)\Delta x_i$, en lugar de aplicar con todo rigor el teorema del valor medio, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} F'(x_i)\Delta x_i \approx F(b) - F(a) \text{ con lo cual, } \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Lo cual hace, según Porres, fácil y pedagógico el TFCI, aunque señala que esta "justificación" que propone Abrahamson posee un *déficit* en el razonamiento de la equivalencia en la última igualdad.

Abrahamson afirma también que esta manera de introducir el TFC es eficaz para que los estudiantes lo comprendan posteriormente.

Según Dubinsky (1991) las dificultades que subyacen a la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI) pueden ser explicadas por la complejidad del proceso de encapsulación relacionado con la variación del límite superior de la integral definida para obtener una función específica dada por la integral indefinida, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $f \geq 0$, $a \leq x \leq b$. Este proceso es de "alto nivel" que pasa por la encapsulación de todo el proceso de área (cuando $f \geq 0$) en un objeto que puede variar en función de la variación de uno de sus parámetros. La falta de comprensión de este proceso no sólo acarrea dificultades relacionadas con el TFCI sino con definiciones tan potentes como $\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ para $x > 0$, o de la propia integral definida pues, generalmente, no coincide con el área.

Tall (1996, p.22) evidencia algunos obstáculos conceptuales inherentes a los procesos de paso al límite. Por una parte, menciona un reporte de Schneider en el cual se detectaron dificultades cognitivas relacionadas con la noción de la integral como área bajo la curva de una función no negativa, cuando se visualiza como la suma de las áreas de bandas finas bajo la gráfica (Figura 3.3).

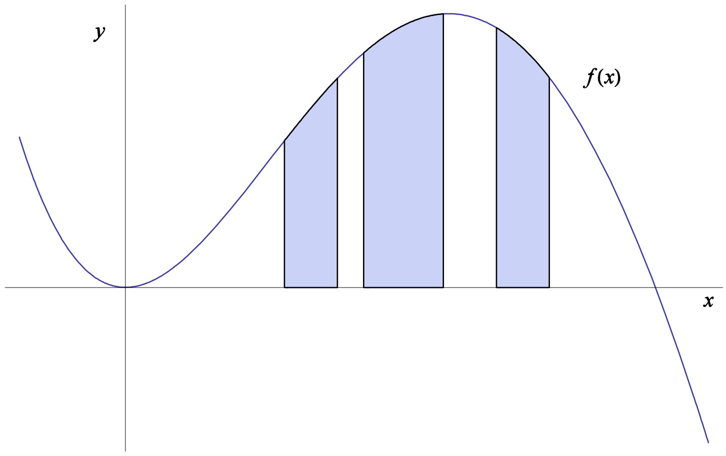


Figura 3.3 Aproximación al área por bandas finas.$\boldsymbol{f \geq 0}$.

En el caso de considerar sumas superiores e inferiores tomando cada vez más rectángulos para aproximar el área bajo la gráfica de $f(x) = x^3$, en el intervalo $[0, 1]$, según Schneider algunos estudiantes piensan que siempre que los rectángulos tengan anchura no se logrará cubrir la superficie bajo la curva, y, en el otro sentido, que si los rectángulos se reducen a líneas sus áreas serán cero y no pueden sumarse.

Por otra parte, tomando como ejemplo el TFCI. Tall considera el área[54]$A(x)$desde un punto fijo a a uno variable x. El TFCI afirma que $A'(x) = f(x)$. Visualmente el área adicional bajo la curva desde x hasta $x + h$ es $A(x + h) - A(x)$ (Figura 3.4 Área bajo la curva de $\boldsymbol{f}$, desde $\boldsymbol{x}$ hasta $\boldsymbol{x + h}$. $\boldsymbol{f \geq 0}$.) en donde sólo hay una banda a tratar y es evidente que bajo condiciones de visualización apropiadas, el área de la banda se aproxima a $f(x) \cdot h$ cuando h tiende a cero, es decir, $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \longrightarrow f(x)$.

Aquí el área bajo la curva de x a $x + h$ se "aproxima" al área del rectángulo cuya base es h y altura $f(x)$ cuando h tiende a cero la aproximación se va mejorando, de tal forma que $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ cada vez se aproxima más a $f(x)$, tanto como sea preciso.

[54] Tall señala que ya desde el mismo instante que define la función de área algunos estudiantes pueden tener dificultades por la propia definición de una función ya que sólo conciben las funciones en términos de fórmulas.

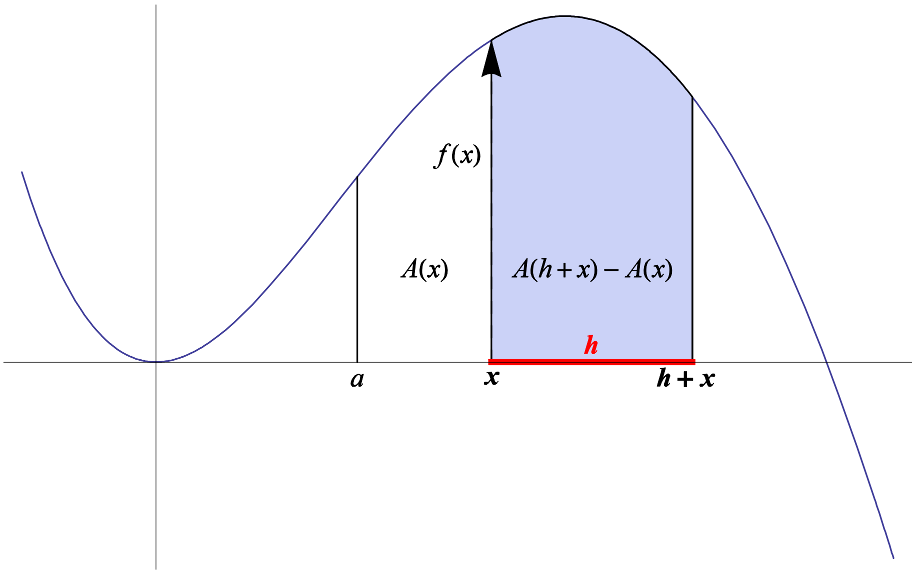


Figura 3.4 Área bajo la curva de f, desde x hasta $x+h$. $f \geq 0$.

Tall visualiza la aproximación de h a cero a través de una gráfica continua que se va "aplastando" cuando la escala vertical se mantiene constante y la horizontal se va extendiendo. Suponiendo una mira rectangular que se mantiene fija se observa que a medida que se disminuye la escala del eje horizontal se ve un alargamiento de la gráfica en el visor rectangular. Esto es, cuando $h \longrightarrow 0$ se ve que $f(x+h) \longrightarrow f(x)$ en una función localmente derivable, por ello en el visor con un entorno $(x-h, x+h)$ muy reducido pareciera que la gráfica fuese constante. Aquí es donde Tall detecta un claro obstáculo cognitivo, cuando por ejemplo los alumnos tratan de imaginar cómo la aproximación alcanza la igualdad en el límite. Para Tall, el "aplastamiento" es equivalente a la continuidad puntual imaginando que el pixel representa una altura $f(x) \pm \varepsilon$, y luego si se "aplana" la ventana, debe existir un $\delta > 0$ de tal forma que el dibujo de la gráfica en el intervalo $(x-\delta, x+\delta)$ coincida con el pixel de la altura, $f(x) \pm \varepsilon$ (Figura 3.5). Es decir,

> dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $x-\delta < t < x+\delta$,
> entonces, se cumple $f(x)-\varepsilon < f(t) < f(x)+\varepsilon$

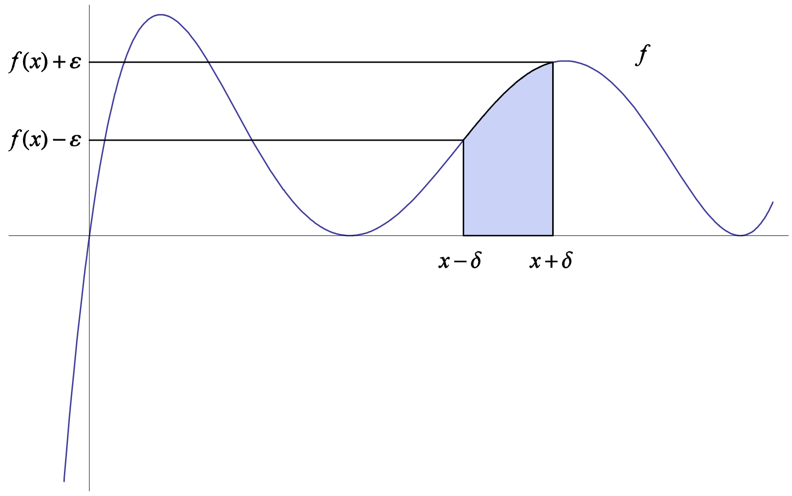


Figura 3.5 Entorno $(x-\delta, x+\delta)$ dado un $\varepsilon > 0$.

Tall señala igualmente que la mayoría de los estudiantes pueden discutir con solvencia las definiciones y propiedades sobre imaginarios visuales pero les resulta muy complicado traducirlos e interpretarlos en pruebas formales. Lo primero que suele hacer el estudiante es imaginar la definición para *describir* un objeto existente, en lugar de *definir* el objeto a través de la deducción de sus propiedades, esto es, encontrar lo que es desconocido para "probar" propiedades obvias que de hecho parecen ser ciertas. La complejidad inherente al uso de los cuantificadores y la formalización de las deducciones son otra fuente de dificultades cognitivas en el aprendizaje del Análisis formal.

Según Thompson (1994), la comprensión del TFCI subyace a la comprensión de conceptos tales como razón de cambio y variación infinitesimal. En su experimento de enseñanza con 19 estudiantes de matemáticas y de máster en matemáticas Thompson constató que la base de las dificultades en el aprendizaje del teorema residía en la conceptualización empobrecida de razón de cambio y, de imágenes[55] pobremente desarrolladas y pobremente coordinadas de covariación funcional y de cantidades construidas multiplicativamente (como la distancia recorrida en un intervalo de tiempo que se construye mediante el producto de la velocidad por el

[55] Imágenes que retrata en el sentido de (Piaget, 1979) como dinámicas, erigidas de acciones y movimientos de la atención corpóreos y, como fuente y soporte de operaciones mentales .

tiempo). Un aspecto relevante en el experimento de enseñanza fue el énfasis que se dio al desarrollo de un concepto de integral que implicaba las ideas de acumulación, variación y sumas de Riemann como ideas claves de integración. Thompson recogió estas ideas definiendo las sumas de Riemann como si se tratase de intervalos fijos, pero modificando la definición de tal forma que el Δx se convierte en parámetro y x en variable. Es decir, Δx se asume constante y a x se le hace variar. La intención con este planteamiento era hacer que los estudiantes comprendieran las funciones de acumulación integrales, como arraigados en las funciones de acumulación de Riemann. Su definición es la siguiente:

Si f es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ la función integral de $f(x)$, denotada por $F_a(x)$, se define de la siguiente forma:

$$F_a(x) = \lim_{\Delta x \to 0} F_{\Delta x,a}(x), \quad \text{con} \quad F_{\Delta x,a}(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{x-a}{\Delta x}\right]} f(a + i\Delta x)\Delta x, \ a \leq x \leq b,$$

Que evidentemente es otra forma de presentar la función integral (o función de área) de una función continua en un intervalo cerrado y se denota,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Pero que (Ortega & Porres, en prensa) aseguran que es más complicado de entender para los alumnos.

Capítulo 4. Antecedentes metodológicos

Este capítulo de la memoria de tesis está dividido en dos partes bien diferenciadas. En una de ellas se establece una conceptualización de proceso infinito. En la otra se trata de completar una relación de obstáculos de comprensión ligados al concepto de integral definida. Para ello, se revisa de manera extensiva los antecedentes y se describe una primera relación de obstáculos ya descubiertos y que aparecen en la literatura y, una segunda que ha surgido del análisis de las respuestas de los estudiantes a un cuestionario ad hoc que dan significación a la comprensión del concepto. Aunque hasta el momento se ha mencionado el concepto de proceso infinito reiterativamente en los capítulos anteriores con la idea que el contexto exige, pensamos que es necesario establecer una definición que, pese a la revisión exhaustiva de la literatura que hemos realizado no encontramos. Esta necesidad surge que la propia divergencia de concepciones descubiertas en el desarrollo de la investigación.

Las conclusiones de este capítulo derivan de dos estudios independientes y a partir de ellas se han podido fijar pautas de actuación pertinentes para el desarrollo de la investigación.

4.1 Concepto de proceso infinito

El tema que se expone en este estudio exploratorio emergió en el seno del trabajo tutelado previo desarrollado durante al curso académico (2008/2009), en el marco del Doctorado en Investigación Educativa en las áreas curriculares de Ciencias Experimentales y Ciencias Sociales, y Matemáticas (especialidad de Matemáticas), en la Universidad de Valladolid, que sirvió como precursor de la tesis doctoral que aquí se presenta.

En particular, el área de Didáctica de la Matemática propuso "Un Estudio de los Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida" como uno de los posibles tópicos para el desarrollo del trabajo tutelado. Tanto el tema, como el área de estudio (Análisis Matemático) y el previo interés que despertaba estudiar lo que se relaciona con la comprensión del concepto de la integral definida, se convirtieron en elementos de motivación para escoger este tópico y realizar el trabajo tutelado bajo la dirección del Dr. Ortega.

Planteamiento del trabajo de exploración

En este caso particular, el estudio exploratorio permite la aproximación al tema y problema de investigación además de contextualizarlo, ya que en primera instancia, el desarrollo de este trabajo tutelado nos persuadió de la pertinencia, la relevancia y la posibilidad que podría tener el estudiar la comprensión que tienen los estudiantes de matemáticas de los procesos infinitos que subyacen al concepto de integral y su posible relación con la comprensión del propio concepto de integral definida. Por otra parte, además de servirnos como punto de partida para el desarrollo posterior del trabajo de tesis nos proporcionó varias claves iniciales y nos direccionó en la búsqueda de herramientas de investigación que nos han permitido estructurar una base sobre la cual sustentar el propio desarrollo del estudio.

Una de estas claves se desveló cuando en el desarrollo del propio trabajo tutelado evidenciamos las divergencias existentes sobre la concepción de proceso infinito, que es uno de los objetos clave de nuestro estudio. La otra, hizo evidente las dificultades que tienen los estudiantes no sólo en el manejo de conceptos a los que subyacen procesos infinitos, sino a la propia identificación de lo que es proceso infinito y nos direccionó a realizar una aproximación al concepto de proceso infinito vista la necesidad de dar un primer paso para consensuar una aproximación.

Por lo anterior, se retoma el valor de este tipo de estudios referenciado por (Hernandez, Fernandez, & Baptista, 2010)

> Los estudios exploratorios sirven para familiarizarnos con fenómenos relativamente desconocidos, obtener información sobre la posibilidad de llevar a cabo una investigación más completa respecto de un contexto particular, investigar nuevos problemas, identificar conceptos o variables promisorias, establecer prioridades para investigaciones futuras, o sugerir afirmaciones y postulados. (p.101)

Así que, para responder al objetivo puntual de reconocer las concepciones de proceso infinito, este estudio exploratorio se remite en primer lugar a la vasta revisión de la literatura relacionada con aquello que es comprensible en general, sobre los procesos infinitos, y en particular sobre aquellos que están ligados al concepto de integral definida. En segundo lugar, a partir de la propia experiencia de los investigadores y propio proceso de reflexión respecto de lo que podrían entender los estudiantes y los profesores acerca de lo que es un proceso infinito, se elaboraron tres herramientas (dos encuestas y una entrevista) que permitieron tener una primera toma de contacto con las ideas que emergen tanto de profesores, de estudiantes como investigadores en Educación Matemática, en cuestiones relativas con los procesos infinitos.

Cabe resaltar, que los datos que se obtienen son de naturaleza cualitativa, cuyo proceso de análisis se canaliza en reflexiones consensuadas sobre el concepto que interesa de manera particular.

Aproximación al concepto de proceso infinito

Ya en un principio, en la fase de revisión de la literatura nos sentimos desconcertados al no encontrar de manera explícita una definición de proceso infinito, pese al vasto "campo de acción" de este concepto en lo que a las áreas relacionadas con las Matemáticas, tanto en la parte pura como en la Didáctica se refiere. Podemos quizás pensar que la noción de proceso infinito debiera ser considerada al igual que la de conjunto, como una noción primitiva que se acepta lógicamente como un término no definido.

Según aparece en la última versión del Diccionario de la Lengua Española (RAE, 2014) la palabra proceso proviene del latín. Deriva del sustantivo *processus* cuyo significado está referido al "avance, marcha, desarrollo".

En la acepción referida a "proceso infinito" aparece como:

"Proceso en infinito: Acción de seguir una serie de cosas que no tiene fin".

No encontramos tampoco diccionarios de matemáticas que hiciesen referencia a lo que se entiende por proceso infinito.

En la búsqueda de lograr explicitar el concepto encontramos dos aproximaciones, una de (Claros et al., 2007) y otra de Radu & Weber (2011). Gardiner (1982) en su libro analiza ampliamente procesos infinitos, la dependencia que de estos procesos tienen nociones geométricas como longitud, el área y el volumen, entre otras apreciaciones, pero no llega a dar en ningún caso una definición del concepto en torno al cual se desarrolla su libro.

La definición que (Claros et al., 2007) dan de proceso infinito está contextualizada en un estudio estructural de los conceptos de límite de una sucesión y límite de una función.

> Entendemos por proceso infinito cada una de las formas posibles de aproximación experimentadas por las variables, independientes y dependientes, presentes en las definiciones formales consideradas[56]. (p.129)

Según Brown, Mcdonald, & Weller (2008, p.123) un proceso iterativo infinito es un tipo de construcción mental que entra en la categoría de proceso en el sentido de la teoría APOE. Un proceso iterativo infinito es una coordinación de un proceso de iteración a través de $\mathbb{N}$ con una transformación que puede aplicarse repetidamente. Se forma una sucesión infinita de objetos (e.g. un número, un conjunto, una figura geométrica) agregando un objeto a la sucesión en cada paso. En algunos casos el proceso consiste en seleccionar objetos secuenciados a partir de una colección de objetos ya construidos, mientras que en otros los objetos deben construirse al mismo tiempo que se construye la iteración. Para construir un proceso iterativo infinito, primero se necesita construir un proceso iterativo completo a través de los enteros positivos, que debe encapsularse en un objeto (llamado convencionalmente "∞") como un intento para aplicar una acción de evaluación al proceso para intentar determinar qué sigue después (Brown et al., 2008; Dubinsky et al., 2005). La esencia de esta aproximación es vislumbrar que un prerrequisito para construir un proceso iterativo infinito yace en la habilidad para construir un proceso de iteración completo a través de los números naturales con la transformación que asigna un objeto a cada número natural; una vez identificado como una totalidad, este proceso puede encapsularse en un objeto aplicándole una acción de evaluación; el objeto que se obtiene "el estado ∞" y entendido como más allá de los objetos que se corresponden con los números naturales (un objeto trascendente).

[56] Se refieren a las definiciones de límite finito para una sucesión de números reales y de límite finito de una función real de variable real en un punto (p.129).

Radu & Weber (2011, p.168) definen lo que es un proceso infinito pero sólo para el caso de procesos iterativos en los cuales los procesos intermedios se describen como conjuntos de objetos. En sus propias palabras:

> Un proceso iterativo infinito consiste en un conjunto inicial S_0, junto con un conjunto ordenado infinitamente contable de acciones A_i, en donde una acción consiste en un número finito de operaciones sobre conjuntos. S_n (el estado intermedio que se obtiene después del n −ésimo paso) se define de manera recursiva como el resultado de aplicar A_n a S_{n-1}.

Como se puede observar estas aproximaciones no son genéricas a lo que subyace en el ideario de lo que es un proceso infinito. El propósito ahora es encontrar una definición que abarque cualquiera de las posibles connotaciones que se le puede dar a este concepto.

En los tres apartados siguientes describimos las características de los participantes en el estudio exploratorio, con una explicación muy sucinta del contenido de cada pregunta, ya que, como lo señalamos anteriormente el interés primordial de esta etapa es hacer una aproximación al ideario que sobre el concepto de proceso infinito tienen tantos estudiantes como profesores.

En el último apartado especificaremos qué vamos a entender por "proceso infinito" en el desarrollo de la investigación.

Instrumentos de recogida de datos

Para acceder a las concepciones tanto de estudiantes, de investigadores como de profesoras acerca del concepto de proceso infinito, utilizamos dos encuestas y una entrevista respectivamente.

Encuesta a estudiantes

Los participantes en la encuesta fueron 25 estudiantes de primer año del Grado en Matemáticas y Física. Todos los estudiantes estaban cursando en el momento de la prueba la asignatura de Cálculo infinitesimal, impartido por dos profesoras Navarro y Dávila (nombres ficticios que en adelante identificaremos con las iniciales N y D), juntas adscritas al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Valladolid. Para determinar los contenidos matemáticos que debían formar parte de la encuesta, nos basamos en el desarrollo del corpus teórico de la asignatura por parte de las profesoras en el aula y en todos los aspectos curriculares referentes a los procesos infinitos y a la integral definida en el currículo oficial del grado en matemáticas en España. El currículo de la asignatura contempla en esencia el estudio de los conceptos que forman parte de nuestra investigación, procesos infinitos e integral definida, por ello fue más que pertinente aplicar la encuesta en estos cursos.

En cuanto a la elección del problema, se propuso una batería de problemas y, en común acuerdo junto con las profesoras elegimos el que consideramos atendía más al número máximo de cuestiones relacionadas con los procesos infinitos.

La asignatura se dividía en los 8 temas que se muestran a continuación, y en el momento en que se realizó la encuesta (Figura 4.1) se daba inicio al último de ellos.

Tema 1: Generalidades de conjuntos numéricos.
Tema 2: Sucesiones de números reales.
Tema 3: Funciones de variable real. Límites y continuidad
Tema 4: Funciones de variable real. Cálculo diferencial.
Tema 5: Series de números reales
Tema 6: Cálculo de primitivas.
Tema 7: Integral de Riemann.
Tema 8: Integrales impropias.

Cinco estudiantes (un 20% de total) respondieron la encuesta; ésta se entregó a todos los estudiantes con la especificación de no obligatoriedad en su cumplimentación. Se les dio un margen de siete días para la entrega y las respuestas se transcribieron en su totalidad (Anexo 3) Cabe anotar que a la entrega de las encuestas, las Doctoras D y N comentaron que los cinco estudiantes que cumplimentaron las encuestas, eran los de asistencia regular de las clases y además, los que *"más rinden"*, así pues, es obligatorio considerar que, la selección (no planeada) de los estudiantes se direccionó a aquellos quienes mantenían constancia y compromiso con el trabajo del curso, y que, en general, tienen buen desempeño académico (que corresponde a la quinta parte del total de estudiantes).

Encuesta a estudiantes

Problema Sea $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subseteq (0,\infty)$. Para cada $n \geq 1$ se considera la función $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = e^{-\alpha_n x}$. Demuestre que para cada n existe un único $\beta_n \in (0,1)$ tal que $f_n(\beta_n) = \beta_n$.

Solución El teorema de Bolzano implica que la función $f_n - id$ debe anularse en $(0,\infty)$ puesto que se cumple $(f_n - id)(0) = 1$ y además $\lim_{x\to\infty}(f_n(x) - x) = -\infty$. Por otro lado, la derivada de $f_n - id$ es negativa en cada $x \in [0,\infty)$ así que $f_n - id$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[0,\infty)$, lo que implica que sólo se anulará una vez. Dicho de otra forma, existe un único $\beta_n \in (0,\infty)$ tal que $f_n(\beta_n) = \beta_n$. Como $f_n(0,+\infty) = (0,1)$, debe tenerse que $\beta_n \in (0,1)$.

Encuesta

(a) Si encuentra otra solución cualquiera, escríbala.
(b) Determine los procesos infinitos que subyacen tanto en el planteamiento como en la solución del problema dado (incluya los que ha identificado en la solución opcional, en caso de haberla hallado)
(c) ¿Cuáles procesos infinitos cree usted que son relevantes a la hora de definir el concepto de integral definida?
(d) ¿Considera que ha comprendido de manera satisfactoria los procesos infinitos y sus aplicaciones en la resolución de problemas?
(e) ¿Cuáles de los libros incluidos en la bibliografía de la asignatura ha consultado?

Figura 4.1 Encuesta a estudiantes.

Del análisis de las respuestas de los estudiantes (identificados como E1, E2, E3, E4, y E5) se desprenden ciertas evidencias de algunos errores relacionados con los conceptos clave de nuestro estudio. Para precisar, señalamos en forma de reflexiones algunos de ellos:

- Los estudiantes muestran un escaso uso de razonamientos intuitivos, y la tendencia a generalizar un proceso que se adecúa a un problema; además, reflejan errores de conceptos que interactúan en la solución del mismo. Esto por ejemplo se corrobora con el desarrollo que realizó el estudiante E1:

  Véase la Figura 4.2 Derivamos ambas funciones para ver que en $(0,1)$ sus derivadas son constantes. $y_a' = 1$ (creciente); $y_b' = -\alpha_n e^{-\alpha_n x} = \frac{-\alpha_n}{e^{\alpha_n x}}$ (decreciente para $\alpha_n x \geq 1$) [...]

  [...] $\frac{-\alpha_n}{e^{\alpha_n x}} = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha_n x}(-\alpha_n) = 0$ ó $e^{-\alpha_n x} = 0$. (Imposible)

  [...] si $\alpha_n = 0$ no se considera un proceso infinito, ya que α_n sería una constante.

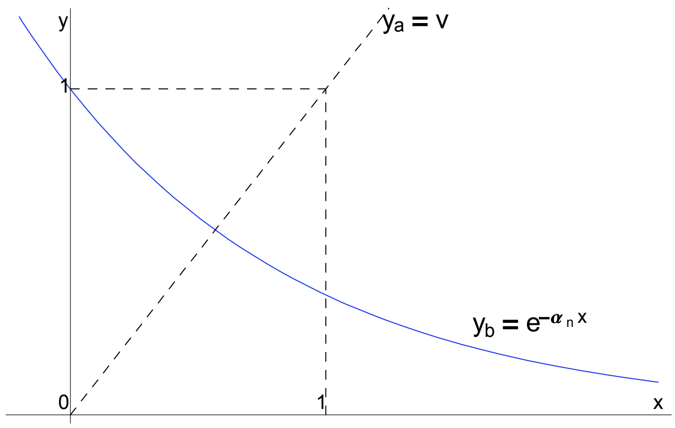


Figura 4.2 Gráfica complementaria de la respuesta del estudiante E1.

  En realidad es decreciente para todo α_n, puesto que $e^{-\alpha_n x} > 0$ siempre. Parece además que, relaciona el decrecimiento con el valor del cociente y no con el signo. Por otra parte, la identificación del propio concepto de cociente de funciones y de nulidad[57] se nota poco claro. En síntesis, se percibe falta de cono-

[57] $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$ y por otra parte, $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

cimiento de la aritmética de funciones. Si la idea es hallar los ceros de la ecuación $\frac{-\alpha_n}{e^{\alpha_n x}} = 0$, para determinar el signo de la derivada (que es totalmente innecesario ya que esto se deduce de las propiedades de cuerpo y orden de los reales y de las características de la función exponencial) vemos que al respecto no concluye nada. Es evidente que el estudiante E1 no tiene claro que α_n es un elemento "dado" de una sucesión no negativa de números reales y no un elemento del dominio de la función. Parece que no ha comprendido el enunciado en toda su extensión.

Al presentar otra posible demostración, el mismo estudiante E1 exhibe una justificación poco clara que, además no explicita la justificación de que el signo de la derivada de cada función ($y_a{}' > 0,\ y_b{}' < 0$) implique la existencia del punto ni la unicidad de ese punto.

- El manejo de las propiedades de los números reales como cuerpo completo, ordenado totalmente y que satisface el axioma del extremo superior (inferior), refleja posibles lagunas conceptuales de los estudiantes en relación con estos conceptos. Esto se puede observar en las aseveraciones de los estudiantes E1 y E5 respectivamente:

[...] $y_b' = -\alpha_n e^{-\alpha_n x} = \frac{-\alpha_n}{e^{\alpha_n x}}$ (decreciente para $\alpha_n x \geq 1$) [...]

[...] $\alpha_n = \ln \frac{1}{\beta_n \sqrt{\beta_n}} \Rightarrow -\alpha_n \beta_n$[...] $f_n(\beta_n) = \beta_n$

- No se muestran evidencias de conocimiento explícito de lo que es un proceso infinito. La idea intuitiva que pueden tener tampoco es clara y, en ocasiones contrasta con el propio significado. Los estudiantes E1 y E2 lo corroboran afirmando respectivamente:

Si $\alpha_n = 0$ no se considera un proceso infinito, ya que $\alpha_n = 0$ sería una constante.

> $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{b-a}{m} f\left(\frac{n(b-a)}{m}\right)$ sólo requiere de un proceso infinito, ya que se trata de una sucesión infinita de números reales; si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, no se requieren más procesos infinitos.

Igualmente, en el estudiante E2 no explicita tampoco a qué sucesión infinita se refiere.

- Cuando el estudiante E2 señala en su respuesta al literal (a):

> No he hallado otra solución. Se podría haber resuelto $e^{-\alpha_n \beta_n} - \beta_n = 0 \forall \alpha_n > 0$, y observar que siempre $\beta_n \in (0,1)$, pero no he podido resolver la ecuación.

Parece que considera a β_n una incógnita de una ecuación. Este enfoque del estudiante es correcto. Busca un x tal que $e^{-\alpha x} - x = 0$. Afirma que la solución se encuentra en $(0,1)$ lo cual es correcto. Sin embargo, como dicha ecuación es trascendente, no se puede resolver por cuadraturas y, por lo tanto tendría que probar que se cumplen las hipótesis del problema para tener la seguridad de que existe un punto fijo (este mismo procedimiento lo realizó el estudiante E5 con la diferencia que definió una función $g(x) = \ln \frac{-1}{\sqrt[x]{x}}$ con dominio $\emptyset$.Y cuando E2 escribe en el literal (b):

> En el problema se define una sucesión infinita cualquiera de términos positivos, después se define una sucesión de funciones, donde cada función queda definida por cada término de la sucesión anterior, además cada función relaciona los infinitos números reales con otros números reales. En la solución se aplica Bolzano para las infinitas funciones en 0 y $x \longrightarrow \infty$ y se observa cambio de signo, luego se ve que $\frac{d(f_n - di)}{dx} < 0$, $\forall n$ y $\forall x$, así se ve que sólo hay una solución para β_n en cada función de la sucesión; además como todas las funciones están acotadas en $[0,1]$, la β_n también lo está. Se utiliza el concepto de infinito constantemente.

Parece que el estudiante quiso decir, con una intrincada argumentación simplemente que todos los β_n están en $(0,1)$. Identifica conjuntos infinitos y los que se relacionan entre sí. Lo que no detalla es la forma en que se relacionan, o los procesos infinitos que subyacen a estas relaciones ni tampoco una identificación precisa de lo que caracterizaría un proceso infinito. Igualmente reflexionamos acerca de ¿en qué sentido se puede hablar del acotamiento de un número real? El conjunto de los β_n también es un conjunto infinito, y, lo que se debe entender en cada caso es si se habla de un elemento del conjunto (que es lo que parece) o se dilucida que es el conjunto. El texto no es explicativo, faltan las justificaciones; tiene que relacionar la acotación del conjunto de las β_n con las de f_n cuando éstas tienen sus imágenes en $(0,1)$, es decir cuando $x \in (0, \infty)$ puesto que, da lugar a confusiones ya que ninguna f_n es acotada.

- Se percibe una ausencia manifiesta del significado (y manejo) de los procesos infinitos inherentes a los conceptos de partición, sucesión, serie, límite y convergencia (una posible causa puede ser el desconocimiento teórico del concepto), entre otros, que son herramientas fundamentales para entender el concepto de integral. Algunas respuestas de los alumnos E1 y E3, reflejan estas observaciones:

(b) Sin respuesta (c) sin respuesta (d) No.

La utilización de la variable n como contador. El enunciado pide una demostración para cada n natural (y los naturales constituyen un conjunto infinito).

El empleo del concepto de límite cuando $x \longrightarrow \infty$.

La división del intervalo de integración en particiones infinitesimales.

En el segundo caso además, no se determina con claridad el proceso que involucra el conjunto de los números naturales, no hace explícitos los otros conjuntos que se generan ni los procesos infinitos que los relacionan ni los que se efectúan. Vemos igualmente que también hace alusión al infinito potencial a pesar de estar en $\mathbb{R}$. Por otra parte, el proceso infinito relacionado con el límite es tan sólo uno de los que se desarrollan.
Respecto de las particiones se ha de suponer que en realidad habla de particiones diámetro (o norma) infinitesimal.

- Se observa además que ninguno de los estudiantes sugirió el uso de una definición del concepto de proceso infinito para la realización de la encuesta (acción natural en la consecución de una respuesta a cualquier problema matemático), pese a la generosidad en el tiempo que se concedió para la realización de la encuesta. De acuerdo con las respuestas, se percibe en general un desconocimiento no sólo de su definición y un acercamiento nimio a través posibles caracterizaciones del concepto. En el mejor de los casos se vislumbró una noción meramente intuitiva. Cuando el estudiante E2 responde:

  > Sí considero haber entendido los procesos infinitos, para resolver satisfactoriamente los problemas

  Vemos que es más complicado discernir en un aspecto para el cual se desconoce que quizás está mal aprendido, o que en definitiva expresa una creencia.

Reflexiones

A través del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes podemos percibir cómo confrontan sus propias creencias sobre los procesos infinitos. La manera en que ellos los explican y cómo los interpretan en conceptos formales se manifiesta a través de nociones meramente intuitivas y en la mayoría de los casos los procesos infinitos subyacen a la concepción del infinito como potencia.

Igualmente, observamos que pese al previo conocimiento del aparataje matemático propio de definiciones tales como sucesiones, series, refinamiento de particiones, límites, completitud, etc., ningún estudiante logró caracterizar, o por lo menos argüir lo que entiende por proceso infinito, pese a que trabajan continuamente con ellos (y que, en general suponen saber lo que son).

Por otra parte, pudimos comprobar que para los estudiantes fue difícil la mera identificación de los procesos infinitos implícitos en el problema que se les propuso, lo cual evidencia que, pese al manejo y trabajo que vienen realizando de procesos infinitos tanto en la construcción de otros conceptos como en el desarrollo de demostraciones y de aplicaciones en Análisis, las estructuras y mecanismos tradicionales parecieran no ser suficientes para que ellos logren construir una noción formal de un proceso infinito, una complejidad inherente al infinito matemático que ya habían señalado Roa-Fuentes & Oktaç (2014).

Pensamos que en una posible razón que explica esta carencia de fundamentación de los conceptos que involucran los procesos infinitos: al iniciar el estudio de los límites, que es el umbral del cálculo infinitesimal, generalmente se acude al concepto de que "tender a" es sinónimo de "cerca de" o, si se es más riguroso, se acude a una definición vía $\varepsilon - \delta$. Ambos métodos implican un alto grado de ambigüedad y confusión. Sin embargo, los ejemplos acuden en nuestra ayuda. Pero en este caso los ejemplos no aclaran los conceptos. Lo único que hacen es adiestrarnos para encontrar los valores correctos de los límites por aplicación de conocimientos previos puramente algebraicos. Por ejemplo, problemas del tipo $\lim_{x \to 5}(3x + 2)$ son indistinguibles de evaluar $f(5)$ en la función $f(x) = 3x + 2$. Luego se complica un poco el tema con problemas como $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ en el cual el método anterior falla pero que puede ser aplicado si previamente se llevan a cabo una factorización y una cancelación. Ya en el campo de las demostraciones ocurre algo parecido. Muchos problemas de demostrar límites mediante la definición $\varepsilon - \delta$ son casos artificiales creados con el fin de permitir de nuevo unos procesos algebraicos simples o complejos, pero que no trascienden el álgebra. En conclusión, es prácticamente nulo el avance conceptual aunque en apariencia se está trabajando con y sobre los conceptos.

Entrevista a profesoras

La entrevista que se llevó a cabo con las profesoras D y N transcurrió en un ambiente de diálogo pedagógico entre ellas, suscitado por el guión de las 12 preguntas que se les había facilitado previamente con la intención de que tuviesen ocasión de dedicar cierto tiempo a la reflexión sobre los aspectos que se abordaron en la entrevista, con el fin de aumentar la calidad de la información que obtendríamos a posteriori.

La entrevista se encauzó en el discernimiento de dos aspectos principalmente: Por una parte (la menos interesante) las profesoras detallaron características propias de sus estudiantes, relacionadas con la actividad académica, rasgos actitudinales, dedicación a la asignatura, desarrollo de las actividades en relación con el concepto de la integral definida, y de su compromiso e interés por el conocimiento de los temas que se han trabajado en el transcurso de la asignatura. Por otra parte, indagamos acerca de la noción que tienen las profesoras de proceso infinito, que es el aspecto que a la luz de nuestra investigación tiene mayor relevancia, por ello, vamos a señalar los resultados y reflexiones que pudimos extraer del diálogo con las profesoras.

Los dos tramos de la entrevista están completamente trascritos (Anexo 4) y a modo de pie de página se puntualizaron aspectos relacionados con contenidos significativos de algunas respuestas describiendo algunas consideraciones que advertimos pertinentes.

Ahora bien, para tomar un punto de referencia acerca de lo que supuso para las profesoras D y N conceptualizar un proceso infinito, podemos por una parte advertir que no es fácil de establecer y, por otra ratificar lo que afirma Gardiner (1982, p.4): "de los procesos infinitos apenas se tienen nociones intuitivas", sentencia que ya mostraba sus primeros atisbos en las reflexiones que se desprendieron de la encuesta a los estudiantes.

> [N] Yo, Para mí un proceso infinito es el número real, cuando empieza. El número natural ya es un proceso infinito, el primero de todos.

Podemos evidenciar el alto nivel de abstracción subyacente a la definición puesto que, viendo el número real como el límite de una sucesión de racionales, los procesos infinitos que está relacionando son los que conviven con los conceptos de sucesión y de límite de una sucesión. A la vez, el número natural es visto como elemento de una sucesión.

> [D] Yo, para mí, bueno, es un proceso que te permite pasar de una situación con un número finito de elementos a un conjunto o un algoritmo en el cual no es así…

Estaría hablando de una partición en primera instancia y luego del conjunto de las posibles particiones de un intervalo $[a, b]$, o al algoritmo de sumar "infinitamente" que se presenta en el criterio de equivalencia del **Corolario 1** (p.70) por ejemplo.

> [N] Claro […] el principio de inducción pues ya para él[58] es un proceso infinito.

De hecho, con este principio, a través de los procesos (sumar, medir comparar, iterar, reemplazar, etc.) se demuestra que un resultado se cumple para un conjunto contable e infinito de números.

> [D] Por ejemplo para mí el caso quizás, el ejemplo mejor es el de las series, en la que tú pasas de la sucesión de sumas parciales a lo que es la serie…que es, por un lado la sucesión de sumas parciales, pero por otra parte se estudia si esa sucesión tiene límite o no, cuando dices si la serie converge o no converge. En ese sentido podría hablarse de suma infinita, entonces quizás ese podría ser el ejemplo mejor para este curso.

[58] Está refiriéndose a los estudiantes.

Recordemos que a las series subyacen los procesos de *aproximar* y *sumar* a la vez. Según Farfán (citado en Dolores et al., 2006) "el proceso de aproximar se subordina al de sumar. Lo que obviamente, explica la confusión manifiesta entre el témino n-ésimo de la suma y la *n*-ésima suma parcial entre los estudiantes".

> [D] cualquier algoritmo que te permite pasar de una situación finita a otra que no lo es…cualquier algoritmo.

Esta es una analogía del paso de la sucesión de sumas parciales: $\{S(f,P_k)\}_{k=1}^{n}$, $\{s(f,P_k)\}_{k=1}^{n}$, al de las correspondientes series $\sum_{n=0}^{\infty} S(f,P_n)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} s(f,P_n)$ por ejemplo.

> [N] Para mí el más intuitivo es el principio de inducción.

Y esta apreciación coincide con lo que afirma Romero (1980): "La inducción matemática es, en principio, más simple que los conceptos habituales de límite, continuidad, etc., que se utilizan en análisis"

> [D] Ese, está claro que se puede considerar un proceso infinito. Lo que pasa es que yo… quizás para los chicos este año, pues a lo mejor el concepto de serie por lo que lleva consigo construir el algoritmo que te permite pasar de una suma finita a lo que podría llamarse una suma infinita.

A partir de la pregunta que se planteó, el diálogo que se produjo ha instado no sólo a construir, describir o caracterizar un proceso infinito sino también contextualizarlos en la asignatura que se está desarrollando.

Pudimos igualmente observar que las estrategias de definición que utilizaron las profesoras fueron no sólo diversas, sino que se evidenciaron desde diferentes perspectivas; hubo momentos en que las profesoras interpretaban los procesos pensando en los estudiantes y no en el concepto.

> [N] Tú le dices a un chico ¿Qué sabes de procesos infinitos? Y cuando nos lo habéis dicho la primera vez hemos dicho…es que ese concepto en realidad no lo tienen los chicos, aunque les des cosas.
>
> [D] Pero es la forma intuitiva…como cuando tú les das una sucesión para la cual parece que es el límite de esta sucesión, aunque no les hayas dado la definición de límite. Claro, en el concepto de integral lo primero que manejan es superior e inferior de un conjunto. Porque tu les hablas de las sumas de Darboux, sumas finitas, y, luego consideras el conjunto de todas las sumas inferiores y consideras el superior de ese conjunto. Entonces bueno, yo creo que ahí no se ve tan claro el proceso infinito, si claro es, un conjunto de infinitos elementos.

La pregunta desencadena en un diálogo que da pie a la posible construcción de una definición de proceso infinito retomando la secuencia teórica que se ha desarrollado para definir el concepto de integral de Riemann. Además se hace manifiesta la carencia explícita que tienen los estudiantes del concepto de proceso infinito.

Reflexiones

La gran experiencia de las profesoras, se ha visto reflejada no sólo por su capacidad profesional, el dominio de su área, el modelo que proyectan y su vocación como maestras, sino por la sencillez de su discurso como docentes. Sin embargo, se sintieron desconcertadas ante la petición de que formulen una definición que nunca habían leído, ya que, los libros de Análisis Matemático no la contienen[59]. A

[59] Aquí nos surge el interrogante ¿Existe una razón para este hecho?

pesar de ello, salen airosas evocando sus conocimientos de Análisis y sus experiencias profesionales.

Sus aportaciones a nuestras reflexiones pasan por hacer explícita la dificultad que encierra (incluso para docentes experimentados) caracterizar un proceso infinito pese al aparataje teórico del que disponen. Por otra parte, la identificación de supuestos que se dan sobre conocimientos que en realidad no son claros, permitió justificar la necesidad de explicitar conceptos (que se utilizan, aplican y se asumen como comprendidos) para los que se hace necesario su definición y caracterización en virtud de que, consecuentemente los estudiantes puedan transitar por el conocimiento del Análisis de una manera más fluida y que, a la vez les brinde elementos que mejoren comprensión.

Encuesta a investigadores

La dialéctica de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas implica formar estudiantes que aprendan cómo pensar, al igual que el quehacer matemático por antonomasia exige pensar en enunciados del tipo: "si esto se cumple, entonces esto es verdadero" por ello apenas cabe esperar que dentro de este contexto intentemos caracterizar un concepto como el que nos ocupa, el de proceso infinito; en los dos apartados anteriores, por una parte, logramos entrever las dificultades inherentes a tal fin, y por otra, algunas concepciones tanto de estudiantes universitarios como de sus profesores. Así que, con la intención de llevar a feliz término nuestro cometido, complementamos la información extraída de los dos anteriores instrumentos con el de un tercero, una encuesta dirigida a investigadores en Didáctica de la matemática.

Con ocasión del XVIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática[60] (SEIEM) logramos realizar la encuesta con una muestra de 17 investigadores (Anexo 5).

Presentaremos las distintas perspectivas en un orden descendente que se rige por el porcentaje de investigadores ligados a cada una de ellas.

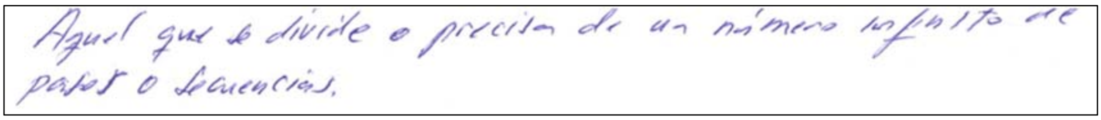
En primer lugar observamos que un 35% de los investigadores indican que un proceso infinito es un "proceso" que requiere infinitos pasos, que este proceso es indefinido y en algunos casos señalan que se da un "número" infinito de pasos. Ya esto es una tautología porque realizan una definición utilizando el propio término. Aproximadamente el 24% de los investigadores lo describen como un proceso que se repite sin parar, como si se tratase de una acción mecánica y también lo expresan diciendo que no termina nunca. El 18% tratan de establecer el proceso como una transición entre el infinito potencial y el actual. El porcentaje restante se equidistribuye en dos grupos de investigadores:

Uno que establece una relación finito-infinito (ampliación) o infinito-finito (reducción) que transforma a través de operaciones un estado en otro.

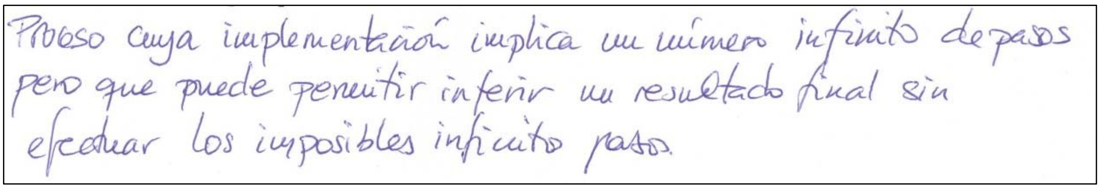
Otro que define el proceso infinito como una acción recurrente y que lo asocia con una sucesión (Q), o un proceso que puede ser estocástico (EST), o el refinamiento de una partición (P), la variación de alguna cantidad (V), una serie (S) etc.

Evidenciamos en el análisis que algunos confunden proceso infinito con la cardinalidad de un conjunto infinito ya sea potencial o actual.

Entre las declaraciones llama la atención que dos profesores se refieren al infinito como un número Figura 4.3.


Aquel que se divide o precisa de un número infinito de pasos o secuencias.

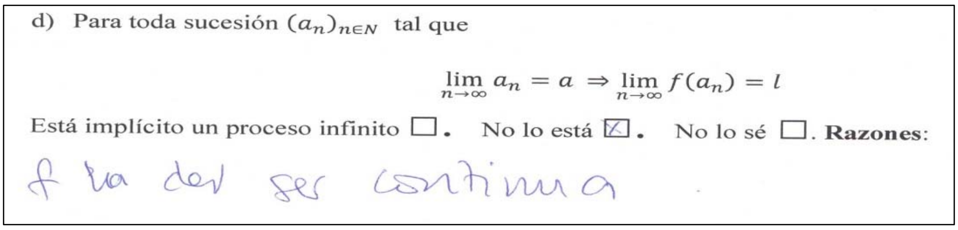
[60] http://www.seiem.es/



Proceso cuya implementación implica un número infinito de pasos pero que puede permitir inferir un resultado final sin efectuar los imposibles infinitos pasos.

Figura 4.3 Respuestasde dos investigadores a la pregunta 1 (Anexo 5).

Así mismo, llamó la atención la caracterización a través del uso de la noción de continuidad, que expresa diciendo que es un proceso continuo y que se repite sin parar de forma continua, al igual que un caso en que la existencia de un proceso infinito en una sucesión se supeditaba a la continuidad de una función como se muestra en la Figura 4.4.



d) Para toda sucesión $(a_n)_{n\in N}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

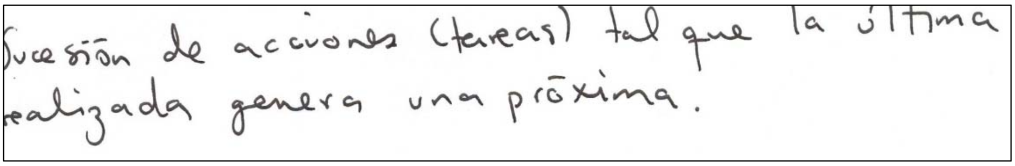
Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones**:

f ha de ser continua

Figura 4.4 Respuesta de un investigador a la pregunta 2d (Anexo 5).

La mayoría repite la palabra "proceso" en las descripciones que hacen con lo cual están incluyendo en las descripciones que realizan una de las palabras que componen el concepto del cual se debe dilucidar.

Encontramos también expresiones contradictorias Figura 4.5 en donde se habla de una "última" acción a la vez que, de una siguiente.



Sucesión de acciones (tareas) tal que la última realizada genera una próxima.

Figura 4.5 Respuesta de un investigador a la pregunta 1 (Anexo 5).

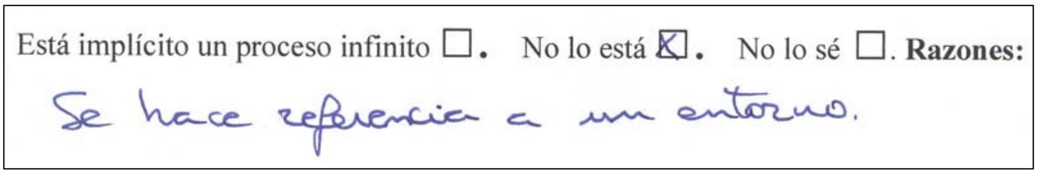
En la segunda cuestión que se les formuló a los profesores investigadores acerca de la identificación de procesos infinitos latentes en distintas definiciones del concepto de límite en el contexto de funciones reales de una variable real, llamó la atención la respuesta de un profesor que formuló la no existencia de un proceso infinito cuando se considera que a es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real f y se transcribe la definición:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

$$\Updownarrow$$

La contraimagen de un entorno reducido de l es un entorno reducido de a.

El profesor en cuestión afirma que en este caso no está implícito un proceso infinito y lo razona aduciendo que a lo que se refiere es a un entorno, Figura 4.6. En realidad, aquí el conjunto de entornos en el que debe verificarse esta propiedad en infinito (como mínimo una sucesión de entornos encajados cuya amplitud tiende a cero).


Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

Se hace referencia a un entorno.

Figura 4.6 Respuesta de un investigador a la pregunta 2d (Anexo 5).

De hecho, un intervalo o entorno, reducido o no, no son procesos infinitos por sí solos, sin embargo, la construcción de los mismos sí que serían procesos infinitos. $\forall \varepsilon > 0,\ (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$; como $\mathbb{R}^+$ tiene la potencia del continuo este es un proceso infinito pero no iterativo y no numerable.

De la caracterización que dieron los investigadores sobre el concepto de proceso infinito en sus respuestas emergieron cinco concepciones (Figura 4.7) de lo que se entiende por proceso infinito.

Concepciones: Un proceso infinito *es...*

- Un proceso que requiere infinitos pasos. (Tautología)
- Un proceso se repite sin parar como si se tratase de una acción mecánica y también lo expresan diciendo que no termina nunca
- Un proceso que se define mediante las relaciones *finito-infinito* o *infinito-finito* (ampliación/reducción), considerándolo como operaciones y no como procesos, por ejemplo, un profesor lo define como "un proceso finito ampliable".
- Es una acción recurrente asociada a una sucesión.
- Un proceso que relaciona una transición del infinito potencial al actual.

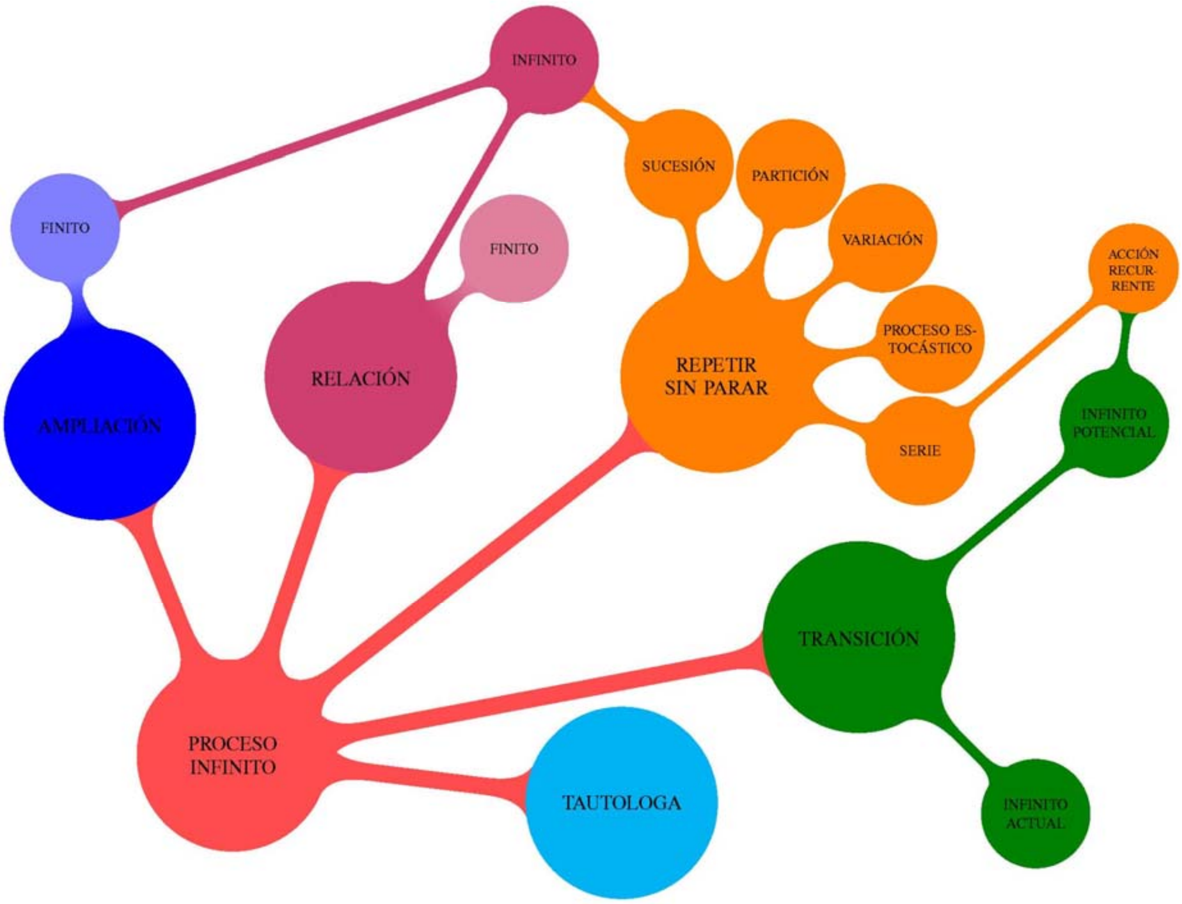


Figura 4.7 Concepciones emergentes de proceso infinito.

Noción de proceso infinito

Reconocemos que la propia connotación “proceso infinito” es contradictoria en sí misma ya que la idea de proceso encierra el significado de finitud de un determinado número de acciones. Pese a ello, dado el extensivo uso y la significación global del término que en ámbito de las matemáticas se ha establecido, fijaremos una definición sin tener consideración de las posibles contradicciones etimológicas.

En nuestro interés por establecer una definición de proceso infinito recabamos de las fuentes que nos proporcionaron las distintas perspectivas de los profesores la identificación de algunos de los procesos infinitos que se tratan en Matemáticas y realizamos unas disquisiciones sobre dicho concepto.

En el caso de interpretar un proceso infinito como un conjunto infinito de acciones matemáticas podemos mencionar tres ejemplos:

(a) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, en la cual se repetiría potencialmente la acción de sumar un infinito numerable de veces.

(b) En el conjunto de números reales $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\}$ la acción de hallar el límite cuando $n \longrightarrow \infty$, es dinámica, numerable también como en el literal anterior.

(c) En el proceso de considerar particiones $\mathcal{P}_x = \{0, x, 1\}$ con $x \in (0,1)$ en el intervalo $[0,1]$ observamos que $\{\mathcal{P}_x\}$ es no numerable.

Basándonos en las conclusiones de esta reflexión con estudiantes y profesores, podemos revisar la definición de proceso iterativo infinito en el sentido de Radu & Weber (2011), y proponer una definición original de proceso infinito, que será la que adoptaremos en nuestra investigación:

Proceso matemático infinito: *conjunto no finito de acciones, en el que la conclusión de cada acción incluye la asignación de una acción del mismo conjunto, donde entenderemos por:*

- *"**Conjunto infinito**" Un conjunto X es infinito si existe un subconjunto propio Y de X equipotente a X; en cualquier otro caso X es finito*[61]*.*

- *"**Acción**" conjunto finito de operaciones aritméticas, algebraicas, geométricas, analíticas, etc.*

Algunos ejemplos:

1. Sucesiones de Fibonacci: $S_0 = \{a_0, a_1\}$, con $a_0 = 1, a_1 = 1$ y el estado $S_n = \{a_{n-1}, a_n\}$ resulta de haber aplicado la acción $\mathcal{A}_{n+1}$ al estado S_n. La acción $\mathcal{A}_{n+1}$ en este caso consiste en sumar los elementos del estado S_n y además cambia el menor elemento del estado S_n por el nuevo valor a_{n+1} en donde $(a_{n+1} = a_{n-1} + a_n)$ para generar un nuevo estado $S_{n+1} = \{a_n, a_{n+1}\}$, de tal forma que la sucesión de Fibonacci $\mathcal{F}$ estaría dada por $\mathcal{F} = S_0 \cup \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

$$\underbrace{S_0 = \{1,1\}}_{\text{Estado Inicial}}\ \underbrace{\mathcal{A}_{n+1}}_{\text{Acción}}\ \left\langle \underbrace{\begin{array}{c}\text{Sumar } a_{n-1} + a_n = a_{n+1} \text{del estado } S_n = \{a_{n-1}, a_n\} \\ \text{Intercambiar } a_{n-1} \text{ por} a_{n+1} \text{ y genera } S_{n+1} = \{a_n, a_{n+1}\}\end{array}}_{\text{Un número finito de actos : 2}}\right.$$

Aquí el conjunto $\mathcal{A}$ de acciones sería infinito numerable.

[61] Esta definición la introdujo Bolzano (Moore, citado en Ortiz (1994, p.66)

2. Determinar el conjunto de particiones de $[0,1]$ de tres nodos:

   $S_0 = \{0,1\}$ la acción $\mathcal{A}_x$ tiene dos actos que son el de elegir un $x \in (0,1)$ y unir el conjunto $\{x\}$ con el conjunto $\{0,1\}$ para definir la partición $S_x = \{0, x, 1\}$. Podemos observar que el conjunto de particiones $\{S_x\}_{x\in(0,1)}$ tiene la potencia del continuo (no es numerable).

En los conceptos de límite, tanto en sucesiones como en funciones distinguimos dos acciones que conceptualmente son diferentes:

1. El paso al límite, que es un proceso algebraico que, en definitiva, consiste en sustituir la variable x, por el valor al que tiende:

Proceso Finito

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3+2}{x+7} = 2{,}9$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \\ = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

Factorizar
Simplificar
Sustituir

   y, que en todos los casos hay un número finito de operaciones.

2. Límite del proceso teóricamente imaginado terminado, en los casos descritos antes (página 209) estaría dado por:

   a. El límite[62] del proceso inherente a la sucesión de Fibonacci es:

   $$\mathcal{F} = S_0 \bigcup \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{a_0, a_1, a_0 + a_1, \dots, a_{n-1} + a_n, \dots\}$$

   b. En el proceso de construir particiones de tres elementos[63]$\{S_x\}_{x\in(0,1)}$ es un conjunto no numerable y el límite del proceso sería $\left\{\{0, x, 1\}_{x\in(0,1)}\right\}$.

[62] Que no es el límite de la sucesión. Es el límite del proceso de construcción de la sucesión.

Situaciones análogas se obtendrían para los extremos considerando que el extremo superior (supremo) $supA$ o $\overline{\text{ext}}A$ de un conjunto dado A es la menor de las cotas superiores y de forma análoga para el $ínfA$ o $\underline{\text{ext}}A$, la mayor de las cotas inferiores.

Reflexiones

Al igual que los datos recabados del diálogo pedagógico con las profesoras en la etapa previa, la información recabada de las encuestas a los investigadores confirmó la dificultad que subyace al propio concepto de proceso infinito. Es de resaltar que inclusive para quienes han estudiado con profusión el concepto de infinito y disciernen sobre su carácter potencial o actual, resulta complejo caracterizar un concepto que se evoca en todo el desarrollo del Análisis, el concepto de proceso infinito.

Hemos podido categorizar distintas caracterizaciones de lo que es un proceso infinito, y en la búsqueda de un referente para definirlo hemos aportado nuestra propia definición.

La propia naturaleza de la investigación matemática exige trabajar con objetos bien definidos, y, en este caso, hemos querido ser consecuentes con ello a través de la aproximación de proceso infinito que hemos dado.

En adelante, nuestro trabajo se centrará en procesos infinitos que subyacen al concepto de la integral definida (ID).

[63] Como por ejemplo $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}, \left\{0, \frac{\pi}{4}, 1\right\}$.

4.2 Identificación de obstáculos asociados a procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida encontrados en los antecedentes

Es evidente que dificultades y obstáculos no tiene el mismo significado, ya que, por una parte, las dificultades tienen que ver con la complejidad de los objetos matemáticos, con procesos de pensamiento matemático, con procesos de enseñanza, con procesos de desarrollo cognitivo y con actitudes afectivo-emocionales (Socas, 1997); por otra, los obstáculos tienen que ver con el conocimiento adquirido (Brousseau, 1983). Brousseau denomina *obstáculos epistemológicos* a los que están intrínsecamente relacionados con el propio concepto. Posteriormente Tall (1993) sólo considera lo que denomina obstáculos cognitivos y los asocia al grado de complejidad de los conceptos y a la práctica educativa, y señala las dificultades que encuentra en los estudiantes cuando éstos tratan de comprender procesos infinitos. Los tres autores coinciden en que tanto las dificultades como los obstáculos están relacionados con la complejidad de los conceptos matemáticos y que se manifiestan a través de los errores que cometen los alumnos y, por tanto, estos errores son los síntomas que han permitido detectar las dificultades (obstáculos) asociados a los conceptos. Para simplificar les aplicaremos el nombre de obstáculos y al final del epígrafe se presentará una relación de los que se han encontrado en los antecedentes. Para no ser repetitivos, cuando se describan las aportaciones de los antecedentes al respecto, se hará de forma genérica y se respetará el calificativo de cada autor. Además, la comprensión de la ID tienen que ver con procesos infinitos relacionados con otros obstáculos previos sobre conjuntos numéricos, sucesiones,..., y, sobre todo, límites.

En concordancia con el marco teórico establecido, a partir de las descomposiciones genéticas de los conceptos de límite funcional Cottrill et al. (1996) e integral definida (ID) (Porres, 2012), de la relación de obstáculos que se han evidenciado en el estudio de la literatura relacionada con los procesos infinitos y la integral definida y de la experiencia de los investigadores en el campo de la didáctica del

Análisis, construimos una lista de actos de comprensión ligados a los distintos obstáculos y conceptos estudiados a lo largo de esta investigación.

En el estudio de la literatura relacionada con dificultades/obstáculos, en el marco de aprendizaje y en la descomposición genética identificamos procesos infinitos que subyacen en el concepto de ID y seleccionamos para el estudio los de límite (L), series (S), sucesiones (Q), variación infinita (interdependencia de las variables en un conjunto infinito) (V), elección de particiones en un intervalo (P) y variación funcional en los extremos de funciones reales de variable real (E). Estos procesos infinitos están incluidos explícitamente en los contenidos de los cursos de primer año de Análisis con lo que resultó muy adecuada la discriminación que realizamos.

A continuación se presentan ordenados por bloques de contenido los obstáculos encontrados en los antecedentes.

Asociados a sucesiones y conjuntos finitos:

- Confusión de los n primeros términos de la sucesión con la sucesión infinita.
- Confusión de las áreas gráficas con dibujos exentos de significación o con una significación distinta a la pretendida.
- Asignación al subíndice n lavariación cuando no es tal: $(a_{in})_{i\in N}$
- No distinción entre sucesiones convergentes y no convergentes, monótonas y no monótonas, con llegada en distintos conjuntos numéricos $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- Dificultad para interpretar, representar y manipular con solvencia el simbolismo algebraico de las sucesiones.
- Confusión de las propiedades de las sucesiones.

- Dificultad a la hora de relacionar la completitud de $\mathbb{R}$ (Principio de encaje de Cantor), el teorema de Bolzano-Weierestrass[64] y el criterio de Cauchy[65], entre otros.

Asociados a la monotonía y extremos:

- Dificultad en la reproducción y experimentación de los modos de representación de una función (sucesión, serie).
- Confusión entre monotonía y convergencia.
- Dificultad en el tratamiento de desigualdades algebraicas.
- Posesión de esquemas inadecuados de variación de variables: $(n,\ a_n)$ y $(x,\ f(x))$.

Asociados a variación infinita:

- Confusión entre los extremos absoluto y relativo.
- No distinción entre conjuntos infinitos y los que no lo son.
- No distinción entre el infinito potencial y el actual.
- No distinción entre las propiedades de numerabilidad y densidad de conjuntos.
- Confusión de la naturaleza de subíndices y variables reales.
- Dificultad para plasmar algebraicamente conjuntos con variaciones infinitas.
- Dificultad para comprender la relación de inclusión y cardinalidad en conjuntos infinitos.

[64] Cualquier sucesión acotada en $\boldsymbol{R}$posee una subsucesión convergente.

[65] Una sucesión en $\boldsymbol{R}$es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Asociados a límite:

- El límite es inalcanzable y es el último término.
- Dificultad en la comprensión del concepto de límite.
- Dificultad en el manejo algebraico de expresiones que son inherentes al uso de desigualdades relacionadas con el $\varepsilon - \delta$.
- Falta de conocimiento y manejo de las concepciones geométricas, numérica, analítica o topológica relacionadas con el concepto de límite.
- Imprecisión o errores en el cálculo de límites vía procedimientos algebraicos o analíticos.

Asociados a particiones:

- Aceptación de un conjunto infinito como una partición.
- Aceptación de particiones como intervalos.
- Dificultad en el recubrimiento del intervalo de partida.
- Confusión entre inclusión y pertenencia.
- Confusión entre número de puntos y finura.
- Dificultad para realizar el procedimiento de refinamiento.
- Carencia del dominio de la aritmética de los números reales. Por ejemplo, cuando $\frac{b-a}{p} = h$; con $a, a+h, a+2h, a+3h, \cdots, a+ph = b$.
- Dificultad para construir particiones más finas.
- Dificultad para definir particiones.
- Desconocimiento de la topología real. Intersecciones y uniones de abiertos, cerrados, compactos, etc.

Asociados a series:

- Creencia errónea de que también son series infinitas sumas finitas como: $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+,\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{3^n}$.
- Confusión de las áreas gráficas con dibujos exentos de significación.
- Asignación al subíndice n de la variación infinita cuando no es tal, o finita, cuando es infinita: $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.
- No distinción entre series convergentes y divergentes.
- Confusión entre término general de una serie y una suma parcial.
- Confusión entre la suma parcial y la serie.
- Identificación de la tendencia a 0 del término general de una serie con la convergencia de la misma.
- Dificultad para manejar los restos.
- Dificultad para aplicar criterios de sumabilidad y de convergencia de una serie.

Asociados a la ID:

- Imprecisión o errores en la determinación gráfica de las superficies inferiores y superiores.
- La integral inferior no se alcanza, se aproxima a un valor (ídem superior).
- Por la no comprensión del axioma del extremo superior (ídem Inferior).
- Inseguridad en la representación de los números sobre la recta real.
- Confusión entre los subíndices y los nodos de la partición.
- Confusión entre extremo relativo y absoluto.
- Considerar que los conceptos de área e integral definida son iguales.

- Desconocimiento u olvido de las razones trigonométricas.
- No se acepta fácilmente que un máximo RELATIVO pueda ser REBASADO POR un mínimo RELATIVO o viceversa.
- Dificultad para establecer las expresiones analíticas de las sumas inferiores y superiores.
- El desconocimiento del conjunto de puntos intermedios genera ambigüedad.
- El valor que toma la función en los puntos intermedios es impreciso. Además, si el número de dichos puntos es "n", entonces la correspondiente suma de Riemann, más que comprendida, es aceptada.
- El cálculo de áreas se reduce a:

$$\int_a^b f(x) = F(x)[_a^b = F(b) - F(a)$$

- Dificultad para aplicar el algoritmo para calcular el área entre dos curvas.
- Dificultad para identificar el extremo superior de la integral y la variable de integración, y posible intercambio de uno y otro.
- Dificultad en la comprensión del concepto de límite de una sucesión.
- Aceptación como un axioma que el área del círculo es πr^2.
- Las desigualdades no resultan evidentes para los estudiantes cuando la partición tiene un número indeterminado "$n + 1$" nodos.
- Si las sumas inferior y superior se aproximan a un mismo valor tanto como deseemos, no necesariamente son iguales las integrales inferior y superior.
- No es fácil encontrar la partición P del teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.
- No resulta fácil aplicar correctamente el algoritmo correspondiente.

- Dificultad en la comprensión analítica de expresiones algebraicas asociadas a las desigualdades entre la suma de Riemann y las sumas inferiores y superiores de Darboux.
- Confusión en la definición conceptual de función integrable Riemann.
- Desconocimiento del teorema del valor medio del cálculo diferencial y comprensión deficiente de su interpretación geométrica.
- El teorema fundamental del cálculo es la regla de Barrow.
- Siempre es posible encontrar una primitiva de una función.
- Todas las funciones integrables tienen una primitiva que puede ser escrita en forma explícita.
- Utilización indiscriminada del método rectangular como método de integración numérica.
- Asociación de la utilización de una regla de integración numérica con la facilidad de sus cálculos, y no con la precisión de la misma.

Proceso práctico para la determinación de obstáculos

Esta lista elaborada en la sección anterior ha pasado por un proceso de refinamiento que es el que se detalla en la presente sección y cuyo resultado se presenta junto con los actos de comprensión ligados a ellos, a modo de tablas para una mejor visualización, al final de este parágrafo.

Para cubrir en el más amplio sentido, el conjunto de posibles obstáculos relacionados con estos conceptos, realizamos un cuestionario (en adelante C_1) para refinar las tablas (Anexo 8) que previamente elaboramos. El cuestionario C_1 junto con su solucionario está incluido en el Anexo 6. El instrumento se aplicó a 87 estudiantes de Matemáticas de dos universidades (70 de una colombiana y 17 de una española). Todos los cuestionarios cumplimentados están relacionados en el Anexo 7. El desempeño de los estudiantes era variado, y el grupo no tenía características específicas resaltables salvo el tipo de grado cual pertenecían. Todos los estudiantes tienen conocimientos previos formales sobre los temas propios del curso de Análisis I y Análisis II que detallamos en el capítulo del tratamiento curricular: generalidades de conjuntos numéricos, sucesiones de números reales, funciones de variable real, límites y continuidad, cálculo diferencial, series de números reales, cálculo de primitivas y la integral definida. La muestra elegida para aplicar los distintos cuestionarios es sesgada, en la medida en que no se ha efectuado una elección aleatoria de los centros por la disponibilidad del investigador para pasar estos instrumentos. Las muestras elegidas, al tratarse de grupos ya formados, fueron disponibles e intencionales (Cardona, 2002).

El cuestionario consta de 16 preguntas agrupadas en siete cuestiones sobre conceptos relacionados con la integral definida y con procesos infinitos que subyacen ese concepto. Elaboramos las preguntas con base en los actos de comprensión y en los obstáculos que previamente establecimos con la intención de localizar a través de las respuestas de los estudiantes, errores que pudiesen estar ligados a obstáculos emergentes de las respuestas del cuestionario y no incluidas en la primera versión de la lista de obstáculos (Anexo 8).

Las dos primeras preguntas del cuestionario sólo las respondió el grupo de Bogotá ya que, fueron incorporadas después de que se aplicó el cuestionario C_1 al grupo de España. El hecho que impulsó esta inclusión fue precisamente el descubrimiento de evidencias de la existencia de obstáculos relacionados con la identificación y discriminación de particiones, que detectamos en una primera revisión de las respuestas a los cuestionarios ya aplicados.

Las respuestas a los problemas se organizaron por medio de redes sistémicas[66](Bliss, Monk, & Ogborg, 1983). Se elaboró una red sistémica para cada una

[66] Systemic networks.

de ellas, analizándolas y organizándolas posteriormente en función de los "obstáculos" que se consideraron implícitos en las explicaciones de los estudiantes.

Redes Sistémicas como instrumento para estudiar obstáculos

Este instrumento y su terminología derivan de la lingüística sistémica. La lingüística sistémica está interesada en la descripción y representación del significado, de los recursos semánticos del lenguaje, o en palabras de Bliss et al. (1983), "Por lo tanto, una red lingüística sistémica intentará dar cuenta de las estructuras del lenguaje" (p.28). A cada palabra o gráfica subyace un significado. El análisis sistémico lo que permite es recoger este significado de los sistemas de palabras. La red posibilita la identificación de relaciones entre las palabras y las ideas que expresan los estudiantes. Según Sanmartí (2007) lo que se pretende a través de las redes sistémicas es "identificar posibles puntos de anclaje entre el conocimiento de sentido común y el conocimiento experto" (p.38).

En general, las redes posibilitan identificar razonamientos o procedimientos, qué sabe ya el alumnado y dónde están su dificultades. Según Jorba & Sanmartí (1994) las redes sistémicas constituyen una propuesta metodológica para analizar datos cualitativos a partir de cuestionarios abiertos, entrevistas y/o observaciones en el aula. Las redes sistémicas son instrumentos que pueden utilizarse con el propósito de recoger las ideas y analizarlas, sin importar que la respuesta sea, o no, correcta. De esta manera se puede determinar el tipo de concepciones alternativas utilizadas en los razonamientos. Por ello, resulta más que adecuado analizar los errores y obstáculos relacionados con los procesos a partir de las imágenes conceptuales de los estudiantes que emergen de las respuestas a preguntas planteadas en el contexto de la integral definida.

Como sistema de clasificación y representación de los datos cualitativos obtenidos a partir de las respuestas del cuestionario C_1 elaboramos las redes sistémicas para cada una de las preguntas del C_1. En la Figura 4.14 podemos observar a modo de ejemplo la red sistémica de la pregunta 1 literal A del cuestionario C_1 cuyo identificador es R1A.

En el análisis de las respuestas para determinar si una respuesta dada era correcta o no aplicamos tanto criterios de realización como criterios de resultados a saber:

Criterios de realización: Los estudiantes aplican en la resolución de los problemas del cuestionario los conocimientos propios de los cursos de Análisis Matemático I y II.

Criterios de resultados: Tuvimos en cuenta la pertinencia de las afirmaciones en los razonamientos, la precisión, coherencia y verificamos si estaban completas, bien escritas y en general, bien comunicadas. Aquí no tuvimos en cuenta la originalidad ya que ésta es propia de los actos de comprensión y no de los obstáculos.

Para realizar las redes sistémicas de errores en las respuestas utilizamos una plantilla (Figura 4.8) con los indicadores de los criterios que hemos mencionado en los párrafos anteriores. No hemos tenido en cuenta ninguna escala numérica, puesto que no queremos valorar ningún grado de dificultad sino sólo hacer el proceso detección.

<table>
<tr><td rowspan="4">CRz</td><td rowspan="4">Criterios de realización</td><td colspan="2" rowspan="2">A</td><td rowspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">N A</td><td rowspan="2"></td><td>C</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="3">OE</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Correcta</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aplica</td><td colspan="3">No Aplica</td><td>I</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="6">Conceptos de Análisis</td><td>Incorrecta</td><td rowspan="3">Obstáculo Emergente</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CRs</td><td rowspan="2">Criterios de resultados</td><td>Per</td><td></td><td>Pre</td><td></td><td>Coh</td><td></td><td>Co</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Pertinencia</td><td colspan="2">Precisión</td><td colspan="2">Coherencia</td><td colspan="2">Completa</td></tr>
</table>

Figura 4.8 Plantilla de análisis para crear las redes sistémicas de C_1.

Los criterios de realización y de resultados se valoran esencialmente para determinar si los errores detectados son pertinentes para clasificar en la red. La valoración de la respuesta como correcta o incorrecta (C/I) nos permite clasificar las respuestas en las cuales se han cometido errores, independientemente del tipo de error (conceptual, procedimental,...). Los errores van ligados tanto a los criterios de realización como a los de los resultados. Precisamente cuando un estudiante además de fallar a nivel de realización evidencia deficiencia en uno o más de estos criterios determinaremos los posibles obstáculos a los que van ligados cada uno de los errores.

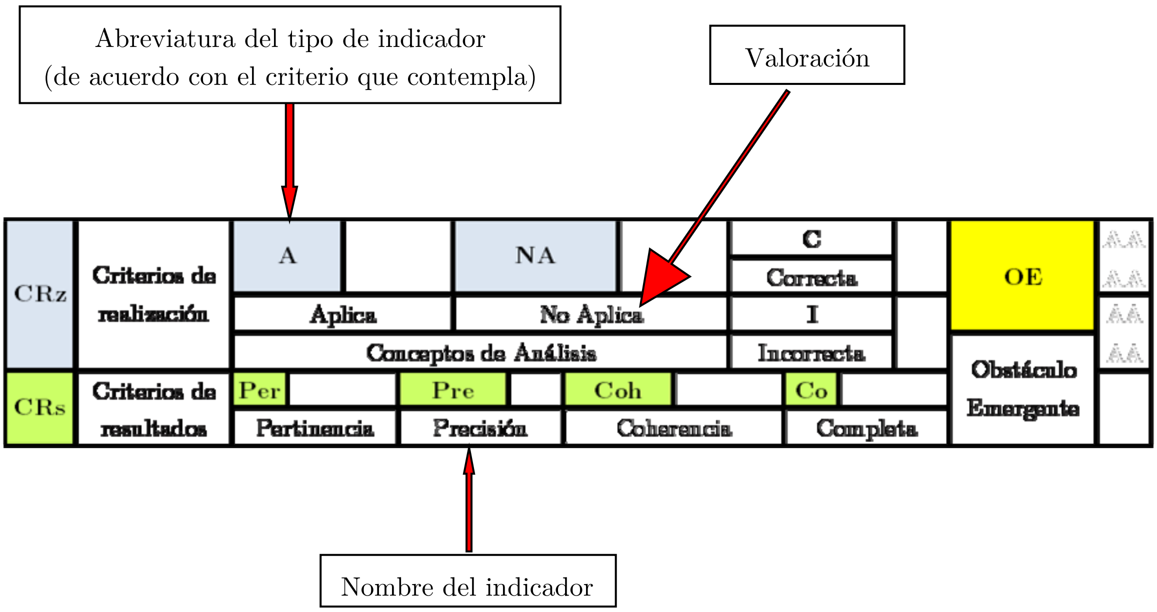


Figura 4.9 Estructura informativa de los indicadores en la plantilla.

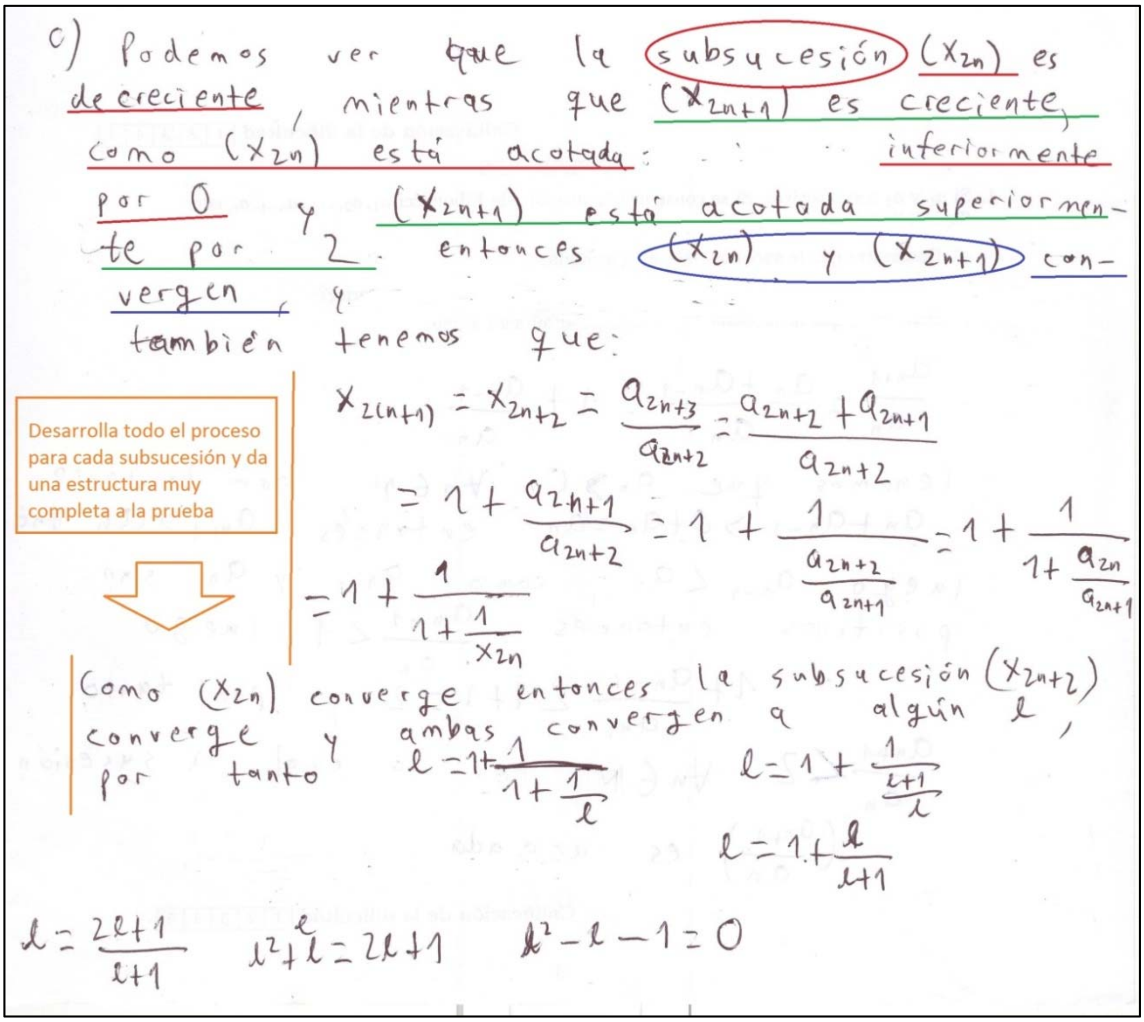
Ejemplificación de criterios de valoración de acuerdo con la plantilla elaborada.

Ilustraremos a través de un par de ejemplos algunos aspectos relacionados con la forma en que se ha desarrollado la codificación en la plantilla.

En el caso de la respuesta a la pregunta 6C del cuestionario C_1:

> *Si* a_1 *y* a_2 *son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci* $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ *en donde se tiene:* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. *Demuestra que la sucesión* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *converge al número áureo.*

Vamos a analizar la respuesta que dio el estudiante (60), y que se muestra en la siguiente figura.


c) Podemos ver que la subsucesión (x_{2n}) es decreciente, mientras que (x_{2n+1}) es creciente, como (x_{2n}) está acotada inferiormente por 0 y (x_{2n+1}) está acotada superiormente por 2. entonces (x_{2n}) y (x_{2n+1}) convergen y también tenemos que:

$$x_{2(n+1)} = x_{2n+2} = \frac{a_{2n+3}}{a_{2n+2}} = \frac{a_{2n+2}+a_{2n+1}}{a_{2n+2}} = 1+\frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}} = 1+\frac{1}{\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{2n}}}$$

Desarrolla todo el proceso para cada subsucesión y da una estructura muy completa a la prueba

Como (x_{2n}) converge entonces la subsucesión (x_{2n+2}) converge y ambas convergen a algún l, por tanto $l = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{l}}$ $\quad l = 1+\frac{1}{\frac{l+1}{l}}$ $\quad l = 1+\frac{l}{l+1}$

$$l = \frac{2l+1}{l+1} \qquad l^2+l = 2l+1 \qquad l^2-l-1=0$$

Figura 4.10 Respuesta del estudiante (60) a la pregunta (6C)de C₁.

El estudiante (60) ya en la pregunta (6A) ha demostrado que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ con $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada, y con ello justifica el que las subsucesiones $\{x_{2n}\}_{n\geq 1}$y $\{x_{2n+1}\}_{n\geq 1}$ en donde $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $x_{2n+1} = \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$ y $a_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ también lo están. Evidencia la monotonía de las dos subsucesiones pero no las justifica. En efecto, justifica la convergencia de las dos subsucesiones pero no justifica la afirmación que hace acerca de la coincidencia del límite l de convergencia. La secuencia del desarrollo de la respuesta es coherente. Para justificar lo que él previamente encuentra (Respuesta 6B) acerca del cuadro de cálculo en donde las dos sucesiones se van acercando progresivamente, y forman una sucesión de intervalos encajados que contienen el número áureo bastaba con inducción completa que la diferencia entre dos términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es menor que cualquier número dado. Finalmente él encuentra el valor del límite y general las ideas están bien establecidas aunque falten algunas justificaciones. Interesa detectar errores y, como a nivel de conceptos no se muestran indicios de carencias teóricas específicas así que, en este caso en la plantilla para la pregunta 6C del estudiante (60) queda como se especifica en la Figura 4.11 :

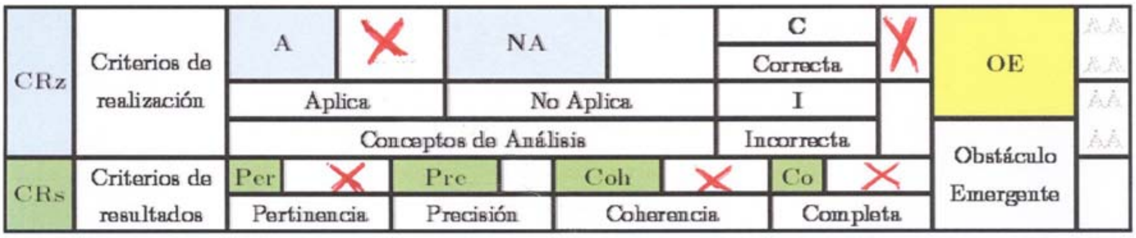
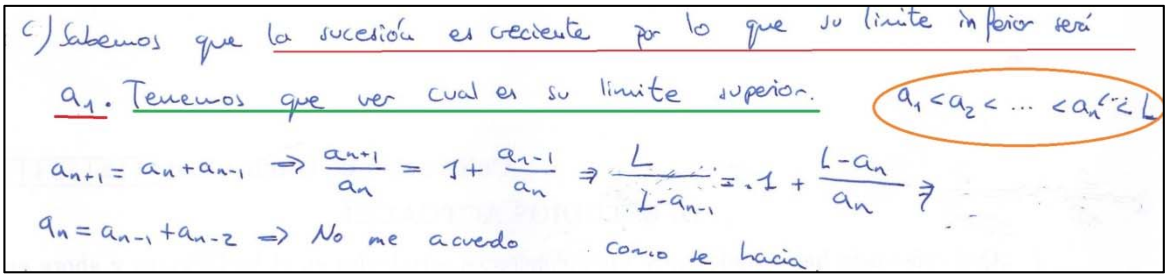


Figura 4.11 Plantilla de análisis: respuesta (6C) del estudiante (60).

En contraste, la respuesta del estudiante (86) evidencia errores de tipo conceptual y carencias de tipo procedimental. En lo relacionado con la sucesión $\{a_n\}$ observamos que no discrimina entre extremo inferior y mínimo, ni entre extremo y cota. Deduce su monotonía pero no respalda su afirmación. Respecto de la sucesión cociente, no menciona ni siquiera la convergencia como requisito para la existencia de un límite. También podemos detectar deficiencias en la interpretación y manipulación del simbolismo algebraico de las sucesiones.



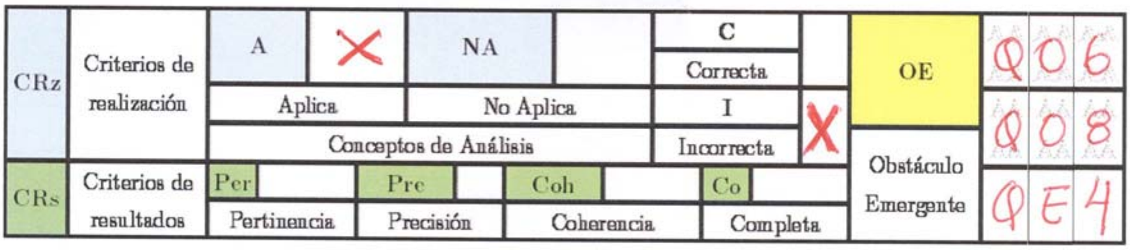
c) Sabemos que la sucesión es creciente por lo que su límite inferior será a_1. Tenemos que ver cual es su límite superior. $a_1 < a_2 < \dots < a_n \le L$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \frac{L}{L-a_{n-1}} = 1 + \frac{L-a_n}{a_n}$?

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow$ No me acuerdo como se hacía

Figura 4.12 Respuesta del estudiante (86) a la pregunta (6C).

Cuando el estudiante hace la afirmación “no me acuerdo” (que fue recurrente en otros estudiantes y en la misma pregunta), podemos pensar acerca de la dialéctica proceso/concepto cuando se pretende solucionar un problema. Algunos estudiantes basan sus respuestas en intentar reproducir y reconstruir aspectos que puedan recordar en lugar de razonar a partir de sus conocimientos y de la situación planteada. La plantilla cumplimentada, que corresponde a esta respuesta la ilustramos en la Figura 4.13



CRz	Criterios de realización	A	X	NA		C		OE		Q	0	6
						Correcta						
		Aplica		No Aplica		I	X			Q	0	8
		Conceptos de Análisis				Incorrecta		Obstáculo Emergente				
CRs	Criterios de resultados	Per		Pre		Coh		Co		Q	E	4
		Pertinencia		Precisión		Coherencia		Completa				

Figura 4.13 Plantilla de análisis de la respuesta (6C) del estudiante (87).

Después de hacer esta codificación discriminamos por categorías de errores en las redes sistémicas (Anexo 9) y la información relacionada con cada pregunta y estudiante la relacionamos en tablas de Excel. Compilamos todos los obstáculos que se presentaron y los agrupamos luego en las tablas de obstáculos emergentes que encontramos en la página 246.

Ejemplificación de red sistémica

En el Anexo 9 se pueden observar las 16 redes sistémicas que se han elaborado incluyendo otra que hemos puesto aquí a modo de ejemplo (Figura 4.14).

Éstas nos han permitido a través de la configuración de los datos observar de manera efectiva todas las respuestas de los estudiantes que cumplimentaron el cuestionario.

Determine una partición del intervalo $[0,1]$. (R1A)

- R1A
  - Respuesta Correcta
    - (41)(43)(54)(55)(57)(60)(61)(62)(63)(70)
  - Respuesta incorrecta
    - A través de los subintervalos de la partición y no del conjunto de elementos de la partición.
      - Ejemplos
        - $\left[0,\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\left[\frac{2}{3},\frac{3}{3}\right)$ — (2)(38)
        - $\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{6},1\right]$ — (24)
        - $[(0,0.5)\cup(0.5,0.7)\cup(0.7,1)]$ — (29)(30)(34)
        - $\left[0,\frac{1}{10}\right);\left[\frac{1}{10},\frac{1}{5}\right);\left[\frac{1}{5},\frac{3}{10}\right);\cdots;\left[\frac{9}{10},\right.$ — (9)(11)
    - A través de una gráfica.
      - (7)(12)(14)(15)(16)(40)(42)(44)(46)(47)(49)(50)(51)(52)(53)(56)
    - A través de un contador. Por ejemplo escribiendo sólo $n = 100$.
      - (10)
  - No Responde
    - (1)(3)(4)(5)(6)(8)(13)(17)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(25)(26)(27)(28)(31)(32)(33)(35)(36)(37)(39)(45)(48)(58)(59)(64)(65)(66)(67)(68)(69)

Figura 4.14 Red sistémica de la pregunta (1ª) del Cuestionario.

Se puede observar la estructura de las redes colocadas en forma de árbol con ramificaciones que a su vez pueden extenderse a otras ramas según las características de las respuestas. Utilizamos como segmentos del árbol barras verticales (|) para señalar categorías excluyentes entre sí. Identificamos a los estudiantes aleatoriamente con números del 1 al 87 y tomamos como indicador su respectivo número ubicado entre paréntesis: (14) identifica al estudiante 14.

Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$, dé un valor aproximado de la suma. (R1B)

- R1B
  - Respuesta Incorrecta
    - Utiliza la regla de Barrow
      - Correctamente | (7)
      - Incorrectamente | (15)
    - Calcula el valor
      - Correcto | $\sum_{i=1}^{10} \Delta_i$; $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1+n^2}$ | (26)(61)
      - Incorrecto | $\sum_{x=1}^{10} \frac{1}{1+x^2}$ | (13)
    - Con mal manejo de contadores y subíndices y sin discriminar el papel que juega la imagen de la etiqueta del intervalo. | (6)(15)(19)(21)(31)(32)(35)(44)(49)(53)(54)(55)(58)(64)(65)(68)
  - Respuesta correcta
    - No calcula su valor. | (4)(9)(40)(57)(60)
    - Calcula erróneamente el valor | (16)(22)(41)
    - Partición equidistribuida | (2)(3)(10)(11)(23)(24)(25)(27)(29)(30)(34)(38)(39)(43)/45)(46)(47)(50)(51)(52)(56)(62)(63)
  - No responde | (1)(2)(7)(14)(15)(17)(18)(20)(33)(36)(37)(42)(45)(48)(66)(67)(69)(70)

Figura 4.15 Red sistémica del ítem (1B) del Cuestionario.

Antes de hacer una descripción por pregunta, de la clasificación de errores y obstáculos que nos ha permitido realizar las redes sistémicas y de presentar algunas conclusiones mostramos el estimativo de estudiantes que respondieron correctamente, los que no lo hicieron y los que no respondieron (Tabla 4.1).

Tabla 4.1 Porcentaje de respuestas para las preguntas del cuestionario.

RESPUESTA (%) /PREGUNTA	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	3A	3B	3C	4	5	6A	6B	6C	7	PROMEDIO
CORRECTA	14	44	28	46	8	25	2	10	8	6	3	4	18	5	3	6	14
INCORRECTA	36	30	17	10	67	75	44	25	6	14	32	19	18	30	6	43	29
NO RESPONDE	50	26	55	44	25	0	54	64	86	80	64	77	63	66	91	52	56

Observamos que salvo algunas preguntas, en general hay un porcentaje significativo de estudiantes que no respondieron alguna(s) de ella(s). Esto ya en una primera mirada evidencia la posible existencia de dificultades en los estudiantes a la hora de enfrentarse a cuestiones que tienen que ver con conceptos que involucran los procesos infinitos o la ID. Por ello, en adelante sólo tomaremos como universo (Tabla 4.2) el grupo de estudiantes que respondió a cada pregunta (en el caso del análisis por pregunta), y el promedio de los que respondieron (en el análisis general de los errores).

Tabla 4.2 Distribución de respuestas según el universo dado.

RESPUESTA/PREGUNTA	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	3A	3B	3C	4	5	6A	6B	6C	7	PROMEDIO
CORRECTA	10	31	24	40	7	0	2	9	7	5	3	3	16	4	3	5	11
INCORRECTA	25	21	15	9	58	65	38	22	5	12	28	15	16	26	5	37	25
UNIVERSO	35	52	39	49	65	65	40	31	12	17	31	18	32	30	8	42	35

En adelante, los valores porcentuales en los que nos moveremos estarán marcados por los datos de las tablas 4.2 y 4.3.

Tabla 4.3 Cuestionario C_1: Distribución porcentual por respuesta.

RESPUESTA (%) /PREGUNTA	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	3A	3B	3C	4	5	6A	6B	6C	7	PROMEDIO
RESPUESTA CORRECTA	29	60	62	82	11	0	5	29	58	29	10	17	50	13	38	12	31
RESPUESTA INCORRECTA	71	40	38	18	89	100	95	71	42	71	90	83	50	87	63	88	69

Descripción de obstáculos identificados por pregunta según el cuestionario C_1

A continuación describimos el análisis de las respuestas a las 16 preguntas del cuestionario. La configuración de las redes sistémicas de las preguntas 1C y 1D fueron similares así que las consideramos en una sola descripción. No incluimos en esta fase las preguntas 2A y 2B puesto que sus redes sistémicas no aportaron información significativa relacionada con el objeto de este estudio.

Pregunta 1A

Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Determine una partición del intervalo $[0,1]$.

Objetivo: Analizar qué obstáculos pueden estar asociados a definir particiones.

En esta categoría, sorprende cómo la mera definición de una partición de un intervalo compacto dado, suscita una variedad de errores. La definición de la partición tuvo dificultad para un 51% de los estudiantes. La identificación de la partición como un conjunto de puntos sólo la realizó un 29% de los estudiantes. De aquí podemos vislumbrar que un porcentaje significativo (46%) de estudiantes recurrió a la representación gráfica (la mayoría sin el rigor de la descripción de la misma); entre ellos, cabe destacar la respuesta del estudiante (1) (Figura 4.16), en la cual se puede ver la no discriminación entre las variables naturales (el índice de la partición, que está relacionado con el infinito potencial) con el número indeterminado fijado como variable (relacionado con el infinito actual).

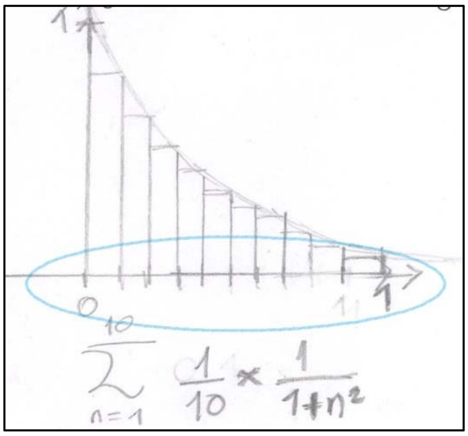


Figura 4.16 Respuesta 1A del estudiante (1).

Un 20% de los estudiantes aceptan un intervalo como elemento de una partición cuando señalan la partición esto es, en el sentido usual de "partir algo" y que se interpreta como dividir algo en partes. También errores relacionados con el recubrimiento del intervalo (14%), puesto que cuando indicaban algunos la partición como intervalos, los intervalos que escogían, no necesariamente cubrían el intervalo $[0,1]$, y, en el caso de cubrirlo, por ejemplo $[0, 0.3)$ y $[0.3, 1]$ lo que evitan es que los intervalos se intersecten y esta es una exigencia de las particiones en el sentido de la teoría de conjuntos. En una interpretación más geométrica, se ve de una manera muy natural ya que quieren evitar que un fragmento de "área" se cuente más de una vez (afirmamos esto porque también se encontró que algunos estudiantes (24%) consideran que los conceptos de integral definida y área son iguales). No caen en la cuenta que el segmento tiene área cero. También en lo que se refiere a la existencia de condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto sea una partición hubo errores (11%).

La red sistémica asociada a esta cuestión (Figura 4.14) hace aflorar estos errores y en ella se pueden apreciar las evidencias de los obstáculos que tienen los estudiantes al escribir la partición: Identificación de pertenencia con inclusión, recubrimiento del intervalo, identificación de los elementos de la partición con el número de ellos.

Pregunta 1B

Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Defina una suma de Riemann para f . Dé un valor aproximado de la suma para $n = 10$.

Objetivo: Analizar qué obstáculos pueden estar asociados a las expresiones analíticas de las sumas de Riemann.

Para este grupo de estudiantes (40%) la definición de la suma supone diferentes dificultades relacionadas no sólo con la propia definición. Por ejemplo, al determinar el valor que toma la función en los puntos intermedios. Además, si el número de dichos puntos es "n", entonces la correspondiente suma de Riemann, más que comprendida es aceptada (5%). También se ve un obstáculo relacionado con los contadores, subíndices y la discriminación de los papeles imagen/etiquetas[67] del intervalo, es decir, el desconocimiento de puntos intermedios genera ambigüedad (32%). Un ejemplo de ello es la respuesta que ha dado el estudiante (15) (Figura 4.17) quien pese a tener definido su intervalo de integración, quien confundió los nodos de la partición con los valores del dominio de la función.

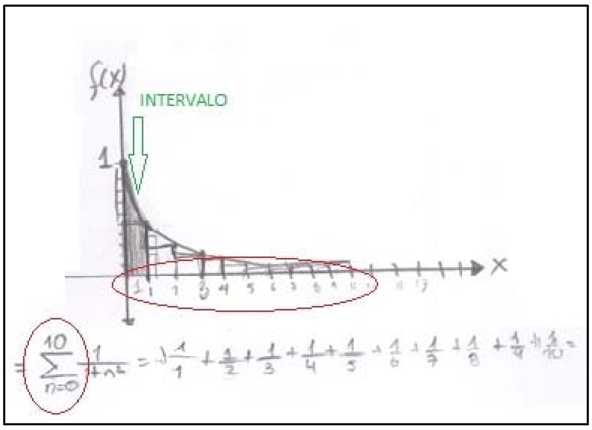


Figura 4.17 Respuesta 1B del estudiante (15).

[67] O puntos intermedios.

Preguntas 1C-1D

Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Determine si f es integrable en $[0,1]$. En caso de ser, ¿Cuál es el valor de la ID?

Objetivo: Analizar los obstáculos asociados a la caracterización de las funciones integrables.

En esta categoría se vislumbra cómo el 23% de los estudiantes ha incurrido en errores relacionados con el sentido de las contenencias de clases de objetos (en este caso funciones) derivables o continuos. Llama la atención un grupo de estudiantes (8%) que afirma que la función es integrable porque está definida en el intervalo compacto. Esto nos lleva a pensar que estos estudiantes tienen la idea de que si hay puntos de discontinuidad en el dominio no habrá una curva continua para la cual se pueda determinar el "*área bajo la curva*". Por su parte, un estudiante afirmo: "No es integrable porque no pude hallar la antiderivada". Una respuesta que llamó la atención de la pregunta 3C[68] por su relación con algunas de las respuestas que se encontraron en la pregunta en cuestión. Un 40% de los estudiantes afirmó que: "se puede calcular la primitiva y usar la regla de Barrow hallar el área bajo la curva". De acuerdo con esta afirmación vemos que es fácil cometer el error de pensar que el poder usar la regla de Barrow garantiza la integrabilidad. Se tiene en muy buen concepto el que dice que como él no pudo integrar la función entonces no es integrable.

[68] Como mencionamos antes, no incluimos en este análisis por la similitud de su red sistémica con la pregunta cuya disquisición estamos haciendo (1D).

Pregunta 2C

Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

Sea $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrable y satisface $f(x)\leq 0$ para todo $x\in[a,b]\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces se tiene que $F(x)=\int_a^b f(x)dx\leq 0$.

Objetivo: Analizar los obstáculos asociados a la construcción de expresiones analíticas de sumas superiores e inferiores.

En esta categoría pudimos identificar que un 23% de los estudiantes tienen dificultades para distinguir entre las propiedades de numerabilidad y densidad de conjuntos. Un 20 % mostró confusión en la definición conceptual de función integrable Riemann y un 10% entre los conceptos de área e integral definida. En esta categoría en particular se hizo evidente la dificultad para establecer las sumas superiores en particular, puesto que cualquiera con la norma suficientemente pequeña hubiese servido dada la densidad de los irracionales. Un estudiante (71) hizo una demostración (Figura 4.18) que plasma el acto de comprensión ligado al obstáculo concerniente a la pregunta.

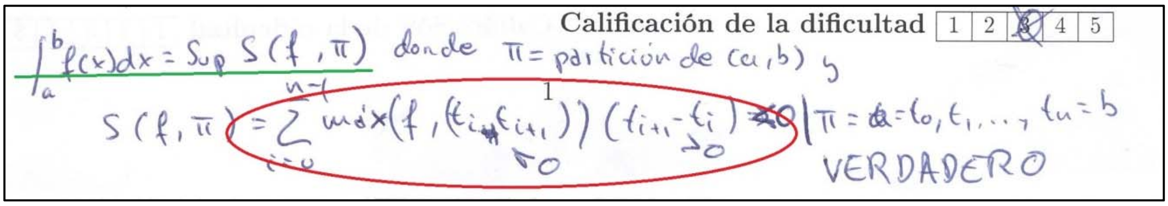


Figura 4.18 Respuesta 2C del estudiante (71).

.

Pregunta 3A

Dada la función cuya gráfica es la dada en la Figura 4.19[69].

Obtenga la expresión algebraica de la misma en el intervalo $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

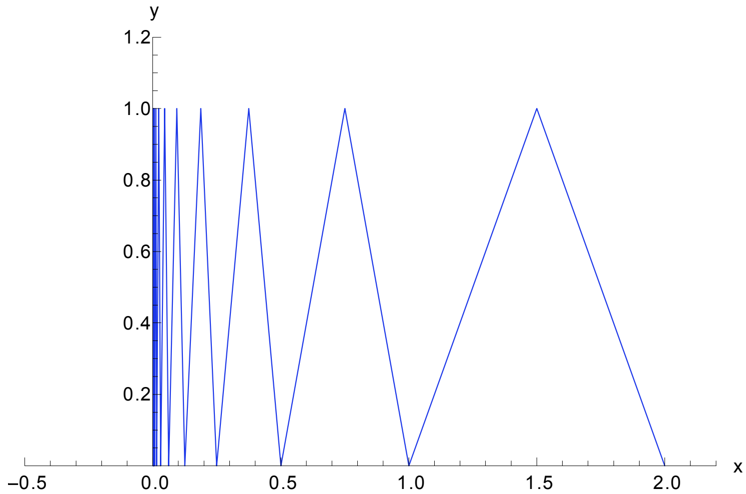


Figura 4.19 Función correspondiente a la pregunta 3A.

Objetivo: Analizar los obstáculos asociados a los modos de representación de una función (sucesión, serie).

Esta categoría revela la confusión que tienen algunos estudiantes (16%) de la naturaleza de subíndices y variables reales. Igualmente, cerca de un 23% tiene dificultad en la reproducción y experimentación de los modos de representación de una función. Dos estudiantes presentan confusión de la naturaleza de variables naturales y reales o, del "n" natural como número indeterminado fijado o como variable. Por el contrario, en la respuesta del estudiante (71) se puede vislumbrar (Figura 4.20) su clara identificación de que la gráfica de la función está determinada por "trozos" de rectas.

[69] Una posible respuesta es $\boldsymbol{f(x) = 1 - |2^{n+1}x - 3|}$ para $\boldsymbol{x} \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$ y $\boldsymbol{f(0) = 0}$.

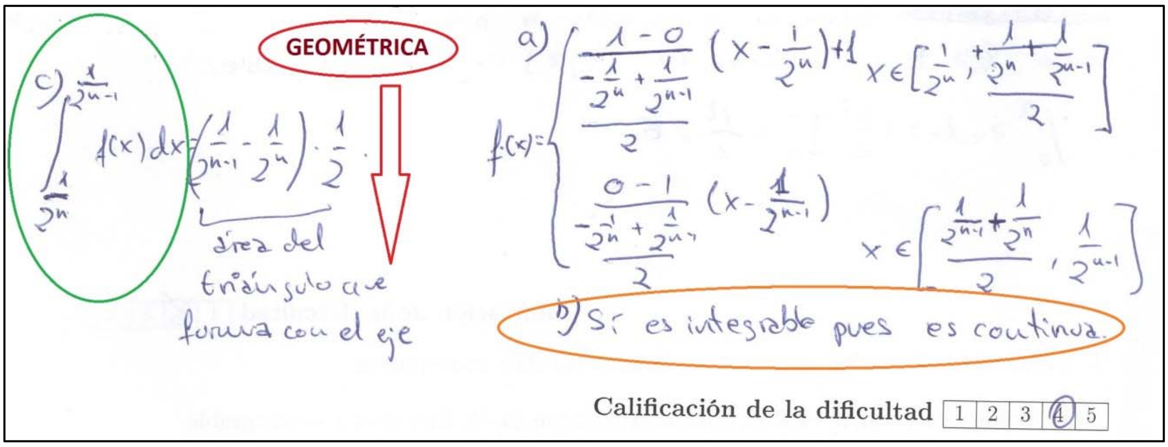


Figura 4.20 Respuesta 3A, 3B y 3C del estudiante (71).

Pregunta 3B

Dada la función cuya gráfica es la dada en la Figura 4.19. Determina la integrabilidad de la misma en el intervalo $[0,2]$, sabiendo que $f(0) = 0$.

Objetivo: Analizar los obstáculos relacionados con la caracterización y significación de áreas gráficas a través de procesos infinitos.

Los razonamientos del 41% de los estudiantes pese a la evidente continuidad de la función en el intervalo compacto $[0,2]$ no utilizo el criterio de integrabilidad, ni siquiera en los subintevalos $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$, en donde gráficamente se hace evidente. Identificamos también aquí un 16% de estudiantes que confundían la naturaleza de variables naturales y reales.

Pregunta 3C

Dada la función cuya gráfica es la dada en la Figura 4.19. Calcula según sea el caso el valor de la integral.

Objetivo: Analizar los obstáculos relacionados con la caracterización de la integral definida.

La interpretación de la integral de una función continúa no negativa en un intervalo cerrado como área entre el eje OX y la curva de la función suscitó diversidad de dificultades asociadas principalmente al uso de la regla de Barrow. Cuando se involucran expresiones algebraicas para plasmar conjuntos de variaciones infinitas el 70% de los estudiantes se queda en la mera representación algebraica de la integral pero no llega a calcular la integral. Por otra parte, aparece de nuevo la confusión de la naturaleza de variables naturales y reales o, del "n" natural como número indeterminado fijado o como variable (23%). Podemos observar como el estudiante (71) (Figura 4.20) identifica el área como la integral y soluciona geométricamente el problema.

Pregunta 4

Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^x f(x)dx$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$ siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1,2,3, \ldots$

Objetivo: Analizar los obstáculos asociados a la identificación del extremo superior de la integral y la variable de integración y posible intercambio de uno y otro.

Esta categoría en efecto ha ratificado la dificultad que tienen algunos estudiantes (10%) no sólo para identificar sino para discriminar entre estos objetos. Igualmente encontramos que el cálculo de la integral se muestra difícil cuando se involucra más de una variable (22%). También se detectó que dos estudiantes teniendo la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$ no la identificaron como tal. Por otra parte, podemos ver que la respuesta del estudiante (72) (Figura 4.21) es puramente analítica. Sugiere la presencia del acto de comprensión ligado a este obstáculo. A través de una gráfica hace una identificación, luego hace una discriminación para cada intervalo en particular y finalmente llega la generalización y síntesis del concepto de integral indefinida: $F(x) = \int_a^t f(t)dt$ para la función dada.

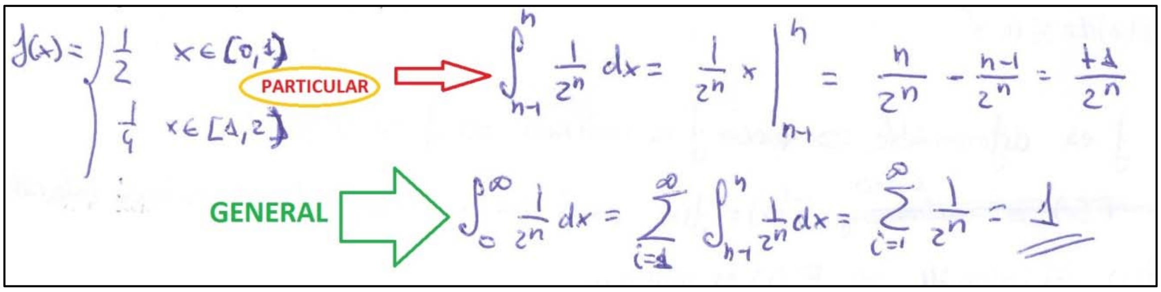


Figura 4.21 Respuesta 4 del estudiante (72).

Aunque también con la expresión algebraica que define el valor de la integral podemos ver que la respuesta del estudiante (9) (Figura 4.22) está basada apenas en la identificación de la integral como la suma de las áreas de los rectángulos determinados por la función escalonada.

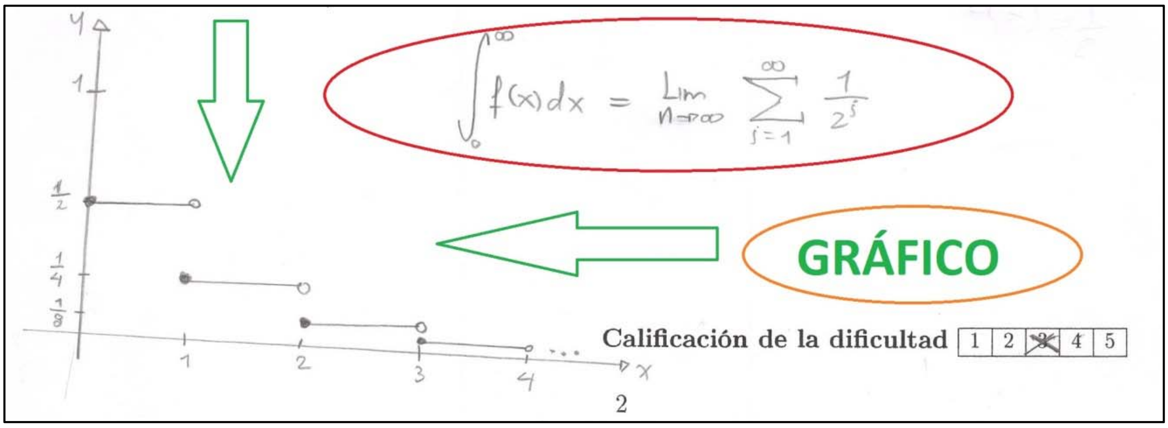


Figura 4.22 Respuesta 4 del estudiante (9).

Pregunta 5

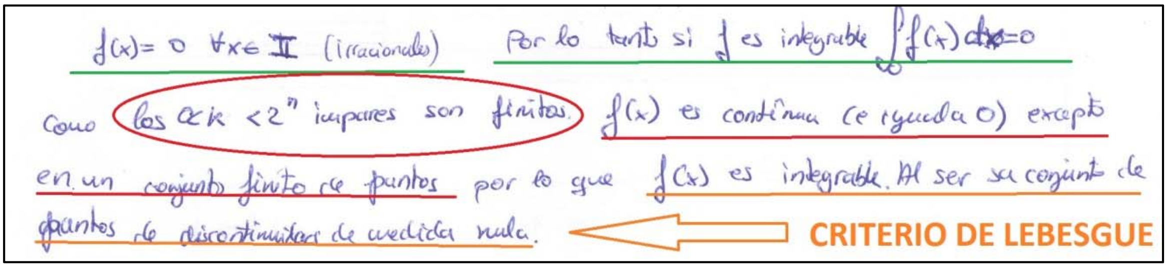
Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar, } 0 < k < 2^n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Objetivo: Analizar los obstáculos asociados a encontrar la partición P *del teorema de caracterización de las funciones integrables.*

Por una parte, determinar la integrabilidad supuso una dificultad para un 83% de los estudiantes. Para hallar el valor de la integral bastaba observar que el valor de la función era cero en un conjunto denso ($\mathbb{I}$), con lo cual cualquier partición P sobre el intervalo dado serviría. Encontramos que algunos estudiantes identificaron la tendencia a 0 del valor de la función en cada discontinuidad con el 0 de la integral. (11%). Podemos observar cómo el estudiante (71) identifica el conjunto de discontinuidades de la función y aplica el criterio de Lebesgue (Figura 4.23).


$f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{I}$ (irracionales) Por lo tanto si f es integrable $\int f(x)\,dx = 0$

Como los $\alpha k < 2^n$ impares son finitos $f(x)$ es continua (e igual a 0) excepto en un conjunto finito de puntos por lo que $f(x)$ es integrable. Al ser su conjunto de puntos de discontinuidad de medida nula.

Figura 4.23 Respuesta 5 del estudiante (71).

Por su parte, el estudiante (71) (Figura 4.24) además de hacer la misma identificación de su compañero, presenta el acto de comprensión ligado al obstáculo de la pregunta, de tal forma que sintetiza una función integrable Darboux en un intervalo compacto.

f es integrable porque es discontinua en un conjunto finito de puntos (de medida nula en $\mathbb{R}$).

Como $\int_0^1 f(x)\,dx = \operatorname{Sup} s(f,\pi)$ donde π es una partición de $[0,1]$ y $\pi = 0 = t_0, t_1, \dots, t_n = 1$.

y $s(f,\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \min(f,(t_i,t_{i+1}))(t_{i+1}-t_i)$

Como cojamos como cojamos los puntos t_i de la partición π siempre va a haber un $x \in (t_i, t_{i+1}) \,/\, x \neq \frac{k}{2^n}$ para k impar, $0<k<2^n \Rightarrow$

$\Rightarrow s(f,\pi) = 0 \;\forall \pi \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Figura 4.24 Respuesta 5 del estudiante (72).

Pregunta 6A

Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ en donde se tiene: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

Objetivo: Analizar los obstáculos asociados a interpretar, representar y manipular con solvencia el simbolismo algebraico de las sucesiones.

Un 50% de los estudiantes de esta categoría reveló esta dificultad. Un 34% sólo acota la sucesión superior o inferiormente pero no ambas. También un grupo. También se evidenció la dificultad en el manejo de desigualdades algebraicas (10%) por ejemplo, el estudiante (85), (Figura 4.25) no logró deducir la relación de orden $\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$, para hallar la cota, ni identificar que $\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n-1}}{a_n}$y parte de una igualdad errónea.

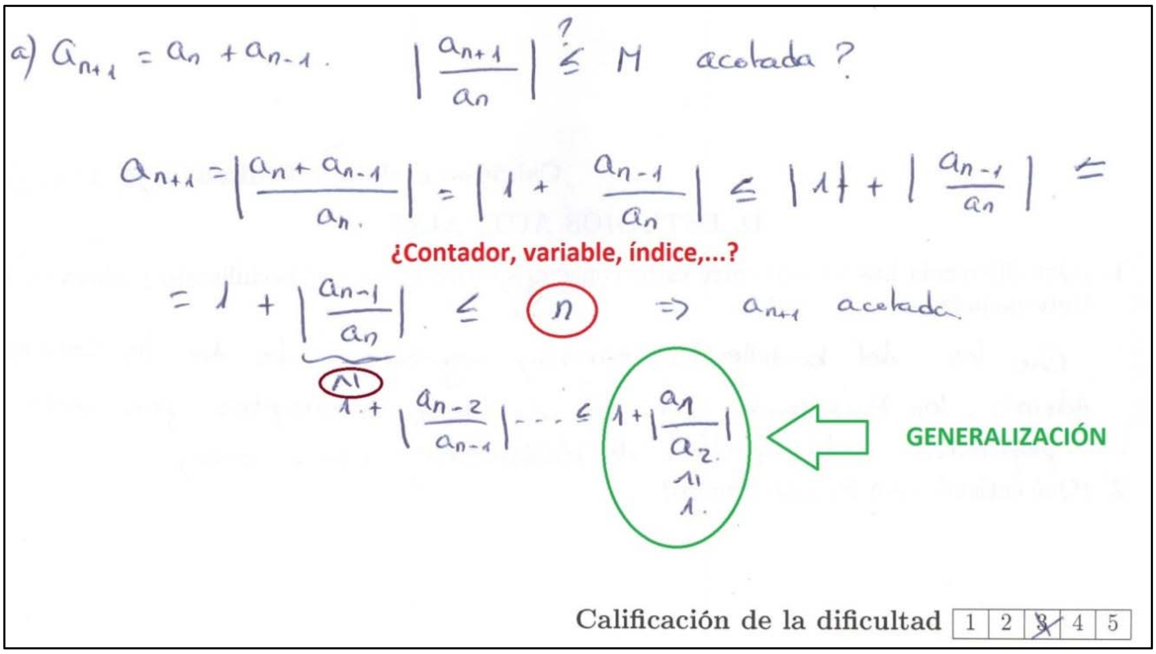


Figura 4.25 Respuesta 6A del estudiante (85).

Dos estudiantes que tuvieron dificultad en el manejo algebraico de expresiones que son inherentes al uso de desigualdades relacionadas con el $\varepsilon - \delta$. Detectamos también en un 10% de los estudiantes imprecisión o errores en el cálculo de límites vía procedimientos algebraicos o analíticos, como en el caso del estudiante (84), (Figura 4.26) y otros dos estudiantes que confunden entre extremos y cotas, entre extremo superior y máximo. La red sistémica correspondiente (Anexo 9) corrobora estas apreciaciones y aparecen otros obstáculos: mal manejo del infinito, sustituir cálculos algebraicos por tanteos, inferir un resultado mediante un razonamiento abductivo, uso erróneo de resultados sin justificar, manejo erróneo de cotas.

Pregunta 6B

Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ en donde se tiene: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$?

Objetivo: No distinción entre sucesiones convergentes y no convergentes, monótonas y o monótonas, con llegada en distintos conjuntos.

En esta categoría podemos incluir a un 86% de los estudiantes. También detectamos que un 46% confunde las propiedades de las sucesiones y que dos estudiantes tuvieron dificultad para determinar la conservación de las subsucesiones (por ejemplo, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ tiene subsucesiones[70]$\{x_{2n}\}_{n\geq 1}$y $\{x_{2n-1}\}_{n\geq 1}$ que son crecientes y decrecientes respectivamente). Al igual que en la pregunta anterior, mencionamos. Encontramos dos estudiantes con imprecisión o errores en el cálculo de límites vía procedimientos algebraicos. Hallamos igualmente dos estudiantes que confunden monotonía con convergencia, uno de ellos el estudiante (84), (Figura 4.26), identifica "ser decreciente" con "tener límite cero". Se detectan también obstáculos relacionados con la interpretación errónea de los datos dela cuestión, carencias de justificación, confusión entre monotonía y límite, signo y monotonía.

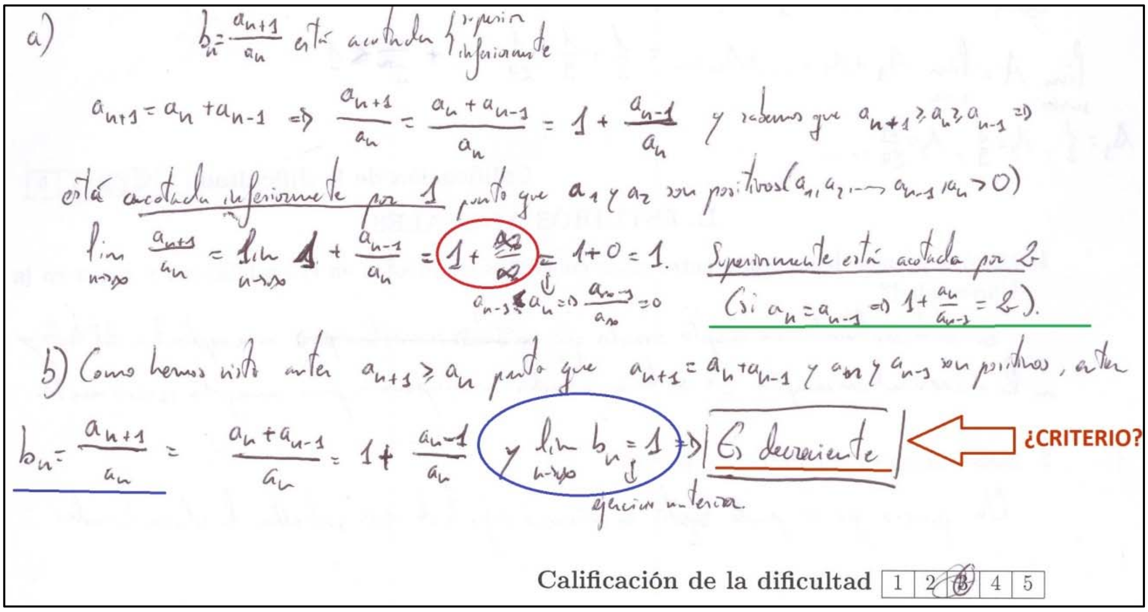


Figura 4.26 Respuesta 6A y 6B del estudiante (84).

[70]En donde $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $x_{2n-1} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}$ y $a_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$.

Pregunta 6C

Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ en donde se tiene: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Objetivo: Analizar obstáculos asociados con las propiedades de las sucesiones.

Aquí la mayoría de los estudiantes 70% intenta dar una solución algebraica. Lo que más se evidencia es la dificultad en el uso de las propiedades aritméticas de las sucesiones (55%) y de nuevo en un estudiante se evidencia la dificultad para establecer la existencia de límites, en este caso de sucesiones.

Pregunta 7

Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso infinito que se describe en la Figura 4.27.

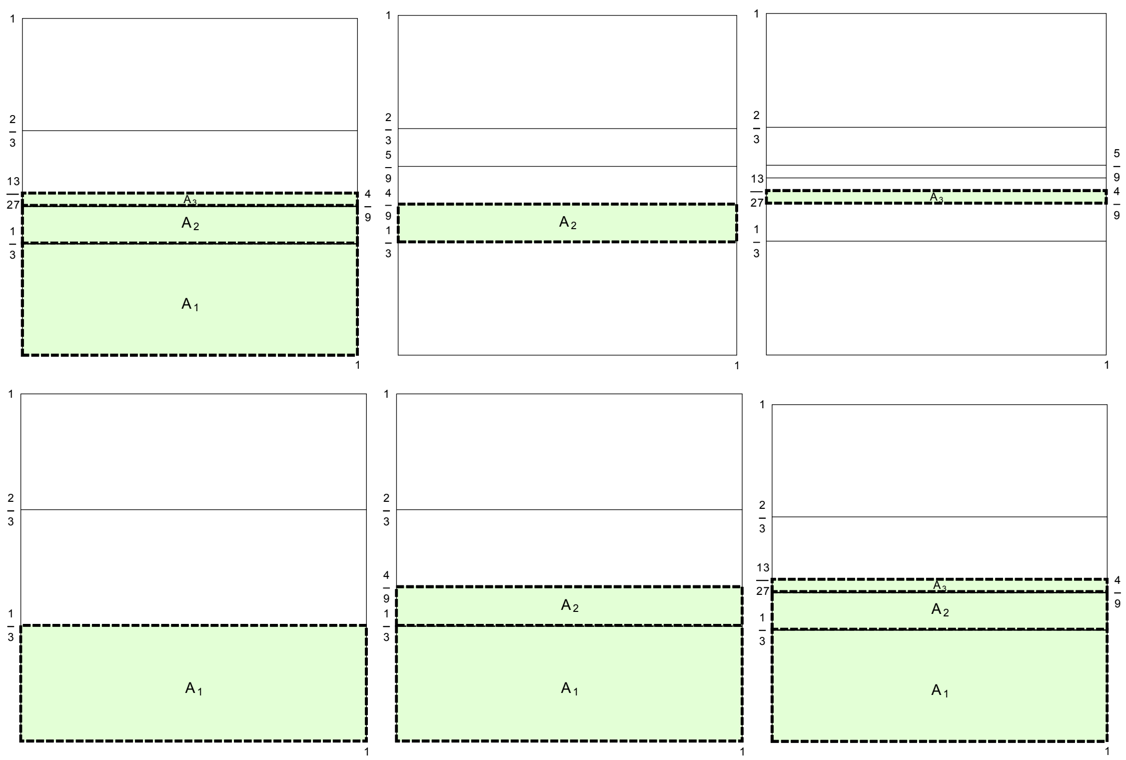


Figura 4.27 Representación gráfica de la serie de áreas de razón 1/3

Objetivo: Analizar los obstáculos asociados a la relación entre la convergencia del término general de una serie con la propia serie.

En esta categoría se identificó a un 12% de estudiantes. También hubo un estudiante que confundió las propiedades aritméticas de las series con las sucesiones. Igualmente, dos estudiantes incurrieron en el error de asumir como series infinitas sumas finitas del tipo: $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{13}{27}+\frac{40}{81}+\cdots+\frac{1}{3^n}$. También se constató que un 12% interpretó que la convergencia del término general implica el de la serie. De la respectiva red sistémica (Anexo 9) se deducen los siguientes obstáculos. Emitir un resultado numérico erróneo sin calcularlo, identificación de serie con integral conservando el límite inferior y superior de la serie con los límites de integración, identificación de la serie geométrica con una suma finita, interpretación errónea de la serie geométrica representada gráficamente, identifica el n-ésimo sumando de la suma parcial n-ésima con la propia suma parcial, aplicación errónea de fórmulas básicas (suma de los términos de una progresión geométrica), identificación errónea del primer término de la serie geométrica, cálculos sencillos erróneos con soluciones disparatadas, sumas acumuladas de sumas parciales $[A_1+(A_1+A_2)+(A_1+A_2+A_3)+\cdots]$, dar resultados numéricos erróneos sin cálculo alguno.

Algunas reflexiones en el contexto educativo.

Echando una mirada a los obstáculos que evidenciaron los estudiantes, pensamos que una razón de que aparezcan es que los matemáticos manejamos una cultura de los temas que nos hace distinguir la definición, que es precisa, de las posibles aclaraciones y ejemplos posteriores. Además del lenguaje de la teoría de conjuntos. Sin embargo es posible que en una explicación hagamos varias cosas a la vez y el estudiante no capte las **jerarquías**. Por ejemplo, al introducir el concepto de partición escribiendo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$; también hacemos un dibujo, mencionamos n y escribimos los intervalos. Todo esto ilustra el concepto, pero también elementos de la aplicación que haremos de él, sin embargo, aún no se ha definido. Técnicamente la partición es el conjunto formado por los números que aparecen en $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Entonces la partición es el conjunto $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$. Aquí hay una **definición** que emplea el lenguaje de la **teoría de conjuntos**. Para nosotros eso es claro. Seguramente el estudiante entiende que **todo** lo que se hace constituye la definición. En otras palabras, algunos estudiantes no distinguen la definición en sí, de la perífrasis con que se ilustra.

Por ejemplo, en la respuesta 1B, los estudiantes que usan la regla de Barrow[71] no tienen claro que se está haciendo un ejercicio de tipo teórico. Barrow da la respuesta exacta en tanto que Riemann sólo lo hace en el paso al límite. A nuestro modo de ver, este tipo de error es más grave que los que se han evidenciado en la pregunta 1A. Cabe anotar que en la mayoría de respuestas se toman particiones equidistribuidas (Figura 4.28) y en todas se toma como punto intermedio un extremo del intervalo (90%), algo que suele coincidir cuando en el bachillerato se trabaja con las sumas superiores e inferiores, y que, de manera no intencional es como un germen de la confusión entre lo que son las sumas superiores y las sumas de Riemann.

[71] Que explícitamente han respondido a la pregunta con esta respuesta, y no da lugar a la confusión de que pueda ser la respuesta de la pregunta 3A.

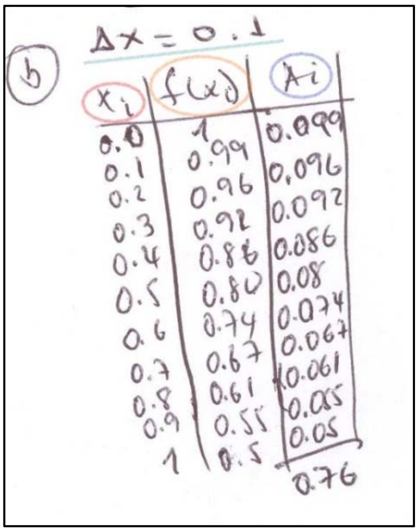


Figura 4.28 Respuesta 1B del estudiante (12).

En las preguntas 2A, 2B, 2C se nota tendencia a confundir implicaciones con sus recíprocas, aparecen como ejemplo estás afirmaciones: f es derivable pues f es continua, f es integrable entonces es continua, una condición para que una función sea integrable es su continuidad, si es integrable es diferenciable. También existe mucha informalidad a la hora de argumentar las respuestas, frases difusas como: la integral puede ser negativa, f está definida en el cuadrante III, ya que hay mayor volumen de irracionales que racionales, puesto que el área no es negativa etc.

Las respuestas de la pregunta 3A son preocupantes ya que el punto es puramente mecánico. En la gráfica es claro que se trata de segmentos de recta y encontrar la ecuación de la recta dados dos puntos es lo mínimo que se espera de un estudiante. Sin embargo llama la atención el intento de usar el valor absoluto. De hecho ese es otro camino para atacar el problema. Considerando el intervalo $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$ y usando transformaciones de funciones. A pesar de tratarse simplemente de encontrar la ecuación de una recta, en los intentos de solución aparece una sumatoria, la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$, una sucesión etc. Los estudiantes, por alguna razón, intentan usar, de manera forzada, las herramientas que han visto en el desarrollo del tema.

En el caso de la 3C, a pesar de que se pide la integral, al tratarse de triángulos no deben usarse integrales. Nuevamente como en el literal A los estudiantes emplean las herramientas de manera forzada.

Como el enunciado de la pregunta 7 no incluyó la palabra integral bajaron ostensiblemente los intentos de forzar el empleo de integrales en la solución. Solo unos pocos persistieron en el intento.

Relación de obstáculos emergentes

Como ya señalamos previamente, el interés en esta etapa se centra en la identificación de obstáculos que pudiesen enriquecer la lista que hemos elaborado previamente. En virtud de ello, nos disponemos a presentar cada obstáculo identificado, en formato de figuras enmarcadas en cada uno de los procesos infinitos al que subyacen y, relacionados con los estudiantes que se encontraron con el obstáculo señalado al responder cualquiera de las preguntas analizadas.

PARTICIONES

Confusión de los nodos de la partición con los valores del dominio de la función	Aceptación de un intervalo como elemento de una partición.
(6)(15)(19)(21)(31)(32)(35)(44)(49)(53)(54)(55)(58)(64)(65)(68)	(2)(9)(11) (29)(30)(34)(38)
No discriminan que un segmento tiene área cero	**Confusión entre condiciones necesarias y condiciones suficientes.**
(2)(9)(11) (24)(29)(30)(34)(38)	(10)(29)(30)(34)

Figura 4.29 Obstáculos emergentes relacionados con particiones.

EXTREMOS

No identificación de los extremos con números reales.	Dificultad para manejar desigualdades y el criterio de pertenencia
(1)(11)(13)(18)	(16)(19)(26)(32)(38)(62)(61)

Figura 4.30 Obstáculos emergentes relacionados con extremos.

VARIACIÓN INFINITA

Confusión de la naturaleza de variables naturales y reales o, del “n” natural como número indeterminado fijado o como variable
(11)(13)(19)(58)(62)

Asignación arbitraria del intervalo de variación
(3) (13)(19) (17) (22) (25)(27)(28)(54) (62)(85)

Figura 4.31 Obstáculos emergentes relacionados con variación infinita.

LÍMITES

Dificultad para establecer la existencia de límites	Permuta el límite con una función discontinua
(1)(4)(7)(8)(9)(16)(17)(19)(21)(27)(28)(29) (30)(38)(40)(42)(46)(58)(62)(65)(66)(67) (68)(69)(70)(76)(81)(83)(85)(86)(87)	(7)(8)(9)(11)(16)(18)32)(62)(76)(77)(78)(84)(86)(87)

Figura 4.32 Obstáculos emergentes relacionados con límites.

SERIES

Dificultad para interpretar, representar y manipular con solvencia objetos que precisen el manejo algebraico de series.
(3)(9)(12)(29)(30)(38)(41)(53)(58)(62) (61)(63)(65)(76)(79)(81)

Identificación de la serie geométrica como una suma finita
(31)(32)

Confusión entre la convergencia del término general con el de la serie.
(10)(66)(67) (85)(86)
Conversión de una serie geométrica representada gráficamente al sistema algebraico
(12)(53)(65)(31)(32)(41)(58)(61)(62)(63)(76)(79)
Uso de sumas acumuladas parciales $[A_1 + (A_1 + A_2) + (A_1 + A_2 + A_3) + \cdots]$
(81)

Confusión entre las propiedades aritméticas de las series y las sucesiones
(59)
Identificación errónea del n-ésimo término de la serie geométrica
(31)(32)(81)
Identificación de la serie geométrica con una suma finita
(31)(32)(76)

Dificultad para aplicar los criterios de convergencia y sumabilidad de una serie.
(16)(19)(39)(44) (68)(69)(70)(71)(72) (73)(83)(84)
No identificación como tal de la progresión geométrica de razón $\frac{1}{3}$
(1)(2)(4)(5)(6)(11)(13)(14)(15)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(33)(34)(35)(36) (37)(38)(43)(45)(46)(47)(48)(50)(51)(52)(54)(55)(56)(57)(64)(74)(75)(77)(78)(80)(82)

Figura 4.33 Obstáculos emergentes relacionados con series.

INTEGRALES

Dificultad en el cálculo de la integral cuando se involucra más de una variable
(9)(13)(16)(17)(21)(29)(30)(38)(46)(58) (62)(66)(67)(68)(69)(70)(75)

Dificultad para establecer las expresiones analíticas de las sumas superiores e inferiores.
(1)(2)(7)(13)(14)(15)(17)(18)(20)(26)(33) (36)(37)(42)(45)(48)(61)(66)(67)(69)(70)

Cálculo de primitivas inmediatas y otras que no son de fácil interpretación
(1)(4)(19) (21) (27)(28) (75)(43)(58)

Identificación de serie con integral conservando el límite inferior y superior de la serie con los límites de integración.
(9)(62)

Confusión en el cálculo de la integral cuando se involucra más de una variable.
(6)(15)(19)(21)(31)(32)(35)(44)(49) (53)(54)(55)(58)(64)(65)(68)

Identificación de la integral definida con la integral indefinida
(13)(22)(23)(25)(27)(28)

La anulación de la ID implica la anulación de la función
(21)(59)(75)(76)

Acotación independiente de las sumas de Darboux
(24)(29)(30)(43)(59)(74)(85)

Dificultad para identificar el extremo superior de la integral y la variable de integración y posible intercambio de uno y otro.
(1)(4)(7)(6)(9)(13)(15)(16)(17)(19)(21)(2)(7)(28)(31)(32)(35) (43)(44)(46)(49)(53)(54)(55)(58)(62)(64)(65) (67)(68)(69)(70)

Figura 4.34 Obstáculos emergentes relacionados con integrales.

SUCESIONES

Mal manejo de cotas y del infinito	Sustituir cálculos algebraicos por tanteos
(19)(22)(62)(80)(84)(86)	(26)(61)(85)
Inferir un resultado mediante un razonamiento abductivo y uso de resultados sin justificar	Dificultad para interpretar, representar y manipular con solvencia el simbolismo algebraico de las sucesiones
(16)(86)	(22) (62)(63)(74)(81) (82)(84)(86) (85)
Identificación “ser decreciente” con “tener límite cero”	Signo y límite. (si la sucesión es positiva el límite también es positivo)
(9)(84)	(9)(86)(87)
Monotonía y límite (si la sucesión es monótona tiene límite)	
(62)(84)(86)	

Figura 4.35Obstáculos emergentes relacionados con sucesiones.

Se ha recopilado información basada en la revisión de la literatura, y junto con la experiencia de los investigadores en el área de la didáctica del Análisis construimos una primera lista de obstáculos. Con el estudio de refinamiento la lista se depuró y complemento al mismo tiempo. El resultado final es una lista ampliada, compuesta por los obstáculos derivados de las dos partes del estudio.

A partir de esta lista, en el siguiente capítulo se definirá el significado de las diferentes categorías de comprensión de los procesos infinitos que son de interés en esta investigación y del concepto de integral definida en el marco de Sierpińska.

La elaboración del cuestionario parte entonces de este constructo que se va a medir y cuyo significado ya se concretará en las tablas de actos y obstáculos que se establecerán en el siguiente capítulo. A partir de esta configuración se formularán las preguntas del cuestionario y con base en los elementos de cada categoría (identificación, discriminación, generalización, sistematización) se dará significado a la comprensión de cada concepto.

Capítulo 5. Metodología

Tras la realización de los estudios epistemológico y curricular, la revisión de la literatura y la determinación del marco teórico, a partir de los objetivos de investigación en este apartado se describe el procedimiento seguido en la elaboración del estudio final.

La investigación se ha centrado principalmente en darle significado a la comprensión del concepto de integral definida y de los procesos infinitos que le subyacen. Ya en el anterior capítulo se elaboró la lista de obstáculos asociados a estos conceptos. Ahora a partir de ellos, en el marco de los actos de comprensión de Sierpińska, se dará significado a estos constructos, para de esta forma poder centrarnos en determinar la existencia de alguna relación entre ambos. Para poder llevar a cabo ese cometido se elaboró un cuestionario que se aplicó en papel a estudiantes del grado en Matemáticas de tres universidades españolas. También se realizó una entrevista a un estudiante. Una vez obtenidos los datos se realizó un análisis de los mismos el cual se describe en el siguiente capítulo.

5.1 Investigación ex post-facto

La situación más usual en lo que se refiere a cualquier tipo de investigación es que no se tenga control sobre el resultado de los fenómenos sujetos aunque sí sobre la variabilidad de las respuestas. Esto sucede esencialmente porque lo más substantivo suele producirse al margen de la voluntad del propio investigador. El caso por antonomasia "la investigación ex post facto" está constituido por aquellos fenómenos en los que los hechos que lo constituyen ya se han producido cuando nos aproximamos a su estudio (de donde viene la expresión *ex post facto* que deriva del latín y que en el contexto de la investigación educativa significa "después de los hechos") y sobre los que difícilmente podremos ejercer control (Bisquerra, 2004). La investigación ex post facto es entendida como una búsqueda sistemática y empírica de los factores que están asociados con ciertos hechos o condiciones que anteceden a otros sucedidos, por tanto, no se pueden dirigir o manipular por el investigador. SegúnCohen, Manion, & Morrison (2013, p.303) Kerlinger ha definido la investigación *ex post facto* más formalmente como aquella que el investigador inicia con la observación de una(s) variables dependientes y en la que la(s) variables independientes ya han ocurrido. Entonces estudian la(s) variables independientes retrospectivamente, para hallar su posible relación y efectos con la variable(s) dependientes. La idea fundamental es que "al identificar las causas *retrospectivamente*el experto adopta una perspectiva" *ex post facto,* por ello, según los propios autores este tipo de investigaciónes particularmente adecuada en contextos educativos. El decantarnos por utilizar esta metodología está ampliamente justificada ya que "es apropiada en las primeras aproximaciones a un área problemática por su carácter exploratorio, pues facilita la generación de hipótesis [...] es apropiada y conveniente desde la doble perspectiva científica y educativa" (Nieto & Recamán, 2010, p.125).

A partir de las características de la investigación *ex post facto*, al igual que en cualquier tipo de investigación se pueden identificar fortalezas y debilidades tales como las que Cohen et al. (2013) señalan de manera sistemática:

Ventajas

- Da sentido direccional y proporciona una fuente fructífera de hipótesis para probar de forma rigurosa en investigaciones experimentales.
- Ofrece información útil en relación con la naturaleza del fenómeno, en este sentido es una herramienta exploratoria de gran valor.
- Es un método importante cuando no es posible la más rigurosa propuesta experimental, sobre todo, cuando al utilizar el experimental se corre el riesgo de introducir una nota de artificialidad en los procedimientos de investigación.
- Los avances en técnicas estadísticas y la metodología en general han hecho más defendibles los estudios ex post facto.
- Es apropiada cuando se exploran relaciones simples de causa-efecto.

Desventajas

- La falta de control a causa de la imposibilidad de manipular las variables, o de aleatorizar los sujetos.
- Gran incertidumbre acerca de la inclusión del factor causal o siquiera de su identificación.
- Es posible que no sea la causa factor singular alguno.
- Puede producirse un resultado particular por diferentes causas en ocasiones diferentes.
- Cuando existe una relación, es complejo de decidir cuál es la causa y cuál el efecto; tiene que considerarse la posibilidad de la causalidad inversa.
- Que dos factores estén relacionados no establece la causa y el efecto.

- Puede ser problemático clasificar en grupos dicótomos.
- Existe la dificultad de interpretación, y de que se haga la asunción *post hoc* (como “X” precede a “O”, “X” causa a “O”).
- Algunos lo ven como un método demasiado flexible.

En la investigación ex post facto se pueden identificar cinco tipos de estudios: *descriptivo, de desarrollo, comparativo-causal* y *correlacional*. En esta investigación elegimos desarrollar un estudio *descriptivo* y *comparativo-causal*.

El primer tipo de estudio, *el descriptivo*, como su propio nombre señala, trata sobre la descripción de fenómenos naturales o producto de la acción del hombre para conocer de forma sistemática la realidad. Según Bisquerra (2004) debe ser considerado como de vital importancia en los procesos de construcción del conocimiento (p.197). Para Hernandez Sampieri, Fernandez Collado, & Baptista Lucio (2010) los estudios descriptivos recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único. Su propósito es describir variables, y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado.

Los estudios *comparativo-causales* se interesan en identificar relaciones del tipo *causa-efecto*, sin embargo, dada la naturaleza del fenómeno, por alguna razón resulta imposible manipular experimentalmente las variables. Cuando se diseña este tipo de investigación los hechos ya se han producido y por lo tanto no hay manipulación de la variable independiente. La falta de control en la producción del fenómeno impedirá que se pueda establecer de manera “formal” la relación causa-efecto, no obstante, nadie podrá negar la capacidad de establecer indicios claros de causalidad entre las variables estudiadas.

Bisquerra (2004) señala que en general los metodólogos aceptan que para que pueda existir alguna evidencia clara de causalidad en este tipo de estudio, es conveniente que se den las siguientes condiciones:

a) Que la secuencia de los hechos se produzca de tal forma que haga posible que A sea la causa de B, e imposibilita que A lo sea de B.
b) Cuando se han llevado a términos diversas replicaciones de la investigación ex post-facto, llevadas a cabo por diversos investigadores y surgen resultados consistentes entre todos ellos.

Para llevar a cabo este tipo de estudios, además de elegir adecuadamente las variables a medir, es necesario utilizar métodos de análisis que se ajusten a nuestras necesidades y que nos permitan ver con claridad lo que pretendemos medir, para tal fin, optamos en esta investigación por realizar un análisis estadístico implicativo[72] (Régis Gras et al., 2008) y un análisis correlacional.

El análisis estadístico implicativo (ASI) es un *método de análisis de datos no simétricos* que permite, a partir de un conjunto de datos que interrelaciona una población de sujetos u objetos con un conjunto de variables, la extracción y estructuración del conocimiento en forma de normas y reglas generalizadas y, a partir de la contingencia de estas reglas, la explicación y en consecuencia una determinada previsión en distintas ramas del saber (Zamora, Gregori, & Orús, 2009).

Su origen está en la *modelización estadística de la cuasi-implicación*[73]: cuando la variable o la conjunción de variables "***A***" es observada en la población, entonces generalmente la variable "***B***" lo es también. Las variables pueden ser principales (binaria, modal, frecuencial o de intervalo) o suplementarias. Las primeras son las que se tienen en cuenta normalmente por el software CHIC[74] (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), y, las segundas variables son binarias o mo-

[72] Analyse Statistique Implicative, ASI, en francés.

[73] Útil para determinar relaciones de causa y efecto (con un número pequeño de excepciones).

[74] Que se detallará más adelante.

dales que no intervienen en el cálculo de las contribuciones de las categorías, sólo se tienen en cuenta en la búsqueda de la contribución o tipicalidad.

En contraste con los métodos de análisis de datos simétricos basados por ejemplo, en una distancia o en una correlación, los conjuntos de reglas obtenidas pueden conducir a hipótesis de causalidad. Estos conjuntos se estructuran de acuerdo con distintas características comunes complementarias (grafo implicativo, jerarquía orientada).

Como software para este tipo de análisis multivariante de datos, se utiliza el CHIC, en su versión 6.0. Este software de aplicación estadística, concebido inicialmente por Regis Gras para desarrollar técnicas en el ASI, fue posteriormente adaptado para las computadoras personales por Saddo Ag Almouloud, Harrisson Ratsimba-Rajohn y, en su versión actual, por Raphaël Couturier.

Este software muestra las implicaciones más relevantes entre los valores de las distintas variables, y desde el punto de vista de sus fines prácticos se pueden incluir la construcción de distintos gráficos, según los índices de proximidad o distancia, clasificación jerárquica, clasificación implicativa, clasificación cuasi-implicativa o calificación inclusiva. El CHIC muestra dos tipos de árboles y un grafo. El árbol más conocido es el de similaridad definido por Lerman (citado en (Zamora et al., 2009) para el cálculo de los niveles de agregación de las variable y su clasificación, que permite construir una jerarquía ascendente. El árbol Cohesitivo, un árbol jerárquico orientado que resulta de efectuar los cálculos de los índices de cohesión implicativa entre las variables. Por último, el grafo implicativo, permite al usuario calcular las implicaciones directas entre variables, estructurando originalmente las variables mediante cadenas de implicaiones en el sentido del Análisis Estadístico Implicativo anteriormente descrito.

La medida de la relación implicativa $A \Longrightarrow B$ se evalúa a partir de la inverosimilitud de la aparición, en los datos del número de casos que la invalidan; en otras palabras, cuantifica el "asombro" del experto ante el número inverosímilmente pequeño de contraejemplos. Una implicación entre clases de variables solo toma verdaderamente su sentido bajo la condición de que dentro de cada clase de variables, cuya relación se examina con otras, exista cierta "cohesión" entre las variables que la constituyen (Regis Gras, Kuntz, & Briand, 2001).

5.2 Participantes y contexto

Esta investigación se sitúa en las Facultades de Matemáticas de las Universidades Autónoma de Madrid (UAM), Valladolid (UVA), y Salamanca (USAL). Las dos últimas casi ocho veces centenarias. En las tres universidades hay una amplia tradición en estudios Matemáticos Universitarios, dentro del Espacio Europeo de educación Superior. Un total de 76 los estudiantes Universitarios del grado en Matemáticasparticiparon en esta investigación. El desempeño de los estudiantes era variado, y el grupo no tenía características específicas resaltables salvo el tipo de grado al cual pertenecían. Todos los estudiantes tienen conocimientos previos formales sobre los temas propios del curso de Análisis I y Análisis II que detallamos en el marco de aprendizaje: generalidades de conjuntos numéricos, sucesiones de números reales, funciones de variable real, límites y continuidad, cálculo diferencial, series de números reales, cálculo de primitivas y la integral definida. La finalidad de la elección se basa en observar las características del conocimiento de estudiantes de matemáticas acerca de los procesos infinitos subyacentes al concepto de la integral definida y del propio concepto de integral, sin tener en cuenta el año de carrera en el cual se encuentran.

La muestra elegida para aplicar el cuestionario es sesgada, en la medida en que no se ha efectuado una elección aleatoria de los centros por la disponibilidad del investigador para pasar estos instrumentos. Las muestras elegidas, al tratarse de grupos ya formados, fueron disponibles e intencionales (Cardona, 2002).

5.3 Instrumentos de recogida de datos

Toda la investigación gira en torno a dos constructos que hemos señalado: la comprensión de los procesos infinitos y la comprensión de la integral definida. Para conseguir los objetivos trazados haremos uso de instrumentos que nos permitan en primer lugar caracterizar, para los estudiantes universitarios de Matemáticas, estos constructos desde el marco de los actos de comprensión de Sierpińska, y por otra, establecer una valoración desde los aspectos que caracterizan estos constructos. Para tal fin decidimos diseñar un cuestionario y realizar una entrevista semiestructurada (Cohen et al., 2013).

Para la elaboración del cuestionario en su primera etapa de realización (concreción del significado del constructo a medir) hicimos un estudio de refinamiento de la tabla de actos de comprensión y obstáculos que previamente diseñamos como cierre de la fase teórica de la investigaciónpara determinar los elementos matemáticos que se podían considerar necesarios para comprender estos conceptos en el marco de Sierpińska. Posteriormente se elaboraron los ítems del cuestionario con base en las tablas de obstáculos ya refinadas de tal forma que quedó estructurado con 37 preguntas. Para la selección del estudiante a entrevistar se tuvo en cuenta que fuese un estudiante destacado en la asignatura, y, por otra parte que sus respuestas abarcasen un amplio rango de éxito.

5.4 Diseño y validación del Cuestionario

Como hemos indicado, el problema que abordamos en esta investigación está supeditado al diseño de un cuestionario que nos permita evaluar los aspectos relevantes del conocimiento matemático de los estudiantes de grado en Matemáticas sobre procesos infinitos subyacentes al concepto de integral definida y sobre el propio concepto de ID, en el marco de los actos de comprensión y obstáculos de Sierpińska (1990). El propósito en este apartado es recorrer el camino para disponer de ese instrumento a la vez que garantizar su fiabilidad y validez. Este proceso es dispendioso, laborioso y muy complejo dado que supone salvar distintas etapas que son las que describiremos a continuación.

Concreción y significado del constructo a medir

Tras el estudio preliminar tanto de la teoría de actos de comprensión como de las dificultades/obstáculos identificados en el capítulo anterior, en esta sección se señala el protocolo de elaboración de la lista de obstáculos que dan significación, en las distintas categorías (identificación, discriminación, generalización, sistematización) al conocimiento matemático que poseen los estudiantes de los conceptos que son objeto de esta investigación. Desde el primer momento se ha precisado la intención de conocer el nivel de comprensión tanto de procesos infinitos subyacentes al concepto de integral definida como al propio concepto.

Para establecer o determinar estos constructos de una forma precisa y coherente con el marco teórico del estudio, se determina el significado de las diferentes categorías de comprensión de proceso infinito e integral definida en el marco de Sierpińska. Este significado se mostrará en forma de tablas de actos de comprensión y obstáculos al final del capítulo. A partir de esta lista de actos que señala los elementos que indican la caracterización de la comprensión de cada concepto, en cada categoría en el próximo capítulo se elabora el cuestionario que se utiliza como instrumento de recogida de datos. Asi las preguntas elaboradas serán el resultado de un estudio intensivo de los constructos sobre los que se desarrolla esta investigación. Las preguntas serán coherentes con el significado de las categorías de comprensión establecidas e irán enfocadas a revelar si los estudiantes comprenden o no los conceptos en cuestión, y la posible implicación entre ellos.

Cada una de las tablas relaciona un concepto clave del estudio con sus respectivos actos de comprensión y obstáculos marcados por las respectivas categorías de comprensión de Sierpińska (1990). Empezamos por las tablas de actos y obstáculos de los procesos infinitos referenciados al inicio y cerramos con las de la integral definida. Cada acto y obstáculo tiene un identificador compuesto por dos letras y un número. La primera letra indica el concepto que se trata (**I, S, P, L, Q, E, M**, según sea el caso integral, serie, límite, sucesiones, extremos, monotonía respectivamente). La segunda letra indica se refiere a un acto (**U**) o a un obstáculo (**O**). Por ejemplo **QU5** es el quinto acto de comprensión relacionado con sucesiones.

Tabla 5.1 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con sucesiones.

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDENTIFICACIÓN	QU1: Identifica las formas de presentación de sucesiones numéricas: Numérica: $\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8, 13, \cdots\}$, Algebraica: $(a_n)_{n\in N}$ y Gráfica: del proceso infinito que se presenta en laFigura 5.1.	QO1: Confusión de los n primeros términos de la sucesión con la sucesión infinita. QO2: Confusión de las áreas gráficas con dibujos exentos de significación o con una significación distinta a la pretendida.
	QU2: Identifica una sucesión.	QO3: Asignación al subíndice n lavariación cuando no es tal: $(a_{in})_{i\in N}$
DISCRIMINACIÓN	QU3: Discrimina entre los distintos tipos de sucesiones.	QO4: No distinción entre sucesiones convergentes y no convergentes, monótonas y no monótonas, con llegada en distintos conjuntos numéricos $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.
	QU4: Discrimina entre el término general de una sucesión a_n y los elementos de la sucesión: $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$	QO5: Confusión entre el término general de una sucesión y a sucesión.
GENERALIZACIÓN	QU5:Pasa de la representación del término general a la sucesión. Por ejemplo, como muestra laFigura 5.1 $S_1 = \frac{1}{4},\ S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}, \cdots,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^n}$.	QO6: Dificultad para interpretar, representar y manipular con solvencia el simbolismo algebraico de las sucesiones.
	QU6:Relaciona una sucesión con subsucesiones suyas.	QO7: Dificultad para generalizar las propiedades de las subsucesiones.

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
SISTEMATIZACIÓN	QU7: Aplica la aritmética de límites de sucesiones.	QO8: Confusión de las propiedades de las sucesiones.
	QU8: Maneja los criterios de convergencia de sucesiones y subsucesiones.	QO9: Dificultad a la hora de relacionar la completitud de $\mathbb{R}$(Principio de encaje de Cantor), el teorema de Bolzano-Weierestrass[75] y el criterio de Cauchy[76], entre otros.

Tabla 5.2 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con la variación infinita.

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDENT.	VU1: Identifica dominios y valores numéricos: $n \to a_n$, $n \to \sum_{1 \le i \le n} a_i$, $x \to f(x)$	VO1: Confusión entre los extremos absoluto y relativo.
		VO2: No identificación de los extremos con números reales.
DISCCRIMINACIÓN	VU2:Discrimina entre conjuntos finitos e infinitos.	VO3: No distinción entre conjuntos infinitos y los que no lo son.
	VU3:Discrimina entre conjuntos numerables y no numerables.	VO4: No distinción entre el infinito potencial y el actual.
	VU4: Discrimina entre conjuntos densos y no densos	VO5: No distinción entre las propiedades de numerabilidad y densidad de conjuntos.
GENERALIZACIÓN	VU5: Manipula algebraicamente conjuntos infinitos.	VO6: Confusión de la naturaleza de subíndices y variables reales.
	VU6: Generaliza el concepto de conjunto infinito.	VO7: Confusión de la naturaleza de variables naturales y reales o, del n natural como número indeterminado
SISTEMAT.	VU7: Es capaz de utilizar los criterios de caracterización de conjuntos infinitos.	VO8: Dificultad para plasmar algebraicamente conjuntos con variaciones infinitas.
		VO9: Dificultad en la comprensión de la relación de inclusión y cardinalidad en conjuntos infinitos.

[75] Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente.

[76] Una sucesión en $\mathbb{R}$es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Tabla 5.3 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con los extremos.

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDENTIFICACIÓN	**EU1:** Identifica numérica y gráficamente extremos absolutos ($máx, mín$), extremos relativos ($máx, mín$), supremo e ínfimo ($sup, ínf$).	**EO1:** Confusión entre extremos absolutos y relativos.
		EO2: Dificultad para identificar extremos con números reales.
DISCCRIMINACIÓN	**EU2:** Discrimina entre cota superior, supremo (sup), cota inferior e ínfimo ($ínf$).	**EO3:** Falta de criterios para aplicar recursos discriminatorios.
		EO4: Confusión entre extremos y cotas, entre extremo superior y máximo (Ídem inferior)
		EO5: Dificultad para manejar desigualdades y el criterio de "pertenencia".
GEN.	**EU3:** Maneja conceptos de supremo e ínfimo, es decir, saber lo que es la menor cota superior y la mayor de las inferiores.	**EO6:** Falta de conocimiento y manejo del orden de los reales y de su totalidad.
SIST.	**EU4:** Maneja los axiomas relacionados con el (sup), y el ($ínf$).	**EO7:** Dificultad en la determinación analítica o algebraica del (sup), y el ($ínf$).

Tabla 5.4Actos de comprensión y obstáculos relacionados con la monotonía.

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDEN.	**MU1:** Identifica una función (sucesión) monótona creciente o decreciente.	**MO1:** Dificultad en la reproducción y experimentación de los modos de representación de una función (sucesión, serie).
DISC.	**MU2:** Discrimina entre las funciones (sucesiones) que son monótonas y las que no lo son.	**MO2:** Confusión entre monotonía y convergencia.
GEN.	**MU1:** Manipula expresiones genéricas asociadas a la monotonía.	**MO3:** Dificultad en el tratamiento de desigualdades algebraicas.
SIST.	**MU4:** Utiliza adecuadamente el concepto.	**MO4:** Posesión de esquemas inadecuados de variación de variables: $(n,\ a_n)$ y $(x,\ f(x))$.

Tabla 5.5 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con el límite.

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDEN.	**LU1:**Identifica el concepto de límite de una función y de una sucesión, de "series de sucesiones".	**LO1:** Dificultad en la comprensión del concepto de límite.
DISC.	**LU2:**Discrimina entre los conceptos de límite de una función, límite de una sucesión y límite de una serie.	**LO2:** Dificultad en el manejo algebraico de expresiones que son inherentes al uso de desigualdades relacionadas con el $\varepsilon - \delta$.
GEN.	**LU3:** Es capaz de determinar si existe o no el límite de una función, serie o sucesión.	**LO3:** Dificultad para establecer la existencia de límites
		LO4: Falta de conocimiento y manejo de las concepciones geométricas, numérica, analítica o topológica relacionadas con el concepto de límite.
SIST.	**LU4:** Aplica los teoremas de caracterización de límites de funciones, sucesiones y series.	**LO5:** Imprecisión o errores en el cálculo de límites vía procedimientos algebraicos o analíticos.

Tabla 5.6 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con particiones.

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDENTIFICACIÓN	**PU1:** Identifica e interpreta verbal o simbólicamente los elementos de un conjunto.	**PO1:** Aceptación de un conjunto infinito como una partición.
	PU2: Identifica la partición como un conjunto finito de puntos.	**PO2:** Confusión entre condiciones necesarias y condiciones suficientes. (Confusión conceptual)
	PU3: Identifica partición e intervalo y la pertenencia de los puntos a una partición.	**PO3:** Aceptación de particiones como intervalos.

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
DISCRIMINACIÓN	**PU4:** Discrimina entre puntos e intervalos.	**PO4:** Aceptación de un intervalo como elemento de una partición.
	PU5: Distingue entre particiones y conjuntos que no lo son.	**PO5:** Dificultad en el recubrimiento del intervalo de partida.
		PO6: Confusión entre inclusión y pertenencia.
	PU6: Discrimina la finura de una partición.	**PO7**: Confusión entre número de puntos y finura.
		PO8: Dificultad para realizar el procedimiento de refinamiento.
GENERALIZACIÓN	**PU7:** Construye de manera general particiones, sean equidistribuidas o no.	**PO9:** Carencia del dominio de la aritmética de los números reales. Por ejemplo, cuando $\frac{b-a}{p}=h$; con $a, a+h, a+2h, a+3h, \cdots, a+ph=b$.
	PU8: Construye numéricamente particiones equidistribuidas más finas, de forma general, conservando los puntos iniciales.	**PO10:** Dificultad para construir particiones más finas
	PU9: Sabe construir particiones equiespaciadas con paso dado.	**PO11:** Dificultad para definir particiones
SIST.	**PU10:** Sabe procesar algebraicamente las particiones.	**PO12:** Desconocimiento de la topología real. Intersecciones y uniones de abiertos, cerrados, compactos,…

Tabla 5.7 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con series.

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDENTIFICACIÓN	**SU1:** Identifica las formas de presentación de series numéricas: Algebraica: $\sum_0^\infty \frac{1}{4^n}$, gráfica: Figura 5.2y numérica : $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots$	**SO1:** Creencia errónea de que también son series infinitas sumas finitas como: $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{3^n}$.
		SO2: Confusión de las áreas gráficas con dibujos exentos de significación.
	SU2: Identifica una serie infinita.	**SO3**: Asignación al subíndice n la variación infinita cuando no es tal, o finita, cuando es infinita: $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
DISCRIMINACIÓN.	**SU3:** Discrimina entre los distintos tipos de series.	**SO4:** No distinción entre series convergentes y divergentes.
	SU4: Discrimina entre el término general de una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y una suma parcial $\sum_{i=1}^{n} a_i$.	**SO5:** Confusión entre el término general de una serie y una suma parcial.
		SO6: Confusión entre la suma parcial y la serie.
	SU5: Discrimina la convergencia de la necesidad de que el término general tienda a cero: $\sum \frac{1}{n} = \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$.	**SO7:** Confusión entre la convergencia del término general con el de la serie.
		SO8: Identificación de la tendencia a 0 del término general de una serie con la convergencia de la misma.
GEN.ERALIZACIÓN	**SU6:** Pasa de la sucesión gráfica del término general a la serie. Por ejemplo, según el proceso infinito que muestra laFigura 5.2: $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, con $A_i = \frac{1}{4^i}$	**SO9:** Dificultad para interpretar, representar y manipular con solvencia objetos que precisen el manejo algebraico de series.
	SU7: Sabe manejar los restos. Por ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$	**SO10:** Dificultad para manejar los restos.
SIST.EMATIZACIÓN.	**SU8:** Sabe aplicar los criterios de convergencia, y sumabilidad de una serie.	**SO11:** Dificultad para aplicar criterios de sumabilidad y de convergencia de una serie.
	SU9: Sabe aplicar las propiedades aritméticas de las series.	**SO12:** Confusión entre las propiedades aritméticas de las series y las de las sucesiones.

Tabla 5.8 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con la integral definida. (1/3)

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDENTIFICACIÓN	**IU1:** Identifica las sumas inferior y superior y discrimina entre ambas.	**IO1:** Imprecisión o errores en la determinación gráfica de las sumas inferiores y superiores.
	IU2: Identificala integral inferior como el extremo superior de las sumas inferiores (ídem integral superior) y discrimina entre integral inferior y superior.	**IO2:** La integral inferior no se alcanza, se aproxima a un valor (ídem superior).
		IO3: Por la no comprensión del axioma del extremo superior (ídem Inferior).
	IU3: Identifica la función de Dirichlet y discrimina entre números racionales e irracionales.	**IO4:** Inseguridad en la representación de los números sobre la recta real.
	IU4: Identifica una partición del intervalo compacto $[a\ ,b]$.	**IO5:** Confusión entre los subíndices y los nodos de la partición.
	IU5: Identifica los extremos absolutos de una función continua en un intervalo y discrimina entre mínimo y máximo absolutos.	**IO6:** Confusión entre extremo relativo y absoluto.
DISC.	**IU6:** Discrimina entre los conceptos área e integral definida.	**IO7:** Considerar que ambos conceptos son iguales.

Tabla 5.9 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con la integral definida. (2/3)

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
GEN.ERALIZACIÓN	**IU7:** Generaliza la sucesión de las áreas de una sucesión creciente de polígonos regulares inscritos en un círculo.	**IO8:** Desconocimiento u olvido de las razones trigonométricas.
	IU8: Generaliza los extremos absolutos para cada uno de los subintervalos de una partición.	**IO9:** No se acepta fácilmente que un máximo RELATIVO pueda ser REBASADO POR un mínimo RELATIVO o viceversa.
	IU9: Generaliza la suma inferior y la suma superior.	**IO10:** Dificultad para establecer las expresiones analíticas de las sumas inferiores y superiores
	IU10: Generaliza el conjunto de puntos intermedios asociados a una partición	**IO11:** La falsa percepción del conjunto de puntos intermedios genera ambigüedad.
	IU11: Generaliza el teorema del valor medio	**IO12:** El valor que toma la función en los puntos

ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
a cada uno de los subintervalos de la partición.	intermedios es impreciso. Además, si el número de dichos puntos es "n", entonces la correspondiente suma de Riemann, más que comprendida, es aceptada.
IU12: Generaliza y sintetiza el cálculo de áreas comprendidas entre la gráfica de una función (positiva, negativa, que cambia de signo, definida a trozos), el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.	**IO13:** El cálculo de áreas se reduce a: $\int_a^b f(x) = F(x)[_a^b = F(b) - F(a)$
IU13: Generaliza y síntetiza el área comprendida entre dos curvas y las rectas $x = a$ y $x = b$.	**IO14:** Dificultad para aplicar el algoritmo para calcular el área entre dos curvas.
IU14: Generaliza y sintetiza el concepto de integral como función del límite superior (integral indefinida): $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.	**IO15:** Dificultad para identificar el extremo superior de la integral y la variable de integración, y posible intercambio de uno y otro.

Tabla 5.10 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con la integral definida. (3/3)

	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
SISTEMATIZACIÓN	**IU15:** Sintetiza el área del círculo mediante el límite de la sucesión de áreas poligonales.	**IO16:** Dificultad en la comprensión del concepto de límite de una sucesión.
		IO17: Aceptación como un axioma que el área del círculo es πr^2.
	IU16: Sintetiza la suma inferior, área y suma superior, es decir: $s(f, P) \leq A \leq S(f, P)$	**IO18:** Las desigualdades no resultan evidentes para los estudiantes cuando la partición tiene un número indeterminado "$n + 1$" nodos.
	IU17: Sintetiza una función integrable Darboux en un intervalo compacto $[a, b]$.	**IO19:** Si las sumas inferior y superior se aproximan a un mismo valor tanto como deseemos, no necesariamente son iguales las integrales inferior y superior.
		IO20: No es fácil encontrar la partición P del teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.
	IU18: Sintetiza la existencia de funciones no integrables Darboux.	**IO21:** No resulta fácil aplicar correctamente el algoritmo correspondiente.

ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IU19: Sintetiza las sumas inferior y superior de Darboux y la suma de Riemann, es decir: $s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P)$	**IO22:** Dificultad en la comprensión analítica de expresiones algebraicas asociadas a las desigualdades entre la suma de Riemann y las sumas inferiores y superiores de Darboux.
IU20: Sintetiza una función integrable Riemann en un intervalo compacto $[a, b]$.	**IO23:** Confusión en la definición conceptual de función integrable Riemann.
IU21: Sintetiza el teorema de los incrementos finitos.	**IO24:** Desconocimiento del teorema del valor medio del cálculo diferencial y comprensión deficiente de su interpretación geométrica.
IU22: Sintetiza el teorema fundamental del cálculo.	**IO25:** El teorema fundamental del cálculo es la regla de Barrow.
IU23: Sintetiza la tesis de que no siempre es posible encontrar una primitiva de una función integrable.	**IO26:** Siempre es posible encontrar una primitiva de una función.
	IO27: Todas las funciones integrables tienen una primitiva que puede ser escrita en forma explícita.
IU24: Sintetiza la integración numérica como sumas agrupadas bajo diferentes criterios.	**IO28:** Utilización indiscriminada del método rectangular como método de integración numérica.
	IO29: Asociación de la utilización de una regla de integración numérica con la facilidad de sus cálculos, y no con la precisión de la misma.

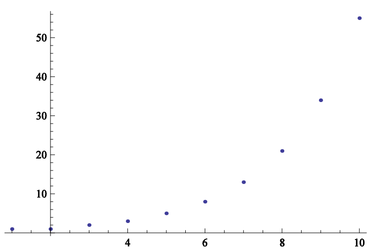


Figura 5.1 Sucesión de Fibonacci con a_1=1 y a_2=2

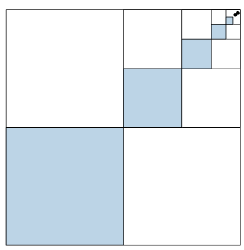


Figura 5.2 Serie geométrica de razón ¼.

Elaboración y selección de ítems

Los ítems se elaboraron teniendo como referencia cada uno de los obstáculos relacionados en las tablas de actos de comprensión y obstáculos finales.

El resultado de todo el trabajo de construcción de preguntas fue un banco de ítems tanto para cada tipo de proceso infinito en cuestión (límite, sucesión, variación infinita, etc.) como para la integral definida. De estos ítems seleccionamos los que después de una revisión exhaustiva pudiesen aportar más al acto de comprensión ligado a la categoría del obstáculo de referencia (Identificación, Discriminación, Generalización o Sistematización). En total se recogieron 52 preguntas con un total de 208 ítems.

Además, recopilamos cinco preguntas que han sido utilizadas en las principales investigaciones relacionadas con los procesos infinitos.

Una de ellas, la pregunta 23, es una adaptación de un problema planteado por Orton (citado por Cornu, 1991, p.163) en su investigación seminal sobre el estudio de los obstáculos relacionados con el concepto de límite funcional, y que sigue siendo un referente para recientes investigaciones relacionadas con la comprensión de los procesos infinitos (Belmonte, 2009; Garbin, 2005; Mamona-Downs, 2001; Tirosh, 2002).

El problema 25 es una adaptación de un problema propuesto por Falk & Benlavy (citado en Belmonte, 2009).

Dubinsky, Weller, Stenger, & Vidakovic (2008) plantean dos versiones de la paradoja de las pelotas de tenis, la primera es una versión denominada *finita,* en donde no se tiene en cuenta el paso del tiempo, y la segunda es una versión en la cual el traslado de un número infinito de pelotas se realiza durante medio minuto. En la pregunta 33 hemos hecho una adaptación de esta segunda versión (Dubinsky et al., 2008, p.100).

Por último, las preguntas 6 y 23, son adaptaciones de las propuestas por (Belmonte, 2009) en su estudio acerca del concepto del infinito.

El cuestionario (Anexo 10) se dividió en bloques, de acuerdo con cada concepto estudiado; el bloque de sucesiones (Q), el de extremos (E), límites (L), monotonía (M), variación infinita, particiones (P), series (S), la integral definida (I) y por último el bloque correspondiente al estudio genérico de la interpretación del concepto de proceso infinito. Un primer proceso de selección consistió en reducir el número de bloques temáticos para poder visualizar mejor en conjunto los ítems más representativos a la vez que significativos para los constructos del estudio.

Tabla 5.11 Preguntas del cuestionario por bloques temáticos.

Concepto subyacente	Preguntas
Sucesiones	1-11
Extremos, Límite y Monotonía	12-24
Variación Infinita	25-33
Particiones	34-45
Series e Integral Definida	46-57

El considerable número de ítems, junto con el propósito constante de garantizar que los recopilados fuesen coherentes con el fin propuesto, nos condujo al método de validación del contenido por medio del *juicio de expertos* de tipo *agregados individuales. S*egún Escobar-Pérez & Cuervo-Martínez (2008) un juicio de expertos se define como "una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones" (p.29). En este estudio, la finalidad del juicio es por una parte, determinar el grado de adecuación de los ítems a evaluar y por otra, realizar un primer refinamiento del cuestionario elaborado.

Selección de expertos

Para la selección de los jueces expertos seleccionamos a 13 profesores universitarios con amplia experiencia y reconocimiento en la comunidad de profesionales en Didáctica de la Matemática.

Petición de colaboración y envío de preguntas

Por vía telemática[77] solicitamos a cada experto su colaboración a través de una carta de presentación en la cual se explicitaba la finalidad de la colaboración, la descripción del constructo a medir, los bloques temáticos a considerar y la población a la cual iba dirigida la prueba. Se adjuntó el cuestionario (Anexo 10) con las 57 preguntas divididas en los bloques por conceptos (Tabla 5.11). Se informó además del uso de la prueba, el uso de los puntajes que obtendríamos y se indicó el tipo de conocimiento que se pretendía medir. Por una parte se les pidió la selección de las preguntas de cada bloque que considerasen más pertinentes y por otra, que valorasen la suficiencia, claridad, coherencia, relevancia de cada pregunta y todo aspecto que considerasen interesante tener en cuenta para enriquecer el cuestionario.

Análisis y refinamiento de preguntas

Recibidas las respuestas se inició el análisis de los resultados de los expertos, estableciendo una comparación entre cada una de las observaciones señaladas en

[77] Salvo tres profesores miembros de la Universidad de Valladolid.

cuanto a fondo (contenido, pertinencia), y forma (claridad, redacción, comprensión), además de lo establecido en el referente teórico para cada una de las preguntas. Iniciamos este proceso compilando todas las preguntas seleccionadas por los expertos. En el caso de que el experto considere la pregunta como interesante, a ésta le asignamos 1, después de hacer la suma de todas las puntuaciones por pregunta (Tabla 5.12), seleccionamos las 35 preguntas con puntuación más alta.

Tabla 5.12 Puntuaciones panel de expertos.

PREGUNTA	EXPERTO												PUNTUACIÓN TOTAL POR PREGUNTA
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
6	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	10
12	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	10
23	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	10
33	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	10
7	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	9
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	9
32	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	9
49	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	9
18	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	8
37	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	8
48	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	8
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	7
16	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	7
28	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	7
20	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	7
31	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	7
40	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	7
41	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	7
44	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	7
53	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	7
8	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	6
50	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	6
35	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	6
54	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	6
56	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	6
57	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	6
2	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	5
3	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	5
21	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	5
36	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	5
45	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	5
5	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	5
46	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	5
51	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	5

PREGUNTA	EXPERTO												PUNTUACIÓN TOTAL POR PREGUNTA
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
19	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	5
29	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	4
38	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	4
39	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	4
42	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	3
26	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	3
4	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	3
15	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	3
24	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	3
34	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	3
9	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	3
10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3
55	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2
13	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
14	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2
17	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
30	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
22	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2
27	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
47	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2
52	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2
43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Teniendo seleccionadas las preguntas de acuerdo con las puntuaciones de los expertos, hicimos una revisión de las observaciones y sugerencias reportadas por los expertos. Si la pregunta se seleccionó previamente y las consideraciones de los expertos apuntan a que la pregunta se puede mejorar o reformular con pautas e indicaciones dadas, entonces la pregunta formará parte del cuestionario definitivo en tanto en cuanto las observaciones mantengan el objetivo inicial de la pregunta en lo referente al constructo a medir.

Por lo anterior, presentaremos algunas de las observaciones y sugerencias recibidas de los expertos.

- En general por cuestiones de homogeneidad nos recomendaron el uso del término ‘supremo’ en lugar de ‘extremo superior’ y de ‘ínfimo’ en el caso del ‘extremo inferior’.
- Con relación a la pregunta 1, un experto expresó su inquietud a través de una pregunta: ¿saber que tiene ‘n’ sumandos es saber cuántos sumandos tiene? En este caso, el planteamiento fue intencional ya que precisamente buscamos obstáculos de identificación de variaciones en$\mathbb{N}$, ya sea en el caso de n como un número natural fijado (aunque indeterminado) o a n como una variable que recorre los números naturales.
- En la pregunta 2 se utiliza la notación ‘$\mathtt{Card(A)}$’ de cardinalidad para un conjunto dado A y se define posteriormente, así que nos sugieren introducir la notación antes de la pregunta 2.
- En la pregunta 5 en el apartado d) el uso de un nombre distinto al usual o prototípico para la variable podría desvirtuar la interpretación de dónde podría venir la respuesta a la pregunta: no reconoce a p como natural vs. identificación de sucesiones, así que, la sugerencia del experto es mantener la notación estándar.
- En la pregunta 6 un experto señaló la posible dificultad en la interpretación de las respuestas, puesto que se pregunta por ambas regiones. Su sugerencia es separar la pregunta en dos, una para cada figura. En vista de que al separarlas no aumenta la carga cognitiva, y la intención en cada caso va dirigida hacia el mismo obstáculo, optamos por eliminar uno de los cuadrados para facilitar la interpretación de las respuestas y evitar las inferencias erróneas del posible cruce de respuestas de los estudiantes.
- A efectos de clarificar el enunciado de la pregunta 32, el experto sugiere añadir que es el conjunto de segmentos borrados a lo largo de todo el proceso (acumulativamente, y no en un paso concreto).
- En la pregunta 33 el experto sugiere redactar la frase “El experimento comienza tomando […]” de tal forma que se exprese mejor la idea de continuidad de los diferentes pasos que se concatenan.

- En la pregunta 53 no se especifica la naturaleza de l, y el experto sugiere explicitarla.
- En la función que se señala en el ítem d) de la pregunta 57 el experto no ve clara la utilización de la n en la definición de la función. Su sugerencia es definir la función f como como una suma de f_n (con n natural), y cada una de las f_n no nula en uno de los triángulos y sería 0 en el resto del intervalo $[0,2]$.
- Un experto sugiere que se especifique que el sentido de la integral que se considera es el de Riemann o Darboux puesto que la integral en el sentido de Lebesgue cambiaría el valor de algunas de las integrales que se proponen.

Después de todos estos análisis y algunos otros de tipo errata que nos han señalado los expertos, efectuamos un conjunto de correcciones y modificaciones el cuestionario final quedó estructurado en 37 preguntas dicotómicas cerradas y un total de 144 ítems (Anexo 11).

5.5 Entrevista

Para profundizar en aspectos que podían ser determinantes en la comprensión que tienen los estudiantes del concepto de ID y de proceso infinito, se seleccionó un estudiante destacado de cuarto año de carrera para ser entrevistado.

La elección del estudiante estuvo supeditada a dos factores: El logístico y el de desempeño. En lo logístico se tuvo en cuenta: la restricción temporal subordinada a cuestiones laborales, la disponibilidad de los estudiantes, y la distancia geográfica entre ciudades. En cuanto a las respuestas que dieron los estudiantes, se escogió, de entre todos los estudiantes con un nivel alto de desempeño en el cuestionario, uno que tuviese un expediente académico bueno.

La entrevista se transcribió en su totalidad (Anexo 12) y se analizó junto con las respuestas del cuestionario.

En una etapa posterior a la realización del cuestionario por parte de los estudiantes y a la revisión de las respuestas por parte de la investigadora se entrevistó a Vladimir (nombre ficticio). La duración de la entrevista fue de 50 min.

Previo a la entrevista, se le entregó a Vladimir el cuestionario que él había cumplimentado, no sólo para la revisión de sus respuestas sino para que se familiarizase de nuevo con las preguntas del mismo. Después de un tiempo prudencial se le dieron las pautas a seguir en la entrevista, que sólo podría contestar verbalmente y que el objetivo fundamental de la entrevista era profundizar en algunos aspectos relacionados con las respuestas que dio al cuestionario.

La entrevista permitió:

- Ampliar la información relacionada con las respuestas que dadas por los estudiantes al cuestionario.
- Profundizar en el tipo de conocimientos que movilizan los estudiantes en la consecución de las respuestas del cuestionario.
- Indagar acerca de la relación de los conocimientos estudiados durante el proceso de formación y los que se requieren comprender los conceptos estudiados.
- Obtener información de las justificaciones que se dan en la resolución de los problemas.
- Hacer inferencias acerca de la posible relación entre el conocimiento de los procesos infinitos y los conocimientos de la integral definida.
- Recabar información relacionada con el posicionamiento del estudiante con respecto a la forma de abordar el concepto de integral definida.
- Indagar acerca de las exigencias cognitivas de los ítems.

Capítulo 6. Análisis de resultados

En este capítulo se presenta el análisis general de los resultados en cinco fases. Se inicia este proceso con la realización de un análisis primario de tipo descriptivo y correlacional entre las puntuaciones de las respuestas asociadas con los procesos infinitos objeto de estudio (límites, series, etc) y los que tienen que ver con el concepto de integral definida. También en esta primera fase se hace un análisis descriptivo general de las respuestas por ítem. En la segunda se evalúan estos resultados desde el marco de los actos de comprensión de Sierpińska, a través de los obstáculos vinculantes que se han descrito previamente. En la tercera fase se detallan algunos aspectos relacionados con los procesos infinitos involucrados en algunos problemas que han sido objeto de estudio en otras investigaciones. En la cuarta fase se analiza la implicación entre los obstáculos relacionados con procesos infinitos como los que tienen que ver con la integral definida, emergentes de las respuestas para perfilar las características y la relación entre unos y otros a través del análisis estadístico implicativo. Por último, en la fase cinco, se describe el análisis de la entrevista que se realizó a uno de los estudiantes que cumplimentó el cuestionario. El objetivo fundamental de la entrevista es profundizar en los aspectos que resultaron ser de interés en el análisis de los resultados previos.

6.1 Análisis general de las respuestas

Las proposiciones que se han planteado en el cuestionario exigen al estudiante que exprese su juicio mediante las expresiones falso/verdadero (F/V). Estas respuestas fueron posteriormente codificadas de forma dicotómica: 1 para la respuesta correcta y 0 para la respuesta incorrecta en cada ítem. Cada estudiante fue identificado como ST seguido de un número.

Aunque el cuestionario se elaboró con los reactivos F o V, se insistió a los estudiantes que en caso de creer que se habían encontrado con alguna afirmación cuya respuesta dependiese de ciertas condiciones, que a criterio suyo debieran ser incluidas, podían agregar cualquier observación a tener en cuenta para evaluar su respuesta. Se dio esta opción para poder tener un criterio discriminatorio en aquellos casos en los que el estudiante haga supuestos que no se incluyen en el problema pero que en su proceso de resolución manifieste conocimiento suficiente sobre la cuestión que se trata.

A continuación, se da un ejemplo del proceso de codificación que se siguió a partir de las respuestas dadas por un estudiante (ST34) a la pregunta 1:

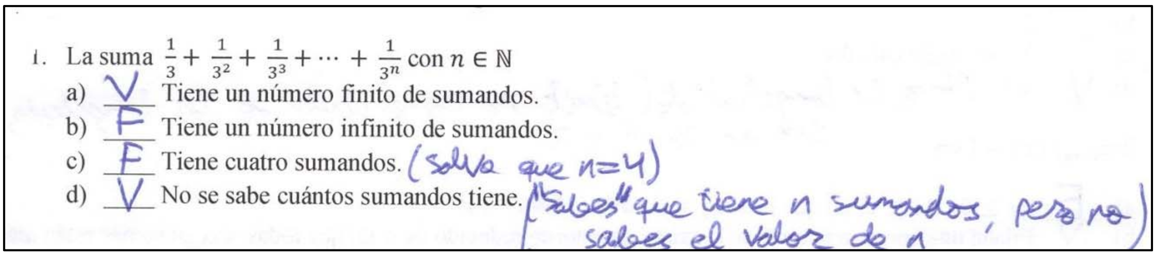

1. La suma $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$ con $n \in \mathbb{N}$
a) V Tiene un número finito de sumandos.
b) F Tiene un número infinito de sumandos.
c) F Tiene cuatro sumandos. (solo si que $n=4$)
d) V No se sabe cuántos sumandos tiene. ("Sabes" que tiene n sumandos, pero no sabes el valor de n)

Figura 6.1 respuesta del estudiante ST34 a la pregunta 1.

El propio estudiante afirma: "'sabes' que tiene n sumandos" aclarando que "el valor de n no lo sabe", y, decide valorar el ítem como verdadero. Aunque ha valorado la respuesta como V, es evidente que su propia justificación evidencia que la suma tiene n sumandos. Por ello, en la valoración dicotómica a su respuesta, en el ítem (d) fue de 1. La respuesta de este estudiante fue codificada como (1,1,1,1) ya que, responde explícitamente de forma correcta a los tres primeros ítems, e implícitamente al último.

Análisis descriptivo general de las respuestas del cuestionario

Tras la recopilación de datos, la depuración y codificación establecida, se hace un estudio primario de tipo descriptivo y correlacional con el que se realiza una primera valoración de las respuestas de los estudiantes al cuestionario con la ayuda del SPSS.

Para comenzar el análisis descriptivo se muestra el valor medio de cada una de las preguntas que componen el cuestionario una vez codificados los 76 cuestionarios que forman parte de la muestra. En la Figura 6.2 se puede ver qué preguntas tiene unos niveles de corrección y cuáles más bajos.

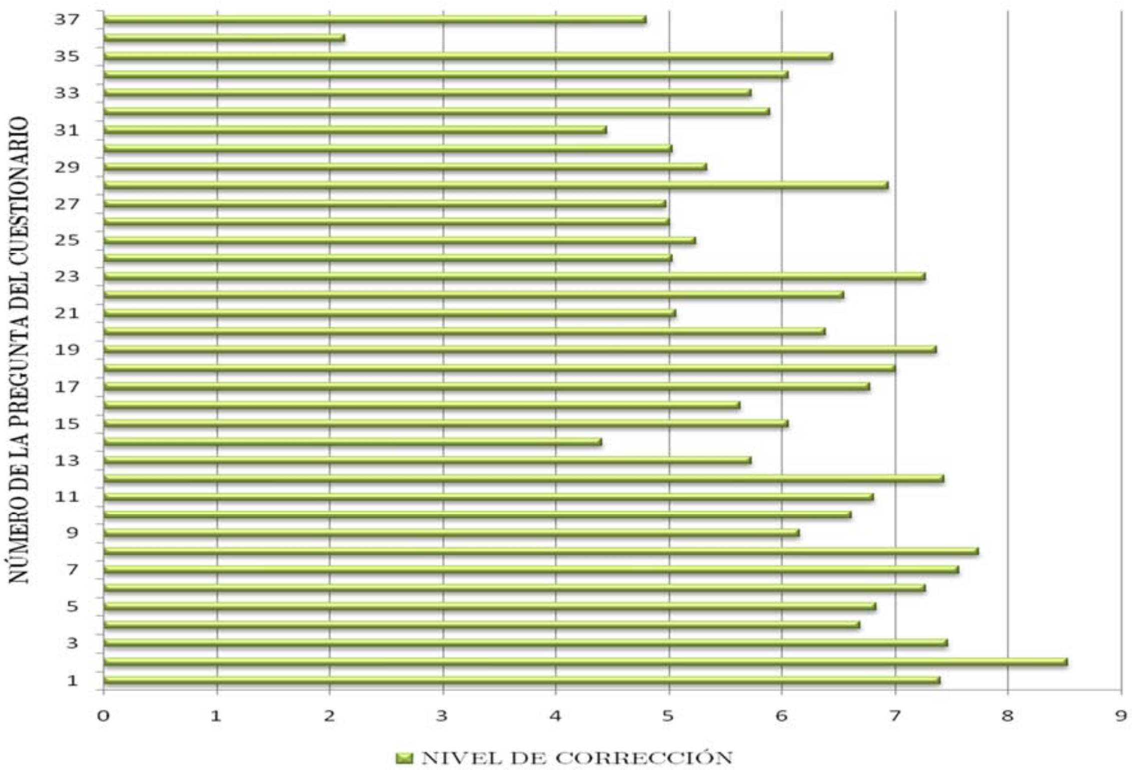


Figura 6.2Valores medios de las preguntas del cuestionario.

Siete son las preguntas que promedian máximo un 5,0. La pregunta 14 relacionada con las categorías de discriminación y sistematización de los distintos tipos de sucesiones. La pregunta 24 y 27 que tienen que ver con la discriminación entre particiones y conjuntos que no los son, y la sistematización de sus representaciones numérica y algebraica. La pregunta 26, que examina elementos relacionados con la identificación, discriminación y sistematización de subconjuntos notables asociados a $\mathbb{R}$. La pregunta 30 que relaciona categorías de generalización y sistematización de los distintos tipos de series. La pregunta 31 que trata elementos de comprensión vinculados con la generalización y síntesis del concepto de integral definida como función del límite superior (integral indefinida): $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Por último, la pregunta 36 que asocia actos de comprensión ligados a los conceptos de sumas de Riemann y Darboux en las categorías de generalización y sistematización.

Apenas tres son las preguntas que superan una media de 7,5 y con márgenes muy ajustados. La pregunta 7 con una valoración de 7,6 y que trata elementos de comprensión relacionados con la discriminación entre el término general de una serie y una suma parcial. Igualmente, la pregunta 8 con una media de valoración de 7,7 está vinculada a actos que tienen que ver con el manejo de expresiones algebraicas y con la sistematización asociada a la identificación de intervalos en sus distintas representaciones. La pregunta con una media más alta es la 2 en la que se investiga si los estudiantes distinguen conjuntos infinitos de los que no lo son de una manera generalizada.

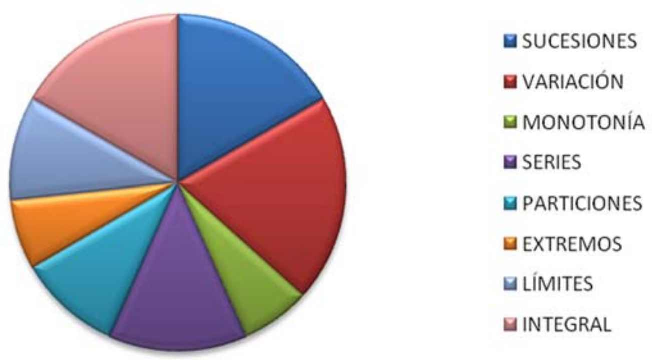


Figura 6.3 Distribución de preguntas en el rango (5,0-7,5] por temas.

27 son las preguntas cuyo promedio alcanza valores del intervalo $(5{,}0 - 7{,}5]$. Las preguntas en mayor o menor número tienen que ver con los distintos procesos que se han trabajado. La distribución de los temas relacionados con estas preguntas se detalla en la Figura 6.3. Se observa que los temas que más frecuencia tienen en este rango (próximas a las de la ID) son los relacionados con sucesiones, particiones y series. Y las que tienen menos presencia en este rango son la monotonía y los extremos. En la siguiente sección se especifica el elemento y la categoría de comprensión vinculante en cada pregunta

En cuanto al rendimiento de los estudiantes, se puede decir la mayoría tuvo un rendimiento aceptable y que uno de cada cinco tuvo bajo rendimiento (Figura 6.4). Uno de cada cuatro estudiantes tiene un nivel medio de preguntas correctas, es decir su rendimiento se encuentra en el intervalo (5, 0-7,5]. El rendimiento máximo fue de 9,3.

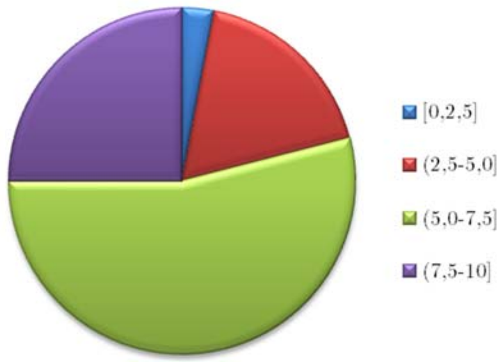


Figura 6.4 Distribución de alumnos según el rango de rendimiento.

En el análisis descriptivo que se ha realizado hasta el momento se ha tenido en cuenta cada uno de los conceptos estudiados en esta investigación. Las cuestiones a analizar en adelante tratan de descubrir si existe alguna relación entre la comprensión de estos conceptos y determinar qué tipo de relación es. Para dar respuesta a la primera de estas cuestiones, se lleva a cabo un análisis correlacional con el que se intenta determinar si los elementos de comprensión vinculados a los procesos infinitos guardan relación con elementos de comprensión subordinados al concepto de integral definida.

Análisis de correlación

Un estudio de correlación empieza seleccionando las variables de interés. Así, si se desea analizar la relación entre las puntuaciones obtenidas por los alumnos en los ejercicios relacionados a particiones, variaciones, sucesiones, series, límites (primer grupo) y las puntuaciones obtenidas por los alumnos en los ejercicios relacionados a las integrales (segundo grupo), se considerará como variable predictiva X, la suma de la puntuaciones del primer grupo dividida entre 116 y como variable respuesta Y, la suma de puntuaciones del segundo grupo dividida entre 28.

Antes de calcular el coeficiente de correlación de Pearson hemos de comprobar si existe una tendencia lineal en la relación. Aunque más adelante ofreceremos procedimientos analíticos que permitan verificar con exactitud la Hipótesis de linealidad, por el momento, recurriremos a procedimientos gráficos, que en una primera instancia, pueden resultar suficientes. Se dibujarán en un sistema cartesiano las parejas de datos $(x_{i,}y_i)$, obteniéndose un diagrama de puntos bivariado conocido como diagrama de dispersión. El diagrama de dispersión correspondiente a las parejas de puntuaciones de nuestro estudio se da en la Figura 6.5.

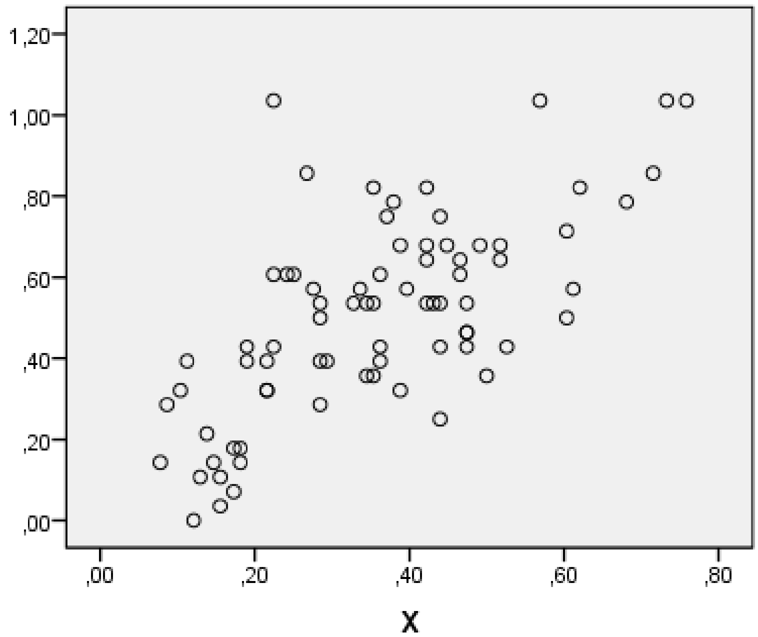


Figura 6.5 Diagrama de dispersión.

El diagrama de dispersión permite visualizar las parejas de puntos y establecer algún patrón de comportamiento gráfico. En la Figura 6.5 se confirma la relación al aumentar X aumenta Y (en lo que resta de esta sección nos referimos al tipo lineal) y suele describirse como una correlación o asociación positiva de Y respecto a X.

Definición y propiedades del coeficiente de correlación

El coeficiente de correlación viene definido por la siguiente expresión:

$$r = \frac{1}{n-1} . \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}$$

en donde

x_i son los valores de la variable X, y_i son los valores de la variable Y;

$\bar{x}, s_x$ son la media y la desviación típica de X;

$\bar{y}, s_y$ son la media y la desviación típica de Y.

Se dan a continuación las propiedades de coeficiente de correlación *r*.

1) El valor de r es independiente de las unidades en que se midan X e Y.
2) $r = 1$ si y sólo si todos los pares de puntos de la muestra están en una recta con pendiente positiva y $r = -1$ si y sólo si todos los pares de puntos de la muestra están en una recta con pendiente negativa.
3) El rango de valores de r está dado por el intervalo $-1 \leq r \leq 1$.
4) Simetría: El valor de $r$no depende de cuál de las dos variables bajo estudio se designe como Xy cuál como Y.
5) *r*mide la fuerza de una relación lineal. No está diseñado para medir la fuerza de una relación que no sea lineal.

Por último y con el fin de emplear de forma práctica la magnitud de r como un indicadordel grado de correlación o asociación entre las variables, en la Tabla 6.1. se señalan los rangos de los tipos de correlación estandarizados.

Tabla 6.1 Correlación lineal entre dos variables

Valores de r	Tipo y grado de correlación
-1	Negativa perfecta
$-1 \leq r < -0.8$	Negativa fuerte
$-0.8 < r < -0.5$	Negativa moderada
$-0.5 < r \leq 0$	Negativa débil
0	No existe
$0 < r \leq 0.5$	Positiva débil
$0.5 < r < 0.8$	Positiva moderada
$0.8 \leq r < 1$	Positiva fuerte
1	Positiva perfecta

En nuestro estudio se calculó el coeficiente de correlación con la ayuda de SPSS 23.0 para 76 alumnos, donde X incluye las puntuaciones obtenidas por los alumnos en los ejercicios del primer grupo e Y incluyes las puntuaciones de los ejercicios del segundo grupo. (Tabla 6.2)

Tabla 6.2 Coeficiente de correlación puntuaciones alumnos.

		X	Y
X	Correlación de Pearson	1	0.678(**)
	Sig. (Bilateral)		0.000
Y	Correlación de Pearson	0.678(**)	
	Sig. (Bilateral)	0.000	1

** La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

Dado que el valor obtenido ha sido 0.678 según la Tabla 6.1 tenemos una correlación positiva moderada. En otras palabras, a más puntuación en los ejercicios del grupo 1, más puntuación en los ejercicios del grupo 2.

Significación del coeficiente de correlación

Una vez calculado el valor del coeficiente de correlación interesa determinar si tal valor obtenido muestra que las variables X e Y están relacionadas en realidad o tan solo presentan dicha relación como consecuencia del azar. En otras palabras, nos preguntamos por la significación de dicho coeficiente de correlación.

Un coeficiente de correlación se dice que es significativo si se puede afirmar, con una cierta probabilidad, que es diferente de cero. Más estrictamente, en términos estadísticos, preguntarse por la significación de un cierto coeficiente de correlación no es otra cosa que preguntarse por la probabilidad de que tal coeficiente proceda de una población cuyo valor sea de cero. A este respecto tendremos dos hipótesis:

H_0: El coeficiente de correlación obtenido procede de una población cuya correlación es cero.

H_1: El coeficiente de correlación obtenido procede de una población cuyocoeficiente de correlación es distinto de cero.

En nuestro caso a un nivel de significación de 5% el p-valor es igual a 0, y por ello rechazamos la hipótesis nula. La correlación obtenida no procede de una población cuya correlación es cero, por tanto la variable X (suma ponderada de las variables relacionadas a particiones, variaciones, sucesiones, series, limites) y la variable Y (suma ponderada de las variables relacionadas a la integral) están relacionadas.

Interpretación del coeficiente de correlación

Más interés tiene la interpretación del coeficiente de correlación en términos de proporción de variabilidad compartida o explicada, dondese ofrece una idea más cabal de la magnitud de la relación. Nos referimos al coeficiente de determinación. Dicho coeficiente se define como el cuadrado del coeficiente de correlación y se entiende como una proporción de variabilidades.

Por ejemplo, la correlación entre nuestras variables X e Y es de 0.68, significa que $0.68^2 = 0.46$ es la proporción de varianza compartida entre ambas variables.

Puede interpretarse como que un 46% de la comprensión de los conceptos sobre la integral es debido a la comprensión de los conceptos sobre las particiones, variaciones, sucesiones, series, limites -variabilidad explicada-, o bien, y siendo más estrictos, que la comprensión de los conceptos de la integral y los otros conceptos comparten un 46% de elementos. En conclusión, se puede decir que tanto los conceptos de la integral como los otros arriba mencionados ponen en juego un 46% de habilidades comunes.

Descripción del análisis de las respuestas

Ahora, se presenta un análisis pormenorizado de las preguntas, describiendo el objetivo de cada una de ellas haciendo referencia a obstáculos que se presentan en la comprensión de los conceptos considerados y también se señala la relación de respuestas correctas (en porcentaje) de los estudiantes en cada ítem.

1. La suma $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$con $n \in \mathbb{N}$

   a) Tiene un número finito de sumandos.
   b) Tiene un número infinito de sumandos.
   c) Tiene cuatro sumandos.
   d) No se sabe cuántos sumandos tiene.

Objetivo:

Descubrir si los estudiantes tienen la creencia errónea de que una suma del tipo $\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}+\cdots+\frac{1}{k^n}$con k dado y $n \in \mathbb{N}$, es finita.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	1			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	65,8	64,5	98,7	67,1

La mayoría fueron correctas pero no son pocos los que afirman que tienen un número finito de sumandos ni los que responden que no se sabe cuántos sumandos tiene la suma (no se dan cuenta de que superíndice n los numera y, por tanto hay n).

Por lo tanto aparecen dificultades/obstáculos de dos tipos:

- Asignación infinito a un número finito de sumandos.
- Desconocimiento de que el superíndice es un contador.

2. Dados los siguientes conjuntos de números reales:
   $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{3n}\}$, $B = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}\}$,
   $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$,
   a) $Card(A) = Card(B)$
   b) $Card(A) < Card(C)$
   c) $Card(A \cup B) = Card(C)$
   d) $Card(A) < Card(B)$

Objetivo: Detectar si los estudiantes distinguen conjuntos infinitos de los que no lo son de una manera generalizada.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	2			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	93,4	84,2	93,4	69,7

Para la mayor parte de los estudiantes las respuestas a los dos primeros apartados son correctas. Sin embargo aproximadamente la quinta parte de ellos afirma que $Card(A \cup B) = Card(C)$ y la tercera parte afirma que se cumple la desigualdad $Card(A) < Card(B)$.

En suma se detectan obstáculos asociados a:

- Asignación al subíndice n lavariación cuando no es tal: $(a_{in})_{i \in N}$.
- No distinción entre conjuntos infinitos y los que no lo son.
- La cardinalidad de los conjuntos.
- La generalización y sistematización utilizando subíndices.

3. Dados los siguientes conjuntos de números reales:
   $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, y$B = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$.
   a) $A \subset B$
   b) $A = B$
   c) $B \subset A$
   d) Ni $A \subset B$, ni $B \subset A$

Objetivo:

Averiguar si los estudiantes tienen dificultades en cuestiones ligadas a las relaciones de inclusión y cardinalidad en conjuntos finitos e infinitos, indicados de forma generalizada.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	3			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	78,9	67,1	68,4	84,2

La mayor parte de los alumnos respondieron aceptablemente a los cuatro apartados. Sin embargo, aproximadamente un quinto afirman que A no es un subconjunto de B y algunos menos creen que no hay relación de contenencia entre ambos. Poco más de un tercio afirma que los conjuntos son iguales y otro tanto afirma que $B \subset A$.

Estas respuestas ponen de manifiesto los siguientes obstáculos:

- La relación de inclusión entre conjuntos finitos y numerables.
- Variabilidad de la relación de pertenencia ($n \in \mathbb{N}$).
- Posible identificación de B con un conjunto unipuntual.

4. Las expresiones siguientes son sucesiones:
   a) $a_n = \frac{1}{n}$
   b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{n}$
   d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

Objetivo:

Localizar posibles obstáculos relacionados con la discriminación simbólica de las sucesiones, su identificación nivel numérico y algebraico y generalización y sistematización de las representaciones algebraicas.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	4			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	66,0	65,8	89,5	46,1

En su mayoría, los estudiantes discriminaron la sucesión como un conjunto infinito cuando este conjunto se representa de forma explícita. Sin embargo, más de la tercera parte identificó el término general de la sucesión con la sucesión, y un porcentaje análogo no identificó $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ como una sucesión. Por otra parte, se evidencia que más de la mitad de los estudiantes no identificaron la representación explícita de la sucesión.

Por lo tanto aparecen dificultades/obstáculos de dos tipos:

- No distinción entre conjuntos infinitos y los que no lo son.
- Confusión entre el término general de una sucesión y la sucesión.
- Dificultad al asignar al subíndice n la variación cuando no es tal.
- Obstáculos de generalización y sistematización para obtener representaciones algebraicas.

5. Si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l, entonces:
   a) $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $2l$
   b) $(a_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l , $\forall k \epsilon \mathbb{N}$
   c) $(a_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$con $k \in \mathbb{N}$no tiene porqué ser convergente
   d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.

Objetivo:

Localizar posibles dificultades/obstáculos relacionados con la identificación, discriminación y sistematización de los criterios de convergencia de sucesiones y subsucesiones.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	5			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	80,3	70,0	68,0	55,0

La mayoría de los estudiantes aciertan al determinar que la sucesión $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $2l$. A casi una tercera parte, les cuesta determinar la conservación del orden de las subsucesiones de una convergente. Finalmente, más de la mitad de los alumnos convergencia implica monotonía.

Estas respuestas evidencian por tanto los siguientes obstáculos:

- Implicación de la convergencia de las subsucesiones.
- Asignación al límite del coeficiente del factor del subíndice (contador) de la subsucesión.
- Confusión entre el término general de la sucesión y la sucesión (obstáculo de sistematización).
- Confusión entre monotonía y convergencia.

6. Sabiendo que el cuadrado de partida de la figura dada es de lado 1 u. Si se repite el proceso de división del cuadrado infinitas veces, el área de la región sombreada es:

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{7}$
c) $\frac{1}{4}$
d) Ninguna de las anteriores

Objetivo:

Reconocer obstáculos concernientes a la representación gráfica de series geométricas, asociados a la generalización y sistematización.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	6			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	86,8	94,7	51,3	57,9

La mayoría de los estudiantes respondieron correctamente los dos primeros ítems, aunque el porcentaje de respuestas erróneas de la primera no es desdeñable. Sin embargo, casi la mitad respondió erróneamente a los dos últimos. El hecho a destacar es que los ítems de esta pregunta son de respuesta excluyente, y los resultados se muestran contradictorios al respecto.

A estas respuestas subyacen los siguientes obstáculos:

- Confusión de las áreas gráficas con dibujos exentos de significación o con significación distinta a la pretendida.
- Asignación errónea del área correspondiente en cada etapa de la división.
- Obstáculos de generalización en la conversión de la representación gráfica a la numérica y de sistematización en la conversión a la representación algebraica.

7. El valor de la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ es :
   a) 2
   b) $2 - \frac{1}{2^n}$
   c) No se puede calcular
   d) Es infinita si n tiende a infinito

Objetivo:

Encontrar posibles dificultades/obstáculos relacionados con la discriminación entre el término general de una serie y una suma parcial.

Respuesta:

PREGUNTA	7			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	68,4	55,3	86,8	92,1

En la mayoría de las respuestas de los estudiantes se observa que en el caso de que n tienda a infinito lograron identificar la progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$. Sin embargo casi un tercio de los estudiantes afirma que el valor de esa suma finita es 2, esto es, confunden el valor de una suma parcial con el valor de la serie. Por otra parte, casi la mitad de los estudiantes, consideran que no se puede hallar el valor de la suma pese a que se trata de una suma finita y sólo algo más de la mitad calcula correctamente el valor de la suma.

En virtud de lo anterior, los obstáculos que se presentan en este caso son:

- Asignación al superíndice n la variación infinita cuando no es tal, o finita cuando es infinita.
- Confusión entre la convergencia del término general con el de la serie.
- Carencia del dominio de la aritmética de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

8. Los siguientes conjuntos son intervalos de $\mathbb{R}$:
   a) $\{-1, 2\}$
   b) $(1,2) \cup (0,5)$
   c) $\{x : x = 5\lambda , \lambda \in \mathbb{R}\}$
   d) $\{x : 3x - 2 < -2x + 3 , x \in \mathbb{R}\}$

Objetivo:

Buscar posibles obstáculos que tengan que ver con el manejo de expresiones algebraicas y en la sistematización asociada a la identificación de intervalos en sus distintas representaciones.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	8			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	88,2	93,4	47,4	80,3

La mayor parte de los estudiantes respondieron acertadamente en tres de los ítems. Sin embargo casi la quinta parte no logró reconocer que el conjunto $\{x : 3x - 2 < -2x + 3 , x \in \mathbb{R}\}$ era un intervalo; además, aproximadamente la mitad de ellos no identificó el conjunto $\{x : x = 5\lambda , \lambda \in \mathbb{R}\}$ con $\mathbb{R}$ o, en el caso de que si lo hicieran, no reconocieron a $\mathbb{R}$ como un intervalo.

Con esto, podemos determinar las dificultades/obstáculos que siguen:

- Dificultad en la identificación de intervalos y en sus distintas representaciones.
- Asignación a intervalos del conjunto de soluciones de inecuaciones
- No identificación de representaciones paramétricas sistemáticas de intervalos reales de forma generalizada.

9. Se consideran las siguientes particiones de $[0,1]$:
   $\mathcal{P}_1 = \{0,\ 0'1,\ 0'2,\ 0'3,\ 0'4,\ 0'5,\ \dots ,\ 0'9,\ 1\}$, $\mathcal{P}_2 = \{0,\ 0'25,\ 0'75,\ 1\}$,
   $\mathcal{P}_3 = \{0,\ 0'2,\ 0'25,\ 0'4,\ 0'5,\ 0'6,\ 0'8,\ 1\}$,
   $\mathcal{P}_4 = \{0,\ 0'2,\ 0'25,\ 0'4,\ 0'5,\ 0'6 , 0'75,\ 0'8,\ 1\}$,

$$\mathcal{P}_5 = \left\{0, \quad 1, \ 1-\frac{1}{2}, \quad 1-\frac{1}{3}, \quad 1-\frac{1}{4}, \dots, 1-\frac{1}{n}\right\}$$

a) $\mathcal{P}_1$ es más fina que $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$
b) $\mathcal{P}_3$ es más fina que $\mathcal{P}_2$
c) $\mathcal{P}_4$ es más fina que $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$
d) $\mathcal{P}_5$ es más fina que todas las anteriores.

Objetivo:

Detectar posibles relacionadas con la discriminación entre número de puntos y finura de la partición.

Respuesta:

PREGUNTA	9			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	56,6	53,9	81,6	53,9

En su mayoría los estudiantes que responden acertadamente al ítem (c), pero casi un quinto de los alumnos no establece la relación. El resto de ítems son más complicados para ellos y casi la mitad no logra identificar la relación de contenencia de las particiones en estos tres casos.

Por tanto, los obstáculos que se observan tienen que ver con:

- Confusión entre número de puntos y finura de una partición.
- No relacionar la finura de la partición con la contención.
- La finura mayor o menor de una partición se debe establecer en términos de comparación.

10. Dado $A = [0,3) \cup (3,6]$:
 a) La frontera de A es $\{0,6\}$
 b) La frontera de Aes $\{3\}$
 c) 3 es un punto de acumulación de A
 d) A tiene infinitos puntos de acumulación.

Objetivo:

Averiguar si los estudiantes presentan dificultades relacionadas con la topología real identificando y discriminando conjuntos topológicos.

Porcentaje de respuestas correctas:

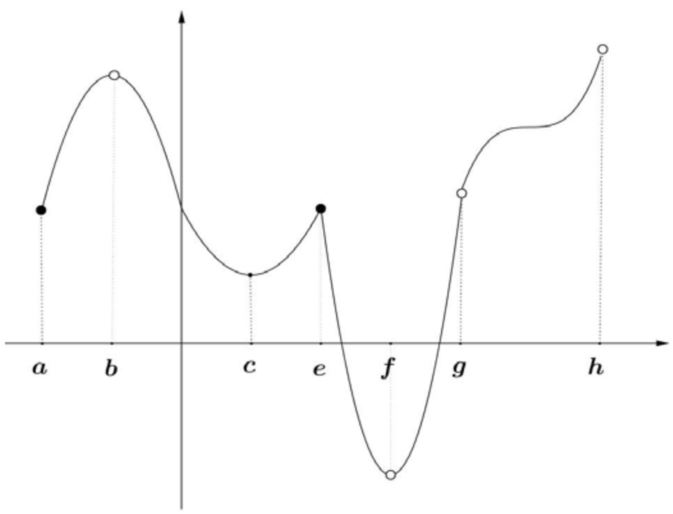
PREGUNTA	10			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	57,9	81,6	78,9	46,1

Gran parte de los estudiantes identifica a 3 como un punto de acumulación de A. No son pocos (casi una quinta parte) los que afirman que la frontera de A es$\{3\}$. Y más de la mitad no identifica la infinitud de los puntos de acumulación de un intervalo en $\mathbb{R}$. Por otra parte, un número importante (más de las dos terceras partes) de alumnos afirma erróneamente que a frontera de A es $\{0{,}6\}$.

En síntesis, los obstáculos que se han determinado son a saber:

- Desconocimiento de la topología real.

11. De acuerdo con la gráfica de la función g, de la figura que se muestra:
    a) g tiene máximos en $x = b$ y en $x = e$
    b) g tiene mínimos en $x = a$ y en $x = f$
    c) g tiene máximos en $x = b$, en $x = e$ y en $x = h$
    d) g tiene mínimo en $x = a$ y en $x = e$ tiene máximo



Objetivo:

Localizar posibles obstáculos relacionados con la identificación gráfica de los extremos de una función en un intervalo dado y discriminación entre máximos, mínimos y extremos superiores e inferiores.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	11			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	63,2	80,3	73,7	55,3

La mayoría de los estudiantes respondió acertadamente al segundo ítem, sin embargo, no son pocos los que señalaron erróneamente que hay un mínimo en $x = f$. Por otra parte, más de la tercera parte cree que en $x = b$ hay un máximo. Y casi un tercio que en $x = b$ y $x = h$ hay máximos. Casi la mitad de los estudiantes consideran que en $x = a$ o $x = e$ no hay máximo.

Podemos observar que en el caso de los tres primeros ítems, la no existencia de extremos en todos los casos, están asociados a la no existencia de imagen en algunos puntos. En el apartado (d) son extremos relativos pero no absolutos, en cualquier caso, son extremos.

De aquí, precisamos los siguientes obstáculos relacionados con extremos:

- Dificultad para identificar extremos con números reales.
- Confusión entre extremos absolutos y relativos.
- Confusión entre extremo superior (menor de las cotas superiores) con máximo (extremo superior que pertenece a la imagen de la función). Ídem para mínimos.
- Errores de discriminación.

12. Considerando el conjunto $E = (-6,1] \cup [3,5)$:
    a) 1 y 5 son extremos superiores de E.
    b) -6 y 3 son extremos inferiores de E.
    c) 5 es $\overline{ext}E$, pero no1.
    d) 5 es el único $\overline{ext}E$, y -6 el único $\underline{ext}E$.

Objetivo:

Detectar posibles carencias de criterios para aplicar recursos discriminatorios entre cota superior y supremo ($\overline{ext}$), cota inferior e ínfimo ($\underline{ext}$)

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	12			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	81,6	82,9	69,7	63,2

Aunque la mayoría de los estudiantes aciertan en el primer ítem (pero no es un porcentaje desdeñable los que no aciertan), casi una quinta parte considera a 1 un extremo superior de E. Análogamente, un porcentaje significativo de los estudiantes aciertan en el segundo ítem pero no son pocos los que afirman que 3 es un extremo inferior del conjunto E. Más de un tercio de los estudiantes piensan que 1 es $\overline{ext}E$ o que 5 no lo es, y poco más de un tercio afirma que los extremos (supremo e ínfimo) del conjunto no son únicos.

Por tanto, se encuentran obstáculos relacionados principalmente con:

- El conocimiento y manejo del orden de los reales y su totalidad.
- La determinación analítica o algebraica del ($\overline{ext}$) y el ($\underline{ext}$).

13. Dada la función real de variable real $f(x) = 4x + 1$. De acuerdo con la sentencia:

"$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ ",

los valores de δ para los cuales se cumple la desigualdad $|f(x) - 9| < 0'01$ con $a = 2$ son:

a) $\delta < 0'005$
b) $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$
c) $\delta < \varepsilon$
d) $\delta \leq 0'0025$

Objetivo:

Descubrir obstáculos relacionados con la identificación del concepto de límite de una función y de sistematización.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	13			
ÍTEM	a	b	c	d
CORRECTAS(%)	55,3	60,5	60,5	52,6

Un porcentaje significativo de estudiantes (casi la mitad) en general muestran falta de conocimiento en la concepción analítica del concepto de límite. Por otra parte, en el caso de no relacionarlo con el concepto de límite, es en el desconocimiento y manejo pobre de desigualdades en donde podría residir la dificultad relacionada.

En este orden de ideas, los obstáculos que identificamos están relacionados con:

- Dificultad en la comprensión del concepto de límite asociada a la sistematización.
- Dificultad en el manejo algebraico de expresiones que son inherentes al uso de desigualdades relacionadas con el $\varepsilon - \delta$.
- Falta de manejo de la concepción analítica o topológica relacionadas con el concepto de límite.
- Dificultad en el tratamiento de desigualdades algebraicas.

14. Señala:

a) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces es monótona.

b) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, y todos sus términos son menores que el límite, entonces, es monótona creciente.

c) Si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y menor que otra sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona decreciente que tiene límite, entonces $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y decreciente, está acotada.

Objetivo:

Localizar obstáculos que puedan tener los estudiantes, relacionados con la discriminación de los distintos tipos de sucesiones.

Porcentaje de respuestas correctas:

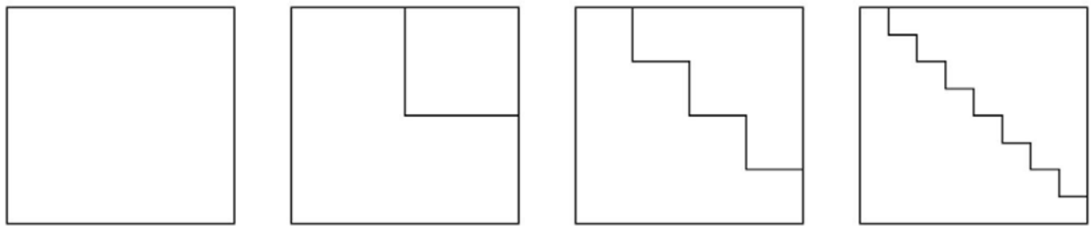
PREGUNTA	14			
ÍTEM	a	b	c	d
CORRECTAS(%)	52,6	39,5	69,7	14,5

Aunque en el ítem (c) se evidencia que buena parte de los estudiantes relaciona adecuadamente la monotonía con el límite,Casi la mitad señala que la convergencia implica la monotonía y más de la mitad confunden las propiedades de las sucesiones relacionadas con el límite y la monotonía. La mayoría de los estudiantes no identificaron como constantes aquellas sucesiones que son al tiempo crecientes y decrecientes.

Los obstáculos que aparecen en este caso son:

- Obstáculo de sistematización de las propiedades de las sucesiones.
- Dificultad a la hora de relacionar la completitud de $\mathbb{R}$ (Principio de encaje de Cantor), el teorema de Bolzano-Weierestrass y el criterio de Cauchy, entre otros.
- Confusión entre monotonía y convergencia.
- No distinción entre sucesiones convergentes y no convergentes, monótonas y no monótonas, con llegada en distintos conjuntos numéricos $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

15. Se dispone de un espacio cuadrado de lado $1u$ para construir una escalera, tal y como se muestra en la siguiente figura:



Cuando el número de escalones tiende a ∞, la longitud de la línea quebrada que recorre la escalera es:

a) 1
b) 2
c) No se puede calcular
d) $\sqrt{2}$

Objetivo:

Localizar posibles obstáculos de sistematización relacionados con el concepto de límite de una sucesión expresada gráficamente.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	15			
ÍTEM	a	b	c	d
CORRECTAS(%)	93,4	27,6	88,2	32,9

La mayoría de los alumnos no relaciona la longitud de la escalera con el desplazamiento horizontal o vertical. Casi las tres cuartas partes de los alumnos no reconoce la respuesta correcta, pero son aún más llamativos los porcentajes de estudiantes que afirman que no se puede calcular o que identifican la longitud del límite de la escalera con la longitud de la diagonal del cuadrado. Unos y otros no se dan cuenta que se trata de una sucesión constante.

- Falta de sistematización en las conversiones de las representaciones geométricas, numérica, analítica o topológica relacionadas con el concepto de límite.
- Dificultad en la comprensión del concepto de límite de una sucesión de forma generalizada.
- Confusión en la definición conceptual de función integrable Riemann.

16.

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow$$

a) $\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists \delta \geq 0$, tal que $|x - a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$
b) Fijada una aproximación k de l, existe un entorno reducido de a tal que todas sus imágenes están más cerca de l que k.
c) $f(a) = l$
d) x se acerca a a pero $x \neq a$ y, $f(x)$ se acerca a l pero $f(x) \neq l$.

Objetivo:

Determinar la existencia de obstáculos relacionados con la definición general del concepto de límite de una función y discriminar concepciones erróneas de forma sistemática.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	16			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	26,3	53,9	77,6	67,1

El mayor porcentaje de alumnos que fracasa tiene lugar en el apartado a) que es en el que aplica erróneamente la definición métrica que ellos han estudiado, el doble que los que fracasan al considerar la definición como aproximación óptima. Uno de cada cuatro alumnos cree que el límite debe ser una imagen de la función y para uno de cada tres alumnos es suficiente (se conforman) la idea de (la conceptualización intuitiva) de la aproximación.

En resumen, los obstáculos que se presentan están asociados a:

- Dificultad en la comprensión del concepto de límite.
- Dificultad en el manejo algebraico de expresiones que son inherentes al uso de desigualdades relacionadas con el $\varepsilon - \delta$.
- Falta de conocimiento y manejo de las concepciones numérica, analítica o topológica relacionadas con el concepto de límite.
- Creencia de que el límite debe ser imagen de la función.
- Obstáculo asociado a la sistematización de la definición de límite de una función en un punto.

17. Las siguientes series son convergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n},\ k > 1$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} k$ con $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$

Objetivo:

Descubrir obstáculos relacionados con la sistematización al aplicar criterios de convergencia y sumablidad de una serie.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	17			
ÍTEM	a	b	c	d
CORRECTAS(%)	59,2	80,3	53,9	77,6

La mayoría de los estudiantes señalan la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n},\ k > 1$, sin embargo, no son pocos a quienes les pasa desapercibido el hecho de que se trata de una serie geométrica de razón k mayor que 1, por tanto convergente. Más de la tercera parte de los estudiantes consideran la serie armónica es convergente y casi la mitad que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ diverge. Más de una quinta parte de los estudiantes señalaron la serie constante del último ítem como convergente.

Con lo anterior podemos determinar que los obstáculos asociados son:

- Confusión entre la convergencia del término general con la serie.
- Confusión entre las propiedades de las series y las sucesiones.
- Asignación al subíndice n la variación infinita cuando no es tal, o finita cuando es infinita, Aunque n y k pueden no ser pertenecientes al mismo cuerpo numérico ($\mathbb{R}$ frente a $\mathbb{N}$).
- Asignación del carácter de convergencia de forma directa en series sencillas para las que no es necesario aplicar criterios estándar.

18. Sea G el cardinal del conjunto de granos de arena de la tierra, $\aleph_0$ el cardinal de $\mathbb{N}$, C el cardinal del conjunto de puntos de un cuadrado de lado unidad y H el cardinal del intervalo $[0,1]$, entonces:

a) $G = \aleph_0 < C = H$
b) $G < \aleph_0 < H < C$
c) $H < C < \aleph_0 < C$
d) $G < \aleph_0 < C = H$

Objetivo:

Analizar identificaciones, discriminaciones y sistematizaciones entre conjuntos numerables y los que no lo son.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	18			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	82,9	65,8	80,3	51,3

Aunque en los ítems (a) y (b) la mayoría de los estudiantes señalan correctamente las relaciones de cardinalidad entre los conjuntos dados, más de la tercera parte considera que $H < C$. Y casi la mitad de los estudiantes, estima que alguna de las desigualdades $G < \aleph_0 < C = H$ no se satisface. Por lo tanto, los porcentajes de errores se pueden considerar altos.

En virtud de lo expuesto anteriormente, se precisan los siguientes obstáculos:

- No distinción entre el infinito potencial y el actual.
- No distinción entre conjuntos infinitos y los que no lo son.
- Desconocimiento de la relación entre transfinitos $\aleph_0$ y C.
- Falta de sistematización entre la cardinalidad de conjuntos numerables y no numerables usuales.

19.

a) $\mathbb{Q}$ es numerable pero no denso en $\mathbb{R}$.
b) $\mathbb{R}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.
c) $\mathbb{I} \cup \mathbb{N}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.
d) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.

Objetivo:

Señalar dificultades relacionadas con la discriminación entre conjuntos densos y los que no lo son, y entre conjuntos numerables y no numerables.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	19			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	75,0	75,0	78,9	65,8

En general. Cerca de las tres cuartas partes de los estudiantes responden correctamente a los tres primeros ítems. Sin embargo, no es pequeño el porcentaje de aquellos que consideran, que $\mathbb{Q}$no es numerable o que $\mathbb{Q}$ no es denso en$\mathbb{R}$. También una cuarta parte de los alumnos suponen que $\mathbb{R}$ no es numerable o que no es denso en $\mathbb{R}$ y más de un tercio creen que $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ no es numerable o que no es denso en $\mathbb{R}$.

En consecuencia, los obstáculos que se manifiestan son:

- No distinción entre las propiedades de numerabilidad y densidad de conjuntos.

20. Dado un segmento de longitud $1u$. Si realizamos el proceso indicado en la figura dada, un número infinito de veces y denotamos por B el conjunto de segmentos borrados a lo largo de todo el proceso y por $\overline{B}$ el conjunto de los que no se borran:

a) $Card(\overline{B}) = 0$
b) En el paso n, la suma de las longitudes de los segmentos borrados es $\frac{1}{3^n}$.
c) $Card(\overline{B}) = Card(B)$
d) $Card(\overline{B}) < Card(B)$

Objetivo:

Descubrir la existencia de obstáculos que tengan que ver con la caracterización de conjuntos con variaciones infinitas en un proceso de generalización y sistematización.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	20			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	85,5	56,6	47,4	65,8

La mayoría de los estudiantes han determinado que el conjunto de segmentos que no borrados, es un conjunto no vacío, sin embargo, no son pocos los que consideran que sí lo es. Poco menos de la mitad afirman que en el paso n, la suma de las longitudes de los segmentos borradoses $\frac{1}{3^n}$ y más de la tercera parte creen que

$Card(\overline{B}) < Card(B)$ y también más de la mitad de los alumnos creen que $Card(\overline{B}) \neq Card(B)$.

Podemos identificar los siguientes obstáculos asociados:

- Dificultad para plasmar algebraicamente conjuntos con variaciones infinitas.
- Obstáculo asociado a la generalización de un proceso infinito.
- Dificultad para manejar los restos. Por ejemplo:$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.
- Dificultad en la comprensión de la relación de inclusión y cardinalidad de conjuntos infinitos.

21. Sean $A = \{x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \in \mathbb{I}\ , 0 \leq x < 36\}$
   a) A está formado por todos los pares positivosy $C = [0,36) \cap \mathbb{I}$.
   b) Aestá formado por todos los números pares y $C = [0,36) \cup \mathbb{I}$.
   c) B está formado por todos los números impares y $C = [0,36) \cap \mathbb{I}$.
   d) A está formado por todos los números pares y $C = (0,36) \cap \mathbb{I}$.

Objetivo:

Detectar dificultades relacionadas con la identificación e interpretación verbal o simbólicasistemática los elementos de un conjunto.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	21			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	73,7	69.7	78,9	50,0

Aunque en los ítems (a) y (c) la mayoría de los estudiantes respondieron correctamente, no son pocos los que afirman que A está formado por todos los pares positivos, y que $0 \in \mathbb{I}$. Tampoco es exiguo el número de alumnos que consideran que $B = 2\mathbb{Z} + 1$y que $0 \in \mathbb{I}$. Por otra parte, más de la tercera parte de los alumnos piensa que $C = [0,36) \cup \mathbb{I}$ y, exactamente la mitad de los estudiantes opina que $A \neq 2\mathbb{Z}$ o que $C \neq (0,36) \cap \mathbb{I}$.

De aquí, se entiende que los obstáculos que revela esta pregunta son:

- Desconocimiento de la topología real.
- Caracterización errónea de los números pares e impares.
- Intersecciones y uniones de abiertos, cerrados, compactos, y caracterización de irracionales.
- Obstáculos asociados a la interpretación de conjuntos numéricos de números reales.

22. Imagina que tienes un conjunto infinito de pelotas de tenis numeradas $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ y un barril con capacidad ilimitada. Estás a punto de iniciar un experimento. El experimento terminará exactamente en un minuto, ni más, ni menos. El experimento empieza tomando las 10 primeras pelotas, luego se introducen en el barril y se saca la número 1 en 30 segundos. En la mitad del tiempo anterior, se colocan las pelotas 11 a la 20 dentro del barril y se saca la pelota número 2. Siguiendo, en la mitad del tiempo resultante (y trabajando cada vez más rápido), se colocan las pelotas 21 al 30 en el barril, y se saca la pelota 3. Se continúa con este proceso indefinidamente siguiendo el mismo patrón. Después de 60 segundos, al final del experimento, ¿Cuántas pelotas de tenis quedan dentro del barril?
    a) $9 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = 9 \cdot 30 \cdot 1$ $= 270$ pelotas
    b) No se puede saber
    c) Infinitas pelotas
    d) $60 \cdot 10 - 60 = 60 \cdot 9 = 540$ pelotas

Objetivo:

Encontrar obstáculos relacionados con la aplicación de la aritmética de límites de sucesiones en un proceso infinito de generalización.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	22			
ÍTEM	a	b	c	d
FALSO(%)	68,4	65,8	50,0	77,6
VERDADERO(%)	31,6	34,2	50,0	22,4

Ciertamente, este problema es bastante complicado y, aunque parezca paradójico, el resultado del proceso infinito depende de si las bolas están numeradas o no, y si lo están, de cómo se enumeran. No obstante, en la redacción se han considerado bolas numeradas para evitar esta discusión y se enuncia la forma de enumerarlas.

Aunque la mayoría de los estudiantes afirma que en el barril no quedan 540 pelotas, casi la cuarta parte consideran que si. Más de una tercera parte señala también un número definido de pelotas, 270 y otro tanto que no se puede determinar tal cantidad. Exactamente la mitad considera que quedan en el barril infinitas pelotas.

De lo anterior, podemos evidenciar los siguientes obstáculos relacionados:

- Dificultad para interpretar, representar y manipular con solvencia el simbolismo algebraico de las sucesiones.
- Confusión de las propiedades de las sucesiones.
- Dificultad para plasmar algebraicamente conjuntos con variaciones infinitas (obstáculo asociado a la generalización).

23. La afirmación: Si *"$f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces $f(x)$ está acotada en $[a,b]$"*, significa que:

    a) Es condición necesaria que f sea continua en $[a,b]$ para que sea acotada en $[a,b]$.
    b) Es condición suficiente que f sea continua en $[a,b]$ para que sea acotada en $[a,b]$.
    c) Si f está acotada, f es continua en $[0,3]$.
    d) Si f no es continua, f no es acotada en $[0,3]$.

Objetivo:

Averiguar si los estudiantes comprenden que en un compacto la acotación de una función es una condición necesaria para que esa función sea continúa y lo que significa condición necesaria y condición suficiente.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	23			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	61,8	72,4	80,3	76,3

A la vista de las respuestas se puede afirmar que los alumnos comprenden mejor el enunciado del apartado c) que tiene forma de "si, entonces" y el peor el que está expresado mediante la expresión "es condición necesaria", seguido en dificultad por el que utiliza "es condición suficiente". Por otra parte, se escriba de una manera u otra la significación del teorema, aparecen importantes porcentajes de estudiantes que no la interpretan correctamente, especialmente en el primer caso.

De la discusión anterior se puede afirmar que los alumnos tienen los siguientes obstáculos:

- Interpretación incorrecta del enunciado del teorema cuando se utilizan las expresiones "es condición necesaria" y es "condición suficiente", ésta en menor grado.
- Confusión entre las propiedades de continuidad y acotación en un compacto, para algunos, acotación implica continuidad, para otros continuidad no implica acotación y para otros no continuidad implica no acotación.

24. Los siguientes conjuntos son particiones de $[0,1]$:
   a) $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$
   b) $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$
   c) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$
   d) $\{0,1\} \cup \left\{\frac{e}{10^6 - n}\right\}_{n=1,2,3,\dots,1000}$

Objetivo:

Detectar obstáculos relacionados con la discriminación entre particiones y conjuntos que no lo son y también con la sistematización de sus representaciones numéricas y algebraicas.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	24			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	77,6	34,2	43,4	46,1

La mayor parte de los estudiantes han identificado al conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ como una partición del intervalo $[0,1]$, por el contrario, una significativa minoría (casi una cuarta parte) no lo hizo. Una gran mayoría sostuvo erróneamente que $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ era una partición de dicho intervalo, y otro tanto que $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ también lo era. Unos y otros no se percatan del carácter de finitud. Asimismo, más de la mitad de los estudiantes creen que $\{0,1\} \cup \left\{\frac{e}{10^6-n}\right\}_{n=1,2,3,\ldots,1000}$ no es una partición de $[0,1]$.

Los obstáculos que se relacionan son:

- Aceptación de un conjunto infinito como una partición.
- Confusión entre condiciones necesarias y condiciones suficientes para que un conjunto sea una partición.
- Dificultad para decidir si un conjunto numérico es una partición cuando hay que obtener dicho conjunto mediante cálculos aritméticos.
- Obstáculo de sistematización asociado a sus representaciones numéricas y algebraicas.

25.

a) Todas las series aritméticas no nulas son divergentes.

b) Todas las series geométricas son convergentes.

c) Si $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

d) Si $a_n > b_n$ y $\sum a_n$ es convergente, entonces $\sum |b_n|$ es convergente.

Objetivo:

Identificar obstáculos vinculados con la aplicación sistemática de criterios de convergencia, criterios de sumabilidad y el conocimiento de las propiedades de las series.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	25			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	42,1	65,8	55,3	46,1

Más de la tercera parte de los estudiantes consideran que todas las series geométricas son convergentes y casi la mitad piensa que si el término general tiende a cero, la serie converge, igualmente, más de la mitad de ellos afirman que existen series aritméticas no nulas que convergen. De igual forma, más de la mitad no toma en cuenta que con las condiciones dadas, $\sum|b_n|$ no converge.

Se ponen de manifiesto los siguientes obstáculos:

- Confusión entre la convergencia del término general con el de la serie.
- Obstáculo de sistematización asociado a la convergencia de las series.
- Confusión entre las propiedades aritméticas de las series y las de las sucesiones.

26. Considerando $K = \left\{a_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Si H es el conjunto de puntos interiores, F el conjunto de puntos frontera y A el de puntos de acumulación de K:

a) $H = K$ y $F = K$
b) $A = \emptyset$ y $F = K$
c) $H = \emptyset$ y $A = \{0\}$
d) $F = K \cup \{0\}$ y $A = \{0\}$

Objetivo:

Examinar posibles dificultades relacionadas con la identificación, discriminación y sistematización de subconjuntos notables asociados a $\mathbb{R}$.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	26			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	55,3	59,2	42,1	43,4

Casi la mitad de los estudiantes considera que todo punto de K es a la vez punto interior y punto frontera. Por lo menos las dos terceras partes creen que K no tiene puntos de acumulación. Más de la mitad también cree que el interior de K no es vacío o que 0 no es un punto de acumulación de K. Del mismo modo hay más de la mitad que opinan que $F \neq K \bigcup\{0\}$ o que 0 no es punto de acumulación de K.

Para precisar, los obstáculos identificados son:

- Desconocimiento de la topología real.
- Dificultad en la identificación de los conjuntos frontera y acumulación de un conjunto numerable de números reales.
- Obstáculos asociados a la discriminación y sistematización de puntos de acumulación y frontera.

27. Los siguientes conjuntos son particiones del intervalo $[a, b]$, con a y b irracionales:
    a) $\mathbb{Q} \bigcap [a, b]$
    b) $\mathbb{I} \bigcap [a, b]$
    c) $\{x: x = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, con$n \in \mathbb{N}\}$ y $k = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
    d) $\{x: x = k \cdot \frac{b-a}{10^n}$, con$n$ $\mathbb{N}\}$ y $k = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Objetivo:

Averiguar la existencia de obstáculos al discriminar entre particiones y conjuntos que no lo son.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	27			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	59,2	46,1	32,9	60,5

Más de las dos terceras partes del total de estudiantes creen que el conjunto $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ es una partición de $[a, b]$ y más de la mitad acepta que el conjunto $\mathbb{I} \cap [a, b]$ también lo es. En el caso del ítem (c) la mayoría infiere que a pertenece al conjunto dado, al igual que lo hace más de las dos terceras partes de estudiantes en el ítem (c).

- Consideración de que un conjunto infinito puede ser una partición.
- Confusión entre condiciones necesarias y condiciones suficientes para que un conjunto sea una partición.
- Determinación de conjuntos de números reales mediante operaciones aritméticas.

28. Las siguientes sumas son series:
   a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$
   b) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$
   c) $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p}$
   d) $\sum_{p=1}^{n} k$

Objetivo:

Averiguar la aparición de obstáculos relacionados con la identificación de las formas generales de representación de series numéricas.

Porcentaje de respuestas correctas:

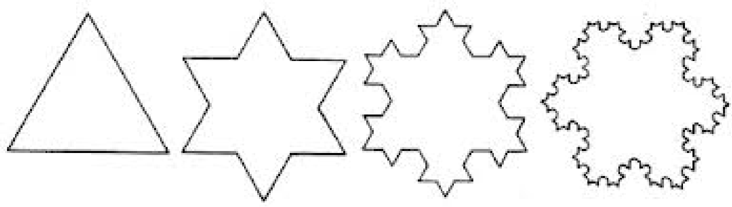
PREGUNTA	28			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	50,0	75,0	84,2	68,4

La gran mayoría de estudiantes ha identificado la serie geométrica $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p}$. También una mayoría identificó la suma del ítem (b) como una serie, sin embargo, no son pocos aquellos que piensan que la suma $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$ no es una serie. La mitad de los estudiantes consideran como una serie a la suma finita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, y, más de un tercio de los alumnos consideran que $\sum_{p=1}^{n} k$ también lo es.

Se presentan los siguientes obstáculos:

- Creencia errónea de que también son series infinitas sumas finitas como $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^n}$. O bien la suma de n sumandos iguales que, en realidad es un proceso finito.
- Obstáculo asociado a la forma general de representaciones algebraicas de series.

29. Sabiendo que el perímetro del triángulo inicial de la figura dada es $3u$. La longitud del perímetro de la curva que se genera después de infinitas iteraciones, es:



a) $3 + \frac{9}{3}$
b) $3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$
c) $\lim_{n\to\infty} \left(3 + n \cdot \frac{1}{3}\right)$
d) $\lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

Objetivo:

Detectar posibles obstáculos relacionados con la representación gráfica de series numéricas, sistematización y generalización.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	29			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	76,3	52,6	56,6	27,6

La mayoría de estudiantes señala acertadamente que la longitud de la curva de Koch no es $3+\frac{9}{3}$; sin embargo pero casi la cuarta parte declara que sí lo es. También casi la mitad de estudiantes piensa que su valor está dado por la suma $\left(3+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{3p}\right)$. Igualmente, algo menos de la mitad de los estudiantes opina que la longitud está dada por el $\lim_{n\to\infty}\left(3+n\cdot\frac{1}{3}\right)$. Menos de la tercera parte de los estudiantes señalan que la longitud de la curva está dada por el $\lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

Los obstáculos que se presentan en este caso son:

- Confundir las áreas gráficas con dibujos exentos de significación.
- Dificultad para manipular con solvencia series representadas gráficamente.
- Dificultad para plasmar algebraicamente conjuntos con variaciones infinitas.
- Obstáculo asociado a la generalización y sistematización asociadas a la conversión de representaciones gráficas a numéricas y algebraicas.

30.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$ es convergente porque $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k^n}=0$, para todo$k\neq 0$.

b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, entonces para algún $n_0\in\mathbb{N}$, $\sum_{k>n_0}^{\infty} a_k$ está acotada.

c) Si $0>\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n>0$, entonces para algún $k\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=k}^{\infty} b_n>\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

d) Se puede hallar la suma de todas las series convergentes.

Objetivo:

Descubrir obstáculos relacionados con las propiedades de las series.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	30			
ÍTEM	a	b	c	d
CORRECTAS(%)	85,5	34,2	23,7	57,9

La gran mayoría de los estudiantes señalan que la serie no necesariamente converge cuando su término general tiende a cero. La mayoría igualmente, en el caso del ítem (c) señala que es posible encontrar por lo menos un valor de k que satisface tal condición, aunque casi una cuarta parte afirma que no existe tal k. Del mismo modo, casi la mitad de estudiantes estima que se puede hallar la suma de todas las series convergentes y un número aún mayor, las dos terceras partes de los estudiantes piensan que si el término general de la serie tiende a cero, entonces existe un valor $n_0 \in \mathbb{N}$, a partir del cual la serie converge.

De este modo, los obstáculos que se evidencian son.

- Dificultad para manipular con solvencia series.
- Confusión entre la convergencia del término general con el de la serie.
- No distinción entre series convergentes y divergentes.
- Dificultad para aplicar criterios de sumabilidad y convergencia de series.

31. Sea f una función integrable en $[a,b]$. Si se consideran f y a fijas, sea $F(l) = \int_a^l f(x)dx$, con $a \leq l \leq b$:

a) $F(l)$ es un número.
b) $F(l)$ es una primitiva de $f(x)$.
c) $F(l) + k$ es una primitiva de $f(x)$.
d) $F(l)$ es la función cuya imagen es el área bajo la curva asociada a f sobre el intervalo $[a,b]$.

Objetivo:

Localizar obstáculos relacionados con la generalización y síntesis del concepto de integral definida como función del límite superior (integral indefinida):

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	31			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	38,2	46,1	46,1	47,4

Casi las dos terceras partes de los estudiantes no se percatan de que l es variable y sostienen que $F(l)$ es un número. Más de la mitad no la identifican como una función. Así mismo, también más de la mitad consideran que $F(l)$ no es una primitiva de $f(x)$ y un porcentaje similar, más de la mitad la asocian al área bajo la curva asociada a f sobre $[a, b]$ como si la función fuera positiva, lo que implica confusión entre área e integral definida.

Podemos entonces señalar como obstáculos asociados a la pregunta:

- Dificultad para identificar el extremo superior de la integral y la variable de integración, y posible intercambio de uno y otro.
- Considerar que los conceptos de área e integral definida son iguales.
- Confusión de la naturaleza de objetos matemáticos como variables, números reales o funciones.
- Interpretación errónea de la integral indefinida y de primitiva en general.

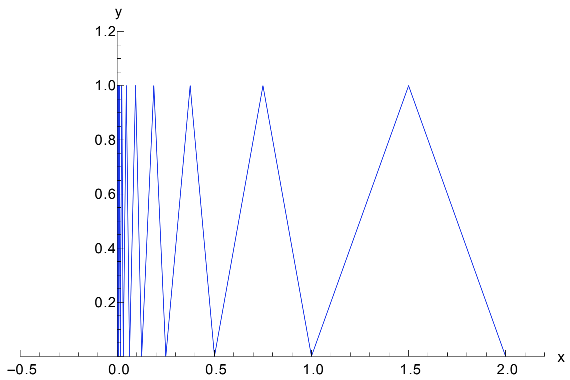
32. Las siguientes funciones son integrables sobre $[0,2]$. ($[\![x]\!]$ denota la parte entera de x).

a) $f(x) = \begin{cases} x, & si \quad 0 \leq x < 1 \\ x - 2\,, & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = x + [\![x]\!]$

c) $f(x) = \begin{cases} x + [\![x]\!], & si \quad x \text{es racional} \\ 0, & si \quad x \text{es irracional} \end{cases}$

d) f es la función dada en la figura dada.



Objetivo:

Situar obstáculos relacionados con la generalización de la suma inferior y la suma superior.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	32			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	69,7	56,6	68,4	40,8

La mayoría de los estudiantes entienden que la función a trozos del ítem (a) es integrable, sin embargo, casi la tercera parte piensa que no lo es. La función del ítem (b) es acotada en el intervalo dado, tiene además un número finito de discontinuidades y sin embargo, casi la mitad afirma que no es integrable. También la mayoría de los estudiantes señalan correctamente que la función del ítem (c) no es integrable, pero, aunque no profuso un número de estudiantes piensa que sí lo es. Así mismo, los dos tercios de los estudiantes piensan que la función del ítem (d) no es integrable.

En síntesis, los obstáculos concernientes a esta pregunta son:

- Dificultad para establecer las expresiones analíticas de las sumas inferiores y superiores.
- Inseguridad en la representación de los números sobre la recta real.

- Confusión en la definición conceptual de función integrable Riemann.
- Representación gráfica de función definida a trozos mediante una recurrencia infinita.

33. Una función f no es integrable en $[a, b]$ cuando:
   a) f no está acotada en $[a, b]$
   b) f no es continua en $[a, b]$
   c) No se puede hallar la primitiva de f
   d) El $\underline{ext}$ de las sumas superiores no coincide con el $\overline{ext}$ de las sumas inferiores.

Objetivo:

Examinar la presencia de obstáculos vinculados a la existencia de funciones no integrables Riemann (o no integrables Darboux) en un intervalo compacto $[a, b]$.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	33			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	46,1	48,7	60,5	73,7

La mayoría de los estudiantes señalan acertadamente que una función no es integrable cuando el $\underline{ext}$ de las sumas superiores no coincide con el $\overline{ext}$ de las sumasinferiores. Sin embargo no son pocos los que afirman lo contrario. Casi las dos terceras partes de los alumnos indican que una función no es integrable si no se le puede hallar la primitiva. También, cerca de la mitad asevera que la función no es integrable si no es continua en $[a, b]$, y un porcentaje similar cree que f no es integrable en $[a, b]$ si no está acotada en dicho intervalo.

De aquí, tenemos que los obstáculos afines son:

- Inseguridad en la representación de los números sobre la recta real.
- Creencia de que siempre se puede encontrar una primitiva de una función.

- Si las sumas superior e inferior se aproximan a un mismo valor tanto como sea necesario, no son obligatoriamente iguales las integrales inferior y superior.
- Para que una función sea integrable, ésta debe ser continua.

34.

a) $\int_{-1}^{1} |x|\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$

b) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$

c) Si $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & si \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}, \int_{1}^{2} f(x)\, dx = x\big|_{1}^{2} + (-x)\big|_{1}^{2} = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$

d) Si $f(x) = \begin{cases} 3, & si x \in (0,1) \\ 2, & si x \in (1,3), \\ -1, & si x \in (3,4) \end{cases} \quad \int_{0}^{4} f(x)\, dx = 3x + 2x - x\big|_{0}^{4} = 4x\big|_{0}^{4} = 16$

Objetivo:

Localizar dificultades/obstáculos de sistematización relacionados con la síntesis del Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	34			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	65,8	40,8	68,4	67,1

La mayoría de los estudiantes señalan que la integral de la función valor absoluto en $[-1,1]$ no es 0, sin embargo, para más de la tercera parte sí lo es. Igualmente, una tercera parte afirma que la integral de la función de Dirichlet en el mismo intervalo es 0. Y aunque la mayoría asienta que la integral función definida a trozos del ítem (d) no es 16, no son pocos los que aseguran que sí lo es. En relación con la fución $f(x) = \frac{1}{x^2}$, las dos terceras partes de los estudiantes aseveran que su integral es -2.

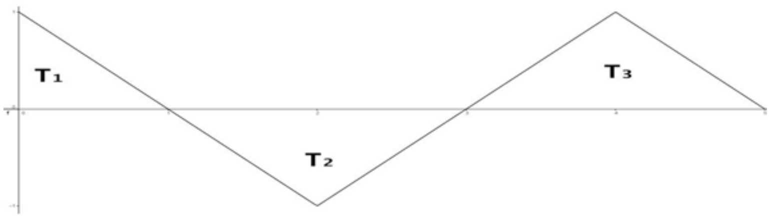
En consecuencia, los obstáculos inherentes que se han evidenciado son:

- El Teorema Fundamental del Cálculo Integral es la regla de Barrow y siempre es posible encontrar una primitiva de una función.
- El cálculo de áreas se reduce a aplicar la regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x) = F(x)[_a^b = F(b) - F(a)$$

- Dificultad para identificar el extremo superior de la integral y la variable de integración, y posible intercambio de uno y otro.
- Dificultad para aplicar el algoritmo correspondiente para generalizar y sintetizar el área comprendida entre la gráfica de una función (positiva, negativa, que cambia de signo, definida a trozos), el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.
- Identificación de la integral con área.

35. La función $f(x) = \begin{cases} -x+1, & si \quad 0 < x < 2 \\ x-3, & si \quad 2 < x < 4 \\ -x+5 & si \quad 4 < x < 5 \end{cases}$, está representada en la figura dada y su integral es:



a) La suma de las áreas de los triángulos T_1 , T_2 y T_3 , es decir

$$A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3}$$

b) $A_{T_1} + A_{T_3}$ porque T_1 y T_3 están por encima del eje OX

c) $A_{T_1} + A_{T_3} - A_{T_2}$

d) $\int_0^2 (-x+1)\,dx + \int_2^4 (x-3)\,dx + \int_4^5 (-x+5)\,dx$

Objetivo:

Indagar acerca de los obstáculos relacionados con la discriminación entre los conceptos de área e integral definida, y sistematización de ambas.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	35			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	55,3	82,9	60,5	59,2

Casi la mitad de los estudiantes considera que la integral de la función dada es la suma de las áreas de los triángulos T_1, T_2, T_3. Aunque la mayoría de los estudiantes señala que la integral de la función no es la suma de las áreas que están por encima de eje OX, no son pocos los que infieren que sí lo es. Las dos terceras partes del total de los estudiantes creen que la integral no coincide con la suma de las áreas de los triángulos, pero buena parte de los que contestan bien el apartado (b) yerran en los otros apartados que versan sobre lo mismo, pero con algún condicionante. Igualmente, más de las dos terceras partes de los estudiantes concluye que la integral de la función a trozos f en el intervalo dado no coincide con la suma de las integrales de cada uno de los trozos de la función en el correspondiente intervalo de definición.

En suma, los obstáculos latentes son:

- Considerar que los conceptos de área e integral definida son iguales.
- Dificultad de sistematización para aplicar el algoritmo para calcular el área entre dos curvas.
- Particionar el intervalo de integración para considerar el criterio de definición en cada subintervalo de definición.

36. Las siguientes son sumas de Riemann:
   a) $\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ con $M_i = \overline{ext}$ de f en (x_{i-1}, x_i)
   b) $\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ con $m_i = \underline{ext}$ de f en (x_{i-1}, x_i)
   c) $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$ con $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$
   d) $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$ con $\alpha_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$

Objetivo:

Distinguir obstáculos/dificultades inherentes a la generalización y sistematización de las sumas de Riemann y de Darboux.

Porcentaje de respuestas correctas:

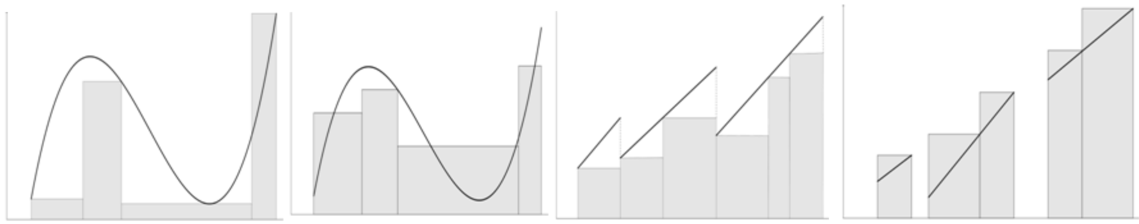
PREGUNTA	36			
ÍTEM	a	b	c	d
CORRECTA(%)	73,7	69,7	26,3	32,9

Aunque la mayoría de los estudiantes advierten que las que las sumas de los dos primeros literales no son sumas de Riemann, en los dos casos, casi la cuarta parte afirma que sí lo son. La mayoría de los estudiantes piensa que cuando los puntos intermedios de la suma son los puntos medios de cada subintervalo, no se trata de una integral de Riemann (ítem (d)). Más de los dos tercios de los estudiantes manifiestan no estar de acuerdo de que se trate de una suma de Riemann cuando el punto intermedio de la suma α_i es un punto del intervalo(x_{i-1}, x_i).

De lo anterior se tiene que los obstáculos que se destacan en esta pregunta son:

- Dificultad para establecer las expresiones analíticas de las sumas inferiores y superiores.
- El desconocimiento de puntos intermedios genera ambigüedad.
- El valor que toma la función en los puntos intermedios es impreciso.
- Peor aceptación de la suma de Riemann, para puntos intermedios arbitrarios que para puntos medios de los subintervalos.
- La no comprensión del axioma del extremo superior.

37. De acuerdo con las áreas de los rectángulos representadas en figura dada.



(a) (b) (c) (d)

a) La figura 8(a) representa sumas de Darboux asociadas a la integral definida.

b) La figura 8(b) representa sumas de Darboux asociadas a la integral definida.

c) La figura 8(c) representa sumas de Darboux asociadas a la integral definida.

d) La figura 8(d) representa sumas de Darboux asociadas a la integral definida.

Objetivo:

Reconocer dificultades/obstáculos vinculados a la síntesis de la caracterización de las sumas inferior y superior de Darboux.

Porcentaje de respuestas correctas:

PREGUNTA	37			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	52,6	55,3	48,7	36

En general, más de la mitad de los estudiantes no discrimina entre sumas que son de Darboux asociadas a la integral definida y las que no lo son, pero cometen más errores cuando no son sumas que cuando lo son.

El obstáculo vinculante es por tanto:

- Imprecisión o errores en la determinación gráfica de las sumas inferiores y superiores.

6.2 Evaluación de las respuestas desde la perspectiva de los actos de comprensión de Sierpińska.

Como ya se mencionó anteriormente, según Sierpińska (1994) la comprensión y los obstáculos son dos caras de la misma moneda, por tanto, de acuerdo con los actos de comprensión asociados a cada uno de los obstáculos que se relacionaron en las tablas del capítulo anterior, en las distintas categorías (identificación, discriminación, generalización, sistematización) al conocimiento matemático que poseen los estudiantes de los conceptos que son objeto de esta investigación. Describiremos las respuestas que dieron los estudiantes al cuestionario en términos de estos actos de comprensión. Ya en el párrafo 6.1, se hizo un análisis descriptivo de los obstáculos asociados, ahora los vincularemos a los actos de comprensión asociados a cada uno de ellos.

Aunque haremos mención de algunos casos específicos a modo de ejemplo, los actos que se señalan derivan de diversos obstáculos detectados en las distintas preguntas, aunque no se mencionen explícitamente todas las aquellas cuyas respuestas dieron lugar a la relación de actos de comprensión que se da a continuación.

Sucesiones

Aunque en la pregunta (1) el valor de la variable n está bien definido, se hizo latente el hecho de que no hubiese una identificación de n como natural indeterminado fijado o como variable, a pesar de que este tipo de expresiones son de uso común en diversidad de problemas que los estudiantes enfrentan en etapas escolares previas (a modo de ejemplo: ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de k litros por minuto?, para el cual la respuesta se da en términos de variables de las cuales se sabe exactamente lo que representan, en este caso k y r (siendo r el radio del cilindro)).

Algunos estudiantes no discriminaron entre el término general de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ y la propia sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. También en la pregunta (4) en el cual los ítems atienden a diferentes dificultades u obstáculos en la identificación de sucesiones de un modo numérico y algebraico se ve que para los estudiantes la identificación del objeto $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ como una sucesión no fue evidente. En las respuestas de la pregunta (6) se observa que no se relaciona el término general $a_n = \frac{1}{8^n}$ del valor del área de la n −ésima región sombreada al término general de la sucesión de sumas $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{8^n}$. También la escasa comprensión en la relación de implicación de la convergencia de las subsucesiones se plasmó en las respuestas de la pregunta (5). La síntesis tanto en la aplicación de la aritmética de límites de sucesiones como en el manejo de los criterios de convergencia son actos que se ven comprometidos en las respuestas (b) y (c) de la pregunta (14).

Por tanto, los actos de comprensión asociados a las sucesiones son:

Identificación:

- Identifica las formas de presentación sucesiones numéricas: gráfica, numérica y algebraica.
- Identifica una sucesión.

Discriminación:

- Discrimina entre el término general de una sucesión y la sucesión a_n y los elementos de la sucesión: $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$
- Discrimina entre los distintos tipos de sucesiones.

Generalización:

- Relaciona una sucesión con subsucesiones suyas.
- Pasa de la representación del término general a la sucesión.

Sistematización:

- Aplica la aritmética de límites de sucesiones.
- Maneja los criterios de convergencia de sucesiones y las subsucesiones.

Monotonía

Los actos de comprensión relacionados con la utilización del concepto se ha incluido en esta descripción por su carencia evidente en los resultados de la respuesta (5d) en la cual se refleja que no se sintetiza dicho concepto. Hay una significativa confusión entre monotonía y convergencia.

Discriminación:

- Discrimina entre las funciones (sucesiones) que son monótonas y las que no lo son.

Sistematización:

- Utiliza adecuadamente el concepto.

Variación infinita

La creencia de que el conjunto $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{n}\right\}$ es infinito, que $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ no es numerable o no es denso, no identificar el conjunto $\{x: x = 5\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ con $\mathbb{R}$ o pensar que el lado de un cuadrado tiene menos puntos que el propio cuadrado, dejan al descubierto los problemas inherentes a la apropiación de los actos de comprensión que se señalan a continuación.

Identificación:

- Identifica dominios y valores numéricos: $n \rightarrow a_n, n \rightarrow \sum_{1 \leq i \leq n} a_i, x \rightarrow f(x)$.

Discriminación:

- Discrimina entre conjuntos finitos e infinitos.
- Discrimina entre conjuntos numerables y no numerables.
- Discrimina entre conjuntos densos y no densos.

Generalización:

- Generaliza el concepto de conjunto infinito.

Sistematización:

- Es capaz de utilizar los criterios de caracterización de conjuntos infinitos.

Extremos

La presencia de estos actos de comprensión relacionados con variación funcional en los extremos de funciones reales de variable real se debe a la aparición de obstáculos vinculantes a las respuestas de los estudiantes, uno a resaltar por ejemplo, es la dificultad que tienen para distinguir el infinito potencial y el actual (Pregunta 18). Igualmente, aunque en la pregunta (11), la determinación o no de los extremos están asociados a la no existencia de la imagen en algunos puntos, y los extremos que aparecen son relativos pero no absolutos, el acto de comprender el propio concepto de extremo es fundamental en cualquiera de las situaciones, como lo es el de identificarlos en el conjunto E de la pregunta (12) y que se da en otra forma de representación.

Identificación:

- Identifica numérica y gráficamente extremos absolutos $(máx, mín)$, extremos relativos $(máx, mín)$, supremo e ínfimo $(sup, ínf)$.

Discriminación:

- Discrimina entre cota superior, supremo (sup), cota inferior e ínfimo $(ínf)$.

Generalización:

- Maneja conceptos de supremo e ínfimo, es decir, saber lo que es la menor cota superior y la mayor de las inferiores.

Sistematización:

Maneja los axiomas relacionados con el (sup), y el $(ínf)$.

Límites

La explicación de la comparecencia de estos actos de comprensión relacionados con el concepto de límite está más que justificada por los obstáculos asociados a las preguntas (13) y (16) y ratificados por los que se evidenciaron en la (29).

Por ejemplo, en las respuestas a la pregunta (13) se dan valores concretos (para épsilon fijado) con valores dependientes de épsilon. Sin embargo, aunque b y c son falsas y que no resultó sencillo identificar obstáculos (ya que puede haber alumnos que, por ejemplo, las marquen como falsas simplemente por su diferente apariencia, o por no encontrar el épsilon; no porque hayan comprobado que la relación entre épsilon y delta no es correcta) el acto de comprender el concepto de límite no se refleja al comprobar las otras respuestas. Las respuestas a la pregunta (16) son interesantes; hace mención a diferentes definiciones posibles (veraces o no) del concepto de límite de una función y deja en evidencia la ausencia del acto de comprensión ligado a la identificación del concepto.

Identificación:

- Identifica el concepto de límite de una función y de una sucesión, de “series de sucesiones”

Discriminación:

- Discrimina entre los conceptos de límite de una función, límite de una sucesión y límite de una serie.

Generalización:

- Es capaz de determinar si existe o no el límite de una función, serie o sucesión.

Sistematización:

- Aplica los teoremas de caracterización de límites de funciones, sucesiones y series.

Particiones

Estos actos de comprensión asociados a las particiones en las distintas categorías emergieron del vínculo con obstáculos detectados como los que se evidenciaron por ejemplo en la pregunta (9), unos de los cuales relaciona la finura de la partición con la contención. También los actos relacionados con la determinación de las condiciones necesarias y condiciones suficientes para que un conjunto sea una partición fueron evocados por los obstáculos localizados en la pregunta (24).

Identificación:

- Identifica e interpreta verbal o simbólicamente los elementos de un conjunto.
- Identifica la partición como un conjunto finito de puntos.

Discriminación:

- Distingue entre particiones y conjuntos que no lo son.
- Discrimina la finura de una partición.

Generalización:

- Construye de manera general particiones, sean equidistribuidas o no.

Sistematización:

- Sabe procesar algebraicamente las particiones.

Series

En los actos de comprensión relacionados con el concepto de serie infinita, es de destacar la presencia de aquellos que tienen que ver con series geométricas, tanto en su interpretación gráfica como en el manejo analítico y algebraico. La comprensión de la expresión más básica del manejo de restos no se mostró en las respuestas que se dieron por ejemplo en las preguntas (7) y (20) al igual que en el caso de la pregunta (25) en las que se consideran las series aritméticas y cuyo acto de comprensión se ve de manera análoga, comprometido. A partir de aquí, otros actos más genéricos entran en escena en las distintas preguntas relacionadas con las series infinitas, y, aunque no se detallan dichas preguntas, sí los actos vinculados.

Identificación:

- Identifica las formas de presentación de series numéricas: algebraica, gráfica y numérica.
- Identifica una serie infinita.

Discriminación:

- Discrimina entre los distintos tipos de series.
- Discrimina entre el término general de una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y una suma parcial $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

- Discrimina la convergencia de la necesidad de que el término general tienda a cero: $\sum \frac{1}{n} = \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$.

Generalización:

- Pasa de la sucesión gráfica del término general a la serie.
- Sabe be manejar los restos. Por ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Sistematización:

- Sabe aplicar los criterios de convergencia, y sumabilidad de una serie.
- Sabe aplicar las propiedades aritméticas de las series.

Integral definida

Los actos de comprensión relacionados con concepto de integral definida se presentan como resultado de su vínculo con los obstáculos localizados en el parágrafo anterior. En particular las respuestas a todos los ítems de la pregunta (31) llaman la atención en dos aspectos: uno de ellos la incidencia de error en las respuestas y el otro el tipo de conocimiento que se evalúa, conceptos básicos relacionados con la identificación de la integral definida.

Identificación:

- Identifica las sumas inferior y superior y discrimina entre ambas.
- Identifica la integral inferior como el extremo superior de las sumas inferiores (ídem integral superior) y discrimina entre integral inferior y superior.
- Identifica la función de Dirichlet y discrimina entre números racionales e irracionales.

Discriminación:

- Discrimina entre los conceptos área e integral definida.

Generalización:

- Generaliza la suma inferior y la suma superior.
- Generaliza el conjunto de puntos intermedios asociados a una partición.
- Generaliza y sintetiza el cálculo de áreas comprendidas entre la gráfica de una función (positiva, negativa, que cambia de signo, definida a trozos), el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.
- Generaliza el teorema del valor medio a cada uno de los subintervalos de la partición.
- Generaliza y sintetiza el área comprendida entre dos curvas y las rectas $x = a$ y $x = b$.
- Generaliza y sintetiza el concepto de integral como función del límite superior (integral indefinida): $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Sistematización:

- Sintetiza una función integrable Darboux en un intervalo compacto $[a, b]$.
- Sintetiza las sumas inferior y superior de Darboux y la suma de Riemann, es decir: $s(f, P) \leq R(f, P, T) \leq S(f, P)$.
- Sintetiza una función integrable Riemann en un intervalo compacto $[a, b]$.
- Sintetiza la tesis de que no siempre es posible encontrar una primitiva de una función integrable.

6.3 Análisis específico de algunos aspectos de interés

En este parágrafo se hace un análisis ligero de las respuestas recogidas enalgunas preguntas que han resultado ser de interés ya que han sido objeto de estudio en investigaciones previas.

Pregunta 15.

El problema de la pregunta (15) es una adaptación del propuesto inicialmente por Orton (1980) cuando investigaba el concepto de límite. Orton mostró a sus estudiantes la gráfica de la Figura 6.6 planteándoles las siguientes cuestiones:

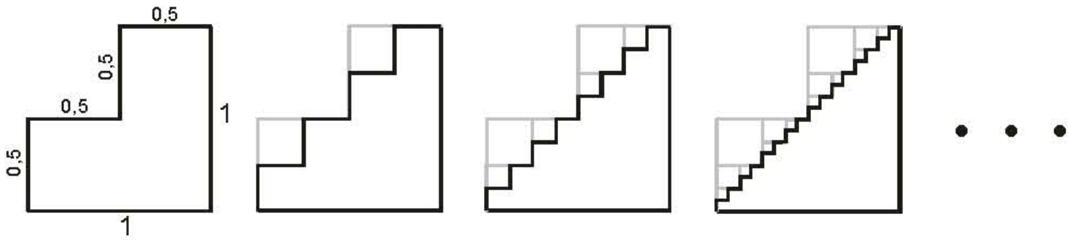


Figura 6.6 Versión original de la pregunta (15). (Orton, 1980)

a) ¿Si este procedimiento se repite indefinidamente, cuál es el resultado final?
b) ¿Cuántos peldaños extra deben situarse? ¿Cuántos pasos extras se darán hasta alcanzar “el resultado final”?
c) ¿Cuál es el área de la forma final en términos del “a”?. Es decir, ¿cuál es el área bajo la escalera final?

Si el estudiante ha dado respuesta al ítem (c) él preguntó además,

d) ¿Puede usar esa fórmula para obtener el “término final” o límite de la sucesión?

Para Orton, la expresión “término final” se encaminaba a ayudar a los estudiantes a comprender el significado de límite (Cornu, 1991, p.164), agrega Cornu, que utilizar esta terminología está muy lejos de ayudar a los estudiantes con la formalización del concepto de límite ya que el estudiante imagina una escalera con un número infinito de peldaños, y es precisamente la respuesta que evocaron en el estudio.

Adaptando este problema al concepto de infinito como objeto de su estudio Belmonte (2009) con estudiantes de primer año de universidad, haciendo alusión al mismo gráfico, ajustó sus cuestiones de la siguiente manera, :

Observa el proceso siguiente en el que la longitud de la escalera siempre mide 2. Esta podría ser una forma de "aproximarnos" a la hipotenusa del triángulo rectángulo equilátero de cateto 1; pero en tal caso surge una aparente contradicción: $\sqrt{2} = 2$. Intenta explicar dicha contradicción.

Tan sólo un 13,7% de los estudiantes fueron capaces de observar la estructura invariante de la línea quebrada.

En un intento por tener en cuenta las sugerencias de Cornu, nuestra adaptación:

Se dispone de un espacio cuadrado de lado $1u$ para construir una escalera, tal y como se muestra en laFigura 6.6.Cuando el número de escalones tiende a ∞, la longitud de la línea quebrada que recorre la escalera es:

e) 1
f) 2
g) No se puede calcular
h) $\sqrt{2}$

Para que el imaginario de los estudiantes estuviese más contextualizado en la complejidad inherente a la formalización de los conceptos subyacentes, utilizamos los términos línea quebrada y la tendencia al infinito, para dejar en un segundo plano el aspecto físico que puede limitar la imagen evocada.

Nuestro contexto es distinto al de Orton y Belmonte, la intención es observar la comprensión que tienen los estudiantes acerca de la posible iteración entre "operadores" como son los de límite y medida. Es decir, cómo relacionan la longitud de un límite y el límite de las longitudes.

En efecto, el que una sucesión de curvas $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ no implica que para las longitudes $\Lambda(\gamma_n)$ y $\Lambda(\gamma)$ se cumpla $\Lambda(\gamma_n) \longrightarrow \Lambda(\gamma)$.

PREGUNTA	15			
ÍTEM	a	b	c	d
CORRECTAS(%)	93,4	27,6	88,2	32,9

Nuestros resultados de hecho descubren que en este caso los estudiantes con previos conocimientos de distintos conceptos formales relacionados con los procesos infinitos siguen poniendo de manifiesto dificultades intrínsecas a las contradicciones internas de los modelos intuitivos, y en una proporción que no está muy alejada de la que ha señalado Belmonte. Desde la teoría de la integración, este obstáculo puede ser un germen de las dificultades que surgen con relación a las propiedades de la integral definida y la relación con los límites. Las condiciones para que los operadores "integral" y "límite" sean conmutables es lo que está detrás del problema en cuestión.

Pregunta 20.

Belmonte (2009) en relación a la Figura 6.7 enuncia las siguientes cuestiones:

Figura 6.7 Gráfica vinculada a la pregunta 20 del cuestionario.

Si realizamos el proceso indicado en la figura un número infinito de veces,

a) ¿Cuántos segmentos quedarán y cuál será su longitud?
b) ¿Cuántos segmentos se habrán borrado?
c) ¿Es comparable el conjunto de segmentos que quedan y el de segmentos que se han borrado?¿Cuál tendrá mayor número de segmentos?

Belmonte hace alusión a que la representación dada es la del conjunto de Cantor. En realidad para ello, se debe tener en cuenta si los extremos de los segmentos son borrados, o no. Por otra parte, desde nuestro punto de vista, las preguntas no tienen que ver con los posibles conjuntos de puntos que puedan quedar al ser borrados los segmentos (si los segmentos sin borrar contienen los extremos el conjunto de puntos que queda al final del proceso es el conjunto de Cantor, si los segmentos sin borrar no contienen los extremos el conjunto resultante es vacío) ya que se básicamente se debe contar el número de segmentos que se borran y su relación con los que no se borran.

Nuestra adaptación a las cuestiones planteadas por Belmonte, es la siguiente:

Dado un segmento de longitud $1u$. Si realizamos el proceso indicado en la figura dada, un número infinito de veces y denotamos por B el conjunto de segmentos borrados a lo largo de todo el proceso y por $\overline{B}$ el conjunto de los que no se borran:

a) $Card(\overline{B}) = 0$
b) En el paso n, la suma de las longitudes de los segmentos borrados es $\frac{1}{3^n}$.
c) $Card(\overline{B}) = Card(B)$
d) $Card(\overline{B}) < Card(B)$

Es de notar que basta hacer una sucesión de números que relacione el número de segmentos borrados y los que no, para posteriormente estructurar la progresión geométrica que numéricamente los representa.

Paso n	Total de segmentos borrados en el paso n	Segmentos borrados en el paso n	Segmentos no borrados en el paso n
1	1	1	2
2	$1+4$	2	4
3	$1+2+4$	4	8
⋮	⋮	⋮	⋮
$\boldsymbol{n}$	$1+2+4+8+\cdots+2^n$	2^n	2^{n+1}

Con lo cual, se tiene que $Card(\overline{B}) = Card(B)$ independientemente de que se trate o no del conjunto de Cantor, como bien afirma Belmonte, si k es el número de elementos que son borrados en el paso n, el número de no borrados es $2k$.

PREGUNTA	20			
ÍTEM	a	b	c	d
RESPUESTAS CORRECTAS (%)	85,5	56,6	47,4	65,8

Aunque la mayoría de estudiantes en nuestro caso señalan que el conjunto de segmentos no borrados es no vacío, uno de cada dos falla al determinar la cardinalidad de los conjuntos.

Al hacer la progresión geométrica para calcular la longitud que se pide, basta manejar los restos de la progresión que se genera, pero los alumnos cometen errores de generalización y de sistematización.

Pregunta 22.

Una pregunta de naturaleza paradójica y que ha sido estudiada extensivamente (Dubinsky et al., 2005; Mamolo & Zazkis, 2008; Roa-Fuentes & Oktaç, 2014; Weller et al., 2008), en distintas adaptaciones.

La versión que hemos planteado en este caso es la versión que tiene en cuenta el paso del tiempo:

Imagina que tienes un conjunto infinito de pelotas de tenis numeradas $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ y un barril con capacidad ilimitada. Estás a punto de iniciar un experimento. El experimento terminará exactamente en un minuto, ni más, ni menos. El experimento empieza tomando las 10 primeras pelotas, luego se introducen en el barril y se saca la número 1 en 30 segundos. En la mitad del tiempo anterior, se colocan las pelotas 11 a la 20 dentro del barril y se saca la pelota número 2. Siguiendo, en la mitad del tiempo resultante (y trabajando cada vez más rápido), se colocan las pelotas 21 al 30 en el barril, y se saca la pelota 3. Se continúa con este proceso indefinidamente siguiendo el mismo patrón. Después de 60 segundos, al final del experimento, ¿Cuántas pelotas de tenis quedan dentro del barril?

a) $9 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = 9 \cdot 30 \cdot 1$ = 270 pelotas
b) No se puede saber
c) Infinitas pelotas
d) $60 \cdot 10 - 60 = 60 \cdot 9 = 540$ pelotas

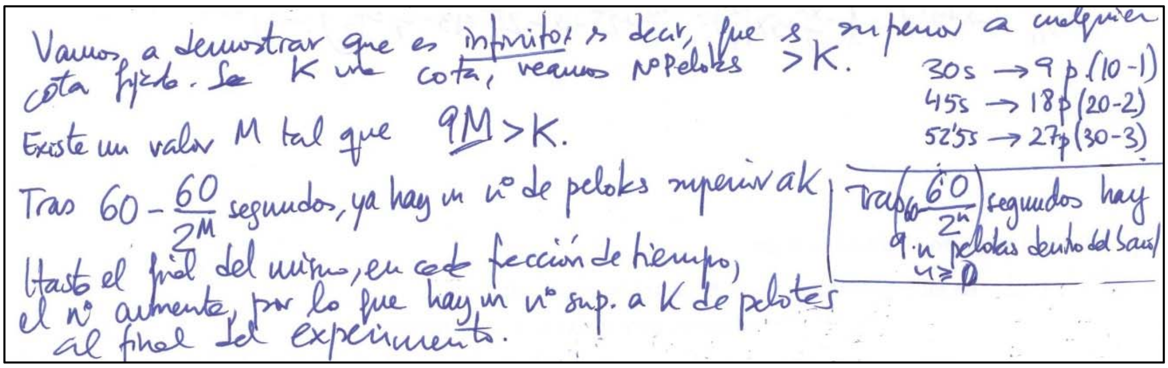
Tymoczko, Henle, & Henle (2000) dieron la solución a este problema con las condiciones del nuestro (la manera en que están enumeradas las pelotas y en que se colocan en el barril) que, en una versión original y más genérica se conoce como la paradoja de Ross–Littlewood.

El problema plantea la necesidad de construir dos procesos iterativos infinitos que se generan a partir de la coordinación de iteración a través del conjunto ℕ y el paso del tiempo (Roa-Fuentes & Oktaç, 2014). Los dos procesos resultantes se coordinan en un solo proceso que da lugar al proceso iterativo infinito, del cual se obtendrá el infinito como un objeto, o de lo que (Brown et al., 2008) denominan objeto trascendente.

PREGUNTA	22			
ÍTEM	a	b	c	d
FALSO(%)	68,4	65,8	50,0	77,6
VERDADERO(%)	31,6	34,2	50,0	22,4

Este problema de plano conduce a un tipo de indeterminación $\infty - \infty$, que surge de las infinitas bolas que se ponen en el barril y las infinitas que se sacan.

La respuesta dada por un estudiante (Figura 6.8) en donde demuestra que en el barril quedan infinitas pelotas (que es lo que en nuestro estudio afirma uno de cada dos estudiantes) es lo que Roa-Fuentes & Oktaç (2014) denominan la mirada potencial al problema.


Vamos a demostrar que es infinito, es decir, que es superior a cualquier cota fijada. Sea K una cota, veamos nº pelotas > K.
Existe un valor M tal que 9M > K.
Tras $60 - \frac{60}{2^M}$ segundos, ya hay un nº de pelotas superior a K.
Hasta el final del mismo, en cada fracción de tiempo, el nº aumenta, por lo que hay un nº sup. a K de pelotas al final del experimento.

30s → 9 p (10-1)
45s → 18 p (20-2)
52'5s → 27 p (30-3)
Tras $\frac{60}{2^n}$ segundos hay 9·n pelotas dentro del barril
$n \geq 0$

Figura 6.8 Solución a la pregunta 22 dada por un estudiante.

La otra mirada, la actual es aquella en la que se tiene en cuenta que si quedase alguna pelota en el barril, supongamos numerada con el valor n, por ejemplo, quedarían también todas las que estuviesen etiquetadas con números mayores que n. Pero esa $n-$ésima bola habría sido retirada cuando han transcurrido $\left(60 - \frac{60}{2^n}\right)$ segundos, como conclusión, no puede quedar ninguna. Prescindiendo de razonamientos cinemáticos y, en general físicos, desde un punto de vista matemático, no es problemático el hecho de que el número de bolas dentro del recipiente sea cada vez mayor y al final termine vacío "se puede asumir, sin miedo a perder el rigor filosófico, que las bolas cambian de posición por teletransportación"(Medina, 2009, p.100).

Mamolo & Zazkis (2008) en su estudio con 16 profesores de bachillerato matriculados en un programa de máster en educación matemática observaron que 13 de ellos respondieron que en el barril quedaban infinitas pelotas, es más, aclaraban que el número de pelotas debería ser un múltiplo de 9; una respuesta "típica" que ellas detallan "Hay $9x$ pelotas más en el barril que fuera del barril en todo momento. Al final de 60 segundos hay $9 \cdot \infty$ pelotas dentro e ∞ fuera."(p.176).

En nuestro caso, la mitad de los estudiantes afirmó que quedaban infinitas pelotas dentro del barril y una gran mayoría, por una parte se niega a que pueda ser 270 o 540 el número, y por otra que no se pueda calcular.

6.4 Análisis estadístico implicativo

El análisis implicativo se realizó en tres etapas y lo aplicamos a todas las problemas (excluidas la 15 y 20 y los ítems correspondiente) ya que queríamos identificar los diferentes momentos en el proceso de construcción del significado de integral definida mediante los procesos infinitos (sucesiones, monotonía, variaciones, extremos, limites, particiones) y, las tareas 15 y 20 tenían como objetivo aportar información sobre la concepción y tematización de procesos infinitos.

En la primera etapa del análisis cuantitativo se configuraron las variables. Apartir de los elementos de comprensión delas categorías de los distintos procesos infinitos estudiados y de la integral definida (Tablas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10)en cada ítem y el modo de representación usado en la redacción de los problemas 1 de 34 se conformaron 144 variables que simbolizamos mediante un código. Elcódigo estaba formado por dos grupos de alfanuméricos. El primero grupo de alfanumérico representa la pregunta y el apartado considerado. El segundo grupo alfanumérico estaba formado por un grupo de dos letras y un índice numérico, en donde la primera letra es una de la lista: $\{Q, M, V, E, L, P, I\}$ seguido por la letra O y de uníndice, i, $(i = 1,2,3,\dots,29)$, queindica el obstáculo que se pone de manifiesto en el ítem relacionado a sucesiones, monotonía, variaciones, extremos, límites, particiones, integrales, por ejemplo 32A-IO23hace referencia al obstáculo de la integral, la confusión en la definición conceptual de la función integrable Riemann correspondiente a la pregunta 32 apartado A. Las respuestas de los 76 estudiantes evaluadas de forma dicotómica, 1 y 0, fueron organizadas en una tabla de doble entrada, 144×76.

En la primera etapa realizaremos con la ayuda de CHIC el análisis de reducción por equivalencia, en la segunda haremos el análisis implicativo y en la tercera el análisis de similitud.

Clases de equivalencia

La interpretación de un conjunto complejo de datos siempre es una tarea muy compleja. El reto consiste en conseguir la máxima información posible sobre las variables del estudio. Existen varias técnicas y métodos para lograr la reducción del número de variables. Cuando un experto debe tomar una decisión muchas veces se confronta con un número grande de reglas que son difíciles de analizar. En el caso de las bases de datos grandes muchas de las variables se pueden considerar equivalentes dependiendo del problema.

La noción de equivalencia es relacionada a cada problema por aparte y trata de detectar los procesos fuertemente dependientes de los parámetros. Por ejemplo, los datos nos permitirán concluir si existe o no equivalencia entre ciertas variables. La presencia de un ruido importante tiene un fuerte impacto para el descubrimiento de las relaciones. El número de variables y el tamaño de la base de datos son también otras razones de peso. Otro aspecto de tener en cuenta es la sensibilidad del algoritmo de elección de las clases de equivalencia, muchas veces los investigadores desean interactuar con las herramientas ya existentes con tal de obtener unos resultados mejores. A la hora de usar un método de reducción por equivalencia ha de tener en cuenta todos estos parámetros arriba mencionados.

En el contexto de la estadística implicativa definimos el método necesario para detectar las variables equivalentes. Dos variables se consideran equivalentes si solo si $A \;=>\; B$ y $B \;=> A$. Por lo cual, basándonos en la definición lógica de la equivalencia, la equivalencia de dos variables se define mediante su índice $Q(A,B)$ de la siguiente manera:

$$Q(A,B) = \sqrt{Rel(A => B) * Rel(B => A).}$$

Usando esta fórmula se obtiene un subconjunto del conjunto inicial de variable con un umbral de equivalencia preestablecido antemano. Una vez obtenidas las clases de equivalencia una variable será seleccionada para representar cada clase, esa variable se llamará variable líder (Couturier, Gras, & Guillet, 2004; Régis Gras, Guillete, Gras, & Philippe, 2002). La elección de la variable líder se puede realizar automáticamente o puede ser elegida por un experto según un criterio de elección. El método implementado por CHIC consiste en definir las distancias entre los elementos de una clase de variables y definir como variable líder la variable que minimiza las distancias a las demás variables dentro de la misma clase. Se observa que el líder de una clase con solo dos elementos no puede ser determinado dado que la distancia es la misma. En consecuencia, en esos casos, se escoge como variable líder, la variable más relevante para el estudio. En conclusión, la variables líder tiene efectivamente el rol de líder, en el sentido que es el que mejor representa su propia clase. Además, queremos destacar que la variable líder no es una nueva variable, sino una de las ya existentes.

Nuestro cuestionario ha generado una matriz de 144×76. Un elemento de la matriz contiene 1 (0 respectivamente) si el alumno supera el obstáculo correspondiente al ítem o no. Las clases de equivalencia obtenida mediante el CHIC son ilustradas en la Tabla 6.3. y algunas serán detalladas a continuación.

El obstáculo 12C-EO6, el obstáculo es la variable líder para la clase del EO6: {12A - EO6, 12B - EO6, 12C - EO6, 12D - EO6}.

El obstáculo 37C-IO1 es el líder de la clase {26B - PO12, 34C - IO26, 37C - IO1} de los obstáculos correspondientes a las particiones PO12 y la integral definida IO1 y IO26.

El líder de la clase: {20B - QO6, 20C - VO8, 20D- VO8} es 20D - VO8, y es el líder de casi toda la pregunta 20.

La coimplicación de 31A-IO15 y 36C-IO12, es debida a la equivalencia de trabajo que a realizar para responder ambas preguntas. En los grupos de dos hemos escogido los más interesantes para el estudio.

Tabla 6.3Clases de equivalencia.

{5D-MO2, 14A-QO8, 13B-LO2, 4C-VO3, 26A-PO12, 30B-SO11, 13C-LO1}=5D-MO2
{12C-EO6, 12A-EO6,12D-EO6, 12B-EO6 }= 12C-EO6
{17A-SO7, 35D-IO14, 33C-IO26, 32B-IO13, 25C-SO11 }= 17A-SO7
{19A-VO5, 34A-MO1, 7A-SO6 }=7A-SO6
{37D-IO1, 18B-VO4, 37B-IO1, 37A-IO1 }= 18B-VO4
{9A-PO8, 3C-VO9, 3B-VO9 } = 3B-VO9
{11D-EO2, 4A-QO5} = 4A-QO5
{26B-PO12, 34C-IO26, 37C-IO1} = 37C-IO1
{28A-SO1, 32C-IO4} = 28A-SO1
{9C-PO7, 35B-IO7 } = 9C-PO7
{26C-PO12, 26D-PO12, 36D-IO11} = 36D-IO11
{25A-SO4, 25B-SO8, 27A-PO2} = 25A-SO4
{25D-SO10, 29B-VO8, 29D-SO9} = 29D-SO9
{20D-VO8, 20B-QO8, 20C-VO8} = 20B-QO8
{19D-VO5, 30D-SO11, 19C-VO5} = 19D-VO5
{13A-LO1, 35A-IO7, 14B-QO7, 10D-PO12 } = 14B-QO7
{21D-PO12, 17C-SO12} = 17C-SO12
{10A-PO12, 9D-PO7} = 10A-PO12
{32A-IO23, 24A-PO2 } = 24A-PO2
{35C-IO14, 29C-SO9, 27D-PO9} = 27D-PO9
{1A-QO1, 19B-VO5} = 1A-QO1
{16D-LO4, 16C-LO1} = 16C-LO1
{29A-VO8, 17D-SO3} = 17D-SO3
{31D-IO7, 31C-VO7} = 31D-IO7
{34B-IO13, 32D-IO23}= 32D-IO23
{14C-QO9, 13D-LO2, 10B-PO12} = 13D-LO2
{1B-QO1, 9B-PO11} = 9B-PO11
{4D-V03, 5B-QO9, 5C-QO9} = 4D-V03
{24D-PO2, 31B-VO7} = 31B-VO7
{8C-VO8, 24B-PO5} = 24B-PO5
{36C-IO12, 31A-IO15} = 31A-IO15
{16A-LO5, 33B-IO3} = 16A-LO5
{11C-EO2, 11B-EO2} = 11B-EO2

En conclusión podemos decir que de una matriz de 144×77 después de realizar la reducción por equivalencia en el estudio nos queda una matriz de 33×77. Y también para una más fácil graficación e interpretación a partir de aquí se eliminará el primer grupo alfanumérico relativo a la pregunta y apartado, es decir en lugar de 31A-IO15 tendremos IO15.

Análisis implicativo

Para confirmar y perfilar las características de las categorías de comprensión de la integral definida y los procesos infinitos en la fase de análisis cualitativo, se llevó a cabo un análisis estadístico implicativo (Régis Gras et al., 2008).

Trigueros & Escandon (2008) señalan que, en la estadística implicativa, partiendo de una población E, los estudiantes, y de un conjunto de variables, los ítems del cuestionario, el análisis implicativo "busca dar sentido estadístico a una implicación no estricta $a \Rightarrow b$" (p.66). En esta metodología, "la implicación $a \Rightarrow b$ será admisible si el número de individuos de E que la contradicen es muy pequeño, en términos probabilísticos, en relación con el número de individuos esperado bajo la hipótesis de ausencia de relación. Si esto ocurre, se puede decir que A, conjunto de las observaciones que satisfacen la característica a, está "casi" contenido en B, conjunto de observaciones que satisfacen la característica b" (p.67).

Para realizar el análisis estadístico implicativo se usó el software CHIC(Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Régis Gras et al., 2008). Este análisis traduce gráficamente el conjunto de las relaciones cuasi-implicativas entre las variables en distintos niveles de significación. Las implicaciones en forma de flechas indican de qué manera se articula la comprensión de las ideas (variables). Dichas implicaciones no cumplen la propiedad transitiva. Para una mejor comprensión de las figuras presentadas en este capítulo cabe señalizar que las flechas en color azul indican que las relaciones implicativas son a un nivel de 95% de significación y las flechas en color verde indican que las relaciones son a un nivel de 90%.

En primer lugar se obtuvo un gráfico implicativo general al 95% y al 90% de significación (Figura 6.9).En segundo lugar, usamos una de las posibilidades del programa CHIC para "suprimir o centrarse" solamente en determinadas variables (Couturier, 2009; Regis Gras & Kuntz, 2009). Establecimos gráficos implicativos al 95% o al 90% designificación centrándonos en diferentes elementos relacionados a la integral definida.

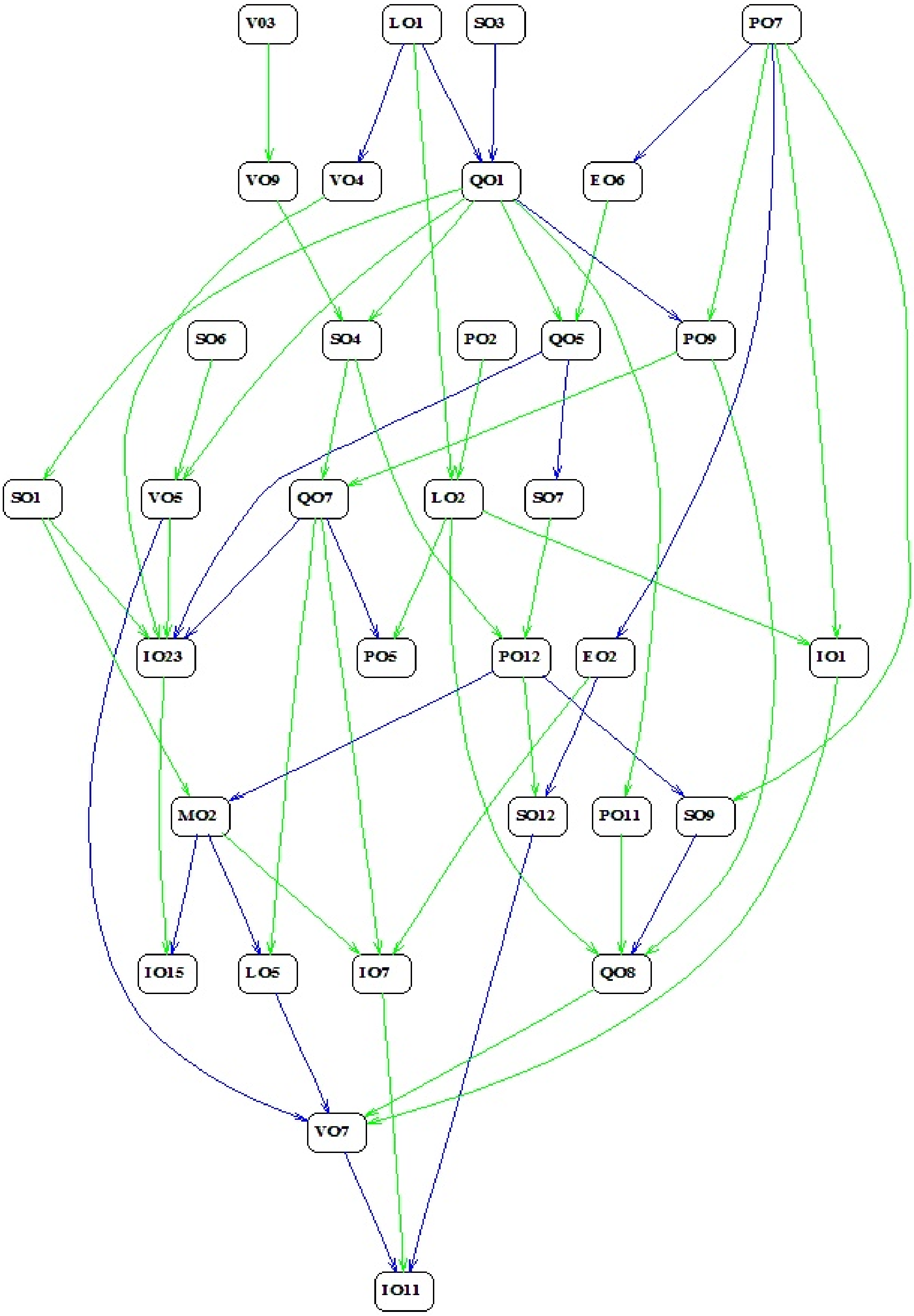


Figura 6.9. Gráfico implicativo de todos los obstáculos al 90 y 95 %.

En este gráfico aparecen ocho niveles de implicación (9 niveles de categorías). Las cadenas de implicaciones parten de cuatro categorías de equivalencia de obstáculos asociados a variaciones, series, límites y particiones. La categoría final es propia de la integral definida. En el segundo nivel aparecen tres categorías que podríamos clasificar de transición (VO9, VO4 y EO6), ya que a cada una llegauna única flecha y de cada una ellas sale otra, pero en este nivel aparece QO1 que es la categoría de la que salen más flechas y, por tanto, tiene mayor influencia en los niveles siguientes.En el gráfico también se aprecianotras categorías, distintas de QO1, cuya influencia en niveles posteriores es importante, ya que de ellas salen cinco y cuatro flechas, respectivamente; estas categorías sonPO7 yQO7. De las categorías LO2, PO12 y MO2 salen tres flechas de cada una y, por tanto, su influencia también esmás destacadaque del resto de las que parten dos, una o ninguna flecha. Este es el caso de PO5, IO15 e IO11 que son categorías cuya comprensión depende de las que están situadas en niveles anteriores, pero que ellas no influyen en otras. Además de estas últimas que son terminales, cabe destacar IO23 y QO8 que son las categorías que están más influenciadas por las anteriores porque llegan más flechas que al resto.

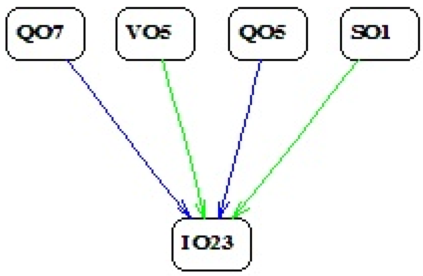


Figura 6.10 Gráfico implicativo correspondiente a IO23a.

La Figura 6.10muestra las siguientes relaciones implicativas generadas al 95% y al 90% respectivamente, seleccionando el obstáculo IO23 como elemento central:

QO7 => IO23, QO5 => IO23;

VO5 => IO23, SO1 => IO23.

Las primeras dos implicaciones ponen de manifiesto que la tanto la confusión entre el término general de una sucesión y la sucesión, como la dificultad para generalizar las propiedades de las subsucesiones implica la confusión a la hora de dar la definición conceptual de la función integrable Riemann. Las últimas dos implicaciones nos han permitido corroborar que la creencia errónea de que las sumas finitas son series infinitas y la dificultad de distinguir entre las propiedades de numerabilidad y la densidad de conjuntos implica la existencia de obstáculos a la hora de definir conceptualmente la función integrable Riemann.

Con la Figura 6.11analizaremos tres ideas importantes sobre las implicaciones entre obstáculos de límites, sucesiones, variaciones e integral definida.

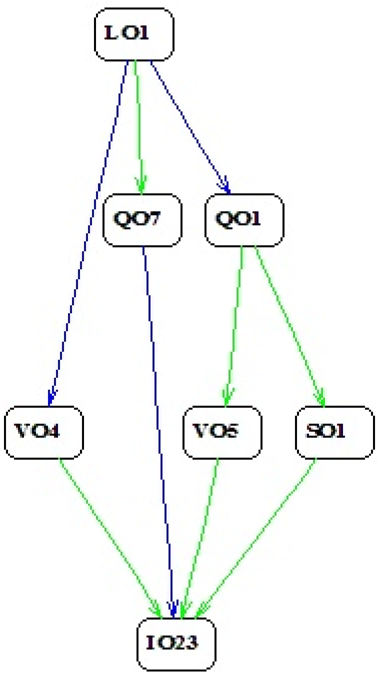


Figura 6.11 Gráfico implicativo centrado en IO23b.

La primera la inferimos a partir de las relaciones implicativas que se encuentran en la parte superior (en el primer nivel de implicación) de laFigura 6.11:

LO1 => QO7, LO1 => VO4 y LO1 => QO1.

Estas tres implicaciones revelan que la dificultad en la compresión del concepto del límite, LO1, implica obstáculos vinculados a subsucesiones y variaciones, QO1, QO7, VO4, es decir, los alumnos tendrán dificultades en generalizar las propiedades en el caso de la subsucesiones, en distinguir entre el infinito potencial y el actual y/o confundir los n primeros de la sucesión con la sucesión infinita.

La segunda la inferimos a partir de las relaciones implicativas que se encuentran en la parte central (segundo nivel) de laFigura 6.11:

QO1 =>SO1 y QO1 => VO5.

Estas dos implicaciones muestran que confundir los n primeros términos de una sucesión con la sucesión infinita implica tanto la creencia errónea de que una suma finita es una serie infinita, como la no distinción entre las propiedades de numerabilidad y densidad de conjuntos. De la tercera implicación de este nivel,

QO7 => IO23,

la inferimos a partir de las relaciones implicativas que se encuentran en la parte inferior de laFigura 6.11 que ya apareció representada en laFigura 6.10 y que fue referida anteriormente.

En el cuarto nivel implicativo aparecen estas tres relaciones:

VO4 => IO23, VO5 => IO23 y SO1 => IO23

Estas implicaciones manifiestan que los obstáculos propios de la definición conceptual de "función integrable" dependen de la no distinción entre el infinito potencial y el infinito actual, de los obstáculos asociados a numerabilidad y densidad y de la creencia de que las sumas finitas son series.

El hecho de que en la docencia de los cursos de análisis matemático se impartan el concepto de sucesión y la aritmética de sucesiones antes que el concepto de límite funcional podría hacernos pensar de forma directa que los obstáculos asociados a sucesiones influirían en los obstáculos asociados al concepto de límite funcional. Sin embargo, el análisis implicativo nos permite asegurar lo contrario. Esto sin duda, es debido a que el concepto de límite involucra otros conceptos más básicos que el de sucesiones, como por ejemplo el orden de la recta real, la manipulación de conjuntos numéricos de números reales y, las propiedades algebraicas de estos números, desigualdades, etc.

El análisis implicativo nos ha permitido identificar tres características de los obstáculos de los niveles de desarrollo del esquema en relación a los obstáculos, IO23 y I015, sobre las integrales. (Figura 6.12)

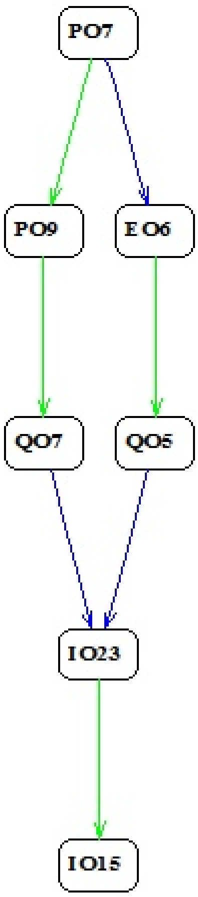


Figura 6.12Gráfico implicativo grupo IO23 e IO15.

La relaciones implicativas de la parte superior de laFigura 6.12:

PO7 => PO9 y PO7 => EO6

confirman que el obstáculo, PO7, la confusión entre el número de puntos y finura de la partición, implica tanto la carencia del dominio de la aritmética de los números reales para crear particiones, como la falta de conocimiento y manejo de las propiedades de orden de los números reales y de su totalidad.

Por otra parte, las relaciones implicativas de la parte central de laFigura 6.12 (segundo nivel de implicación):

EO6 => QO5 y PO9 => QO7

indican que el obstáculo, EO6, sobre el desconocimiento y falta de uso de las propiedades de orden de los números reales y de su totalidad implica la confusión entre el término general de una sucesión y la sucesión misma. También se percibe en la misma gráfica que la falta de conocimiento de la aritmética de los números reales para generar particiones implica la dificultad de los alumnos para generalizar las propiedades de las subsucesiones.

Finalmente, de la relaciones implicativas que aparecen en la parte inferior de laFigura 6.12 (tercer y cuarto niveles)

QO7 => IO23, QO5 => IO23 y IO23 => IO15

se infiere que si los alumnos tienen problemas en superar los obstáculos correspondientes a las sucesiones, QO7 y QO5, también tendrán problemas en superar tanto el obstáculo IO23 (definición conceptual de la integral de Riemann), como el obstáculo IO15, en donde experimentan la dificultad de identificar los conceptos de extremo superior de la integral definida y de variable de integración y, además, el primero de estos dos obstáculos influye en el segundo.

Como en el caso anterior, la docencia relativa a particiones se realiza para introducir el concepto de integral definida, y por tanto es muy posterior al desarrollo de la teoría de sucesiones y del estudio del cuerpo arquimediano de los números reales. Sin embargo el análisis implicativo permite asegurar lo contrario y, sin duda, la explicación hay que encontrarla en la estructura de ambos conceptos ya que el primero es un conjunto finito y los siguientes o son infinitos (sucesiones) o hay un salto cualitativo importante a la hora de considerar el orden de un conjunto finito, por una parte, y el orden de conjuntos infinitos, por otra.

El análisis de la Figura 6.13teniendo en cuenta todo el conjunto de variables, nos genera dos líneas de implicación que tienen como punto de partida PO7 y llegadas en IO11 (por dos caminos diferentes) e IO15:

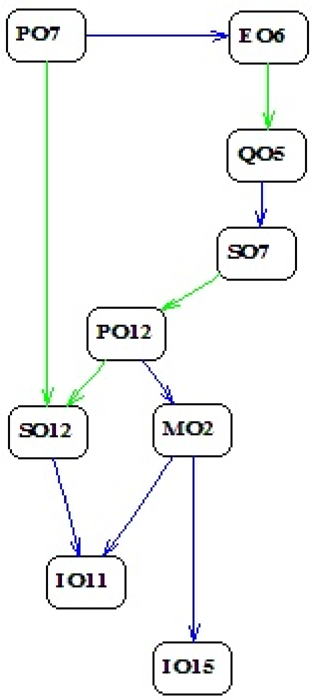


Figura 6.13 Gráfico implicativo centrado en IO11 e IO15

la primera línea nos muestra, en primer lugar, que la confusión entre el número de puntos y finura influye en las propiedades aritméticas de las series y de las sucesiones, SO12, y estos obstáculos influyen en el desconocimiento de los puntos intermedios de una partición, IO11 para general particiones. Los dos primeros niveles de la segunda línea de implicaciones ya han sido comentados en la figura anterior, pero aquí hay más implicaciones. La confusión entre termino general de una sucesión y sucesión, QO5, influye entre la convergencia de una serie y la de su término general, SO7, ésta en la topología de la recta real y operaciones con conjuntos, PO12, y estos obstáculos, a su vez, en el quinto nivel de implicaciones, influyen en las propiedades aritméticas de las series y de las sucesiones, SO12, por una parte, y en la confusión entre monotonía y convergencia, MO2.En el sexto nivel de implicaciones aparece la influencia de estos dos obstáculos (SO12 y MO2)en la ambigüedad que genera el desconocimiento del conjunto de puntos intermedios en las particiones. Finalmente en el mismo nivel de implicaciones aparece la influencia de la confusión entre monotonía y convergencia de sucesiones (MO2) en la identificación del extremo superior de la integral, la variable de integración y el posible intercambio de uno y otra (IO15).

De manera similar a los casos anteriores, la docencia relativa a particiones se realiza para introducir el concepto de integral definida, y por tanto es muy posterior al desarrollo de la teoría de sucesiones y del estudio del cuerpo arquimediano de los números reales, incluso extremos de conjuntos de números reales y se podría pensar que los obstáculos asociados a éstos influyen en los obstáculos asociados al concepto de partición. Sin embargo el análisis implicativo permite asegurar lo contrario y, sin duda la explicación hay que encontrarla en la estructura de ambos conceptos ya que el primero es un conjunto finito y los siguientes o son infinitos (sucesiones) o se establecen en este tipo de conjuntos (extremos).

La Figura 6.14 representa otras dos relaciones implicativas de tres niveles de implicación que terminan en el obstáculo IO11:

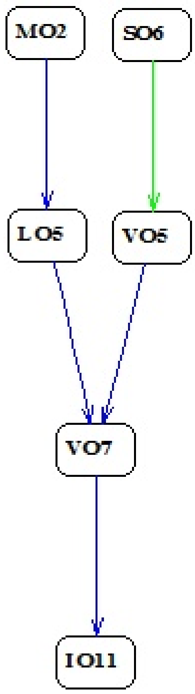


Figura 6.14 Gráfico implicativo centrado en IO11a

En el primer nivel de implicación, la confusión entre monotonía y convergencia (MO2) influye en el cálculo de límites utilizando procedimientos algebraicos o analíticos (LO5), y la confusión entre el termino general de una serie y suma parcial (SO6) en la no distinción entre numerabilidad y densidad de conjuntos de números reales (VO5). En el segundo nivel, los obstáculos asociados al cálculo de límites y a los conceptos de densidad y numerabilidad (LO5 y VO5) implican la confusión entre variables naturales y reales o del parámetro natural n fijado o variable (VO7). Finalmente, en el tercer nivel, el obstáculo VO7 influye en el obstáculo asociado a la ambigüedad que genera el desconocimiento del conjunto de puntos intermedios de una partición (IO11).

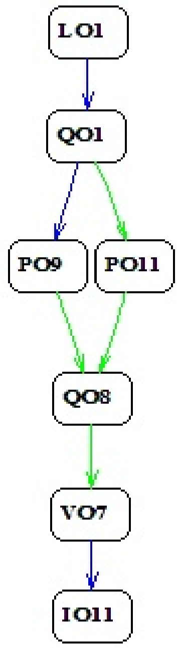


Figura 6.15 Gráfico implicativo centrado en IO11b.

La Figura 6.15 representa un diagrama implicativo de cinco niveles con dos trayectorias entre los niveles segundo y tercero:

En el primer nivel, las dificultades asociadas al concepto de límite influyen en la confusión entre los n primeros términos de una sucesión con la propia sucesión (QO1). En el segundo nivel, esta confusión implica la carencia del dominio de la aritmética de números reales (PO9) y la dificultad para definir particiones. En el tercer nivel aparece la dependencia de la distinción de los tipos de sucesiones (QO8) de la aritmética de números reales y de la dificultad para definir particiones. Los niveles cuarto y quinto ponen de manifiesto que la distinción del tipo de sucesiones (QO8) influye en la confusión de la naturaleza de las variables y la influencia de este obstáculo en la ambigüedad que genera la falsa percepción de puntos intermedios de una partición (IO11).

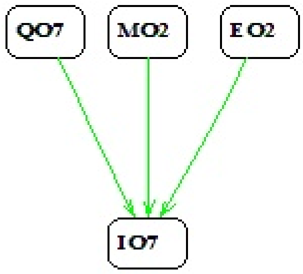


Figura 6.16 Gráfico implicativo al 90% centrado en IO7.

El gráfico implicativo que muestra laFigura 6.16 relaciona al obstáculo de integral definida, IO7, con los obstáculos sobre la generalización de las propiedades de las subsucesiones (QO7), sobre la confusión entre monotonía y convergencia (MO2), y sobre la dificultad de identificar extremos en conjuntos numéricos (EO2):

$$QO7 => IO7,\ MO2 => IO7 \text{ y } EO2 => IO7.$$

ponen de manifiesto que la dificultad para determinar la conservación del orden de las sucesiones, la confusión entre monotonía y convergencia y la dificultad de identificar extremos con números reales conlleva a una mala suposición sobre los conceptos de área e integral definida considerándoles iguales.

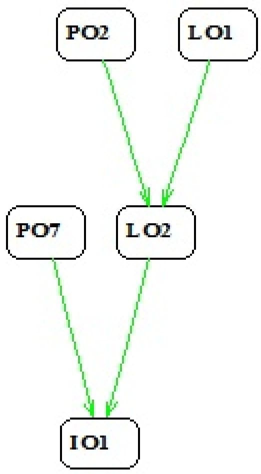


Figura 6.17 Gráfico implicativo al 90% centrado en IO1.

Para analizar la relación existente entre particiones, límites e integral definida, IO1, estudiaremos la el gráfico implicativo generado al 90% de significación (Figura 6.17) se observan dos niveles implicativos:

PO2 => LO2, LO1 => LO2

PO7 => IO1, LO2 => IO1

El primero establece que la confusión entre condiciones necesarias y suficientes de una partición y la dificultad en la comprensión del concepto de límite conlleva a dificultades en el manejo algebraico de expresiones que son inherentes al uso de desigualdades relacionadas con el $\varepsilon - \delta$.

Las implicaciones del segundo nivel establecen que la confusión entre número de puntos y finura de una partición y la dificultad en el manejo algebraico de expresiones que son inherentes al uso de desigualdades relacionadas con el $\varepsilon - \delta$ conlleva a errores en la determinación gráfica de las sumas inferiores y superiores de la integral definida, IO1.

Reflexiones

Como síntesis del estudio implicativo se ha detectado que existen obstáculos asociados a la integral definida que son consecuencia directa de otros obstáculos vinculados a procesos infinitos de conceptos cuya docencia se desarrolla previamente. En concreto, aparecen los siguientes: la confusión en la definición conceptual de función integrable; la dificultad para identificar el extremo superior de la integral y la variable de integración, y posible intercambio de uno y otra; la ambigüedad generada por la falsa percepción del conjunto de puntos intermedios de los subintervalos definidos por las particiones asociadas a un intervalo dado; la falsa consideración de igualdad entre integral definida y área bajo la curva integral; y, finalmente, la imprecisión o errores de interpretación gráfica de las sumas inferiores y superiores.

Estos obstáculos son consecuencia de los siguientes: en primer lugar consideramos los obstáculos asociados a las sucesiones (confusión de los n primeros términos de una sucesión con la propia sucesión, confusión entre el término general y la propia sucesión, generalización de las propiedades de las subsucesiones, y de las propias sucesiones), al concepto de variación infinita (la no distinción entre el infinito potencial y el infinito actual ni entre las propiedades de numerabilidad y densidad, y la confusión entre variables naturales y reales o del parámetro n -subíndice, exponente o superíndice-que actúa como contador), a las series (confusión entre sumas finitas y serie, entre suma parcial y serie, y entre límite del término general y convergencia de la serie), a límites (definición del concepto, manejo algebraico de las expresiones relacionadas con $\varepsilon - \delta$, errores aritméticos o analíticos en el cálculo de límites), a monotonía y extremos (confusión entre monotonía y convergencia, dificultad para identificar extremos en conjuntos de números reales y para manejar desigualdades como expresión algebraica de pertenencia), por último, los vinculados a particiones (confusión conceptual, confusión entre número de puntos y la finura de la partición, deficiencia del tratamiento aritmético de los números reales, no identificación de particiones, desconocimiento de la topología real y operaciones con conjuntos de números reales).

La reflexión anterior permite realizar otra paralela en términos de comprensión, a continuación se hace una sucinta descripción de la misma: vistas las influencias de ciertos obstáculos en otros implícitos en la integral definida, es evidente que la comprensión de ésta dependerá de la comprensión de los conceptos anteriores y esta comprensión se interpreta en función de sus actos.

Para precisar, los actos de comprensión relacionados con la integral definida que emergen son a saber: sintetiza una función integrable en un intervalo compacto $[a, b]$, generaliza y sintetiza el concepto de integral como función del límite superior (integral indefinida): $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, generaliza el conjunto de puntos intermedios asociados a una partición, discrimina entre los conceptos de área bajo la curva integral e integral definida, y, para terminar, identifica las sumas inferior y superior y discrimina entre ambas.

Estos actos de comprensión dependen de los siguientes actos: para comenzar tendremos en cuenta los actos asociados a sucesiones (identifica las formas de presentación de sucesiones numéricas: gráfica, algebraica y numérica; Discrimina entre el término general de una sucesión a_n y los elementos de la sucesión: $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$; relaciona una sucesión con subsucesiones suyas y por último, aplica aritmética de límites de sucesiones), al concepto de variación infinita (discrimina entre conjuntos numerables y no numerables al igual que entre conjuntos densos y no densos, y generaliza el concepto de conjunto infinito), a las series (identifica las formas de presentación de series numéricas: gráfica, algebraica y numérica, discrimina entre el término general de una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y una suma parcial $\sum_{i=1}^{n} a_i$, discrimina la convergencia de la necesidad de que el término general tienda a cero), a límites (identifica el concepto de límite de una función, de una sucesión y de "series de sucesiones", discrimina entre los conceptos de límite de una función, límite de una sucesión y límite de una serie, aplica los teoremas de caracterización de límites de funciones, sucesiones y series), a monotonía y extremos (discrimina entre las funciones (sucesiones) que son monótonas y las que no lo son, identifica numérica y gráficamente extremos absolutos $(máx, mín)$, extremos relativos $(máx, mín)$, supremo e ínfimo $(sup, ínf)$, discrimina entre cota superior, supremo (sup), cota inferior e ínfimo $(ínf)$), y para terminar, los relacionados con particiones (identifica la partición como un conjunto de puntos, discrimina la finura de una partición, sabe construir particiones equiespaciadas con paso dado, sabe procesar algebraicamente las particiones).

Analisis de similaridad

El clúster jerárquico de variables (análisis de similaridad) es un método declasificación que busca agrupar aquellos objetos que reúnan características similares, es decir, es una técnica de análisis exploratorio diseñada para revelar las agrupaciones (clústeres) naturales dentro de una colección de datos.

Ya que su objetivo es agrupar objetos similares, se necesita alguna medida para evaluar las diferencias y similitudes entre objetos. El concepto de similaridad es fundamental. La similaridad es una medida de correspondencia o semejanza entre los objetos que van a ser agrupados. La estrategia más común consiste en medir la equivalencia en términos de la distancia entre los pares de objetos. Los objetos con distancias reducidas entre ellos son más parecidos entre sí, que aquellos que tienen distancias mayores y se agruparán, por tanto, dentro del mismo clúster. De esta manera, cualquier objeto puede compararse con cualquier otro, a través de la medida de similaridad.

La similaridad se define utilizando bien la teoría clásica, bien la teoría entrópica. La segunda opción es preferible con un gran número de individuos, pero no en nuestro caso. Así, se construye el árbol de similaridad con la teoría clásica utilizando CHIC. Este árbol conduce a una única clase final que reúne todas las otras (así, aunque el proceso sea inverso, se obtiene un gráfico en forma de árbol con un tronco del que salen ramas que a su vez dan lugar a otras más finas). Por contra, con la versión entrópica del índice de similaridad, es frecuente que el algoritmo de construcción de clases conduzca a varias clases distintas al final del proceso. El número de clases depende, de hecho, de la similitud de los datos.

Este tipo deanálisis permite estudiar, y luego interpretar, en términos de tipología y de parecido (yde diferencia) decreciente de las clases de variables, constituidas significativamente enciertos niveles del árbol y oponiéndose a otras en estos mismos niveles.

La construcción del diagrama jerárquico de similitud se basa en elsiguiente proceso: las dos variables que tienen mayor similitud con respecto a losíndices de similitud del método, son unidas en un grupo en el primer nivel de similitud.

Después, este grupo puede ser unido con otra variable en un nivel de similitud inferior ocon otras dos variables que han sido agrupadas juntas estableciendo un nuevo grupo en un nivel inferior, etc. Se debe mencionar que las relaciones de similitud se basan en índices de similaridad simétricos y permiten responder o predecir la forma en la que un individuo que ha respondido de cierta manera a una pregunta, responderá a otra pregunta, donde el concepto de la primero pregunta juega un papel determinante.

El programa CHIC aplicado de nuevo a nuestra matriz nos proporciona el diagrama de similaridad (Figura 6.18):

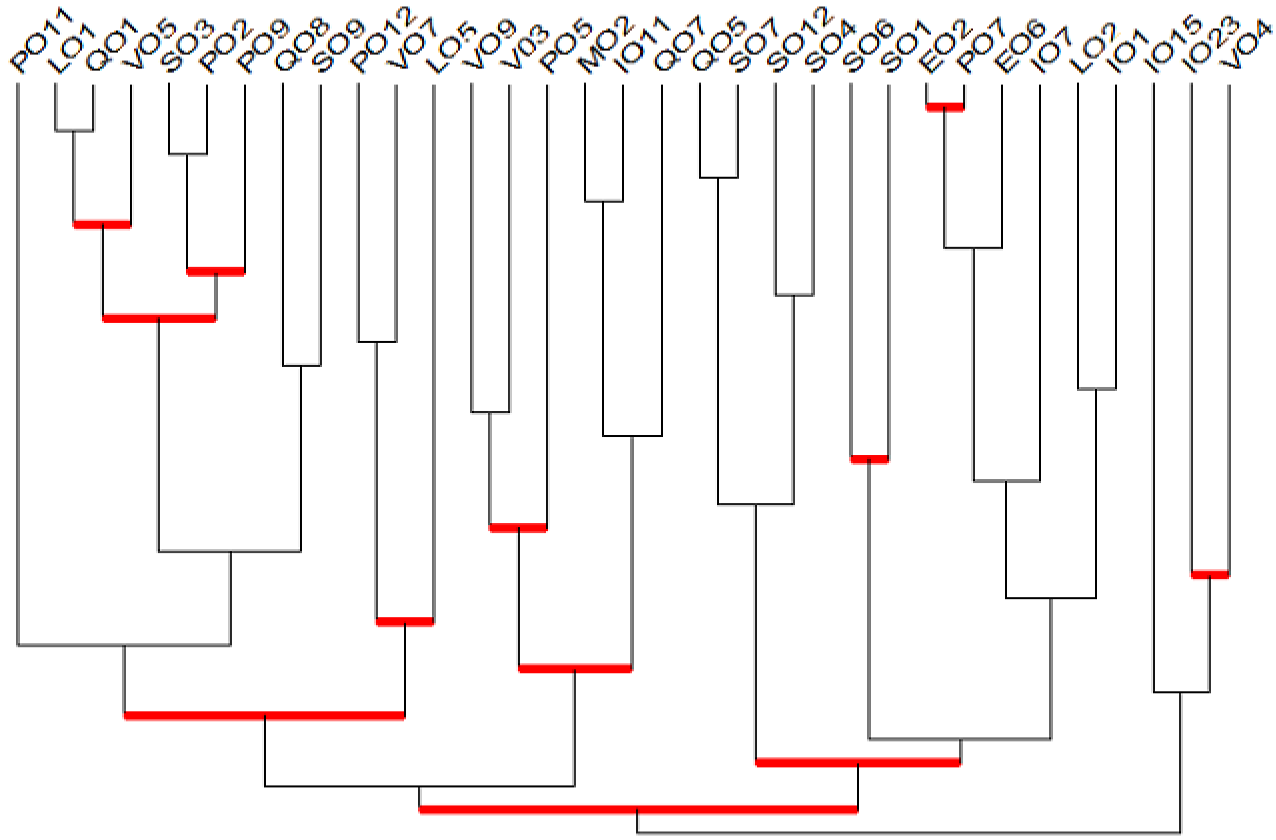


Figura 6.18 Diagrama de similaridad de los obstáculos.

El análisis proporcionará información sobre cómo los obstáculos que perciben los alumnos se van agrupando de acuerdo a la homogeneidad, indicando la manera en la que los estudiantes enfrentan los problemas relacionados a la integral definida y procesos infinitos.

El diagrama de similaridad ha mostrado la existencia de hasta nueve niveles de relación de obstáculos indicando que la comprensión de los diferentes actos que dan significado a la comprensión de la integral definida está relacionada con los actos de comprensión vinculados a los procesos infinitos. Estos niveles parecen mostrar las trayectorias de aprendizaje de la integral definida indicando la manera en la que una mera comprensión procedimental de los conceptos de procesos infinitos no es suficiente para superar las demandas cognitivas generadas cuando se intentan comprender a fondo el concepto de integral definida. Dado la complejidad del diagrama se realizaran las interpretaciones de los resultados hasta el nivel 3, incluido, aunque observando la Figura 6.18, de forma general, se detectan tres familias de obstáculos: uno formados por las 18 categorías de la izquierda (PO11, LO1, …, QO7), otro por las 12 siguientes (QO5, SO7, …, IO1) y la tercera formadas por IO15, IO23 y VO4. Las dos primeras se relacionan en el penúltimo nivel, lo que quiere decir que tienen una confluencia débil y éstas se relacionan con la tercera en el último. Aquí dos obstáculos relacionados no son implicativos pero se pueden tener los dos obstáculos simultáneamente sin que uno de ellos influya en el otro. Se puede observar que a medida que se desciende sobre el diagrama de similaridad el número de obstáculos relacionados se va ampliando, pero la relación entre ellos es más débil.

Son ejemplos de relaciones en el primer nivel las siguientes parejas, ya que no aparecen tríos ni conjuntos de mayor número.

Las uniones a nivel 1:

a) LO1-QO1
b) SO3-PO2
c) QO8-SO9
d) PO12-VO7
e) VO9-VO3
f) MO2-IO11
g) QO5-SO7
h) SO12-SO4
i) SO6-SO1
j) EO2-PO7
k) IO23-VO4.

Estas relaciones permiten afirmar lo siguiente:

a) Los alumnos que tienen dificultad en comprender el concepto de límite, también tendrán dificultad en generalizar las propiedades de las subsucesiones
b) Los alumnos que puedan encontrar el obstáculo SO3, también experimenta confusión entre las condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto sea una partición.
c) Quien confunde las propiedades de las sucesiones también tiene dificultad para interpretar, representar y manipular con solvencia objetos que precisen el manejo algebraico de series.
d) El desconocimiento de la topología real está acompañada de la confusión de la naturaleza de variables naturales y reales o, del n natural como número indeterminado fijado o como variable.
e) A quien le resulta difícil comprender la relación de inclusión y cardinalidad en conjuntos infinitos también le es difícil distinguir conjuntos finitos de los que no lo son.

f) Quienes confunden monotonía con convergencia también tendrán dificultad para generalizar el conjunto de puntos intermedios asociados a una partición.

g) Quien confunde el término general de una sucesión y la sucesión también confunde la convergencia del término general de una serie con la convergencia de la serie.

h) La confusión entre las propiedades aritméticas de las series y las de las sucesiones está acompañada de la no distinción entre series convergentes y divergentes.

i) La existencia de obstáculos en series, entre la suma parcial y la serie está acompañada de la creencia errónea que las sumas finitas son series.

j) Los alumnos que puedan encontrar el obstáculo EO2, también experimentan confusión entre número de puntos y finura de un partición.

k) Si perciben el obstáculo I23 de la integral definida, confusión en la definición conceptual de función integrable Riemann también el obstáculo de variaciones VO4, no distinguen entre el infinito potencial y actual.

Las confluencias a nivel 2 tienen lugar entre categorías que ya están relacionadas en el primer nivel y otras que pueden no estar relacionadas entre sí, en donde el primer nivel no es significativo para todas, pero en cambio el segundo si lo es:

a) Grupo1: (LO1-QO1)-VO5,

b) Grupo 2: (SO3-PO2)-PO9,

c) Grupo 3 (PO12-VO7)-LO5

d) Grupo 4: (VO9-VO3)-PO5.

e) Grupo 5 (MO2-IO11)-QO7

f) Grupo 6 (QO5-SO7)-(SO12-SO4)

g) Grupo 7 (IO23-VO4)-IO15

El grupo 1 muestra que junto a los obstáculos LO1 y QO1 aparece el VO5.

El grupo 2 muestra que a los alumnos a los que se les identificaron los obstáculos SO3 y PO3, por la semejanza conceptual, también se les identificara el obstáculo PO9.

El grupo 3 muestra que los alumnos que no son capaces de pasar los obstáculos VO9 y VO3 tampoco son capaces de superar el obstáculo PO5.

En el nivel 3 aparecen varios grupos de categorías de las que son ejemplos los siguientes:

a) Grupo A: Grupo 1 - Grupo 2
b) Grupo B: Grupo 3 - [(MO2-IO11)-QO7].

El grupo 4 muestra la similaridad que hay entre los obstáculos del grupo 1 y del grupo 2.

El grupo 5 muestra la homogeneidad existente entre los obstáculos del grupo 3 y los obstáculos relacionados con la monotonía, MO2, las sucesiones QO7 e integral definida, IO11.

Otra forma de buscar relaciones entre las categorías consistiría en aplicar cortes al mismo nivel de altura en lugar de uniones de ramas (nudos). De esa manera el número de categorías relacionadas por niveles sería menor, ya que los nudos se producen a alturas diferentes y, si se trata de agrupar varias, los cortes se producen de forma aleatoria. De hecho, en el primer nivel, con un corte tras el nudo de SO · y PO2, desaparecerían los grupos del a) al i) y del segundo nivel los grupos 3, 5, 6 y 7.

6.5 Análisis de la entrevista

Como se mencionó en el capítulo anterior, el tipo de entrevista que se adapta al propósito de esta investigación es la semiestructurada (Cohen et al., 2013) y se realizó con posterioridad al análisis de los resultados para tener más información recabada acerca del perfil del estudiante que finalmente se eligió, Vladimir (nombre ficticio). Vladimir se escogió porque su rendimiento estaba en el de mayor rango, es decir, su nivel de respuestas correctas (de 1 a 10) correspondía al intervalo (7,5-10], y además, como se señaló previamente, es considerado un estudiante con expediente académico destacado.

Se consideró necesario recabar más información acerca del tipo de razonamiento que ligado a la resolución de los problemas planteados en las preguntas y las justificaciones subyacentes a cada respuesta.

Se planificó un guion enfocado principalmente en tres puntos de interés, uno relacionado con el conocimiento que se moviliza en cada una de las preguntas de interés (preguntas de interés, son algunas preguntas que en el análisis de los resultados tuvieron un porcentaje significativo de error, o, alguna pregunta en la que quisimos indagar acerca de la justificación de Vladimir a su respuesta), otra que tiene que ver con la concepción que se tiene de integral definida y el contexto en el que se maneja (Riemann-Darboux), y una última, tiene que ver con los razonamientos relacionados con los procesos infinitos.

Las preguntas planteadas fueron abiertas, es decir, no se proveyó a Vladimir ningún tipo de respuesta sobre la cual pudiese elegir para de este modo, darle flexibilidad al desarrollo de la entrevista. Las intervenciones de Vladimir tienen el identificador [V] y las de la investigadora [I]. Como mencionamos anteriormente, la entrevista la transcripción completa de la entrevista, cuya duración fue de aproximadamente una hora, se puede encontrar en el ANEXO 12.

Análisis de la entrevista, resultados obtenidos.

La primera parte de la entrevista versa sobre preguntas relacionadas con la concepción que tiene el estudiante de la integral definida, la segunda parte tiene que ver con las respuestas que dio del cuestionario y la tercera y última con la concepción que posee de proceso infinito.

> [I]:¿Cómo entiendes las integrales de Riemann y de Darboux?
>
> [V]: Para mí, la integral de Riemann es la que se define mediante la sumas superiores y las sumas inferiores, y se dice que la función es integrable cuando la diferencia infinitesimal de esas sumas tiende a cero. El límite superior y el límite inferior de esas sumas coinciden.

Se puede notar que en realidad el estudiante está hablando de la integral de Darboux, aunque la reconoce con la denominación de Riemann.

> [I]: ¿Y la de Darboux?
>
> [V]: La de Darboux, para mí, no era nada y pensaba que era sobre puntos, coger un punto cualquiera dentro de la partición. O sea si de la partición se coge un punto cualquiera t_i de ese subintervalo, $t_i \in [t_{i-1}, t]$.

El estudiante considera la integral de Darboux como un concepto que deriva de la definición de la integral de Riemann.

> [I]: Y eso que me acabas de decir es lo que pensabas, ¿y ahora qué piensas?
>
> [V]: Después del cuestionario[78] creo que era al revés, que la de Darboux era la de las sumas superiores e inferiores, y la de Riemann, la de los puntos intermedios.

[78] El estudiante reconoce que el cuestionario tuvo una función formativa.

El concepto integral de Darboux era desconocido para el estudiante, no así, el de sumas de Riemann. Es necesario tener presente que en la teoría matemática ligada a la integración, las sumas de Darboux no siempre pueden identificarse o ser vistas como un caso particular de sumas de Riemann ya que no necesariamente se alcanzan los valores extremos en los subintervalos que genera una partición.

> [I]: Vale, ya que sabes cuál es cada una, dime qué similitudes y qué diferencias les ves.
>
> [V]: Ehhmmm… A priori parece que la de Riemann en el sentido, en el buen sentido, en el punto, un punto de un intervalo cualquiera, es menos característica, está menos definida ¿no? Tienes que ver que es independiente del punto que escoges, o sea escogiendo cualquier punto te sigue saliendo el mismo valor, tienes que probar más cosas, mientras que en la otra están caracterizados para cada subintervalo de la partición tú tienes dos puntos marcados, el máximo y el mínimo. Entonces es más precisa la definición[79]. Claro, te está dando ya… te está diciendo: ¡No escojas un punto cualquiera!, sino toma éste y éste.

Aquí vemos una de las raíces que consideramos que en general suscitan confusión en los estudiantes, el afirmar que "en una puedes escoger cualquier punto y en la otra ya tienes dos puntos que marcados fijos…"

El estudiantes sí que da a entender en su respuesta que las sumas de Darboux están fijadas (son únicas) una vez escogida la función y la partición, mientras que existen tantas sumas de Rieman posibles como puntos tiene el subintervalo.

En la integral que se define con las sumas de Riemann, las "alturas" son imágenes de puntos del subintervalo, en la integral de Darboux se manejan valores extremos que no necesariamente tienen que ver con puntos de los subintervalos. Sin embargo, el estudiante liga la integral con los valores máximo y mínimo (que

[79] Independientemente de la apreciación sobre los puntos, el alumno reconoce que la integral de Darboux es más fácil de comprender que la de Riemann.

pueden no alcanzarse si la función no es continua) y no con los extremos superior e inferior.

> [I]: ¿Crees que la integral de Riemann es equivalente a la integral de Darboux?
>
> [V]: Pues en la línea de lo que te he dicho antes, parece que la de Riemann es una generalización de la de Darboux, porque puedes escoger los puntos que quieras, luego son equivalentes.

Podemos en este caso afirmar que la integral de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann pero no son equivalentes, por tanto la noción de generalización y equivalencia se muestran confusas.

> [I]: En la pregunta 1(a)[80] respondiste que tiene un número finito de sumandos, y en la 1(d)…(interrumpe)
>
> [V] Es falso, sí sabes cuántos sumandos tiene, tiene n.

Confirmamos aquí las interpretaciones que se le pudiesen dar en general a la expresión "tiene n sumandos" y se ratifica la claridad y coherencia del sentido de la pregunta para estudiantes de estos niveles, es decir, sabe la connotación del objeto n en la pregunta.

> [I]: En la parte (c) de la pregunta 6 pusiste la respuesta correcta $\frac{1}{4}$.
>
> [V]: No te va a gustar[81], es que la vi geométricamente.
>
> [I] ¿Si?
>
> [V]: Si recolocas los cuadrados se ve que están rellenando la parte... o sea si partieras el cuadrado de lado 1 en cuatro trozos iguales el proceso este lo que te está haciendo es rellenar infinitamente el área del cuadrado pequeño de la esquina derecha, que es la cuarta parte del grande. Lo vi así porque no me salían las cuentas…jejeje

[80] Esta pregunta se refiere a la suma $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$con $n \in \mathbb{N}$.

[81] Con esta expresión indica la preferencia del profesor hacia las representaciones numéricas o algebraicas en detrimento de las gráficas.

El estudiante manifiesta su preocupación por la posible forma de resolver el problema, ya que dado el contexto y la información preliminar que se les dio acerca del objetivo del estudio, concebía más propio arrojar una solución más analítica o algebraica. Sin embargo deja entrever una buena interpretación gráfica del problema y además enriquece la información relacionada con la misma.

[I]: Al hacer la suma, ¿tuviste dificultad para sacarla?

[V]: Sí es que me marean un poco las series. Pero también te digo que una vez sabiendo que salía $\frac{1}{4}$ es mucho más fácil hacer la suma.

[I]: ¡Ah!...tú ya sabías que salía $\frac{1}{4}$

[V] ¡claro[82]! visualmente vi que era $\frac{1}{4}$ y luego hice la cuenta y dije ¡Ah mira salió!, pero si me pongo a hacer las cuentas sin saber qué me va a salir...me sale $\frac{1}{8}$ perfectamente.

Aunque el estudiante tenía claro que era una serie, en particular una geométrica, la complejidad del ejercicio residía en encontrar el posible valor de la razón de dicha serie.

[I]: En el 8(c) tú dices que $\{x : x = 5\lambda , \lambda \in \mathbb{R}\}$ sí es un intervalo.

[V]: Sí, bueno...no es un intervalo, es $\mathbb{R}$. no...es..$\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Aunque la respuesta fue correcta, se ha percibido un aire de inseguridad al corroborarla.

[I]: ¿La pregunta 13 cómo la hiciste, cómo la pensaste?

[V]: He hecho la cuenta, pero bueno...sí, se puede acotar esta función manualmente y te sale esa cota. Es la definición de límite, y te dice... claro que calcule la delta para que pase eso si está hecho a mano.

[82] Preferencia del razonamiento geométrico sobre la figura.

Aunque se manifiesta confianza en el manejo de la definición del límite y ha acertado en la respuesta, no obstante no es explícito en la relación de acotación a la cual se refiere.

> [I]: En el 14 que es una afirmación ¿qué me dices acerca de la veracidad o falsedad en los literales (a) y (b)?
>
> [V]: El (a) es falso porque una sucesión convergente no tiene por qué ser monótona, véase: $\frac{(-1)^n}{n}$ esa sucesión no es monótona va cambiando de… y, aun así, su límite es 0 cuando tiende a infinito.

Las explicaciones se ajustan a la respuesta que ha marcado y su contraejemplo está muy bien explicado.

> [V]: El (b) también es falso porque puedes hacer que vaya oscilando y siempre que esté acotado por un límite superior puede estar oscilando y monótono quiere decirte que el término superior (quiere decir siguiente) siempre es mayor que el término anterior.

También plantea una buena disquisición de sus respuestas a través de caracterizaciones de funciones que no satisfacen la tesis aunque sí las hipótesis.

> [I]: Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y decreciente, está acotada ¿Qué piensas de eso?
>
> [V]: Hummm…Me parece un poco raro, o sea que cada término sea mayor que el anterior y menor, ¿cómo va a ser mayor y menor que el anterior? Son excluyentes, o sea, tiene que ser constante. Y si es constante….tiene que ser constante…y si es constante es acotado.

Un caso particular pero que conociendo bien las definiciones demonotonía se puede deducir con facilidad.

> [I]: la pregunta 15, ¿Cómo la pensaste?
>
> [V]: Si tú coges una franja, bueno, con la línea quebrada y la acotas entre dos diagonales, lo que estás calculando es cuánto mide la longitud de la lí-

nea quebrada cuando el límite de esa, de ese área que la está encerrando tiende a 0.

En su intento por hallar la respuesta, el estudiante opta por acotar la curva entre dos diagonales para ir "aproximando" la curva a la diagonal del cuadrado. Fruto más bien de la intuición, se desea "aplastar" tanto los escalones que llegan a coincidir con la hipotenusa.

> [I]: Pero por qué el área ¡si se ha pedido la longitud!
>
> [V]: La longitud encerrada en esa área. Porque estás...ese límite estás tendiendo la línea quebrada en el límite deja de ser quebrada, por eso aunque la sucesión sea constante (es que de este me acuerdo porque estuve mucho tiempo pensando...nos pusimos a discutir...)

Aunque se tiene conocimiento de que la longitud es constante, la intuición sigue incidiendo en los razonamientos.

> [I]: O sea que hubo distintas formas de pensar ese problema...
>
> [V]: Claro, porque nos pusimos a discutir, porque nos pareció muy curioso, porque había gente que decía: "No, no yo me quedo con: la sucesión de términos es constante, por lo tanto el límite de esa sucesión es igual a la constante. Lo que está asegurando entonces es que la línea quebrada en el límite sigue siendo quebrada, o sea infinitamente tiene sus escalones, y nosotros lo que pensábamos (Un amigo y yo) es que esa línea quebrada en el límite deja de ser quebrada para ser una línea recta, entonces el teorema de Pitágoras te da que es $\sqrt{2}$.

En la teoría matemática, para que llegue a suceder eso, la sucesión de curvas tiene que satisfacer condiciones que ésta no cumple. Es decir, las condiciones para que se pueda iterar el límite de las "medidas" con la medida del límite no se cumplen.

[I]: Entonces ¿qué os hace pensar que esa línea quebrada en el infinito deja de ser quebrada?

[V]: Por eso digo, porque si la estás intentando meter en una franja de área 0, no puedes hacer escalones porque te estarías saliendo, al aplastarlo la estás aplanando, no puede haber escalones, ni infinitamente pequeños ni nada. Creo, luego hay teorías fractales que a lo mejor dicen que lo que estoy diciendo es falso.

[V]: Pero luego cojo el área de Riemann, y no sé, no parece un límite de una sucesión, nosotros estábamos empeñados que salía $\sqrt{2}$ y al final no es quebrada.

Las discrepancias entre las concepciones y las condiciones que se deben tener para que esto suceda, deja entrever la dificultad que se tiene en entender la iteración de los operadores relacionados con el límite y la medida, o en nuestro contexto, el operador integral con el límite.

[I]: Y en la pregunta 16, respecto del concepto de límite.

[V]: Ahh esto es definición. Ehhh…

[I]: ¿Por qué has puesto falso? ¿Falso cuál?

[V]: Sí. Es la pura definición porque lo que te está diciendo es "límite es la interpretación de que cuanto más te acerques de$f(x)$, es decir, cuando te estás acercando a$f(x)$cada vez te acercas más a la$l$, y eso es lo que está ahí reflejado. Si coges puntos muy cercanos a "a", entonces sus imágenes están muy cercanos al, que es su límite.

Al parecer se tiene entendido lo que significa informalmente el límite, y la expresión dada no se había visto con el suficiente detenimiento.

[I]: Sí, pero fíjate que la definición de límite…(interrumpe)

[V]: Has puesto un igual en el delta y en laépsilon también…entonces debería ser continua para que eso fuera cierto.

[I]: Ahora afirmas que eso significa que debe ser continua ¿cuál es la diferencia entre el concepto de límite y de continuidad en un punto?

[V]: Ehhh… la diferencia es el valor en el punto. O sea la continuidad implica que el valor en el punto sea el límite, mientras que el límite puede ser cualquier cosa, no el valor en el punto.

Cuando cae en la cuenta de la sutileza de la diferencia con la definición formal corrige su percepción, dándose cuenta por sí mismo del punto en el cual radica la discrepancia.

[I]: Ajá, y en el (b)[83]pusiste falso ¿no?

[V]: Sí falso, pues esta definición no es la buena, es la anti-imagen un abierto, dice que puedes encontrar el entorno de a.

El alumno echa mano de la definición topológica y no se da cuenta que es equivalente con la que aparece en el apartado.

[I]: ¿Con respecto a la pregunta 18(d) qué piensas?

[V]: El (d) G es finito, por lo tanto es menor que $G < \aleph_0$, que es el menor de los cardinales infinitos, y luego el conjunto de puntos del cuadrado unidad es igual que el conjunto del puntos de $[0,1]$.

[I]: Y por qué el cuadrado unidad es igual…

[V]: Producto de cardinales[84] iguales es igual a cardinal.

Las respuestas tienen la justificación esperada, en este caso, el estudiante tiene claros conceptos relacionados con cardinalidad y ciertas propiedades de los reales.

[I]: ¿Cómo pensastela pregunta 20? En ese punto, por ejemplo, por qué tú afirmas que el cardinal de lo borrado y el cardinal de lo no borrado es exactamente igual.

[V]: En cada paso tienes intervalos, un número infinito de intervalos, que son intervalos de R, o sea que tienen cardinal de continuo, por eso un nú-

[83]Fijada una aproximación k de l, existe un entorno reducido de $a$tal que todas sus imágenes están más cerca de l que k.

[84] Se refiere a cardinales transfinitos.

> mero finito es el producto de ellos, cada vez tienen más, pero siguen teniendo cardinal del continuo. Y pasa eso tanto en borrado como en coloreado.

Aquí, quizás por la relación que el estudiante hace con el conjunto de Cantor, está asociando los intervalos borrados y no borrados con el conjunto de puntos del conjunto de Cantor cuyo cardinal es la del continuo.

> [I]: O sea que tú me dices que al borrar, el número de intervalos que se borran tanto los... ([V]: Son, son distintos...) pero me estás diciendo que es un número finito de intervalos borrados.
>
> [V]: Claro, en cada paso están borrando un número finito, y entonces tienes un número finito de intervalos borrados, y un número finito también de intervalos no borrados.
>
> El número es distinto, pero el cardinal de esos son iguales. Por ser productos finitos del mismo cardinal.

El alumno se da cuenta que en cada paso borra y deja sin borrar un número finito de subintervalos y que, por tanto, en un proceso infinito borraría y dejaría sin borrar un conjunto numerable de subintervalos, pero que el conjunto de puntos de cada uno de ellos tiene potencias del continuo.

> [I]: ¿Y hablasteis entre vosotros por ejemplo del ejercicio 22, de las pelotas...?
>
> [V]: Sí
>
> [V]: ¿Y también trajo problemas?
>
> [V]: Había gente que decía, si no recuerdo mal, que no se puede realizar el experimento, porque nunca puedes hacer infinitas realizaciones, es un proceso mental.Que no se puede saber claro, es una cosa que no se puede realizar, por lo tanto no tiene sentido plantearse qué pasaría. Si el problema era: si numerabas las pelotas o no las numerabas.

Aquí ya no es el sentido paradójico de la pregunta sino el aspectos físico relacionado con la continuidad del tiempo es el motivo lo que induce a la discusión.

> [V]: Si numerabas las pelotas, parecía que estuvieras metiendo 9 más, 9 más..., entonces, el número de bolas al final sería infinito.

Este es el razonamiento más intuitivo que se había mencionado anteriormente, el sentido potencial del problema.

> Pero el otro razonamiento es: "Dime qué bola... que bola está" ¿no? Si yo las numerara siempre voy metiendo tantas más, pero... quiero decir, si van numeradas, parece que estás metiendo 9 bolas más, entonces son infinitas, porque estás añadiendo una cantidad finita infinitas veces y tal. Pero por el contrario si las estás numerando y quitas la 1, y en el siguiente paso quitas la 2, y en el siguiente paso, al hacerlo infinitas veces, la pregunta qué bola sigue dentro, no tiene respuesta, es decir, no hay ninguna bola dentro, porque siempre la voy a sacar. En el paso siguiente la voy a sacar, va a haber un paso finito en el que saque esa bola.

Aquí surge la indeterminación del tipo $\infty - \infty$, que es la que va más en contra de la intuición.

> [I]: ¿Entonces cuál es tu respuesta?
> [V]: ¿La mía propia? Ehh...Yo pensé con no numerarlo cuando lo hice, pero luego cuando lo hablamos la otra respuesta me convenció bastante. O sea, creo que no se puede saber por que no hay,... no me puedes decir que no la hay, ningún número está. Pero a la vez parece que tiene que haber alguna. Por lo tanto hay 0, o no se puede saber o son infinitas.

La divergencia en el posicionamiento del estudiante, deja clara la dificultad que surge cuando se tienen en cuenta diversos factores (unos que él no se había planteado) que pueden incidir en el razonamiento. Pese a ello el convencimiento al escoger una de las posibililidades que surgieron con las discusiones que tuvo con sus compañeros ($9 \cdot \infty$ pelotas, no se puede hacer el experimento, no se puede saber, ninguna pelota, o debe haber alguna) no le facilitó una respuesta contundente ni que reflejara su conformidad al respecto.

[I]: ¿respecto de las otras posibilidades:

$9 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = 9 \cdot 30 \cdot 1$ = 270 pelotas o

$60 \cdot 10 - 60 = 60 \cdot 9 = 540$ pelotas?

[V]: Ah, lo de los dos números finitos, eso no tiene sentido ninguno, y las dos que entran en disputas,”no se puede saber” e “infinitas pelotas”.
Si no las numerases, fantástico, estás metiendo 9 pelotas, estás añadiendo una cantidad, es como una suma de una serie de términos mayores que 1. ¡Pues eso se va al infinito! Pero si las numeras, tienes ese problema, que no sabes qué pelota es.

Es muy claro el posicionamiento respecto de lo que no podría ser posible. Y se nota que cada una de las posibilidades ha sido pensada y al parecer discutida con sus compañeros, sin embargo, según deja entrever el estudiante, para él la pregunta sigue abierta, aunque haya marcado una respuesta.

[I]: En el 24 has puesto que todos los conjuntos que aparecen son particiones, ¿por qué los son?

a) $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$
b) $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$
c) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$
d) $\{0,1\} \cup \left\{\frac{e}{10^6 - n}\right\}_{n=1,2,3,\dots,1000}$

[V]: Porque todos son numerables o finitos.

Para el estudiante una partición es un conjunto numerable. En el ítem (c) por ejemplo el conjunto de puntos es infinito.

[I]: ¿Y una partición tiene que ser numerable?

[V]: Ehh..., por lo que nosotros dimos sí...creo recordar que era un... que podías escoger numerables, o sea que no tenía por qué ser un paso finito. Las sumas superiores de Riemann por ejemplo, podías coger las series superiores de Riemann. Si la partición la haces en $\mathbb{Q}$ por ejemplo, coges todos los racionales, acabas en$b$ también. En una partición tienes que llegardel 0, al 1. Y la partición que coges es del 0 al$0{,}5$, y bueno $\frac{1}{n}$intersecado con el$[0{,}1]$, ahí están, y le añades el 0.Le añades el 0, pero ya tendrías una partición numerable ¿no? Que empieza en 0 y acaba en 1, lo que pasa es que es numerable. Depende de si consideras numerable una partición o no numerable.

Es evidente que se confunde en el caso de las sumas superiores se construyen sobre una partición y, lo que es infinito (no numerable) es el conjunto de particiones posibles en un solo intervalo. El asumir una partición como un conjunto numerable, implica que puede ser infinito, como en los dos casos que marcó como verdaderos (b) y (c), que es falso ya que la definición de partición exige que el conjunto sea finito.

[I]: ¿La pregunta 30 cómo la razonaste? Has respondido que es falso.
Ítem (a):$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ es convergente porque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^n} = 0$, para todo$k \neq 0.$

[V]: No es convergente por eso, es una condición suficiente pero no necesaria. Un contraejemplo de una sucesión que te venga a la mente. Con k distinta de 0, la de con $k = -1$ ¿puede ser?, o con $k = 1$ que es divergente (el alumno está pensando en la razón y no en k a pesar de que verbalmente se refiere a este término). Bueno no, pero el del límite también sería 1 ¿o no? para que el límite sea 0 tiene que ser un número comprendido entre -1 y 1.Y esa es la serie geométrica entonces, sí, es convergente, pero no por eso, sino porque siempre la puedes acotar por la serie del valor absoluto, que es geométrica, y la razón está comprendida entre 0 y 1, por lo tanto converge.

[I]: O sea que es verdadero.

[V]: Ehmmm... Sí...

El alumno tiene errores de expresión verbal pero el razonamiento que sigue es correcto. Así, expresa de forma contradictoria las condiciones necesaria y suficiente de la convergencia de la serie respecto del límite del término general. Pero la disquisición que sigue es correcta y el estudiante se da cuenta de que se trata de una serie geométrica y por tanto la razón $\frac{1}{k}$ debe estar comprendida entre -1 y 1, a pesar de que él se equivoca al hablar y hace referencia al número entero k en vez de invocar a la razón $\frac{1}{k}$. Aún así al final sigue pensando durante un tiempo si el enunciado es verdadero o falso, ya que no da la respuesta de forma inmediata. Evidentemente se trata de un enunciado falso ya que, por una parte la condición es necesaria y, por otra, no es cierto que el límite sea cero para todo k. Aunque sea cierto para las progresiones geométricas de razón comprendida entre -1 y 1, pero esto no es cierto para todo k.

> [I]: Cuando hiciste el 32, que tiene que ver con la integral, ¿te pareció sencillo?
>
> [V]: ¿Calcular las integrales? Sí, no es difícil.
>
> [I]: ¿Las calculaste o sencillamente viste las características de la función y las calculaste?
>
> [V]: Ah son integrables, vale. Ah bueno, esto hay otro problema, es que mi noción de integrabilidad…, utilizo siempre el teorema de que el conjunto de discontinuidades sea de medida 0, de medida 0 de Lebesgue. Pero no sé si eso es integrabilidad Riemann, no sé si el teorema es: es integrable Riemann si son así, el conjunto de discontinuidades es de medida 0 por la medida con la medida de Lebesgue. La 1(a) tiene una discontinuidad sólo, la otra tiene un número numerable de discontinuidad que es de medida 0, pero no es finito, la tercera es otro tanto de lo mismo.

Parece que el estudiante se siente muy cómodo ya que al parecer maneja muy bien el criterio de Lebesgue y lo aplica en los distintos apartados de la pregunta de manera acertada. Sin embargo, la caracterización de la integral de Riemann no la sabe. No tiene tampoco clara la relación entre las dos ni las discrimina en el sentido más básico.

> [I]: El 34 (b), ¿cómo lo pensaste?
>
> [V]: Se sale por cálculo.
>
> [I]: Sí.
>
> [V]: Creo que sí que sale por cálculo…De todas formas la función tiene simetría respecto del eje normal, entonces…
>
> [I]: ¿Pero por qué pusiste falso?
>
> [V]: Ahh…, vale, porque te sale negativo, tiene que ser positivo.
>
> [I]: ¿Por qué?
>
> [V]: Es una función positiva, integrando un intervalo. El valor tiene que ser positivo.

La afirmación era la siguiente: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$. Aunque el estudiante tiene marcada la respuesta correcta, en sus razonamientos involucra propiedades de la integral pero no se percata que en el intervalo de integración hay una discontiuidad infinita.

> [V]: ¿Por qué las dos últimas y no las dos primeras?
>
> [I]: El 36, que tiene que ver con sumas de Riemann,¿me explicas tus respuestas?
>
> [V]: Te he respondido que son la (c) y la (d), las dos primeras no serían de Riemann, entre otras cosas porque el máximo y el mínimo no tienen por qué alcanzarse. Porque el máximo y el mínimo no tienen por qué ser valores que alcance$f$. Y las otras sí, lo otro es: fijas un punto además aquí está fijando un punto, bueno, pues el que tú quieras.

La discriminación entre los puntos intermedios y los valores en los que se alcanzan los extremos está bien entendida.

[I]: Para terminar, escribiste qué es un conjunto infinito.

[V]: Eso tiene vida, esa *"preguntita"...*, es que siempre es casi lo mismo, un conjunto infinito es un conjunto no finito, ya estás saltando a qué es lo no finito. Que alguno define finito. Estás en el mismo problema.

Al parecer, para el estudiante la pregunta encierra una complejidad desde su propia dialéctica, pero, en principio, opta por negar la afirmación de finitud, que es tanto como no decir nada.

[I]: Entonces quería que me expliques un poco mejor lo que quisiste decir en tu respuesta (Figura 6.19):

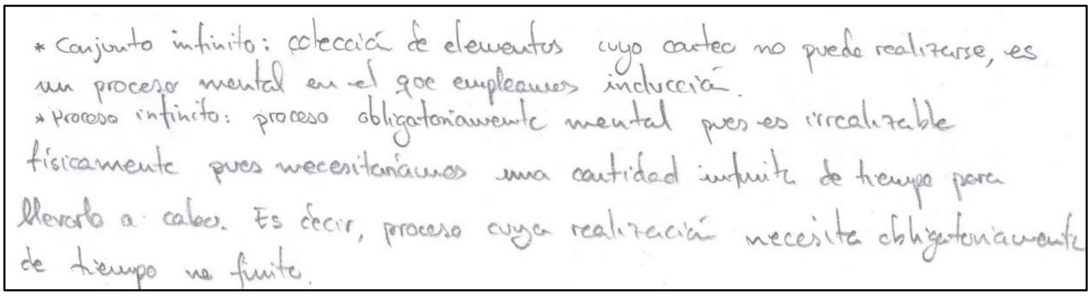

* Conjunto infinito: colección de elementos cuyo conteo no puede realizarse, es un proceso mental en el que empleamos inducción.
* Proceso infinito: proceso obligatoriamente mental pues es irrealizable físicamente pues necesitaríamos una cantidad infinita de tiempo para llevarlo a cabo. Es decir, proceso cuya realización necesita obligatoriamente de tiempo no finito.

Figura 6.19 Respuesta de Vladimir a la última pregunta del cuestionario.

[V]: Qué no puede contabilizarseporque necesitarías tiempo infinito para contarlo, físicamente hablando. (Está pensando en el proceso infinito)

Para el alumno el contexto de realización es fundamental, la imposibilidad de ejecución física en un "tiempo infinito" le supone considerar que sólo es posible concebirlo a nivel mental, considera que el estado final no puede alcanzarse.

[I]: ¿Es decir que tú ligas el infinito al tiempo?

[V]: Bueno, sí, un proceso finito, como un algoritmo o el proceso este de meter bolas, algo infinito es algo que no se puede realizar, es algo que necesitaríamos, si lo tuviéramos que realizar nosotros, de un tiempo infinito para realizarlo.

Al parecer intenta hacer una ampliación de lo que es un proceso finito, y a la propia palabra proceso le da una connotación de "realización" física, que sólo es plausible si se ejecuta en un tiempo "infinito".

> [I]: Entonces qué piensas, por ejemplo, de la situación en la cual tengo por ejemplo un segmento y lo voy dividiendo a la mitad, y luego a la mitad de la mitad, y así sucesivamente…
>
> [V]: …que es un proceso infinito, pero tú, como persona, nunca vas a partirlo. Mentalmente sí podrías pensar en qué pasaría si algo o alguien lo hicieron. Pero tú no puedes hacerlo.
>
> [V]: Un proceso finito es algo físico, que se puede realizar. Y el infinito es el salto mental para mí, es una extracción de lo que es finito, de un proceso finito…

Los procesos finitos ligados a objetos abstractos parecen no formar parte del ideario del alumno cuando piensa en lo que es un proceso finito, sólo lo concibe desde su realización.

> [I]: Entonces el concepto de límite…
>
> [V]: ¿De límite de una función o de límite de un proceso?

Parece un afirmación contradictoria a las anteriores afirmaciones "límite de un proceso"…esto es algo físico, realizable?

> [I]: Del concepto de límite, hablemos del límite de una función en un punto. ¿Para ti es un proceso o…?
>
> [V]: Es que para mí eso no es lo mismo, el límite de una función lo que te está diciendo es, como hemos dicho antes, el valor al que se aproxima…, es distinto, porque tú me dices… yo me acerco hasta este punto, y yo te digo, pues yo puedo darte una aproximación más.

El alumno está pensando en el infinito potencial. Ya en el texto escrito está pensando en este infinito y escribe "colección de elementos…" en términos de aproximaciones, él está pensando en una aproximación, otra mejor, una tercera más próxima, etc.

> [V]: En ningún momento estoy partiendo algo infinitas veces, sino, es…a ese punto, en ese entorno que tú me estás dando, todos estos están dentro de ese entorno, es una respuesta inmediata, no estoy aplicando intuición de "si tú me dieras todos los intervalos, yo te doy todos los recubrimientos…"No, no, no, en ningún momento, sólo te estoy diciendo que si tú no eres capaz de escoger un entorno, yo te escojo otro, que todos los puntos van ahí.

Al parecer para el alumno la noción de proceso infinito está ligada a la posibilidad de ir añadiendo etapas, a la potencia aristotélica. Como él afirma, no parte de infinitas veces, sino que considera que potencialmente es posible elegir otro entorno incluido en el anterior infinitas veces.

> [I]: ¿Y ustedes no vieron la definición de conjunto infinito?
>
> [V]: Sí. Claro. Para nosotros un conjunto infinito es un conjunto que tiene un subconjunto (olvida que debe ser un subconjunto propio) con el cual entra en biyección[85].

Parece que tiene claras las definiciones matemáticas de los distintos conceptos que se han tratado.

[85] Al parecer estudió la definición que dio Cantor en 1878 (Ortiz, 1994) para conjuntos finitos e infinitos respectivamente: *Un conjunto finito es uno cuya potencia es un entero positivo. Para tal conjunto todo subconjunto propio tiene una potencia menor, mientras que un conjunto infinito A tiene la misma potencia que algún subconjunto propio de A.*

[I]: Entonces, ¿por qué lo escribiste de esa manera?

[V]: Porque es mi percepción de qué es un conjunto infinito…

[I]: Ah tu percepción…

[V]: No, yo es que el infinito lo percibo físicamente, hay matemáticos que están en contra del infinito matemático como no va a haber otros en contra del infinito físico, el número de partículas del universo es finito, como puedes… no puedes hacer ese salto…la velocidad más alta es finita, es que nuestro universo es físico, lo que conocemos es finito.

Su concepción de infinito físico dista mucho de lo que es el infinito matemático, que sólo es posible según su percepción en la mente del individuo. El infinito para él está totalmente desligado de la realidad física.

[I]: Según tu percepción[86], has ampliado tus estudios en matemáticas con más cosas desde que trabajaste la integral definida, has aprendido más cosas de otros niveles y áreas… desde tu punto de vista ahora, ¿qué crees que se necesita para comprender la integral de Riemann?

[V]: La de Lebesgue. Yo creo que habría que dar toda la teoría de la medida, y dejarse de la suma de Riemann, porque la suma de Riemann está bien para visualizarlo, pero al final, medir la fibra de cada punto es un concepto natural, muy natural, y por lo que se ha visto tiene muchísimo mejor comportamiento, es una generalización brutal, por lo tanto creo que es como un paso intermedio que debería olvidarse. En muchas ramas de las matemáticas hay muchas cosas que no se explican, la geometría afín o la geometría proyectiva no sé, no se estudian como se estudia Euclides, ¿por qué?, porque se necesitaría, requeriría un tiempo y unos esfuerzos que qui-

[86] que es la de un estudiante de cuarto año que ha ampliado su bagaje académico y se decantó además por la línea de teoría de la medida

> zás no valgan la pena, porque puedes directamente pasar a la geometría analítica o a la geometría algebraica y ya al pasar por todos esos problemas, con un lenguaje mucho más potente.

Para el alumno la integral de Riemann es un concepto del cual se podría prescindir, en tanto en cuanto existe un concepto más general y potente que bastaría para cubrir las necesidades inherentes a la teoría de la medida. En esta respuesta se detecta una influencia excesiva del "rigor matemático" en el sentido de construir la mejor matemática posible.

Estamos de acuerdo en que la integral de Riemann es insuficiente para abordar ciertas cuestiones de la teoría de funciones reales en las que aparecen conjuntos con un número "no pequeño" de discontinuidades. También tiene un comportamiento poco satisfactorio para las operaciones de paso al límite. Por otra parte, la integral de Lebesgue permite utilizar una clase amplia de funciones y tiene un comportamiento muy flexible en las operaciones de paso al límite, pero requiere un desarrollo de la teoría de la medida. Sabemos también, que la integral de Lebesgue se ajusta mejor a la forma de la función, sin embargo la integral de Riemann es más intuitiva, una característica muy importante a la hora de abordar en los niveles básicos un concepto matemático.

> [I]: Y cuando tú viste la integral de Riemann qué tanto te costó generalizar al límite de una suma. Es un límite que hay que hallar, pero ya no es un límite de una función en un punto sino de una suma.
> [V]: Ah... bueno, eso no… Sí, es que las series y las series de funciones me parece prácticamente lo mismo, simplemente, para ti qué es converger, utilizas una convergencia y ya está. O sea, me quieres decir que punto a punto converge a tanto…, pues entonces fija un valor y la calculas con una serie normal. Que quieres convergencia absoluta, pues absoluta tienes que… No me parece un salto conceptual muy grande.

Al parecer el estudiante cree poseer buenos niveles de abstracción en lo que se refiere a la convergencia de series y desde su punto de vista, su encuentro conceptual con la integral fue muy familiar

> [I]: Y respecto de las preguntas, ¿cuál fue la que generó más discusión entre vosotros?
> [V]: La de las pelotas, pero sin ninguna duda. Y más ahora repasándolo porque estoy seguro de que fue esa.

Nos ratifica el alumno que ciertamente la pregunta que causó más discusión con sus compañeros fue la número 22.

Análisis global de la entrevista

Una vez que se ha realizado un análisis detallado de las respuestas dadas por el estudiante en cada uno de los focos de interés que se puntualizaron inicialmente, en las que se han localizado las ideas que se reflejan en sus respuestas, por una parte, se ha procurado hacer una interpretación global de los distintos focos, y por otra, circunscribir la viabilidad de relaciones subyacentes.

Para llevar a cabo este propósito se ha efectuado una segunda lectura de los resultados del anterior apartado, considerando los aspectos que emergieron encuadrados en cada foco, y, la postura del estudiante participante en algunos de los aspectos que anteriormente se han considerado de interés.

Del proceso de análisis general de la entrevista y de las ideas emergentes en cada foco han derivado las siguientes conclusiones:

Relacionadas con el concepto de integral definida:

- La integral de Darboux en su denominación original es desconocida.
- Los valores máximo y mínimo se confunden con los extremos superior e inferior respectivamente a la hora de definir sumas de Darboux.
- Erróneamente las sumas de Darboux se consideran como un caso particular de sumas de Riemann.
- Se desconoce la equivalencia entre las integrales de Darboux y Riemann.
- La caracterización de la integral de Riemann es confusa.
- El criterio de integrabilidad más recurrente es el criterio de Lebesgue.
- No se discrimina entre la integral de Riemnan y la de Lebesgue en el sentido más básico.
- Erróneamente se utiliza el TFCI en funciones que no cumplen las condiciones para su aplicación.
- Se debiera estudiar la integral de Lebesgue directamente en lugar de la integral definida.

Relacionadas con procesos infinitos y preguntas de interés

- Hallar analíticamente el valor de la serie geométrica asociada a la pregunta 6(c) fue complejo, la solución geométrica fue necesaria para dar la expresión algebraica de la misma.
- La identificación de $\mathbb{R}$ con un intervalo no es tácita.
- La intuición tiene una marcada presencia en la resolución de algunos problemas relacionados con los procesos infinitos, particularmente en el caso de la “escalera” quiso aproximar la línea quebrada a la hipotenusa por una franja acotada por dos diagonales cuya área tiende a cero. No concibe la estructura invariante de la línea quebrada.

- No se tienen en cuenta las condiciones para que la longitud del límite de una sucesión de curvas, sea el límite de la longitud.
- Existen muchas incoherencias entre las concepciones y las condiciones para realizar la iteración entre los operadores límite y longitud.
- Hay una fuerte influencia de la realización física en problemas que tienen que ver con procesos infinitos, pese a que no se dice nada acerca del movimiento.
- El sentido contradictorio de los procesos infinitos involucrados en el problema de las pelotas de tenis supone un problema, infinitas pelotas en un tiempo finito.
- Al analizar el problema de las pelotas se tiende a hacer variaciones para circunscribir un estado menos contradictorio.
- No hay claridad sobre el estado final del proceso, el estudiante no considera un infinito actual, completado, sino un infinito potencial.
- El estudiante descarta la posibilidad de trabajar con procesos infinitos en cualquier situación que involucre aspectos físicos.
- Los procesos finitos ligados a objetos abstractos no forman parte del ideario del alumno, sólo concibe los procesos desde su realización.
- Las anteriores conclusiones parecen contradictorias con el proceso de realización "matemática" que ha hecho el estudiante al problema de la escalera.
- El estudiante concibe la existencia del "límite" de un proceso, lo que también parece ser incoherente con su concepción de proceso.

Capítulo 7. Conclusiones, aportaciones, fortalezas, dificultades y perspectivas

En este séptimo y último capítulo de la memoria de tesis doctoral, en primer lugar, se presentan las conclusiones extraídas de esta investigación. Sin embargo, considerando la pertinencia de contemplar aspectos observados desde una mirada retrospectiva y de continuar, con la posición reflexiva que ha caracterizado el desarrollo de la investigación también se subrayan las principales aportaciones de esta tesis doctoral, se relacionan puntos fuertes y débiles que cabe mencionar en lo referente a la planificación y desarrollo de este trabajo y finalmente se exponen algunos aspectos que quedan como cuestiones abiertas asociadas a esta investigación, al igual que una perspectiva de futuro, trazando posibles vías de acceso a la investigación sobre la comprensión en el contexto del análisis matemático.

7.1 Conclusiones

La primera observación que queremos hacer está relacionada con una inquietud que se planteó en la parte introductoria de los antecedentes y que surge como reflexión sobre un fragmento del prólogo del libro de Lebesgue(2003, p.vi). Lebesgueafirmaba que las dos integrales (la de Riemann y la suya) eran conceptos "fáciles" de comprender. Ya diversos estudios de los que hemos señalado en los antecedentes han evidenciado que la integral es un concepto difícil de comprender tanto a nivel de bachillerato como para algunos estudiantes que cursan el primer año de carreras universitarias (no necesariamente el grado en Matemáticas) y en el contexto de funciones que satisfacen el TFCI. Nuestro interés se encaminaba a averiguar si tal complejidad eraextensible a estudiantes con formación específica en Matemáticas, que pareciera, según lo que dice Lebesgue, no debería ser así.

Este trabajo ha mostrado que inclusive para estudiantes con formación específica en la disciplina de las Matemáticas el concepto de integral definida resulta complejo. Los resultados no sólo sacan a la luz elementos que inciden en la comprensión que tienen los estudiantes de Matemáticas del concepto de integral definida sino que dan pistas acerca del tipo de implicación de estos elementos en el fenómeno de la comprensión.

La hipótesis principal que enunciamos en un principio sostenía que existe una relación entre la comprensión de procesos infinitos asociados a la integral definida y el propio concepto de integral. El avance de esta investigación y los resultados que se han obtenido corroboran esta hipótesis, en lo que se refiere a un contexto específico:el de los estudiantes de segundo a último año de carrera de Matemáticas, quienes ya han trabajado en distintas áreas con procesos infinitos, con la integral definida y, en algunos casos,profusamente (como por ejemplo estudiantes que han escogido electivas relacionadas con teoría de la medida). En algunas investigaciones ya se había señalado que estudiantes universitarios que han culminado satisfactoriamente los cursos de cálculo, no tienen un conocimiento conceptual satisfactorio del concepto de integral (Mahir, 2009) o inclusive, que aquellos estudiantes que comprenden adecuadamente conceptos relacionados con el TFCI a menudo tienen dificultad en identificar conexiones entre esos conceptos. Los resultados obtenidos en esta investigación abren un abanico de posibles causas vinculadasa este tipo de problemas que se han evidenciado en éstas y otras investigaciones en el avance del tema.En síntesis, determinar cómo la comprensión de los procesos infinitos propios de sucesiones y series y otros conceptos, está ligada a la comprensión de la integral definida e identificar la dialéctica de esa relación supone avanzar en la búsqueda de soluciones a los problemas de comprensión en el ámbito del Pensamiento Matemático Avanzado.

Muchas de las conclusiones están implícitas y dispersas en las distintas reflexiones de los capítulos precedentes, sin embargo vamos a precisarlas, así como su relación con los objetivos e hipótesis que se plantearon inicialmente en el capítulo introductorio de la memoria. Para ello se hará una redacción presentando los objetivos enunciados y las conclusiones asociadas a cada uno de ellos. El objetivo general:

- *OP: Detectar y caracterizar diferentes niveles de comprensión tanto de procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida como del propio concepto de integral definida y analizar la posible implicación entre las dos comprensiones.*

Este objetivo está redactado en términos globales y, no se tendrá en cuenta en la presentación de las conclusiones, ya que de él surgieron los objetivos específicos que concretan más el sentido de la investigación. Por esta razón,las conclusiones se presentarán de forma discursiva dando respuesta a cada uno de los objetivos específicos. A la redacción de las conclusiones le precederá la del objetivo correspondiente.

En primer lugar, se presentan las conclusiones que corresponden al objetivo específico OE_1.

OE_1. Analizar el desarrollo epistemológico de la integral desde la perspectiva de los procesos infinitos y distintas conceptualizaciones de la misma con el propósito de establecer conexiones con el currículo actual y fundamentar el estudio.

Una sensación que tuvo el equipo investigador al revisar investigaciones relacionadas con la comprensión del concepto de integral definida fue que ante las dificultades que encierra la comprensión del concepto de ID la opción que daban algunos autores era plantear una nueva definición de integral (Kouropatov & Dreyfus, 2013; Prabhu & Czarnocha, 2008; Turégano, 1998b). Esto hizo que nos planteáramos indagar por una parte las distintas definiciones de ID que aparecen en los libros de texto de análisis y por otra, algunos de los procesos infinitos que originalmente dieron lugar a la construcción del concepto. Quizás un estudio profuso de estos dos aspectos nos permitiese ampliar tanto la perspectiva como la fundamentación de la investigación llevada a cabo.

Tanto el estudio epistemológico como el tratamiento curricular del concepto de ID se desarrollaron en el capítulo 1 de esta memoria de investigación.

Se han presentado las ideas centrales en procesos que dieron lugar al concepto de ID, desde Arquímedes con las ideas originales y en lo posible detalladas. Se pudo constatar que el objeto original (los procesos con los cuales se ha construido el concepto de ID) guarda escasas semejanzas con los procesos infinitos que subyacen actualmente en las distintas definiciones que encontramos de ID.

Además se encontró que existen objetos ideados que florecen, influyen momentáneamente y desaparecen como los indivisibles de Cavalieri. Cuando algún objeto ideado hace siglos perdura en la actualidad es fácil afirmar que “ejerció una influencia en la actividad posterior”, en el caso de Cavalieri esto no resulta nada fácil.Conocimos igualmente, cómo las ideas de un genio despiertan la creatividad en otro, como pasó con Fermat quien reconoció su gratitud a Arquímedes por haberle mostrado el uso de las progresiones geométricas, lo que le permitió cuadrar parábolas e hipérbolas generalizadas. También descubrimos cómo el trabajo de Arquímedes estuvo a la vista de muchos durante dos mil años y solo Fermat fue capaz de hacer una generalización de este y demostrarla. Estas y muchas otras son evidencias de la complejidad de los conceptos, en el sentido de que su consolidación requirió el concurso de muchos y grandes hombres de ciencia, que comenzaron enfrentando retos de naturaleza puramente geométrica y terminaron desarrollando las más poderosas herramientas de la ciencia. El proceso histórico que ha derivado en la formalización del cálculo no siempre es vivido por el estudiante, quien, en ocasiones entra en contacto con el concepto matemático directamente por medio de la definición formal.

Se ha constatado que muchos de los elementos importantes del contexto matemático de la integral definida han venido siendo eliminados en el proceso de formalización de la misma.

El tratamiento curricular corrobora lo anteriormente expuesto, ya que las definiciones existentes de integral definida tienen escasas semejanzas con las ideas que dieron origen al concepto.

En los libros de texto de análisis estudiados se encontraron tres distintas formas de definir la integral definida: la integral de Riemann, la integral de Darboux y la integral a través de funciones escalonadas.

En cuanto a los procesos infinitos que subyacen a la integral de Riemann observamos que se ha construido contemplando en esencia dos aspectos que la determinan: por un lado el geométrico, que en última instancia, es en el que se fundamenta el principio de exhaución, y por otra parte el numérico, el de la convergencia de sumas infinitas y sus límites. Límites que como podemos ver, aun sabiendo que la función es integrable en un intervalo compacto, no se tiene necesariamente conocimiento del valor de esta integral, que es el valor de un límite. Esta definición de integral definida y el paso final le confiere un carácter estático, pero la acotación menor supone una infinitud.

En la definición de Darboux vemos que la integral depende esencialmente de las sumas superiores e inferiores, que en la práctica son difíciles de obtener con muchos nodos si no se cuenta con software adecuado para minimizar las labores algorítmicas propias de este proceso[87]y, por ende, poco útiles. Luego de calcular en cada una de las posibles infinitas particiones sus correspondientes sumas superiores e inferiores, que, de hecho, también resultan ser dos sucesiones infinitas de números reales, viene el proceso infinito de 'comparación' para hallar respectivamente el ínfimo y el supremo de estas dos sucesiones de sumas parciales de números. Aunque en la definición, en última instancia, lo que se debe verificar es que coincidan los valores extremos de las sumas, la virtud que tiene es traer consigo el valor de la integral y no es necesario comparar los valores de estas sumas con el valor de la integral que, por otra parte, es desconocido. Aunque como decíamos antes, es complicado en general efectuar estos cálculos. Para la integral de Darboux lo que se debe conseguir es una partición para que los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, tengan una longitud adecuada que permita controlar cada una de estas sumas, puesto que ese es el otro factor del cual dependen estas sumas de Darboux.

La integral vía funciones escalonadas lo que pretende es primero definir la integral para funciones escalonadas y luego se da una definición aplicable a funciones más generales a través de un método inspirado en el método de exhaución a través del cual se aproxima por exceso y por defecto la función f mediante funciones escalonadas (funciones aproximadoras) cuyas integrales en últimas hacen el papel de sumas superiores/inferiores.

En síntesis, tanto en las integrales de Riemann, de Darboux, como la que se construye vía funciones escalonadas, a diferencia de los antiguos, reposa el concepto de límite, el cual permite formalizar los procesos infinitos implícitos en el método de exhaución y las tres igualmente empiezan estableciendo una partición.

En cuanto al tratamiento de la integral en los libros de texto encontramos que no hay un consenso general sobre la manera de abordar un primer curso de cálculo.

[87] De hecho ya existen bastantes aplicaciones especialmente diseñadas para aproximar estas sumas en entornos muy amigables como Geogebra, Cabri, Mathematica .

Hemos precisado la manera en que se expone en distintos libros de texto el concepto de ID, y en particular revelado el tipo de proceso infinito que subyace y el sentido en el que se desarrolla: a partir de la definición de Riemann, la de Darboux o en el contexto de funciones escalonadas. Se tuvo en cuenta el título del capítulo, la forma en que se presentan los antecedentes al capítulo, la definición que se da y el criterio de integrabilidad según sea el caso, Darboux, Riemann o vía funciones escalonadas.

Logramos por otra parte concluir que los libros en los que se ofrece de una manera coherente, clara, concisa, lógica y rigurosa el concepto de integral definida, y que, en consecuencia, a nuestro modo de ver permiten entender de forma más sencilla el desarrollo de los procesos infinitos propios de su caracterización, son aquellos que inician el tema en sus respectivos contextos a nivel de antecedentes y con la discriminación de cada una de ellas, con la integral en el sentido de Darboux, y, luego, definen en términos de sumas de Riemann para después concluir con el tema de equivalencia. Pese a que esto no coincide con el desarrollo epistemológico de la integral, sí que permite primero manejar por cada partición dos sumas generadas por los extremos inferiores“m_i” y los extremos superiores “M_i” de cada subintervalo, y luego poder ampliar el rango de sumas sobre las que se trabaja, que dependen de un posible conjunto infinito de etiquetas por cada subintervalo. Los seis libros que trabajan en esta dirección son el de Burgos (de Burgos Román, 1994), Escuadra (Escuadra et al., 1991), Fischer (Fischer, 1983), Galindo (Galindo et al., 2003), Riaza(Riaza & Álvarez, 1997) y Spivak(Spivak, 1991), que dan un desarrollo del tema, encajando las dos presentaciones primero en los antecedentes de Darboux y luego los de Riemann(Tabla 1.5 y Tabla 1.6).

Los resultados también señalaron que el concepto de la integral se desarrolla, con coherencia didáctica en casi la mitad de los textos analizados. En uno de cada dos libros de texto, se ocupan de los procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida a partir de un solo enfoque (usualmente el de Darboux) y, a la hora de tomar referencias de otros textos, el hecho de que la integral de Darboux tenga una formulación más débil, si en el paso de la equivalencia no se facilitan algunos precedentes que las relacionen, el trabajo con los procesos infinitos implicados en cada uno de ellos resulta complicado.

Encontramos también que el único libro que desarrolla el cálculo integral de acuerdo con su desarrollo epistemológico es el libro de Apostol. La estructura del libro plantea la integración antes que la diferenciación y, posteriormente hace la conexión entre ambas.

A nivel pedagógico nos parece muy adecuada la disposición de los temas que tiene el Apostol ya que define primero la integral para funciones escalonadasy, como él mismo lo afirma, “la integral de funciones escalonadas no es más que una suma”, así que la teoría de la integración en este caso es muy sencilla y, como valor agregado, el trabajo que pueden realizar los estudiantes con estas sumas les permitirá aprender las propiedades de la integral primero para funciones sencillas como son las escalonadas, podrán adquirir experiencia en la notación de sumación , a la vez que se familiarizan con el simbolismo de la integral. Más adelante la transición a funciones más generales resultará menos difícil y vendrá de una manera más natural y familiar. El tema suplementario a la construcción de la integral vía funciones escalonadas es la definición de las integrales superior e inferior de Darboux, esta conexión es más natural que la que se da del paso de Darboux a Riemann porque los propios elementos de partida son muy distintos, salvo la partición del intervalo.

Somos conscientes que quizás las propias condiciones a nivel temporal que se suelen dar en estos cursos no permitirían este desarrollo tan minucioso de la integral y por eso entendemos que se tenga que partir directamente de la integral de Darboux.

En esencia las funciones escalonadas[88] determinan los rectángulos inferiores y superiores de Darboux, pero es posible que sea una complicación añadida para la comprensión del concepto de ID ya que se introduce otro concepto nuevo, el de función escalonada, que en cierto modo es ajeno a la función integrando. Sin embargo, los rectángulos surgen de la propia función y su construcción puede resultar más intuitiva.

> *OE_2. Averiguar el tipo de obstáculos propios de los procesos infinitos que se activan al resolver problemas relacionados con el concepto de integral definida y caracterizar la comprensión del concepto de integral definida y la comprensión de procesos infinitos subyacentes al concepto.*

Para cumplir la primera parte de este objetivo, hemos llevado a cabo un estudio independiente, que está detallado en el capítulo de antecedentes metodológicos (subapartado 4.2).

El estudio se realizó en dos partes. En la primera de ellas se hizo una identificación de obstáculos asociados a procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida encontrados en los antecedentes. En la segunda se llevó a cabo un proceso de detección de obstáculos para refinar la lista existente.

La relación de obstáculos identificados en la revisión de la literatura es la que se presenta en la primera parte del mismosubapartado(4.2)de esta memoria y, para refinar la lista elaborada a partir de los antecedentes se ha llevado a cabo un análisis a través de redes sistémicas que se explica en la segunda parte.

Los obstáculos emergentes del estudio se encuentran en las tablas 7.1 y 7.2:

[88] Para profundizar en el tema véase (Apostol, 1965).

Tabla 7.1 Obstáculos emergentes del estudio de refinamiento (a).

Particiones
Confusión de los nodos de la partición con los valores del dominio de la función.
Aceptación de un intervalo como elemento de una partición.
No discriminan que un segmento tiene área cero.
Confusión entre condiciones necesarias y condiciones suficientes para que un conjunto sea una partición.
Extremos
No identificación de los extremos con números reales.
Dificultad para manejar desigualdades y el criterio de pertenencia.
Variación infinita
Confusión de la naturaleza de variables naturales y reales o, del "n" natural como número indeterminado fijado o como variable
Asignación arbitraria del intervalo de variación.
Límites
Dificultad para establecer la existencia de límites.
Permuta el límite con una función discontinua.
Sucesiones
Mal manejo de cotas y del infinito.
Sustituir cálculos algebraicos por tanteos.
Inferir un resultado mediante un razonamiento abductivo y uso de resultados sin justificar.
Dificultad para interpretar, representar y manipular con solvencia el simbolismo algebraico de las sucesiones.
Identificación "ser decreciente" con "tener límite cero".
Signo y límite. (Si la sucesión es positiva el límite también es positivo).

Tabla 7.2Obstáculos emergentes del estudio de refinamiento (b).

Series
Dificultad para interpretar, representar ymanipular con solvencia objetos qu precisen el manejo algebraico de series.
Identificación de la serie geométrica como una suma finita
Confusión entre la convergencia del términogeneral con el de la serie.
Confusión entre las propiedades aritméticasde las series y las sucesiones.
Conversión de una serie geométrica representada gráficamente al sistema algebraico.

Identificación errónea del n-ésimo término de la serie geométrica.
Uso de sumas acumuladas parciales $[A_1 + (A_1 + A_2) + (A_1 + A_2 + A_3) + \cdots]$
Identificación de la serie geométrica con una suma finita.
Dificultad para aplicar los criterios de convergencia y sumabilidad de una serie.
No identificación como tal de la progresión geométrica de razón $\left(\frac{1}{3}\right)$ [89].
Integrales
Dificultad en el cálculo de la integral cuando se involucra más de una variable.
Dificultad para establecer las expresiones analíticas de las sumas superiores e inferiores.
Cálculo de primitivas inmediatas y otras que no son de fácil interpretación.
Identificación de serie con integral conservando el límite inferior y superior de la serie con los límites de integración.
Identificación de la integral definida con la integral indefinida.
La anulación de la ID implica la anulación de la función.
Acotación independiente de las sumas de Darboux.
Dificultad para identificar el extremo superior de la integral y la variable de integración y posible intercambio de uno y otro.

Aunque están detallados los obstáculos emergentes por cada una de las 16 preguntas del cuestionario, de acuerdo con las redes sistémicas que igualmente se elaboraron para cada pregunta, comentaremos alguno de ellos. Igualmente el capítulo de donde se han extraído estos resultados contiene unas reflexiones sobre los mismos que han surgido en el avance del análisis.

Los resultados revelaron por ejemplo que uno de cada 5 estudiantes acepta un intervalo como elemento de una partición cuando señalan la partición esto es, en el sentido usual de "partir algo" y que se interpreta como dividir algo en partes. También hallamos errores relacionados con el recubrimiento del intervalo, puesto que cuando indicaban algunos la partición como intervalos, los intervalos que escogían, no necesariamente cubrían el intervalo $[0,1]$, y,en el caso de cubrirlo, por ejemplo $[0, 0.3)$ y $[0.3, 1]$ lo que evitan es que los intervalos se intersecten y esta es una exigencia de las particiones en el sentido de la teoría de conjuntos. En una

[89] Este es un caso particular (el de nuestro cuestionario).

interpretación más geométrica, se ve de una manera muy natural ya que quieren evitar que un fragmento de "área" se cuente más de una vez (afirmamos esto porque también se encontró que uno de cada cuatro estudiantes consideran que los conceptos de integral definida y área son iguales). No caen en la cuenta que el segmento tiene área cero. También en lo que se refiere a la existencia de condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto sea una partición hubo errores (uno de cada 10).

Para la mayoría de estudiantes la definición de la suma supuso diferentes dificultades relacionadas, no sólo con la propia definición. Por ejemplo, al determinar el valor que toma la función en los puntos intermedios. Además, si el número de dichos puntos es "n", entonces la correspondiente suma de Riemann, más que comprendida es aceptada. Esto coincide con los resultados de Artigue (1991) quien señaló que muchos estudiantes realizan procedimientos rutinarios para encontrar el área "bajo" la curva, pero, difícilmente explicaban sus procedimientos y aún más, admitían que no entendían por qué los hacían. También se descubre un obstáculo relacionado con los contadores, subíndices y la discriminación de los papeles imagen/etiquetas[90] del intervalo, es decir, el desconocimiento de puntos intermedios genera ambigüedad (uno de cada tres).

La segunda parte de este objetivo se ha cumplido a través de análisis cualitativo de las respuestas del cuestionario que se realizó por ítem (subapartado 6.2). Se relacionan los actos de comprensión en las distintas categorías del marco de Sierpińska (1990) (identificación, discriminación, generalización, sistematización) que dan significado a la comprensión que tienen los estudiantes tanto de los procesos infinitos objeto de estudio, como de la integral definida.

[90] O puntos intermedios.

Se han detectado los actos que dan significado a la comprensión de cada concepto:

Los actos de comprensión asociados a las **sucesiones**:

Identificación:

- Identifica las formas de presentación sucesiones numéricas: gráfica, numérica y algebraica.
- Identifica una sucesión.

Discriminación:

- Discrimina entre el término general de una sucesión y la sucesión a_n y los elementos de la sucesión: a_1, a_2, $a_3, \dots$
- Discrimina entre los distintos tipos de sucesiones.

Generalización:

- Relaciona una sucesión con subsucesiones suyas.
- Pasa de la representación del término general a la sucesión.

Sistematización:

- Aplica la aritmética de límites de sucesiones.
- Maneja los criterios de convergencia de sucesiones y las subsucesiones.

Los actos de comprensión asociados a **variación infinita**:

Identificación:

- Identifica dominios y valores numéricos: $n \to a_n, n \to \sum_{1 \le i \le n} a_i, x \to f(x)$.

Discriminación:

- Discrimina entre conjuntos finitos e infinitos.
- Discrimina entre conjuntos numerables y no numerables.
- Discrimina entre conjuntos densos y no densos.

Generalización:

- Generaliza el concepto de conjunto infinito.

Sistematización:

- Es capaz de utilizar los criterios de caracterización de conjuntos infinitos.

Los actos de comprensión asociados a **extremos**:

Identificación:

- Identifica numérica y gráficamente extremos absolutos ($máx, mín$), extremos relativos ($máx, mín$), supremo e ínfimo ($sup, ínf$).

Discriminación:

- Discrimina entre cota superior, supremo (sup), cota inferior e ínfimo ($ínf$).

Generalización:

- Maneja conceptos de supremo e ínfimo, es decir, saber lo que es la menor cota superior y la mayor de las inferiores.

Sistematización:

Maneja los axiomas relacionados con el (sup), y el ($ínf$).

Los actos de comprensión asociados a **límites**:

Identificación:

- Identifica el concepto de límite de una función y de una sucesión, de “series de sucesiones”

Discriminación:

- Discrimina entre los conceptos de límite de una función, límite de una sucesión y límite de una serie.

Generalización:

- Es capaz de determinar si existe o no el límite de una función, serie o sucesión.

Sistematización:

- Aplica los teoremas de caracterización de límites de funciones, sucesiones y series.

Los actos de comprensión asociados a **particiones** son:

Identificación:

- Identifica e interpreta verbal o simbólicamente los elementos de un conjunto.
- Identifica la partición como un conjunto finito de puntos.

Discriminación:

- Distingue entre particiones y conjuntos que no lo son.
- Discrimina la finura de una partición.

Generalización:

- Construye de manera general particiones, sean equidistribuidas o no.

Sistematización:

- Sabe procesar algebraicamente las particiones.

Los actos de comprensión asociados a **series**:

Identificación:

- Identifica las formas de presentación de series numéricas: algebraica, gráfica y numérica.
- Identifica una serie infinita.

Discriminación:

- Discrimina entre los distintos tipos de series.
- Discrimina entre el término general de una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y una suma parcial $\sum_{i=1}^{n} a_i$.
- Discrimina la convergencia de la necesidad de que el término general tienda a cero:$\sum \frac{1}{n} = \infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Generalización:

- Pasa de la sucesión gráfica del término general a la serie.
- Sabe manejar los restos. Por ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Sistematización:

- Sabe aplicar los criterios de convergencia, y sumabilidad de una serie.
- Sabe aplicar las propiedades aritméticas de las series.

Los actos de comprensión asociados a **monotonía**:

Discriminación:

- Discrimina entre las funciones (sucesiones) que son monótonas y las que no lo son.

Sistematización:

- Utiliza adecuadamente el concepto.

Los actos de comprensión asociados a la **integral definida**:

Identificación:

- Identifica las sumas inferior y superior y discrimina entre ambas.
- Identifica la integral inferior como el extremo superior de las sumas inferiores (ídem integral superior) y discrimina entre integral inferior y superior.
- Identifica la función de Dirichlet y discrimina entre números racionales e irracionales.

Discriminación:

- Discrimina entre los conceptos área e integral definida.

Generalización:

- Generaliza la suma inferior y la suma superior.
- Generaliza el conjunto de puntos intermedios asociados a una partición.
- Generaliza y sintetiza el cálculo de áreas comprendidas entre la gráfica de una función (positiva, negativa, que cambia de signo, definida a trozos), el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.
- Generaliza el teorema del valor medio a cada uno de los subintervalos de la partición.
- Generaliza y sintetiza el área comprendida entre dos curvas y las rectas $x = a$ y $x = b$.
- Generaliza y sintetiza el concepto de integral como función del límite superior (integral indefinida): $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

Sistematización:

- Sintetiza una función integrable Darboux en un intervalo compacto $[a, b]$.
- Sintetiza las sumas inferior y superior de Darboux y la suma de Riemann, es decir: $s(f, P) \leq R(f, P, T) \leq S(f, P)$.
- Sintetiza una función integrable Riemann en un intervalo compacto $[a, b]$.

- Sintetiza la tesis de que no siempre es posible encontrar una primitiva de una función integrable.

Como se puede observar, se ha logrado caracterizar la comprensión de los procesos infinitos y de la integral definida a través de los actos de comprensión del marco de Sierpińska. Las conclusiones del siguiente objetivo van dirigidas a dar un paso adelante en el sentido de descubrir una posible relación entre la comprensión de ambos objetos matemáticos y de describirla.

OE$_3$. Determinar si existealguna relación entre la comprensión de procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida y la comprensión de la integral definida y, en caso de que exista, caracterizarla.

El avance del estudio nos ha permitido cumplir este objetivo ya que hemos encontrado elementos de comprensión relacionados con los procesos infinitos que inciden en elementos de comprensión vinculados a la integral definida.

De acuerdo con el análisis correlacional que se desarrolló en el primer parágrafo del capítulo anterior se ha hallado que la comprensión de elementos que forman parte del concepto de integral definida está relacionada con la comprensión de elementos vinculados a procesos infinitos (variaciones, particiones, sucesiones, series, límites) que curricularmente se desarrollan con anterioridad a la integral definida.

Los resultados del análisis de similaridad proporcionaron información sobre la manera en que los actos de comprensión se van agrupando de acuerdo a la homogeneidad, e indicaron el modo en que los estudiantes enfrentan los problemas relacionados con los dos objetos de estudio. El diagrama de similaridad (Figura 6.18) ha mostrado la existencia de ocho niveles de obstáculos e indican que la comprensión de los diferentes actos que dan significado a la integral definida están relacionados con los actos de comprensión vinculados a los procesos infinitos. Estos ocho nivelesevidenciaron algunas trayectorias de aprendizaje de la integral definida indicando la manera en la que una mera comprensión procedimental de los conceptos de procesos infinitos no es suficiente para superar las demandas cognitivas generadas cuando se intenta comprender cabalmente el concepto de integral definida.

Los resultados del análisis descriptivo general de cada una de las preguntas del cuestionario indican que los obstáculos que más presencia tuvieron en las respuestas de los estudiantes, en lo que respecta a los procesos infinitos son: los relacionados con actos de comprensión ligados a la discriminación y sistematización de los distintos tipos de sucesiones, la discriminación entre conjuntos que a la vez son particiones y que no lo son, además de la sistematización de sus representaciones numérica y algebraica, identificación de discriminación y sistematización de subconjuntos notables asociados a $\mathbb{R}$, generalización y sistematización de los distintos tipos de series. En cuanto a los obstáculos que se refieren a la ID, los más recurrentes fueron aquellos cuyos actos de comprensión están vinculados a la generalización y síntesis del concepto de integral definida como función del límite superior (integral indefinida): $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y los que se asocian a actos de comprensión ligados a los conceptos de sumas de Riemann y de Darboux en las categorías de generalización y sistematización.

En cuanto al rendimiento de los estudiantes, se puede decir que la mayoría tuvo un rendimiento aceptable y que uno de cada cinco tuvo rendimientobastante bajo. Uno de cada cuatro estudiantes tiene un nivel medio de preguntas correctas, es decir su rendimiento está en el intervalo $(5 - 7{,}5]$. El rendimiento máximo fue $9{,}3$.

Las conclusiones hasta ahora se han direccionado por una parte a comentar los resultados generales del cuestionario y por otra a constatar que sí existe una relación entre la comprensión del concepto de ID y la de procesos infinitos que subyacen a este concepto. Ahora, se proporcionan los resultados que señalan el tipo de relación que se ha detectado, una relación de tipo implicativo. Este análisis permitió confirmar y perfilar las características de las categorías de comprensión de integral definida y los procesos infinitos. Diversos actos de comprensión relacionados con los procesos infinitos influyen en actos inherentes a la comprensión del concepto de integral definida. Este análisis estadístico implicativo, que se ha detallado en el capítulo anterior, dio lugar a una clasificación de los actos de comprensión emergentes en los distintos procesos estudiados, y que se relacionan en la Tabla 7.3.

Tabla 7.3 Actos de comprensión de sucesiones asociados a actos de comprensión de la ID.

	Sucesiones
QU1	Identifica las formas de presentación de sucesiones numéricas: gráfica, algebraica y numérica.
QU4	Discrimina entre el término general de una sucesión a_n y los elementos de la sucesión: $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$
QU6	Relaciona una sucesión con sus subsucesiones.
QU7	Aplica la aritmética de límites de sucesiones.

El acto QU6 fue mayoritario en cuanto a su presencia en los grafos implicativos. Hasta cuatro incidencias tuvo en diferentes niveles de implicación, mientras que el QU7ha resultado ser el menos frecuente. Los actos restantes comparten el mismo número de implicaciones en el diagrama. Cabe resaltar que cada uno de estos actos se ubica en distintas categorías de comprensión de acuerdo con el marco de Sierpińska, con lo que vemos que desde los distintos niveles, la comprensión de ciertos aspectos relacionados con las sucesiones incide en la comprensión de conceptos relacionados con la integral definida. Este resultado está relacionado con los hallazgos de Turégano (1998) quien hizo una mezcla entre la visión geométrica y aritmética de las sucesiones para aproximar la idea de integral en un caso particular (la imagen del punto intermedio[91]t_i del $i-$ésimo subintervalo era la altura

[91] O etiqueta del intervalo.

media del subintervalo) que le sirvió para lograr mejorar los razonamientos de sus estudiantes relacionados con el concepto. Turégano señaló que la utilización de las sucesiones fue de gran utilidad en distintos aspectos que permitirían una mejor comprensión de la ID a sus estudiantes en su caso particular; nuestros hallazgos revelan que un estudio más profuso en distintos aspectos relacionados con las sucesiones en los actos que se han mostrado, influirá de manera positiva en la comprensión de algunos aspectos relacionados con la integral definida.

Asimismo, en lo relativo a las particiones se encontraron actos de comprensión que mostraban ser influyentes en actos relacionados con la comprensión del concepto de ID (Tabla 7.4).

Tabla 7.4 Actos de comprensión de particiones asociados a actos de comprensión de la ID.

	Particiones
PU2	Identifica la partición como un conjunto finito de puntos.
PU6	Discrimina la finura de una partición.
PU7	Construye de manera general particiones, sean equidistribuidas o no.
PU9	Sabe construir particiones equiespaciadas con paso dado.
PU10	Sabe procesar algebraicamente las particiones.

Los actos PU9 y PU10 tuvieron una presencia minoritaria (estuvieron presentes en dos de los grafos implicativos) mientras que el acto de comprensión PU6 se ha mostrado como el más frecuente en los grafos de implicación. La docencia relativa a las particiones se realiza para introducir el concepto de integral definida, esto significa que es posterior al desarrollo de la teoría de sucesiones y del estudio del cuerpo arquimediano de los números reales. El análisis implicativo, sin embargo, en una de sus implicaciones reveló que elementos de comprensión de las particiones incidían en elementos de comprensión de sucesiones y de extremos, un resultado que calificamos de interesante. Aunque parece contradictorio al desarrollo de la teoría, sin duda, la explicación hay que hallarla en la estructura de ambos conceptos, ya que el primero es un conjunto finito y los siguientes o son finitos o son infinitos (sucesiones) o hay un salto cualitativo importante a la hora de considerar el orden de un conjunto finito, por una parte, y el orden de conjuntos infinitos, por otra.

De igual forma, el análisis implicativo ha evidenciado la existencia de tres elementos de comprensión relacionados con las variaciones infinitas que influyen en la comprensión del concepto de integral definida (Tabla 7.5). Siendo el que más presencia tiene el VU4 que está relacionado con las propiedades de numerabilidad y densidad de conjuntos. Un resultado, éste, que habla por sí solo de la importancia que tiene el llegar a caracterizar los conjuntos infinitos en la consecución de la comprensión de la ID.

Tabla 7.5 Actos de comprensión de variaciones asociados a actos de comprensión de la ID.

	Variación infinita
VU3	Discrimina entre conjuntos numerables y no numerables.
VU4	Discrimina entre conjuntos densos y no densos
VU6	Generaliza el concepto de conjunto infinito.

Con respecto a las series, de manera similar, la Tabla 7.6 recoge los actos de comprensión que resultaron ser influyentes en la comprensión de actos vinculados a la integral definida.

De nuevo la forma de representar objetos matemáticos es un acto que permite al estudiante comprender mejor ciertos elementos relacionados con la integral definida. Orton (1983b) en su estudio acerca de la comprensión de relación *integral-área "bajo" la curva*, señaló que sus estudiantes tuvieron dificultades en resolver problemas con las aproximaciones cuando no se les daba la expresión algebraica de la sucesión de sumas explícitamente. Estos actos asociados a la comprensión de la integral nos dan luces acerca de la importancia que tiene el insistir a los estudiantes en la apropiación del concepto de serie en las distintas categorías que se ha manifestado a través de los actos emergentes para comprender mejor el concepto de integral definida.

Tabla 7.6Actos de comprensión de series asociados a actos de comprensión de la ID.

	Series
SU1	Identifica las formas de presentación de series numéricas: algebraica, numérica y gráfica
SU4	Discrimina entre el término general de una serie, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y una suma parcial$\sum_{i=1}^{n} a_i$.
SU5	Discrimina la convergencia de la necesidad de que el término general tienda a cero:$\sum \frac{1}{n} = \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$.
SU9	Sabe aplicar las propiedades aritméticas de las series.

También se detectaron actos relacionados con el concepto de límite, que mostraron una relación amplia no sólo con el concepto de integral definida sino también con la comprensión de otros procesos infinitos (Tabla 7.7).

Tabla 7.7 Actos de comprensión de límitesasociados a actos de comprensión de la ID.

	Límite
LU1	Identifica el concepto de límite de : una función, una sucesión, una serie.
LU2	Discrimina entre los conceptos de límite de una función, límite de una sucesión y límite de una serie.
LU4	Es capaz de determinar si existe o no el límite de una función, serie o sucesión.

Orton (1983b) en su estudio sobre la comprensión del concepto de integral definida destacó que hasta los mejores estudiantes tuvieron problemas en los ítems relacionados con el límite de una suma, particularmente en lo que se refiere a su interpretación. Por ello, como muestran los resultados, comprender mejor ciertos elementos latentes en el concepto de límite permitiría comprender mejor otros relacionados con la integral definida.

Un resultado a destacar, es la localización de elementos de comprensión relacionados con límites que implican elementos de comprensión relacionados con las sucesiones. El hecho de que en la docencia de los cursos de análisis matemático se impartan el concepto de sucesión y aritmética de sucesiones antes que el concepto de límite funcional, podría hacernos pensar contrariamente a los resultados del análisis implicativo. Sin duda, esta contradicción se debe a que el concepto de límite involucra otros conceptos más básicos que el de sucesiones, como por ejemplo el orden de la recta real (que en principio puede parecer incorrecto ya que los límites también existen, por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$donde no hay orden. Sin embargo la función distancia (o norma) tiene su imagen en $\mathbb{R}$ donde se emplea el orden en la definición épsilon-delta.), la manipulación de conjuntos de números reales y, las propiedades algebraicas de estos números, desigualdades, etc.

Asimismo emergieron actos de comprensión que tienen que ver con monotonía y extremos (Tabla 7.8). Los resultados que emergieron de estos procesos se ven reflejados en lo que encontró Vinner (2002) respecto de las imágenes conceptuales incorrectas de los estudiantes que les conducen a cometer errores como por ejemplo pensar que una sucesión debe ser monótona creciente o decreciente. En cuanto a los actos de comprensión relacionados con los extremos se verificó que algunos de ellos inciden directamente en la comprensión de la relación área-integral que tienen los estudiantes.

Tabla 7.8Actos de comprensión de monotonía y extremosasociados a actos de la ID.

	Monotonía y extremos
MU2	Discrimina entre las funciones (sucesiones) que son monótonas y las que no lo son.
EU1	Identifica numérica y gráficamente extremos absolutos ($máx, mín$), extremos relativos ($máx, mín$), supremo e ínfimo ($sup, ínf$).
EU2	Discrimina entre cota superior, supremo (sup), cota inferior e ínfimo ($ínf$).
EU3	Maneja conceptos de supremo e ínfimo, es decir, saber lo que es la menor cota superior y la mayor de las inferiores.

Hasta aquí hemos relacionado los actos de comprensión vinculados a los diferentes procesos infinitos que influyen en la apropiación del concepto de integral definida. Ahora señalaremos los resultados que relacionan los actos de comprensión vinculados a la integral definida cuya asimilación está influenciada por alguno de los actos que ya hemos detallado (Tabla 7.9).

Tabla 7.9 Actos de comprensión de la ID, asociados a la comprensión de procesos infinitos.

	Integral definida
IU1	Identifica las sumas inferior y superior y discrimina entre ambas.
IU6	Discrimina entre los conceptos área e integral definida.
IU10	Generaliza el conjunto de puntos intermedios asociados a una partición.
IU14	Generaliza y sintetiza el concepto de integral como función del límite superior (integral indefinida): $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.
IU20	Sintetiza una función integrable en un intervalo compacto $[a, b]$.

Los resultados son muy dicientes en cuanto a las distintas categorías en el marco de comprensión de Sierpińska. Los actos de comprensión emergentes desvelan las cuatro categorías: identificación, discriminación, generalización y sistematización.

Aunque los actos detectados son específicos se evidencia la relevancia de cada uno de ellos en el genérico de todos los existentes. Estos son elementos clave en la comprensión del concepto de ID y, si esta comprensión está asociada a la comprensión de actos relacionados con los procesos infinitos, merece la pena resaltar el valor de estos resultados a la hora de establecer orientaciones didácticas para su enseñanza.

En resumen, la recogida de información sobre la relación entre la comprensión de procesos infinitos y la comprensión de la integral definida ha permitido al equipo investigador detectar y caracterizar una serie de elementos de comprensión de los procesos infinitos que influyen en otros elementos de comprensión de la integral definida, además de identificar algunas correspondencias entre esos elementos que permiten distinguir diversos niveles de implicación.

> *OE_4. Averiguar cuáles concepciones del concepto de proceso infinito subyacen en la manera en la que los estudiantes razonan problemas que invocan el concepto.*

La entrevista realizada a uno de los alumnos participantes nos ha permitido conocer mejor cuáles son los elementos que movilizan cuando trabajan problemas que involucran conjuntos o procesos infinitos. Al final del cuestionario se les preguntó explícitamente a los estudiantes sobre sus concepciones de estas dos nociones. De sus respuestas explícitas y de los resultados obtenidos de las respuestas relacionadas con estos conceptos se desprender formas tácitas diferentes de concebirlos y entenderlos.

Con relación a los problemas que involucran explícitamente procesos infinitos (las preguntas 15, 20 y 22) se encontró que pocos estudiantes fueron capaces de observar la estructura invariante de la línea quebrada. En la entrevista se develó que inclusive con el conocimiento de que esta longitud es constante, la intuición sigue incidiendo en los razonamientos. Se descubrió igualmente discrepancias entre las concepciones y las condiciones que se den tener para que esto suceda, con lo que se dejó entrever la dificultad que se tiene para entender la iteración de los operadores relacionados con el límite y la medida, o en nuestro contexto, el operador integral con el límite. En la teoría matemática, el que una sucesión de curvas $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ no implica que para las longitudes $\Lambda(\gamma_n)$ y $\Lambda(\gamma)$ se cumpla $\Lambda(\gamma_n) \longrightarrow \Lambda(\gamma)$. Los alumnos pese a tener conocimientos previos de distintos conceptos formales relacionados con los procesos infinitos siguen poniendo de manifiesto dificultades intrínsecas a las contradicciones internas de los modelos intuitivos, y en una proporción que no está muy alejada de la que resultó en el estudio de Belmonte (2009). Desde la teoría de la integración, este obstáculo puede ser un germen de las dificultades que surgen con relación a las propiedades de la integral definida y la relación con los límites. Las condiciones para que los operadores "integral" y "límite" sean conmutables es lo que está detrás del problema en cuestión.

En cuanto al conjunto de segmentos no borrados de la pregunta 20, los alumnos distinguen que se trata de un conjunto no vacío, pero uno de cada dos falla en determinar la cardinalidad de los conjuntos. El hecho de que relacionen los conjuntos con el conjunto de Cantor y no con el proceso iterativo que genera una serie geométrica puede estar detrás de este conflicto. En cada paso se borra y se deja sin borrar un número finito de subintervalos y que, por tanto, en un proceso infinito borraría y dejaría sin borrar un conjunto numerable de subintervalos, pero que el conjunto de puntos de cada uno de ellos tiene potencias del continuo.

Por último, el problema de las pelotas de tenis que conduce a una indeterminación del tipo $\infty - \infty$, que surge de las "infinitas" bolas que se ponen en el barril y las "infinitas" que se sacan. Uno de cada dos estudiantes considera que dentro del barril quedan infinitas pelotas, es decir, ven el problema desde una perspectiva potencial (Roa-Fuentes & Oktaç, 2014), al igual que en el proceso de la línea quebrada, aquí persisten los modelos intuitivos del infinito. Trece de 16 profesores de bachillerato participantes en el estudio de Mamolo & Zazkis (2008) coinciden con esta perspectiva, el porcentaje difiere bastante del que arroja el presente estudio, al igual que el rango de opciones de respuesta a la pregunta. De la entrevista surgieron, desde el punto de vista del alumno, variantes al problema que lo posicionaron en distintos resultados dependiendo de las condiciones (el barril puede estar vacío, tiene infinitas pelotas, no se puede saber, tiene que quedar alguna).

Del proceso de análisis general de la entrevista y de las ideas emergentes en cada foco de interés han derivado las siguientes conclusiones:

Relacionadas con el concepto de integral definida:

- La integral de Darboux en su denominación original es desconocida.
- Los valores máximo y mínimo se confunden con los extremos superior e inferior respectivamente a la hora de definir sumas de Darboux.
- Erróneamente las sumas de Darboux se consideran como un caso particular de sumas de Riemann.
- Se desconoce la equivalencia entre las integrales de Darboux y Riemann.
- La caracterización de la integral de Riemann es confusa.
- El criterio de integrabilidad más recurrente es el criterio de Lebesgue.
- No se discrimina entre la integral de Riemnan y la de Lebesgue en el sentido más básico.
- Erróneamente se utiliza el TFCI en funciones que no cumplen las condiciones para su aplicación.
- Se debiera estudiar la integral de Lebesgue directamente en lugar de la integral definida.

Relacionadas con procesos infinitos y preguntas de interés

- Hallar analíticamente el valor de la serie geométrica asociada a la pregunta 6(c) fue complejo, la solución geométrica fue necesaria para dar la expresión algebraica de la misma.
- La identificación de $\mathbb{R}$ con un intervalo no es tácita.
- La intuición tiene una marcada presencia en la resolución de algunos problemas relacionados con los procesos infinitos, particularmente en el caso de la "escalera" se tiende aproximar la línea quebrada a la hipotenusa por una franja acotada por dos diagonales cuya área tiende a cero. No concibe la estructura invariante de la línea quebrada.
- No se tienen en cuenta las condiciones para que la longitud del límite de una sucesión de curvas, sea el límite de la longitud.
- Existen muchas incoherencias entre las concepciones y las condiciones para realizar la iteración entre los operadores límite y longitud.
- Hay una fuerte influencia de la realización física en problemas que tienen que ver con procesos infinitos, pese a que no se dice nada acerca del movimiento.
- El sentido contradictorio de los procesos infinitos involucrados en el problema de las pelotas de tenis supone un problema, infinitas pelotas en un tiempo finito.
- Al analizar el problema de las pelotas se tiende a hacer variaciones para circunscribir un estado menos contradictorio.
- No hay claridad sobre el estado final del proceso, el estudiante no considera un infinito actual, completado, sino un infinito potencial.
- El estudiante descarta la posibilidad de trabajar con procesos infinitos en cualquier situación que involucre aspectos físicos.
- Los procesos finitos ligados a objetos abstractos no forman parte del ideario del alumno, sólo concibe los procesos desde su realización.

- Las anteriores conclusiones parecen contradictorias con el proceso de realización "matemática" que ha hecho el estudiante al problema de la escalera.
- El estudiante concibe la existencia del "límite" de un proceso, lo que también parece ser incoherente con su concepción de proceso.

Para finalizar este apartado, pensamos que las conclusiones que hemos redactado y que están estructuradas según los objetivos que se propusieron, responden tanto al objetivo principal como a los objetivos específicos asociados al mismo. Consideramos que la investigación que se ha llevado a cabo ha cumplido con estos objetivos a partir de la obtención de información a través de distintos medios (cuestionarios, encuestas, entrevistas) y del análisis de los datos compilados. Este análisis ha hecho posible: descubrir conexiones entre la comprensión de los procesos infinitos y la comprensión del concepto de integral definida, localizar posibles trayectorias en el aprendizaje de la ID, fijar una definición de proceso infinito e identificar concepciones ligadas a esta noción.

7.2 Principales aportaciones de esta tesis

El objetivo fundamental de este trabajo ha sido el de contribuir con nuevos resultados a los ya aportados por la literatura especializada que pretende entender el fenómeno de la comprensión de concepto de integral definida en estudiantes de grado en Matemáticas y sobre el que la investigación en Didáctica de la Matemática apenas está dirigiendo su atención, quizá porque las investigaciones se han concentrado en el concepto de integral definida en el conjunto de funciones que satisfacen el Teorema Fundamental del Cálculo Integral. En este sentido, este trabajo puede servir para abrir diversas líneas de investigación asociadas a este concepto, para establecer ciertas orientaciones didácticas como recurso que aporte a las metodologías docentes e igualmente se puede tener en cuenta a la hora de constituir propuestas de enseñanza, para futuras investigaciones.

Una primera aportación de esta investigación es la propuesta de una definición de lo que es un proceso infinito, un conocimiento que dan por sentado las investigaciones relacionadas con este tipo de procesos. Esta definición es fruto del estudio exploratorio (subapartado 4.1) sobre las concepciones que tienen estudiantes de Matemáticas, sus profesoras y algunos investigadores del campo de Didáctica de la Matemática. El equipo investigador detectó divergencias sobre la concepción de proceso infinito, que es uno de los objetos clave del estudio. Hubo desconcierto al no encontrar de manera explícita una definición de proceso infinito, pese al vasto "campo de acción" de este concepto en lo que a las áreas relacionadas con las Matemáticas, tanto en la parte pura como en la Didáctica se refiere. Podemos quizá pensar que la noción de proceso infinito debiera ser considerada al igual que la de conjunto, como una noción primitiva que se acepta lógicamente como un término no definido, sin embargo nos encaminamos a realizar una aproximación al concepto de proceso infinito vista la necesidad de dar un primer paso para consensuar una aproximación.

En cuanto a la investigación en Educación Matemática, se proporciona un instrumento para poder analizarniveles de comprensión que puedan tener los estudiantestanto del concepto de integral definida como de procesos infinitos que subyacen al propio concepto, a través del establecimiento de actos de comprensión situados en distintas categorías.En esta investigación, se ha procurado que los actos de comprensión se ajustaran de la mejor manera posible a los contenidos propios de las asignaturas de Análisis Matemático I y II de las universidades participantes para optimizar su propósito en esta investigación.

Además, se ha elaborado un cuestionario testado que puede ser utilizado por la comunidad científica.

También se ha ampliado la relación de obstáculos identificados en investigaciones previas relacionados con el aprendizaje de la integral definida.

En lo referente al currículo, los resultados obtenidos en esta investigación transmiten la necesidad de realizar esfuerzos curriculares sistemáticos que tengan en cuenta por una parte, la complejidad del concepto de integral definida (evidenciada en el apartado 1.1) y por otra, la influencia de los procesos infinitos en la comprensión del concepto de ID. Es decir, se hace necesario potenciar el significado de las ideas relacionadas con los procesos infinitos para mejorar la comprensión del concepto de integral definida.

De igual forma, en lo que se refiere al currículo, se ha aportado un estudio sobre los distintos tipos de integrales que aparecen en los libros de texto, y, los resultados evidencian la necesidad tanto de consenso en la docencia como de coherencia con las denominaciones históricas.

Consideramos que una aportación en el ámbito de la enseñanza es que los profesores, tanto de la etapa de bachillerato como de universidad, pueden llegar a conocer y valorar las características de la implicación entre las categorías de comprensión de procesos infinitos y las de la integral definida y considerarlas en su docencia ya que estas pueden constituir trayectorias de aprendizaje.

El cuestionario en este ámbito puede servir para que los profesores evalúen los niveles de comprensión que tienen sus estudiantes de conceptos claves en el Análisis Matemático y que han sido objeto de este estudio.

7.3 Fortalezas y debilidades

Cualquier trabajo de investigación atraviesa distintas etapas, en unas tenemos momentos de mejores encuentros con nuestro objetivo de estudio, pero también hay otros episodios en los que quizá no es así. Un buen ejercicio para valorar cuáles han sido las fortalezas y limitaciones que ameritan ser considerados es recapitular en las características distintivas de esas etapas del desarrollo de la investigación. De la realización de esa tarea se establecieron algunos de esos aspectos, que son los que se señalan en este apartado.

Entre los puntos fuertes o fortalezas del trabajo de investigación destacamos:

- La posibilidad de que los resultados de este estudio tengan un impacto en la realidad del aula.
- El estudio epistemológico práctico de la integral definida desde los procesos infinitos y el contraste con el análisis de los libros de texto y el tratamiento curricular ha permitido detectar elementos eliminados en el proceso de formalización.
- La diversidad existente en las concepciones de proceso infinito de las personas participantes[92] como punto de partida parael establecimiento de una definición de proceso infinito.

[92]Estudiantes, profesoras e investigadores en Didáctica de la Matemática. (Antecedentes metodológicos).

- La compilación de datos de diversas fuentes ha permitido formular interpretaciones e inferencias más ajustadas al contexto de estudio y a los estudiantes participantes.
- La elaboración del cuestionario ad hoc de análisis que sufrió todo un proceso de creación en función de la investigación y que puede ser utilizado en otras investigaciones.

Los aspectos que se han considerado como limitaciones en esta investigación son:

- La construcción y validación del cuestionario que resultó ser exitosa tuvo bastantes dificultades a la hora de seleccionar los ítems, ya que los expertos en la materia no siempre respondieron con prontitud.
- No encontramos interés en buena parte del profesorado para aplicar los cuestionarios.
- La investigación se ha realizado con una lista amplia de categorías de comprensión que ha derivado en un principio en un cuestionario extenso que por cuestiones de realización debió ser abreviado, lo cual puede haber incidido en dejar al margen otros elementos de comprensión destacables.
- Los estudiantes pertenecían a distintos cursos así que, la logística en la aplicación de los cuestionarios resultó muy compleja. En España intervinieron universidades de tres ciudades distintas con lo que los desplazamientos tanto para la aplicación de los cuestionarios como para la realización de la entrevista supusieron emplear más tiempo de ejecución.
- La adecuación del cuestionario en el formato de preguntas dicotómicas restringe los rangos de interpretación de las respuestas.
- La cantidad de elementos, matices y heterogeneidades inherentes al conocimiento de los procesos infinitos y de la ID hacen que nuestro discerni-

miento sobre la relación entre la comprensión de ambos conceptos no sea completo, pese a que estamos finalizando esta investigación.

7.4 Líneas abiertas de investigación

Entendemos que una investigación además de aportar resultados ha de garantizar continuidad y futuras líneas de trabajo en las cuales seguir desarrollando y ampliandola comprensión de los objetos estudiados.

En relación con la primera finalidad, esta investigación ha procurado adquirir el máximo conocimiento posible sobre la comprensión que tienen estudiantes de Matemáticas del concepto de integral definida y su relación con la comprensión de procesos infinitos.

En lo que se refiere a la continuidad y las futuras líneas de trabajo, podemos partir del hecho de que los resultados que se han obtenido no son generalizables a un aula cualquiera. Sin embargo, dada la ausencia de investigacionescon las que poder contrastar se hace difícil discernir sobre la representatividad de los niveles de implicación que se han detectado y sobre la posible existencia de otros elementos de comprensión destacados. Por ello, consideramos como un problema abierto la realización de investigaciones análogas a la hemos llevado a cabo, pero teniendo en cuenta la aplicación de cuestionarios abiertos y ampliando el rango de actos de comprensión y obstáculos a los que inicialmente habíamos elaborado. Esto nos permitirá ampliar la información de los elementos de comprensión de los procesos infinitos que actúan y el tipo de implicación que tienen sobre la comprensión de la propia ID.

A través del estudio epistemológico, de los libros de texto y el tratamiento curricular hemos podido encontrar que los estudiantes no conocen procesos particulares a través de los cuales se ha construido el concepto de integral definida, dignos por su originalidad y por su repercusión en el desarrollo del concepto. Sería muy interesante profundizar en ellos y establecer formas de conexión que permitan a los alumnos reconocer y acercarse más a su epistemología, elemento fundamental del conocimiento matemático.

Aunque no era uno de los objetivos planteados en la investigación, en su desarrollo se han distinguido algunas diferencias en los niveles de corrección de los cuestionarios según el año que cursaban los estudiantes. Consideramos que profundizar en las posibles diferencias, en las características de cada grupo de estudiantes y en los factores que inciden en esta cuestión también es un problema abierto.

Investigaciones recientes relacionadas con la comprensión de la integral definida proponen introducir el concepto a partir de la idea de acumulación (Kouropatov & Dreyfus, 2009, 2013, 2014). Sería interesante estudiar los obstáculos y actos de comprensión asociados a la integral cuando se introduce a partir de esta definición.

Bibliografía

Abrahamson, D. (1998). Revisiting the Fundamental Theorem of Calculus. *Mathematics in College*. Office of Academic Affairs. The City University of New York.

Alcock, L. (2001). *Categories, definitions and mathematics : student reasoning about objects in analysis*. Tesis Doctoral no publicada, Mathematics Education Research Centre. University of Warwick.

Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(1), 1–32.

Alcock, L., & Simpson, A. (2005). Convergence of sequences and series 2: Interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(1), 77–100.

Apostol, T. (1965). *Calculus. Introducción, con vectores y geometría Analítica.*(Vol. I). Reverté, S.A.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer Science & Business Media.

Artigue, M. (1991). Analysis. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 167–198). Boston:Kluwer.

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (Vol. 54, p. 481).

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In M. Artigue, R. Douday, L. Moreno, & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 97–140). México D. C.: "una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 207–220). Netherlands: Springer.

Artigue, M. (2008). Didactical design in mathematics education. In *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08* (pp. 7–16). Rotterdam: Sense Publishers.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1997). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *MAA NOTES*, 37–54.

Asimov, I., & Paredes, M. (1977). *Cien preguntas básicas sobre la ciencia*. Alianza Editorial.

Aspinwall, L., & Miller, L. D. (1997). Students' Positive Reliance on Writing as a Process to Learn First Semester Calculus. *Journal of Instructional Psychology*, *24*(4), 253.

Azcárate, C., Camacho, M., & Sierra, M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: Investigación en didáctica del análisis, 283–293.

Azcárate, C., & Camacho-Machín, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Edición Especial: Educación Matemática*, *X*(2), 135–149.

Bachelard, G. (1993). *La formación del espíritu científico.* México: Siglo XXI.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en docentes de matemática de Colombia: la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Bajracharya, R., & Thompson, J. R. (2014). Student understanding of the fundamental theorem of calculus at the mathematics-physics interface. In *Proceedings of the 17th special interest group of the Mathematical Association of America on research in undergraduate mathematics education.* Denver (CO).

Barjracharya, R. (2012). *Student Understanding of Definite Integrals with Relevance to Physics Using Graphical Representation*.

Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de Investigación Y Formación En Educación Matemática*, *1*(2).

Bell, E. (2000). *Historia de las matemáticas.* México D. F: Fondo de cultura económica.

Belmonte, J. L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

Belmonte, J. L., & Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *14*(2), 139–171.

Bisquerra, R. A. (2004). *Metodología de la investigación educativa*.

Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., & Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula: Revista de Pedagogía de La Universidad de Salamanca*, (10), 119–135.

Bliss, J., Monk, M., & Ogborg, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research : a guide to use of systemic networks*. London: Croom Helm.

Boigues, F. J., Llinares, S., & Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierias relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica fuzzy. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *13*(3), 255–282.

Boyer, C. (2001). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *American Mathematical Monthly*, *118*(2), 99–115.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques Grenoble*, *4*(2).

Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique* *des mathématiques, 1970–1990*. Springer Science & Business Media.

Brown, A., Mcdonald, M., & Weller, K. (2008). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. *Research in Collegiate Mathematics Education VII*.

Burn, B. (2005). The vice: Some historically inspired and proof-generated steps to limits of sequences. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 269–295.

Burton, D. (2011). *The history of Mathematics an introduction*. (M. G. Hill, Ed.). New York.

Byers, V., & Erlwanger, S. (1985). Memory in Mathematical Understanding. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(3), 259–281.

Camacho-Machín, M., & Moreno, M. (2015). Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Integral. In *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM.* (pp. 121–135).

Campos, A. (2006). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Cardona, M. C. (2002). *Introducción a los métodos de investigación en educación*. Madrid: EOS Universitaria.

Cauchy, A. L. (1821). *Analyse Algébrique, 1ère partie du Cours d'analyse de l'École royale Polytechnique*. Paris: Impriḿerie Royale. Traducción al español: Curso de Análisis, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1994.

Claros, F. J., Sanchez, M. T., & Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA*, *1*(3), 125–137.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2013). *Research Methods in Education. Education*. Routledge.

Contreras, Á., & García, M. M. (2015). Investigaciones sobre Límites. In C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M. T. González, M. Moreno, & (Coord.) (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM.* (pp. 81–95). Servicio de Publicaciones Universidad de la Laguna.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: Modèles spontanés et modèles propres. In *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME* (pp. 322–326).

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Université I de Grenoble.

Cornu, B. (1991). Limits. In *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153–166).

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167–192.

Courant, R., & Robbins, H. (2002). *¿Qué son las Matemáticas?*México D. F: Fondo de cultura económica.

Couturier, R. (2009). CHIC: utilización y funcionalidades. In L. Zamora, P. Gregori, & P. Orús (Eds.), *eoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo*. Castellón, España: Innovació Digital.

Couturier, R., Gras, R., & Guillet, F. (2004). Reducing the number of variables using implicative analysis. In *Classification, Clustering, and Data Mining Applications* (pp. 277–285). Springer Berlin Heidelberg.

Cuida, Á., & Ortega, T. (en prensa). Identificación de obstáculos asociados a procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida. *Avances de Investigación En Educación Matemática*.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V., & Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. In *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 297–304).

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *Journal of Mathematical Behavior*.

de Burgos Román, J. (1994). *Cálculo infinitésimal de una variable*. McGraw-Hill.

Dolores, C., Martínez, G., Berthelot, L., Carrillo, C., López, I., & Navarro, C. (2006). *Matemática educativa: Algunos aspectos de la socioespistemologia y la visualización en el aula*. Díaz de Santos.

Donaldson, M. (1963). *A study of children's thinking*. London: Tavistock.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123).

Dubinsky, E. (1997). On learning quantification. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *16*, 335–362.

Dubinsky, E., Elterman, F., & Gong, C. (1988). The student's construction of quantification. *For the Learning of Mathematics,8*(2), 44–51.

Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. *The Teaching and Learning of Mathematics at university level*, 1–22.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(2), 253–266.

Duffin, J. M., & Simpson, A. P. (2000). A Search for Understanding. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(4), 415–427.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(2), 149–172.

Edwards, B., Dubinsky, E., & McDonald, M. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking & Learning*, *7*(1), 15–25.

Edwards, B. (1997). *Undergraduate mathematics majors' understanding and use of formal definitions in real analysis*. The Pennsylvania State University.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, *111*(May), 411–424.

Edwards, B., & Ward., M. B. (2003). Surprises from a Piece of Mathematics Education Research: Student Use of Mathematical Definitions.

Edwards, C. (2012). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Ely, R. (2007a). Nonstandard models of arithmetic found in student conceptions of infinite processes. In *In Proceedings of the 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 116–119).

Ely, R. (2007b). *Student obstacles and historical obstacles to foundational concepts of calculus*. University of Wisconsin-Madison.

Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez De Contenido Y Juicio De Expertos: Una Aproximación a Su Utilización. *Avances En Medición*, *6*, 27–36.

Escuadra, J., Rodríguez, J., & Tocino, A. (1991). *Curso de Análisis Matemático I*. Ediciones Universidad de Salamanca.

Fernández Viña, J. A. (1986). *Análisis matemático*. Tecnos, S.A.

Fernández, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto*. Universidad de Granada.

Fischbein, E. (1999). Intuition and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 11–50. Springer Nederland.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3–40.

Fischer, E. (1983). *Intermediate real Analysis*. New York: Springer-Verlag.

Galindo, F., Sanz, J., & Tristán, L. A. (2003). *Guía práctica de cálculo infinitesimal en una variable real*. Madrid: Thomson.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *8*, 169–193.

Garbin, S., & Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias acerca de las incoherencias en los esquemas concceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de Las Ciencias*, *20*(1), 87–113.

Gardiner, A. (1982). *Understanding infinity: the mathematics of infinite processes*. Courier Corporation.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *22*, 1–32.

González, P. (2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*. Nivola.

Gonzalez-Martín, A. S. (2015). Panorama Internacional de la Investigación sobre la Enseñanza-Aprendizaje de las Integrales. In C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M. T. González, M. Moreno, & (Coord.) (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza* *y aprendizaje en el contexto de la SEIEM.* (pp. 109–119). Servicio de Publicaciones Universidad de la Laguna.

Gonzalez-Martín, A. S., & Camacho-Machín, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. *Enseñanza de Las Ciencias*, *23*(1), 81-96.

Gras, R., Guillete, F., Gras, R., & Philippe, J. (2002). Réduction des colonnes d'un tableau de données par quasi-équivalence variables. *Extraction Des Connaissances et Apprentissage*, *1*(4), 197–202.

Gras, R., & Kuntz, P. (2009). El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen . In L. Zamora, P. Gregori, & P. Orús (Eds.), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo* (pp. 3–49). Castellón, España: Innovació Digital.

Gras, R., Kuntz, P., & Briand, H. (2001). Les fondements de l'analyse statistique implicative et quelques prolongements pour la fouille de données. *Mathematics and Social Sciences*, *154-155*, 9–29.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (2008). *Statistical implicative analysis: Theory and applications*. London: Springer.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1), 111–133.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility - a "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 116–140.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 27–50.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. del P. (2010). *Metodología de la investigación*. Disponible en: http://www.casadellibro.com/libro-metodologia-de-la-investigacion-5-ed-incluye-cd-rom/9786071502919/1960006.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 65–97). New York: MacMillan Publishing Company.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (pp. 1–27).

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 122–141.

Jones, S. R. (2015a). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 9–28.

Jones, S. R. (2015b). The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann sum-based conceptions in students' explanations of definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (July 2015), 1–16.

Jorba, J., & Sanmartí, N. (1994). *Enseñar, aprender y evaluar: Un proceso de regulación continua*. Els llibres de l'ICE de la UAB.

Kieren, T., Pirie, S., & Calvert, L. G. (1999). Growing minds, growing mathematical understanding: Mathematical understanding, abstraction and interaction. *Learning Mathematics: From Hierarchies to Networks*, 209–231.

Klein, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Nivola.

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2009). Integral as accumulation: A didactical perspective for school mathematics. In *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 417–424).

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 641–651.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *46*(4), 533–548.

Lakoff, G., & Nuñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic books.

Larson, R. E., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., & López, J. L. (1988). *Cálculo y geometría analítica*. McGraw-Hill, S.A.

Lebesgue, H. L. (2003). *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives*. American Mathematical Soc.

Linés, E. (1988). *Principios de Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté, S.A.

Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(2), 201–211.

Mamolo, A., & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, *10*(2), 167–182. Disponible en: http://doi.org/10.1080/14794800802233696

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 259–288.

Martínez, S. J. (1964). *Elementos de Matemáticas*. Universidad de Valladolid.

Medina, L. C. (2009). *Supertareas newtonianas: la relación del indeterminismo con la pérdida de la energía en sistemas newtonianos anómalos*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatearen Argitalpen Zerbitzua.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *6 (3)*, 221–271.

Millán-Puelles, A. (1955). *Obras Completas: Fundamentos de Filosofía*. Ediciones Rialp.

Nieto, S., & Recamán, A. (2010). Investigación y conocimiento científico en educación. Santiago Nieto Martín y Mª José Rodríguez Conde. (Coords.). In *Investigación y evaluación educativas en la sociedad del conocimiento* (pp. 81–139). Salamanca: Ed. Universidad de Salamanca.

Ortega, T., & Porres, M. (en prensa). El dinamismo de la finitud en el caso de la integral definida. ¿Cómo facilitar la comprensión? In L. Rico & M. T. Sánchez (Eds.), *Homenaje a Moisés Coriat*.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana*, *1*(2), 59–81.

Orton, A. (1980). A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults. University of Leeds.

Orton, A. (1983a). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235–250.

Orton, A. (1983b). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1–18.

Ouvrier-Buffet, C. (2003). Definition-construction and concept formation. *European Research in Mathematics Education III*, 9.

Pérez, F. J. (2015). Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. Libro electrónico. Licencia Creative Commons.

Piaget, J. (1979). *Introducción a la epistemología genética*. Buenos Aires: Paidós.

Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building Formal Mathematics on Visual Imagery: A case study and a theory. *For the Learning of Mathematics*, *22*(1), 2–10.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 7–11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 165–190.

Poincaré, H. (1946). *Ciencia y Método*. Buenos Aires: Espasa-Calpe.

Porres, M. (2012). *Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Prabhu, V., & Czarnocha, B. (2008). Redalyc.Los indivisibles en el cálculo contemporáneo, *20*(1), 53–88.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, *55*(1-3), 103–132.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. In *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61–94). Barcelona: Horsori.

Radu, I., & Weber, K. (2011). Refinements in mathematics undergraduate students' reasoning on completed infinite iterative processes. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(2), 165–180.

Rasslan, S., & Tall, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 89–96.

Riaza, R., & Álvarez, M. (1997). *Cálculo infinitesimal*. Sociedad de Amigos E.T.S.I Industriales, U.P.M.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.). *Educación Matemática*. 69–108. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Rico, L., Lupiáñez, J., & Molina, M. (Eds.). (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares, S.L.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Relime,13*(1).

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación Matemática*, *26*(1), 73–101.

Robert, A., & Schwarzenberger, R. (1991). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 127–139). Kluwer Academic Plublishers.

Robinet, J. (1983). Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *4*(3), 223–292.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(3), 217–233.

Romero, J. B. (1980). La inducción en el bachillerato (I). *Gaceta Matemática: Revista Publicada Por El Instituto" Jorge Juan" de Matemáticas Y La Real Sociedad Matemática Española*, *7*, 116–118.

Romero, J. G., & Mari, J. L. G. (2011). On Understanding and interpretation in mathematics: An integrative overview. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, (26), 1–13.

Rudin, W. (1980). *Principios de análisis matemático*. México D. C.: McGraw-Hill.

Salvat. (1973). La nueva matematica. In *Biblioteca Salvat de grandes temas.* Salvat Editores.

Sánchez, C. (1997). *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Sanmartí, N. (2007). 10 ideas clave. Evaluar para aprender. *Colección Ideas Clave*, *1*, 142.

Scaglia, S., & Coriat, M. (2003). Dos conflictos al representar números reales en la recta. *Gaceta de La Real Sociedad Matematica Española*, *6*(1), 132–150.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des“ découpages infinis” des surfaces et des solides. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *11, 241-29*(2/3), 241–294.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS*, *47*(6), 641–649.

Schwarzenberger, R. L. E., & Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *82*, 44–49.

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 46–53).

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 230–245.

Sealey, V., & Oehrtman, M. (2005). Student understanding of accumulation and Riemann sums. In *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 84–91).

Selden, A., & Selden, J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 1–13.

Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 123–151.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36.

Shtein, I. (1995). *The introduction of the integral and the connections between the integral and the derivative, by means of problems and models from the real life in the framework of the teaching of the calculus to the students for the economy and management*. Unpublished doctoral dissertation. Tel-Aviv University; Israel.

Sierpińska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *6*(1), 5–67.

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 371–397.

Sierpińska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24–36.

Sierpińska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

Sierra, M., González, M. T., & López, M. del C. (1998). Límite funcional y continuidad: desarrollo histórico y concepciones de los alumnos. In *Actas del V Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática.*Toro: SCLPM.

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9–15.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. In L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, … M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en La Enseñanza Secundaria* (pp. 125–148). Horsori.

Spivak, M. (1991). *Cálculo infinitesimal* (1ª ed.). Reverté.

Sriraman, B., & English, L. D. (2010). Theories of Mathematics Education. *Advances in Mathematics*, *13*, 311–316.

Stewart, J. (1999). *Cálculo: conceptos y contextos*. International Thomson.

Stewart, J. (2006). *Cálculo, conceptos y contextos* (Tercera Ed). México, D.F: Thomson.

Tall, D. (1980a). Intuitive infinitesimals in the calculus. In *short communications, Fourth International Congress on Mathematical Education* (p. C5).

Tall, D. (1980b). Mathematical Intuition with Special Reference to Limiting Processes. *Psychology*, *176*, 170–176.

Tall, D. (1980c). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 271–284.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, *110*, 49–53.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. (Vol 11). Springer Science & Business Media.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. *Handbookof Research on Mathematics Teaching and Learning*, 495–511.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In *Proceedings of working group* (pp. 13–28).

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In *PME conference* (Vol. 1, pp. 1–61). The program committee of the 18th PME conference.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. In A. J. Bishop, C. Kent, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289–325). Dordrecht: Kluwer Academic Plublishers.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 199–238.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Terré, J. (2001). Leibniz vida, pensamiento y obra. In *Grandes Pensadores*. Planeta De Agostini, S.A.

Thomas, M. O. J., & Hong, Y. Y. (1996). The Riemann integral in calculus: Students' processes and concepts. *Technology in Mathematics Education (Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Research Group of Australasia)*, 572–579.

Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: Considerations in developing mathematics curricula. *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, 189–243.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 229–274.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics*, *73*, 43–52.

Tirosh, D. (2002). The Role of Students' Intuitions of Infinity in Teaching the Cantorian Theory. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 199–214). Netherlands: Springer.

Tirosh, D., Stavy, R., & Cohen, S. (1998). Cognitive conflict and intuitive rules. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1257–1269.

Trigueros, M., & Escandon, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 59–85.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 215–217.

Turégano, P. (1993). *Los Conceptos en torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación Y Experiencias Didácticas*, *16*(2), 233–250.

Turégano, P. (2007). Imágenes del concepto de integral definida. *Ensayos: Revista de La Facultad de Educación de Albacete*, (22), 17–57.

Tymoczko, T., Henle, J., & Henle, J. (2000). *Sweet reason: a field guide to modern logic*. Springer.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293–305.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81).

Von Glasersfeld, E. (2008). Learning as Constructive Activity. In *Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Group of PME.* (Vol. 14).

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*. In M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman (Eds.), Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Weller, K., Dubinsky, E., Stenger, C., & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The tennis ball problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, *1*(1), 99–121.

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 219–236.

Zamora, L., Gregori, P., & Orús, P. (2009). Conceptos Fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su Soporte Computacional CHIC. In L. Zamora, P. Gregori, & P. Orús (Eds.), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo* (pp. 65–102). Castellón, España: Castelló. Innovació Digital.

Zaskis, R., & Applebaum, M. (2007). Advanced mathematical thinking: Looking back at the problem. In D. Pitta & G. Philippou (Eds.), *European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2389–2397). Larnaca, Cyprus: ERME.

Zill, D., & Warren, S. (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (Cuarta Ed.). Mc Graw Hill.

Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL

DEPARTAMENTO DE LAS CIENCIAS
EXPERIMENTALES, SOCIALES Y DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL:

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Presentada por: María Ástrid Cuida Gómez para optar al grado de
Doctora por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:
Dr. D. Tomás Ortega del Rincón
-AÑO 2016-

INDICE DE ANEXOS

Anexo 1
Guías Académicas

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

1. Datos de la Asignatura

Código	100.201	Plan	2008	ECTS	6
Carácter	Básico	Curso	1º	Periodicidad	C1
Área	Análisis Matemático				
Departamento	Matemáticas				
Plataforma Virtual	Plataforma:	Studium			
	URL de Acceso:	http://moodle.usal.es			

Datos del profesorado

Profesor	Pascual Cutillas Ripoll	Grupo / s	Todos
Departamento	Matemáticas		
Área	Análisis Matemático		
Centro	Facultad de Ciencias		
Despacho	Ed. Merced, M2330		
Horario de tutorías	Martes, miércoles y jueves de 13 a 14.		
URL Web			
E-mail	pcr@usal.es	Teléfono	923294457

Profesor	Mercedes Maldonado Cordero	Grupo / s	Todos
Departamento	Matemáticas		
Área	Análisis Matemático		
Centro	Facultad de Ciencias		
Despacho	Ed. Merced, M3303		
Horario de tutorías	De lunes a viernes de 13:00 a 14:00 o en otro horario, previa cita con el profesor		
URL Web			
E-mail	cordero@usal.es	Teléfono	923294460, ext. 1538

2. Sentido de la materia en el plan de estudios

Bloque formativo al que pertenece la materia
Cálculo Diferencial e Integral y Funciones de Variable Compleja.
Papel de la asignatura dentro del Bloque formativo y del Plan de Estudios
Formación básica. Rama de Ciencias.
Perfil profesional
Al ser una materia de carácter básico, es fundamental en cualquier perfil profesional vinculado a la Titulación de Grado en Matemáticas.

3. Recomendaciones previas

- Manejo de las operaciones elementales con números reales, polinomios y matrices.
- Conocimiento de las funciones elementales y sus propiedades: logaritmos, exponenciales y funciones trigonométricas.
- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

4. Objetivos de la asignatura

Generales
- Contribuir a la formación y desarrollo del razonamiento científico.
- Proveer al alumno de capacidades de abstracción, concreción, concisión, imaginación, intuición, razonamiento, crítica, objetividad, síntesis y precisión.

Específicos
- Conocer los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial.
- Formular y resolver problemas utilizando el lenguaje matemático.
- Aplicar los conocimientos asociados a la derivada a la resolución de problemas.

5. Contenidos

Contenidos teóricos

Tema 1. Sucesiones de números racionales. Definición de los números reales mediante sucesiones de Cauchy en Q. Estructura de anillo en R. Q como subanillo de R. Números reales positivos y números reales negativos. R como cuerpo ordenado. Cortaduras en R. Existencia del supremo y del ínfimo de un conjunto acotado de números reales. Forma decimal de un número real. Sucesiones no convergentes. Subsucesiones. Límites superior e inferior de una sucesión acotada.

Tema 2. Igualdad y desigualdad de cardinales. Teorema de Cantor-Bernstein. Desigualdad entre el cardinal de un conjunto y el cardinal de su familia de subconjuntos. Conjuntos numerables. Subconjuntos de un conjunto numerable. Numerabilidad de Q. No numerabilidad de R.

Tema 3. Distancia entre dos puntos de R. Entornos de un punto. Subconjuntos abiertos y subconjuntos cerrados de R. Puntos de acumulación. Caracterización de los subconjuntos cerrados. Interior, exterior y frontera de un conjunto. Espacios métricos. Generalización para espacios métricos de los conceptos de subconjunto abierto, subconjunto cerrado, etc., y de las propiedades fundamentales ya estudiadas en el caso particular de R. Sucesiones en un espacio métrico. Completitud. Subconjuntos compactos de un espacio métrico. Caracterización de los subconjuntos compactos de R, e idea sobre la generalización para R^n. Subconjuntos conexos de un espacio métrico. Caracterización de los subconjuntos conexos de R. Límite en un punto de una aplicación entre espacios métricos. Aplicaciones continuas. Condiciones equivalentes a la continuidad. Imágenes de conjuntos compactos y conjuntos conexos por las aplicaciones continuas. Generalizaciones de los clásicos teoremas de Weierstrass y Bolzano. Continuidad uniforme. Teorema de Heine.

Tema 4. Funciones reales de una variable real. Límite funcional. Límites laterales. Continuidad. Homeomorfismos entre intervalos cerrados. Derivada en un punto. Derivadas laterales. Interpretación geométrica de la derivada. Función derivada. Derivadas de orden superior. Idea sobre la derivación parcial de funciones de dos o más variables. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos locales. Teorema de Rolle. Teorema de Lagrange o de los incrementos finitos. Teorema de Cauchy o del valor medio. Regla de L'Hopital. Fórmula de Taylor. Propiedades de los desarrollos de Taylor. Formas del resto del desarrollo de Taylor. Concavidad. Convexidad. Puntos de inflexión. Aplicación de la fórmula de Taylor al estudio local de una función.

Contenidos prácticos

1. Números reales. Principio de Inducción. Intervalos. Sumatorios. Valor absoluto. Supremo, ínfimo, máximo y mínimo.
2. Números complejos. Operaciones elementales: suma, producto, cociente. Forma polar. Fórmula de Moivre. Logaritmos y raíces. Resolución de ecuaciones.
3. Sucesiones de números reales. Convergencia. Indeterminaciones. Cálculo efectivo de límites: infinitésimos equivalentes y criterio de Stolz. Sucesiones recurrentes.
4. Límites y continuidad. Conjuntos abiertos y cerrados. Puntos de acumulación. Cierre e interior de un conjunto. Frontera. Cálculo efectivo de límites: infinitésimos equivalentes. Estudio de la continuidad de funciones. Aplicación de los teoremas fundamentales.
5. Cálculo diferencial. Derivada en un punto. Aplicación de las reglas de derivación para el cálculo efectivo de derivadas de funciones y de sus inversas. Aplicación de los teoremas de Rolle y del valor medio. Regla de L'Hôpital. Fórmula de Taylor. Cálculo de límites mediante desarrollos limitados. Crecimiento y decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Representación aproximada de funciones. Problemas de optimización mediante la aplicación de la derivada.

6. Competencias a adquirir

Específicas

Académcias

- Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad para enunciar proposiciones en distintos campos de la Matemática, para construir demostraciones y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos.
- Conocer demostraciones rigurosas de algunos teoremas clásicos del Cálculo Diferencial.
- Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.
- Saber abstraer las propiedades estructurales (de objetos matemáticos, de la realidad observada, y de otros ámbitos) distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales y poder comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos, así como identificar errores en razonamientos incorrectos.
- Aprender de manera autónoma nuevos conocimientos y técnicas.

Disciplinares

- Manejo de los números reales y complejos.
- Manipulación de desigualdades y sucesiones.
- Comprender y trabajar intuitiva, geométrica y formalmente con las nociones de límite y derivada.
- Utilizar las reglas de derivación y los teoremas fundamentales.
- Calcular y estudiar extremos de funciones.
- Analizar y dibujar funciones, deducir propiedades de una función a partir de su gráfica.

Profesionales

- Capacidad para aplicar la teoría a la práctica.
- Comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conocimientos, procedimientos, resultados e ideas matemáticas.
- Capacitar para resolver problemas de ámbito académico, técnico, financiero o social mediante métodos matemáticos.
- Saber trabajar en equipo, aportando modelos matemáticos adaptados a las necesidades colectivas.
- Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan.

Transversales

Instrumentales:

- Capacidad de organizar y planificar.
- Identificación de problemas y planteamiento de estrategias de solución.
- Habilidades para recuperar y analizar información desde diferentes fuentes.

Interpersonales:

- Comunicación de conceptos abstractos.
- Argumentación racional.
- Capacidad de aprendizaje.
- Inquietud por la calidad.

Sistémicas:

- Creatividad.
- Habilidad para trabajar en equipos multidisciplinares.
- Planificar y dirigir.

7. Metodologías

Clases magistrales

Mediante esta fórmula se desarrollarán los contenidos teóricos, siguiendo uno o dos libros de texto de referencia, en los que se incluyen las definiciones de los diferentes conceptos y su comprensión a partir de ejemplos, así como las propiedades formuladas como teoremas y corolarios, argumentando su demostración en los casos más notables. Se fijan así los conocimientos ligados a las competencias previstas y se da paso a clases prácticas de resolución de problemas.

Resolución de problemas

A través de clases prácticas se irán resolviendo los ejercicios y problemas planteados para aplicar y asimilar los contenidos, utilizando cuando sea conveniente medios informáticos, de modo que en las clases prácticas los estudiantes se inicien en las competencias previstas.

Entrega de trabajos personales y seminarios tutelados

A partir de esas clases teóricas y prácticas los profesores propondrán a los estudiantes la realización de trabajos personales sobre problemas, contando con el apoyo del profesor en seminarios tutelados. En esos seminarios los estudiantes podrán compartir con sus compañeros y con el profesor las dudas que encuentren, obtener solución a las mismas y comenzar a desempeñar por si mismos las competencias del módulo.

Los trabajos entregados serán corregidos por el profesor y comentados posteriormente en las tutorías personales, con el fin de que puedan detectar sus posibles deficiencias, tanto de comprensión como de redacción.

Trabajo personal

Además, los estudiantes tendrán que desarrollar por su parte un trabajo personal de estudio y asimilación de la teoría, resolución de problemas propuestos y preparación de los trabajos propuestos, para alcanzar las competencias previstas.

Exposición de trabajos

Se podrán realizar exposiciones de partes de la teoría ya explicada por el profesor, o de algún enunciado cuya demostración hubiera quedado pendiente para: o bien, en casos sencillos, ser obtenida por los propios alumnos o bien ser consultada en alguno de los textos de la bibliografía indicado. Se expondrán, además, los trabajos prácticos ante el profesor y el resto de compañeros, comentándolos luego en una tutoría personal entre estudiante y profesor.

Realización de exámenes

Exámenes de teoría y resolución de problemas

8. Previsión de distribución de las metodologías docentes

		Horas dirigidas por el profesor		Horas de trabajo autónomo	HORAS TOTALES
		Horas presenciales	Horas no presenciales		
Sesiones magistrales		21		24	45
Prácticas	– En aula	21		36	57
	– En el laboratorio				
	– En aula de informática				
	– De campo				
	– De visualización (visu)				
Seminarios		6			6
Exposiciones y debates		5			5
Tutorías		3			3
Actividades de seguimiento online					
Preparación de trabajos				15	15
Otras actividades (detallar)					
Exámenes		4		15	19
TOTAL		60		90	150

9. Recursos

Libros de consulta para el alumno

- J. Escuadra Burrieza, J. Rodríguez Lombardero y A. Tocino García, *Análisis Matemático*. Hespérides. 1998.
- F. Galindo, J. Sanz, L. A. Tristán, *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en una variable real*. Ed. Thomson, 2004.

Otras referencias bibliográficas, electrónicas o cualquier otro tipo de recurso

- J. M. Ortega Aramburu, *Análisis Matemático*. Ed. Labor.
- J. Rey Pastor, P. Pi Calleja y C.A. Trejo, *Análisis Matemático* (tomo 1). Ed. Kapelusz.
- G. E. Shilov, *Elementary Real and Complex Analysis*. Dover.
- D. A. Sprecher, *Elements of Real Analysis*. Dover.
- S. Lang, *Introducción al Análisis Matemático*. Addison Wesley.
- R. Courant y F. John, *Introduction to Calculus and Analysis* (volume I). Springer.
- Programa Mathematica (Wolfram Research)
- http://www.matematicas.net

10. Evaluación

Consideraciones Generales

Se evaluará el nivel adquirido en las competencias y destrezas expuestas, así como el logro de los objetivos propuestos. En todo momento se exigirá un mínimo en cada una de las actividades a evaluar y en cada bloque del temario, evitando así el desconocimiento absoluto de alguna parte de la materia y la no realización de las actividades.

Criterios de evaluación

Teoría

- Exposición oral de temas de teoría. Hasta un 70% de la nota de teoría.
- Examen final de teoría: entre 30% y 100% de la nota final de teoría.

Problemas

- Evaluación continua.
  - Trabajos individuales: 10% de la nota final de problemas.
  - Entrega y exposición de un trabajo en equipo: 10% de la nota final de problemas.
  - 2 pruebas presenciales de problemas: 20% de la nota final de problemas.
- Examen final de problemas: 60% de la nota de problemas. Será necesario tener 4 puntos de 10 en el examen de problemas para que se cuente la evaluación continua.

La nota final será un 40% de la nota de teoría y un 60% de la nota de problemas.
La evaluación continua no es recuperable. La recuperación consistirá en un examen de teoría y otro de problemas, con el mismo peso en la calificación que el indicado anteriormente.

Instrumentos de evaluación
Actividades a evaluar • Entrega de trabajos individuales periódicamente • Entrega y exposición de un trabajos en equipo • Exposiciones teóricas • Exámenes escritos: o de teoría (conocimiento de conceptos, enunciados y razonamientos expuestos en las clases magistrales) o de problemas (resolución de enunciados análogos a los explicados en las clases prácticas y de cuestiones breves)
Recomendaciones para la evaluación
En todo momento la asistencia a las clases y seminarios es altamente recomendable. Una vez que el profesor entrega los trabajos corregidos, analizar los errores cometidos, tanto individualmente, como acudiendo a las tutorías. Ensayo previo de la exposición de los trabajos en un equipo, para detectar las posibles deficiencias en el entendimiento de los conceptos, así como en la forma de expresión. En la preparación de la parte teórica es importante comprender (los conceptos, razonamientos, etc.) y evitar la memorización automática. En cuanto a la preparación de problemas, es necesario ejercitarse con los problemas que aparecen en el libro de texto recomendado, no sólo con los problemas resueltos, sino intentando la resolución de los problemas propuestos. Resolver las dudas mediante el manejo de bibliografía y acudiendo al profesor.
Recomendaciones para la recuperación
Analizar los errores cometidos en los exámenes y en los trabajos (acudiendo para ello a la revisión). Trabajar en su preparación con las mismas recomendaciones realizadas para la evaluación.

ESTADÍSTICA

1. Datos de la Asignatura

Código	100.202	Plan	2008	ECTS	6
Carácter	Básico	Curso	1º	Periodicidad	C1
Área	Estadística e Investigación Operativa				
Departamento	Estadística				
Plataforma Virtual	Plataforma:	Studium			
	URL de Acceso:	http://moodle.usal.es			

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

1. Datos de la Asignatura

Código	100.206	Plan	2008	ECTS	6
Carácter	Básico	Curso	1º	Periodicidad	C2
Área	Análisis Matemático				
Departamento	Matemáticas				
Plataforma Virtual	Plataforma:	Studium			
	URL de Acceso:	http://moodle.usal.es			

Datos del profesorado

Profesor	Pascual Cutillas Ripoll	Grupo / s	Todos
Departamento	Matemáticas		
Área	Análisis Matemático		
Centro	Facultad de Ciencias		
Despacho	Ed. Merced, M2330		
Horario de tutorías	Martes, miércoles y jueves de 13 a 14.		
URL Web			
E-mail	pcr@usal.es	Teléfono	923294457

Profesor	María Jesús Senosiain Aramendía	Grupo / s	Todos
Departamento	Matemáticas		
Área	Análisis Matemático		
Centro	Facultad de Ciencias		
Despacho	Ed. Merced, M3305		
Horario de tutorías	Lunes 17h a 20h, viernes 11h a 13h		
URL Web			
E-mail	idiazabal@usal.es	Teléfono	923294460 ext 1538

2. Sentido de la materia en el plan de estudios

Bloque formativo al que pertenece la materia
Cálculo Diferencial e Integral y Funciones de Variable Compleja

Papel de la asignatura dentro del Bloque formativo y del Plan de Estudios
Formación básica. Rama de Ciencias.
Perfil profesional
Al ser una materia de carácter básico, es fundamental en cualquier perfil profesional vinculado a la Titulación de Grado en Matemáticas

3. Recomendaciones previas

Asignatura Análisis Matemático I, cursada en el primer cuatrimestre.

4. Objetivos de la asignatura

Generales

- Contribuir a la formación y desarrollo del razonamiento científico.
- Proveer al alumno de capacidades de abstracción, concreción, concisión, imaginación, intuición, razonamiento, crítica, objetividad, síntesis y precisión.

Específicos

- Conocer los conceptos fundamentales del cálculo integral.
- Relacionar el cálculo integral con el cálculo diferencial estudiado en la asignatura Análisis I.
- Formular y resolver problemas utilizando el lenguaje matemático.
- Aplicar los conocimientos asociados a la integral a la resolución de problemas geométricos y físicos.

5. Contenidos

Contenidos teóricos

Tema 1. Primitivas de una función dada. Integral indefinida. Método del cambio de variable para el cálculo de primitivas. Integración por partes. Integración de funciones racionales. Integración de funciones trigonométricas. Otros tipos de integrales reducibles a integrales de funciones racionales.

Tema 2. Particiones de un intervalo cerrado. Sumas de Riemann de una función acotada. Aumento de la proximidad entre las sumas de Riemann cuando se sustituye una partición por otra más fina. Integrales superior e inferior. Integral de Riemann. Idea sobre la generalización a funciones de dos o más variables. Criterio de integrabilidad. Integrabilidad de las funciones continuas. Convergencia de las sumas de Darboux de una función continua al valor de su integral. Linealidad de la integral. Subdivisión del intervalo de integración. Teorema del valor medio. Paso al límite bajo el signo integral. Continuidad y derivabilidad de funciones definidas por una integral dependiente de un parámetro. La integral de Riemann de una función continua como función de su límite superior de integración. Regla de Barrow. Cambio de variable e integración por partes para la integral definida. Integrales impropias.

Tema 3. Cálculo de áreas de figuras planas; cálculo en coordenadas polares. Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Áreas laterales de sólidos de revolución. Cálculo de longitudes de curvas planas; cálculo en coordenadas polares. Idea sobre la posibilidad de generalizar la derivación y la integración para las funciones continuas en un intervalo cerrado con valores en Rn, para su aplicación al cálculo de la longitud de una curva rectificable en R^n.

Tema 4. Series de números reales. Series de términos positivos. Comparación de series. Criterios clásicos de convergencia de series de términos positivos. Productos infinitos de números reales. Sucesiones de funciones. Convergencia puntual. Convergencia uniforme. Límite uniforme de una sucesión de funciones continuas. Límite uniforme de una sucesión de funciones integrables en un intervalo cerrado. Series de funciones. Campo de convergencia. Convergencia uniforme de una serie de funciones. Criterio de la serie numérica mayorante de Weierstrass. Series de potencias reales y complejas. Convergencia. Definición mediante series de potencias de algunas funciones elementales. Continuidad de las funciones definidas por una serie de potencias. Derivación de una serie de potencias. Series trigonométricas. Series de Fourier. Unicidad de los coeficientes. Sistemas ortogonales de funciones en un intervalo. Completitud del sistema trigonométrico. Convergencia de la serie de los cuadrados de los coeficientes de Fourier de una función continua. Desigualdad de Bessel. Convergencia de la serie de Fourier de una función de clase C1 a trozos.

Contenidos prácticos

Cálculo de primitivas: métodos de cálculo. Integrales inmediatas. Cambio de variable Integración por partes. Integrales de funciones racionales, trigonométricas e hiperbólicas. Integrales de funciones irracionales. Métodos de recurrencia.

Integral de Riemann. Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo integral al cálculo de límites y extremos relativos: relación con el cálculo diferencial. Aplicaciones geométricas del cálculo integral: áreas, volúmenes y longitudes. Aplicaciones físicas: masa, centro de gravedad.

Integrales impropias. Criterios de convergencia: criterios de comparación directa y de comparación por paso al límite. Convergencia absoluta. Criterio de Dirichlet.

Series de números reales. Criterios de convergencia: criterios de comparación directa, del cociente, de la raíz, de Raabe, del logaritmo y de condensación. Convergencia absoluta. Criterio de Leibnitz. Sucesiones y series de funciones. Convergencia uniforme y puntual de una sucesión de funciones. Continuidad, derivabilidad e integrabilidad del límite puntual. Criterios de convergencia de series de funciones: criterio de Dirichlet. Continuidad, derivabilidad e integrabilidad de la función suma. Series de potencias. Cálculo del radio de convergencia.

6. Competencias a adquirir

Específicas

Académicas

- Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad para enunciar proposiciones en distintos campos de la Matemática, para construir demostraciones y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos.
- Conocer demostraciones rigurosas de algunos teoremas clásicos del Cálculo Diferencial.
- Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.
- Saber abstraer las propiedades estructurales (de objetos matemáticos, de la realidad observada, y de otros ámbitos) distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales y poder comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos, así como identificar errores en razonamientos incorrectos.
- Aprender de manera autónoma nuevos conocimientos y técnicas.

Disciplinares

- Calcular integrales de funciones, distinguiendo el método más adecuado.
- Aplicar el teorema Fundamental del Cálculo Integral al cálculo de límites.
- Resolver problemas que impliquen el planteamiento de integrales (longitudes, áreas, volúmenes, centros de gravedad, etc.).

- Conocer la posibilidad de conmutar el paso al límite uniforme con la integral.
- Saber determinar el carácter de una serie de números reales en casos sencillos.
- Saber que una serie de funciones continuas uniformemente convergente en un intervalo cerrado puede integrarse término a término.
- Calcular el radio de convergencia de una serie de potencias. Saber que este tipo de series pueden derivarse e integrarse término a término.
- Conocer las series de potencias de las funciones elementales.
- Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de una función en casos sencillos.

Profesionales

- Capacidad para aplicar la teoría a la práctica.
- Comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conocimientos, procedimientos, resultados e ideas matemáticas.
- Capacitar para resolver problemas de ámbito académico, técnico, financiero o social mediante métodos matemáticos.
- Saber trabajar en equipo, aportando modelos matemáticos adaptados a las necesidades colectivas.
- Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan.

Transversales

Instrumentales:

- Capacidad de organizar y planificar.
- Identificación de problemas y planteamiento de estrategias de solución.
- Habilidades para recuperar y analizar información desde diferentes fuentes.

Interpersonales:

- Comunicación de conceptos abstractos.
- Argumentación racional.
- Capacidad de aprendizaje.
- Inquietud por la calidad.

Sistémicas:

- Creatividad.
- Habilidad para trabajar en equipos multidisciplinares.
- Planificar y dirigir.

7. Metodologías

Clases magistrales

Mediante esta fórmula se desarrollarán los contenidos teóricos, siguiendo uno o dos libros de texto de referencia, en los que se incluyen las definiciones de los diferentes conceptos y su comprensión a partir de ejemplos, así como las propiedades formuladas como teoremas y corolarios, argumentando su demostración en los casos más notables. Se fijan así los conocimientos ligados a las competencias previstas y se da paso a clases prácticas de resolución de problemas.

Resolución de problemas

A través de clases prácticas se irán resolviendo los ejercicios y problemas planteados para aplicar y asimilar los contenidos, utilizando cuando sea conveniente medios informáticos, de modo que en las clases prácticas los estudiantes se inicien en las competencias previstas.

Entrega de trabajos personales y seminarios tutelados

A partir de esas clases teóricas y prácticas los profesores propondrán a los estudiantes la realización de trabajos personales sobre problemas, contando con el apoyo del profesor en seminarios tutelados. En esos seminarios los estudiantes podrán compartir con sus compañeros y con el profesor las dudas que encuentren, obtener solución a las mismas y comenzar a desempeñar por si mismos las competencias del módulo.

Los trabajos entregados serán corregidos por el profesor y comentados posteriormente en las tutorías personales, con el fin de que puedan detectar sus posibles deficiencias, tanto de comprensión como de redacción.

Trabajo personal

Además, los estudiantes tendrán que desarrollar por su parte un trabajo personal de estudio y asimilación de la teoría, resolución de problemas propuestos y preparación de los trabajos propuestos, para alcanzar las competencias previstas.

Exposición de trabajos

Se podrán realizar exposiciones de partes de la teoría ya explicada por el profesor, o de algún enunciado cuya demostración hubiera quedado pendiente para: o bien, en casos sencillos, ser obtenida por los propios alumnos o bien ser consultada en alguno de los textos de la bibliografía indicado. Se expondrán, además, los trabajos prácticos ante el profesor y el resto de compañeros, comentándolos luego en una tutoría personal entre estudiante y profesor.

Realización de exámenes

Exámenes de teoría y resolución de problemas.

8. Previsión de distribución de las metodologías docentes

		Horas dirigidas por el profesor		Horas de trabajo autónomo	HORAS TOTALES
		Horas presenciales	Horas no presenciales		
Sesiones magistrales		21		24	45
Prácticas	– En aula	21		36	57
	– En el laboratorio				
	– En aula de informática				
	– De campo				
	– De visualización (visu)				
Seminarios		6			6
Exposiciones y debates		5			5
Tutorías		3			3
Actividades de seguimiento online					
Preparación de trabajos				15	15
Otras actividades (detallar)					
Exámenes		4		15	19
	TOTAL	60		90	150

9. Recursos

Libros de consulta para el alumno

- J. Escuadra Burrieza, J. Rodríguez Lombardero y A. Tocino García, *Análisis Matemático*. Hespérides. 1998.
- F. Galindo, J. Sanz, L. A. Tristán, *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en una variable real*. Ed. Thomson, 2004.

Otras referencias bibliográficas, electrónicas o cualquier otro tipo de recurso

- J. M. Ortega Aramburu, *Análisis Matemático.* Ed. Labor.
- J. Rey Pastor, P. Pi Calleja y C.A. Trejo, *Análisis Matemático* (tomo 1). Ed. Kapelusz.
- G. E. Shilov, *Elementary Real and Complex Analysis*. Dover.
- D. A. Sprecher, *Elements of Real Analysis.* Dover.
- S. Lang, *Introducción al Análisis Matemático*. Addison Wesley.
- R. Courant y F. John, *Introduction to Calculus and Analysis* (volume I). Springer.
- Programa Mathematica (Wolfram Research)
- http://www.matematicas.net

10. Evaluación

Consideraciones Generales

Se evaluará el nivel adquirido en las competencias y destrezas expuestas, así como el logro de los objetivos propuestos. En todo momento se exigirá un mínimo en cada una de las actividades a evaluar y en cada bloque del temario, evitando así el desconocimiento absoluto de alguna parte de la materia y la no realización de las actividades.

Criterios de evaluación

La teoría contará 4 puntos sobre la calificación final, y los problemas 6 puntos.

Para la parte de problemas se realizarán pruebas escritas (20% de la nota de problemas) y trabajos individuales o en grupo (20% de la nota de problemas). El examen final de problemas contará un 60% de los 6 puntos que cuentan los problemas..

Para la parte de teoría los alumnos podrán alcanzar un 70% de la nota mediante exposiciones y el 30% restante en el examen.

Instrumentos de evaluación

Actividades a evaluar

- Entrega de trabajos individuales periódicamente
- Entrega de trabajos en equipo
- Exposiciones teóricas
- Exposición de los trabajos prácticos
- Exámenes escritos (final y/o de evaluación continua):
  - de teoría (conocimiento de conceptos, enunciados y razonamientos expuestos en las clases magistrales)
  - de problemas (resolución de enunciados análogos a los explicados en las clases prácticas y de cuestiones breves)

Recomendaciones para la evaluación

En todo momento la asistencia a las clases y seminarios es altamente recomendable.

Una vez que el profesor entrega los trabajos corregidos, analizar los errores cometidos, tanto individualmente, como acudiendo a las tutorías. Ensayo previo de la exposición de los trabajos en un equipo, para detectar las posibles deficiencias en el entendimiento de los conceptos, así como en la forma de expresión.

En la preparación de la parte teórica es importante comprender (los conceptos, razonamientos, etc.) y evitar la memorización automática.

En cuanto a la preparación de problemas, es necesario ejercitarse con los problemas que aparecen en el libro de texto recomendado, no sólo con los problemas resueltos, sino intentando la resolución de los problemas propuestos.

Resolver las dudas mediante el manejo de bibliografía y acudiendo al profesor.

Asignatura: Cálculo I

Código: 16434
Centro: Ciencias
Titulación: Matemáticas
Nivel: Grado
Tipo: Formación Básica
Nº. de Créditos 9 ECTS

1. ASIGNATURA / COURSE TITLE

CÁLCULO I / CALCULUS I

1.1. Código / Course number

16434

1.2. Materia/ Content area

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

1.3. Tipo /Course type

Formación básica / Compulsory subject

1.4. Nivel / Course level

Grado / Bachelor (first cycle)

1.5. Curso / Year

1º / 1st

1.6. Semestre / Semester

1º / 1st (Fall semester)

1.7. Idioma / Language

Español. Se emplea también Inglés en material docente / In addition to Spanish, English is also extensively used in teaching material

1.8. Requisitos previos / Prerequisites

Ninguno específico / None

1.9. Requisitos mínimos de asistencia a las sesiones presenciales/ Minimun attendance requirement

La asistencia es muy recomendable/ Attendance is highly advisable

1.10. Datos del equipo docente / Faculty data

Coordinador:

Mateo Bonforte.
Módulo 17, Despacho 405 / Module 17, Office 405
Teléfono 91 497 6932 / Phone: 91 497 6932
e-mail: matteo.bonforte@uam.es
Horario de atención: a discreción, con cita previa.
/ Office hours: by appointment.

1.11. Objetivos del curso / Course objectives

Presentar los resultados básicos del Cálculo Diferencial e Integral de una variable de manera que los alumnos consigan:

- Familiarizarse con las nociones de número real, y supremo e ínfimo de conjuntos de números reales.
- Comprender el concepto de límite, tanto en el caso continuo (límites de funciones) como en el caso discreto (sucesiones y series numéricas).
- Conocer las técnicas de análisis y los teoremas principales relacionados con funciones continuas, así como sus aplicaciones prácticas.
- Manejar adecuadamente los conceptos de derivación e integración de funciones de una variable real y estudiar sus aplicaciones.

1.12. Contenidos del programa / Course contents

1. **Funciones**. Ejemplos. Funciones inyectivas y sobreyectivas. Función inversa.
2. **Límites.** El caso continuo: límites de funciones. El caso discreto: límites de sucesiones.
3. **Funciones continuas.** Definición y ejemplos.

4. **Teoremas sobre funciones continuas**. Supremos e ínfimos de conjuntos de números reales. Propiedad de Bolzano-Weierstrass y teorema de los valores intermedios.
5. **Funciones derivables**. Definición y ejemplos. Derivada de una función. Regla de la cadena. Derivadas sucesivas.
6. **Aplicaciones de la derivada**. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio. Regla de L'Hôpital. Representación gráfica: crecimiento, convexidad y concavidad. Máximos y mínimos.
7. **Cálculo integral**. Funciones integrables. Teorema fundamental del Cálculo. Técnicas de integración: cálculo de primitivas. Cambios de variable. Integración por partes.
8. **Introducción a las series**: fórmula de Taylor. Suma de series.

1.13. Referencias de consulta / Course bibliography

- LARSON, R., HOSTETLER, R.P., EDWARDS, B.H. '*Cálculo*'(6ª ed). Vol. 1 y 2. Ed. McGraw-Hill, 2001.
- SALAS, S.L. y HILLE, E. '*Cálculo de una y varias variables*' (4ªed). Volumen 1 y 2. Ed. Reverté. Barcelona, 2002.
- SPIVAK, MICHAEL. "Calculus. Cálculo Infinitesimal". Ed. Reverté. Barcelona, 1970

2. Métodos Docentes / Teaching methodology

Esta asignatura se organiza mediante clases presenciales de teoría y prácticas (90 horas) a las que se añaden las horas de trabajo personal del estudiante para el estudio y la resolución de ejercicios o trabajos planteados por el profesor (120 horas). Las restantes horas se dedican a la realización de exámenes, controles intermedios u otras actividades.
En media semanal, las horas presenciales se distribuyen en:
4 horas de teoría y problemas (en las que se imparten los contenidos teóricos acompañados de ejercicios y ejemplos y se resuelven algunos de los problemas planteados a los estudiantes)
2 horas de prácticas (en las que se pretende una participación activa del estudiante a través de la resolución de ejercicios y problemas, presentaciones de trabajos, realización de controles intermedios, etc.)

El curso consta de las siguientes actividades: clases teóricas y prácticas de aula, tutorías y examen.

Las clases de aula incluyen la presentación de los contenidos teóricos, la discusión de ejemplos y la resolución de ejercicios prácticos. Durante las clases se desarrollan los conceptos y técnicas más importantes, que se aplican de manera continuada a la resolución de ejercicios y problemas.

Se dispone de una página web en la que se cuelgan materiales de apoyo, ejemplos prácticos y ejercicios.

Como sistema de apoyo a la docencia los estudiantes disponen de tutorías individuales y electrónicas.

3. Tiempo de trabajo del estudiante / Student workload

Actividad	Tiempo estimado en horas (ECTS)
Clases teóricas	60 (2,4)
Clases prácticas	30 (1,2)
Resolución de ejercicios para entregar	30 (1,2)
Estudio	100 (4,00)
Evaluaciones*	5 (0,2)
TOTAL	**225 h (9 ECTS)**

* El resto de actividades evaluadas forman parte de las prácticas y/o se basan en los ejercicios resueltos entregados

4. Métodos de evaluación y porcentaje en la calificación final / Evaluation procedures and weight of components in the final grade

Coordinación de las actividades formativas y del sistemas de evaluación entre los distintos grupos

Cada asignatura tiene designado un coordinador. Los estudiantes de todos los grupos realizarán actividades formativas similares y el sistema de evaluación será común para todos ellos.

Sistema de evaluación

A lo largo del semestre se realizarán 2 o 3 controles de aprendizaje en el horario de clase. El profesor anunciará las fechas con suficiente antelación.
Se realizará un examen final ordinario y otro extraordinario, cuyas fechas y aulas pueden consultarse en la web de la Facultad de Ciencias:
http://www.uam.es/ss/Satellite/Ciencias/es/1234888218730/contenidoFinal/Estudios_de_Grado.htm
Evaluación continua: la calificación final de la asignatura se determinará a partir de un promedio entre las calificaciones obtenidas en los controles intermedios y la calificación del examen final. El peso correspondiente a la nota del examen final será un mínimo del 50% y un máximo del 70%, y el valor concreto se especificará al inicio del curso. Adicionalmente el profesor podrá tener en cuenta otras actividades (entrega de ejercicios, trabajos, prácticas, etc.)
En el proceso de evaluación continua, se establecerá algún sistema que permita que aquellos alumnos que obtengan bajas calificaciones en alguna de las pruebas intermedias puedan mejorarlas a lo largo del curso. Una posible opción consiste en considerar que el examen final sirve para volver a evaluar los contenidos previos, tomando como calificación final el máximo entre el promedio obtenido por la evaluación continua y la calificación obtenida en el examen final.
En todos los casos, el coordinador de la asignatura precisará la fórmula concreta de evaluación y los profesores informarán de ello en cada grupo al inicio del curso.

El estudiante que haya participado en menos de un 50% de las actividades de evaluación continua y no se presente al examen final, será calificado como “No evaluado”.

En su caso, la calificación correspondiente a la convocatoria extraordinaria será la nota obtenida en la prueba específica realizada en la fecha marcada por el calendario académico.

Las calificaciones, de acuerdo con la legislación vigente, se realizan en una escala numérica de 0-10, con un decimal.

5. Cronograma* / Course calendar

Semana	Contenido	Horas presenciales	Horas no presenciales del estudiante
1	Tema 1	4+2	6
2	Tema 2 (1ª parte)	4+2	6

Semana	Contenido	Horas presenciales	Horas no presenciales del estudiante
3	Tema 2 (2ª parte)	4+2	6
4	Tema 3	4+2	6
5	Tema 4 (1ª parte)	4+2	6
6	Tema 4 (2ª parte)	4+2	6
7	Tema 5 (1ª parte)	4+2	6
8	Tema 5 (2ª parte)	4+2	6
9	Tema 6 (1ª parte)	4+2	6
10	Tema 6 (2ª parte)	4+2	6
11	Tema 7 (1ª parte)	4+2	6
12	Tema 7 (2ª parte)	4+2	6
13	Tema 7 (3ª parte)	4+2	6
14	Tema 8	4+2	6

*Este cronograma tiene carácter orientativo.

Guía docente de la asignatura

Asignatura	CÁLCULO INFINITESIMAL		
Materia	Cálculo Diferencial e Integral y Funciones de Variable Compleja		
Módulo			
Titulación	Grado en Matemáticas		
Plan	394	**Código**	40001
Periodo de impartición	Anual	**Tipo/Carácter**	Formación Básica
Nivel/Ciclo	Grado	**Curso**	Primero
Créditos ECTS	12		
Lengua en que se imparte	Español		
Profesor/es responsable/s	Javier Sanz Gil, Miguel Fernández Duque, Sergio Villullas Merino		
Datos de contacto (E-mail, teléfono…)	Javier Sanz GIl: jsanzg@am.uva.es; 983 423 000 (centralita UVa), ext. 4644 Miguel Fernández Duque: mfduque@agt.uva.es Sergio Villullas Merino: svillu@am.uva.es		
Horario de tutorías	Se fijará por los profesores en cada cuatrimestre.		
Departamento	Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología		

1. Situación / Sentido de la Asignatura

1.1 Contextualización

Asignatura de alto valor formativo que enlaza con los conocimientos de Cálculo del Bachillerato.

1.2 Relación con otras materias

Establece nociones imprescindibles para el desarrollo de la inmensa mayoría de las materias en la Matemática.

1.3 Prerrequisitos

Ninguno.

2. Competencias

Se indican a continuación las descritas en la Memoria Verifica del Grado en Matemáticas de la UVa.

2.1 Generales

G1. Demostrar poseer y comprender conocimientos en el área de las Matemáticas a partir de la base de la educación secundaria general, a un nivel que, apoyado en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia en el estudio de las Matemáticas.

G2. Saber aplicar los conocimientos matemáticos a su trabajo o vocación de una forma profesional y poseer las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro del área de las Matemáticas.

G4. Poder transmitir, tanto de forma oral como escrita, información, ideas, conocimientos, problemas y soluciones del ámbito matemático a un público tanto especializado como no especializado.

G6. Utilizar bibliografía y herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos en Matemáticas, incluyendo los recursos telemáticos.

G7. Leer y comprender textos científicos tanto en lengua propia como en otras de relevancia en el ámbito científico, especialmente la inglesa.

G9. Gestionar de forma óptima, tanto en el trabajo individual como en equipo, el tiempo de trabajo y organizar los recursos disponibles, estableciendo prioridades, caminos alternativos e identificando errores lógicos en la toma de decisiones.

G10. Tener la capacidad de trabajar en equipo, aportando orden, abstracción y razonamiento lógico; comprobando o refutando razonadamente los argumentos de otras personas y contribuyendo con profesionalidad al buen funcionamiento y organización del grupo.

2.2 Específicas

E1. Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad para enunciar proposiciones en distintos campos de las Matemáticas, para construir demostraciones y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos.

E2. Conocer demostraciones rigurosas de algunos teoremas clásicos en distintas áreas de las Matemáticas.

E3. Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.

E6. Resolver problemas de Matemáticas, mediante habilidades de cálculo básico y otras técnicas.

E8. Planificar la resolución de un problema en función de las herramientas de que se disponga y de las restricciones de tiempo y recursos.

3. Objetivos

Adquisición de los conceptos, técnicas y métodos básicos de Cálculo Infinitesimal en una variable (ver 5.b.).

4. Tabla de dedicación del estudiante a la asignatura

ACTIVIDADES PRESENCIALES	HORAS	ACTIVIDADES NO PRESENCIALES	HORAS
Clases teóricas	45	Estudio y trabajo autónomo individual o en grupo	130
Clases prácticas	50	Preparación y redacción de ejercicios u otros trabajos	30
Laboratorios		Documentación: consultas bibliográficas, Internet…	20
Prácticas externas, clínicas o de campo			
Seminarios	15		
Otras actividades	10		
Total presencial	**120**	**Total no presencial**	**180**

5. Bloques temáticos

Bloque 1: ÚNICO

Carga de trabajo en créditos ECTS: 12

a. Contextualización y justificación

Las de la asignatura.

b. Objetivos de aprendizaje

Tener conocimiento del conjunto de los números reales y sus propiedades.
Tener conocimiento de las nociones de sucesiones y series numéricas, y del concepto de convergencia.
Comprender los conceptos de límite, continuidad, derivación e integración de funciones de una variable real, y conocer las técnicas de demostración de los teoremas principales relacionados con tales conceptos.
Ser capaz de interpretar intuitiva y/o geométricamente los conceptos que se presten a ello.
Manejar con soltura las propiedades básicas de las funciones elementales.
Dominar las técnicas de cálculo propias de la asignatura: manejo de desigualdades, cálculo de límites de sucesiones y funciones, sumación de series, cálculo de derivadas y sus aplicaciones, cálculo de primitivas, evaluación de integrales definidas e impropias.
Conocer aplicaciones del cálculo diferencial e integral en las Ciencias.

c. Contenidos

Tema 1: GENERALIDADES. CONJUNTOS NUMÉRICOS

1.- Generalidades.

2.- Números naturales. Principio de Inducción.

3.- El anillo de los números enteros.

4.- El cuerpo de los números racionales.

5.- La recta real.

6.- Conjuntos numerables.

7. Funciones elementales.

Tema 2: SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1.- Definiciones y terminología.

2.- Convergencia.

3.- Límites infinitos.

4.- Propiedades de los límites.

5.- Sucesiones equivalentes.

Tema 3: FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. LÍMITES Y CONTINUIDAD

1.- Nociones de Topología.

2.- Límites finitos.

3.- Límites infinitos.

4.- Notación de Landau.

5.- Continuidad.

6.- Teoremas básicos.

Tema 4: FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. CÁLCULO DIFERENCIAL

1.- Concepto de derivada. Primeras propiedades.

2.- Teoremas de Rolle y del valor medio. Monotonía.

3.- Fórmula de Taylor. Estudio local de funciones.

4.- Desarrollos limitados. Funciones equivalentes.

Tema 5: SERIES DE NÚMEROS REALES

1.- Definiciones y terminología. Ejemplos.

3.- Propiedades de tipo general.

4.- Series de términos positivos.

5.- Series absolutamente convergentes.

6.- Criterios de Dirichlet y Abel. Series alternadas.

7.- Producto de Cauchy de series.

Tema 6: CÁLCULO DE PRIMITIVAS

1.- Definiciones y primeras propiedades.

2.- Integración de fracciones racionales.

3.- Integración de funciones reducibles a racionales.

4.- Métodos de recurrencia.

Tema 7: INTEGRAL DE RIEMANN

1.- Construcción de Darboux.

2.- Criterios de integrabilidad.

3.- Definición de Riemann.

4.- Propiedades generales de la integral.

5.- Teorema fundamental del cálculo integral. Consecuencias.

6.- Aplicación de la integral al cálculo de áreas y volúmenes.

Tema 8: INTEGRALES IMPROPIAS

1.- Definiciones y primeras propiedades.

2.- Integración de funciones positivas: criterio de comparación, convergencia absoluta.

3.- Criterios usuales de convergencia.

d. Métodos docentes

Las actividades académicas presenciales previstas son las siguientes:

- Clases de Teoría: Desarrollo por el profesor en el aula del corpus teórico de la asignatura, generalmente en forma de lección magistral participativa.
- Clases de problemas en el aula: Comprende clases en las que se resuelven problemas y ejercicios, orientadas por el profesor, pero con intervenciones de los alumnos.
- Tutorías y seminarios: Aparte de la acción tutorial, comprende seminarios para la realización por los alumnos de problemas, bajo la supervisión del profesor, y la presentación de trabajos.
- Pruebas de evaluación: Comprende tanto los exámenes oficiales, como cualquier otra prueba que pueda realizarse a lo largo del curso.

e. Plan de trabajo

El método de trabajo será el siguiente:

- Se proporcionarán al alumno materiales docentes, ya sea elaborados por el propio profesorado de la asignatura, ya de fácil acceso en la red o en la biblioteca, para que aquel se encargue de preparar la materia con antelación a su presentación en las clases magistrales participativas o de resolución de problemas.

- Una vez realizada la explicación de cada parte teórica y práctica de la asignatura, resolviendo las dudas o cuestiones que puedan haber surgido, se pedirá que el alumno trabaje de forma individual o en grupo sobre una colección de problemas proporcionada por el profesor, que puede ser ampliada con la bibliografía propuesta.

- Parte de estos problemas serán resueltos en clase, ilustrando los resultados teóricos y desarrollando las técnicas de resolución propias del Cálculo Infinitesimal.

- El alumno podrá realizar tres pruebas escritas de evaluación continua durante cada cuatrimestre, cuyos resultados le permitirán conocer las fortalezas y debilidades de su proceso de aprendizaje.

- Se utilizará una plataforma virtual de apoyo basada en Moodle que, aparte de proporcionar los materiales básicos de la asignatura, incorporará foros temáticos (resolución de dudas, consultas, etc.), pruebas de autoevaluación, etc.

f. Evaluación

La evaluación tiene dos componentes diferenciadas, la evaluación continua y la realización de exámenes escritos, con una ponderación cuyas particularidades se explican a continuación.

En el primer cuatrimestre se realizarán tres pruebas escritas de evaluación continua, en fechas que se comunicarán con la debida antelación, con una duración de una hora, y con un valor de 1 punto cada una. La suma de las calificaciones de estas tres pruebas, que llamamos EVC1, será un valor entre 0 y 3 puntos. El examen cuatrimestral de enero-febrero se puntuará sobre 10 puntos. Si la nota obtenida en este examen se llama EX1, la calificación del primer cuatrimestre, C1, será la mayor entre EX1 y EVC1+0,7*EX1, es decir, la mejor entre la nota del examen cuatrimestral y la media ponderada de éste (con un peso del 70%) y la calificación de la evaluación continua (con un peso del 30%).

En el segundo cuatrimestre se procederá de igual modo con la evaluación continua, obteniéndose el valor EVC2. En el examen final ordinario (en junio) de la asignatura, caben dos opciones:

a) Si C1 es mayor o igual que 4 puntos, el alumno puede elegir (en el momento de entrega del examen de la convocatoria ordinaria) entre:

a.1) Examinarse de toda la asignatura: la calificación en el examen final (EF) será de hasta 10 puntos. La calificación en la convocatoria ordinaria (CO) será la mayor entre EF y 0,5*(EVC1+EVC2)+0,7*EF, es decir, la mejor entre la nota del examen final y la media ponderada de éste (con un peso del 70%) y la calificación promediada de la evaluación continua en los dos cuatrimestres (con un peso del 30%). Se supera la asignatura si CO es mayor o igual que 5 puntos.

a.2) Hacerlo sólo de los contenidos del segundo parcial: la nota del segundo cuatrimestre C2 será de nuevo la mayor entre la del examen del segundo cuatrimestre (EX2) y el valor EVC2+0,7*EX2. Superará la asignatura siempre que C2 sea al menos 4 puntos, y que la media aritmética entre C1 y C2, que llamamos de nuevo CO, sea mayor o igual que 5 puntos. La calificación será igual a CO.

b) Si C1 es menor que 4 puntos, el alumno habrá de examinarse de toda la asignatura, y se procederá como se ha indicado en a.1).

En la convocatoria extraordinaria (en el mes de julio) se realizará un examen de modelo único de toda la asignatura, con una nota EE entre 0 y 10 puntos. La calificación en esta convocatoria (CE) será la mayor entre EE y 0,5*(EVC1+EVC2)+0,7*EE.

Las pruebas de evaluación continua constarán de un tema de teoría, con un peso del 40% de la nota, y de varios ejercicios con un peso global del 60%.

Los exámenes cuatrimestrales y finales (ordinario y extraordinario) constarán de teoría, cuestiones y problemas. El peso de la teoría será del 16%, el de las cuestiones será del 24%, y el 60% restante corresponderá a los problemas.

g. Bibliografía básica

- Burgos, J. de: Cálculo Infinitesimal de una variable. McGraw-Hill, 1994.

- Fernández Viña, J. A.: Lecciones de Análisis Matemático I. Tecnos, 1979.

- Fernández Viña, J.A. & Sánchez, E.: Ejercicios y Complementos de Análisis Matemático I . Tecnos, 1979.

- Galindo, F.; Sanz, J. & Tristán, L. A.: Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en una Variable Real. Thomson, 2003.

- García, A. y otros: Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable. GLAGSA, 1994.

- Linés, E.: Análisis Matemático, Reverté, 1988.

- Ortega, J.: Introducción al Análisis Matemático, Labor, 1993.

- Spivak, M.: Calculus, Reverté,

- Tomeo, V.; Uña, I. & San Martín, J.: Problemas resueltos de Cálculo en una variable, Thomson, 2005.

h. Bibliografía complementaria

- Apóstol, T.M.: Análisis Matemático, Reverté, 1991.

- Apóstol, T.M.: Calculus Vols.1 y 2, Reverté.

- Coquillat, F.: Cálculo Integral, Tebar Flores, 1997.

- Kitchen, J. A.: Cálculo Infinitesimal, McGraw-Hill, 1994.

- Marsden, J. & Hoffman, A.: Análisis Clásico Elemental, Addison-Wesley, 1998.

- Stewart, J.: Cálculo Diferencial e Integral. Thomson, 1999

- Tebar Flores: Cálculo Infinitesimal Vol. 1 y 2, Ed. Tebar Flores.

i. Recursos necesarios

El profesorado de la asignatura hará accesible a los alumnos el conjunto de materiales y recursos de apoyo que considere adecuado utilizar en la preparación de la asignatura, a través de la página web de la Uva, de la reprografía del centro o, cuando lo considere conveniente, mediante el entorno de trabajo en la plataforma Moodle ubicada en el Campus Virtual de la Universidad de Valladolid.

6. Temporalización (por bloques temáticos)

BLOQUE TEMÁTICO	CARGA ECTS	PERIODO PREVISTO DE DESARROLLO
Único	12	Septiembre-junio

7. Tabla resumen del sistema de calificaciones

INSTRUMENTO/PROCEDIMIENTO	PESO EN LA NOTA FINAL	OBSERVACIONES
Pruebas escritas de evaluación continua	30%	Ver el apartado 5.f (Evaluación)
Pruebas escritas parciales o finales	70%	Ver el apartado 5.f (Evaluación)

8. Consideraciones finales

Anexo 2
Encuesta Alumnos Estudio Exploratorio

Estudio Exploratorio: Encuesta a Estudiantes

Puesto que la encuesta dirigida a los estudiantes, fue efectuada por cinco de ellos, vimos factible presentar cada una de sus respuestas. A continuación enunciamos la encuesta y, posteriormente, las respectivas respuestas de los estudiantes.

Encuesta a Estudiantes

- **Problema** Sea $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subseteq (0,\infty)$. Para cada $n \geq 1$ se considera la función $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = e^{-\alpha_n x}$. Demuestre que para cada n existe un único $\beta_n \in (0,1)$ tal que $f_n(\beta_n) = \beta_n$.

- **Solución** El teorema de Bolzano implica que la función $f_n - id$ debe anularse en $(0,+\infty)$ puesto que se cumple $(f_n - id)(0) = 1$ y además $\lim_{x\to\infty} (f_n(x) - x) = -\infty$. Por otro lado, la derivada de $f_n - id$ es negativa en cada $x \in [0,\infty)$ así que $f_n - id$ es esctrictamente decreciente en el intervalo $[0,\infty)$, lo que implica que sólo se anulará una vez. Dicho de otra forma, existe un único $\beta_n \in (0,\infty)$ tal que $f_n(\beta_n) = \beta_n$. Como $f_n(0,+\infty) = (0,1)$, debe tenerse que $\beta_n \in (0,1)$.

- **Cuestiones a responder:**

  (a) Si encuentra otra solución a cualquiera, escríbala.

  (b) Determine los procesos infinitos que subyacen tanto en el planteamiento como en la resolución del problema anterior (Incluya los que se encuentran en la solución opcional, en caso de haberla hallado).

  (c) Cuáles procesos infinitos, cree usted que son relevantes a la hora de definir el concepto de Integral Definida?

  (d) Considera que ha comprendido de manera satisfactoria los procesos infinitos, y sus aplicaciones en la resolución de problemas?

  (e) Cuánto tiempo dedica semanalmente al estudio de esta asignatura?

  (f) Cuáles de los libros incluídos en la bibliografía de la asignatura ha consultado?

Anexo 3

Respuestas de los Alumnos Estudio Exploratorio

Estudio Exploratorio: Respuestas de los Estudiantes

Estudiante 1 (E1)

(a) Ver Gráfica (1)[1]. Derivamos ambas funciones para ver que en $(0,1)$ sus derivadas son constantes.
$y_a{}' = 1$ (creciente); $y_b{}' = -\alpha_n e^{-\alpha_n x} = \frac{-\alpha_n}{e^{\alpha_n x}}$ (decreciente para $\alpha_n x \geq 1$)[2]
$\frac{-\alpha_n}{e^{\alpha_n x}} = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha_n x}(-\alpha_n) = 0$[3]$\Leftrightarrow \alpha_n = 0$ ó $e^{-\alpha_n x} = 0$ (Imposible)[4]
Si $\alpha_n = 0$[5] no se considera un proceso infinito[6], ya que α_n sería una constante.
Evaluamos las funciones en 0 y 1:

$$y_a(0) = 0 \qquad y_a(1) = 1,$$
$$y_b(0) = e^0 = 1 \qquad y_b(1) = e^{-\alpha_n} = \frac{1}{e^{\alpha}_n} < 1 \quad \text{si} \quad \alpha_n > 0.$$

$\Rightarrow \exists P \in [0,1]$. Aplicando la propiedad de Darboux sabemos que entre 0 y 1 la función y_a toma todos los valores de entre $[0,1]$ e y_b toma en ese mismo intervalo todos entre 1 y c, siendo $c < 1$, por tanto como la derivada primera no cambia de signo en algún punto entre $(0,1)$ habrán de cortarse[7].

(b) Sin respuesta.

(c) Sin respuesta.

(d) No.

(e) En promedio unas 8 horas.

(f) Galindo (Galindo, 2003) y Burgos (Burgos, 1994).

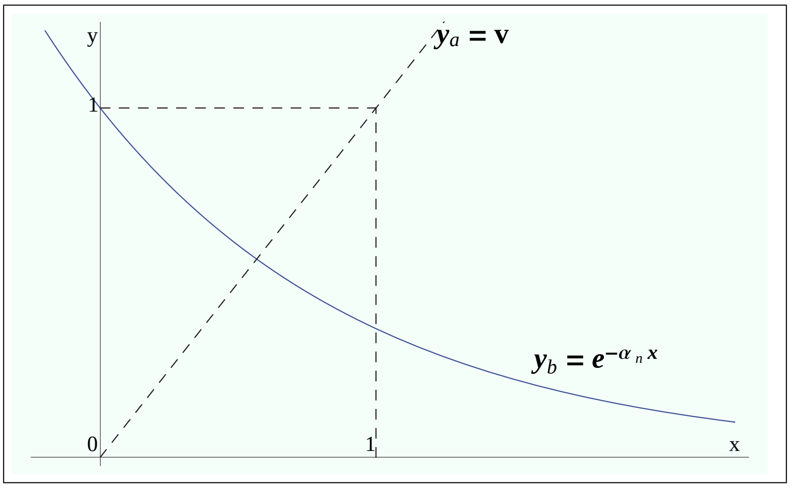


Figura 1 Gráfica complementaria de la respuesta (a) del alumno 1.

[1]El planteamiento visual del problema es correcto..

[2]En realidad es decreciente para todo α_n puesto que $e^{\alpha_n x} > 0$ siempre. Parece que además relaciona el decrecimiento con el valor del cociente y no con el signo.

[3]Parece que desconoce el concepto de cociente de funciones (o razón) y la definición de nulidad: $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$ y por otra parte, $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. En síntesis, hay desconocimiento de los elementos lógicos de la aritmética de funciones.

[4]Si la idea es hallar los ceros de la ecuación $\frac{-\alpha_n}{e^{\alpha_n x}} = 0$, para determinar el signo de la derivada (que es totalmente innecesario ya que esto se deduce de las propiedades de cuerpo y orden de los reales y de las características de la dunión exponenecial) vemos que al respecto no concluye nada.

[5]Es evidente que el alumno no tiene claro que α_n es un elemento 'dado' de una sucesión no negativa de números reales y no un elemento del dominio de la función. Parece que no comprende el enunciado en toda su extensión.

[6]Aquí se observa cómo el estudiante relaciona los procesos infinitos con un conjunto que no puede tener tan solo un elemento.

[7]La justificación carece de claridad. Falta explicitar porqué el hecho de que o cambie el signo de la primera derivada implica la existencia del punto, y por otra parte, qué evidencia la unicidad del punto.

Estudiante 2 (E2)

(a) No he hallado otra solución. Se podría haber resuelto[8] $e^{-\alpha_n \beta_n} - \beta_n = 0$ para todo $\alpha_n > 0$, y observar que siempre $\beta_n \in (0, 1)$, pero no he podido resolver la ecuación.

(b) En el problema se define una sucesión infinita cualquiera de términos positivos, después se define una sucesión de funciones, donde cada función queda definida por cada término de la sucesión anterior, además cada función relaciona los infinitos números reales con otros números reales[9].
En la solución se aplica Bolzano para las infinitas funciones en 0 y $x \to \infty$ y se observa cambio de signo, luego se ve que $\frac{d(f_n - id)}{dx} < 0$, $\forall n$ y $\forall x$, así se ve que sólo hay una solución para β_n en cada función de la sucesión; además como todas las funciones están acotadas en $[0, 1]$, la β_n[10] también lo está. Se utiliza el concepto de infinito constantemente.

(c) La Integral Definida entre a y b, entendida como[11] $\lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{b-a}{m} f\left(\frac{n(b-a)}{m}\right)$[12] sólo requiere de un proceso infinito[13] ya que se trata de una sucesión infinita[14] de números reales; si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no se requieren más procesos infinitos.

(d) Sí considero haber entendido los procesos infinitos, para resolver satisfactoriamente los problemas[15].

(e) Dedico 6 horas semanales al estudio de esta asignatura.

(f) No he consultado ningún libro aparte de los apuntes y los resúmenes[16].

[8] Parece que el alumno considera a β_n como incógnita de una ecuación y trata de resloverla aplicando la tesis. Sin embargo, como dicha ecuación es trascendente, no se puede resolver por cuadraturas y, por tanto tendría que probar que se cumplen las hipótesis del teorema para tener la seguridad de que existe un punto fijo.

[9] Directamente está clarificando los conjuntos infinitos y los que se relacionan entre sí. Lo que no detalla es la forma en que se relacionan, o los procesos infinitos que subyacen a estas relaciones.

[10] ¿En qué sentido se puede hablar del acotamiento de un número real? El conjunto de los β_n también es un conjunto infinito, y lo que se debe entender en cada caso es si se habla de un elemento del conjunto (que es lo que parece) o se clarifica que es el conjunto. El texto no es explicativo, faltan las justificaciones; tiene que relacionar la acotación de β_n con la de las f_n cuando éstas tienen sus imágenes en $(0, 1)$, es decir, cuando $x \in (0, \infty)$ puesto que hay lugar a confusiones dado que f_n que no están acotadas superiormente.

[11] El alumno tiene claridad en que existe más de una forma de definir la integral, aunque esta no sea una de ellas, de hecho utiliza el Teorema del Valor Medio.

[12] Recordemos que este es un caso particular, en el cual se toman intervalos homogéneos y tomando como etiquetas los extremos derechos del intervalo.

[13] No hay claridad en la definición de proceso infinito, y en la determinación de cada uno de ellos. Hay un proceso infinito para cada α_n, otro para f_n, y otro para $f_n(\beta_n) = \beta_n$.

[14] No se tiene claridad acerca de cuál es la sucesión a la que se refiere.

[15] Es más complicado dilucidar en un aspecto para el cual se desconoce que está mal aprendido. En definitiva, expresa una creencia.

[16] La escasa información complementaria evidencia la subjetividad de los conocimientos, pues desarrolló los temas de acuerdo a su percepción y no al rigor que se puede deducir con más profusión de los libros de texto que complementan tanto los apuntes previos que dieron las profesoras y los de la clase.

Estudiante 3 (E3)

(a) Sin respuesta.

(b)
- La utilización de la variable n como contador[17]. El enunciado pide una demostración para cada n natural (y los naturales constituyen un conjunto infinito)[18].
- El empleo[19] del concepto de límite cuando $x \to \infty$.

(c) La división del intervalo de integración en particiones infinitesimales[20].

(d) Creo que aún continúo familiarizándome con el uso de estos procesos en la resolución de problemas.

(e) De 6 a 8 horas.

(f) Galindo (Galindo, 2003), Kiseliov (Kiseliov, 1968) (recomendado en clase).

[17] Además de no determinar con claridad el proceso que determina el conjunto de los naturales $n \geq 1$, no hace explícitos los otros conjuntos que se generan ni los procesos infinitos que los relacionan. Este alumno sólo considera el infinito potencial.

[18] El alumno relaciona los procesos infinitos con el conjunto de los naturales, pero no determina explícitamente sobre qué conjunto, ni cuáles son los procesos que se efectúan.

[19] A pesar de estar en $\mathbb{R}$, sigue considerando el mismo infinito potencial. Por otra parte, el proceso infinito relacionado con el paso al límite es tan sólo uno de los que se desarrollan.

[20] Se supone que habla de particiones de longitud infinitesimal.

Estudiante 4: E4

(a) Sin respuesta.

(b) Sin respuesta.

(c) La definición de las sumas de Darboux, así como el cálculo del inferior y el supremo de éstas (variando las particiones).

(d) Sí.

(e) De 8 a 9 horas.

(f) Galindo (Galindo, 2003), Apóstol (Apóstol, 1965).

Estudiante 5: E5

(a) $f_n(\beta_n) = \beta_n \Leftrightarrow e^{-\alpha_n\beta_n} = \beta_n$[21]$\Leftrightarrow -\alpha_n\beta_n = \ln\beta_n$, entonces $\alpha_n = \ln\frac{1}{\sqrt[\beta_n]{\beta_n}}$. Si suponemos que $\beta_n \geq 1 \Rightarrow \alpha_n = \frac{-1}{\beta_n}\ln\beta_n \leq 0$, lo cual es absurdo y por tanto $\beta_n \in (0,1)$. Tomamos la función $g(x) = \ln\frac{-1}{\sqrt[x]{x}}$[22] y vemos que es una función estrictamente decreciente en el intervalo $(0,e)$, pues su derivada es $\frac{\ln\beta_n - 1}{\beta_n^2} < 0 \Leftrightarrow \beta_n < e$. Como es estrictamente decreciente en $(0,e)$ también lo es en $(0,1) \subset (0,e)$ y por tanto: $\exists x \in (0,1)$, tal que $g(x) = \alpha_n$ es decir:

$\exists x = \beta_n \in (0,1)$ tal que:

$\ln\frac{1}{\sqrt[\beta_n]{\beta_n}} = \alpha_n$[23]$\Rightarrow -\alpha_n\beta_n = \ln\beta_n \Rightarrow e^{-\alpha_n\beta_n} = \beta_n \Rightarrow f_n(\beta_n) = \beta_n$[24].

(b) Los procesos infinitos involucrados en ambas respuestas son básicamente límites y derivadas, teniendo en cuenta que la derivada es el resultado de un límite, podemos asumir que estos procesos se restringen a límites. Hay que tener en cuenta también que α_n, β_n y γ_n[25] que son dos sucesiones de números (pues γ_n depende únicamente de β_n[26]) y $f_n(x)$ que es una sucesión de funciones y por tanto son infinitas, pues para cada n hay un término diferente de las sucesiones y una función diferente.

(c) Siguiendo la definición de la Integral Definida de Darboux [27], opino que el concepto más relevante es el de límite[28], pues la integral definida es la coincidencia de sumas superiores e inferiores cuando varian las correspondientes particiones y esto se asemeja a decir que si tomamos cada vez particiones más finas la suma superior/inferior de Darboux tiende al valor de la integral definida[29].

(d) En general sí, aunque cuando las funciones dejan de estar definidas en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ pierden la parte *'intuitiva'* y sobre todo al darse ese *'salto'* (empezar funciones con $\mathbb{R}^n$) es difícil comprender la diferenciablilidad[30].

(e)
- 1^{er} cuatrimestre aprox. 6 horas/semana; desigualmente repartidas (en enero más horas que en octubre).
- 2^{do} cuatrimestre aprox. 16 horas/semana; éstas ya más equilibradas.

(f) García (García, 1998), Burgos (Burgos, 1994), Galindo (Galindo, 2003), Coquillat (Coquillat, 1997), y, Fernández (Fernández, 1986).

---

[21]Este es el mismo proceso erróneo que planteó el alumno 2, (pág. ??), en su respuesta (a), al tratar de resolver una ecuación trascendente por cuadraturas.
[22]Esta función que ha definido tiene como dominio el conjunto $\emptyset$.
[23]Aquí se nota aún más la falta de discriminación entre la hipótesis y la tesis, pues se inicia y se concluye con la misma igualdad, sólo que planteda en términos de logaritmos (y sin previa atención a los dominios que subyacen a cada expresión).
[24]En suma, los resultados encajan pero con base en la definición de una función que tiene dominio $\emptyset$.
[25]No se tiene en ninguna parte de la demostración a γ_n.
[26]Falta aclarar que el valor de β_n en efecto depende de α_n.
[27]Aquí se observa que el alumno habla en el sentido Darboux, lo que evidencia claridad en la discriminación del sentido que se le dió a la integral.
[28]En realidad el más relevante es el de Extremo Superior e Inferior.
[29]Una interpretación de la integral; el concepto 'ingenuo' de la Integral Definida.
[30]Se puede observar la bondad del manejo de la integral de Darboux al presentar de una manera intuitiva (como punto de partida) el concepto de integral.

2.

No he hallado otra solución. Se podía haber resuelto la ecuación: $e^{-a_n \beta_n} - \beta_n = 0$ $\forall a_n > 0$ y observar que siempre $\beta_n \in (0,1)$, pero no he podido resolver la ecuación.

En el problema se define una sucesión infinita cualquiera de términos positivos, después se define una sucesión de funciones, donde cada función queda definida por cada término de la sucesión anterior, además cada función relaciona los infinitos numeros reales con otro números reales.

En la solución se aplica Bolzano para las infinitas funciones en 0 y $x \to \infty$ y se observa cambio de signo. luego se ve que $\frac{d(f_n - id)}{dx} < 0$ $\forall n$ y $\forall x$, así se ve que solo hay una solución para β_n en cada función de la sucesión, además, como todas las funciones están acotadas en $(0,1)$, la β_n también lo está. Se utiliza el concepto de infinito constantemente.

la Integral Definida entre a y b, entendida como $\cancel{\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{b-a}{m} f\left(\frac{n(b-a)}{m}\right)}$ $\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{b-a}{m} f\left(\frac{n(b-a)}{m}\right)$ solo requiere de un proceso infinito, ya que se trata de una sucesion infinita de números reales si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no se requieren mas procesos infinitos.

Figura 2 Respuestas de la encuesta del alumno 2 (folio 1).

Si, considero haber entendido los procesos infinitos, para resolver satisfactoriamente los problemas.

Dedico 6 horas semanales al estudio de esta asignatura

No he consultado ningun libro, aparte de los apuntes y los resúmenes.

Figura 3 Respuestas de la encuesta del alumno 2 (folio 2).

Anexo 4
Entrevista a Profesoras

Estudio Exploratorio: Entrevista a Profesoras

Cada intervención de un interlocutor está codificada así: respuesta de la Doctora Debán: [D], respuesta de la Doctora Nieto : [N] . Cabe anotar que la entrevista se dió en un ambiente muy informal, y las participaciones se efectuaron sin puntualizar el sujeto o el instante en que se debía intervenir frente a determinada pregunta.

El análisis de la entrevista se realizará a través de una lectura crítica, reflexiva e interpretativa de las respuestas, a través de notas a pie de página, que describen las consideraciones oportunas.

1. Aunque he notado que insta a los alumnos a participar activamente de la clase, ¿ cuál cree que es la causa de que no lo hagan de manera cotidiana?[1]

   [N] El que tiene interés[2] trabaja sólo un poco y, el que se pierde deja la asignatura y se acabó.

   [D] Este es uno de los problemas[3].

   [N] En físicas ha habido un año con hasta 500 alumnos y ha ido bajando, cuando hay muchos alumnos te encuentras de todo, y, en general más aprobados; claro, siempre muy poquitos[4] porque las matemáticas se les exige bastante. Los últimos años vienen[5] muy pocos vocacionales y a lo mejor viene gente que tiene un 5.0 raspado o 5.5 de la selectividad[6], así te

[1]La investigadora ha observado presencialmente, que los alumnos no hacen las tareas a diario y trata de averiguar si las profesoras pueden aportar alguna causa que explique este comportamiento.

[2]Aqui asocian el trabajo del alumno al interés por la asignatura.

[3]La falta de interés hacia la asignatura se ve como un problema que incide en la participación continua en las clases.

[4]La relación entre el núemro de estudiantes inscritos que ingresan a la Licenciatura disminuye la probabilidad de tener estudiantes que tengan la disposición y preparación adecuada para asumir los estudios.

[5]La comparación con años anteriores, deja entrever la disminución del número de alumnos que según los resultados de selectividad, serían competentes para la realización de este tipo de estudios.

[6]Pruebas de Aptitud para el Acceso a la Universidad.

encuentras con un nivel bajo porque en bachiller dan pocas matemáticas y aquí, aunque el nivel se ha bajado, no se ha bajado en la misma proporción que se ha bajado para los institutos.

$[D]$ No están acostumbrados la mayor parte de ellos a trabajar[7], entonces no valoran suficientemente el esfuerzo. En secundaria, en el bachillerato, el que es un alumno normal, y trabajando un poco al final de curso, a lo mejor termina sacando la asignatura, pero aquí se encuentra que el programa es mucho más amplio[8] y cuando se quiere dar cuenta ya no puede con él.

2. He visto que los alumnos tienen la opción de acudir a sesiones adicionales de resolución de problemas y además el espacio de tutorías. ¿Qué tanto aprovechan estas franjas? Qué tal es el nivel las preguntas que suelen hacer?[9]

   $[N]$ Vienen[10] a preguntar sobre cosas que no han entendido en clase, o sobre problemas que tienen propuesto en algunos libros y no les salen[11].

   $[D]$ pero claro cuando vienen, yo bueno...antes de vez en cuando te venía un alumno, pero es que este año no ha venido nadie[12].

   $[N]$ Dos han venido normalmente a las tutorías. En cursos pasados he tenido gente que ha venido con muy mal nivel, con mucho interés, se han venido todas las semanas un par de horas a las tutorías y han terminado

[7] Al parecer los hábitos de estudio con los que llegan los alumnos no son los más adecuados para enfrentar la exigencia de la Universisdad.

[8] Al iniciar la universidad se tiene más contenido y niveles de exigencia y menos control externo, luego el cambio de situación, genera una falta de adaptación al sistema que se sigue en la Universidad.

[9] La investigadora indaga a través de las observaciones de las profesoras, los niveles de comprensión que muestran los alumnos a través de sus intervenciones.

[10] Los alumnos.

[11] No suelen preguntar para profundizar en los temas o por interés propio de los temas.

[12] La investigadora ha notado que los estudiantes no hacen preguntas en la clase, y dado que son amplios espacios que tienen para repasar y profundizar cada tema, pretende determinar, si la falta de participación tiene que ver con que ya se suplan las inquietudes en estos otros espacios.

sabiendo y haciendo bien las cosas[13].

[D] En matemáticas este año ha sido nulo en cuanto a tutorías[14]. No ha aparecido absolutamente nadie en todo el año. Ni un sólo día han aprovechado las tutorías, lo cual es muy lamentable, claro[15].

3. ¿Qué tipo de cambio a nivel del rendimiento académico[16] han venido experimentando los alumnos con respecto a años anteriores? Y a nivel actitudinal[17]?

   [N] He tenido hace dos años un curso muy majo en la clase, no muchos en general, con que en la clase haya por lo menos cinco (o seis) personas que pregunten algo y que entre ellos hablen[18].

4. ¿Cuál es el nivel de dependencia que tienen los alumnos con los apuntes que da la profesora[19]? ¿Cree la profesora que los alumnos son capaces por sí mismos de entender los apuntes[20]?

   [N] La dependencia de los apuntes que da la profesora es total y completa. Si tu le dices: esto es un tema ellos no te ponen de su cosecha nada nuevo[21]. Casi te calcan palabra por palabra[22].

   [D] Los de clase[23] yo creo que sí deberían ser capaces de entenderlos porque se les detallan todos los pasos. En los apuntes que tienen solo

[13]La experiencia de la profesora Nieto, evidencia que pese a los malos niveles con los que pueda llegar un estudiante, el trabajo constante favorece el aprendizaje de la asignatura.

[14]La profesora Debán indica que ningún estudiante de su curso ha asistido a sus tutorías.

[15]Se percibe la inconformidad de la profesora hacia la actitud pasiva y poco interesada de los estudiantes hacia la asignatura.

[16] Se hace referencia al nivel de conocimientos demostrado en la clase de análisis.

[17]En este caso, tiene que ver con la actitud activa y participativa de los alumnos.

[18]Se podría hablar aquí de una estrategia para el éxito de los alumnos, es contar con 'líderes' que 'contagien' el conocimiento y liderazgo entre los estudiantes y profesores y, que se genere así un círculo 'virtuoso'.

[19]Los estudiantes tienen a su alcance los apuntes de la clase, que incluyen los temas y su desarrollo de acuerdo con el programa (definiciones y resultados).

[20]Sin explicaciones adicionales, ni tutorías.

[21]La producción académica por parte de los estudiantes al parecer es nula.

[22]Se vislumbra la tendencia que tienen los estudiantes por 'reproducir' y no 'producir'.

[23]Como los temas son totalmente desarrollados por las profesoras en las clases, los alumnos pueden complementar sus apuntes de una manera detallada.

contienen definiciones y resultados pero no demostraciones.

5. ¿Dado que los estudiantes tienen con antelación los apuntes de clase, suelen prepararla?[24]

    [N] Pues, No[25].

    [D] Yo pienso que lo de preparar la clase con antelación no creo que lo haga ninguno. Los ejercicios que a lo mejor les planteamos en clase, a lo mejor se les da una indicación para que no digan de entrada[26]...no me pongo con ello, y bueno, algunos parece que sí que se lo han mirado un poco, luego ya que les haya salido o no...pero muchos yo creo que la verdad no. Luego por las preguntas que no hacen, yo diría que no la preparan con antelación[27].

    [N] A algún repetidor[28], pues puede que le suene, pues hay bastantes repetidores a principio de curso, eso sí dicen: este año me resulta más fácil pues ya lo he oído[29].

6. ¿Cuánto tiempo dedica a la preparación de la clase[30]?

    [N] Depende de la clase. Hay algunas veces que, si tienes que hacer problemas, pues dedicas un poco a buscar. Y las clases de teoría, si la has dado muchos años...

    [D] Hay temas que son más difíciles de memorizar pues, aunque los hayas dado, los debes volver a revisar porque se olvidan fácilmente. Por

[24] Por los detalles de la dialéctica de la clase y los niveles de participación se puede determinar si los estudiantes han preparado su clase; *'toda lección bien preparada es una lección bien adaptada'* Jacoulet, M.

[25] Respuesta categórica que niega cualquier tipo de manifestación que revele algún indicio de que los alumnos tienen por lo menos la intención de preparar la clase.

[26] Esta es una buena estrategia para fomentar el interés por el trabajo en y fuera de la clase.

[27] Una buena estrategia para determinar el grado de preparación de una clase por parte de los alumnos.

[28] hace referncia a un alumno que ya cursó la asignatura, y la suspendió.

[29] La facilidad a la que se refiere, está relacionada con la idea que tienen los estudiantes de 'conocer' los temas sólo por haber hecho el curso.

[30] El tiempo dedicado a cada clase en promedio.

término medio puede ser unas dos horas. Yo suelo llevar un esquema de la clase[31]. Si voy a hacer una serie de ejemplos o si se me da tiempo a algún ejercicio.

7. ¿Qué nivel de compromiso[32] tienen los alumnos con la asignatura?

   [N] El compromiso depende de los alumnos. Hay incluso el que quiere sacar matrícula, estos chicos claro que tienen un compromiso con la asignatura y quieren sacarla[33].

   [D] ¡Pero vamos!...son los menos.

   [N]La mayoría quiere es aprobar y quitárselo[34]. Por saber es más a niveles a partir de segundo o tercero[35], los que son buenos.

   [D] Siempre hay un caso excepcional pero no es normal, encontrar estudiantes realmente comprometidos[36].

8. ¿ Cuál es el nivel de honradez académica[37] de los alumnos?

   [D] Pues siempre hay gente que si puede hace copia; otra cosa es que procures complicarles las posibilidades, pero algunos si pueden, si se les dice que hay un tema de teoría de sorteo entre los que se les ha dado, y si alguno puede dar el cambiazo, pues alguno lo haría[38].

   [N] Por eso en el examen ahora les damos hojas de colores y con la

---

[31]Un cuadro sinóptico.

[32]Relacionado con la producción del conocimiento subyacente al curso de análisis.

[33]Se hace referencia a alumnos interesados en adquirir los conocimientos, con el fin de obtener la máxima calificación en el baremo de méritos de la universidad.

[34]La profesora resalta que el principal interés de la mayoría de alumnos es aprobar análisis, ajenos a cualquier intención de aprender.

[35]La observación de la profesora indica que el compromiso cognitivo de los estudiantes se evidencia en el tercer año principalmente.

[36]Los alumnos con vocación y compromiso académico han disminuido de manera significativa en los últimos años.

[37]Relativa a la presentación de trabajos originales en todas las actividades acdémicas relacionadas con el curso, tareas, trabajos, exposiciones, exámenes, etc.

[38] *'Hay muy buenas protecciones contra la tentación, pero la más segura es la cobardía'.* Mark Twain (1835-1910).

fecha, con lo cual no saben qué color va a salir y el escudo[39].

[D] Aún así podrían utilizar alguna chuleta[40], pero ya les cuesta más trabajo.

[N] De hecho las chuletas muchas las llevaban en...yo no les dejo ordenadores, ni móviles ni estas maquinitas..nada, yo no les dejo utilizar nada. Otros los llevan en el estuche con mucho bolígrafos...Bueno si pueden copian...de hecho ves...que en teoría no todos. Como están pocos y les separamos mucho suelen copiar menos. Cuando son muchos y están muy juntos, en estas clases que están en escalera a lo mejor se copia fácilmente[41]. Ahora no se les manda tareas, así que en las tareas no podemos observar eso[42].

[D] Este año MariPaz les ha dejado ejercicios[43] y que si los entregan lo podríamos tener en cuenta a la hora de darle la puntuación final.

[N] Inclusive una chica que ha mostrado bastante interés y ha entregado varios problemas se le ha tenido en cuenta en el examen parcial. También es verdad que tiene una hermana que ya ha hecho matemáticas que era muy buena que le podía ayudar, ella se veía que se miraba los ejercicios. Hay un libro que casi todos los ejercicos de matemáticas están resueltos entonces ella miraba a ver si yo les hacía problemas de los que ya estaban resueltos, y a mí no me gustaba hacerles los mismos precisamente por eso[44]. Y pues para los repetidores de cara a eso, pues hacerles nuevos[45]. Pues de hecho lo que tienen que hacer es resolverlos ellos, no

[39] *'A pesar de que ya soy mayor, sigo aprendiendo de mis discípulos'*. Marco Tulio Cicerón (106 AC-43 AC)

[40] Según la RAE, papel pequeño con fórmulas u otros apuntes que se lleva oculto para usarlo disimuladamente en los exámenes.

[41] Se puden evidenciar la amplia variedad de estrategias que diseñan las profesoras para evitar el fraude.

[42] No se pueden observar los niveles de honradez en las tareas y trabajos que se les proponen.

[43] Un incentivo que han ofrecido las profesoras para lograr incrementar el interés, mejorar el nivel, a la vez de darles la posibilidad de mejorar las calificaciones.

[44] Se puede notar la excelente disposición de las profesores ante la manifestación de interés de los estudiantes, independientemente de los medios que suelen utilizar para estudiar.

[45] El tiempo y trabajo que significa la preparación de nuevos ejercicios, sugiere la amplia

nosotras.

9. He notado que tiene alumnos repetidores en la clase[46]. Suele incidir en el desarrollo de la asignatura este hecho[47]. ¿ Cree que sería mejor que los repetidores estuvieran en un grupo y los alumnos nuevos[48] en otro?

    [D] Para los repetidores que han trabajado bastante la asignatura el curso anterior sería interesante poder hacer con ellos otro tipo de problemas, los repetidores que habían abandonado prácticamente la asignatura, pues claro realmente es como si empezaran el curso otra vez, lo que pasa es que muchas veces esos alumnos no tienen conciencia de eso, entonces creen que por el hecho de estar allí dos años ya se saben la asignatura.

    [N] Claro, y en esta clase en concreto los repetidores lo primero que le dicen a los nuevos es ... ah... el análisis! esta asignatura es muy difícil no se aprueba nunca, y el caso es que les van diciendo y es la primera asignatura que suelen dejar, porque es más difícil también y no la trabajan, y quizás si no hubieran repetidores en los grupos pues ese contacto tan inmediato ...esta no se saca pues no se veria influenciado[49].

    [D] Luego también lo que ocurre es que el número de alumnos matriculados y sobre todo de los que asisten a clase no da para para hacer dos grupos porque son demasiado pocos; ahora mismo a matemáticas están asistiendo a clase unos doce alumnos[50]. Como decía MariPaz[51], hubo un

---

entrega y disposición de las profesoras para lograr un incremento de los logros académicos de los estudiantes.

[46] Esta observación se dio casualmente, al notar que algunos estudiantes o tomaban apuntes en clase, y algún par más se distraían hablando o realizando otro tipo de actividades ajenas al trabajo en clase.

[47] En el sentido de afectar la dialéctica de la clase, y por ende los posibles resultados que se esperan del curso.

[48] Alumnos que ven por primera vez la asignatura de análisis.

[49] Se evidencia que quizás una razón por la cual se asumen ciertas actitudes (pesimismo, decepción, desaliento, desánimo, etc.) frente a la clase, se debe a la influencia de los repetidores que están en ella.

[50] Actualmente no están las condiciones necesarias para hacer grupos independientes, puesto que no hay un número suficiente de alumnos para lograr una división eficaz.

[51] La profesora Nieto.

época en que en físicas había mucha gente y en matemáticas también había bastante más de cien alumnos[52].

[N] Lo que hacíamos en aquella época era un examen de problemas, y el que no llevaba un dos y medio en problemas pues ya no se le corregía la teoría, y ya eliminabas a mucha gente, gente que aunque le hubieras mirado la teoría no hubiera aprobado, porque una persona que en problemas no saca un 2.5 (un dos)[53].

10. ¿Los alumnos tienen una actitud colaborativa[54] entre ellos?

[D] Espero que sí que exista esa actitud colaborativa, la relación que se observa entre ellos parece buena[55].

[N] Ha habido una temporada cuando estaba mi hijo que se puso de moda no dejarse los apuntes ni nada, había mucha competencia[56].

11. ¿Cumplen los alumnos con las tareas que se les asigna de manera eficiente?

[N] Lo que se les asigna es que estudien y no lo hacen[57].

12. ¿ Qué entienden por un proceso infinito[58]?

[N] Yo, para mí un proceso infinito es el número real, cuando empie-

[52] Se observa con esto una significativa disminución del número de estudiantes durante los últimos años.

[53] Los alumnos que lograban ingresar, se sometían a exámenes que valoraban, con carácter objetivo, la madurez académica de los alumnos y los conocimientos adquiridos, específicos para iniciar Licenciatura en cuestión, a diferencia de lo que se hace hoy día.

[54] Se pretende determinar si el trabajo grupal está caracterizado por la interacción y el aporte de todos los en la construcción del conocimiento.

[55] La actidud colaborativa no se evidencia en el aula, pero la profesora Debán no descarta la posibilidad de que se dé fuera de la clase.

[56] La profesora Nieto, ve como aspecto positivo en el ámbito colaborativo, la *'sana competencia'*.

[57] Esta respuesta categórica por parte de la profesora, insinúa que el nivel de estudio de los alumnos es bastante malo.

[58] El concepto de Proceso Infinito no es fácil de establecer, de hecho Gardiner (Gardiner, 2003, pp. 4) afirma que: *de los procesos infinitos apenas se tiene nociones 'intuitivas'*.

za[59]. El número natural ya es un proceso infinito[60], el primero de todos[61].

[D] Yo para mí bueno, pues un proceso que te permite pasar de una situación con un número finito de elementos[62] a un conjunto o a un algoritmo en el cual no es así[63]...

[N] Claro, o sea que tu ya el principio de inducción pues ya para él[64] es un proceso infinito[65].

[D] Por ejemplo para mí el caso quizás, el ejemplo mejor es el de las series[66], en la que tú pasas de la sucesión de sumas parciales (cada suma parcial es una suma de un número finito de términos) a lo que es la serie...que es, por un lado la sucesión de sumas parciales, pero por otra parte también se estudia si esa sucesión tiene límite o no, cuando dices si la serie converge o no converge[67]. En ese sentido podría hablarse de suma infinita, entonces quizás ese podría ser el ejemplo mejor para este curso.

[D] Cualquier algoritmo que te permite pasar de una situación finita a otra que no lo es...cualquier algoritmo[68].

[N] Para mí el más intuitivo es el principio de inducción [69].

---

[59]Se puede evidenciar el alto nivel de abstracción subyacente a la definición de la profesora Nieto, pues víendo el número real como el límite de una sucesión de racionales el proceso infinito que está relacionando es el proceso de paso al límite de una sucesión .

[60]El número natural visto como elemento de una sucesión.

[61]identifica a los naturales como el cimiento de la construcción de los números reales.

[62]Una partición con un número finito de elementos, por ejemplo.

[63]El de las posibles particiones del intervalo $[a, b]$, o el algoritmo de sumar 'infinitamente' que se presenta en la parte (b) del criterio de equivalencia del teorema (**??**), (pág.**??**).

[64]El expresarse en tercera persona, es un indicio de que está pensando en los alumnos y su entendimiento más que el proceso en sí; su tarea docente se ve caracterizada por un entusiasmo que se deja ver apasionante.

[65]De hecho, con este principio, a través de procesos (sumar, medir, comparar, iterar, reemplazar, etc...) se demuestra que un resultado se cumple para un número contable e infinito de números.

[66]En las cuales subyacen los procesos infinitos de *aproximar* y *sumar* mezclados.

[67]Según Farfán, (Dolores, 2006, pp. 91–121): *El proceso de aproximar se subordina al de sumar. Lo que obviamente, explica la confusión manifiesta entre el término n-ésimo de la suma y la n-ésima suma parcial entre los estudiantes.*

[68]Una analogía del paso de la sucesión de sumas parciales: $\{\bar{S}_{\pi_k}(f)\}_{k=1}^{n}$, $\{\underline{S}_{\pi_n}(f)\}_{k=1}^{n}$, al de las series correspondientes $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \bar{S}_{\pi_n}(f)$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \underline{S}_{\pi_n}(f)$ por ejemplo.

[69]Esta apreciación coincide con lo que afirma Romero (Romero, 1980): *'la inducción ma-*

[D] Ese está claro que se puede considerar un proceso infinito. Lo que pasa es que yo quizás para los chicos este año, pues a lo mejor el concepto de serie por lo que lleva consigo construir el algoritmo que te permite pasar de una suma finita a lo que podría llamarse suma infinita[70].

[N] Tú le dices a un chico ¿Qué sabes de Procesos infinitos? y cuando nos lo habéis dicho la primera vez hemos dicho...es que ese concepto, en realidad no lo tienen los chicos, aunque les des cosas.

[D] Pero es la forma intuitiva...como cuando tú les das una sucesión para la cual parece que es el límite de esta sucesión, aunque no les hayas dado la definición de límite[71]. Claro en el concepto de integral lo primero que manejan es el concepto de superior e inferior de un conjunto. Porque tú les hablas de las sumas de Darboux, sumas finitas , y, luego consideras el conjunto de todas las sumas inferiores y consideras el superior de ese conjunto; y el conjunto de sumas superiores y el inferior de ese conjunto. Entonces bueno, yo creo que ahí no se ve[72] tan claro el proceso infinito, si claro es un conjunto de infinitos elementos[73].

temática es, en principio, más simple que los conceptos habituales de límite, continuidad, etc., que se utilizan en el análisis'.

[70] A partir de la pregunta planteada, se ha generado un diálogo pedagógico que construye el concepto de Proceso Infinito.

[71] Un punto de vista que parece ser subjetivo.

[72] Interpretación como profesora, pensando en los alumnos, pero no en el concepto.

[73] Podemos notar que trata de definir el concepto de Proceso Infinito, retomando la secuencia teórica que se ha desarrollado para definir el concepto de Integral de Riemann.

Anexo 5

Encuesta a Investigadores

SEIEM

2014

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

UN PROCESO QUE NO TERMINA NUNCA (CONTINUADO)

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

PUES PARA TODO IMPLICA QUE ε TOMARÁ INFINITOS VALORES Y POR TANTO SEA UN PROCESO INFINITO.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

LA MISMA RAZÓN QUE EN a)

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ■. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

PUESTO QUE NO ES PARA TODO ENTORNO, ES UN ENTORNO DETERMINADO.

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Un proceso que no puede describirse en una cantidad finita de pasos/etapas. o en una cantidad enumerable y acotada de pasos.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

La cercanía entre las imágenes de la función y el límite puede ser tan pequeña como se quiera y el poder seleccionar cuan cerca se quiere que estén es lo que hace que sea infinito ya que ese valor es un número real

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Las mismas que antes

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a" reducido

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

Debería decir cualquier entorno de l.

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones**:

El que se diga que eso es verdad para cualquier sucesión que cumple la condición hace que se trate de un proceso infinito.

También el que se haga referencia al límite ya que eso significa que a partir de cierto término de la sucesión a_n, la diferencia entre a_n y a

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Sucesión de acciones (tareas) tal que la última realizada genera una próxima.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** siempre es posible encontrar un "mejor" δ.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** Proceso infinito que depende del ε y δ.

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** Pueden construirse ~~[illegible]~~ entornos más grandes que satisfacen la condición (partiendo del inicial).

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** por la propia def. de límite.

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Proceso cuya implementación implica un número infinito de pasos pero que puede permitir inferir un resultado final sin efectuar los imposibles infinito pasos.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

La tendencia de una función es un proceso de evaluación de la función al acercarse a un pto a través de "infinitos" pasos o saltos de un punto a otro más cercano al $x=a$

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

los pasos en este caso son en la aproximación a o de ε.

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Pues los entornos tienen un número infinito de puntos

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n\in N}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Las sucesiones poseen en principio a disposición infinitos elementos (términos) donde evaluar la función.

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Aquel proceso del cual todo subproceso finito es ampliable, por ejemplo, la subdivisión de un segmento es infinito ~~porque esta sin~~

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** Encontrar la relación $\varepsilon - \delta$, es decir $\delta(\varepsilon)$ para ε es un proceso finito, pero la iteración gráfica es un proceso infinito.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

¡¡ $-\{a\}$!!

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Definición equivalente a (a) luego ha de estar un proceso infinito implícito

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

$\{x \in D: f(x) \in U_l\}$ es un entorno de a. (⇐) $a \in \{x \in D: f(x) \in U_l\}$

$\exists V \in U_a: V \subset \{x \in D: f(x) \in U_l\}$.

Equivalente a (a) y (b).

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

La ejemplificación de sucesiones particulares es infinito, la deducción algebraica es finito.

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Un proceso que se repite de manera indefinida, al menos en una cantidad numerable de ocasiones; o que involucra dicha repetición.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Porque la existencia del δ debe establecerse para cualquier valor de ε y hay infinitas posibilidades (~~por ejemplo~~ necesario y suficiente ~~[illegible]~~ la ~~que utilizan~~ utilización una sucesión de $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ que tienda a 0).

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

¡¿ENTORNO REDUCIDO?!

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** Misma razón que en 2.

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a" REDUCIDO

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

El nº de entornos en el que debe verificarse esta propiedad es infinito, ~~valiendo de nuevo~~ (como mínimo, sucesión de entornos encajados que $\to 0$ en su amplitud).

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** Varios procesos infinitos: los asociados al límite de ~~la sucesión~~ y ambas sucesiones $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ y la necesidad de que esto deba suceder con toda sucesión de nº reales.

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

~~Una acción que se pue~~
Un proceso que puede repetirse indefinidamente.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Por el "$\forall \varepsilon > 0$". Se puede estudiar la hipótesis para "muchos" $\varepsilon > 0$

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Idem que en la anterior

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☐. No lo sé ☒. **Razones:**

No estoy segura aunque podría repetir el razonamiento anterior; si estudio cada posible entorno de l, obtengo el entorno de a, se repite el proceso.

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Por el "Para toda sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

- ALGO RECURRENTE
- Sucesión numérica

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** $\forall \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** $\forall \varepsilon$

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:** Delimita un entorno

Parece un entorno concreto

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** Def límite

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Es un proceso continuo, que no termina nunca.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Es un proceso que se realiza para todo ε de modo que no termina nunca y se tendrían que considerar los infinitos posibles valores de ε.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

La misma razón anterior

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

Se hace referencia a un entorno.

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Nos lleva a tomar sucesiones sin terminar nunca.

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Proceso que se repite sin parar, continua.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:** LÍMITE FINITO.
SI - Cuando x se aprox "a", las imágenes se aprox. a un pto. "L".

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** Equivalente al anterior.

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** Aprox. intuitiva idea anterior límite.

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:** NO DEFINIDO.

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Son procesos relativos al infinito potencial, que en muchas oportunidades buscas que sean el armazón sobre el cual descansará el infinito actual; teniendo en cuenta que lo infinitivo es el principal obstáculo en el "paso" de un infinito al otro.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$

a) $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Las nociones de ε y δ tienen implícito estos procesos infinitos.

b) $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0,\ x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Por la misma razón el ε y el δ necesitan la idea de proceso infinito porque estamos pensando en muy pequeño pero mayor que.

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n\in N}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

El límite por excelencia privilegia el "paso" del infinito ~~actual~~ potencial al actual.
La comprensión del concepto de límite conlleva el manejo del continuo y punto

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Un proceso que transforma operaciones infinitas en infinita.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

$0<|x-a|<\delta$ es un conjunto infinito a partir del cual se construye otro conjunto infinito.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

Puesto que el conjunto $(a-\delta, a+\delta)$ es (infinito) permite construir un conjunto infinito.

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

Se transforma un conjunto finito en otro conjunto infinito.

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

f ha de ser continua

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

¿proceso infinito actual?
¿proceso infinito potencial?

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$

a) $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

Es un proceso netamente analítico con procedimientos algebraicos. Es una definición estática y no dinámica (que deje ver el proceso infinito).

b) $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0,\ x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x)\epsilon(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☑. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** f(x) se acerca a l cuando x se aproxima tanto a "a" arbitrariamente, por tanto están en los entornos. dejando ver el proceso infinito.

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☐. No lo sé ☑. **Razones:**

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n\in N}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☐. No lo sé ☑. **Razones:**

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Proceso que se va repitiendo sin parar

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

Si ε y δ son constantes es una pura descripción

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

Lo veo igual

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Por cada l habrá un a sin que sea necesario un proceso infinito —

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

$n \to \infty$

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

Aquel que se divide o precisa de un número infinito de pasos o secuencias.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

Porque, en principio, no es necesario encontrar un δ para todos los valores posibles de ε. Se precisa encontrar un δ para un valor dado de ε.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

Idem

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

El proceso puede reducirse a un número finito de pasos, utilizando el corpus teórico de funciones.

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

La justificación no se basa en un número infinito de pasos.

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

VARIACIÓN EN EL CUERPO $\mathbb{R}$ (Ó CUALQUIER CONJUNTO A DE Card $A = \infty$)

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

ε arbitrario

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

$x \neq a$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

ε arbitrario

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☒. No lo sé ☐. **Razones:**

SÓLO CONSIDERA UN ENTORNO

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

n arbitrario

Didáctica de la Matemática. **Universidad de Valladolid**

Os pido unas respuestas breves y rápidas, por favor.

1. Escribe lo que entiendes por "proceso infinito"

(informalmente). cada paso se repite de manera indefinida; siempre puede volverse a realizar.

2. Se considera que "a" es un punto de acumulación del dominio de la función real de variable real "f" y se transcriben cuatro definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** porque es la definición ε-δ de límite y un límite lleva implícito un proceso infinito.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \epsilon (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** Idem.

c) La contraimagen de un entorno de "l" es un entorno de "a"

Está implícito un proceso infinito ☐. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:**

d) Para toda sucesión $(a_n)_{n\in N}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$ (cierto para algunas a_n y f)

Está implícito un proceso infinito ☒. No lo está ☐. No lo sé ☐. **Razones:** porque el límite de una sucesión involucra un proceso infinito y aquí aparece explícitamente el límite.

Anexo 6
Cuestionario de Refinamiento con soluciones

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____**Curso:**______________________

Señale con una **X** los temas vistos

Cálculo Integral		Sucesiones y Series		Cálculo multivariado	

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

Calificación de la dificultad

1	2	3	4	5

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad

1	2	3	4	5

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

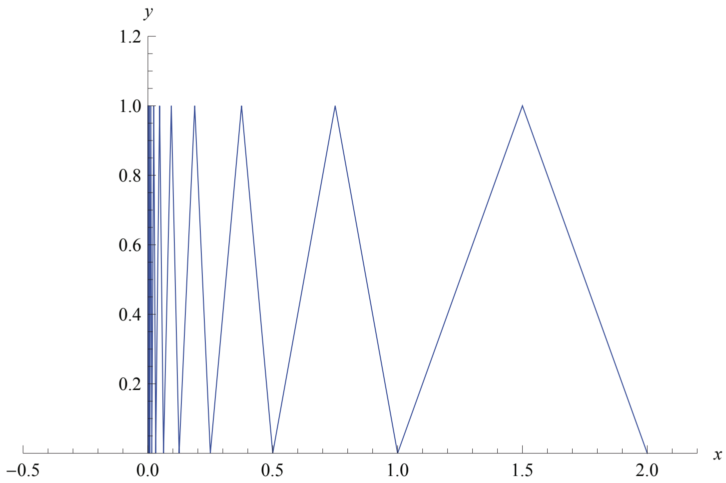


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma. f(0)=0

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad	1	2	3	4	5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad	1	2	3	4	5

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

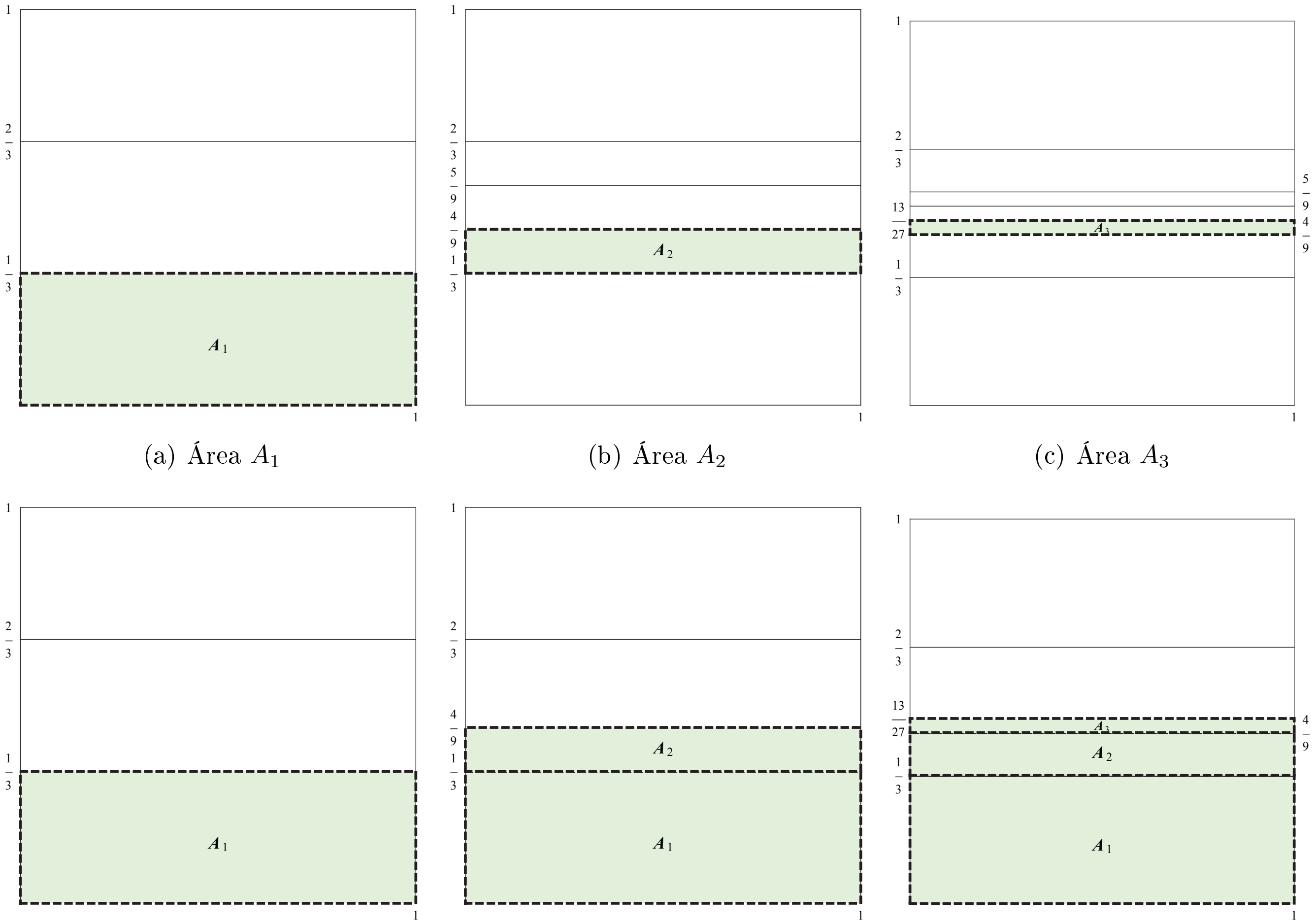
   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2)



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0,1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

   Solución

   a) $\tau = \{x_0 = 0, x_i = \frac{i}{n}\}$, $i = 1 \ldots n$, $n \in \mathbb{N}$.

   b) $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i$, $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \frac{2i-1}{2n}$, $\Delta_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$.
   Para $n = 10$ tenemos: $S = \sum_{i=1}^{10} f(\frac{2i-1}{20})\frac{1}{20} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{1+\left(\frac{2i-1}{20}\right)^2}$

   c) Sí es integrable en $[0,1]$ porque es continua en $[0,1]$.

   d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x \Big[_0^1 = \frac{\pi}{4}$

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b).

   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.

   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]\bigcap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

   Solución

   a) **Falso**. Que sea diferenciable implica que sea continua pero no acotada. Ej. $f(x) = x^{-1}$ es diferenciable en $(0,1]$ pero no integrable.

   b) **Verdadero**. Como f es integrable, es acotada. Supongamos $|f(t)| \leq M$ para $t \in [a,b]$. Si $a \leq x < y \leq b$, entonces $|F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq M(y-x)$. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$ siempre que $|y - x| < \varepsilon/M$.

   c) **Verdadero**. $L(f,P) = \sum \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i \leq 0 \to L(f) = \int f dx \leq 0$ ya que $\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq 0$ en cualquier intervalo que contiene a $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

   a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determine la integrabilidad de la misma.

   c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

   Solución

   a) El punto medio del intervalo $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$ es $\frac{3}{2^{n+1}}$, así que basta hallar las ecuaciones de dos rectas: la que pasa por los puntos $(\frac{1}{2^n}, 0)$ y $(\frac{3}{2^{n+1}}, 1)$ y la otra, que contiene los puntos $(\frac{1}{2^{n-1}}, 0)$ y $(\frac{3}{2^{n+1}}, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x - 2, & si \quad \frac{1}{2^n} \leq x \leq \frac{3}{2^{n+1}} \\ -2^{n+1}x + 4, & si \quad \frac{3}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}$$

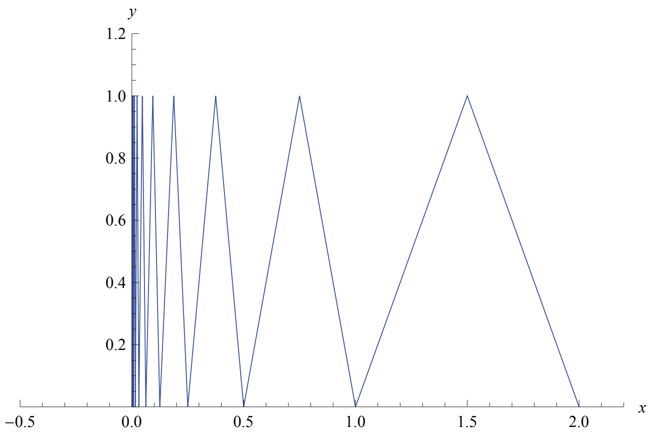


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

b) f es acotada y continua sobre $[\frac{1}{2^n}, 2]$, para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ luego f es integrable.

c) Basta sumar las áreas de los triángulos que se forman en cada intervalo $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$. Como sus bases son $\frac{1}{2^{n+1}}$ y su altura 1 entonces $\int_{\frac{1}{2^n}}^{2} f(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$.

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Solución

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n}dt = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} x|_{k-1}^{k} \right) = \lim_{n\to\infty} \left[2^{-n}(2^n - 1)\right] = 1$$

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Solución

f es acotada y discontinua en un número finito de puntos, por tanto es integrable. Por otra parte se tiene para cualquier partición P sobre $[0, 1]$:

$$L(f, P = (x_i)) = \sup \sum \underbrace{\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)}_{=0} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{>0} = 0 \to L(f) = \sup_P L(f, P) = 0$$

Por tanto $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Solución

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2$ con lo cual $1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 2$.

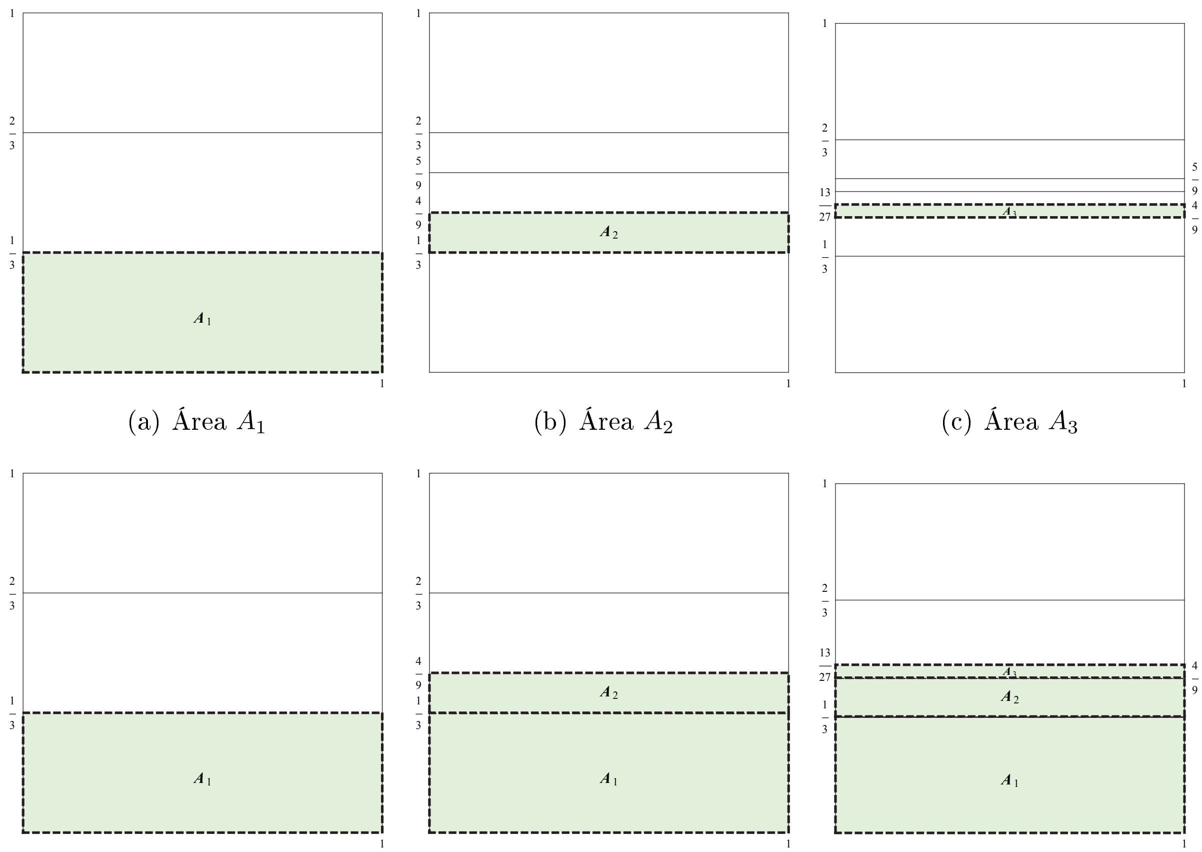
b) Tomando$\{a_n\}= \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$ vemos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \{1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots\}$ NO es monótona.

c) Sea

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \\ &= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{l} \end{aligned}$$

Como $l = 1 + \frac{1}{l}$ entonces $l^2 - l - 1 = 0$ y así, $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Solución

Cada área A_i está dada del siguiente modo: $A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{1}{9}, A_3 = \frac{1}{27}, A_4 = \frac{1}{81}, \ldots, A_n = \frac{1}{3^n}, \ldots$ con lo cual el área total A será $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}$.

INTEGRACIÓN

Problema 3.

La otra opción es integrar f en cualesquiera de los dos intervalos $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+1}}\right]$ o $\left[\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$ y luego se suma, para, en último lugar multiplicar por dos ya que sólo se han tenido en cuenta la mitad de los intervalos. Por ejemplo: $\int\limits_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{3}{2^{n+1}}} (2^{n+1}x - 2)dx = 5 \cdot \frac{1}{2^{2+n}} - \frac{1}{2^n}$ al sumar :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{2^{2+n}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$$

y ya en último lugar basta multiplicar por 2 para obtener $\int_{\frac{1}{2^n}}^{2} f(x)dx = 1$.

Problema 5.

Se tiene:

$$L(f, P = (x_i)) = \sum \underbrace{\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{>0} > 0 \to L(f) = \sup_P L(f,P) \geq 0$$

.

Por otra parte $U(f, P = (x_i)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$. Dado un $\varepsilon > 0$, tome una partición $P_\varepsilon = \left(0, \frac{1}{2^n} - \delta, \frac{1}{2^n} + \delta, \frac{3}{2^n} - \delta, \frac{3}{2^n} + \delta, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n} - \delta, \frac{2^n-1}{2^n} + \delta, 1\right)$ con $\delta < \frac{1}{2^n}$ y $\delta \leq \varepsilon$, entonces

$$U(f, P = \varepsilon) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \underbrace{\underbrace{\sup f}_{\overset{\|}{\frac{1}{2^n}}} \cdot \underbrace{\Delta x_i}_{\overset{\|}{2\delta}}}_{\text{de los intervalos}[\frac{k}{2^n}-\delta, \frac{k}{2^n}+\delta]} + \underbrace{0}_{\text{de los otros intervalos}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}\delta < 2\delta < \varepsilon$$

Como $L(f) \leq U(f)$ dado que $0 \leq L(f) \leq U(f) \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \to L(f) = U(f)$ entonces f es integrable con $\int_0^1 f dx = L(f) = 0$

Anexo 7
Respuestas al Cuestionario de Refinamiento

(1) P1

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

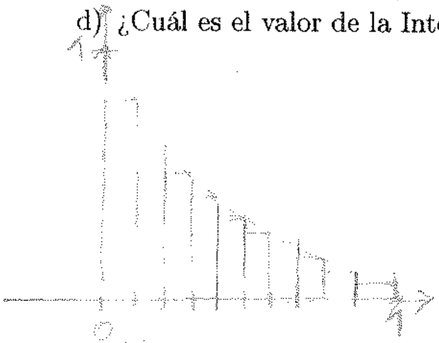
La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Andrés Ocampo Flórez **Curso:** 7

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?



$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{10} * \frac{1}{1+n^2}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P1

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

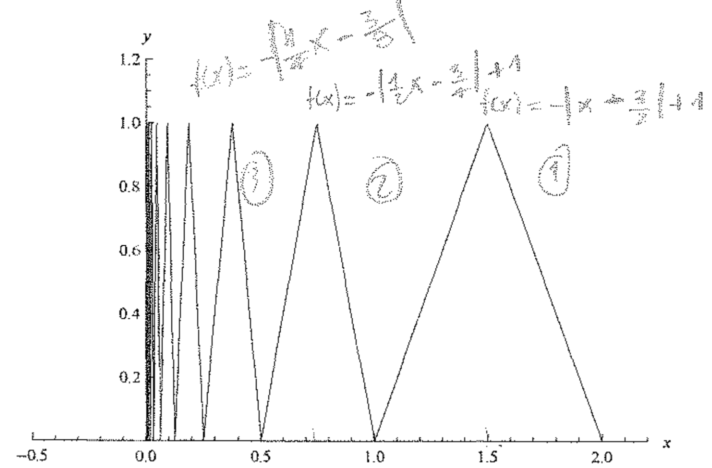


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

① $\int_1^2 -|x-\frac{3}{2}|+1 = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

② $\int -|\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}|+1 = 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

③ $\int -|\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}|+1 = 1\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})} = 2$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2^x}dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{1}{2^t}dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x 2^{-t}dt = \lim_{x\to\infty} -\int_0^x 2^{u}du \quad du = -dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} -\left(\frac{2^u}{\ln 2}\right)\Big|_0^\infty = \lim_{x\to\infty} -\left(\frac{2^{-t}}{\ln 2}\right)\Big|_0^x = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right)}_{0} - \lim_{x\to\infty}\frac{2^{-0}}{\ln 2} = +\frac{1}{\ln 2}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

P1

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$

b) $a_{2n} < a_{2(n+1)}$

$a_{2n+1} > a_{2(n+1)+1}$

$\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$

$\frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_n}{a_n}$

$\frac{a_{n-1}}{a_n} + 1 < 1 + 1$
< 2

$\frac{a_{n-1}}{a_n} + 1 < 2$

$\frac{a_{n-1} + a_n}{a_n} < 2$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 2$

$x = 1 + \frac{1}{x}$

$x = \frac{x+1}{x}$

$x^2 = x + 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P1

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

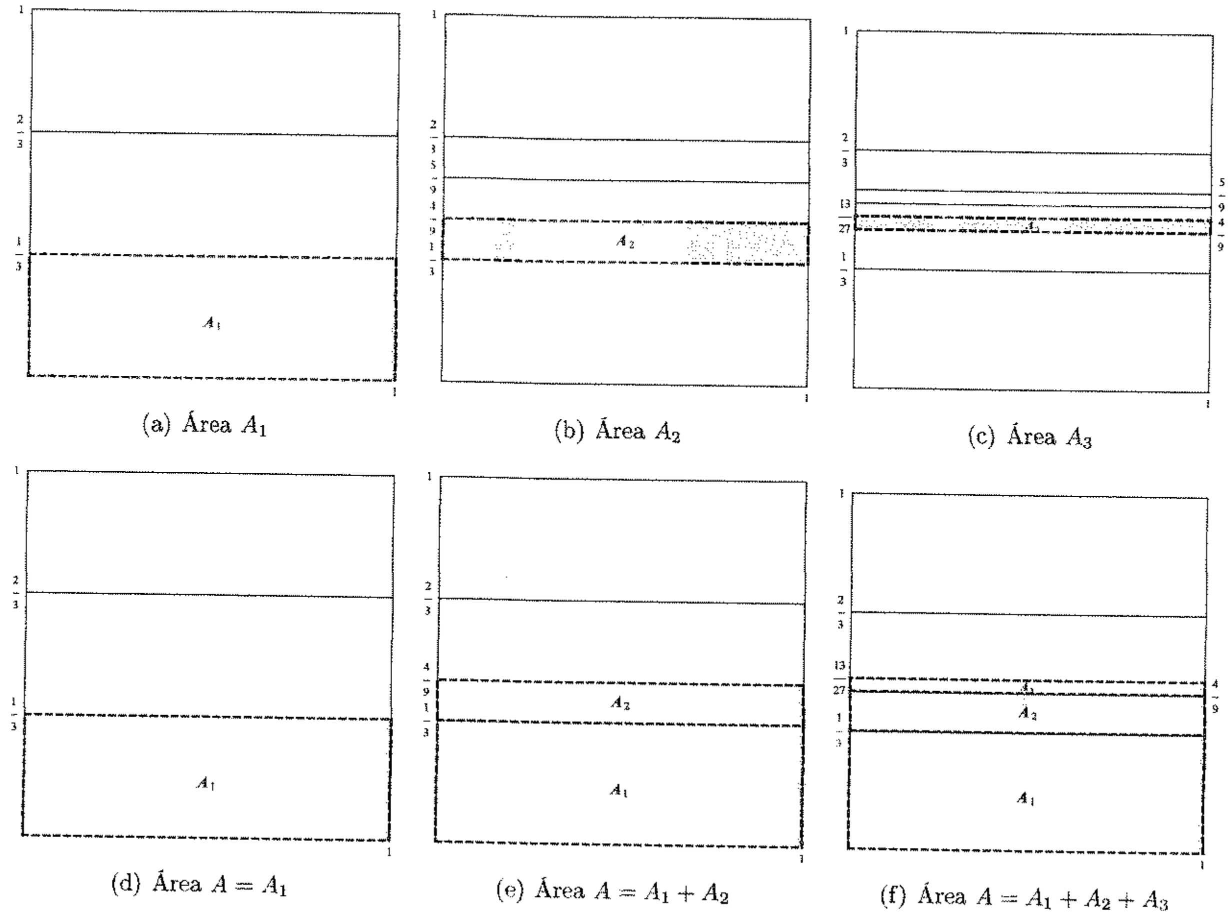


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(2) P2

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:**__________

Señale con una **X** los temas vistos

Cálculo Integral	X	Sucesiones y Series	X	Cálculo multivariado	X

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a. $[0, 1/3)\ [1/3, 2/3)\ [2/3, 3/3)$

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot f(x_i) = \frac{1}{10}\left(\dots \right) = \frac{1}{10}\left[\frac{100}{101} + \frac{100}{104} + \frac{100}{109} + \dots\right.$

$\left. \dots \right] = 0{,}75$

Calificación de la dificultad

1	2	~~3~~	4	5

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

b. [illegible] continuidad. [illegible] ...dad.

Nota: No es difícil. Sólo que no recuerdo muchos de los teoremas de cálculo, Ni de las implicaciones de una función diferenciable e integrable.

Calificación de la dificultad

1	2	~~3~~	4	5

P2

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

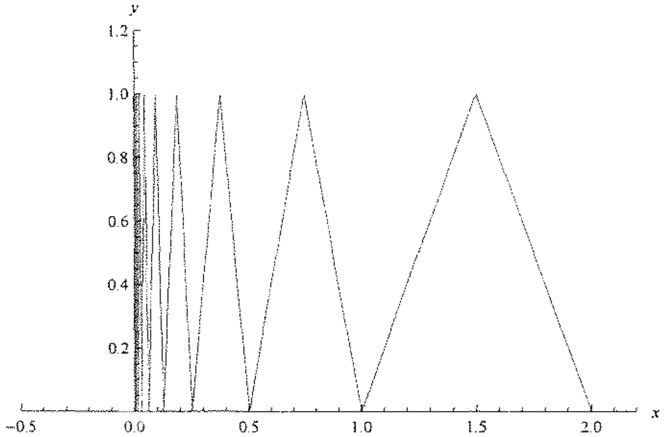


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^x} \, dx =$!!

¡No recuerdo!

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P2

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

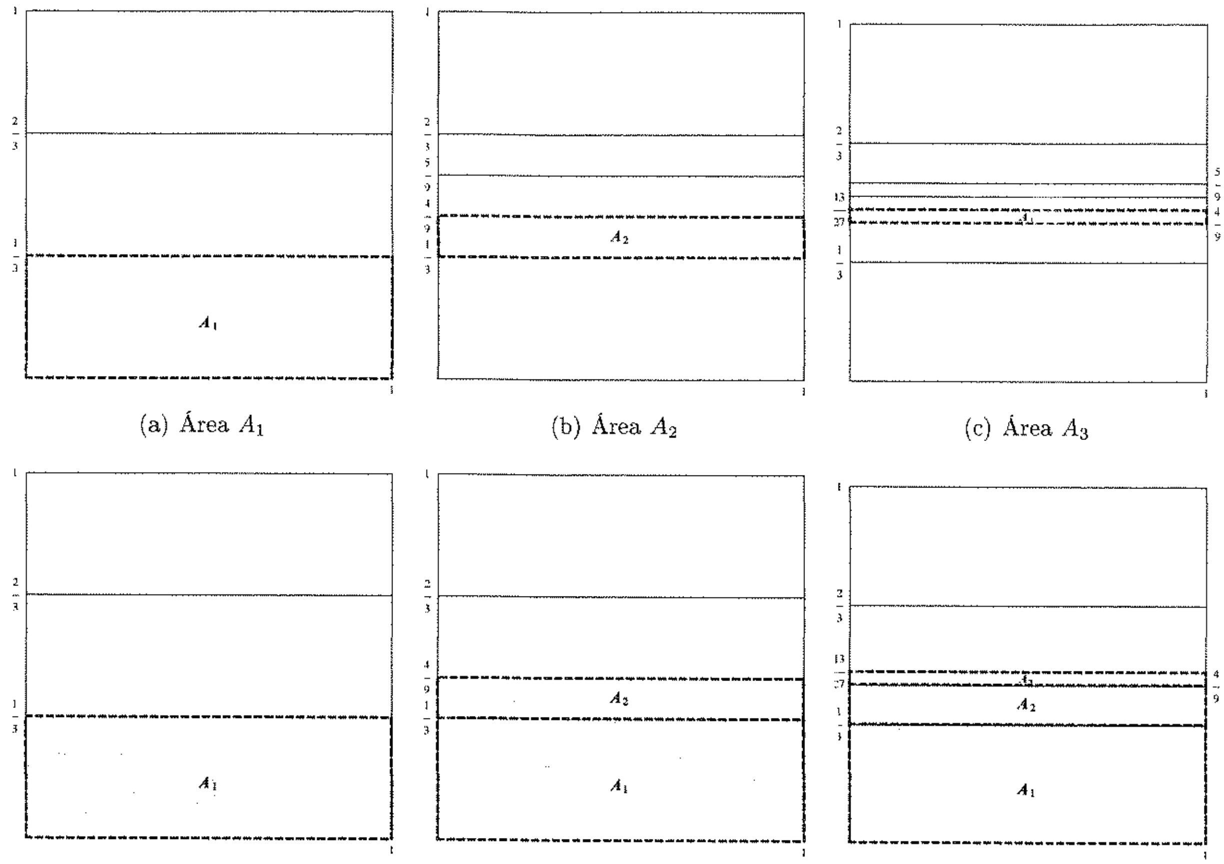
b monótona [illegible]

c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

P2

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | $\cancel{4}$ | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Proceso infinito, es un algoritmo con una cantidad de pasos no contables

(3) P3

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:______________________________ **Curso:**________________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | X |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$\int \frac{1}{1+x^2}$

$\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{i}{10}\right)^2} = \frac{1}{10} \sum \frac{1}{1+\left(\frac{i}{10}\right)^2} = \frac{1}{10}\Big(\frac{100}{101} + \frac{100}{104} + \frac{100}{109} + \frac{100}{116} + \frac{4}{5} +$ [illegible]

[illegible] $+ \frac{100}{149} + \frac{100}{164} + \frac{100}{181} + \frac{1}{2} \Big] = 0.75$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 X |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b). V

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$. F

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) si una función es derivable entonces se puede calcular la [illegible] la integral en un intervalo determinado

b) La integrabilidad no implica que deba ser derivable

c) Como $f(x)$ esta definida en el cuadrante III entonces la integral es menor que 0.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 X |

P3

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

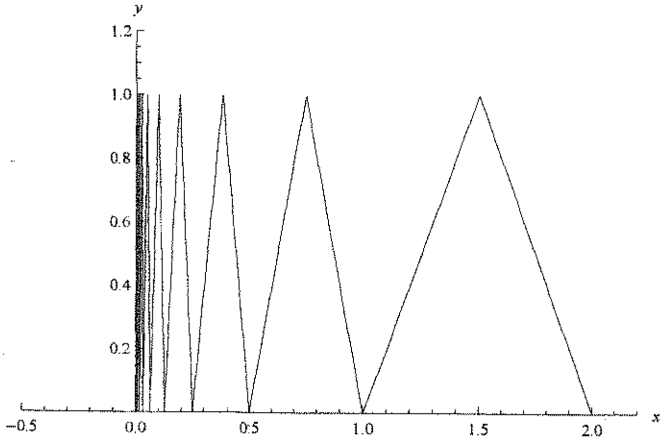


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | $\cancel{5}$

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^n}$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | $\cancel{5}$

P3

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

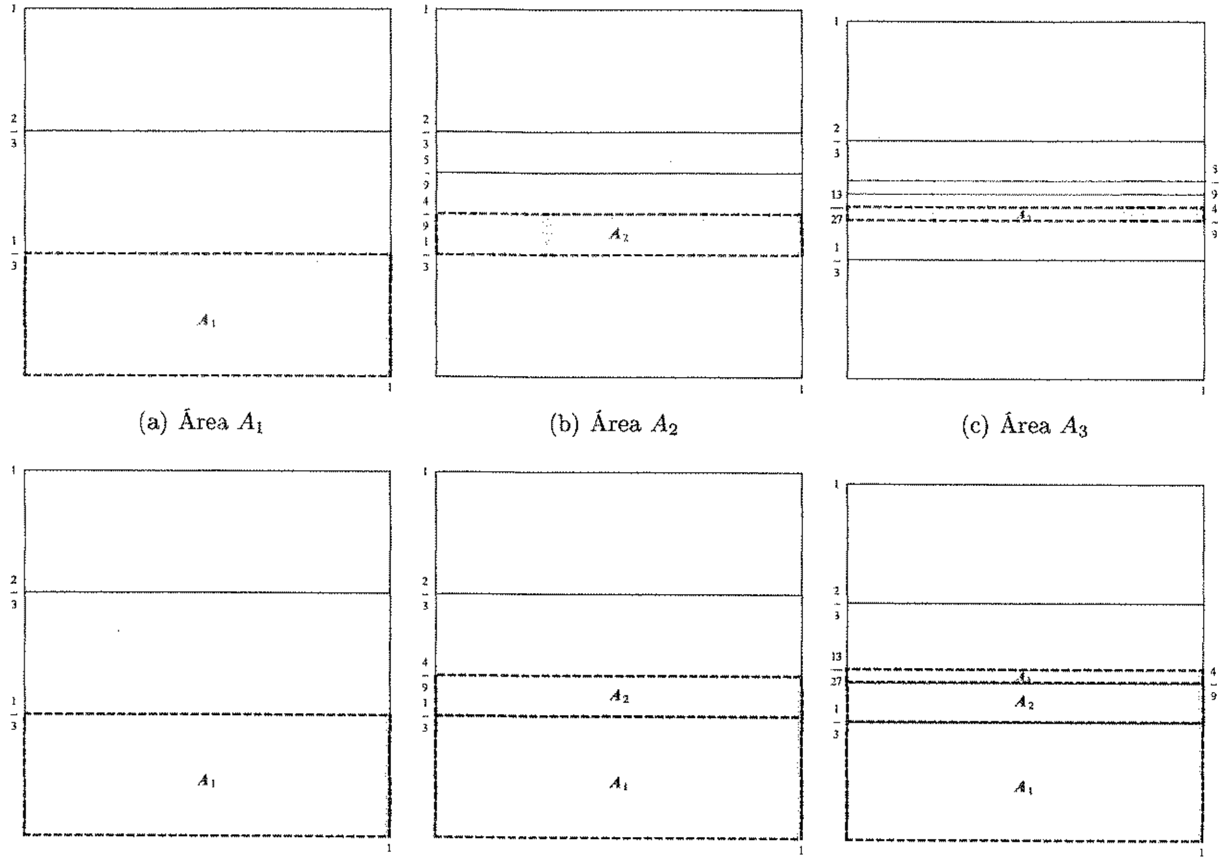
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P3

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = \frac{1}{3}$ $A_2 = \frac{1}{9}$ $A_2 = \frac{13}{27}$

$\int_0^\infty A_n$ $A_n = \frac{\ }{3^n}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(4)

P4

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____ **Curso:**____________________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0,1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b. $= \frac{1}{10} \sum_{j=0}^{10} f(j/10)$

c. $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad 0 \leq x \leq 1$

d. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) \Big|_0^1 = \pi/4 - 0 = \pi/4$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b).
   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.
   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p4

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

$f(x) = -\left|\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right| + 1$

$f(x) = -\left|x - \frac{3}{2}\right| + 1$

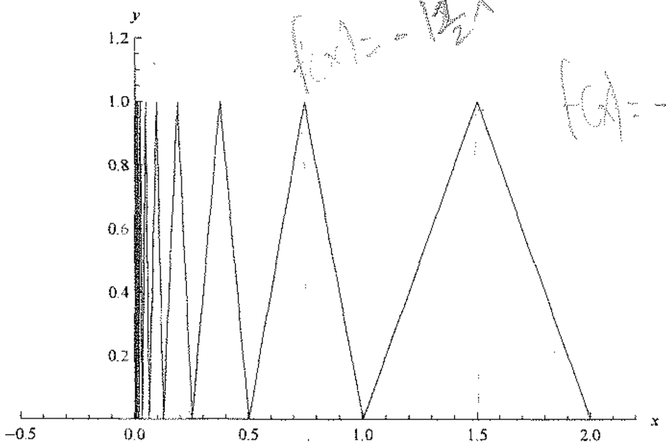


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a. $f(x) = -\left|x - \frac{3}{2^x}\right| + 1$

c. $\int -\left|\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right| + 1 = 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^n} = \lim_{x\to\infty} \int_0^x 2^{-t}\,dt = \frac{2^{-x}}{\quad} =$

$\int 2^{-t}\,dt$, $u = -t$, $du = -dt$ $= -\int 2^u\,du = -\left(\frac{2^u}{\ln 2}\right) = -\left(\frac{1}{2^{t}\ln 2}\right) + \frac{1}{\ln 2}$

$= \lim_{x\to\infty} = \frac{1}{\ln 2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p4

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cancel{5}$ |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_n}{a_n} + 1$$

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2 \Rightarrow$$ Cota Superior.

b. $a_{2n} < a_{2(n+1)}$

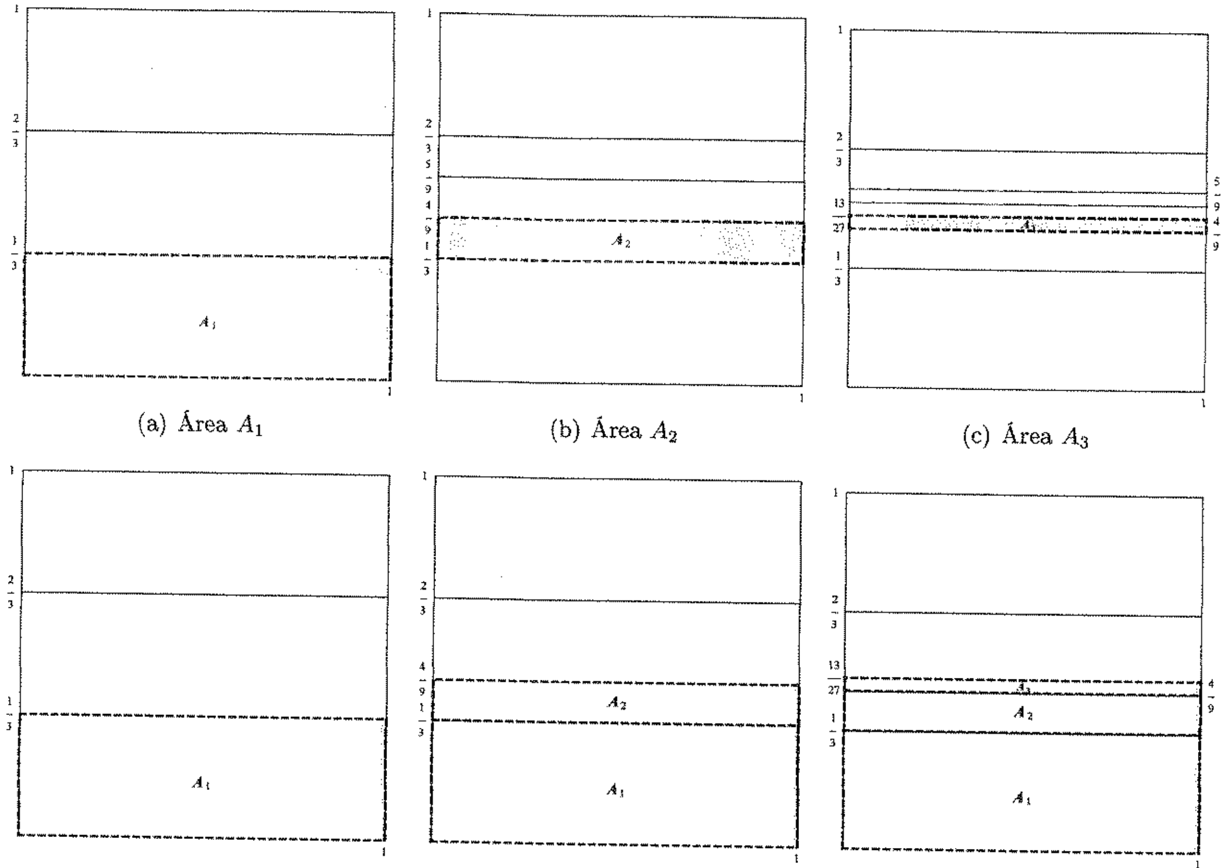
$a_{2n+1} > a_{2(n+1)+1}$

c.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P4

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(5)

P5

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:________________________________ **Curso:**________________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

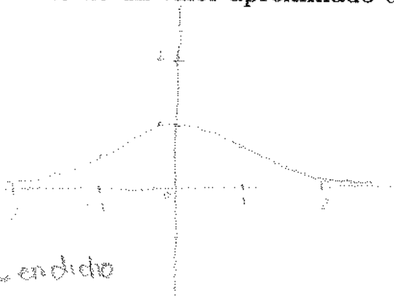
1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0,1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?



b) $\sum_{i=1} \frac{1}{n} (x_i - 1), x_i)$

c) f es integrable en el intervalo $[0,1]$.
ya que la función es continua y acotada en dicho intervalo, por tanto es integrable

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c\Big|_0^1$$
$$= \arctan 1 - \arctan(0)$$
$$=$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | X 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b). (V)

   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$. (F)

   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. ( )

a) Toda función diferenciable en un intervalo definido es integrable en ese mismo intervalo.

b) Puesto que se puede afirmar que una función es integrable si es continua y acotad pero no toda función integrable es continua

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P5

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

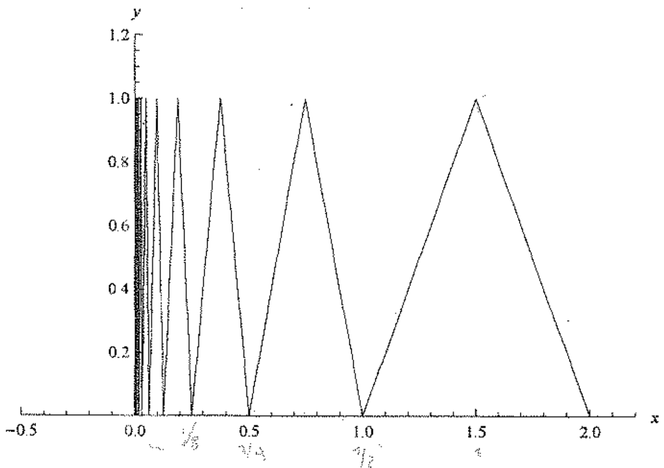


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $\sum\left(2^{-n}, (2^{n+1}x - 2)\right), (2^{n+1}, -2^{n+1}x + 4) \ldots \left((2^0, 2^1x - 2), (2^1, -2x+4)\right)$

b) $\left[(2^{-n}, (2^{n+1} - 2)), (2^{-n+1} - 2^{n+1}x + 4) \ldots ((2^n, 2\right.$

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^t}$

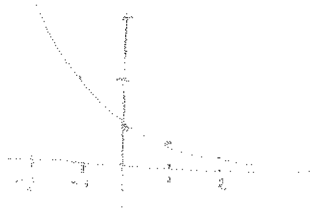
Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

P5

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.



Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

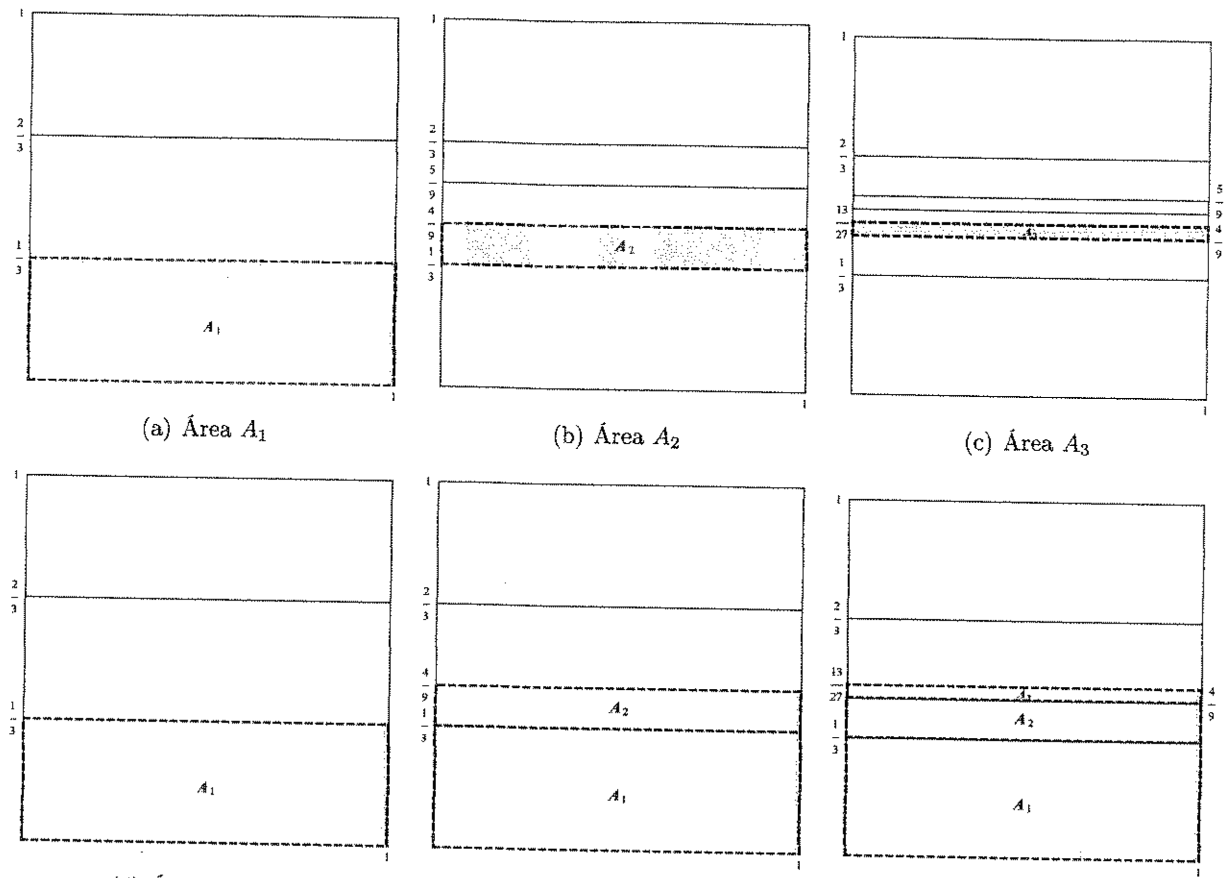
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

p5

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$\lim_{x \to \infty} \int_0^{1/3}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(6) P6

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:______________________________ **Curso:**______________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral ☒ | Sucesiones y Series ☒ | Cálculo multivariado ☒ |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a)

b) $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}(\ldots)$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i+1} - x_i$

c) La función es integrable en el intervalo es posible determinar el área bajo la curva por Riemann por que es acotada

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x \Big|_0^1$

$= \arctan(1) - \arctan 0$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ☒3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Verdadero. Por que es acotada y continua entonces es posible establecer la integral definida

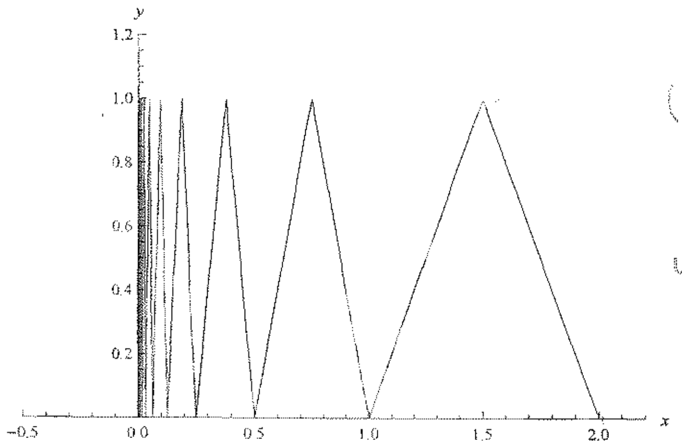
b) Todo $F(x)$ No es acotada superiormente.

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ☒5 |

pb

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).



(1,0) y (1.5,1)

y = 2x − 2

1 = −2 · +4

Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $\left[(2^{-n}; 2^{n+1}X-2),(2^{-n+1}; -2^{n+1}X+4)\right)\ldots(2^0, 2x-2),(2^1; -2^1x+4)\Big]$

b) $\left[(2^{-n}; 2^{n+1}x-2), (2^{n+1}, -2^{n+1}x+4), \ldots\ 2^n; 2\right.$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p6

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

pb

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

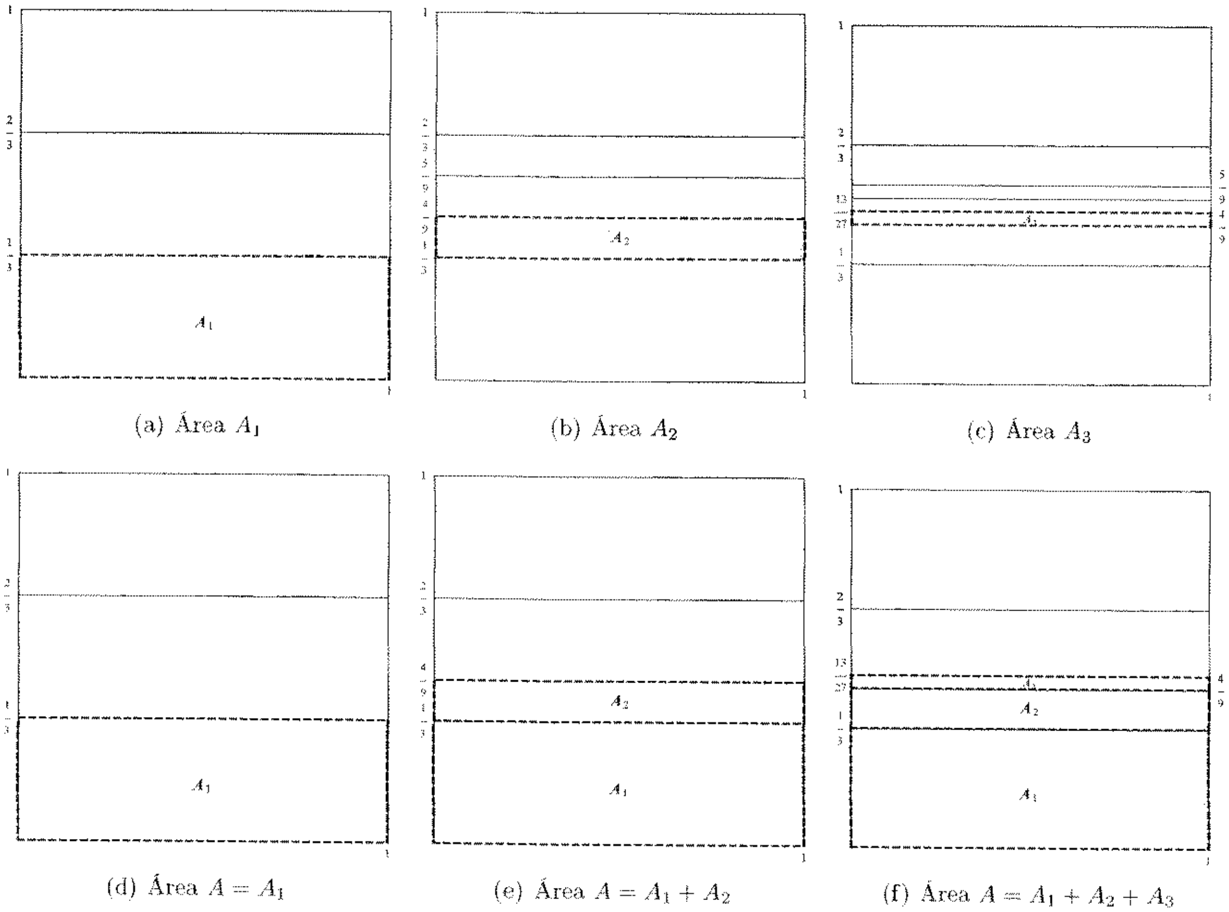


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(7) P7

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Yadira Espejo **Curso:**

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

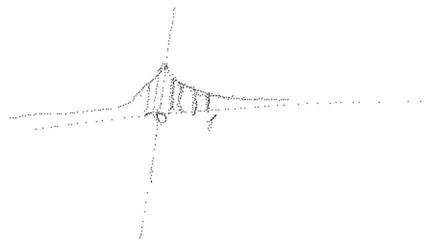
1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

c) $f(x): \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 \Rightarrow \arctan(1) - \arctan(0) \Rightarrow = 0$

d) $= 0$

a)



b

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b). V
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$. F
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \le 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \le 0$.

a) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \Rightarrow F(b) - F(a) =$ por tanto
Definido para b   Definido por para a.

b) No necesariamente es continua ya que x no garantiza la continuidad de la integral porque no pertenece $[a, b]$

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P7

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

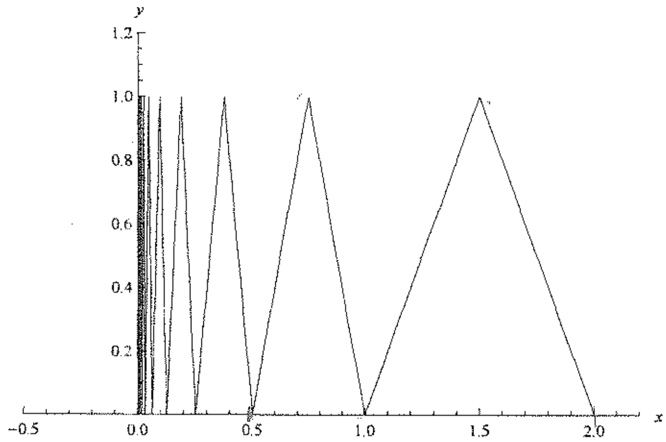


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P7

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2^n}\right)^x & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$f(x) = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{\frac{k}{2n}}{2} = \frac{k}{4n} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}\right)^2 \; 0$

$f(x) = \int 0 \, dx = C$

Por tanto $\int_0^1 f(x)\, dx$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

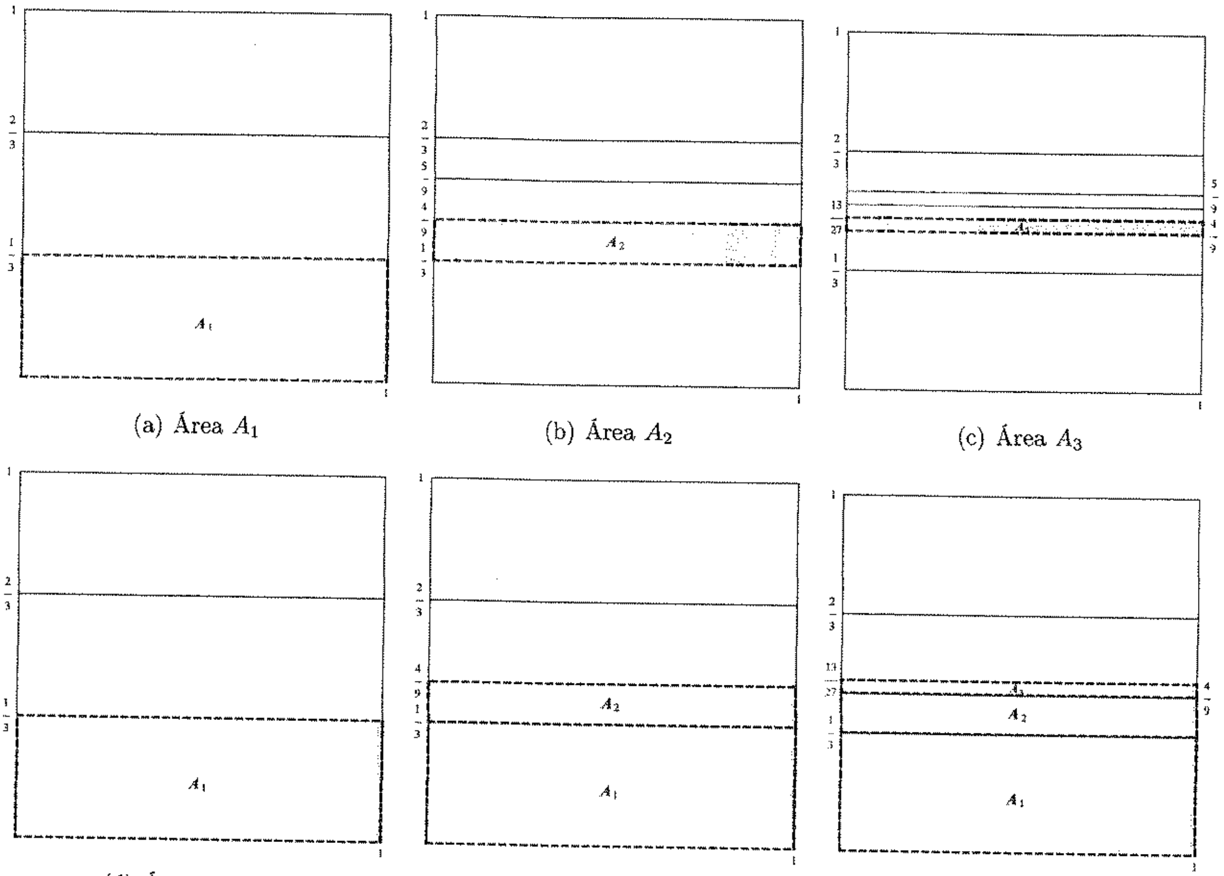
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P7

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$

$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \Rightarrow \lim A = 0$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(8) P8

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:______________________________ **Curso:**________________

Señale con una **X** los temas vistos

Cálculo Integral	X	Sucesiones y Series	X	Cálculo multivariado	

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a)

b)

c/d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}$ $\operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = 0,78 - 0 = 0,78$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) falso

b) verdadero

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P8

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

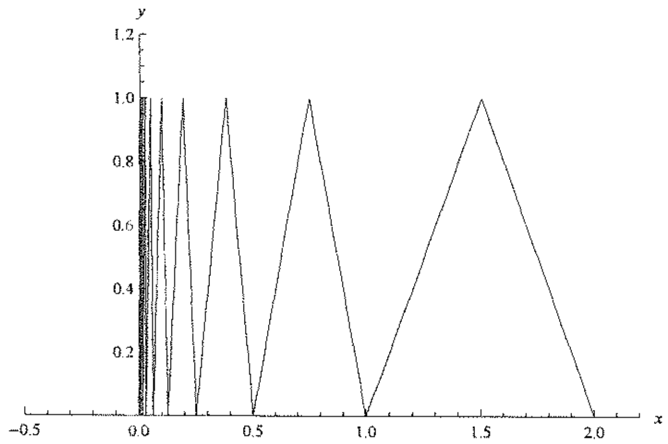


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^n}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p7

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

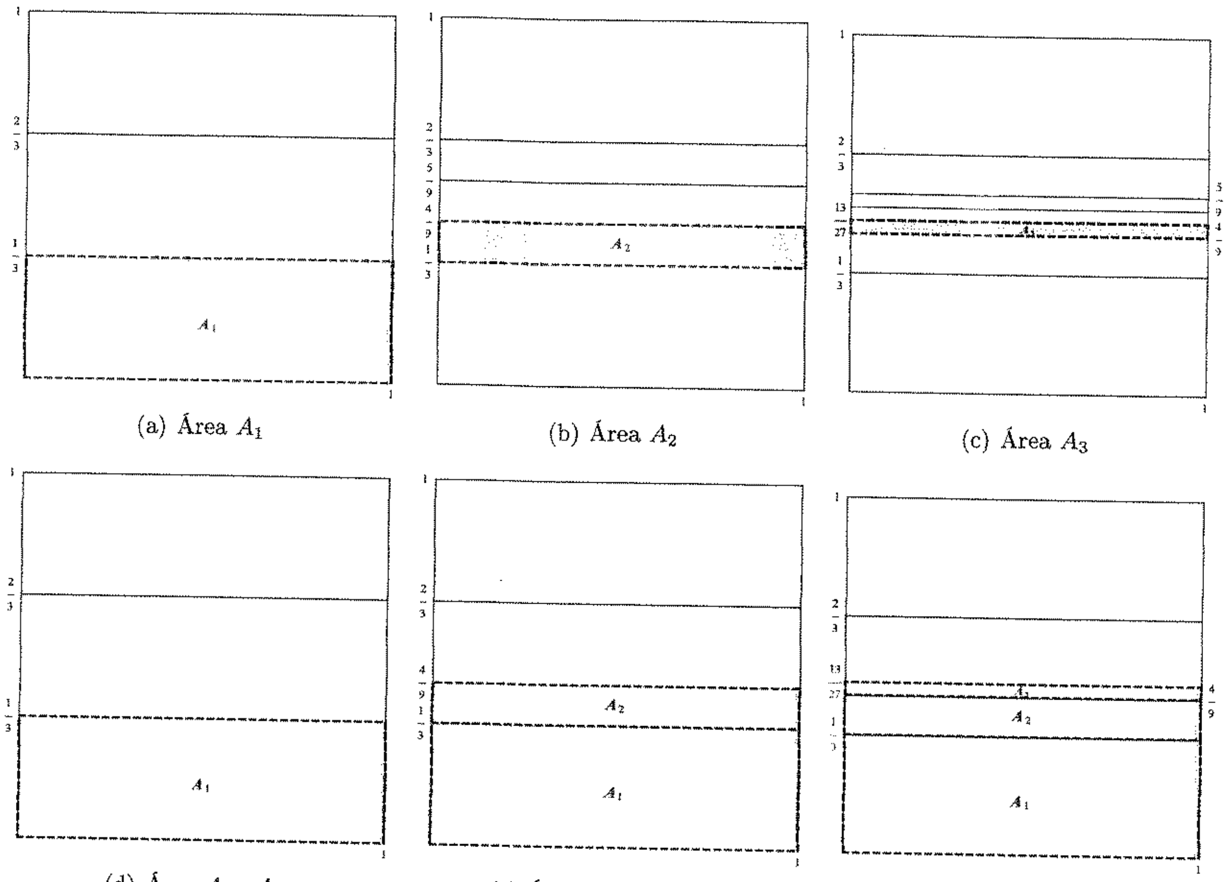
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p8

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(9)

P9

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Julian Camilo Cano **Curso:** ______

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | X |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

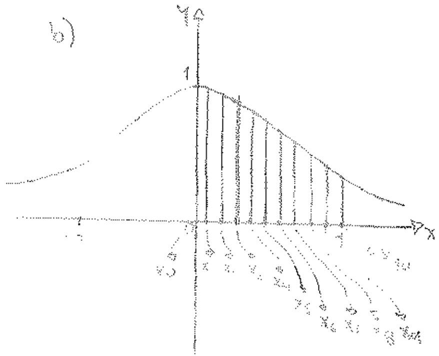
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b)



$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \sum_{j=1}^{10} f(x_j^*)\cdot\frac{1}{10}$

a) Partición de $[0,1]$

$[0,\frac{1}{10})$; $[\frac{1}{10},\frac{1}{5})$; $[\frac{1}{5},\frac{3}{10})$; $[\frac{3}{10},\frac{2}{5})$; $[\frac{2}{5},\frac{1}{2})$; $[\frac{1}{2},\frac{3}{5})$; $[\frac{3}{5},\frac{7}{10})$; $[\frac{7}{10},\frac{4}{5})$
$[\frac{4}{5},\frac{9}{10})$; $[\frac{9}{10},1]$

c) f es integrable en $[0,1]$ porque f es continua en $[0,1]$
"Si una función es continua entonces es integrable"

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = (\arctan x + c)\Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ X | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b).

   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.

   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]\bigcap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Verdadero. Si una función es diferenciable entonces es continua, y, si una función es continua entonces es integrable.

b) Verdadero, Por T.F.C, $F'(x) = f(x)$, o sea que $F(x)$ es diferenciable y por lo tanto $F(x)$ es continua.

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ X | 5 |

P9

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

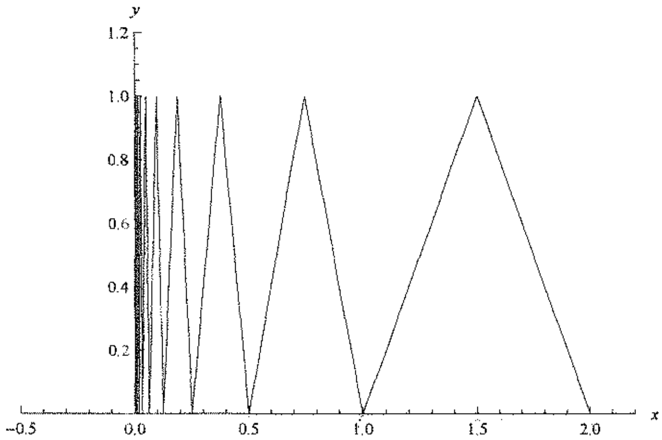


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) Sea f la función definida en el intervalo $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]; n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 2^{n-1}\cdot x - 1/2 & ; x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}}{2}\right] \\ -2^{n-1}\cdot x + 1 & ; x \in \left[\frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}}{2}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \end{cases} \quad ; \operatorname{Ran}(f) = [0,1]$$

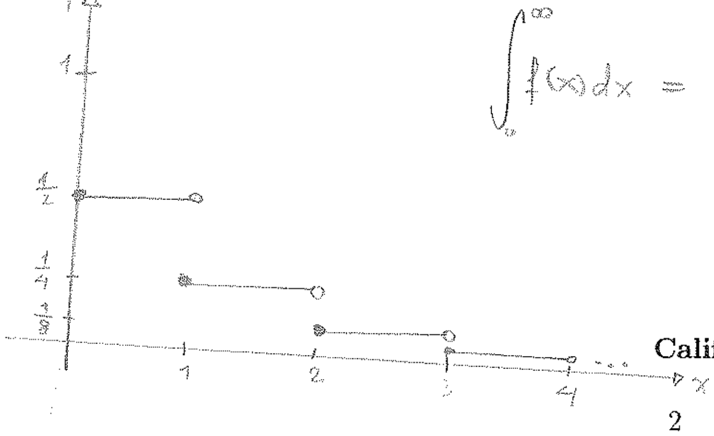
b) $$\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\frac{1}{2^{j-1}} - \frac{1}{2^j}}{2}$$

c) $$\int_0^2 f(x)dx$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$$



Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p9

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

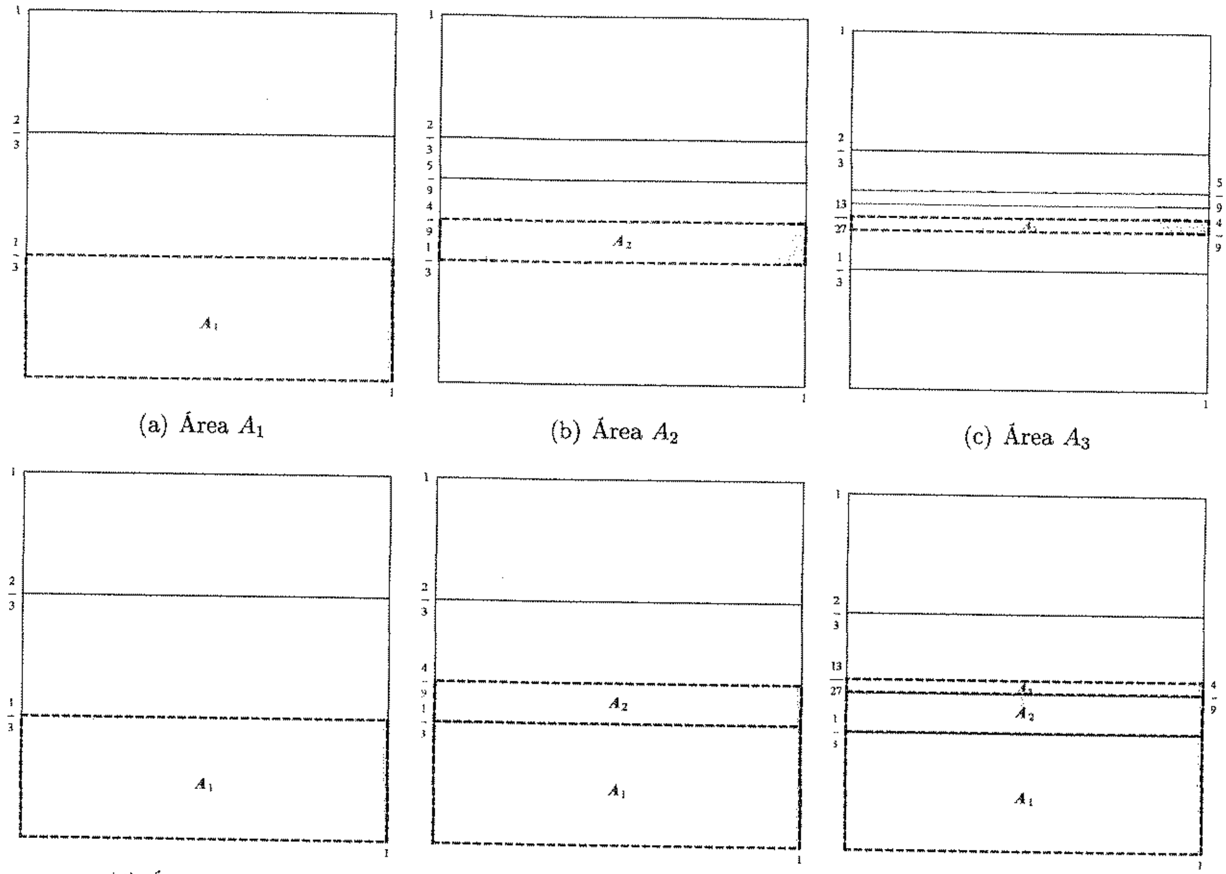
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$; como a_1 y a_2 son positivos y $a_2 > a_1$ entonces $a_3 > a_2 > a_1$, ... $a_{n+1} > a_n > a_{n-1} > \ldots > a_2 > a_1$. Luego $a_{n+1} > a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ por lo tanto la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada inferiormente.

b) a_{2k} es un sucesión decreciente, entonces a_{2k} converge ya que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es acotada inferiormente. Como a_{2k} es convergente y a_{2k} y a_{2k-1} son alternados, entonces $\{a_{2k+1}\}$ es convergente. Esto no implica que a_n es monótona.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(10) P10

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Victor Andres Torres Chala **Curso:**

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral ☒ | Sucesiones y Series ☒ | Cálculo multivariado ☒ |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a) $n = 100$, donde n es el numero de divisiones que se hacen a la base.
b) $\left(0.1 \times \frac{1}{1+(0.1)^2}\right) + \left(0.1 \times \frac{1}{1+(0.2)^2}\right) + \cdots + \left(0.1 \times \frac{1}{1+(0.9)^2}\right) + \left(0.1 \times \frac{1}{1+(1)^2}\right)$
c) Si, es continua en ese intervalo
d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arctag}(x) = \text{arctag}(1) - \text{arctang}(0)$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ☒4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ☒5 |

p10

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

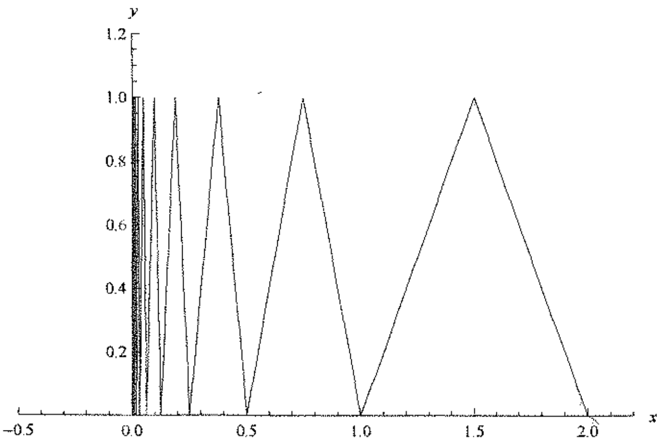


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

No entiendo

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

P10

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

??

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

p10

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

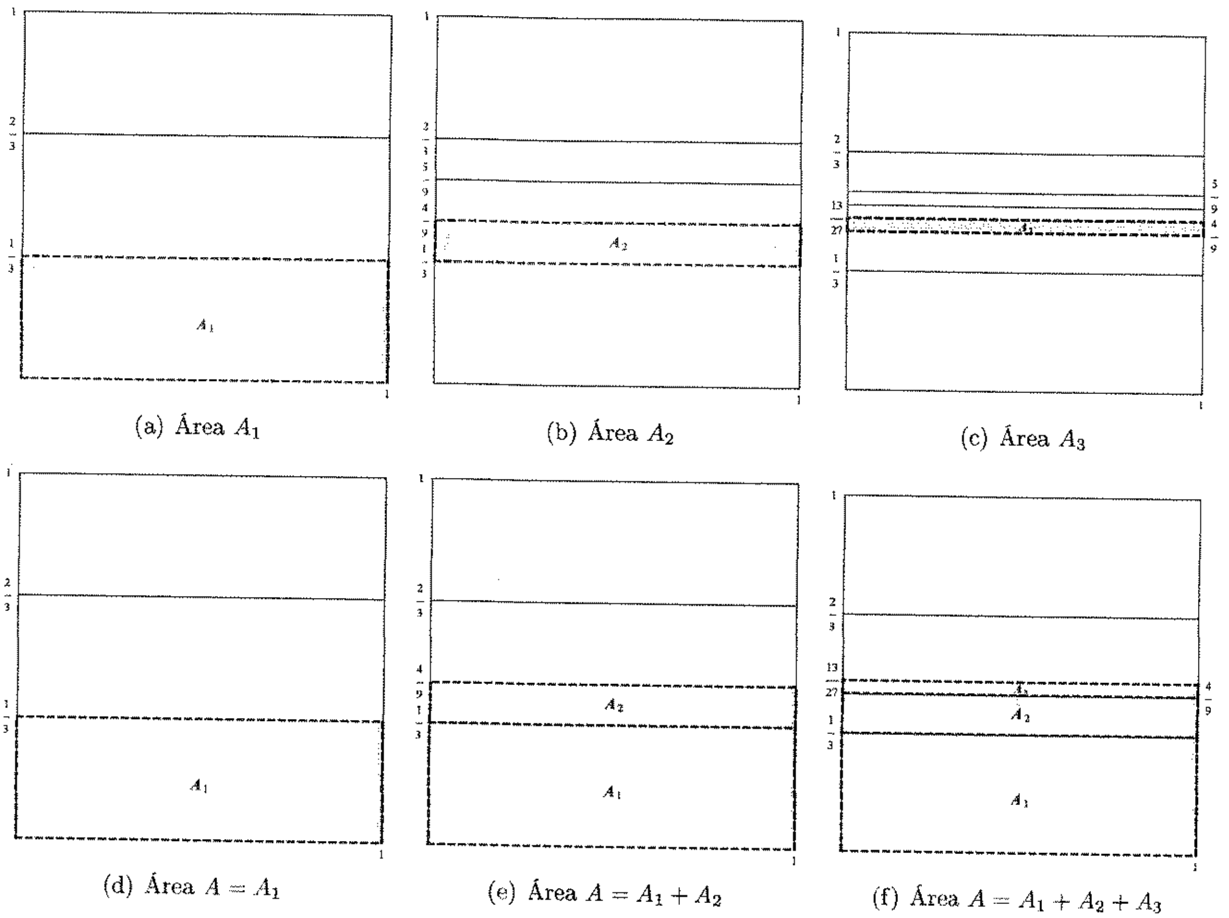


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \frac{1}{(3)^n} =$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(3)^n} = \frac{1}{2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito? es una repetición de calculos que se repiten indefinidamente.

(11) P_{11}

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Cristian Camilo Castellanos Camargo **Curso:** Tópicos de Cálculo

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | X |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a. $[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}), [\frac{7}{8}, \frac{15}{16}), [\ldots) \ldots$; Dado de si $n \in \mathbb{N}$, entonces la $P = \{ I / I = [\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^{n}-1}{2^{n}}) \}$

b. $\sum_{i=0}^{10} \frac{1}{10} \cdot f(\frac{i}{10}) = \frac{1}{10} \Big[\frac{100}{101} + \frac{100}{104} + \frac{100}{109} + \frac{100}{116} + \frac{100}{125} + \ldots + \frac{100}{181} + \frac{100}{200} \Big] = 0,75$

c. $f(0) = 1$
$f(1) = 0,5$, además el denominador nunca es cero $1 + x^2 \neq 0$ para todos los reales, luego. La función no tiene problemas en el intervalo $[0, 1]$

d. Está hecho en la parte posterior de la hoja

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | X | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Verdadero. Es integrable en (a, b) por el teorema fundamental del cálculo, si es derivable en (a, b) por lo tanto es integrable en (a, b)

b.) Falso, puede existir una discontinuidad de salto y aun así $f: [a, b] \to$ es integrable, pero no es continua.

c) Falso, no sabemos si su integral es menor o mayor que cero, puesto que existen valores en ese intervalo que desconocemos como cuando los $x \in \mathbb{Q}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | X | 5 |

d. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

p11

$\sin \quad \cos \quad 1$

$\sin \quad \cos \quad \frac{1}{\cos}$

$\tan + 1 = \sec$

$\frac{\sin}{\cos} = \cos^2 + \frac{1}{\cos}$

$\frac{x}{1} = \tan\theta$

$dx = \sec^2\theta\, d\theta$

sustituimos

$\int_0^1 \frac{1}{1+\tan^2\theta} \sec^2\theta\, d\theta$

$\int_0^1 \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\, d\theta$

$\int_0^1 d\theta$

$\theta \Big|_0^1$

$\arctan(x) \Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0)$

$=$

P11

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

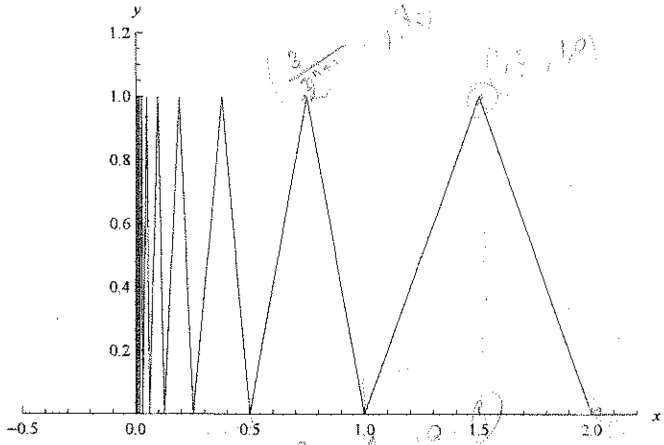


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

$$m = \frac{0-1}{2-1{,}5} \qquad m = -1$$

$$m = \frac{0-1}{\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{3}{2^{n+1}}} = \frac{-1}{\frac{1}{2^{n+1}}} = -2^{n+1}$$

$$-2^{n+1}\left(x - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = y$$

$$m = \frac{1-0}{\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

a.) $f(x) = \begin{cases} -2^{n+1}x + 4 & , \text{ si } \frac{3}{2^{n+1}} \le x \le \frac{1}{2^{n-1}} \\ 2^{n+1}x - 2 & , \text{ si } \frac{1}{2^n} \le x \le \frac{3}{2^{n+1}} \end{cases}$

b.) Si $n \to \infty$, $\frac{\frac{1}{2^n}}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$ por tanto el área tiende a ser 0.

C.) $\Rightarrow \int_0^2 -2^{n+1}x + 4 \, dx + \int_0^2 2^{n+1}x - 2 \, dx = (-2^n x^2 + 4x) + (2^n x^2 - 2x) \Big|_0^2$

$= -2^{n+2} + 8 + 2^{n+2} - 4$

$= 4$ el área es de 4 en ese intervalo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P11

P17

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$a_3 = a_1 + a_2$

a.) $\frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow 1 +$ pero $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ es menor que cero luego es acotada superiormente por 2

b.) monótona creciente.

c.) $x = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}}$

que se repite n veces luego se obtiene $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}}$

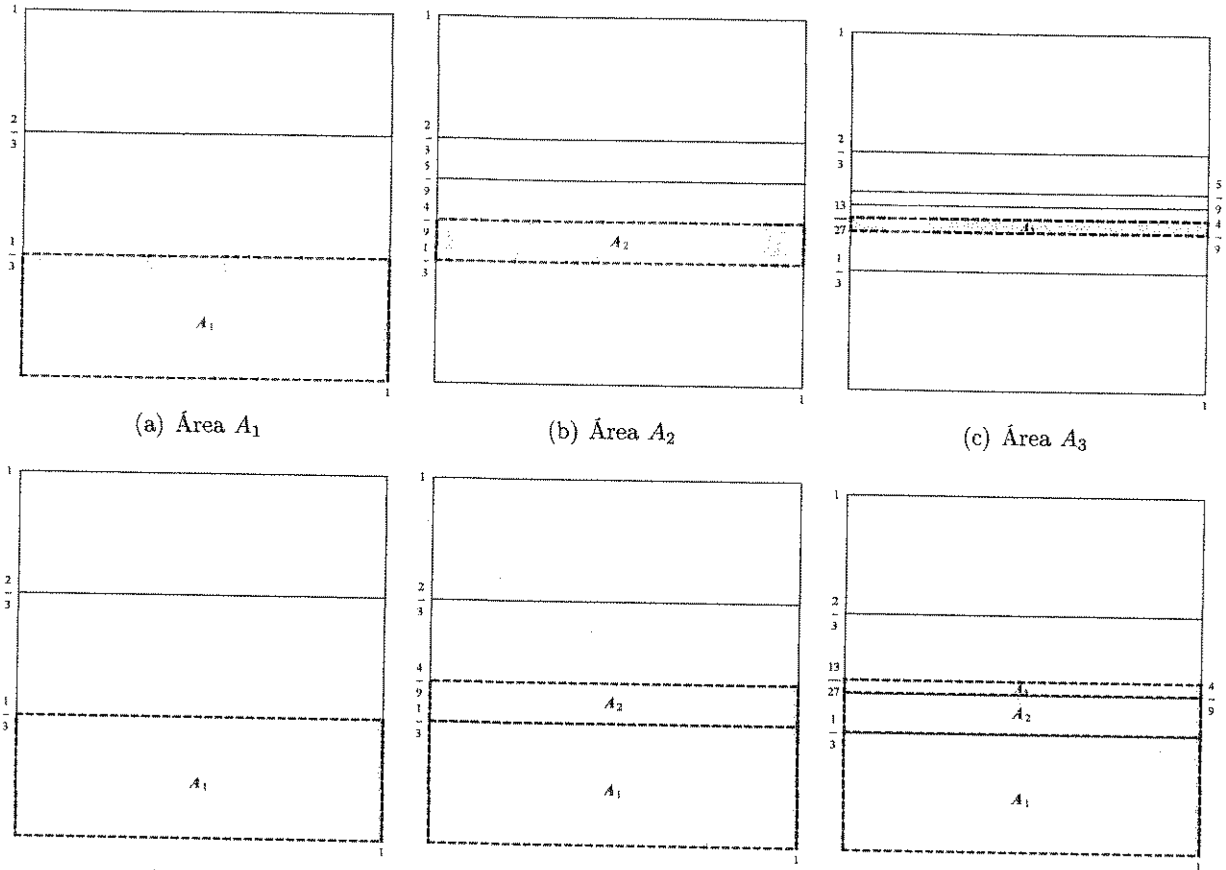
Luego $x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{x+1}{x}$, Luego $x^2 = x + 1 \to$ de aquí se tiene el número aureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

P19

p11

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(12)

P12

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Luis Carlos Rivera **Curso:** Tópicos cálculo

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral [ ] | Sucesiones y Series [ ] | Cálculo multivariado [ ]

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

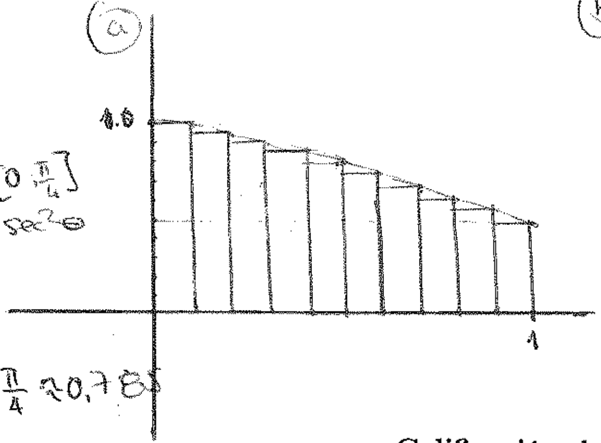
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$. → f es integrable en $[0,1]$

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

(a)



$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$x = \tan\theta \quad \to \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$1+x^2 = 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta$

$\int_0^{\pi/4} d\theta = \theta\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$

(b)

$\Delta x = 0.1$

x_i	$f(x)$	λi
0.0	1	0.099
0.1	0.99	0.096
0.2	0.96	0.092
0.3	0.92	0.086
0.4	0.86	0.08
0.5	0.80	0.074
0.6	0.74	0.067
0.7	0.67	0.061
0.8	0.61	0.055
0.9	0.55	0.05
1	0.5	

0.76

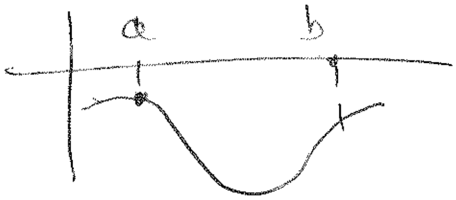
Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b). √

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$. √

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. √



Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

P12

$$2^n\left(\frac{3}{2^{n-1}}\right)^2 = 2^n\left(\frac{9}{2^{2n-2}}\right)$$

$$= 9 \cdot 2^{n-(2n-2)}$$

$$= 9 \cdot 2^{-n+2} = \frac{9}{2^{n-2}}$$

$$\frac{-19}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\frac{-19+2}{2^{n-1}} = \frac{-17}{2^{n-1}}$$

$$\left(\frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^n}\right) = \frac{4}{2^n} = \frac{2^2}{2^n} = \frac{1}{2^{n}}$$

$$\frac{-19}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{9}{2^{n-2}} = \frac{-1-18}{2^{n-1}}$$

P12

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

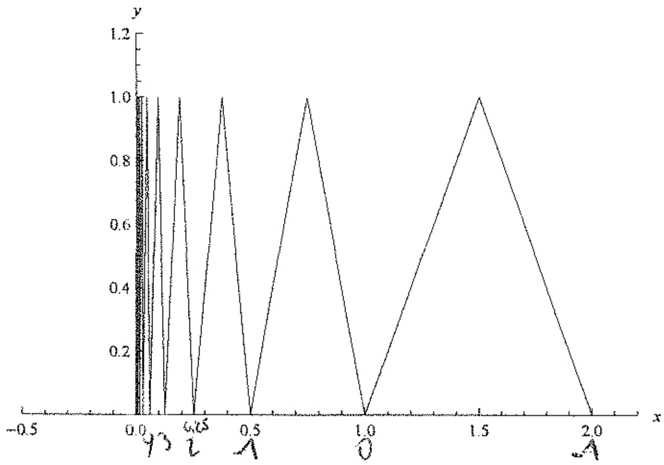


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $f(x) = \begin{cases} (2^{n+1})x - 2 & \text{si } x \leq \frac{3}{2^{n+1}} \\ -(2^{n+1})x + 2 & \text{si } x > \frac{3}{2^{n+1}} \end{cases}$

b) $f(x)$ es integrable en $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$

c) al ser simétrica en el intervalo,

$$\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(x)\,dx = 2\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{3}{2^{n+1}}} \left((2^{n+1})x - 2\right) dx$$

$$= 2^n x^2 - 2x \Big|_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{3}{2^{n-1}}} = \left(2^n\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) - \left(2^n\left(\frac{3}{2^{n-1}}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2^{n-1}}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \left(\frac{9}{2^{n-2}} - \frac{3}{2^n}\right)$$

$\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$ $\left(\frac{1}{2}\right.$

$$\frac{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}}{2} = \frac{\frac{2^{n+1} + 2^n}{2^{2n-1}}}{2} = \frac{2^{n-1}(1+2)}{2^{2n-2}} = 2^{n-1-2n+2}(3) = 2$$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | $\cancel{5}$

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = 2$$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

P12

P12

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ pero $a_{n-1} < a_n$ por lo tanto

$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2$

b) Es monontona creciente

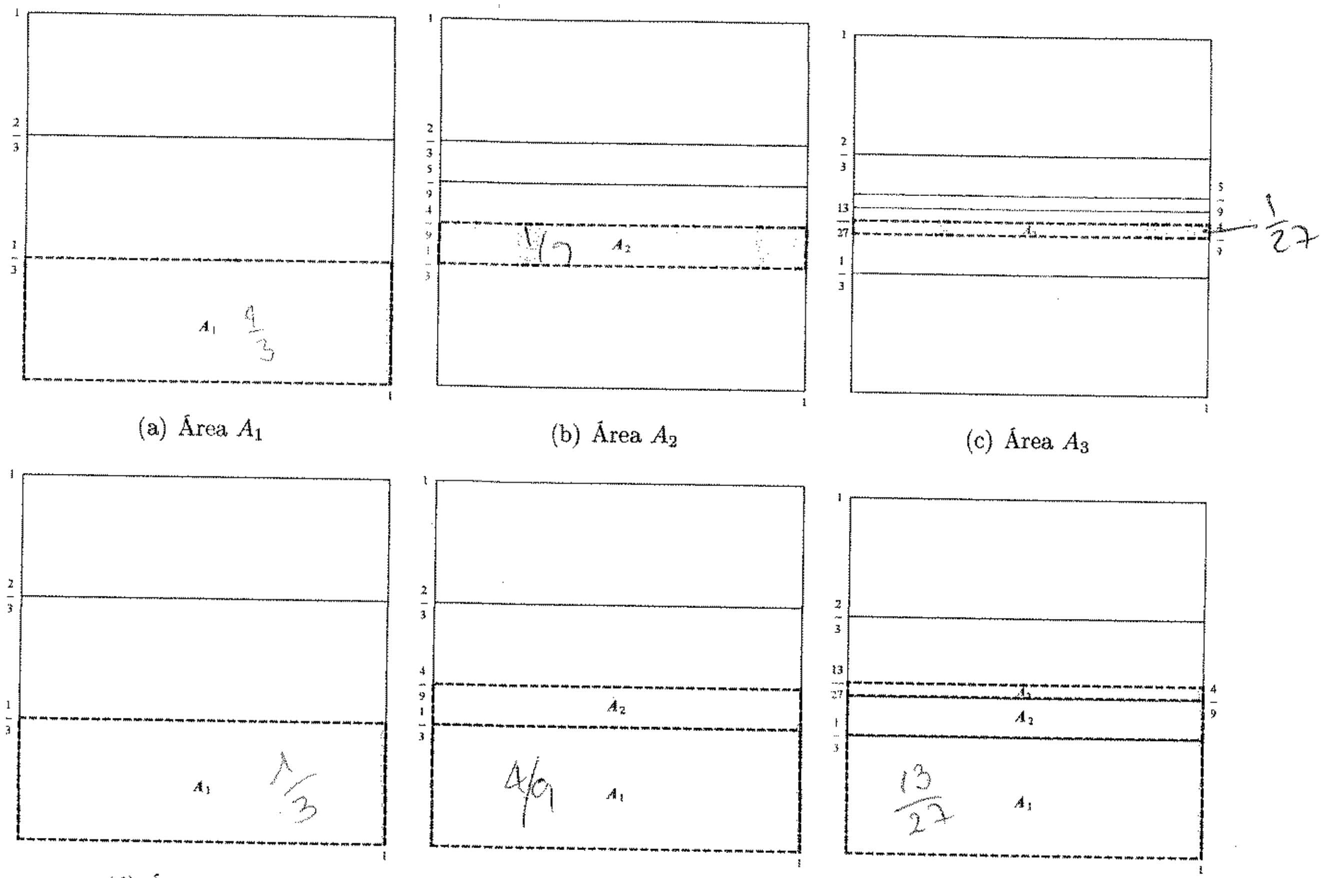
c)

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | $\cancel{4}$ | 5

P12

p12

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad ~~1~~ 2 3 4 5

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?
un proceso que se repite de manera ininterrumpida en un intervalo

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \cancel{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}}{\cos^2 x} = \sec^2 \cancel{x}$$

p12

$$\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$\frac{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}}{2} = \frac{\frac{1+2}{2^n}}{\frac{2}{1}} = \frac{3}{2^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{2^n}, 0\right) \quad \left(\frac{3}{2^{n+1}}, 1\right)$$

$$m_1 = \frac{1}{\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\frac{3-2}{2^{n+1}}} = \frac{1}{\frac{1}{2^{n+1}}} = 2^{n+1}$$

$$\left(\frac{3}{2^{n+1}}, 1\right)\left(\frac{1}{2^{n-1}}, 0\right) \to m_2 = -m_1$$

$$\cancel{m} \quad m = \frac{-1}{\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{3}{2^{n+1}}} = \frac{-1}{\frac{4-3}{2^{n+1}}} = \frac{-1}{\frac{+1}{2^{n+1}}} = -(2^{n+1})$$

$$\frac{2^{n+1}}{2^{n-1}} = 2^2$$

$$b_1 = \cancel{0 - (2^{n+1})} \quad 0 - (2^{n+1})\left(\frac{1}{2^n}\right) = -\frac{2^{n+1}}{2^n} = -2$$

$$b_2 = 0 - \left(-(2^{n+1})\right)\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2$$

$\frac{10+7}{10}\frac{7}{10} = \frac{17}{10}$ **(13)** P13

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________ **Curso:** Tópicos del Cálculo

Señale con una **X** los temas vistos

Cálculo Integral	X	Sucesiones y Series	X	Cálculo multivariado	X

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0,1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$\sec^2 + tg^2 = 1$
$tag^2 + 1 = \sec^2 x$

$x^2 = tag^2 x_0 \Rightarrow x = tg x$

a) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \rightarrow 1+x^2 = 1+tag^2 x_0 = \sec^2 x_0 \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sec^2 x_0} dx$

b) $\sum_{x=0}^{10} \frac{1}{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \frac{1}{37} + \frac{1}{50} + \frac{1}{65} + \frac{1}{82} + \frac{1}{101} \approx 1,$

c) entre $[0,1]$ es continua por tanto es integrable

d) $\int_0^1 \frac{1}{\sec^2 x_0}dx = \cos^2 x_0 \Big/_0^1$ donde $x_0 = tag^{-1}x \Rightarrow 0.5 - 1 = \boxed{-0.5}$

Calificación de la dificultad

1	2	3	X	5

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b).
   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.
   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Si la $f: [a,b)$ es diferenciable implica que sea continua y al ser continua me permite integrarlo, por tanto es Verdadera.

b). Falso; porque la funcion $f(x)$ no tiene los limites de integración bien definidos y no sabemos que pueda pasar en ese intervalo

c) Falso, porque $f(x)$ no es continua para cada $[a,b] \cap (R/Q)$

Calificación de la dificultad

1	2	3	X	5

P13

p13

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

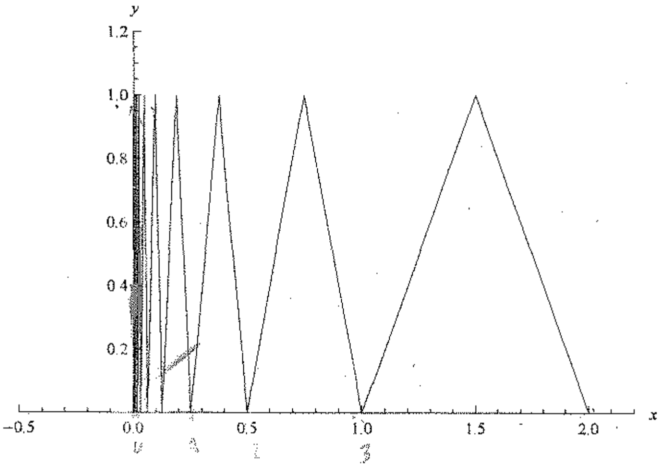


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

0: $[1, 2]$
1: $[1/2, 1]$
2: $[1/4, 1/2]$
3: $[1/8, 1/4]$

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a). $f(x) = \left|\frac{1}{2^x}\right|$, $x \in [n, n-1]$, aunque no importa que sea en valor absoluto ya que $1/2^x$ siempre va a ser pos!

b) $\int_{\frac{1}{2^x}}^{1/2^{x-1}} \left|\frac{1}{2^x}\right| dx \Rightarrow \int_{1/2^x}^{1/2^{x-1}} \frac{1}{2^x} dx$

c) $\int_{1/2^x}^{1/2^{x-1}} \frac{1}{2^x} dx = -x\ln(2) \Big/_{1/2^x}^{1/2^{x-1}} = \lim_{x \to \infty} \left[-1/2^{x-1} \ln(2) + 1/2^x \ln(2)\right)$

?

$= 0 + 0 = 0$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_{x-1}^{x} 1/2^x \, dx = \int_{x-1}^{x} 2^{-x} dx = -x \ln(2) \Big/_{x-1}^{x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} -x\ln(2) + (x-1)\ln(2)$$

$$= -\infty + \infty = \infty.$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

P13

p13

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

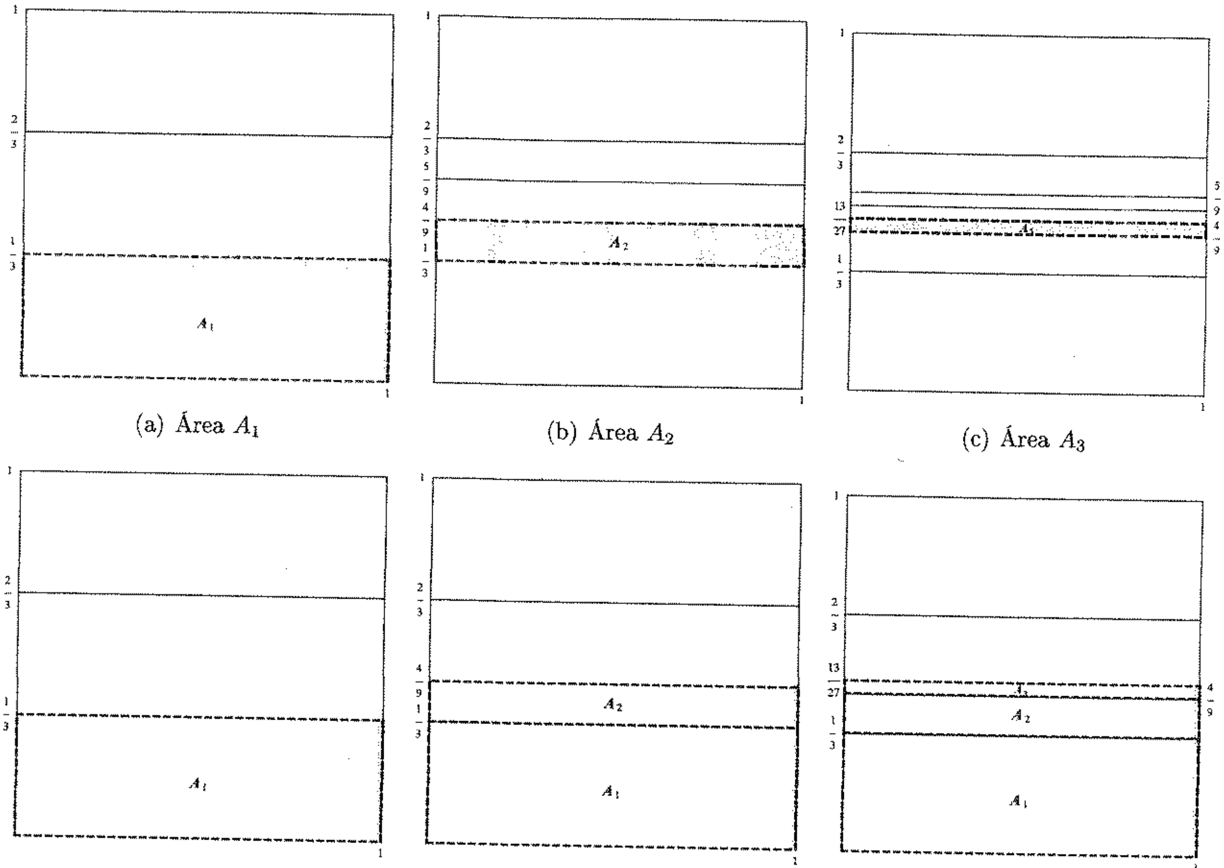
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

p13

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Que se repite tanta veces que no son contables, pero que en algunos casos se puede estimar su límite ejemplo en los fractales: el fractal de Sierpinski

(14) P14

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Viviana Pinzón. **Curso:** Tópicos de Cálculo

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | X |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

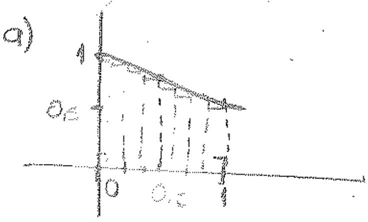
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

c) $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Es integrable.

d) $\rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int$

a)



Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a)(V) ya que la integral es la operación inversa de la derivada, así que si se puede derivar en ese intervalo lo que hace la integral es volverlo a su forma inicial

b)(V) porque una de las condiciones para que una función sea integrable es su continuidad.

c)(F) El que sea $f(x) \leq 0$ en un intervalo intersecado con los $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ no necesariamente implica que la integral también esté por debajo de cero, tenemos $f(x) = -3x^2$ tenemos que la $\int_0^b -3x^2 = -x^3$ no necesariamente es negativa.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

P14

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

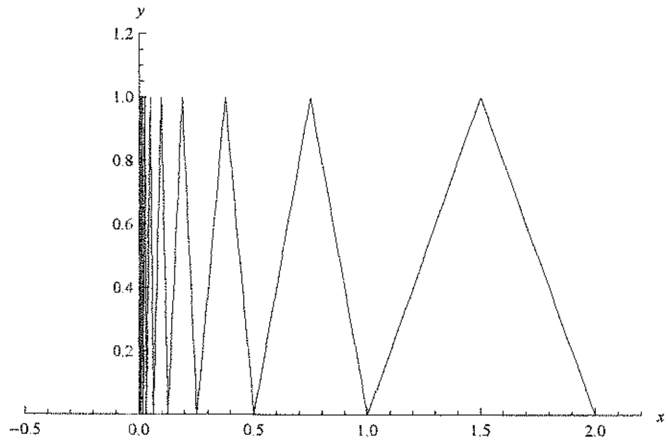


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a)

b) Es una función integrable

c)

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | $\cancel{5}$

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$x \in [0,1); [1,2) \; [2,3)$

$$\int_0^\infty F(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x F(t)\,dt.$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2^n}$$

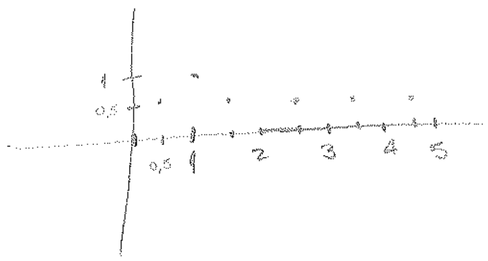
Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | $\cancel{5}$

P14

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.



Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

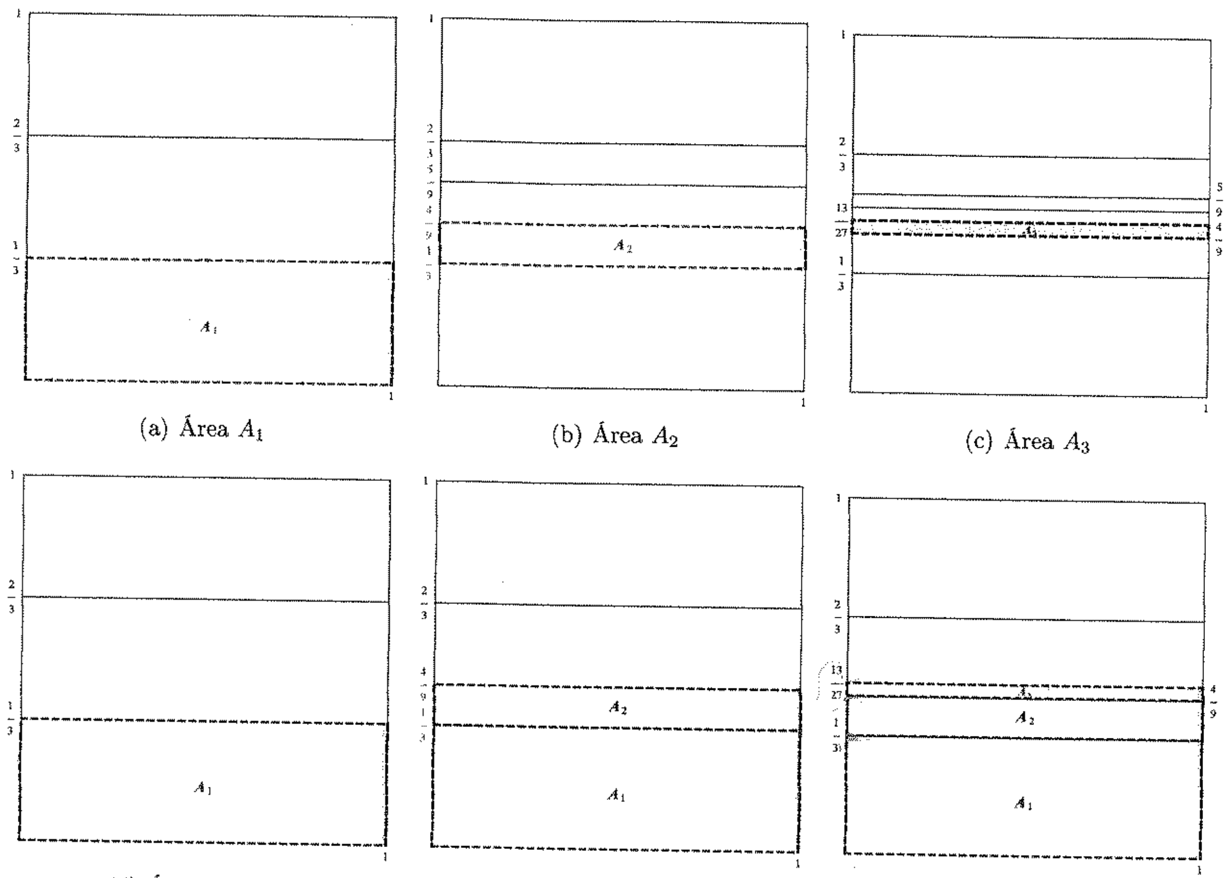
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

P14

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

a) El área sombreada es $1/3$
b) El área sombreada es $1/9$
c) " " " es $1/27$
d) El " " es $1/3$
e) $4/9$
f. $13/27$

$A = 1/3 + 1/9 + 1/27 + \frac{1}{81}$

$A_1 = 1/3 = 0,33$
$A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} = 0,444$
$A_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27}$ $0,481$
$A_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81}$ $0,4938$

$\lim_{A_n \to \infty} A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + \ldots = 0,5 = \frac{1}{2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Realizar cálculos sin tener números concretos sino trabajando con cantidades hacia el infinito es decir con términos muy grandes, observando que es lo que sucede si la cantidad crece demasiado.

(15)

P15

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Jair Adrián Valencia Jiménez. **Curso:** Tópicos del cálculo.

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral X | Sucesiones y Series X | Cálculo multivariado X |

INTEGRACIÓN

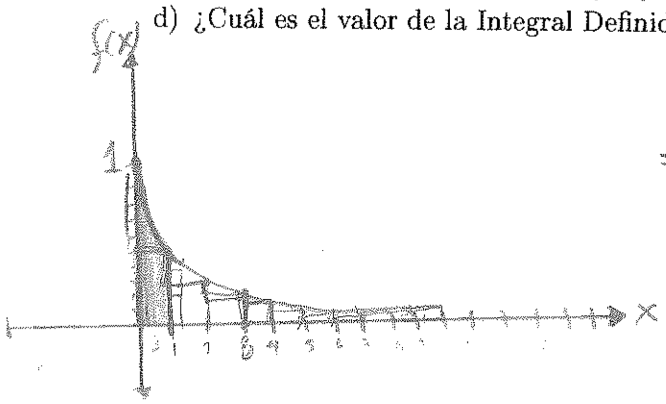
1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?



$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \ln|1+x^2|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 0 =$ $0,5 + \dots$

$= \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots =$

c) Si es integrable, porque la función es continua, y es derivable en ese intervalo.

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b). V

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. ?

Por la continuidad de la función

Calificación de la dificultad | ~~1~~ | 2 | 3 | 4 | 5 |

P15

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

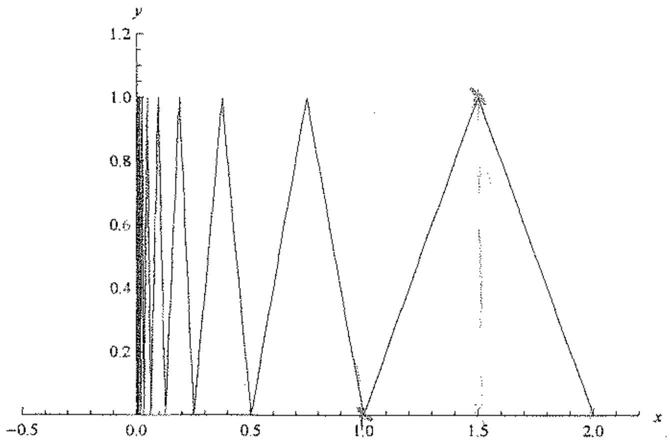


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

x	y
2	0
1.5	1
1	0
0.5	1

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $n=3$ $[\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}] = [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}] = \cdot$ $f(x) =$

$\frac{1}{2^n} \leq x \frac{1}{2^{n-1}}$ $n \in \mathbb{N}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$= \int_0^\infty \frac{1}{2^n} =$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p15

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada. $\frac{a_1+1}{a_1} =$

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior? =

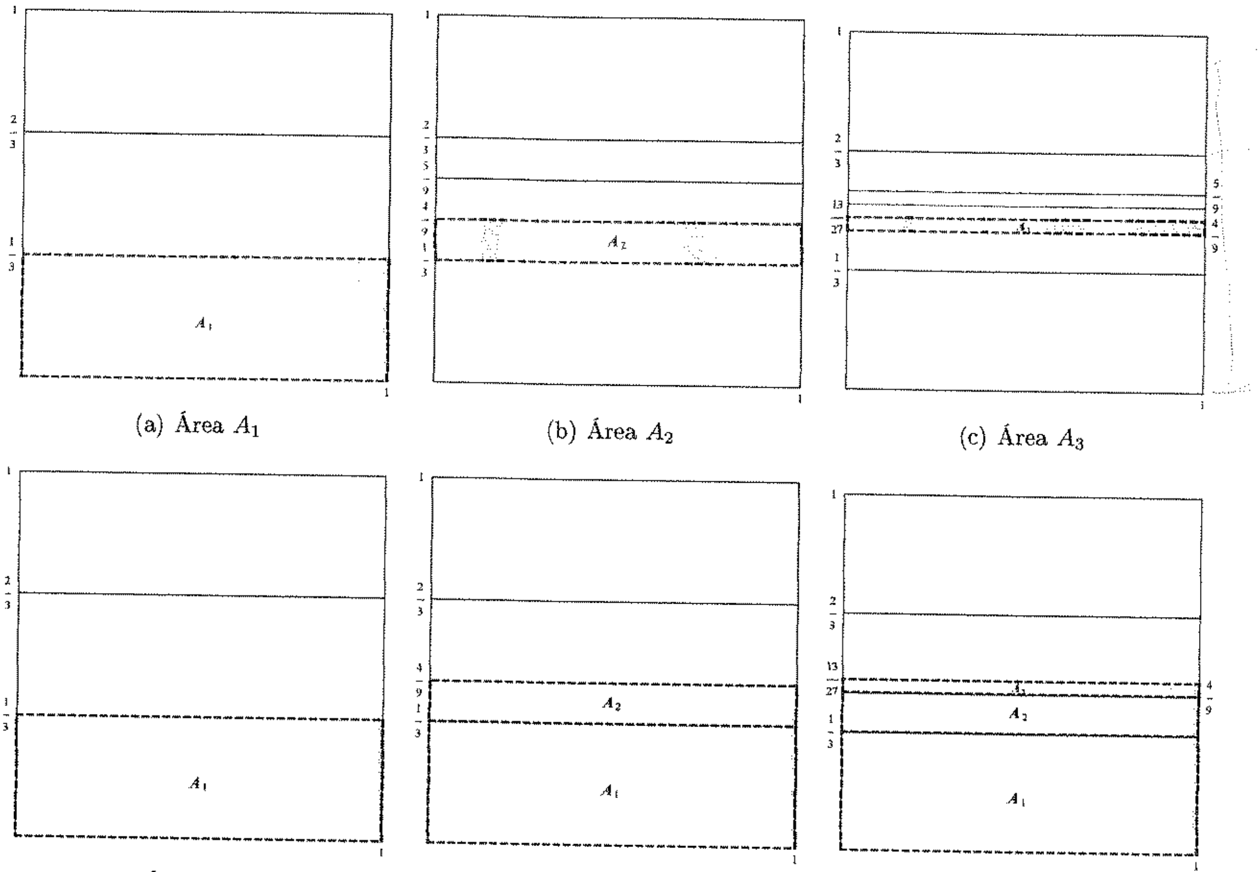
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo. ?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} \quad \frac{\frac{a_n}{a_n}+1}{\frac{a_n}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+a_n}{a_n}\right)}{\frac{a_n}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a_n}{a_n}$$

→ La Sucesión es Creciente $a_r \neq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Entiendo por Proceso infinito; una aplicación de operaciones de manera indefinida.

(16) P16

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Perla Juliana Barragán Sánchez **Curso:** Tópicos de Cálculo.

Señale con una **X** los temas vistos

Cálculo Integral	X	Sucesiones y Series	X	Cálculo multivariado	X

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

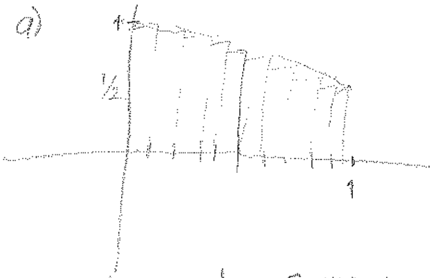
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a)



b) $= \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1+0}\right] + \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1+(1/10)^2}\right] + \cdots + \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1+(9/10)^2}\right] + \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1+1}\right]$

$= \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1+(\frac{n}{10})^2}\right]$

$= \frac{1}{10}\left[1 + \frac{100}{101} + \frac{100}{104} + \frac{100}{109} + \frac{100}{116} + \frac{100}{125} \cdots + \frac{100}{181} + \frac{1}{2}\right]$

$\cong 1.$

c) Dado que las sumas de Riemann pueden ser tan pequeñas como se quieran f es integrable en [0,1]

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx =$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | X | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

c) falso, puesto que ninguna integral es negativa

a) Verdadero, puesto que si es diferenciable la antiderivada también lo será, entonces es integrable.

b) Si es integrable es diferenciable, por lo tanto la derivada también lo será entonces es continua.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | X |

p16

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

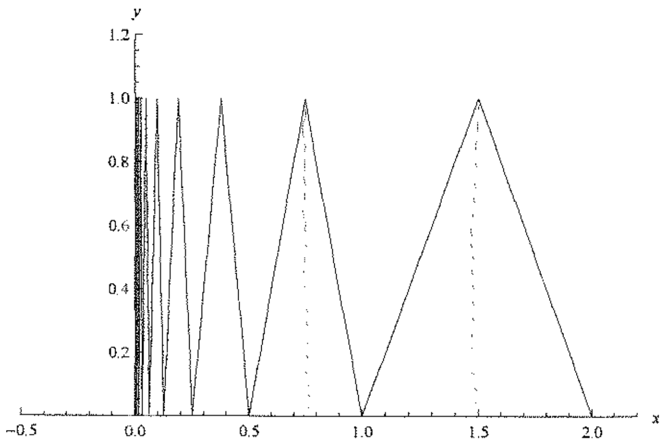


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $f(x) = \begin{cases} 2^n x - 2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}}{2}\right] = A \\ -2^n x + 6 & \text{si } x \in \left(\frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}}{2}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] = B \end{cases}$

b) Dado que es diferenciable es integrable

c) $\int_{A} 2^n x - 2\, dx + \int_{B} -2^n x + 6\, dx$

$\left[2^{n-1}x^2 - 2x\right]_A + \left[-2^{n-1}x^2 + 6x\right]_B$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n}\, dn$ con $n = 1, 2, 3 \ldots$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$a_f = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 29, 39$

$a_{a)} = 1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21$

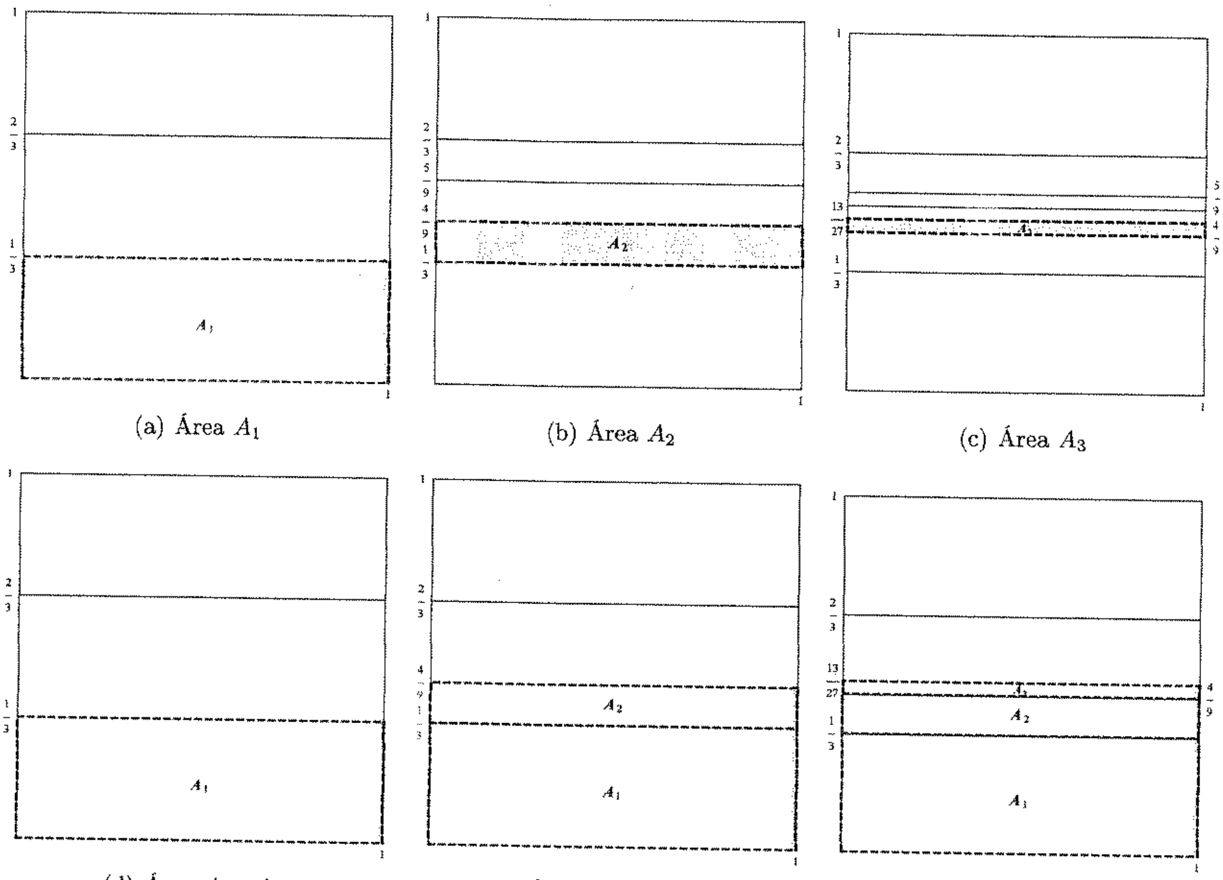
a) Es acotado puesto que no será nunca 0 y el valor mayor es 2.

b) Es decreciente.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5

p16

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

La suma de las áreas tiende a dar $1/2$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{r}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Ejercicio que se repite indefinidamente

(17)

P17

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Leidy Marcela Cepeda B **Curso:** Topicos de Calculo

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral X | Sucesiones y Series X | Cálculo multivariado X |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

 a) Haga una partición de $[0, 1]$.
 b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
 c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
 d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

c. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

si $u = 1+x^2$
$du = 2x\,dx$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | X |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

 a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
 b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
 c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | X |

P17

P17

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

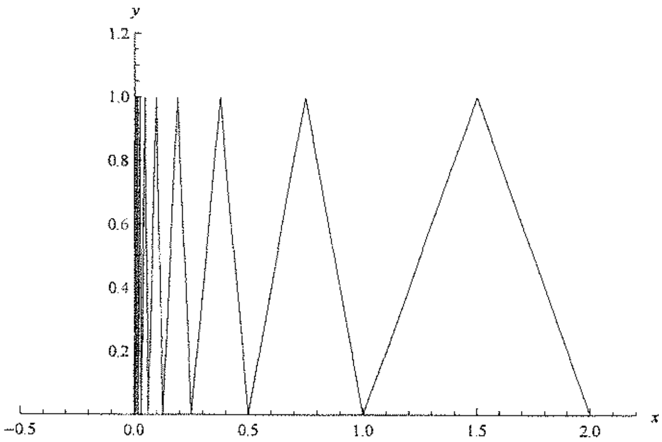


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 ~~5~~

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^n} dn =$

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 ~~5~~

P17

p17

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Número áureo $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \longrightarrow \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$

Entonces

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$0 < 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$$

$$1 < 2 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cancel{5}$ |

p17

b. La funcion no es monotona.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Sucesion de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Si tenemos $a_1 = 1$ $a_2 = 1$

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$$

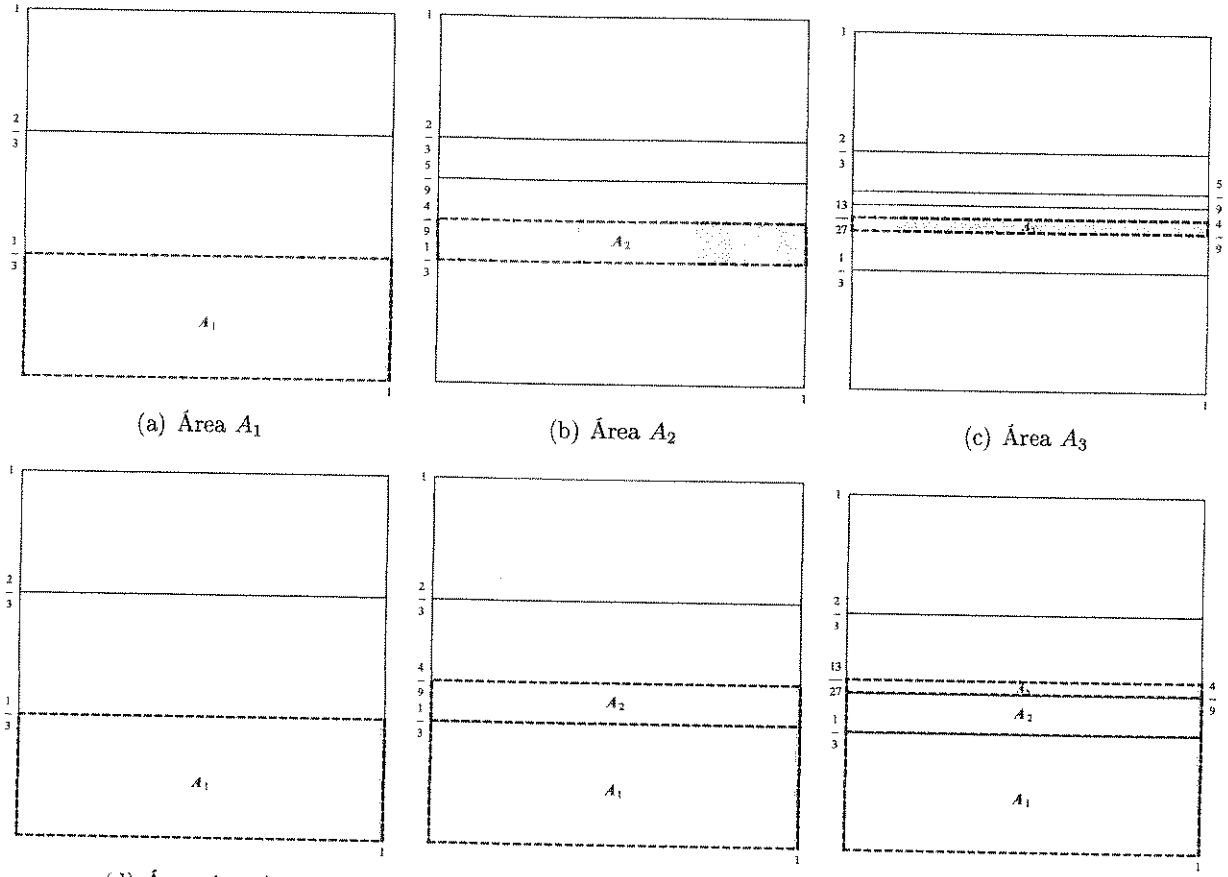
$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$$

$$1, 2, 1.5, 1.\overline{66}, 1.6, 1.625$$

Esto permite decir que la función no es creciente ni decreciente, por lo tanto no es monotona.

p17

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = \frac{1}{3}$

$A_2 = \frac{1}{9}$

$A_3 = \frac{1}{27}$

$A_n = \frac{1}{3^n}$

$A = \sum_{n=1} \frac{1}{3^n}$

$A = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n+1}}\right.$

$3A - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n+1}}$

$3A - 1 = A$

$2A = 1$

$A = \frac{1}{2}$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Es un proceso ciclico.
Como tambien puede ser un proceso que podemos aplicar un número indeterminado de veces sobre su resultado

(18)

P18

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Claudia Marcela Vargas Guerrero **Curso:** Topicos de cálculo

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b) $f'(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{n=}^{\infty}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. Falsa

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p17

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

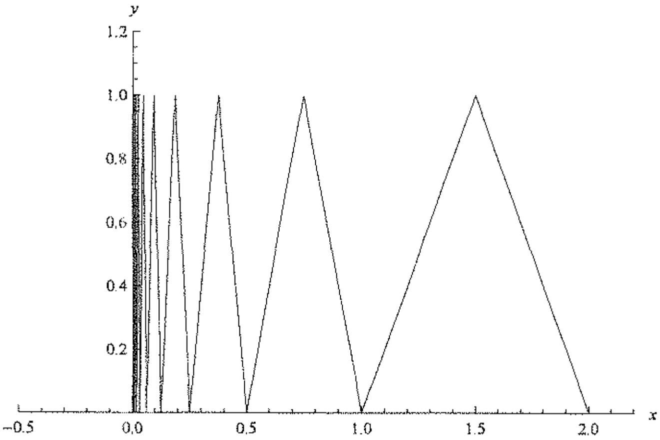


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

3a ..

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n}dt$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P18

p18

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Como $0 < a_{n-1} < a_n$ entonces

$$0 < \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$$

$$0+1 < 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1+1$$

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 2$$

Por tanto la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada por el intervalo $[1,2]$.

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

b) ¿Es creciente o decreciente la sucesión? P18

No es creciente ni decreciente. Supóngase que $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$ entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots \right\}$$

En esta sucesión se puede observar que la sucesión no es creciente ni decreciente

c) Convergencia de la sucesión

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

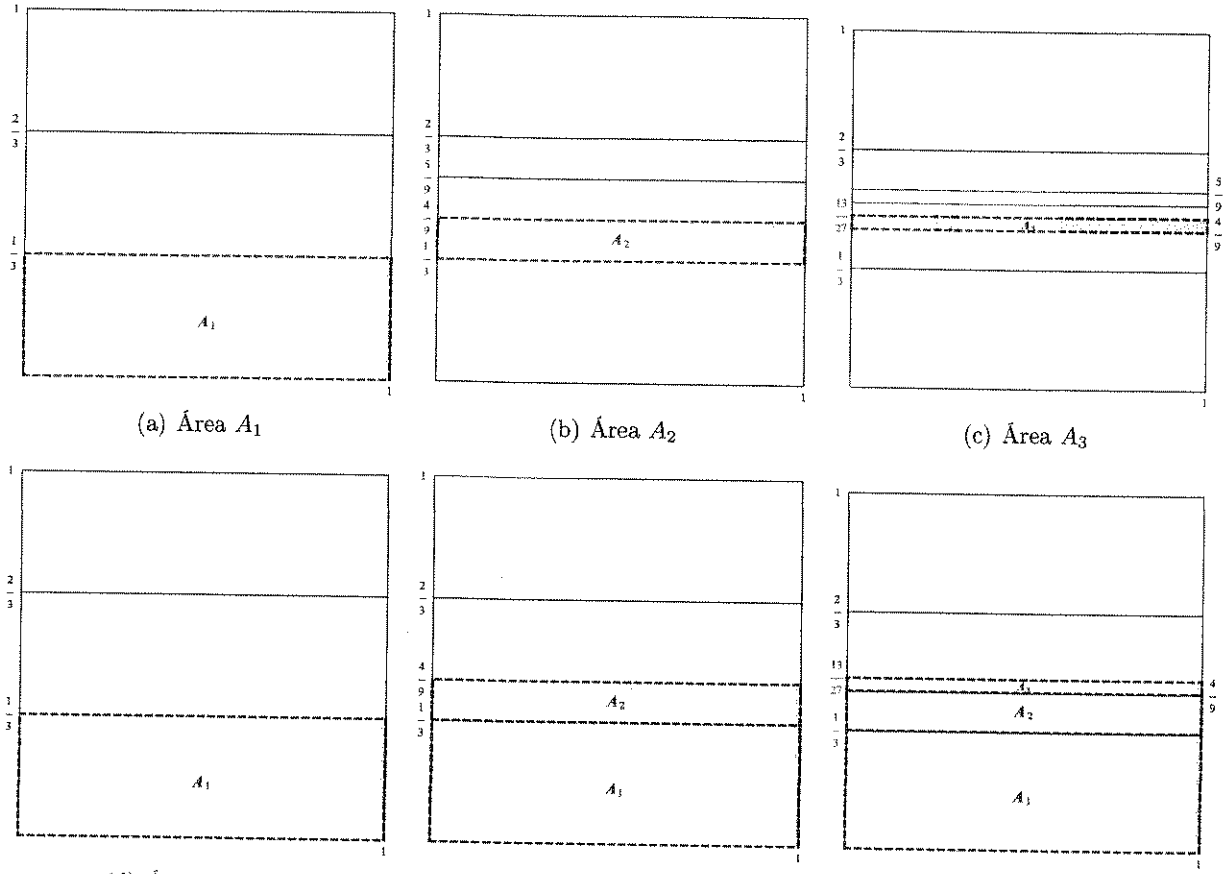
$$\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+2}} = 1 + \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{a_n}{a_{n-1}}}}$$

El comportamiento de la sucesión corresponde a la fracción continua que representa el número áureo, ~~porque~~ pero no se cómo demostrarlo.

P18

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_n = \frac{1}{3^n}$, $n \geq 1$.

$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$

$A = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots\right)$

$3A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots$

$3A - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}$

$3A - 1 = A$

$3A - A = 1$

$2A = 1$

$A = \frac{1}{2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Un proceso infinito es un proceso que se repite indefinidamente.

(19) P19

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Luis Arturo Ortiz **Curso:** Tópicos de Cálculo

Señale con una **X** los temas vistos | ~~Cálculo Integral~~ X | Sucesiones y Series X | Cálculo multivariado X |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0,1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$f(x) = \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right.$ si $0 \leq x \leq 1$.

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{1+n^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

No es integrable en el intervalo por fracciones parciales

$u = 1+x^2$

$du = 2x\, dx$

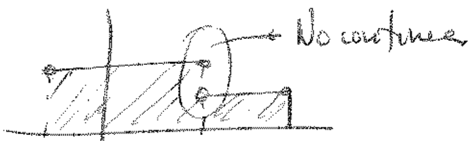
$$\int_0^1 \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2x} dx$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | X | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b).
   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.
   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Falso: el hecho que una función sea diferenciable, no implica su integración, de hecho.

b) Falso: un caso específico son las funciones a trozos donde el area bajo la curva se puede definir pero no es continua



c) Falso: Dado que una función puede ser negativa pero los valores están sobre el eje x lo que implica que el valor de la integral sea positivo

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | X | 4 | 5 |

p19

p19

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

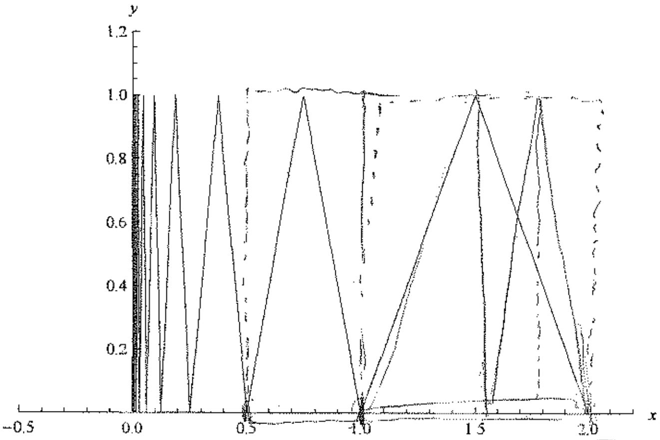


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

2^{n-1} 2^n

2 1 0

2 1

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a)

$$\int_0^2 \frac{1}{\cancel{2x}\cdot 2}\,\cancel{2\,dx}$$

EA

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$+\frac{1}{\cancel{2x}}$ ← Ex. algebraica

$u = 2x$

$du = 2dx$

$dx = \frac{du}{2}$

$du = 2dx$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du$$

$$\frac{1}{2}\ln(u)\Big|_0^2 \qquad \frac{1}{2}\ln(2x)\Big|_0^2 \qquad \frac{1}{2}\ln(4) = A.$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$[0, 1)$
$[1, 2)$
$[2, 3)$
$[3, 4)$
$[4, 5)$
$\vdots$
$[n-1, n]$

$$f(x) = \frac{1}{2^n}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2^x}\,dx =$$

$u = 2^x$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P19

P19

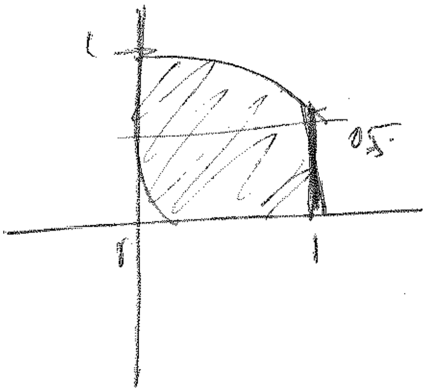
5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$0 < 1 < 2$

$x = \frac{1}{2}$



??? !!!

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

$a_0 \ a_1$

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$

$a_2 = a_0 + a_1$

$a_3 = a_2 + a_1$

$a_4 = a_3 + a_2$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \boxed{\frac{a_{n-1}}{a_n}}$$

luego la sucesión está acotada por superior

Vale mayor de

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5

$\frac{a_{n-1}}{a_n}$ luego el denominador es mayor, por lo que la fracción siempre tiende un límite definido y un máximo y mínimo

p19

$\boxed{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}}$ sucesión acotada

si, es creciente

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$1+\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3}$$

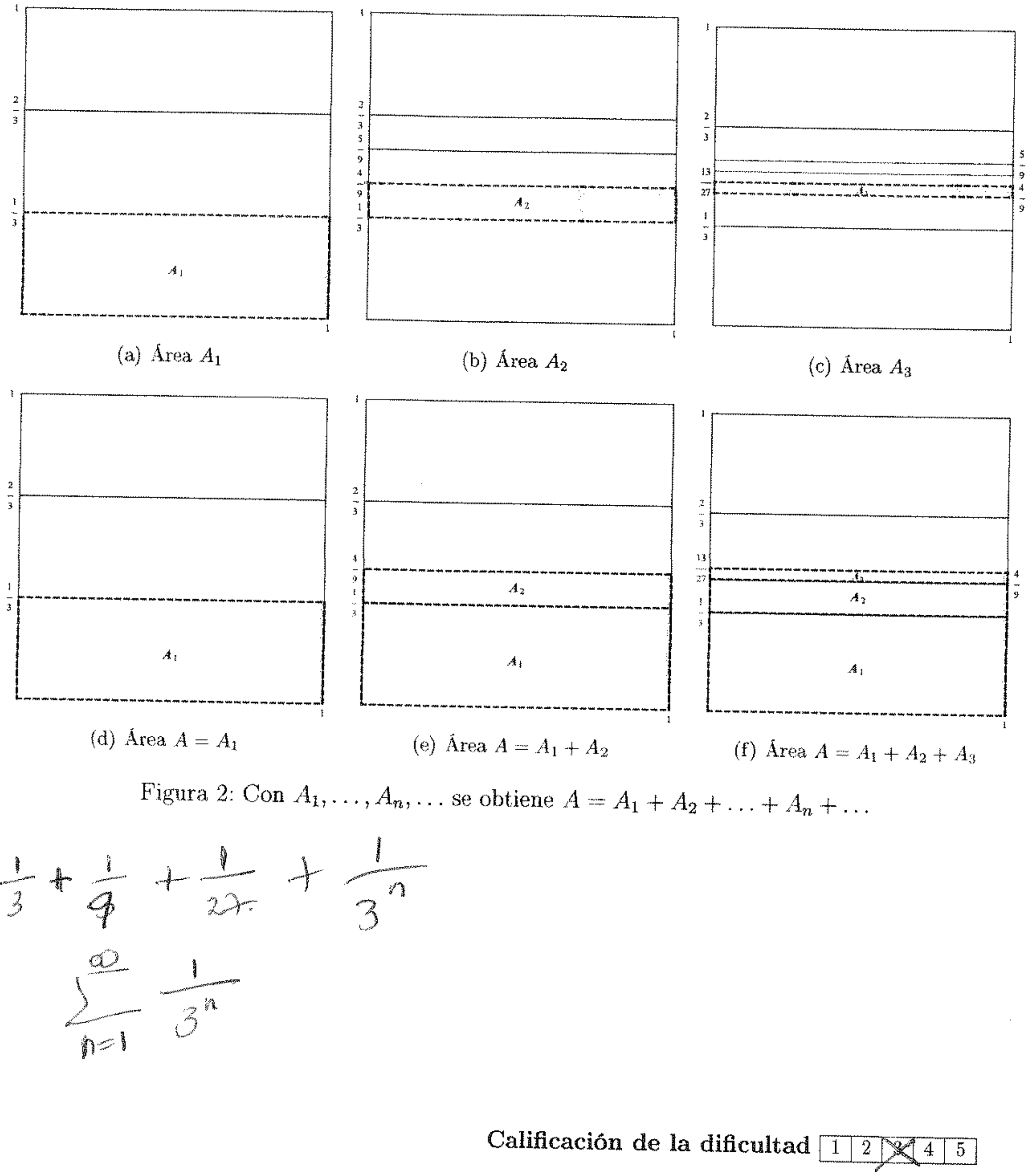
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$1+\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$1+\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+a_{n-2}}$$

p19

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Una opeción definida llevada a una sucesión causal apartir de una forma que implique su definición

(20) P20

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Edwin Castro **Curso:** Sucesiones

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p 20

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

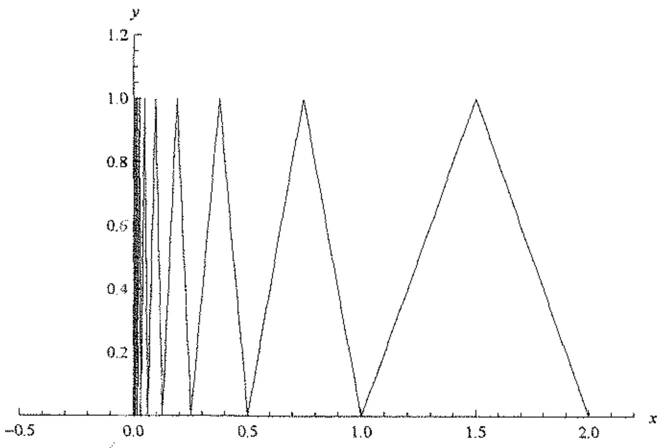


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P20

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \to a_n > a_{n-1}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$

Como $a_n > a_{n-1}$, entonces $\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$

luego $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 2$

$\boxed{2 \text{ es la cota superio}}$

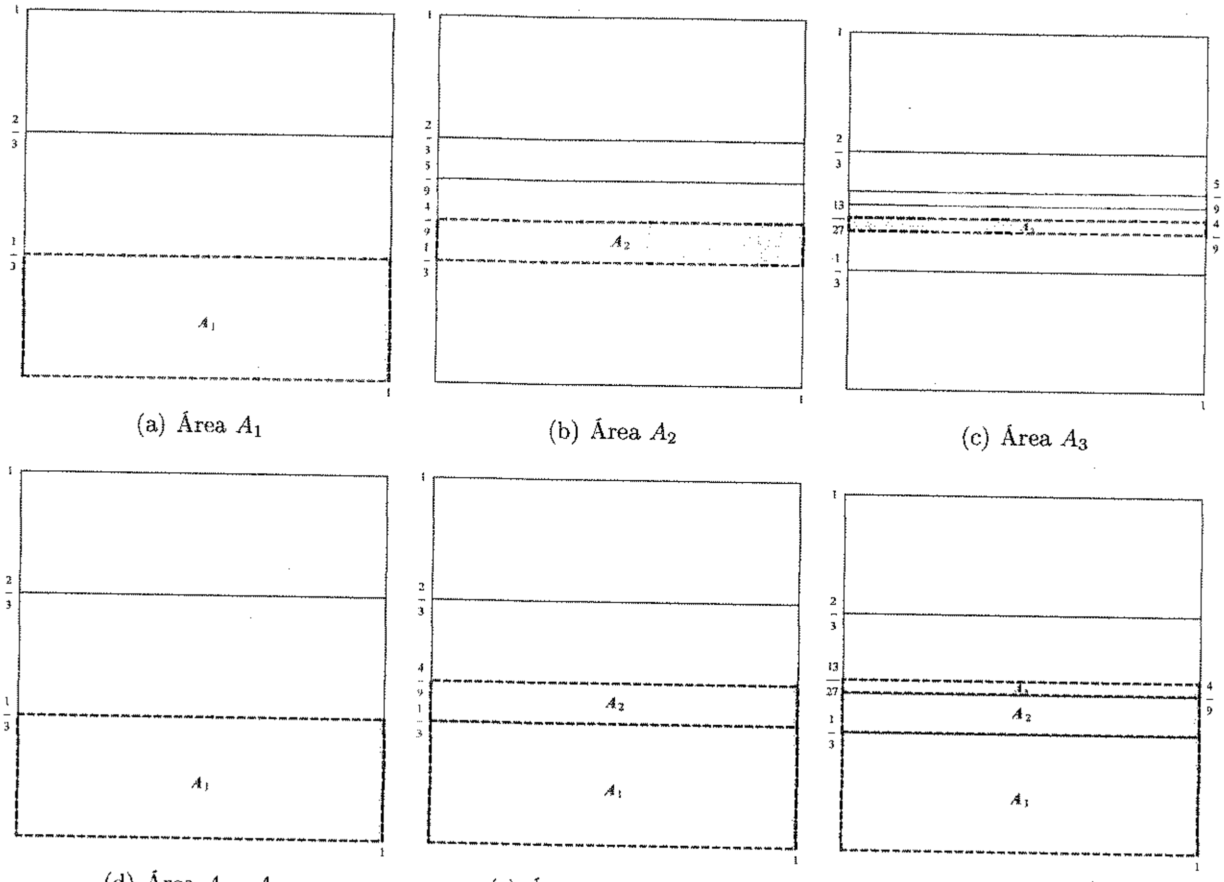
a_1 y $a_2 \in \mathbb{N} \to a_n, a_{n+1} \in \mathbb{N} \to$ P, consecutivos

entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

P20

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

R= $A_1 = \frac{1}{3}$, $A_2 = \frac{1}{9}$ $A_3 = \frac{1}{27}$ ... $A_n = \frac{1}{3^n}$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + \ldots = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{3^p} \Rightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^p \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

R= hacer un proceso (o algoritmo) n veces cuando n tiende a infinito, como lo es una serie

(21) P21

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: David Esteban Morales Suárez **Curso:** 9 semestre

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral X | Sucesiones y Series | Cálculo multivariado |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$. si

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida? 45

$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+x_i^2}\right) \Delta x$ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ $\Delta x = \frac{1}{10}$

$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+x_i^2}\right) \frac{1}{10}$ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx =$

$\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}$

$y_1 = 1/2$

$y_2 = 1/2 + 1/2 = 9/10$

$y_3 = \ldots = 3/\ldots$

$y_4 = \ldots$

$y_5 = \ldots + \frac{1}{1+(x_i)^2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | X | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   V a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \le 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \le 0$.

a) T.F.C. → V.

b) $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ $f(x) = \int_a^x f(t)dt$

$F'(x) = f(x)$ Falso el TFC dice $f'(x) = f(x)$

c) $f(x) \le 0$ $-\int_a^b f(x) \ge 0$ verdadero

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | X | 5 |

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \int_0^1 \frac{1}{\sec^2\theta} = \int_0^1 \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

p21

$x = \tan\theta$
$dx =$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

[illegible] $\frac{1}{\cos^2\theta}$ $\qquad \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{\cos^2\theta}} =$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta.$$

$u = 2\theta$
$du = 2$
$\frac{du}{2} = d\theta$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta.$

$\theta = \tan^{-1} x$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta = \int_0^1 1$$

$x = \tan\theta$
$dx = \sec^2\theta$

$\theta = \tan^{-1} x$

$$= \theta.$$
$$= \tan^{-1} x \Big|_0^1$$
$$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0$$
$$= 45 - 0$$
$$= 45.$$

p2)

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

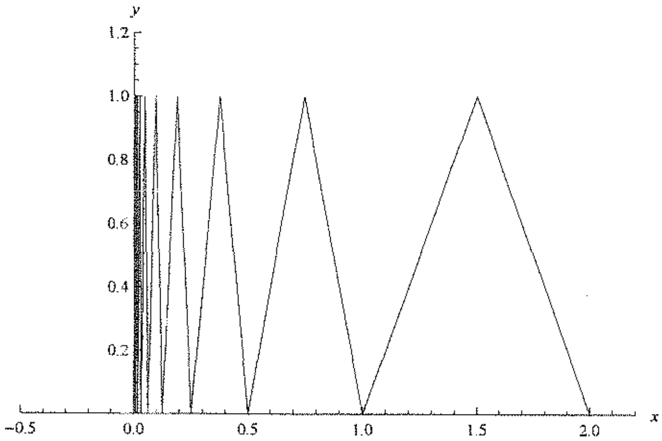


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$ $[0,1),[1,x)$

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n}dx$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_0^x 2^{-n}dx = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = \lim_{x\to\infty} \cancel{\frac{1}{(n+1)(2^{n+1})}}\Big|_0^x = 0$$

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

p21

921

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{2^n} = 0$ y $\lim_{x \to a} 0 = 0$

$\Rightarrow f(x)$ es continua

$\int_0^1 \frac{1}{2^n} dx = \frac{1}{2^n} \int dx = \frac{1}{2^n} \cdot x \Big|_0^1 \to$ ya que como $x \neq 0$ por def. entonces $f(x)$ queda definida por 0:

$\Rightarrow \int_0^1 0\, dx = 0x = 0.$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$

$a_{n+1} > a_n$

$a_{n+1} < a_n$

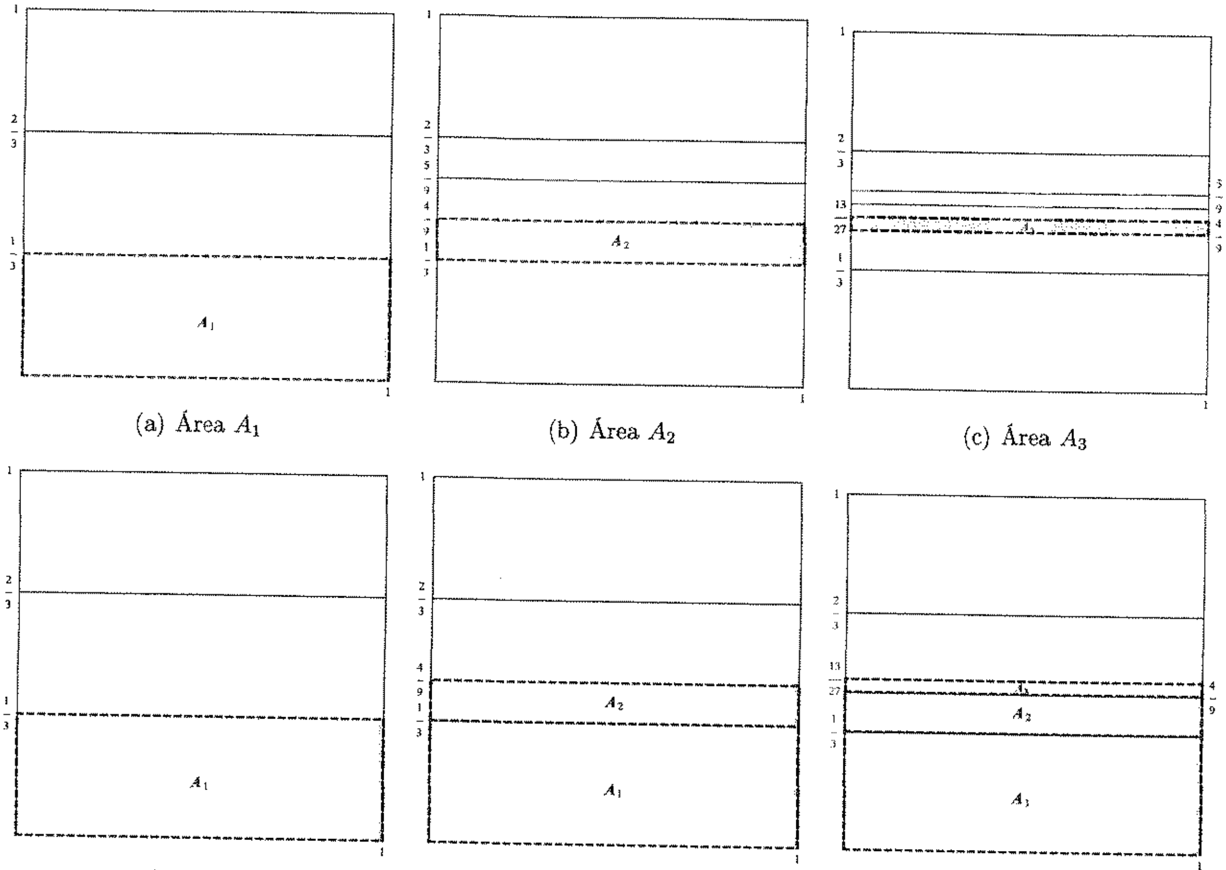
b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \gtrless 0 \Rightarrow \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow a_n + a_{n-1} > a_n.$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P21

P21

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(23)

P23

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: [illegible] **Curso:** __________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

• [illegible] (0,1 ... ,10)

$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{10})^2} + \frac{1}{1+\frac{3}{10}} + \dots + \frac{1}{1+(\frac{5}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{6}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{7}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{8}{10})^2} + \frac{1}{1+\frac{9}{10}} + \frac{1}{1+1}\right) = 0,789$

• $\int \frac{1}{1+x^2}dx$: arctan $x + C$.

• $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ arctan $x \Big|_0^1 = 0,78539$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) V. Por el teorema fundamental

b) F. Porque $F: [a, b]$ entonces la función definida es
$F(x) \cdot \int_0^x f(t)dt$.

c).

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p23

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

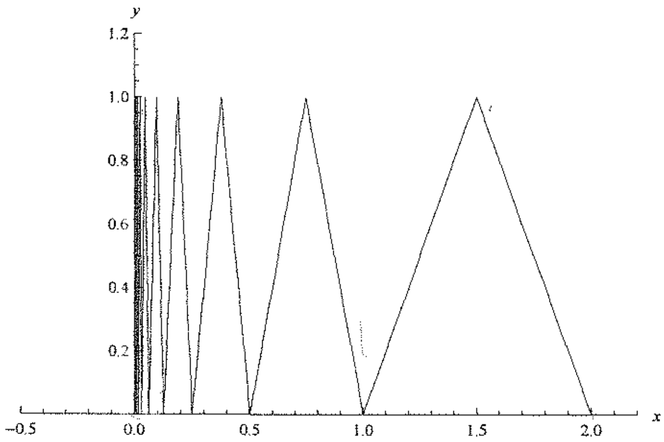


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^n}\, dn = \lim_{n\to\infty} \int_0^n$

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

p23

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$\int_0^1 \frac{1}{2^n} dx = \frac{1}{2^n} x \Big|_0^1 = \frac{1}{2^n} \cdot 1 - \frac{1}{2^n} \cdot 0 = 0 - 0 = 0$

Por el primer y segundo caso con $x = 1$ entonces $\frac{k}{2^n} \neq 1$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $\qquad a_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\qquad a_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$

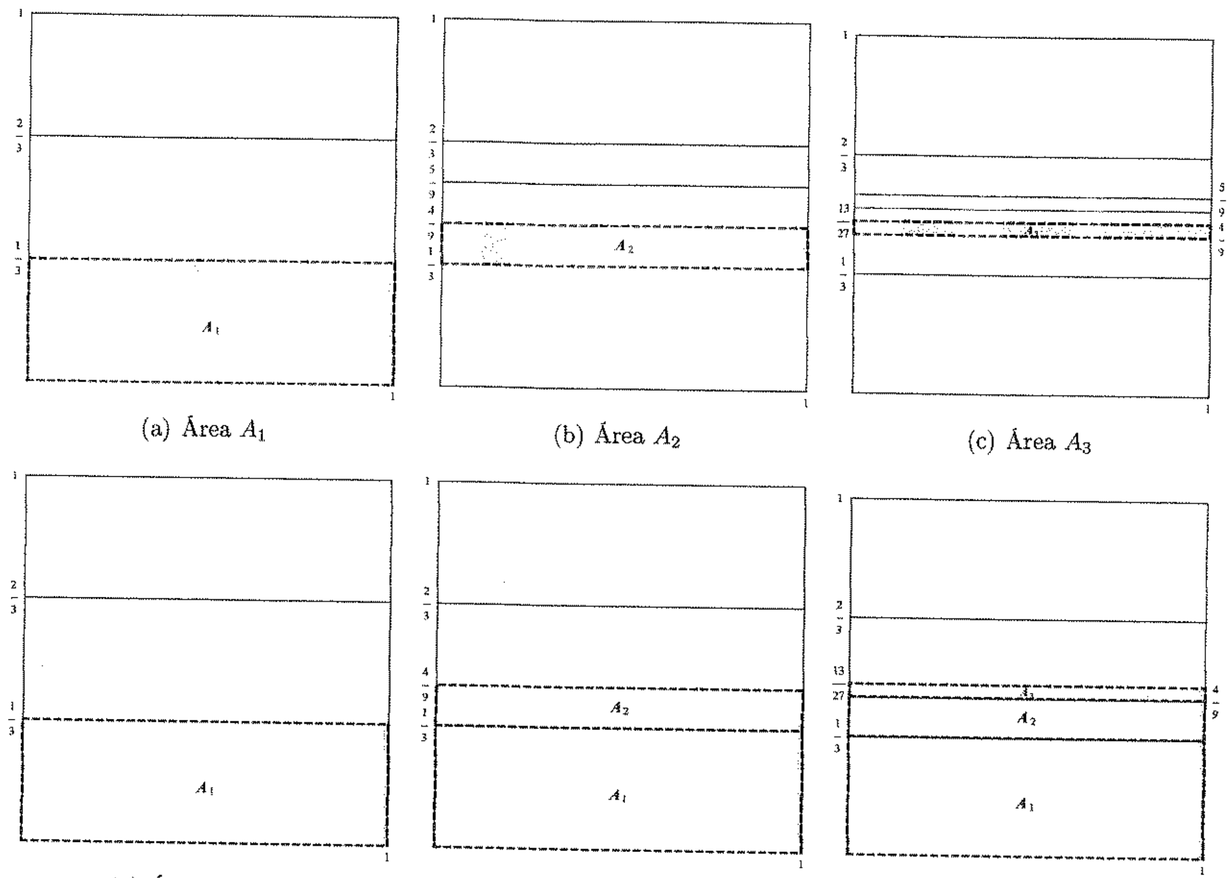
$\frac{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \geq 1$ $\qquad \frac{a_n(a_n+2)}{(a_n+1)(a_n+1)} \geq 1$ $\qquad \frac{a_n^2+2a_n}{a_n^2+a_n+a_n+1} \geq 1$

$a_n^2+2a_n \geq a_n^2+2a_n+1$ $\qquad a_n < a_{n+1}$ (creciente).

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5

P23

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(24) P24

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Vicente E. Muñoz D **Curso:** ____________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral [ ] | Sucesiones y Series [ ] | Cálculo multivariado [ ] |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a) $[0, 1/3] \cup [1/3, 5/6] \cup [5/6, 1]$

b) $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ $\quad x_i^* = \frac{i}{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(i/10)^2} \cdot \frac{1}{n}$ •

• $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{1+(i/10)^2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}\left(\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{10})^2}\right] + \left[\frac{1}{1+(\frac{2}{10})^2}\right] + \dots + \left[\frac{1}{1+(\frac{10}{10})^2}\right]\right) = \frac{1}{10}\left[\frac{100}{101} + \frac{100}{104} + \frac{100}{109} + \dots + \frac{100}{181} + \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{1}{10}(7.5998) = 0.75998$

c) f es integrable, $1+x^2 > 0$, la función es continua en $[0,1]$

d) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x \Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = 0.785 - 0 = 0.785$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ (X) | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Verdadero, al ser diferenciable es continua, por lo tanto en $[a,b]$ f es continua y se puede integrar.

b) Falso, porque puede existir un $c \in [a,b]$ tal que en c f es discontinua.

c) Verdadero, al intersecar todos los $x \in [a,b] \cap (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ se tienen finitos puntos de discontinuidades en $f(x)$, ademas si $f(x) \leq 0$ $\forall$ x Pertenecente a dicho intervalo la integral es el area comprendida por f y el eje x con signo negativo

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ (X) | 4 | 5 |

p24

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

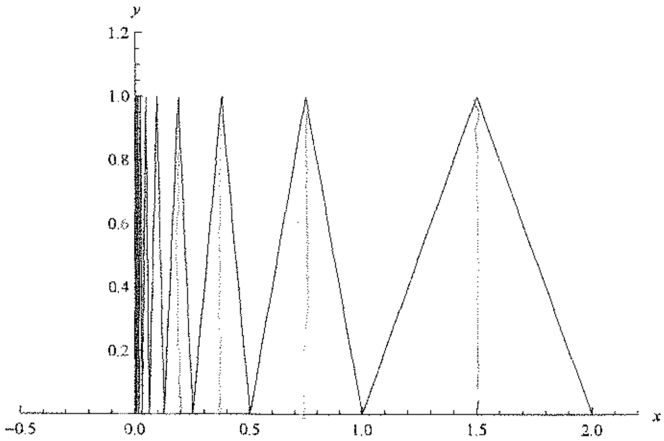


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $-\left|\frac{x}{2^n}\right| + 1 \quad n \in \mathbb{N}$

b) $1 < -\left|\frac{x}{2^n}\right| \leq 0$, Pero $-\left|\frac{x}{2^n}\right| + 1 \geq 0$ por lo tanto es integrable para $\mathbb{R}^+$ en $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$

c) $\int$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} \approx 1$$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5

p24

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

R/ dado que $\frac{1}{2^n} = z$, $z \in R$ entonces la integral de un punto z en $[a,b]$ es igual a cero

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

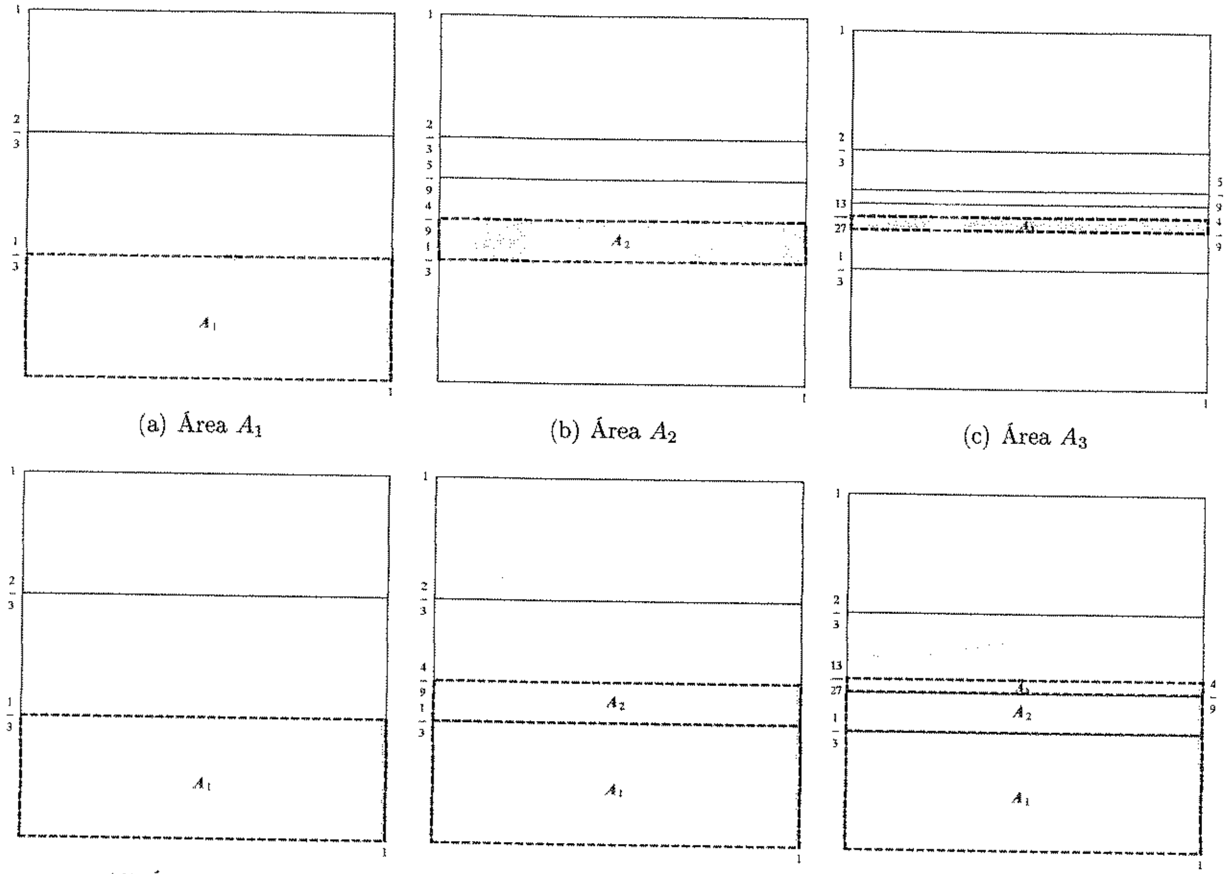
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P24

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^{i-1}} + \frac{1}{3^i}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i} \approx \frac{1}{2}$$

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Cuando se tiende una sucesión o sumatoria al infinito dicha sucesión toma un valor aproximado determinado, (el infinito determina una sucesión de terminos que cumplen con regularidades los cuales al sumarse tienden a un número aproximado)

(25) P25

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:** Sucesiones y Series

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b) $\frac{1}{10}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{5})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{5})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{5})^2} + \frac{1}{1+(\frac{7}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{4}{5})^2} + \frac{1}{1+(\frac{9}{10})^2} + \frac{1}{1+(1)^2}\right]$

$= \frac{1}{10}\left[\frac{100}{101} + \frac{25}{26} + \frac{100}{109} + \frac{25}{29} + \frac{4}{5} + \frac{25}{34} + \frac{100}{149} + \frac{25}{41} + \frac{100}{181} + \frac{1}{2}\right] = 0.759981$

c) $f(x)$ continua en $[0,1]$

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) V Si f es diferenciable en un intervalo (a,b), entonces es continua en (a,b) y la condición para que sea integrable en un intervalo es que sea continua en este, entonces es integrable en (a,b).

b) F, eso ocurre solo si $x \leq b$ $x > a$

c) F, el área No es Negativa

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p25

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

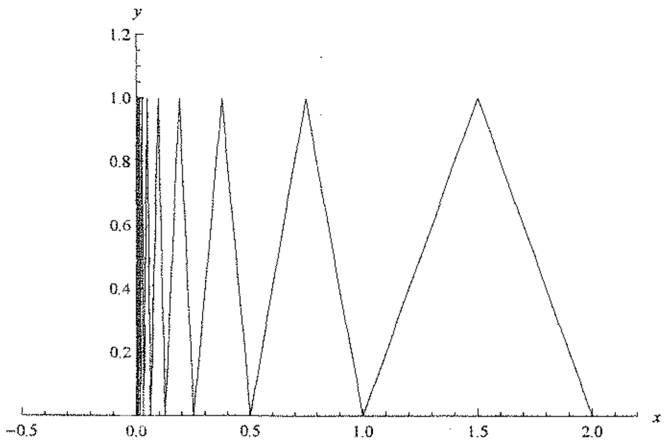


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

0.08 = 1
0.25 = 1
0'5, = 0
1.0 = 0
1.5 = 1
2.0 = 0
3.0 = 1

a) $2 \to 0$
$3/2 \to 1$
$1 \to 0$
$3/4 \to 1$
$1/2 \to 0$
$\to 1$

$$f(x) \begin{cases} \text{para } x \\ 0 \text{ para } x = \frac{2}{2^n(2^n-1)} \\ 1 \text{ para } x = \frac{2}{2^{n+1}(2^n-1)} \end{cases}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P25 ¿doen?

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$0 < k < 2$ $\quad \frac{k}{2^n}$ k par

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$2w+1 = k$

$$\int_0^1 \frac{1}{2^n}dx \cdot \frac{2^n}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{2^1}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} \qquad 2w+1 = 1 \qquad w = 0 \text{ donde}$$

$$= \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} = \boxed{\frac{1}{\ln 2} > 0}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P25

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

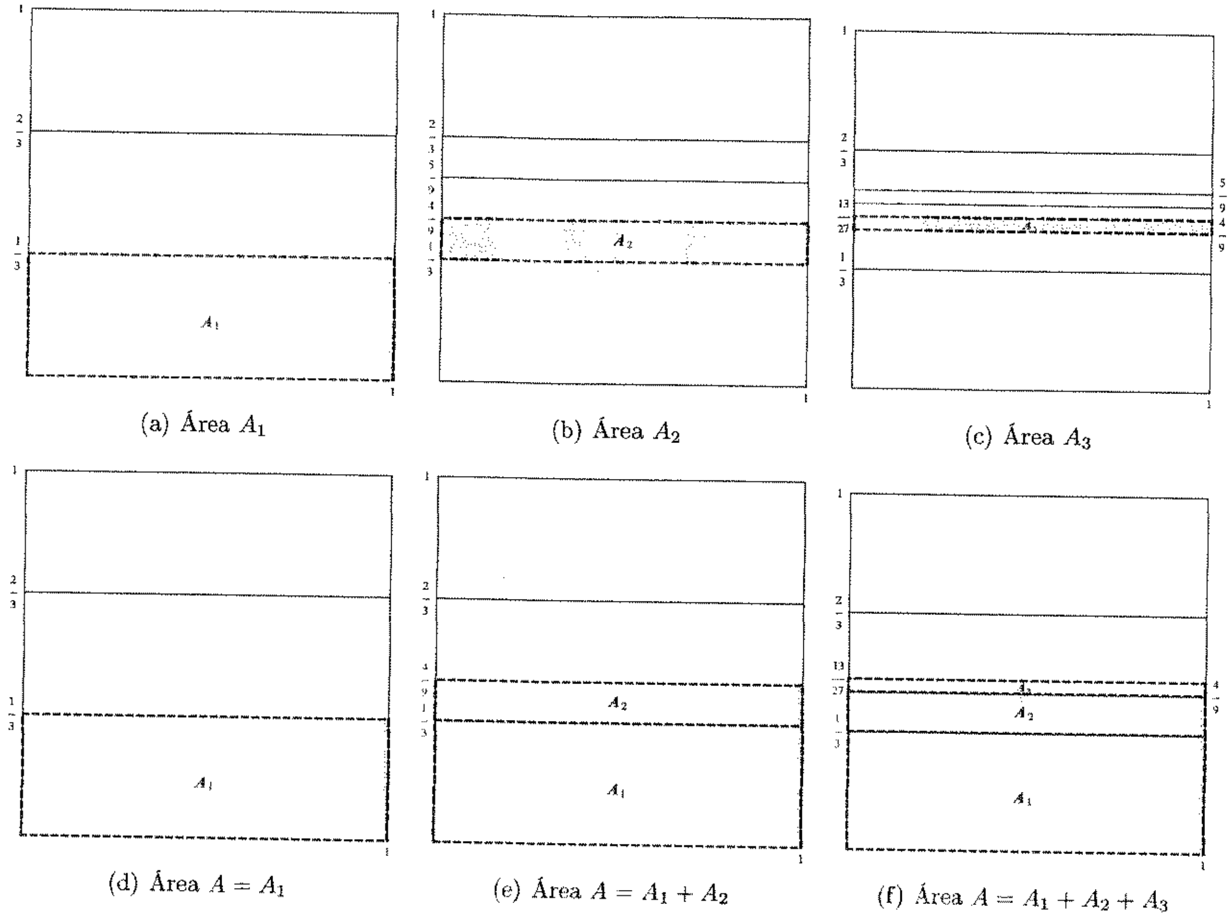


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(26) $\frac{1}{10}$ P26

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:__________________ **Curso:** Cálculo Integral y Sucesiones y Series

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b) $\sum_{i=1}^{10} \Delta_i = \frac{1}{10}\left[f(1/10)+f(1/5)+f(3/10)+f(2/5)+f(1/2)+f(3/5)+f(7/10)+f(4/5)+f(9/10)+f(1)\right]$

$= \frac{1}{10}\left[\frac{100}{101}+\frac{25}{26}+\frac{100}{109}+\frac{25}{29}+\frac{4}{5}+\frac{25}{34}+\frac{100}{149}+\frac{25}{41}+\frac{100}{181}+\frac{1}{2}\right]$

$= 0{,}759981$

c) Si es integrable, pues f es continua y está definida en $[0,1]$

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \pi/4 - 0 = \pi/4$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) V. Si f es diferenciable en el intervalo (a,b), entonces es [illegible], por tanto el límite existe y por ello es integrable

b) Falso. Esto sólo ocurre si $x \leq b$, $x > a$

c) Falso. Ya que $\int_a^b f(x)\,dx$ no puede ser menor que cero pues estamos calculando el área debajo de la curva no puede ser negativo

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P26

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

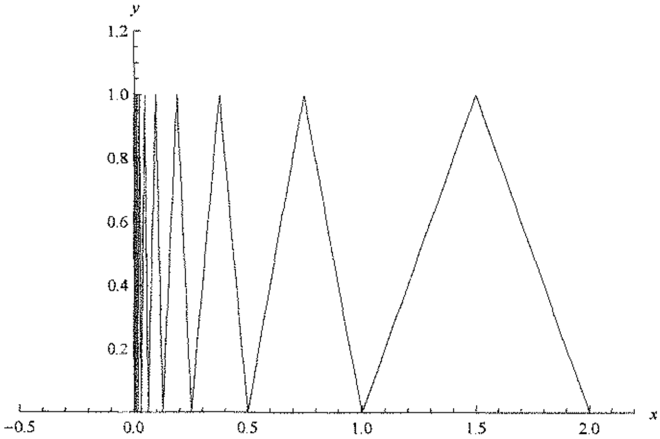


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p26

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 2$
$a_4 = 3$
$a_5 = 5$
$a_6 =$ [illegible]
$a_7 = 13$
$a_8 =$ [illegible]
$a_9 =$ [illegible]
$a_{10} = 55$
$a_{11} = 89$
$a_{12} = 144$
$= 233$

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a)

n	b_n				
1	$\frac{1}{1} = 1$	5	$\frac{8}{5} = 1.6$	9	$\frac{55}{34} = 1,617$
2	$\frac{2}{1} = 2$	6	$\frac{13}{8} = 1,625$	10	$\frac{89}{55} = 1,618$
3	$\frac{3}{2} = 1,5$	7	$\frac{21}{13} = 1.615$	11	$\frac{144}{89} = 1,617$
4	$\frac{5}{3} = 1,6$	8	$\frac{34}{21} = 1.619$	12	$\frac{233}{144} = 1,618$

Supongo que está acotado por 2.

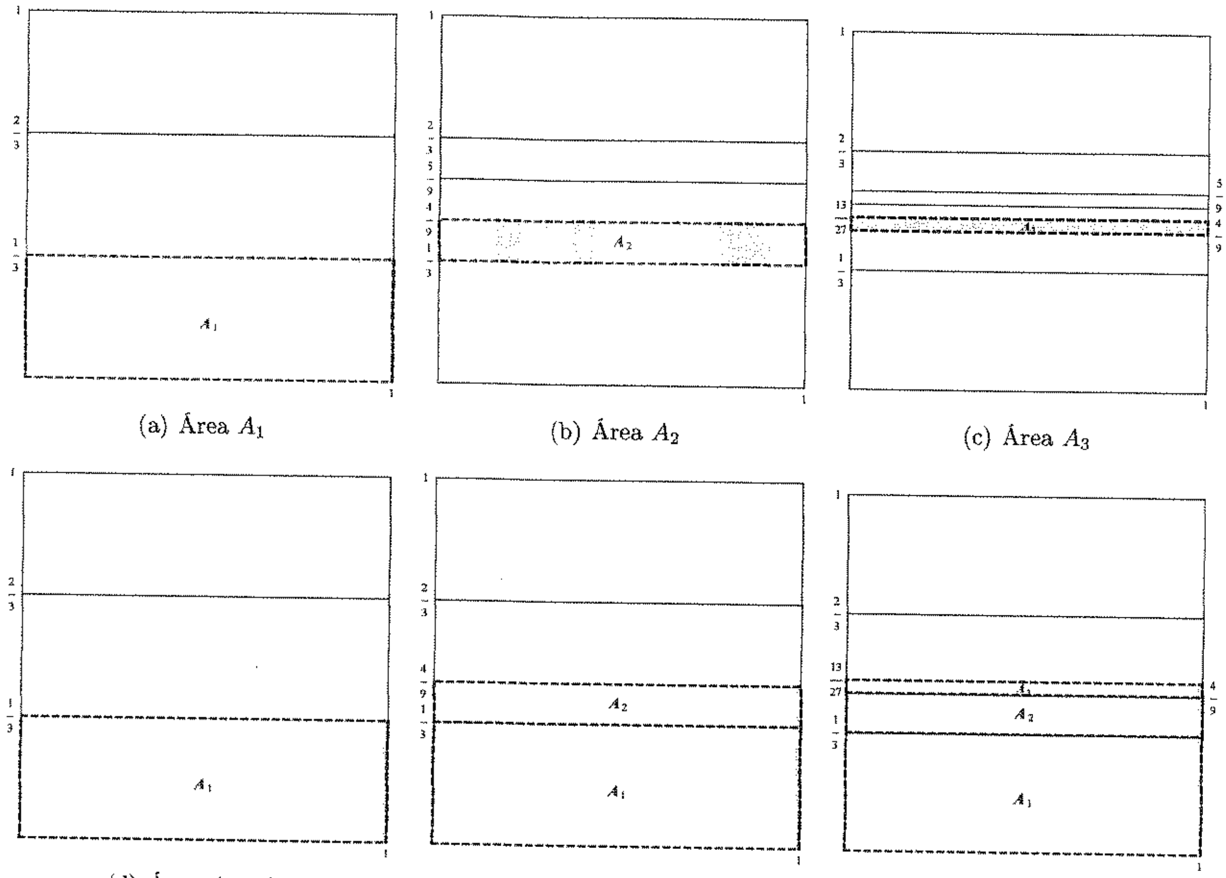
$= \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad b_n \leq 2$

Para $n = 1$; $b_1 = 1 \leq 2$.

H.I Supongamos que $b_n \leq 2$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(27) P27

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________________ **Curso:**______________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\Delta x =$ $\sum \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \Delta x \frac{1}{10}$

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b) $A_i = \frac{1}{10}\left[f\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{10})^2}\right) + f\left(\frac{1}{1+(\frac{2}{10})^2}\right) + f\left(\frac{1}{1+(\frac{3}{10})^2}\right) + f\left(\frac{1}{1+(\frac{4}{10})^2}\right) + f\left(\frac{1}{1+(\frac{5}{10})^2}\right) + f\left(\frac{1}{1+(\frac{6}{10})^2}\right) + f\left(\frac{1}{1+(\frac{7}{10})^2}\right) + f\left(\frac{1}{1+(\frac{8}{10})^2}\right) + f\left(\frac{1}{1+(\frac{9}{10})^2}\right) + f\left(\frac{1}{1+1}\right)\right]$

$= \frac{1}{10}\left[\frac{100}{101} + \frac{25}{26} + \frac{100}{109} + \frac{25}{29} + \frac{4}{5} + \frac{25}{34} + \frac{100}{149} + \frac{25}{41} + \frac{100}{181} + \frac{1}{2}\right]$

$= 0.7599$

c) $f(x)$ es integrable en $[0,1]$ ya que ésta es continua en ese intervalo

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Verdadero si f es diferenciable en el intervalo (a,b), entonces es continua en [illegible] existe, y esto implica que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable.

b) falso
[illegible] $x > a$

c) falso, porque la integral de una función me da es el área en un intervalo determinado, y el área nunca puede ser menor que cero.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

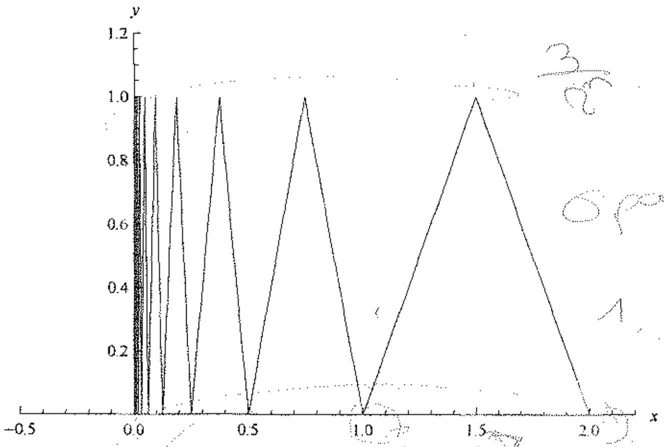


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{para} \quad x = \dfrac{2}{2^n(2n-1)} \\ 1 \quad \text{para} \quad x = \dfrac{?}{(2n+1)(2^{n-1})} \end{cases}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{2^x} dx = \lim_{t\to\infty} \frac{a^x}{\ln|a|}\Big]_0^t$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{a^t}{\ln|t|} - \lim \frac{a^0}{\ln|a|} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{a^t}{\ln|t|} - \lim \frac{1}{\ln|a|}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P27

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2^x}\,dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln|1/2|}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

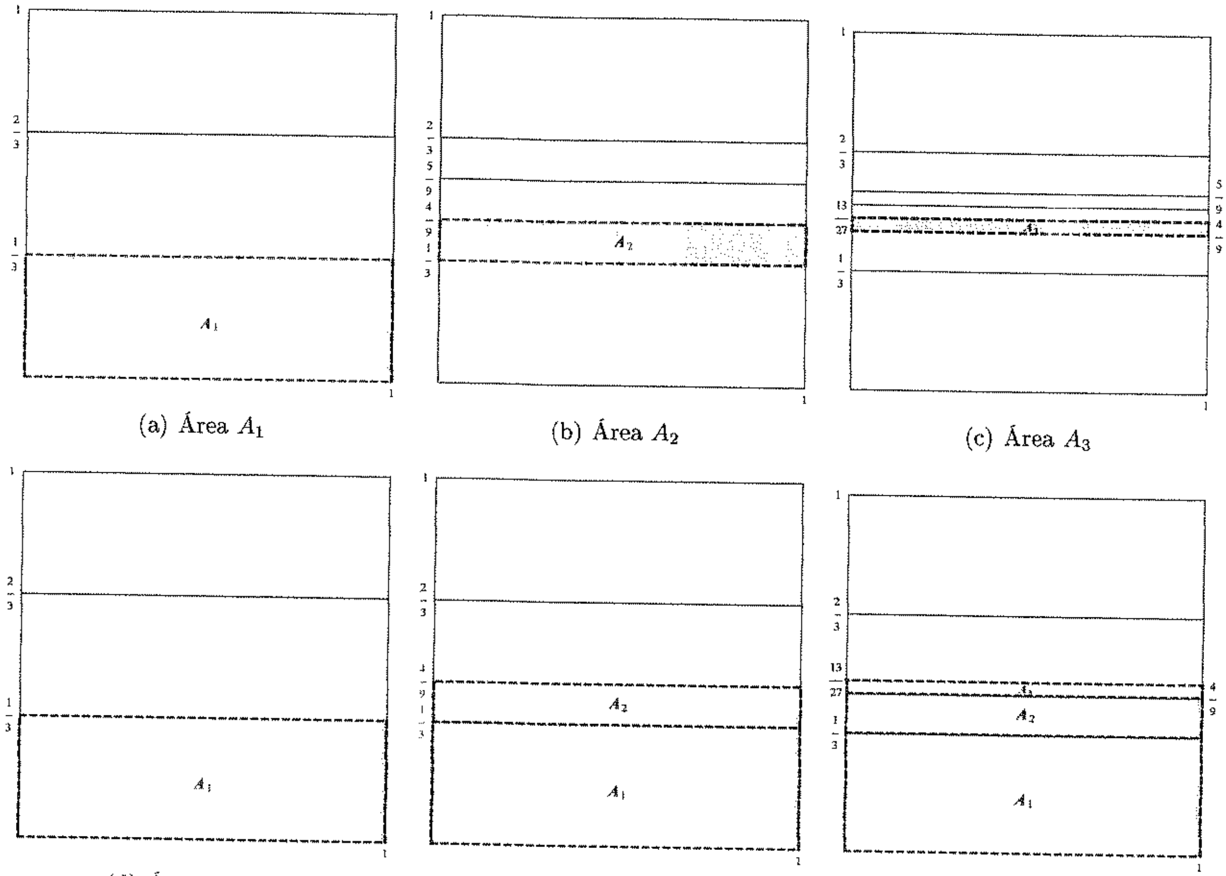
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p27

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(28) P28

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:**____________

Señale con una **X** los temas vistos | ~~Cálculo Integral~~ | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b) $A_i = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10}\left[f(1/10)+f(2/10)+f(3/10)+f(4/10)+f(5/10)+f(6/10)+f(7/10)+f(8/10)+f(9/10)+f(1)\right]$

$= \frac{1}{10}\left[\frac{100}{101}+\frac{25}{26}+\frac{100}{109}+\frac{25}{29}+\frac{4}{5}+\frac{25}{34}+\frac{100}{149}+\frac{25}{41}+\frac{100}{181}+\frac{1}{2}\right]$

$= 0.759981$

c) f es integrable en [0,1], ya que en [0,1] la función es continua

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1}x\Big|_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Verdadero. Si f es diferenciable en el intervalo (a,b), entonces es continua en (a,b), por tanto $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, y esto implica que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable

b) falso
Eso solo ocurre si $x \leq b$, $x > a$

c) falso, ya que $\int_a^b f(x)dx$ no puede ser menor que cero, ya que estamos calculando área bajo la curva y esto no puede ser negativa.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p28

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

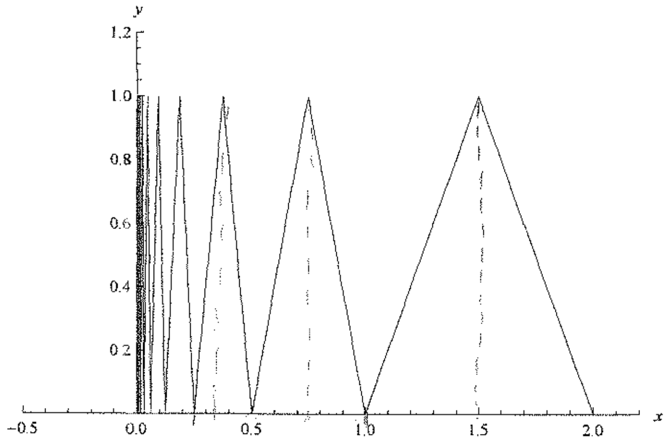


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $2 \to 0$
$3/2 \to 1$
$1 \to 0$
$3/4 \to 1$
$1/2 \to 0$
$\to 1$

$f(x) = \begin{cases} \text{para } x = \\ 0 \text{ para } x = \frac{2}{2^n(2^n-1)} \\ 1 \text{ para } x = \frac{2}{2^{n+1}(2^n-1)} \end{cases}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^x} dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^t \frac{1}{2^x} dx = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{\ln|a|} \Big]_0^t$

$\to \lim_{t\to\infty} \frac{a^t}{\ln|a|} - \lim_{t\to\infty} \frac{a^0}{\ln 1} =$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p28

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2^x} dy = \frac{(1/2)^x}{\ln|1/2|}\Big]_0^1$

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

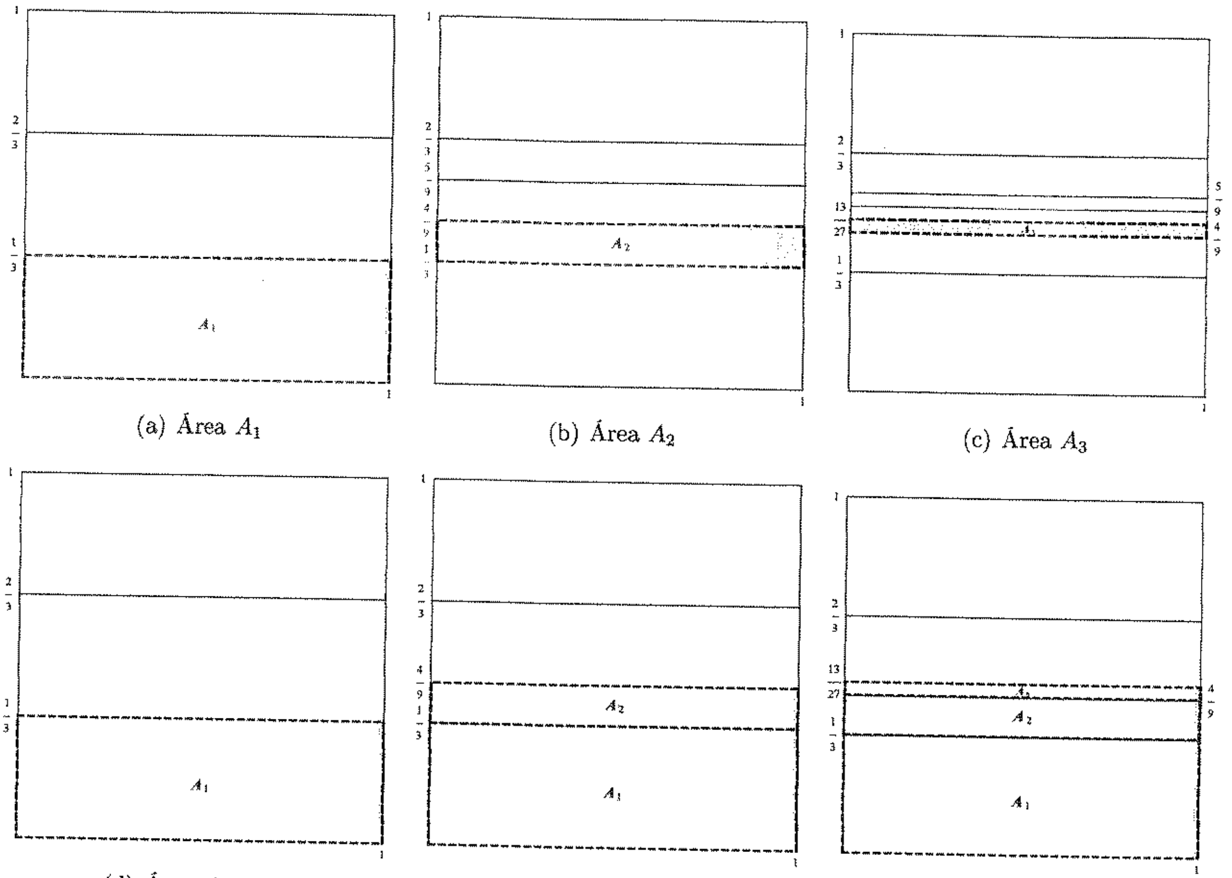
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

p28

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(29) P29

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: JUAN CARLOS AYA **Curso:** SUCESIONES Y SERIES

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a) $[[0, 0.5) \cup (0.5, 0.7) \cup (0.7, 1)]$

b) $\Delta x = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+(i/n)^2}\right)\frac{1}{n} \Rightarrow n=10 \quad \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{1+(i/10)^2}\right)\frac{1}{10} \approx 0{,}7599814972$

c) f es integrable, porque el denominador siempre es positivo y el numerador tiende a 0 pero no es cero.

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x\Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) = 0{,}7853981634$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) como f es continua por el concepto diferenciable, entonces esa función es integrable en el intervalo (a, b)

b) No siempre, porque puede existir un $c \in [a, x]$ tal que c_i es una discontinuidad finita de $f(x)$ en el $[a, x]$

c) Si, porque si $f(x) \leq 0$ y es integrable y x_i es una discontinuidad finita de $f(x)$ en el $[a, b]$ entonces la integral $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ es el área bajo la curva con signo negativo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

p29

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

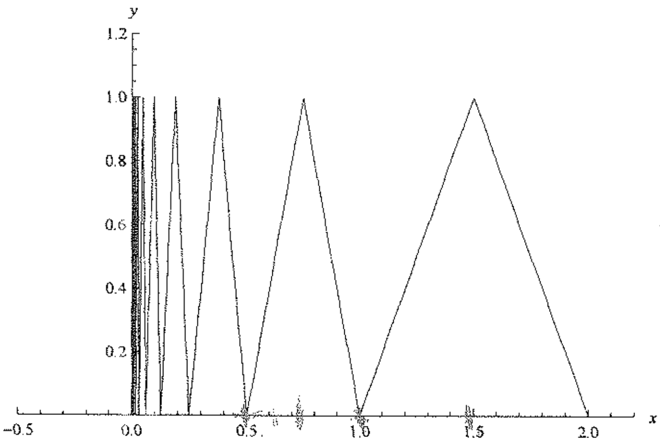


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $-\left|\frac{x}{2^n}\right| + 1$ $\quad n \in \mathbb{N}$.

b) como $-\left|\frac{x}{2^n}\right| \leq 0$ pero al tener $-\left|\frac{x}{2^n}\right| + 1 \geq 0$ entonces está definida en $\mathbb{R}^+$ en el $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$

c) (1) para $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ y $x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ y $x \in \mathbb{N}$.
(2) para $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ y $x \in [\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}]$ y $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} -\left|\frac{x}{2^n}\right| + 1 \, dx \quad y \quad \int_{\frac{1}{k^n}}^{\frac{1}{k}} -\left|\frac{x}{2^n}\right| + 1 \, dx \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x=1}^{n} \int_0^x f(t)dt$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

p29

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

como $\frac{1}{2^n} = z$ $z \in \mathbb{R}$ luego la integral en un $[a,b]$ de un punto. z es igual a cero.

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

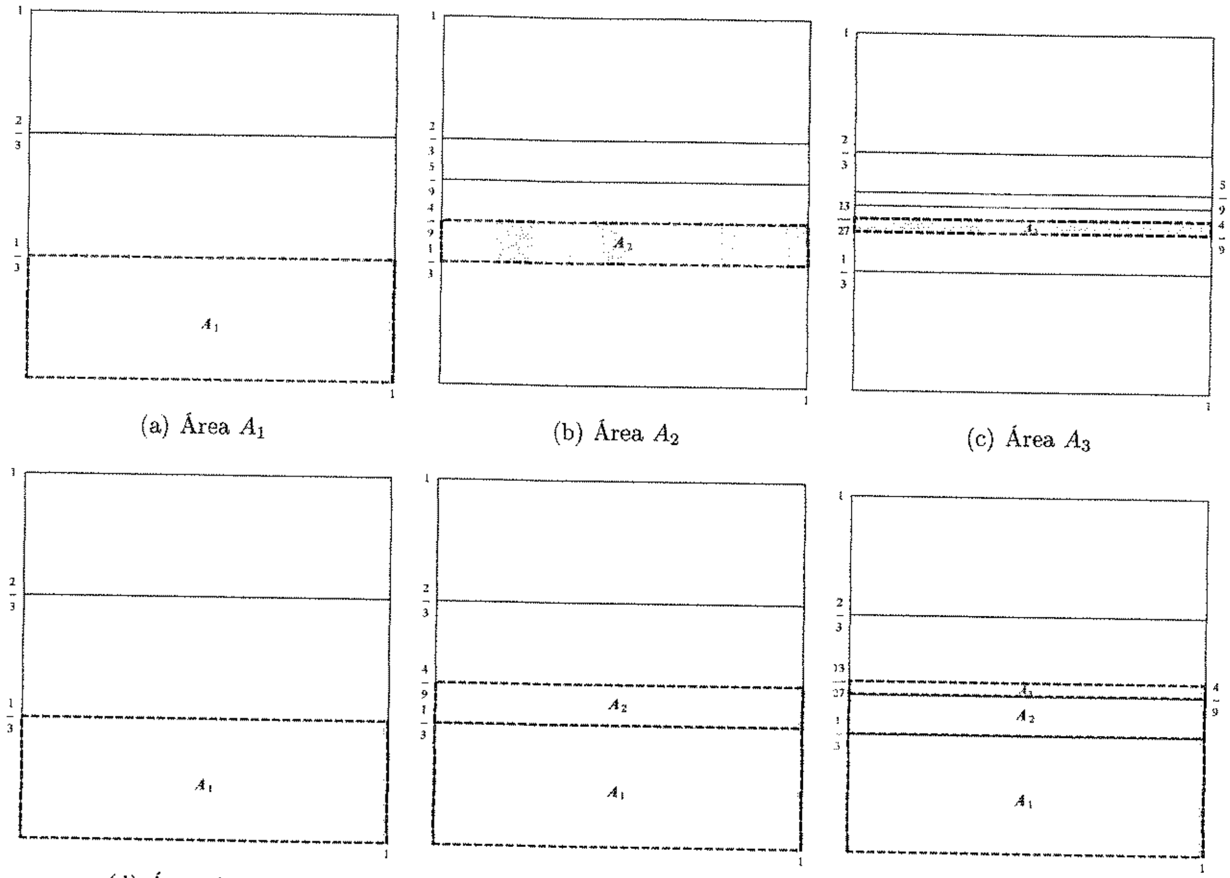
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

p29

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(30) P30

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Juan Pablo Jiménez P. **Curso:** Sucesiones y series.

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a) $[0,0.1]\cup[0.1,0.2]\cup[0.2,0.3]\cup[0.3,0.4]\cup[0.4,0.5]\cup[0.5,0.6]\cup[0.6,0.7]\cup[0.7,0.8]\cup[0.8,0.9]\cup[0.9,1]$

b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(i/n)^2}\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{10}\frac{1}{1+(i/10)^2}\frac{1}{10} = 0,7599814972$

c) f es integrable, porque para todo valor en el dominio de f(x) $1+x^2$ siempre es mayor que cero es decir que en particular para $[0,1]$, F(x) es integrable.

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(x)\Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) = 0,7853981.$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | X | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

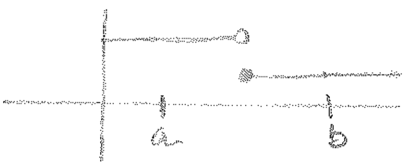
   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]\bigcap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Como f(x) es diferenciable sobre (a,b) y $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ entonces f(x) es continua en (a,b), luego f es integrable en (a,b)

b) No necesariamente si f(x) sea integrable, F(x) es continua en $[a,b]$ puesto que:



f(x) es integrable y F(x) no es continua.

c) Si, puesto que f(x) está bajo el eje x entonces el area bajo la curva, sera negativo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | X | 5 |

P30

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

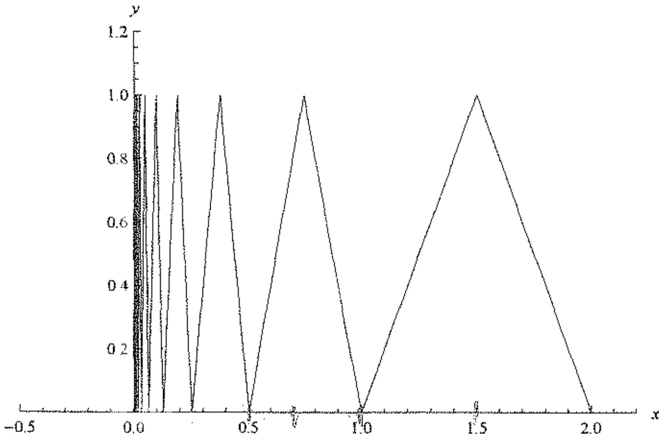


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $-\left|\frac{x}{2^n}\right|+1$ $\quad n \in \mathbb{N}$

b) Si es integrable porque para cada $f:[a,b] \to \mathbb{R}^+$ la función es continua, siendo esta una razón necesaria para poder integrar una función.

c) Primero para $I=[a,b]$. a,b que sean de la forma $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}$

segundo para $I=[a,b]$ a,b que no sean de la forma $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}$

$1 = \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} -\left|\frac{x}{2^n}\right|+1\,dx \qquad 2 = \int_{\frac{1}{k^n}}^{\frac{1}{k^{n-1}}} -\left|\frac{x}{2^n}\right|+1\,dx$ con $k \notin \mathbb{N}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^x F(t)\,dt$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

p30

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Para $0 < x < 1$ la función está definida en un número $\frac{1}{2^n}$ donde $n \in \mathbb{N}$ Fijo, entonces $\int_0^1 \frac{1}{2^n} dx$ es decir, la integral de un Punto, Por tanto la integral es cero.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

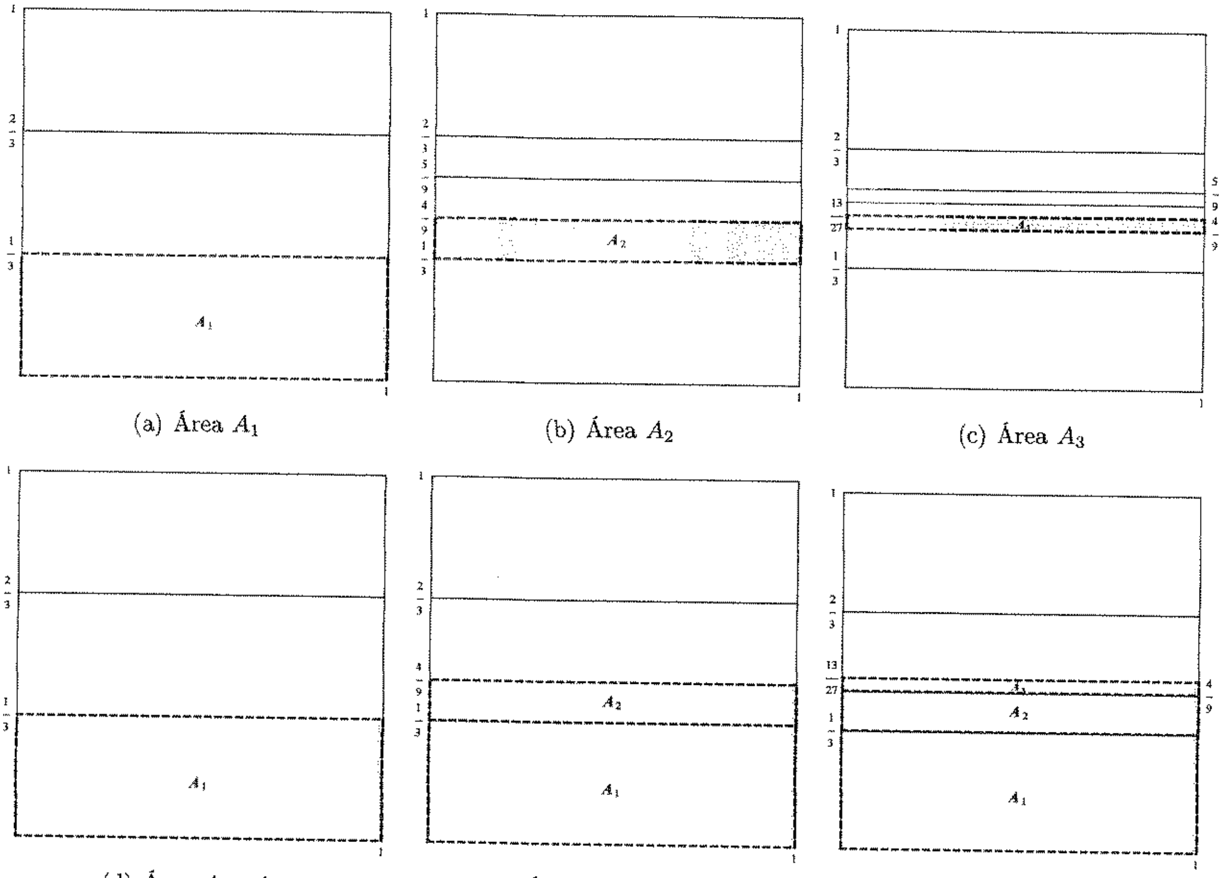
SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.
   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P30

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(31) P31

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Olga [illegible] **Curso:** ______

Señale con una **X** los temas vistos [Cálculo Integral] [Sucesiones y Series] [Cálculo multivariado]

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b) $\sum_{n=0}^{1} f(x_k)\Delta x =$

$\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{1+k^2}\Delta x =$

Si es integrable en $[0,1]$ porque es continua en el intervalo

d) $\int_1^0 \frac{1}{1+x^2}dx$ arctan(x) $[\text{arctan } 1 - \text{arctan } 0] = (45-0) = 45$

Calificación de la dificultad [1] [~~2~~] [3] [4] [5]

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b). V

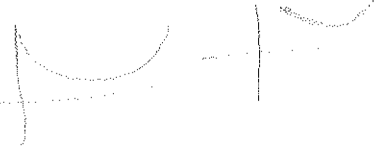
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$. V

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. F

a) Si es derivable, entonces es integrable = V

b) Si es integrable, entonces continua

c) la integral siempre va a ser un valor positivo, porque es un área



Calificación de la dificultad [1] [2] [3] [4] [5]

P37

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

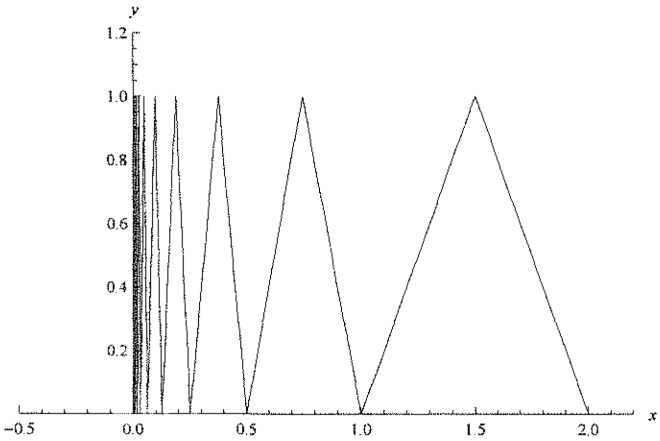


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty f(x)dx =$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^n}dx \quad \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n}dx =$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P31

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Borrador:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

$a_{n+1} \leq a_n$

$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13\}$

para el primer termino

para $n=1$

$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad 2 \leq 3$

ahora se supone para $a_n \leq a_{n+1}$

$a_{n+1} \geq a_n$

$a_{n+1} \geq a_{n-1}$

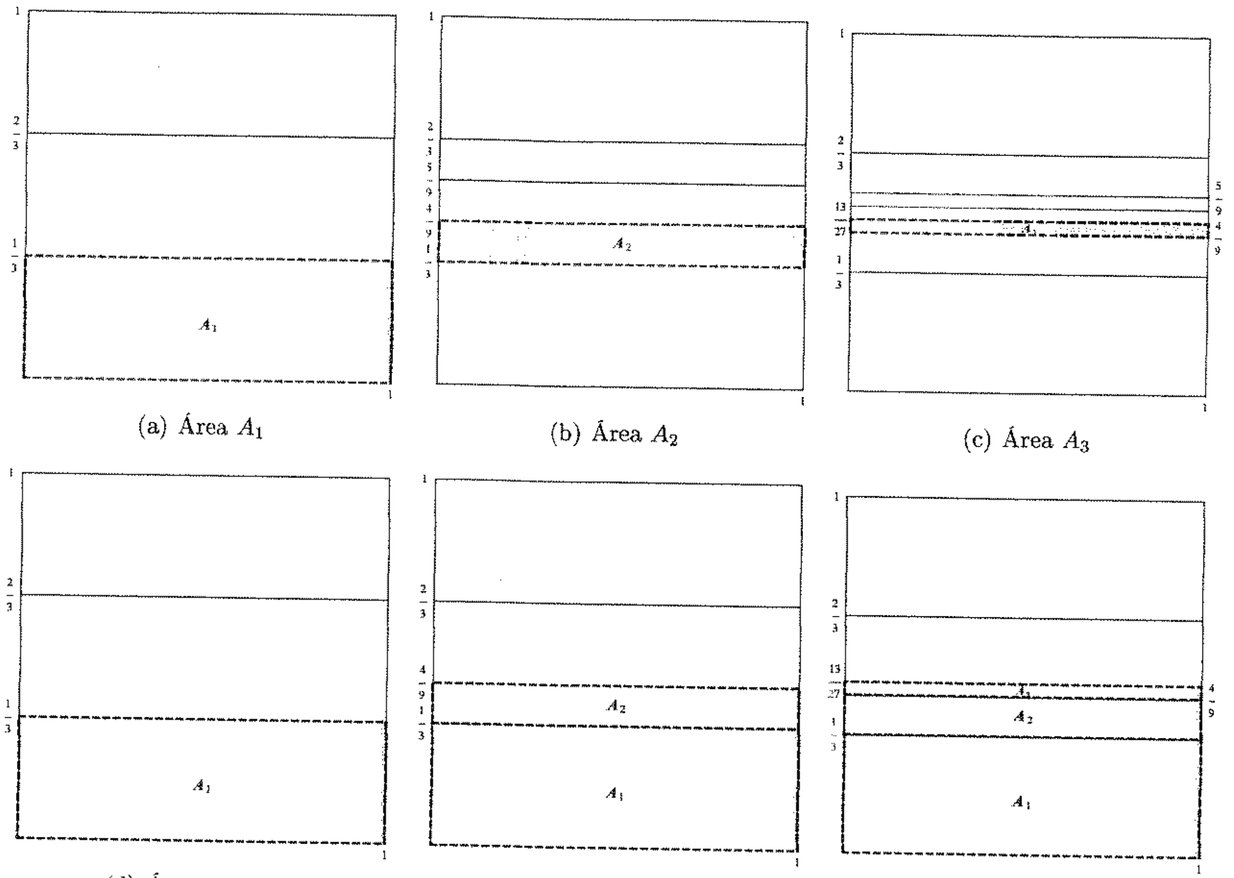
$a_{n+1} + a_n \geq a_n + a_{n-1}$

$a_{n+1} \geq a_n$ por lo tanto es creciente

Calificación de la dificultad 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5

P31

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A: \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \quad A = \frac{13}{27}$

Calificación de la dificultad ~~1~~ | 2 | 3 | 4 | 5

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

algo que siempre crece o decrece sin terminar

(32) P32

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Marisol [illegible] **Curso:** Sucesiones y Series

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0,1]$. $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{2}$

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$. Sí porque f es con[illegible] en el intervalo

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

d) $\int_0^{10} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$ [illegible]

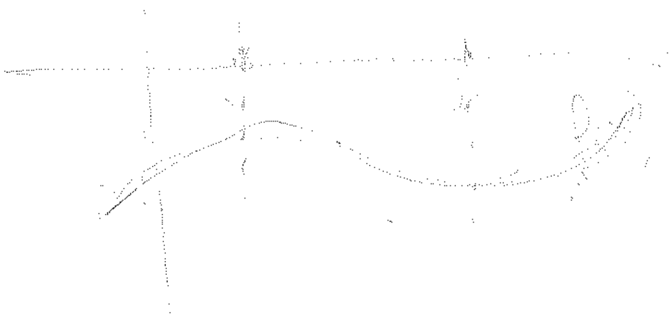
Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b). F

   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$. ✓

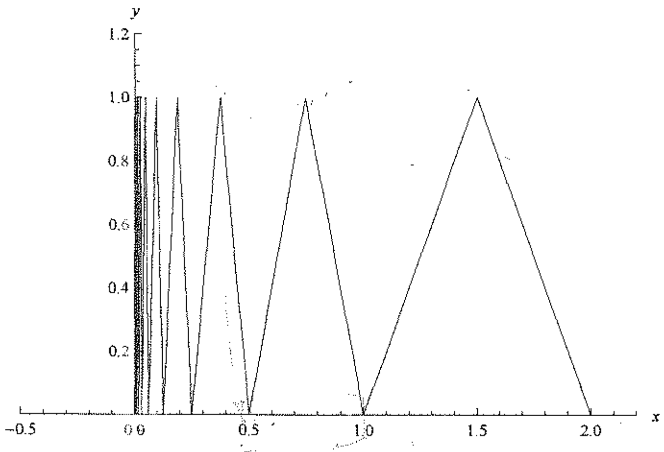
   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. F



Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p32

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).



$x = 0{,}5$
$y = 1$
$n_1 =$

Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

$f(x) = \begin{cases} [1/2, 1] \cdot 1 \\ [1, 2] = 1 \end{cases}$

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p32

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\frac{1}{2^n}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar}, 0 < k < 2^n; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

c) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 3$ demostrar que el $\lim_{n \to \infty}$ existe

pero no puedo llevar $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ a una función entonces

$1 = 2$

$2 = 3/2$

$3 = 3$

$\frac{a_{n+1}}{\ldots} < \frac{a_{n+2}}{a_n}$

Suponiendo que $a_n < a_{n+1}$

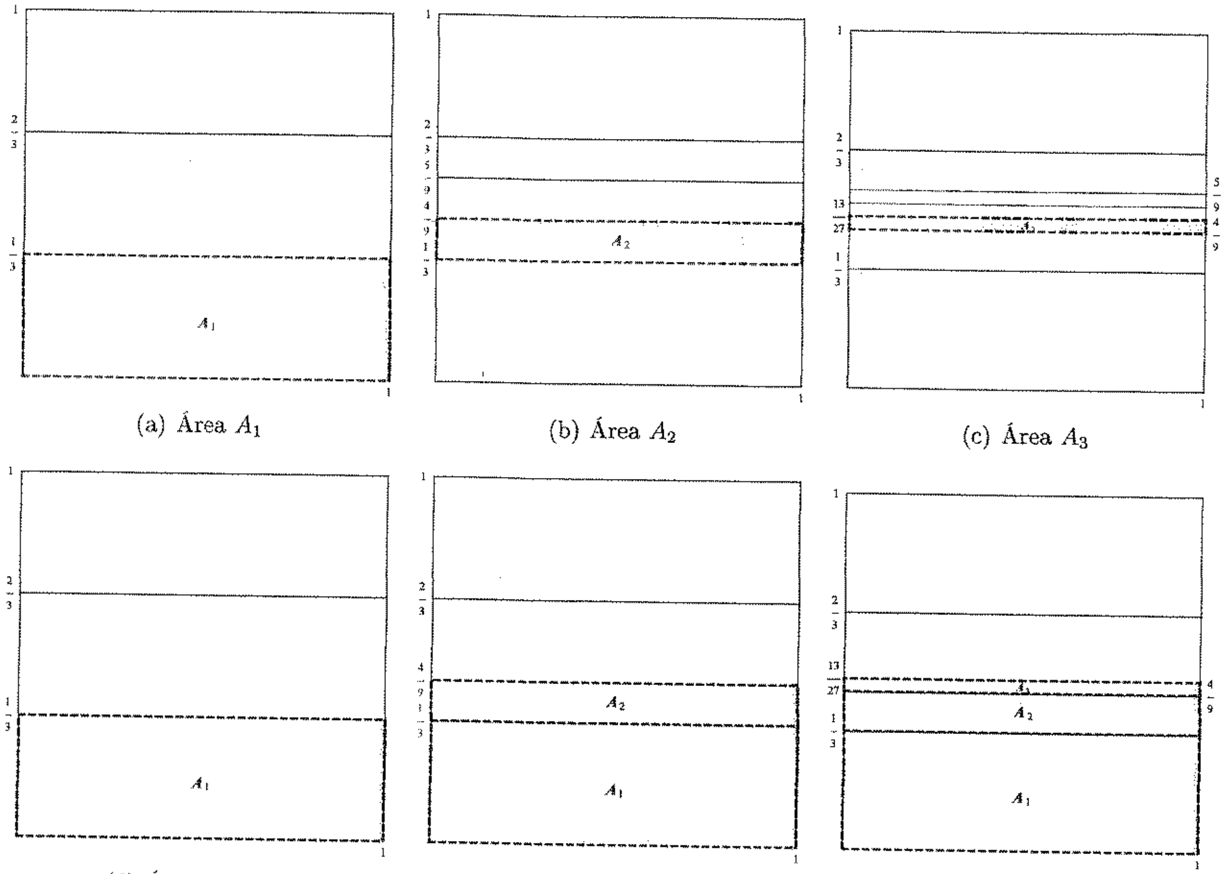
$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

$a_n + 1$

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

P32

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Área $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \ldots =$

Área $A = \frac{9+3+1}{27} \ldots = \frac{13}{27}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Algo que no termina, un proceso cíclico

(33) P33

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Angie Galindo **Curso:** Sucesiones y Series

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p33

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

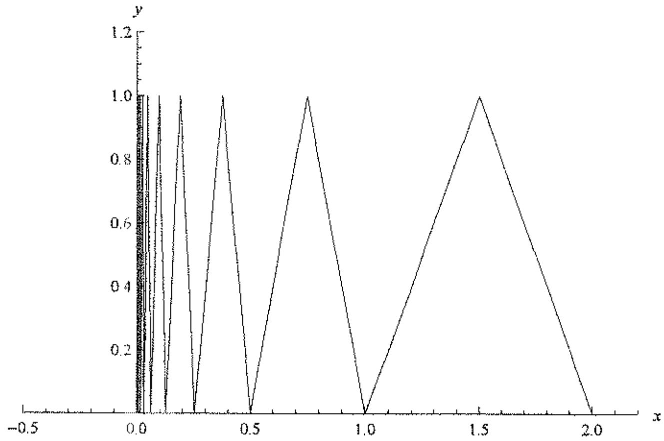


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p33

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$a_n = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$

Probamos para el primer termino

$a_2 = 1 + 1 = 2 \quad a_3 = 2 + 1 = 3 \quad 2 < 3$

Suponemos que se cumple para $a_n \leq a_{n+1}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P33

$a_{n+2} \geq a_n$

$a_{n+1} \geq a_{n-1}$

$a_{n+1} + a_n \geq a_n + a_{n-1}$

$\boxed{a_{n+1} \geq a_n}$

Por tanto la sucesion es creciente.

$a_{n+1} \geq 1$

$a_{n+1} + a_n \geq 1$

$a_n + a_{n-1} \geq$

$a_n \geq 0$

Borrador

La sucecíon esta acotada inferiormente por 0

Dem//

$a_n \geq 0$

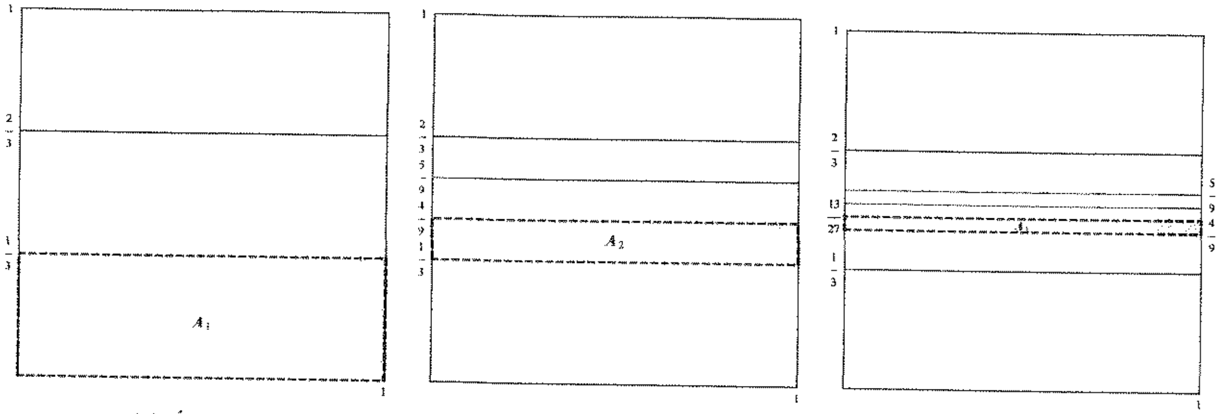
$a_n + a_{n-1} \geq 0$

$a_{n+1} + a_n \geq 1$

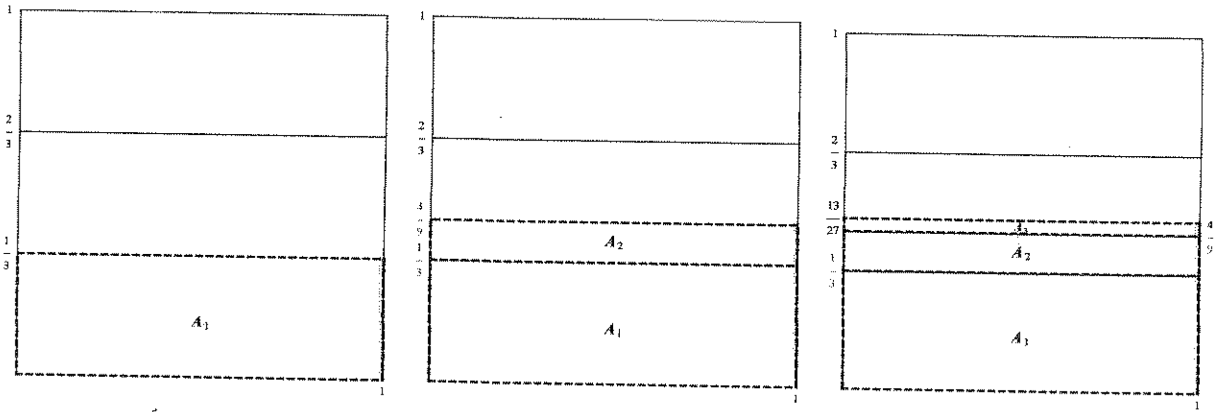
$\boxed{a_{n+1} > 1}$

P33

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3



(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(34)

P34

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Edwin S Castañeda **Curso:** ________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral X | Sucesiones y Series | Cálculo multivariado |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

ⓐ $\left[[0, 1/4] \cup [1/4, 1/2] \cup [1/2, 3/4] \cup [3/4, 1]\right]$

ⓑ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \sum_{i=1}^{10} f(x)\,\Delta x = \frac{1}{10}\left[f(1/10) + f(1/5) + f(3/10) + f(2/5) + f(1/2) + f(3/5) + f(7/10) + f(4/5) + f(9/10) + f(1)\right]$

$\Delta x = \frac{1}{10}$

$= \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1+(3/5)^2} + \frac{1}{1+(7/10)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{9}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+(1)^2}\right]$

$\sum_{i=1}^{10} f(x)\,\Delta x = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{100}} + \frac{1}{1+\frac{1}{25}} + \frac{1}{1+\frac{9}{100}} + \frac{1}{1+\frac{4}{25}} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{9}{25}} + \frac{1}{1+\frac{49}{100}} + \frac{1}{1+\frac{16}{25}} + \frac{1}{1+\frac{81}{100}} + \frac{1}{1+1}\right]$

por defin. de la hojo continua,

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 X | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a. Si por que si la funcion es diferenciable entonces es continua en $[a,b]$ luego f es integrable en $[a,b]$

b. Falso, por que f puede tener finitos puntos de discontinuidad y es integrable

c. Verdadero, por que f tiene finitos puntos de discontinuidad para todo $x \in [a,b] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ luego la integral existe y es el area negativa.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 X | 5 |

$$\sum_{i=1}^{10} f(x)\,\Delta x = \frac{1}{10}\left[\frac{100}{101}+\frac{100}{104}+\frac{100}{109}+\frac{100}{116}+\frac{100}{125}+\frac{100}{136}+\frac{100}{149}+\frac{100}{164}+\frac{100}{181}+1\right]$$

P3 4

$$= \frac{1}{10}\left[7.5998\right]$$

$$= 0{,}75998$$

ⓒ Es integrable porque $1+x^2>0 \quad \forall\, x \in [0,1]$ y es continua en el intervalo cerrado.

ⓓ $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = Tan^{-1}(x)\Big|_0^1$$

$$= Tan^{-1}(1) - Tan^{-1}(0)$$

$$= 0{,}785398163 - 0$$

$$= 0{,}785398163$$

P34

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

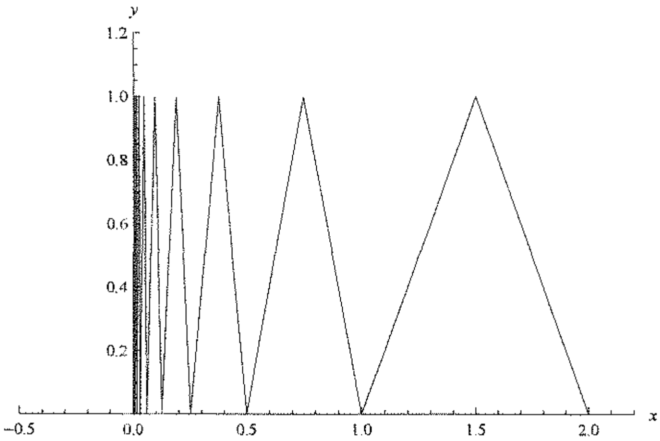


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P34

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

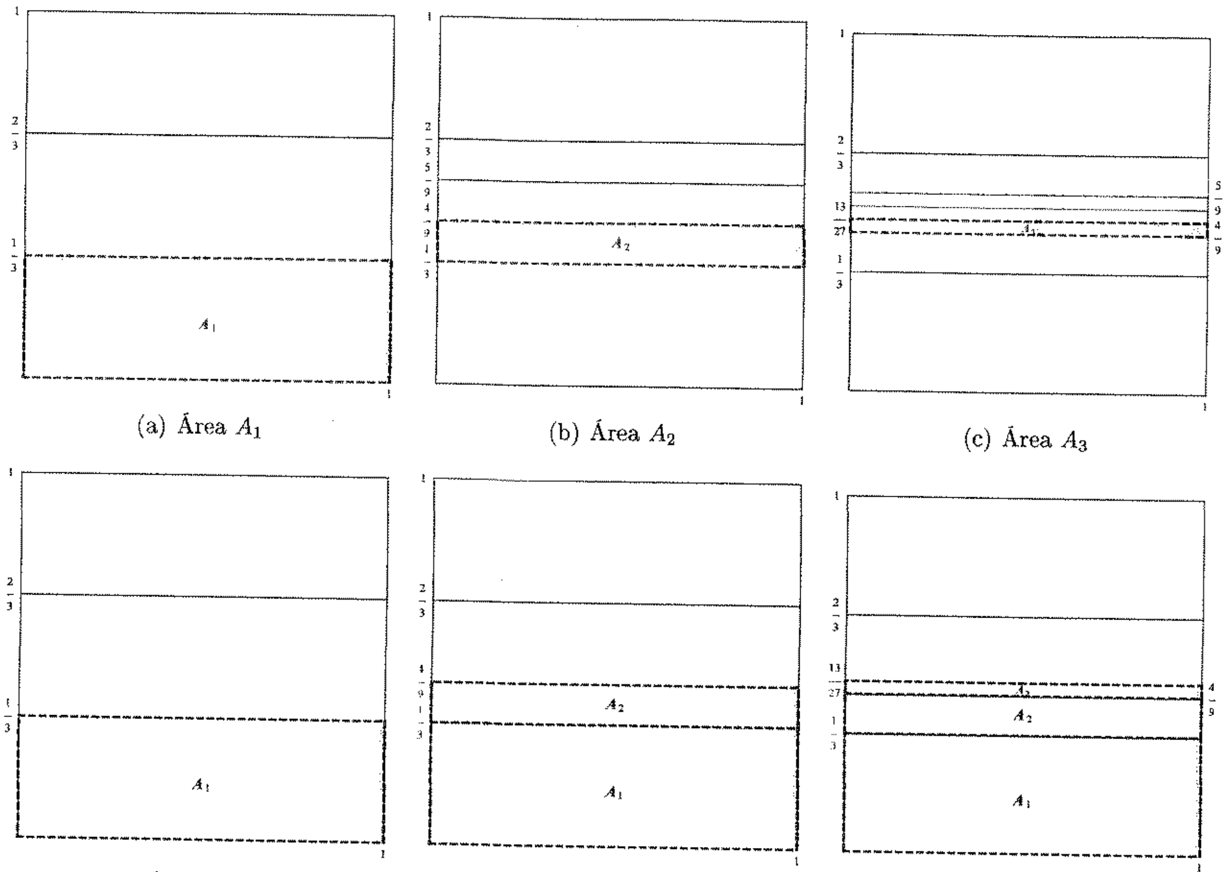
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P34

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(35) P35

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Oscar Alvarez **Curso:** Sucesiones y series

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral [ ] | Sucesiones y Series [ ] | Cálculo multivariado [ ] |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p35

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

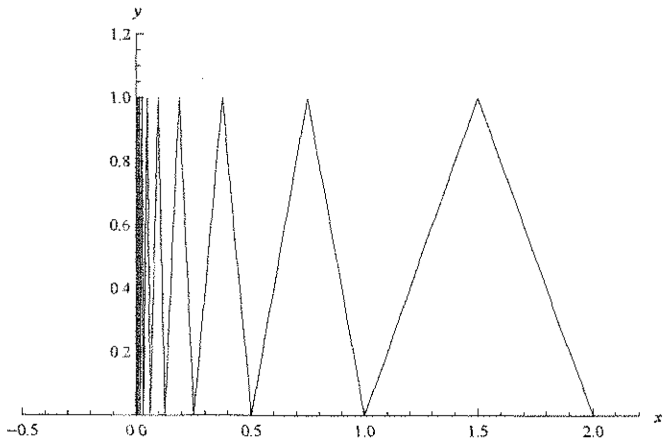


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p35

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

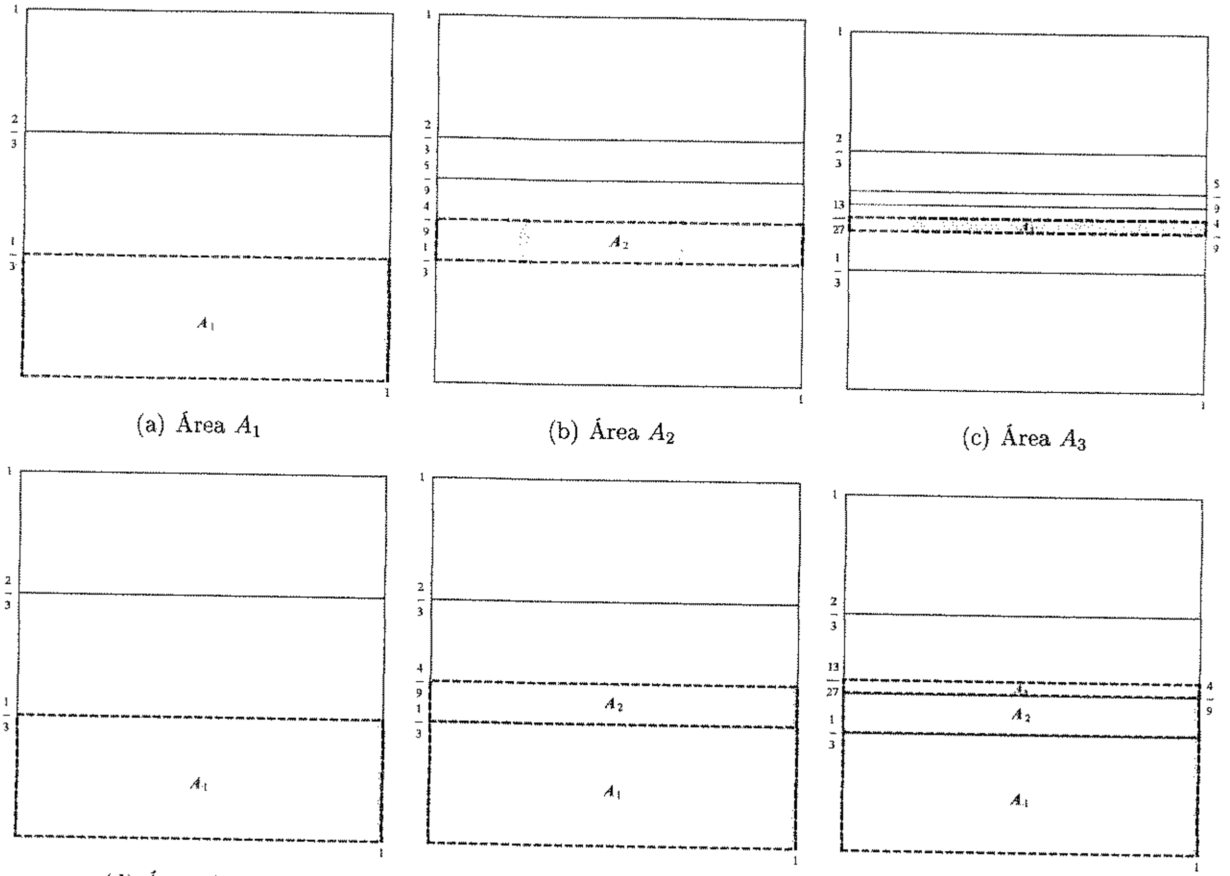
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p35

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(36) P36

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: César G. Rendón **Curso:** Sucesiones y series.

Señale con una **X** los temas vistos

Cálculo Integral	X	Sucesiones y Series		Cálculo multivariado	

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

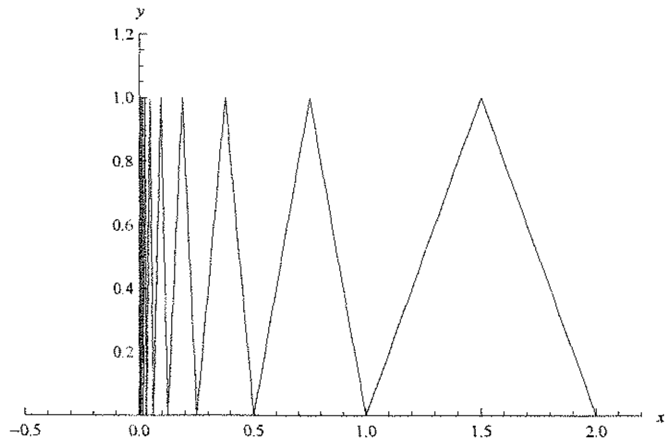


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P36

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

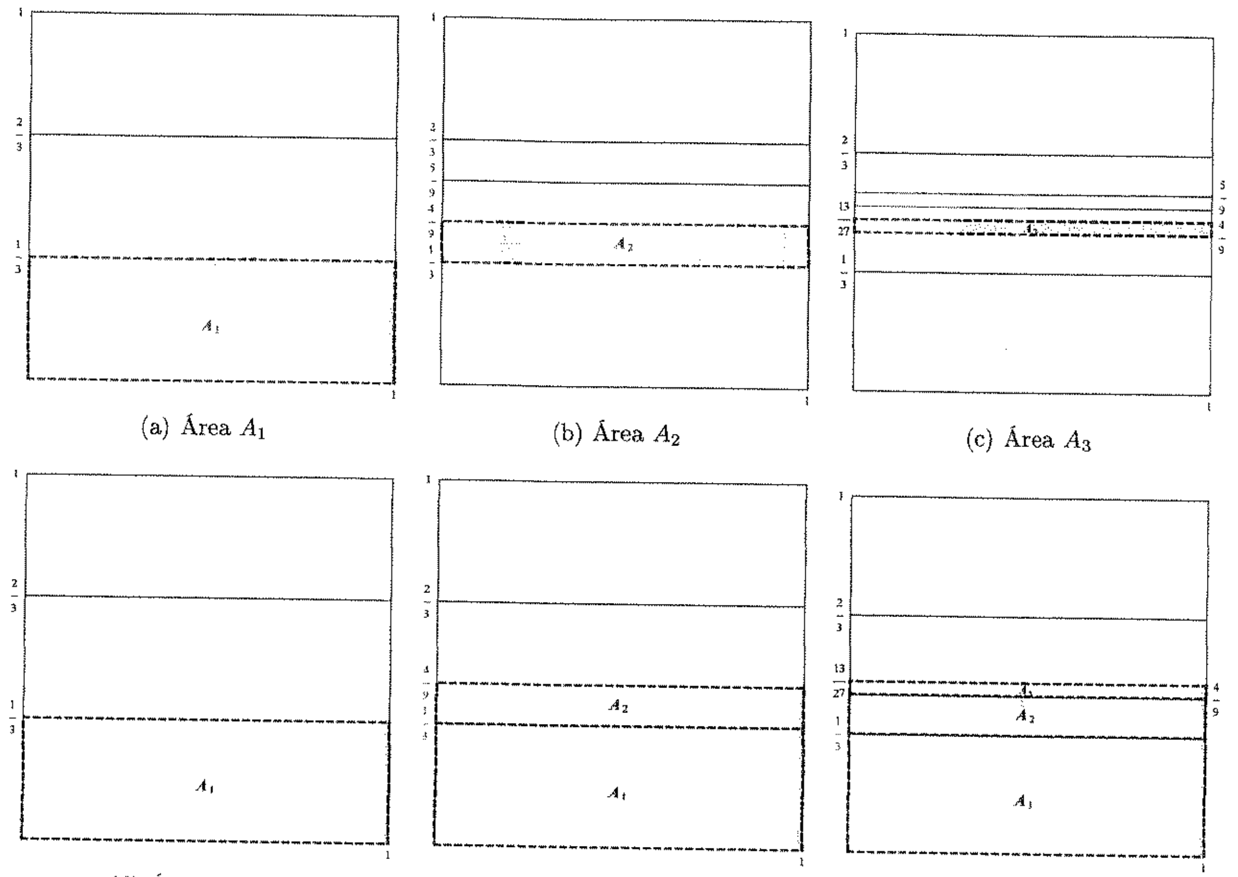
   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(37) P37

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: ANGIE LIZETH REINA ERAZO **Curso:** SUCESIONES Y SERIES

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral ☒ | Sucesiones y Series ☐ | Cálculo multivariado ☐ |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ [0,1].

a^2+u^2

$x = a\tan\theta$.

$x = \tan\theta$.

$dx = \sec^2\theta \, d\theta$.

P37

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+\tan^2\theta} \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{1+\tan^2\theta \, d\theta}$$

$$= \int \frac{\cancel{\sec^2\theta}\, d\theta}{\cancel{\sec^2\theta}}$$

$$= \int d\theta = \theta.$$

$\tan^2 + 1 = \sec^2\theta$.

$\frac{x}{a} = \tan\theta$.

$\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \theta$.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x)\Big|_0^1 = 45 - 0 = 45.$$

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

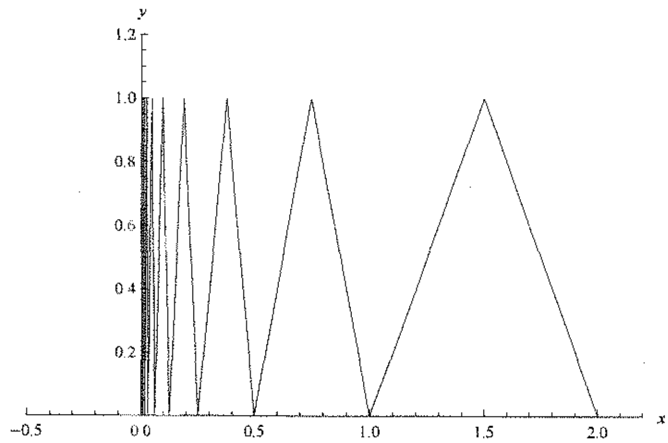


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

P37

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

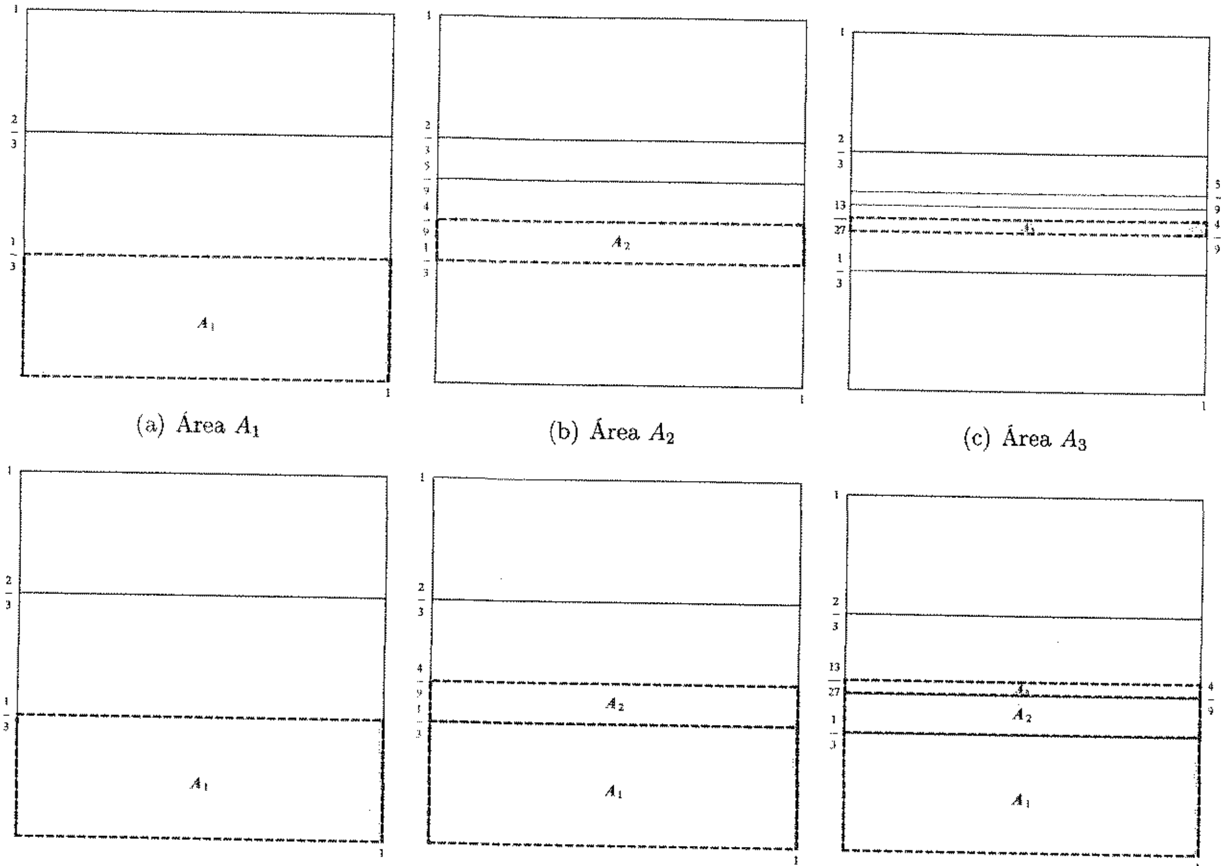
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

P37

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(38)

P38

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Cristian Sandoval **Curso:** 2008240066

Señale con una **X** los temas vistos | ~~Cálculo Integral~~ X | Sucesiones y Series X | Cálculo multivariado |

INTEGRACIÓN

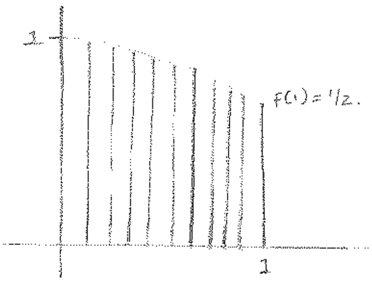
1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?



a) $[0, 1/10), [1/10, 1/5), [1/5, 3/10) [3/10, 2/5) [2/5, 1/2) [1/2, 6/10) [3/5, 7/10) [7/10, 4/5) [4/5, 9/10)$
$[9/10, 1)$

b) $\sum_{n=1}^{10} f(\frac{n}{10})\frac{1}{10} = 0{,}75998$

c) Como $f(x)$ es continua ⟹ es derivable ⟹ es integrable

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = 0{,}78539$

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ X | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) ✓ Si f es diferenciable entonces es continua luego f es integrable

b) ✓ Por TFC $F'(x) = f(x)$, o sea que $F(x)$ es diferenciable entonces $F(x)$ es continua

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ X | 4 | 5 |

p38

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

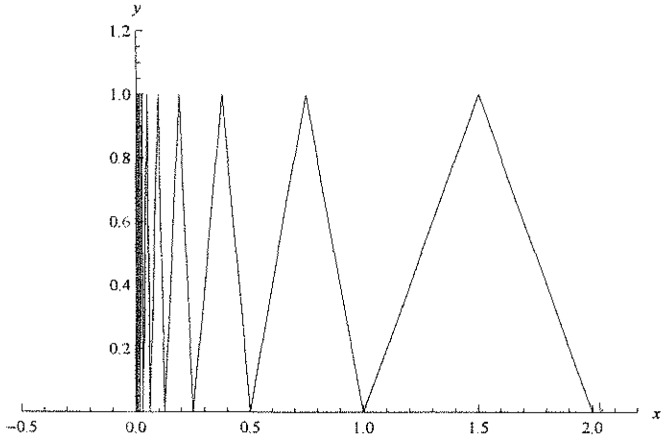


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

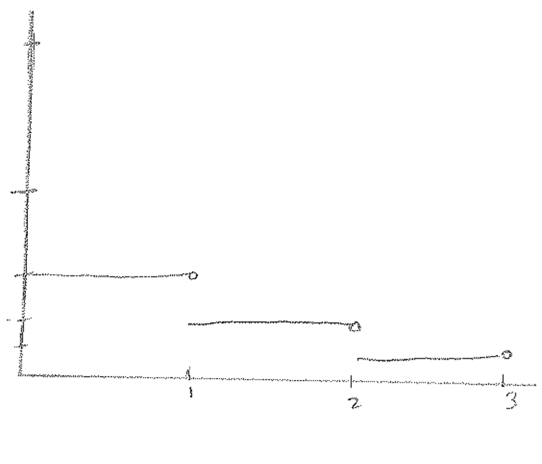
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty F(x)dx = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$



Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P38

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p38

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

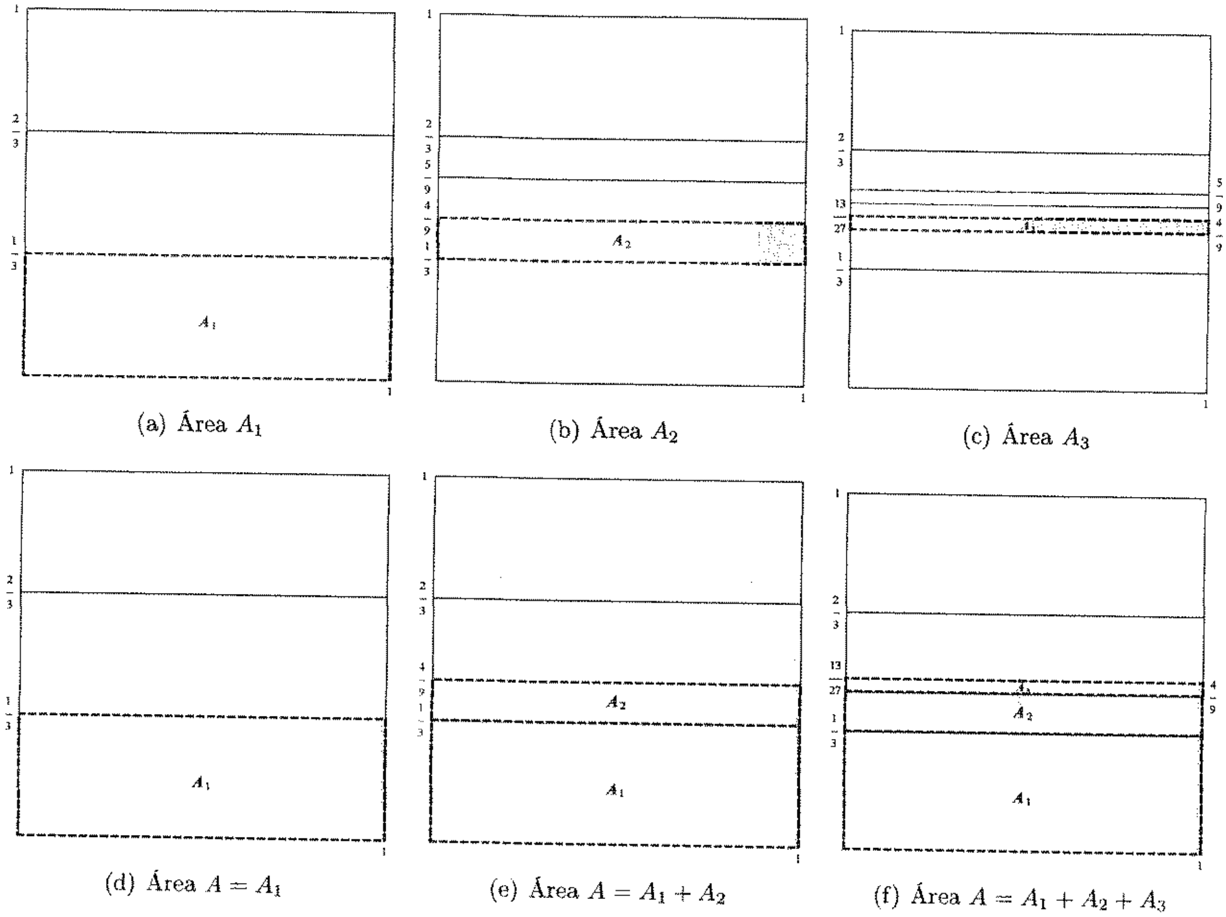


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

UN PROCESO INFINITO = ES LA REITERACION INDEFINIDA DE UNA ACCION MATEMATICA.

(39) P39

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

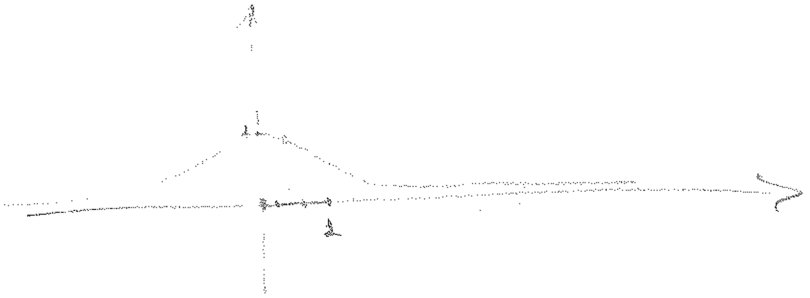
Nombre: Sergio Ricardo Perilla. **Curso:** Cálculo en Varias.

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral X | Sucesiones y Series X | Cálculo multivariado |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?



Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a). Toda función continua es integrable.
b). Si. No se por que.
c). en un intervalo [a, b] hay infinitas discontinuidades. por tanto la función no es integrable.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p39

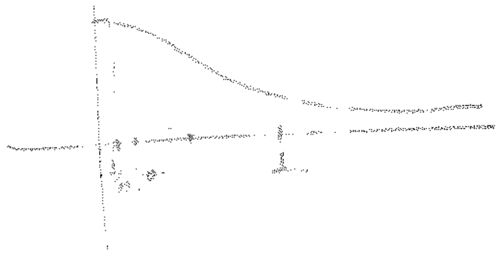
1. a). La partición del intervalo $[0,1]$.

$[0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

$\frac{1}{1+x^2}$

b). $\left(1 \cdot \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} \cdot f\left(\frac{2}{10}\right)\right) + \left(\frac{1}{10} \cdot f\left(\frac{3}{10}\right)\right) + \cdots$

$\sum_{n=0}^{9} \frac{1}{10} \cdot f\left(\frac{n}{10}\right) = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{9} \frac{1}{1+\left(\frac{n}{10}\right)^2} \approx 0,78.$



c). f es continua en todo el intervalo $[0,1]$ y por tanto es integrable en $[0,1]$.

d). Calculadora.

P39

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

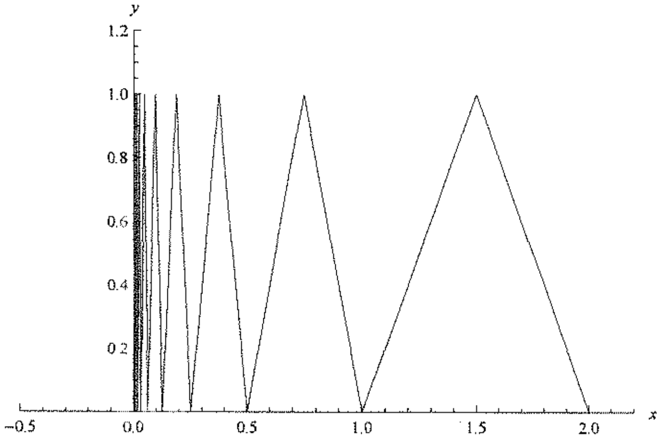


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P39

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

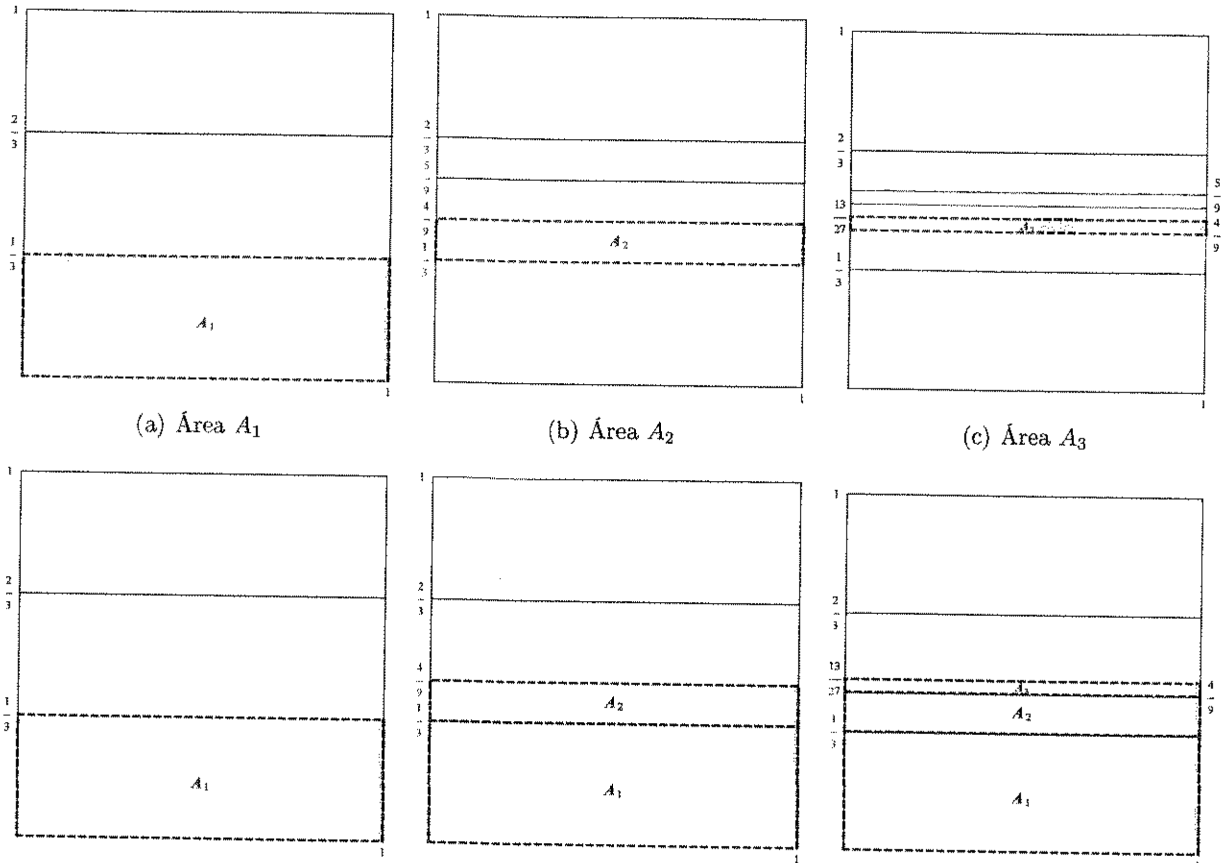
a.)

$$\frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P39

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \cdots \frac{1}{3^n} + \cdots = \sum_{n=1} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

Calificación de la dificultad 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Procesos mediante los cuales se muestran comportamiento de una función de forma indefinida o de una relación en los cuales tratamos de determinar su comportamiento.

(40) P40

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:______________________ **Curso:**______________________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0,1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

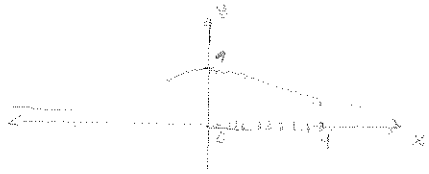
f si es integrable en $[0,1]$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x\Big|_0^1$

$\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$

a)



b) $A = \sum_{i=1}^{10} f(x_i)\,\Delta x$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b).

   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.

   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

V:

F:

V:

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p40

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

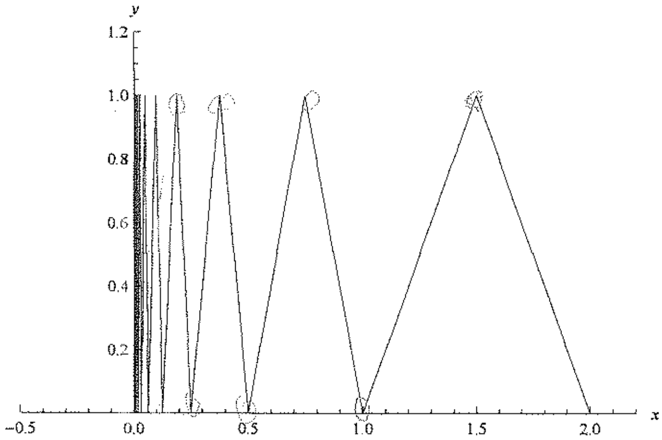


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^x} dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^t} dt =$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P40

$\frac{1}{2^0}, \frac{2}{2^1}, \frac{3}{2^2}, \frac{}{2^3}$

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$x = \frac{k}{2^n}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

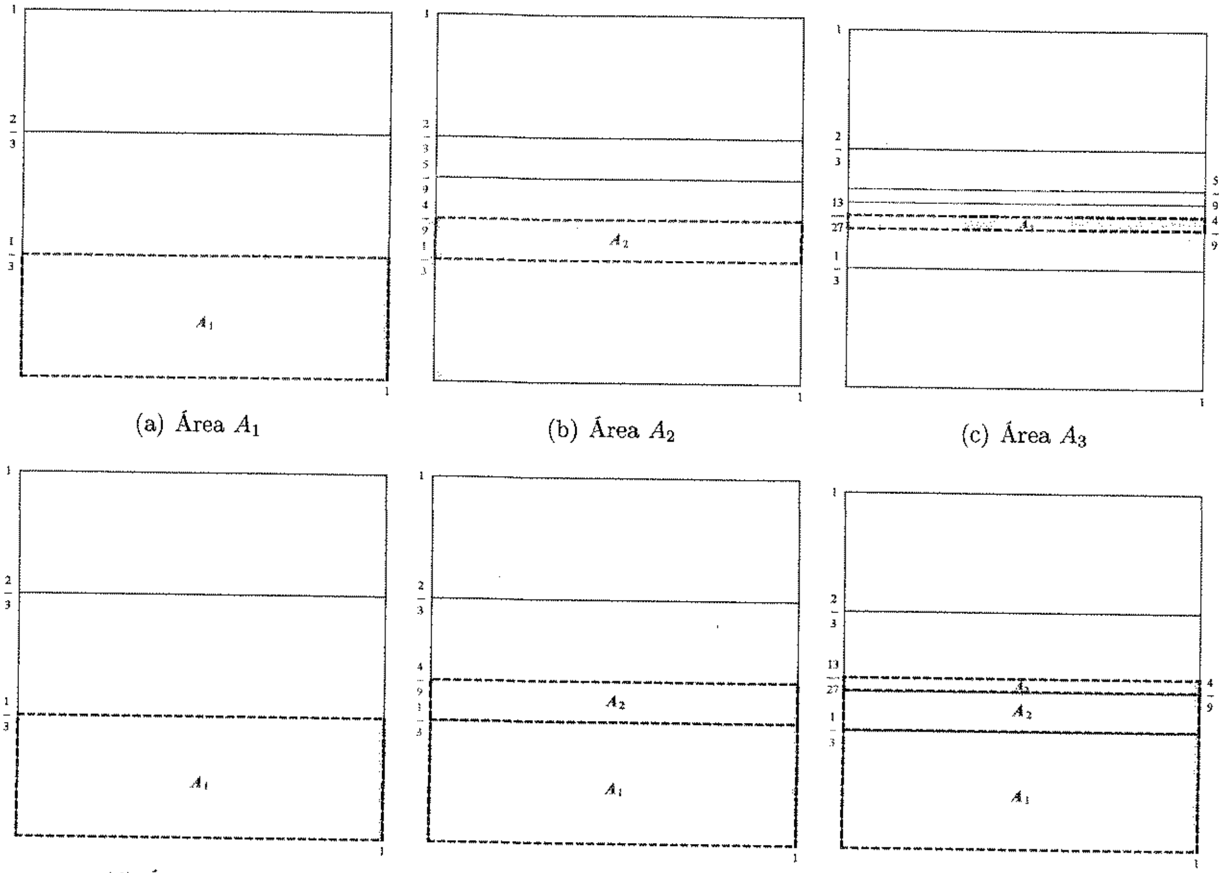
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p40

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

- El Límite del Área tiende a 0

$\lim_{n \to \infty} \ldots = \lim \ldots = 0$

$\frac{1}{27}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

- Cuando un número está tiende a infinito, también hay números mayores y menores
- Alep subcero

(41)

Pu1

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Wilmar Bedoya González. **Curso:** Cálculo multivariado.

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

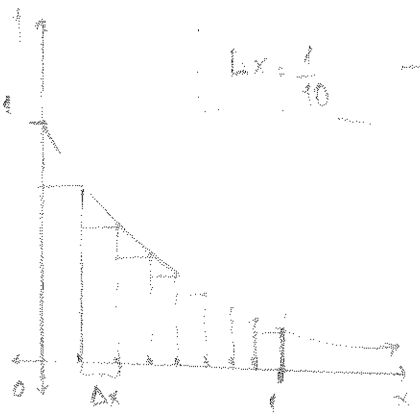
   a) Haga una partición de $[0,1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$\Delta x = \frac{1}{10} \rightarrow A: \sum_{i=0}^{10} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{1+x_i^2}\frac{1}{10} = \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}\right)\frac{1}{10} \approx 0,785$



→

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b).

   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.

   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]\bigcap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Verdadera, si una función es diferenciable entonces es integrable.

b) Falso, f es integrable luego es continua en el intervalo dado pero F no necesariamente va a ser continua en el intervalo.

c) Falso, la idea general de una integral es la búsqueda de un área bajo una curva en un intervalo específico, por tal razón el área no puede ser una cantidad negativa.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

) d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x)\Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$ P41

P4

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

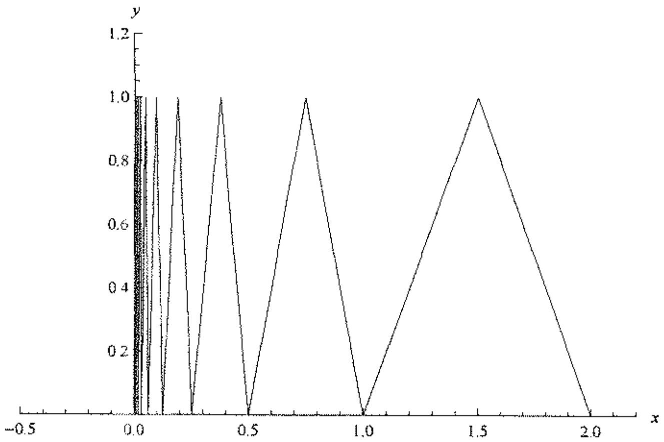


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p4

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

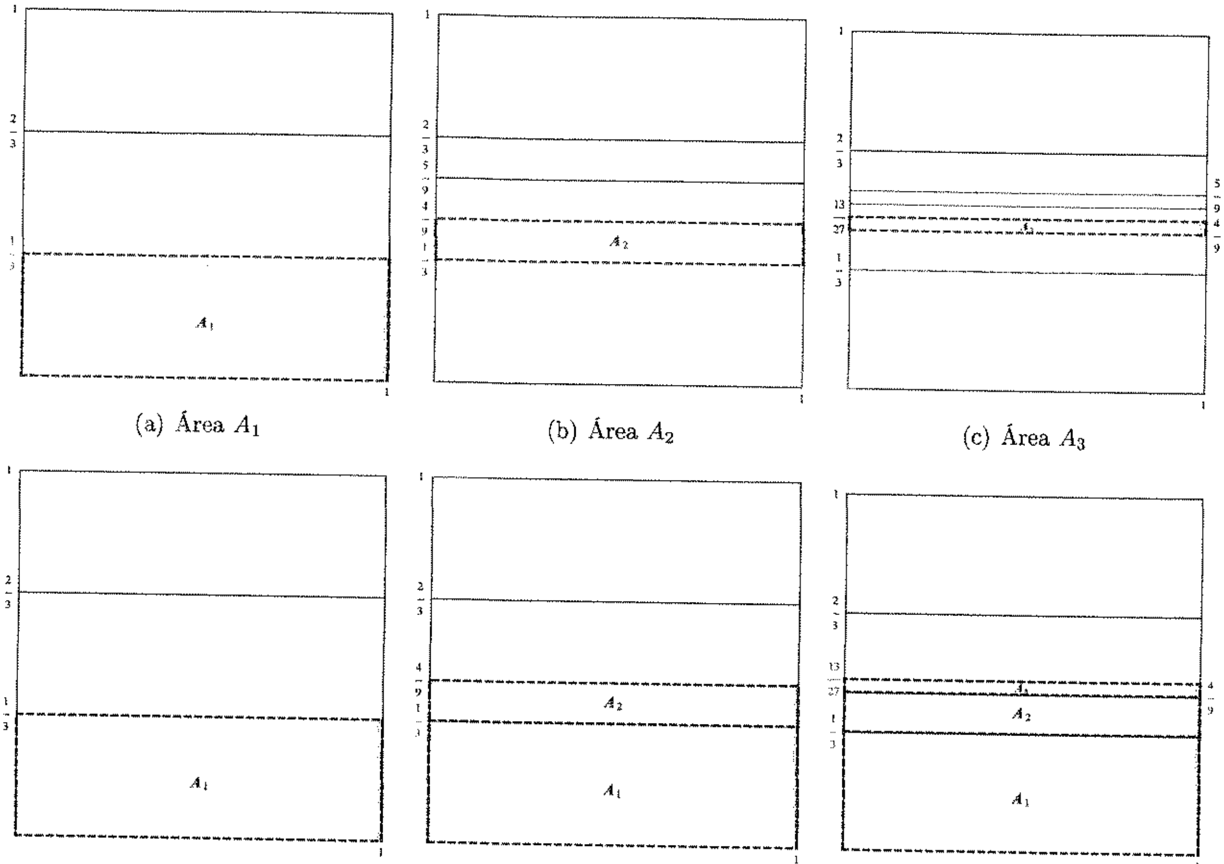
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p41

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = 1/3$ d) $A = 1/3$

$A_2 = 1/9$ e) $A = 4/9$

$A_3 = 1/27$ f) $A = 13/27$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Proceso mediante el cual se estudian las características de las cantidades inmensamente grandes o supremamente pequeñas.

(42) P42

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: KAREN CASTROBLANCO **Curso:** CALCULO EN VARIAS

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | / | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

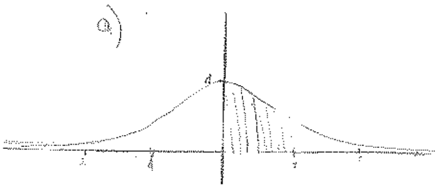
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a)



d) $\int_0^1$ $\tan^{-1} x + c$

$\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) VERDADERA: PORQUE SI LA FUNCION ES DIFERENCIABLE, SU INTEGRAL TAMBIEN ES CONTINUA Y POR LO TANTO ES INTEGRABLE

b) FALSO: PORQUE PUEDEN EXISTIR INTERVALOS DONDE F NO SEA CONTINUA

c) VERDADERA:

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P42

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

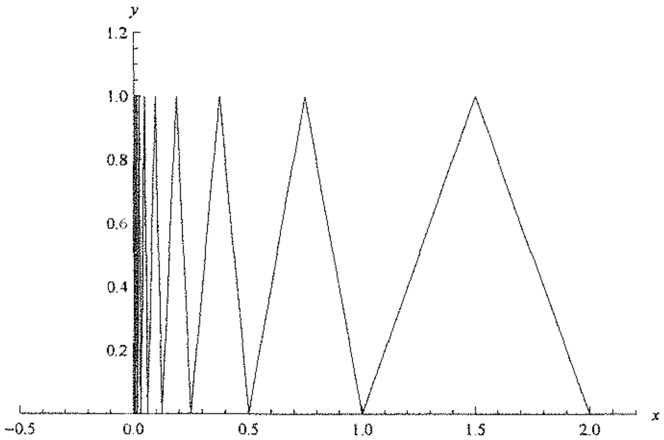


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

p42

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

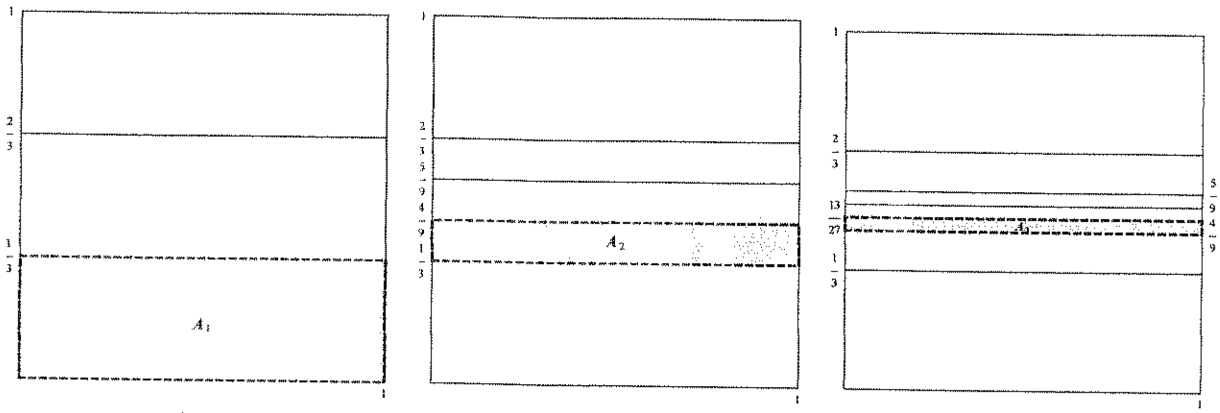
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$$\frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} =$$

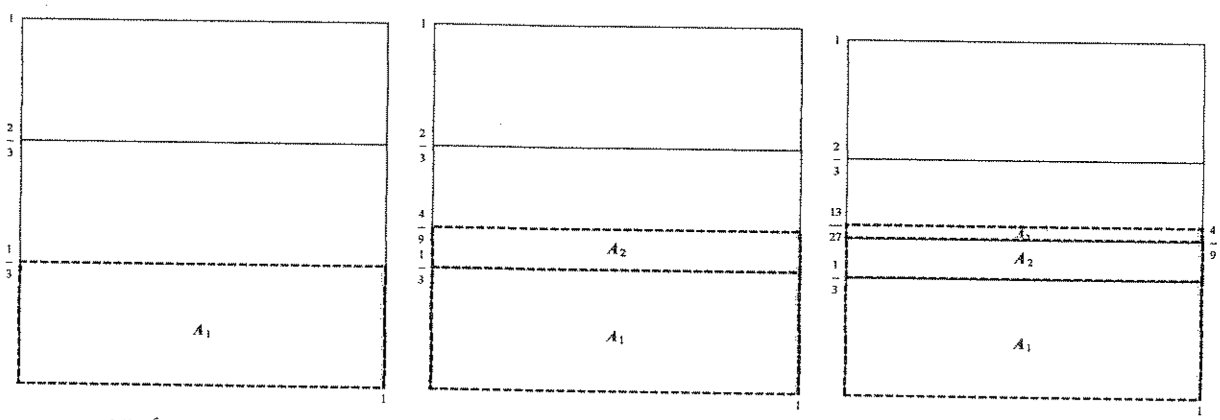
Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p4/2

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3



(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = 1/3$

$A_2 = \frac{1}{9}$

$A_3 = \frac{1}{27}$

$A_n = \frac{1}{3^n}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} \quad \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}} = \frac{\frac{1}{3^n}}{1} = \frac{1}{3^n} = \boxed{0}$

Calificación de la dificultad | ~~1~~ | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

CUANDO UN NUMERO ESTA ELEVADO AL INFINITO Y SUS OPERACIONES ENTRE NUMEROS INFINITOS TANTO POSITIVOS COMO NEGATIVOS.
Y SE TRABAJA CON ALEF ^{0}

(43)

P43

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Camilo Andres Rodriguez **Curso:** Calculo multivariado

Señale con una **X** los temas vistos | ~~Cálculo Integral~~ | | ~~Sucesiones y Series~~ | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a) $= 1 \quad f(1) = 1/2 = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right)$

c) $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{10}\right)^2}\right) = \frac{1}{10} \sum \frac{10^2}{10^2+i^2} = \frac{1}{10}\left(\frac{100}{101} + \frac{100}{104} + \ldots + \frac{100}{100+25} \ldots\right)$

$= 0,7599814997$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = 0,78 - 0 = 0,78$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Si a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable entonces f es continua y para Todo Su dominio existe limite entonce f es Integrable.

b) f es Integrable entonces existe su Antiderivada continua

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P43

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

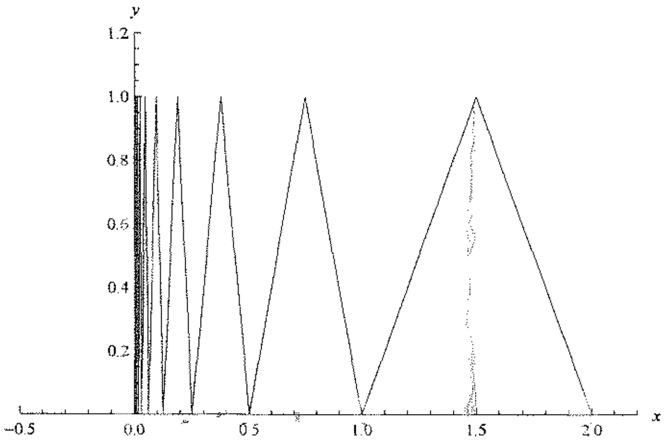


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

para $n \in \mathbb{N}$, $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$

$n=0 \to -|2x+1| + 3/2$

$n=1 \to -|4x+1| + 3/4$

$n=2 \to -|8x+1| + 3/8$

$-|2^{n+1}x+1| + 3/2^{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$ $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$

→ Si es Integrable por que es continua.

→ $\int -|2^{n+1}x+1| + \frac{3}{2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} |2^{n+1}x+1| + \frac{3}{2(n+1)} = -\frac{2^n x^2}{} + \frac{3x}{2^{n+1}}$ para $x > -1/2$

para $x < -$

$-2^n x^2 - x + \frac{3x}{2^n}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^x \left(\frac{1}{2^n}\right) dx$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p43

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Para punto q la Integral de punto, el [illegible] de un punto es 0

$\int_0^1 f(x)dx = 0$, es decir no es continua en ningun punto

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$a_n \leq a_{n+1}$

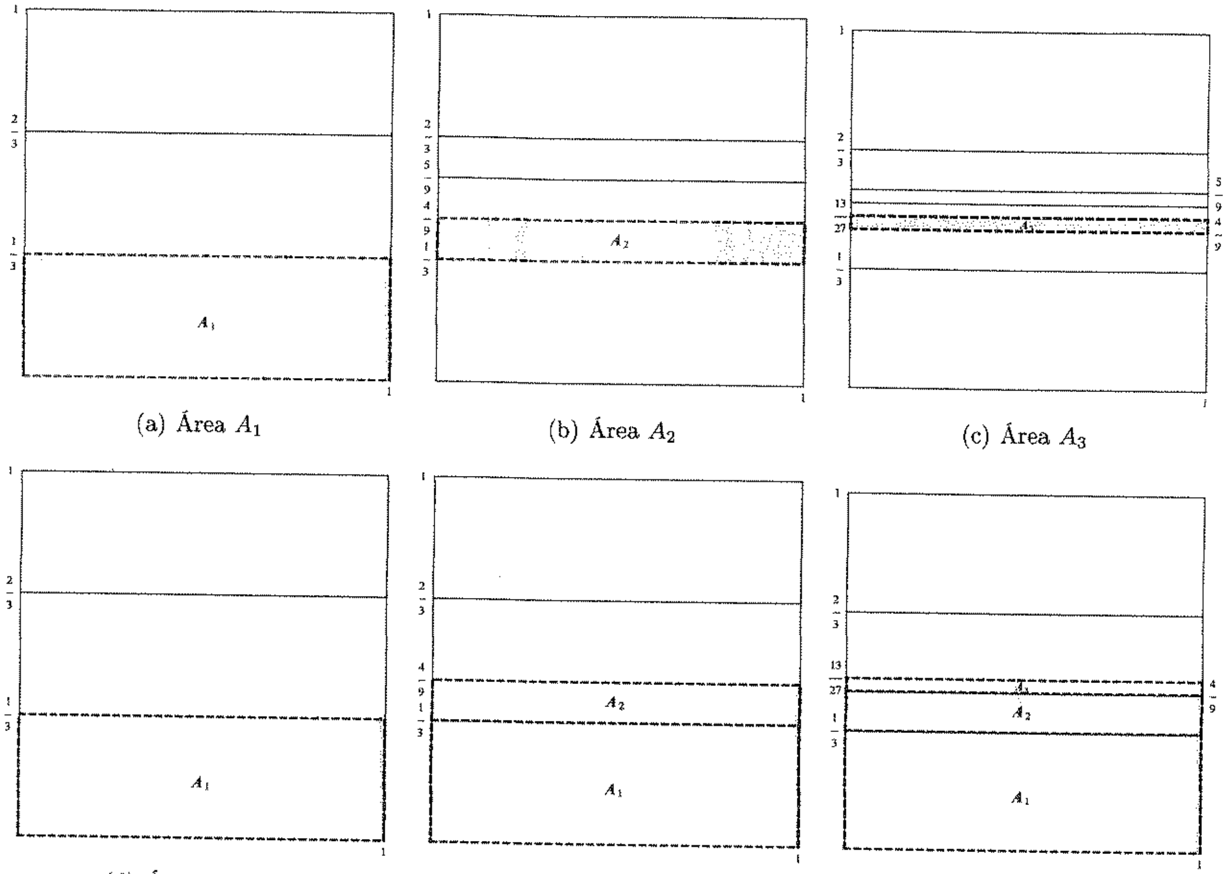
$1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$1 \leq \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P43

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Un proceso Infinito, es un bungle donde se repite Indefinidamente, Aunqe por dentro Varie.

(44)

P44

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:________________ **Curso:** Cálculo en Varias Variab

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral [X] | Sucesiones y Series [X] | Cálculo multivariado [ ] |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$

$\sum_{i=0}^{1} f(\cdot)\,\Delta$

$\left[\frac{1}{10}\left(\frac{100}{101}\right) + \frac{2}{10}\left(\frac{25}{26}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{100}{109}\right) + \frac{4}{10}\left(\frac{25}{29}\right) + \frac{5}{10}\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{6}{10}\left(\frac{25}{39}\right) + \frac{7}{10}\left(\frac{100}{149}\right) + \frac{8}{10}\left(\frac{25}{41}\right) + \frac{9}{10}\left(\frac{100}{181}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right)\right] \cdot \frac{1}{10} \approx 0{,}7$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a). Verdadero ya que toda función continua es integrable.

b).

c). La funcion no es integrable ya que en un intervalo $[a,b]$ existen infinitas discontinuidades.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Solución P44

(1). c) f(x) es integrable en [0,1] dado que la función es continua en dicho intervalo.

d). $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(1) - \arctan(0)$

$= \frac{\pi}{4} - 0$.

$= \frac{\pi}{4}$.

P44

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

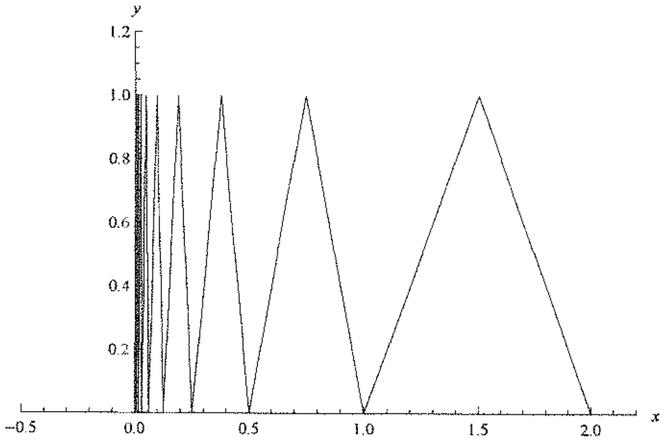


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^{\infty} f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

pyy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

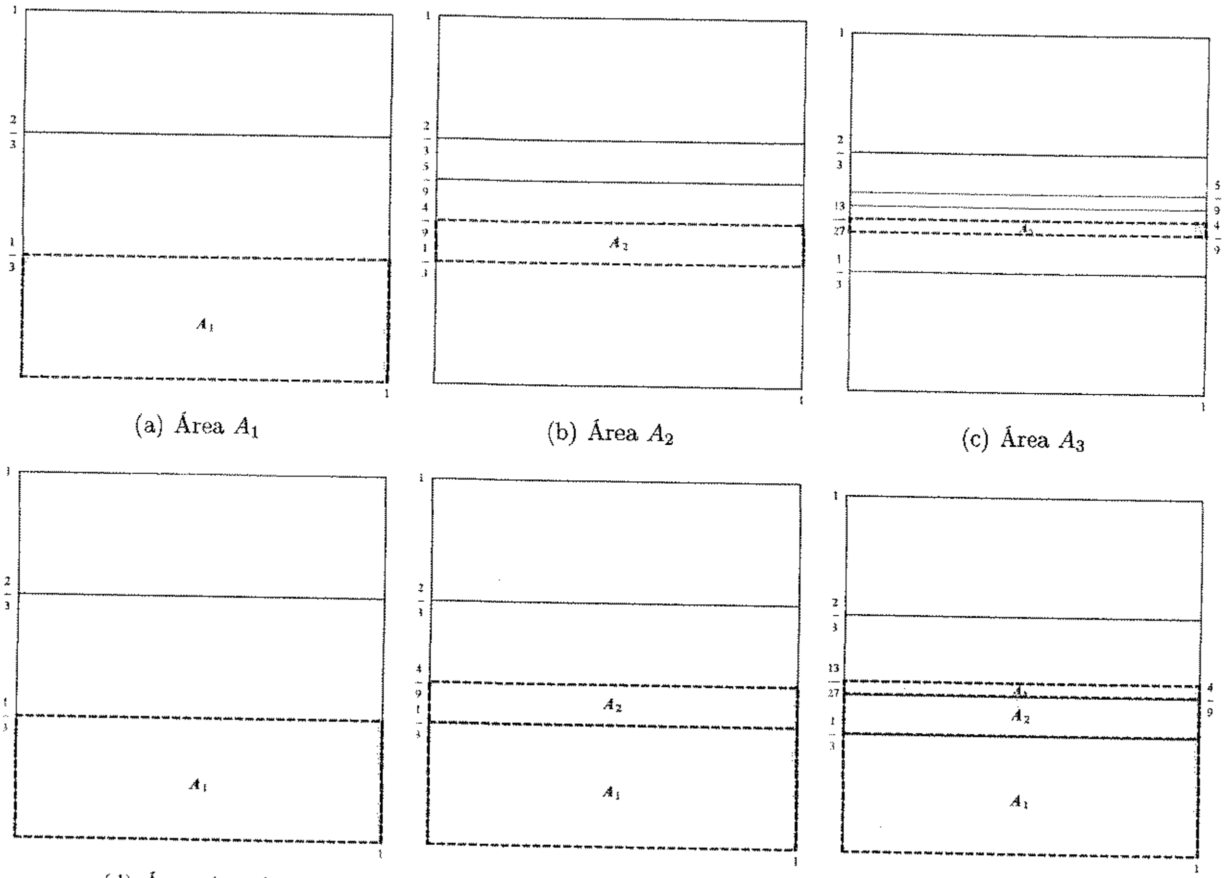
1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P44 # Aureo. $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = \frac{1}{3}$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \ldots \frac{1}{3^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

$A_2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3}$

$A_3 = \frac{13}{27} - \frac{4}{9}$.

$= \frac{1}{1+\frac{1}{3}}$

$= \frac{3}{4}$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Un proceso infinito es aquel que representa y determina comportamientos de funciones de forma indefinida.

(45) P45

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Camilo Ignacio Camargo Marín **Curso:** Cálculo en varias

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral ☒ | Sucesiones y Series ☒ | Cálculo multivariado ☐ |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0,1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

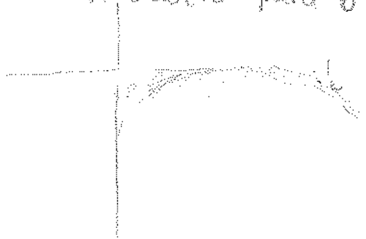
Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ☒3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b).
   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.
   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ partición entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a). Verdadero, si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b) entonces es continua en (a,b) luego es integrable en (a,b)

b) Verdadero,

c) Verdadero para $b \geq a$ Ej. $-x^2$



$\int_a^b -x^2 dx = -\int_a^b x^2 dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_a^b$

$-\frac{b^3}{3} - \frac{-a^3}{3} = -\frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3}$

$\frac{-b^3+a^3}{3}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ☒5 |

P45

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

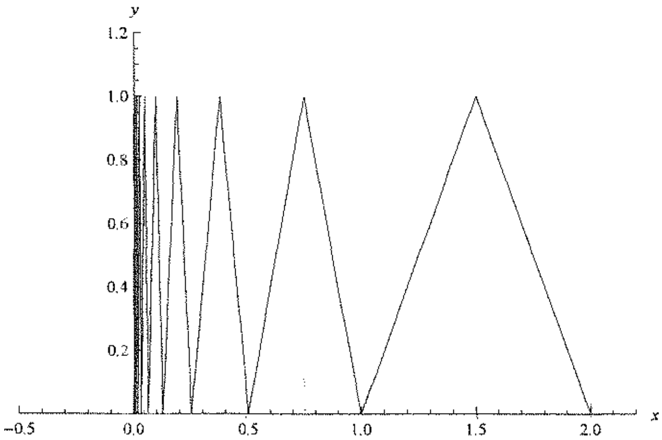


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

x	$f(x)$
0,5	0
1,0	0
1,5	1
2,0	0

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

PYT

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

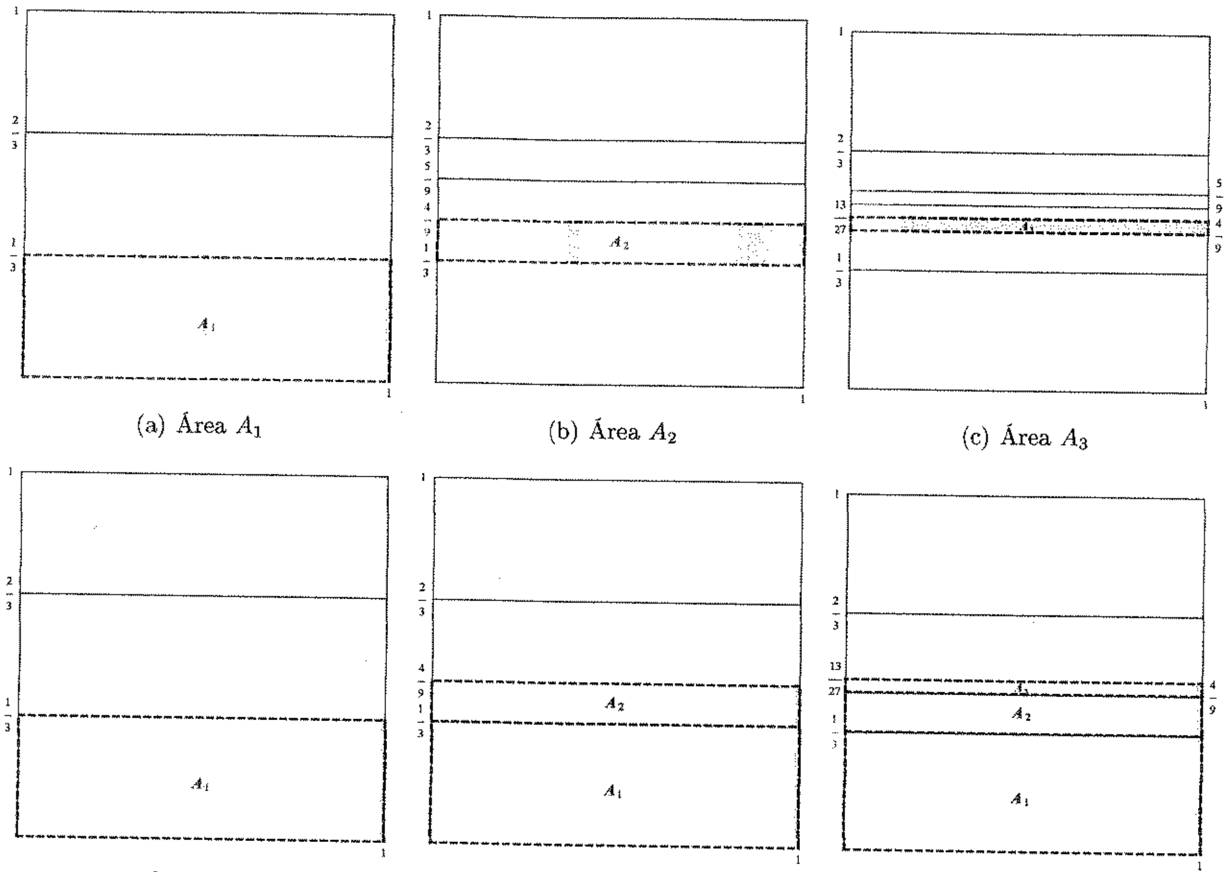
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P45

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

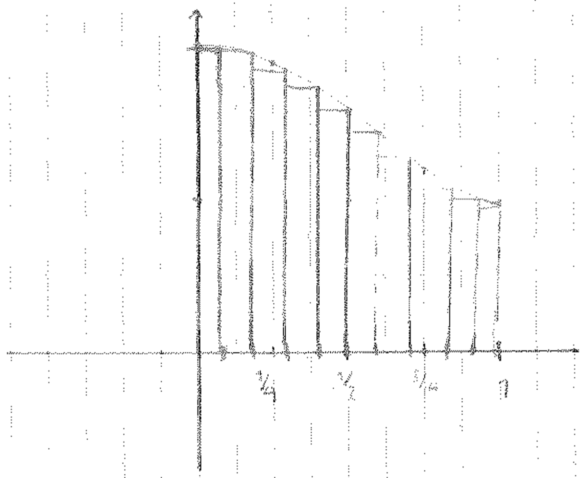
1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Entiendo por proceso infinito a la secuencia de actividades que conducen a formas generalizadas.

Camilo Ignacio Camargo Marín P45

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a).



b) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ $\qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$

$n=1 \quad f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{100}} = \frac{1}{\frac{101}{100}} = \frac{100}{101}$

$n=2 \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{25}} = \frac{1}{\frac{26}{25}} = \frac{25}{26}$

$n=3 \quad f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{9}{100}} = \frac{1}{\frac{109}{100}} = \frac{100}{109}$

$n=4 \quad f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{1+\frac{4}{25}} = \frac{1}{\frac{29}{25}} = \frac{25}{29}$

$n=5 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$

$n=6 \quad f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{1+\frac{9}{25}} = \frac{1}{\frac{34}{25}} = \frac{25}{34}$

$n=7 \quad f\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{49}{100}} = \frac{1}{\frac{149}{100}} = \frac{100}{149}$

$n=8 \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{1+\frac{16}{25}} = \frac{1}{\frac{41}{25}} = \frac{25}{41}$

$n=9 \quad f\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{81}{100}} = \frac{1}{\frac{181}{100}} = \frac{100}{181}$

$n=10 \quad f(1) = \frac{1}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \approx \frac{1}{10}\left(\frac{100}{101} + \frac{25}{26} + \frac{100}{109} + \frac{25}{29} + \frac{4}{5} + [illegible] + \frac{16}{[illegible]} + \frac{25}{41} + \frac{10}{19} + \frac{1}{2}\right)$

$\approx \frac{1}{10}\left(7,[illegible]4711147[illegible]\right)$

$\approx 0,7247111477$

c) f(x) es continua en [0,1]. integrable

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

(46)

P46

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

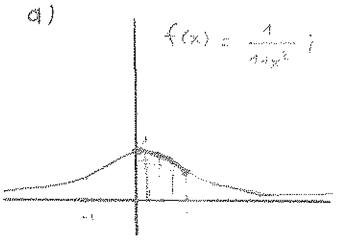
Nombre: Laura Johana Mahecha Cáceres **Curso:** Cálculo en Varias

Señale con una **X** los temas vistos | ~~Cálculo Integral~~ | | ~~Sucesiones y Series~~ | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $x \in [0,1]$



c) Si es integrable, dado que $f(x)$ es continua

(d) $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \tan^{-1}(x)\Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)$
$= 0,785398 - 0$
$= 0,785398$

(b) $\Delta x = \frac{1}{n}$;

base	altura
$x_1 = \frac{1}{n}$	$f(x_1)$
$x_2 = \frac{2}{n}$	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
$x_i = \frac{i}{n}$	$f(x_n)$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right)$

Cuando $n=10$

$\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{10}\right)^2}\right)$

$\approx 0,759981497$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Verdadero. Dado que.

b) Falso

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p4 b

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

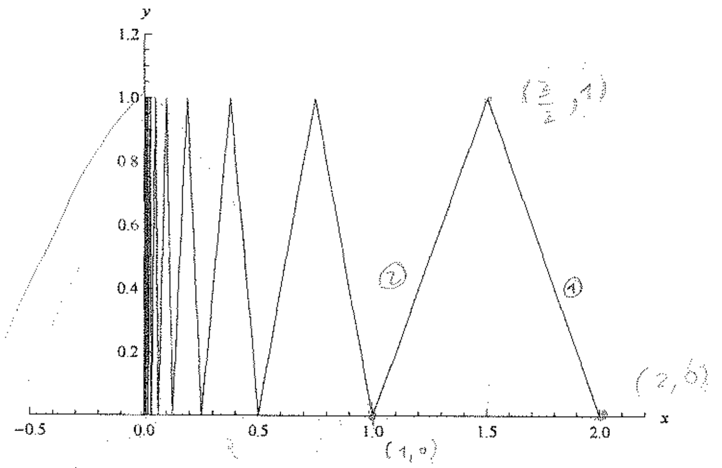


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

$n = n \; [1, 2]$
$n = 1 \; [\frac{1}{2}, 1]$
$n = 2 \; [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

a) ① $m = \frac{0-1}{2-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$

② $m = \frac{0-1}{1-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$

$f(x) = -|2^n x| + 1$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty (\frac{1}{2^n}) dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{x} (\frac{1}{2^n}) dn = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{n-1} (\frac{1}{2^n}) dn + \int_{n-1}^{n} (\frac{1}{2^n}) dn \right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{n-1} (2^{-n}) dn + \int_{n-1}^{n} (2^{-n}) dn \right)$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P46

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

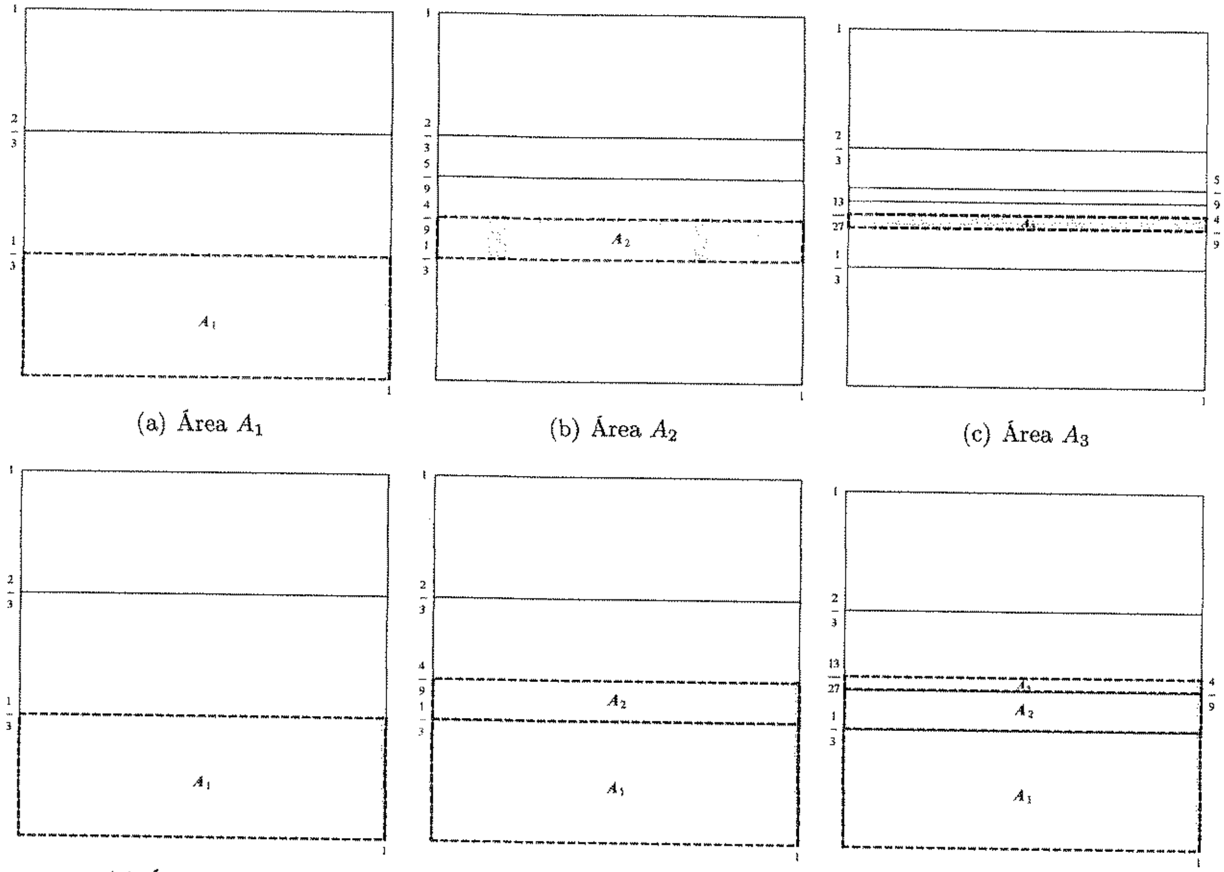
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P46

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Es una forma de solucionar problemas relacionados con cálculos que no se pueden efectuar facilmente o rapidamente. En estos procesos se establecen métodos para hallar dichos cálculo de forma lógica y analítica.

(47)

P47

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Ismael Guerrero Pérez **Curso:** Cálculo en Varias

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

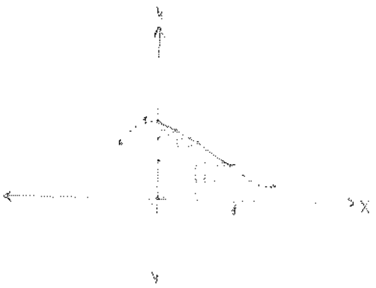
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



$f(x)$ es continua en todo su dominio y no presenta discontinuidades luego:

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = (\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}78$

$S \approx 0{,}75$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | X | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   ✓ a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

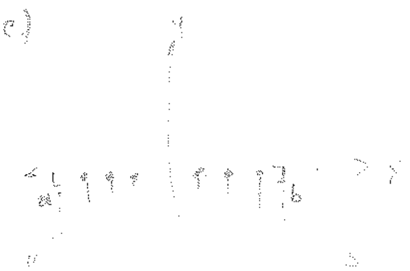
   ✓ b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   ✓ c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a)

b.) $F'(x) = f'(x)$

c)



Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P47

Dif → Con

Con ⇏ Dif

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

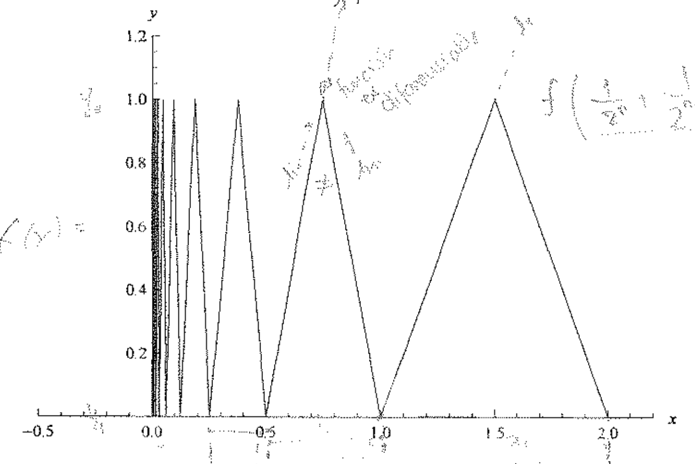


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

$n=0$ $[1,2]$

$n=1$ $[\frac{1}{2},1]$

$n=2$ $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

a) $n \in \mathbb{N}$. $f(\frac{1}{2}) = 1$ $\quad m_1 = 2$

$f(1) = 0$

$-|x|$

$f(\frac{3}{8}) = 1$ $\quad m_2 = 4$

$f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(x) = -|2^n x| + 1$, $x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ $n \in \mathbb{N}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

947

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

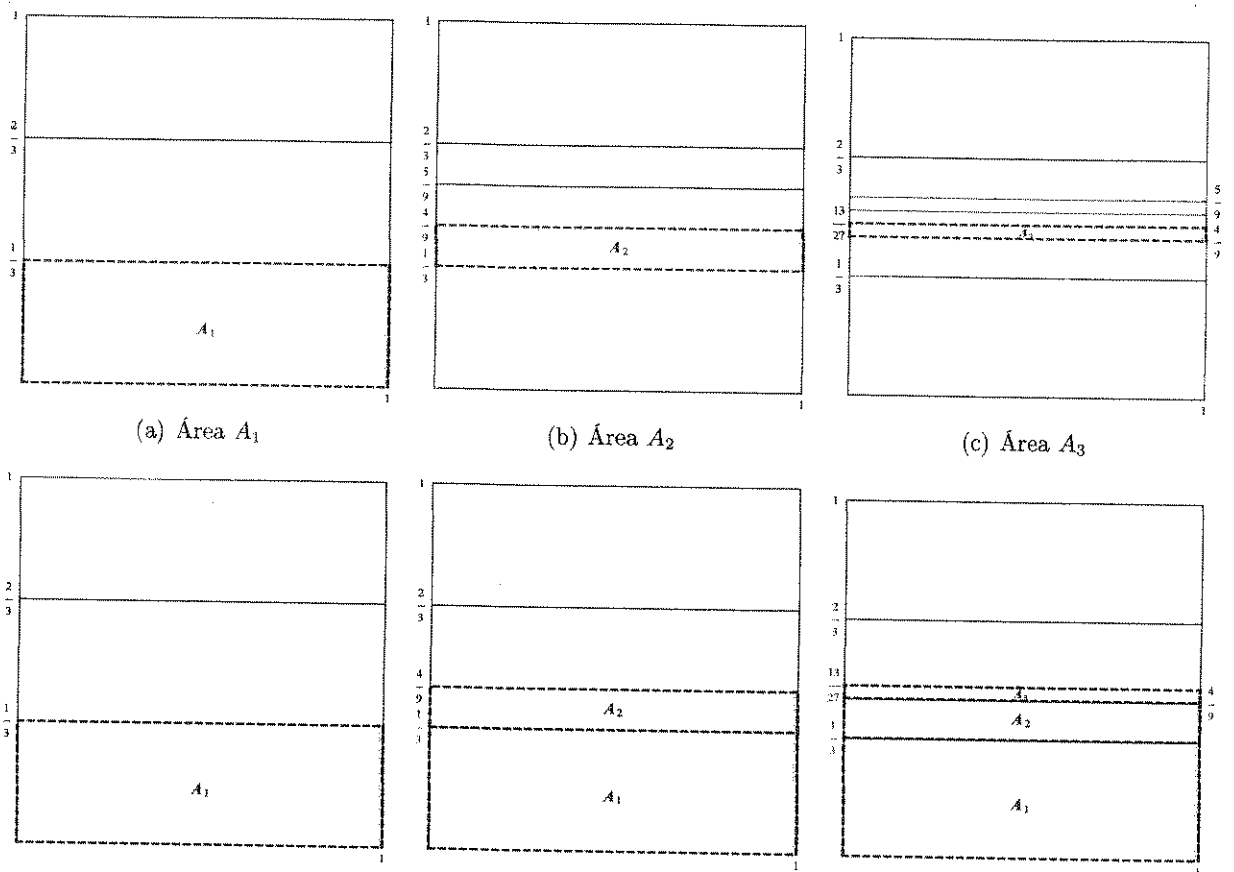
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p47

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Es un método generalizado utilizando como indice reiterativo los objetos de un conjunto no numerable, que en casos normales, es el conjunto de los Números Reales.

(48)

P48

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Roger Mayorga **Curso:** calculo varias

Señale con una **X** los temas vistos | ~~Cálculo Integral~~ | ☐ | ~~Sucesiones y Series~~ | ☐ | Cálculo multivariado | ☐ |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

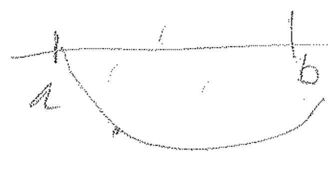
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

$X \in \mathbb{Q}$



Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P47

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

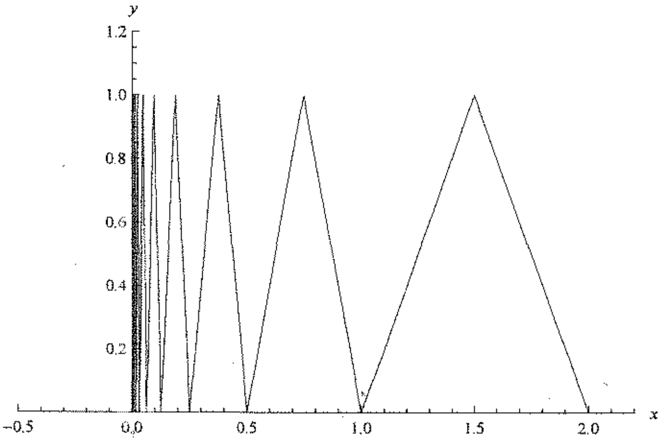


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P48

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p48

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

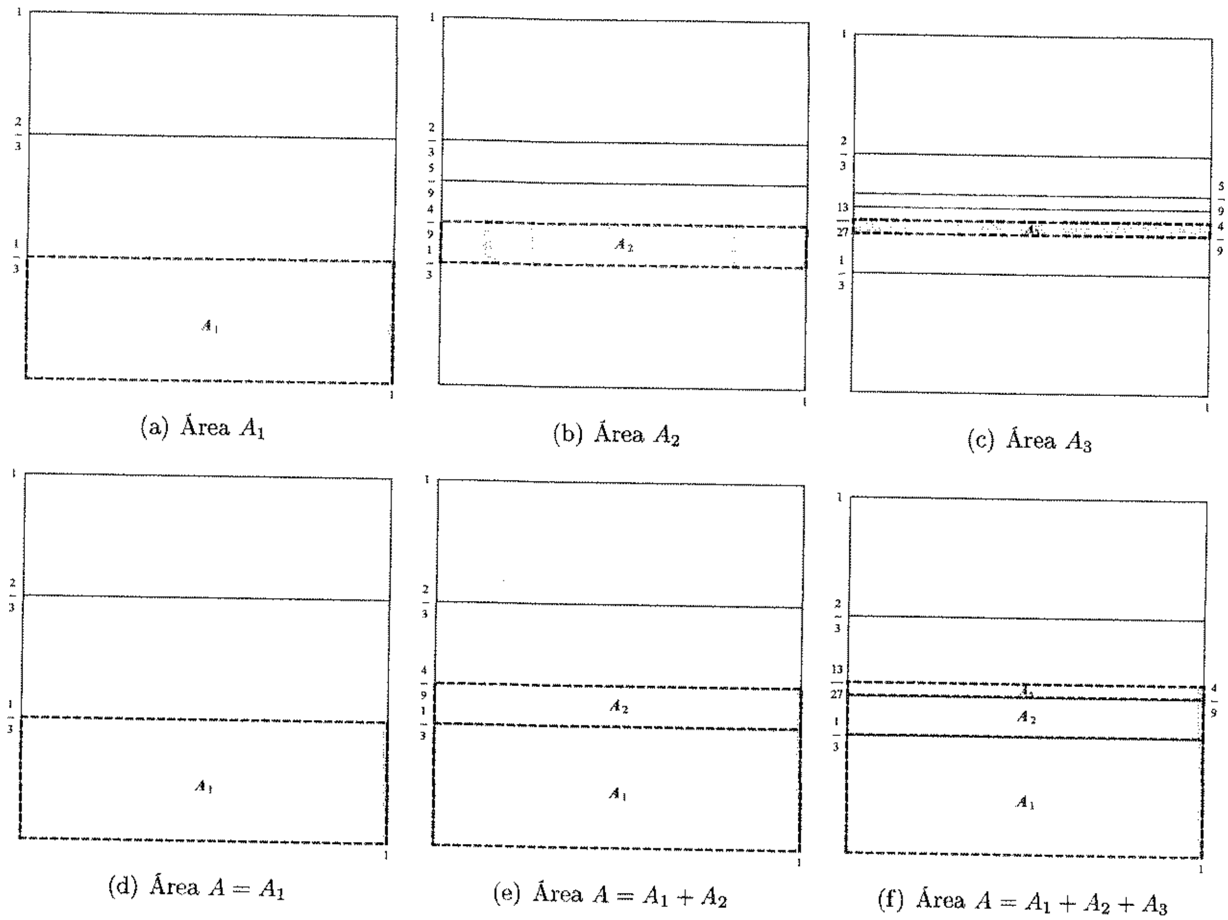


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

es dado un universo y algunas operaciones generar una regularidad que cumpla para todo $x \in$ universo.

p48

c. f es Integrable porque es continua.

d.) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\tan^{-1} x \Big|_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = 0.785$

2. a.) V porque f es continua luego es integrable

b.) V como es derivable entonces es continua.

$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$

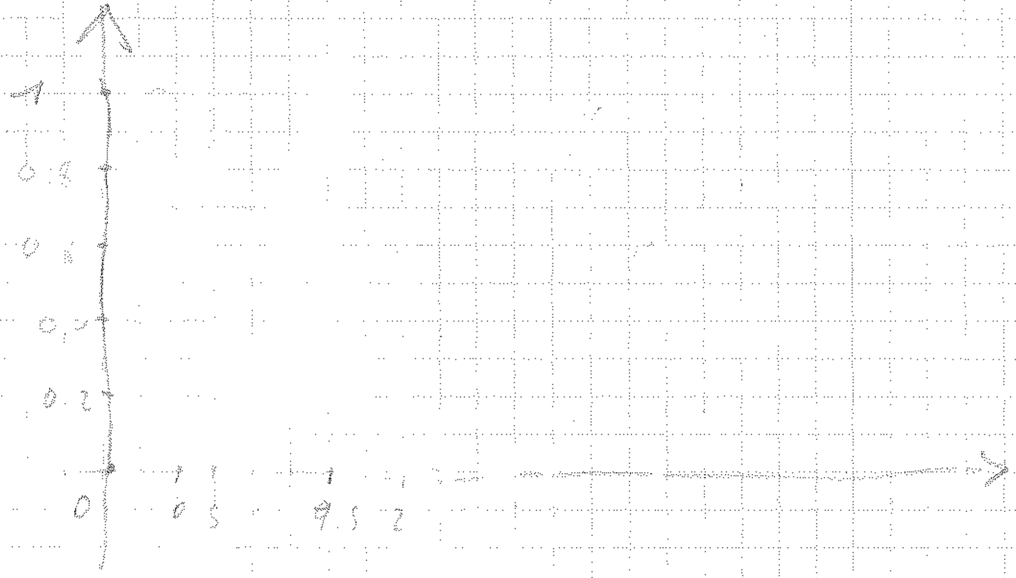
$F'(x) = f(x)$

c.) V y debe cumplir que

$f(x) \geq 0$ si $x \in I$

Para que exista la Integral
ya que la Integral esta
en el rango (x, -y)

P48



$$|2^{n+1}x+1| + \frac{3}{2^{n+1}} \longrightarrow \left[\frac{1}{2^{n}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right]$$

b) Si [illegible] C^1 Continué

c) $$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{1/2^{n}}^{1/2^{n-1}} \left(|2^{n+1}x+1| + \frac{3}{2^{n+1}}\right) dx$$

(49) Pug

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Ivan Alvarado **Curso:** cal multivariado

Señale con una **X** los temas vistos

Cálculo Integral	X	Sucesiones y Series		Cálculo multivariado	

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

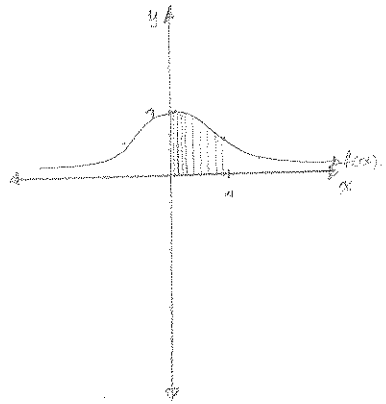
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a,b) $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{10}\right)\left(f\left(\frac{k}{10}\right)^2\right) = 0,7598.$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1$



Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) verdadero
Porque f es diferenciable por ende es continua y si es continua es integrable.

b) falso
La funcion parte entera, es integrable pero no es diferenciable

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

p49

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

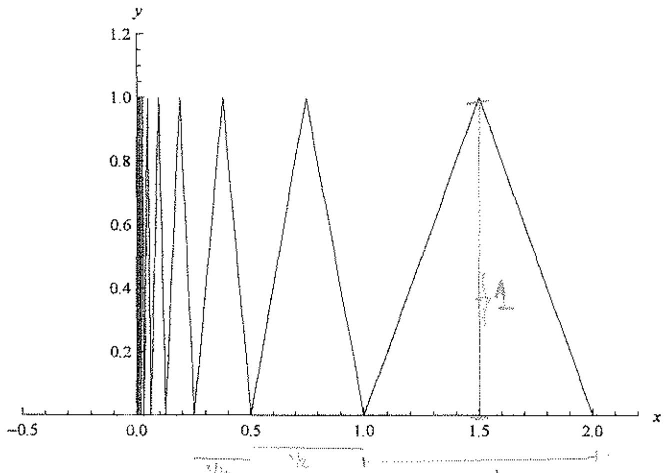


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ con $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P49

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

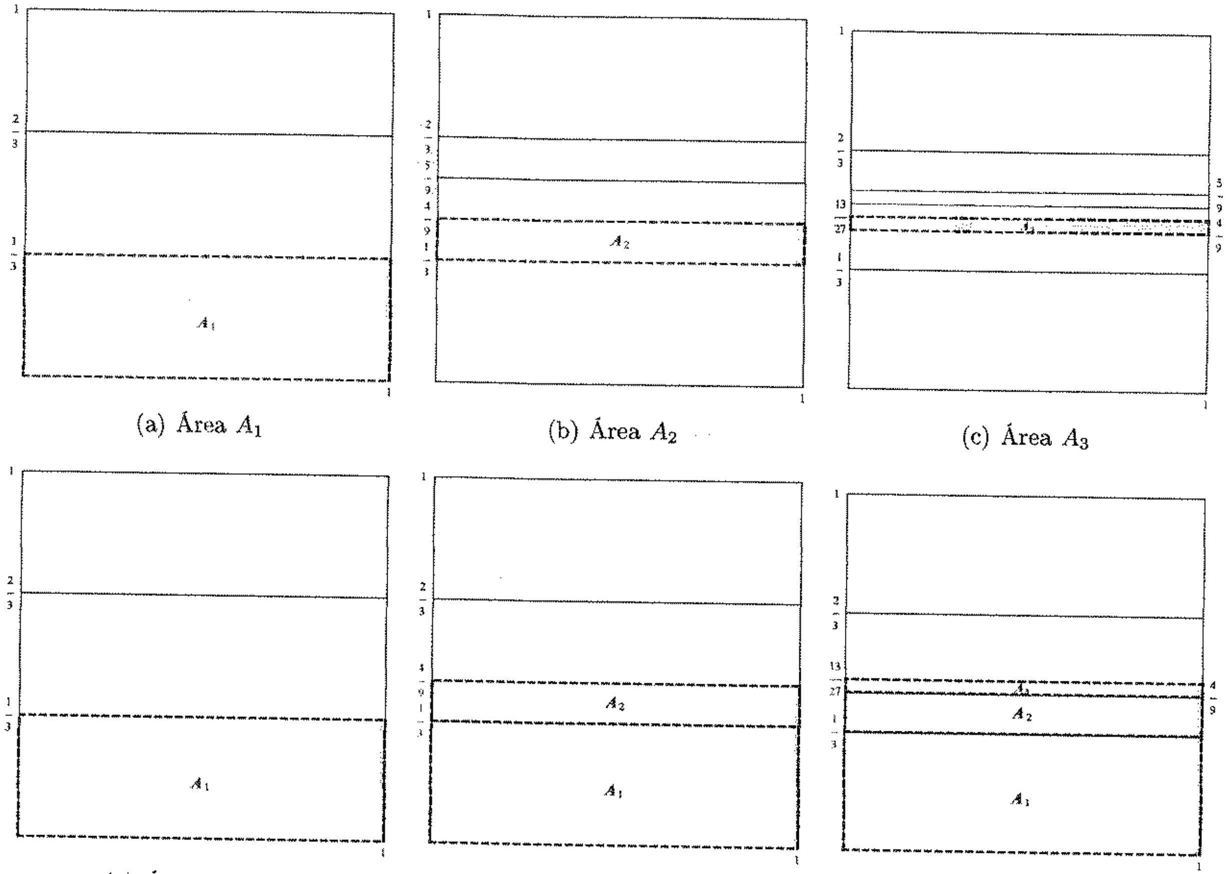
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P49

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \ldots\ldots$

$A = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{3} + \frac{13}{27} - \frac{4}{9} \ldots$

$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{3^4} + \ldots$

$A = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots$

$A = (-1) + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots$

$A = (-1) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = -1 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$A = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} - 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Proceso infinito es la repetición de un algoritmo en una cantidad de veces tan inmensamente grande que no se puede definir.

Exp

(50)

P50

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Montero Cano Jaime Alfonso **Curso:** Calculo avanzado.

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo ~~Integral~~ | | Sucesiones ~~y~~ Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

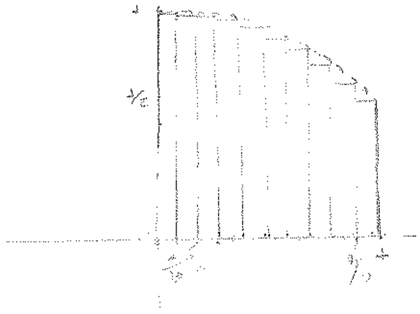
1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?



$A^+ = f(1/10)\cdot 1/10 + f(2/10)\cdot\frac{1}{10} + f(3/10)\cdot\frac{1}{10} + f(4/10)\cdot\frac{1}{10} + f(\frac{5}{10})\cdot\frac{1}{10} + f(\frac{6}{10})\cdot\frac{1}{10} + f(7/10)\cdot\frac{1}{10} + f(8/10)\cdot 1/10 + f(\frac{9}{10})\cdot\frac{1}{10} + f(1)\cdot\frac{1}{10}) = \frac{1}{10}\cdot\sum_{i=1}^{10} f(\frac{i}{10}) = \frac{1}{10}(7.599$
$= 0.7596$

$f(x)$ es continua en $[0,1]$ por lo tanto es integrable en $[0,1]$.

$i = \sum_{i=1}^{10} f(i/10)\cdot\frac{1}{10}$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x)\Big|_0^1 = (\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)) = 0.78539$

Calificación de la dificultad | 1 | X | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) si f es diferenciable enton f es continua si f. es continua es integrable. (verdadera)

b) por T.F.C.1 $F'(x) = f$ por lo tanto f. es diferenciable que a su vez f. es continua en $[a, b]$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | X | 5 |

PSD

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

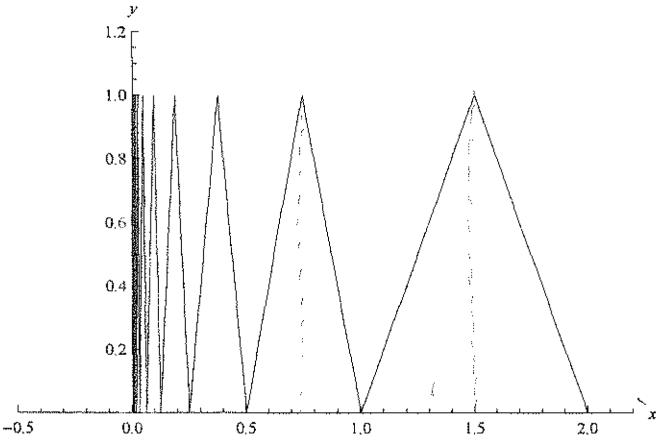


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P50

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

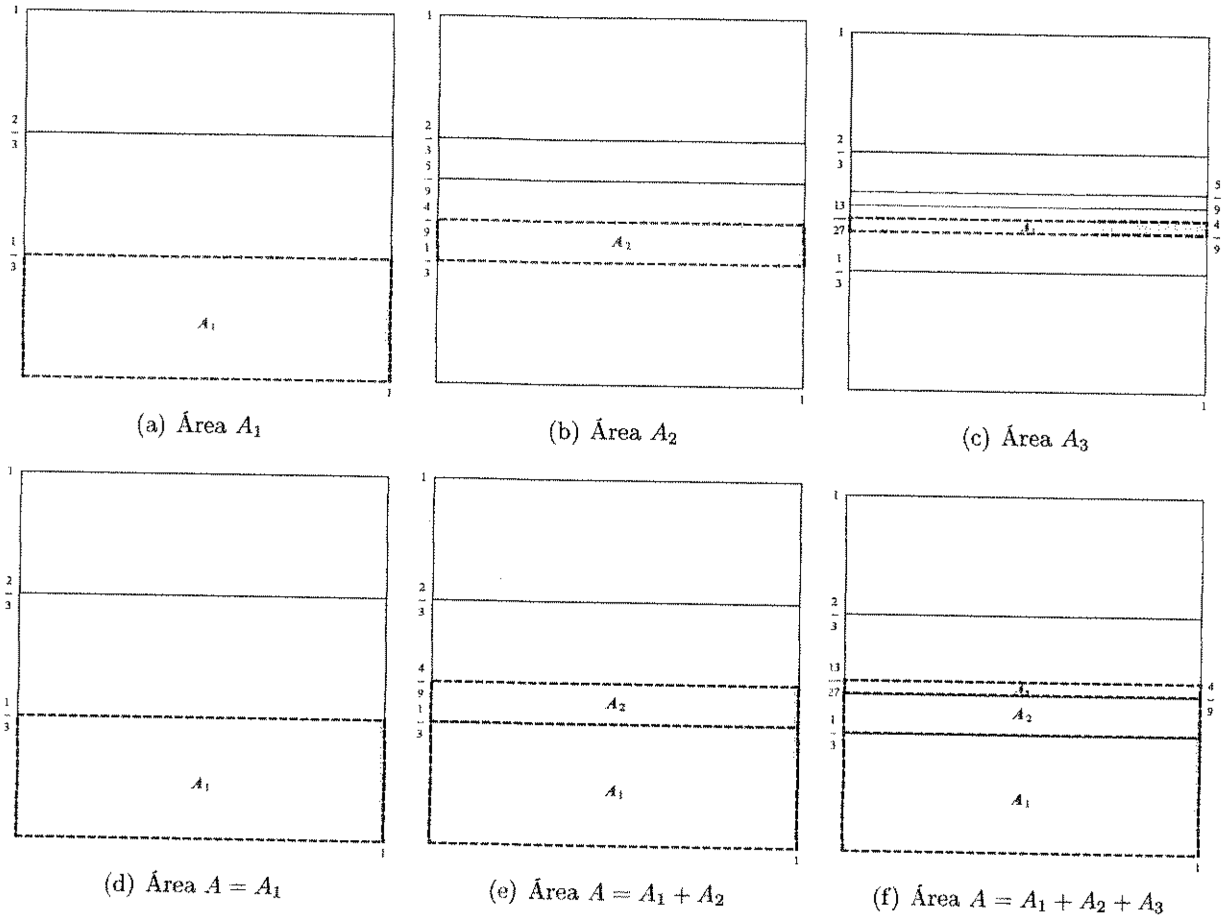
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_{n-1} + a_{n-2}}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

PSD

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

el proceso es infinito es la continua repetición de una acción matemática

(51)

P51

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Gustavo Quintero Quintero **Curso:** Cálculo en varias

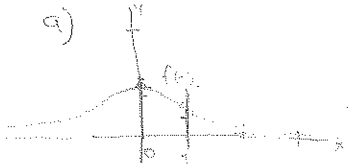
Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a)



d) $\int_0^1 f(x)\,dx = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \tan^{-1} 1 \approx 0,785$

c) Si es integrable porque es continua.

b) $A \approx \sum_{i=1}^{10} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{i}{10}\right)^2} \right] \frac{1}{10}$

$A \approx \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \ldots$

$A \approx \frac{1}{10}\left(\ldots \right)$

$A \approx 0,763.$

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

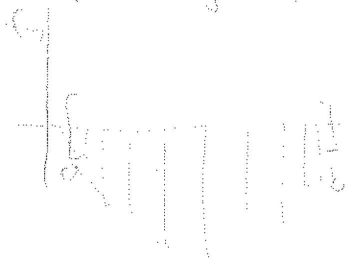
2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) V. si f es diferenciable, entonces es continua, y si es continua en [a,b] es integrable.

b)

c) V. La integral es negativa o cero.



Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

PS1

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

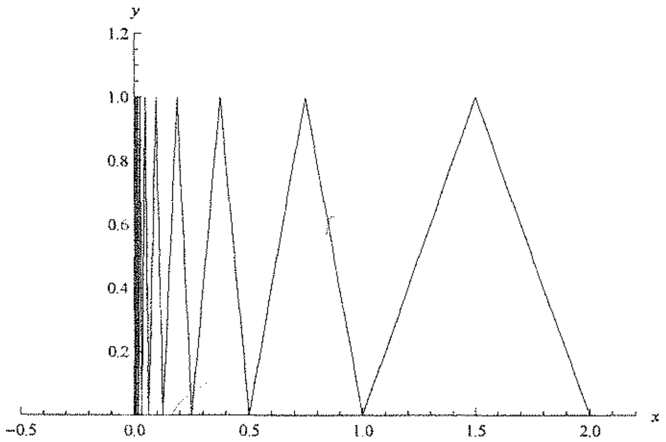


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P5)

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

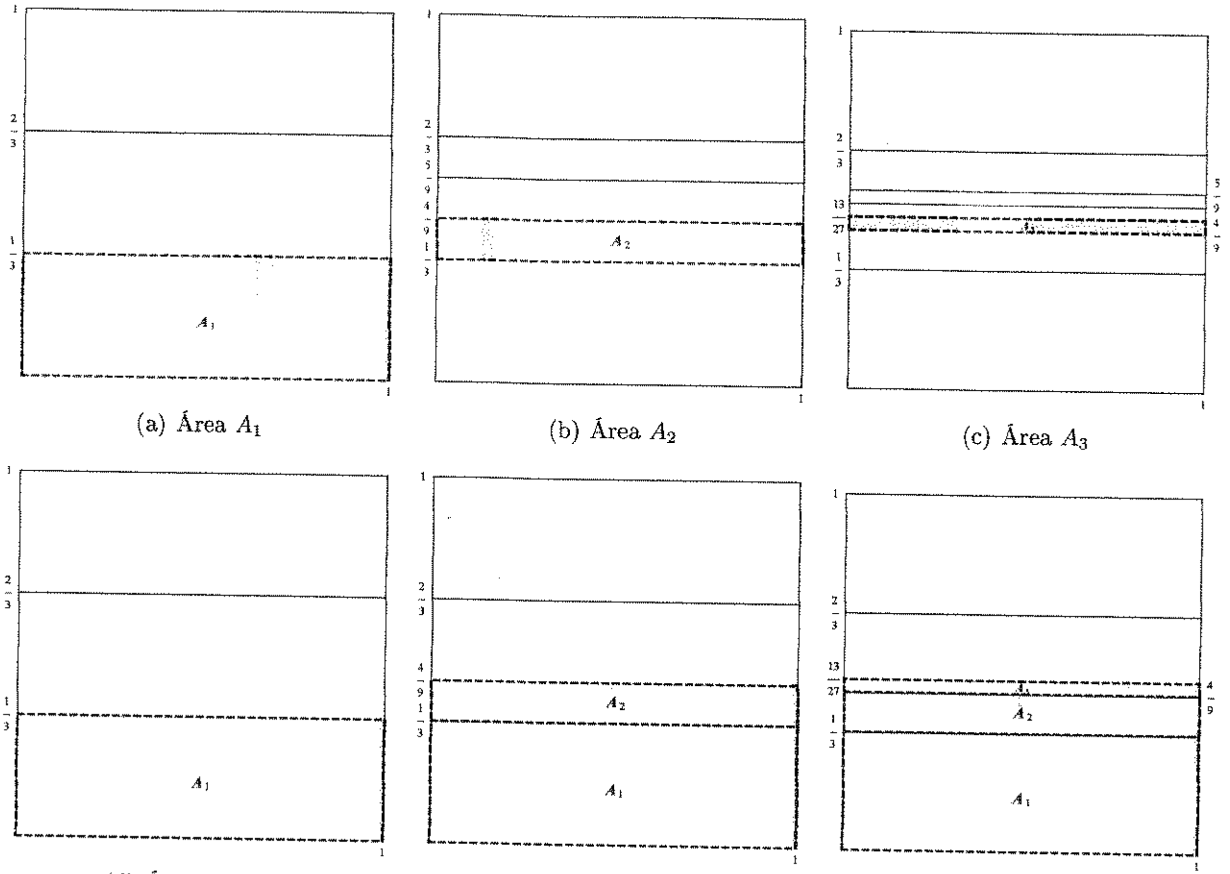
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

PS)

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

R\\ proceso que se repite infinitamente

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: [illegible] **Curso:** Cálculo en varias.

Señale con una **X** los temas vistos | ~~Cálculo Integral~~ | | ~~Sucesiones y Series~~ | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

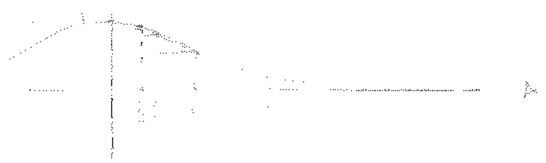
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a) [illegible] $\frac{1211}{...}$ [illegible] $\frac{154}{120}$ [illegible]



c) [illegible] es integrable

b) [illegible] $A_i = \lim_{n\to\infty} \sum$ [illegible] Δx [illegible]

[illegible] $\frac{100}{136} + \frac{100}{149}$ [illegible] $= 0{,}76$

[illegible]
$A_i = 0{,}76$

d) $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \tan^{-1}(x) \Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = 0{,}78$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) la afirmación es [illegible] para que sea integrable cuando [illegible] sea diferenciable
b) la afirmación es verdadera ya que la integral definida se corresponde con la derivada de una función, la cual es continua.
c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P52

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

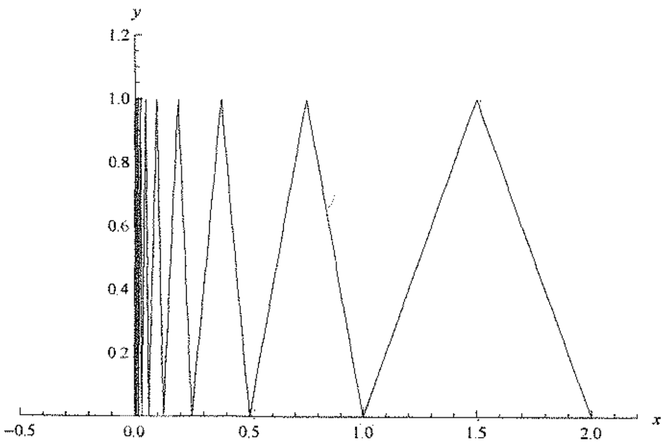


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma. $-|2^n(x - 3/2)| + 1$

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p52

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

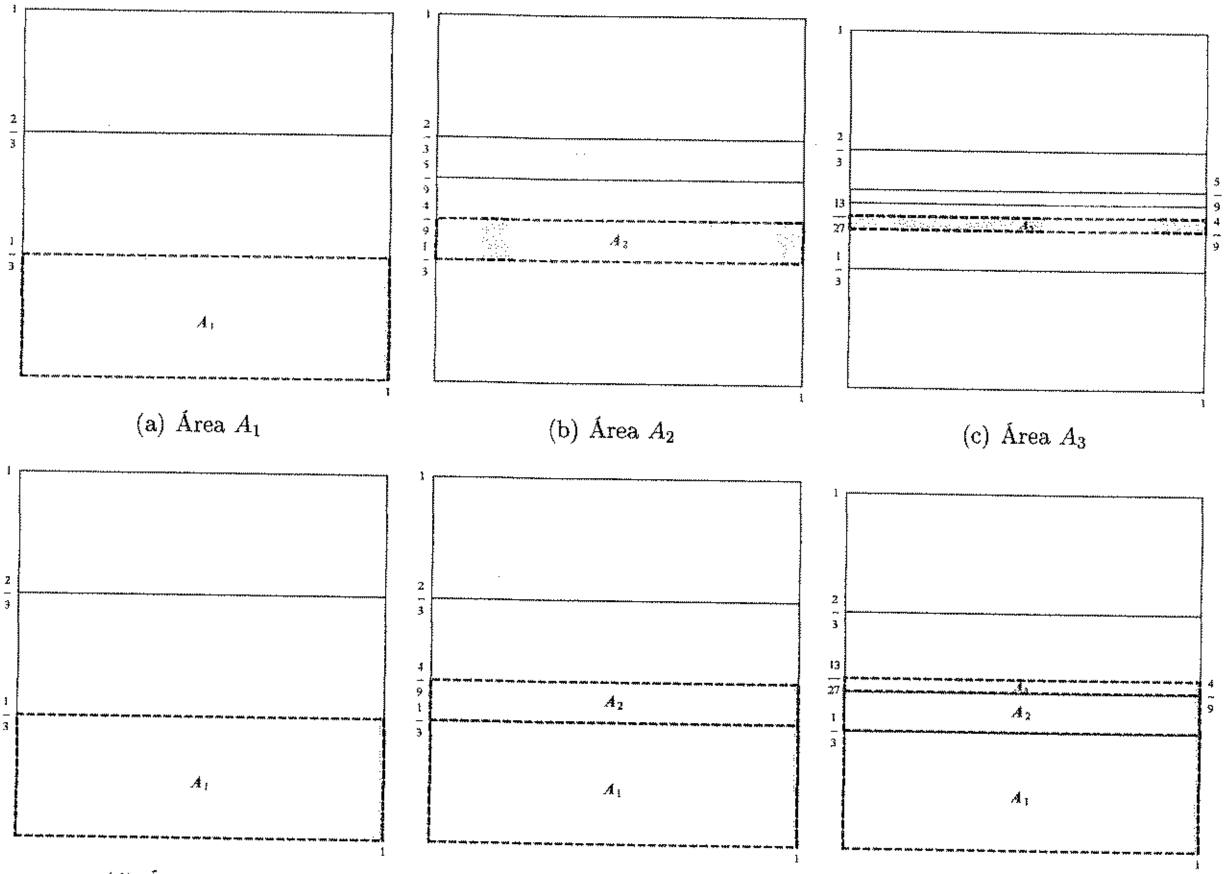
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

PS2

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

PRIMERO DEFINIRIA EL CONCEPTO DE PROCESO EL CUAL SERIA UNA ACTIVIDAD DE MULTIPLES REPETICIONES, YA SEAN IDENTICAS O CON VARIACIONES, ASÍ, UN PROCESO INFINITO SERIA UNA ACTIVIDAD CICLICA DONDE NO TENEMOS UN NUMERO MAXIMO DE VECES QUE SE DEBE REALIZAR DICHA ACTIVIDAD.

(53) P53

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:_______________________ **Curso:** Cálculo en varias variables.

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral [X] | Sucesiones y Series [X] | Cálculo multivariado [ ] |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

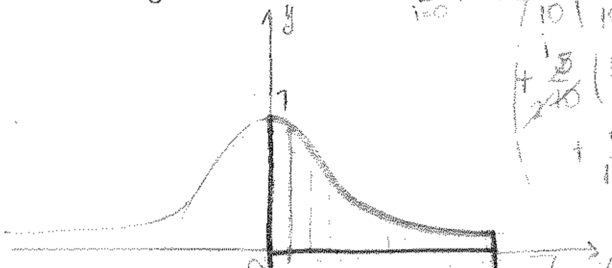
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{10}$



$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{10}\right)^2}\right) \cdot \frac{1}{10}$

$\sum_{i=0}^{1} f(x) = \frac{1}{10}\left(\frac{100}{101}\right) + \frac{2}{10}\left(\frac{25}{26}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{100}{109}\right) + \frac{4}{10}\left(\frac{25}{29}\right) + \frac{5}{10}\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{6}{10}\left(\frac{25}{34}\right) + \frac{7}{10}\left(\frac{100}{149}\right) + \frac{8}{10}\left(\frac{25}{41}\right) + \frac{9}{10}\left(\frac{100}{181}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{10}$

$= \left(\frac{10}{101} + \frac{5}{26} + \frac{30}{109} + \frac{10}{29} + \frac{2}{5} + \frac{15}{34} + \frac{700}{149} + \frac{20}{41} + \frac{90}{181} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{10}$

≈ 0.79

c) R// Es integrable en el intervalo 0,1 dado que es continua en el intervalo.

d) R// $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \underbrace{[a, b] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})}$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) R// Por el teo. que nos dice que una función es diferenciable → es continua, por ende es integrable.

b) R// No necesariamente es continua, puesto que si la función está definida a trozos la integral de la función se puede hallar, siempre y cuando no halla discontinuidad [illegible] y/o asíntotas.

c) R//

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

P53

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

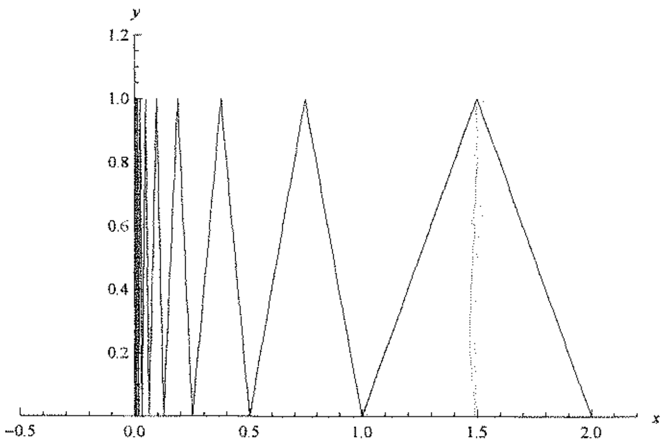


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P53

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

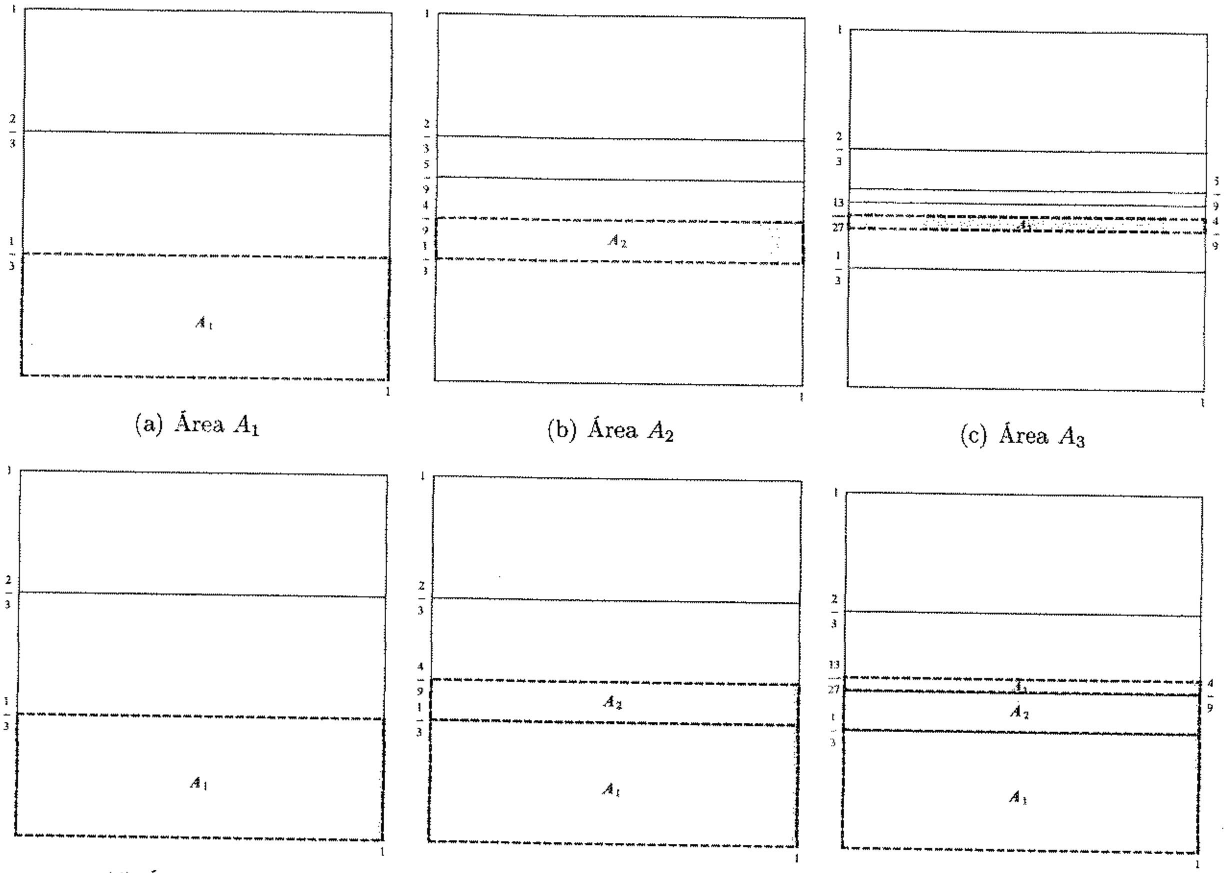
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P53

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = \frac{1}{3}$; $A_2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4-3}{9} = \frac{1}{9}$; $A_3 = \frac{13}{27} - \frac{4}{9}$;

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

R// Un proceso infinito desde mi punto de vista es una serie de pasos o de secuencias que tienden al infinito, por lo cual se hace importante reducirlas a una expresión que generalice los mismos procesos.

(54)

P54

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Paola Lagos **Curso:** Cálculo en Varios

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

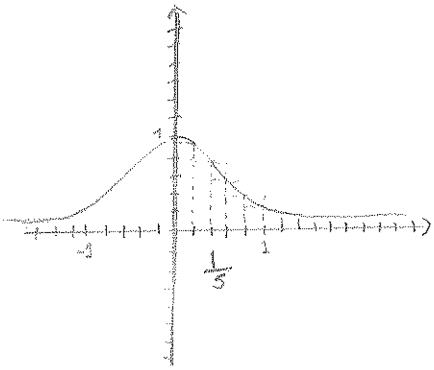
1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?



Partición $\frac{1}{10}$

$$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{n}{10}\right) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1+\frac{n^2}{100}}$$

Si es integrable porque es continua

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | X | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a. Verdadero. Si f es diferenciable → f es continuo por ende f es integrable

b. No necesariamente $[a,b]$ es continuo, las funciones por partes son integrables y no continuas

c.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | X | 5 |

p54

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

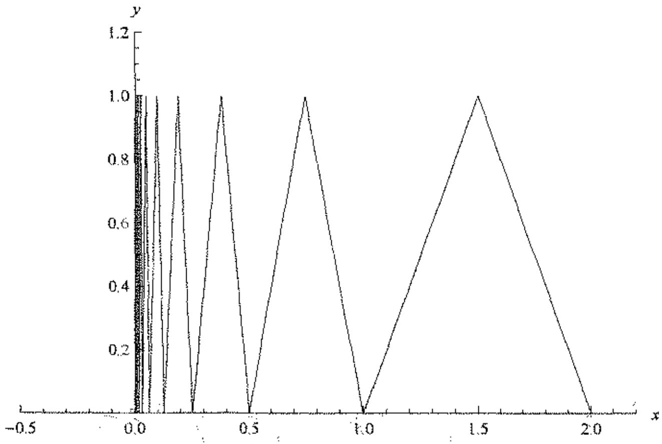


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{b \cdot h}{2}$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

p54

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

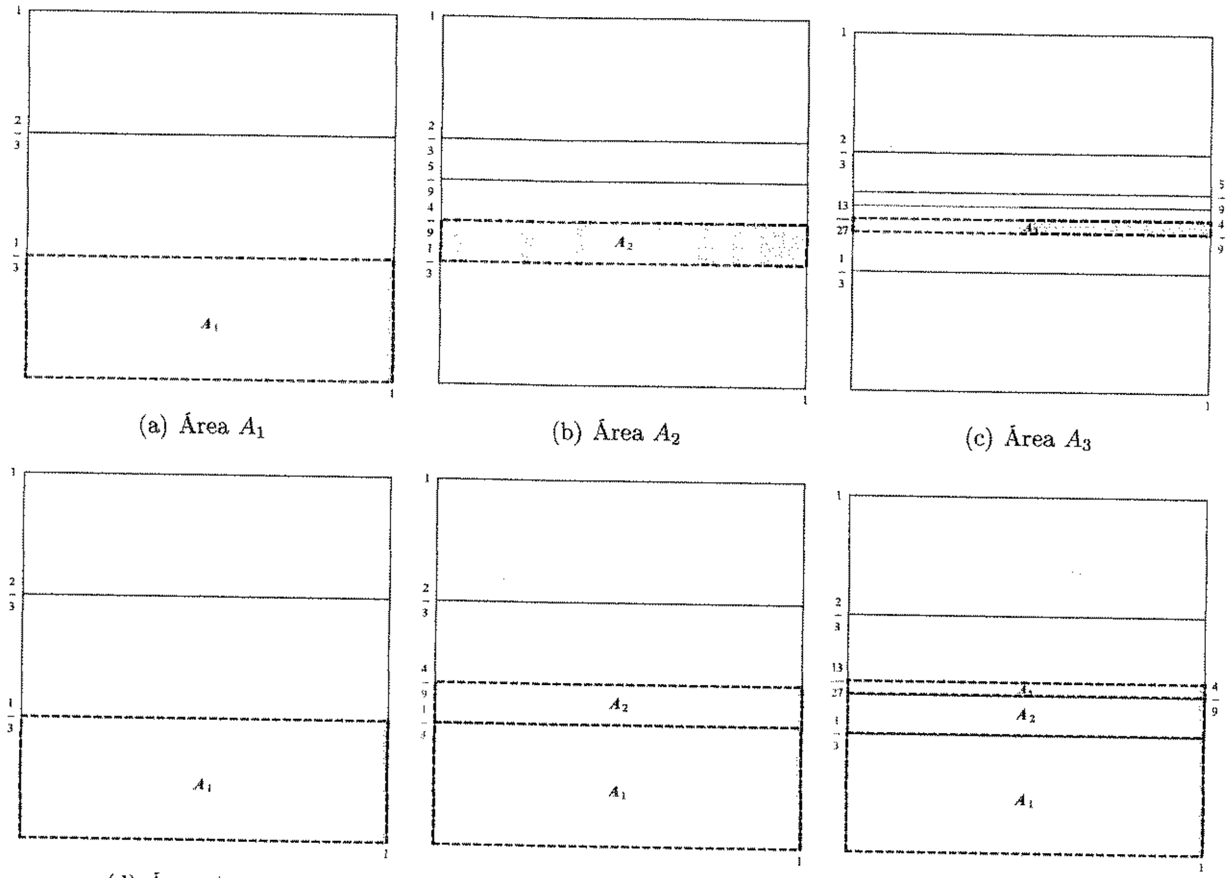
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

p54

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Proceso infinito: un mecanismo repetitivo que no termina.

(55)

P55

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Gabriel Parada **Curso:** Calc Multivariado

Señale con una **X** los temas vistos

Cálculo Integral	X	Sucesiones y Series	X	Cálculo multivariado	

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0,1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ $\qquad \frac{n(n+1)}{2}$

$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{n}{10}\right)$ $\qquad f(x_i)\Delta x$

$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{1+\left(\frac{n}{10}\right)^2}$ $\qquad x_i = \frac{i}{10}$

$x \cdot \frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{1+\frac{n^2}{100}}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b).

   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.

   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

VERDADERO a. Si una función f es derivable en (a,b) también es integrable en (a,b) porque para que sea derivable debe ser continua en (a,b) y toda función continua es integrable

FALSO b. No necesariamente es continua, una función puede ser no continua y sin embargo integrable.

c.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P55

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

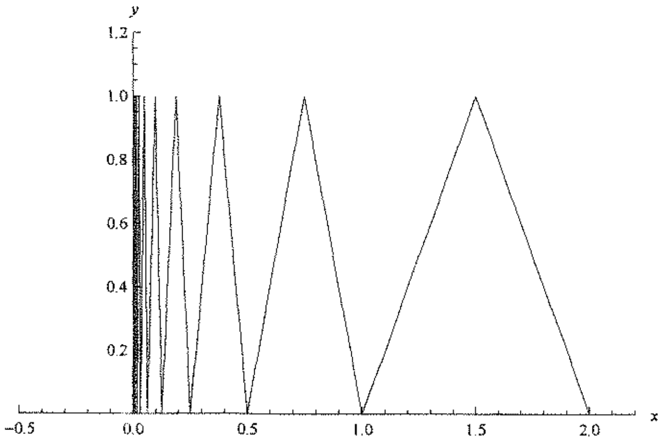


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p55

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

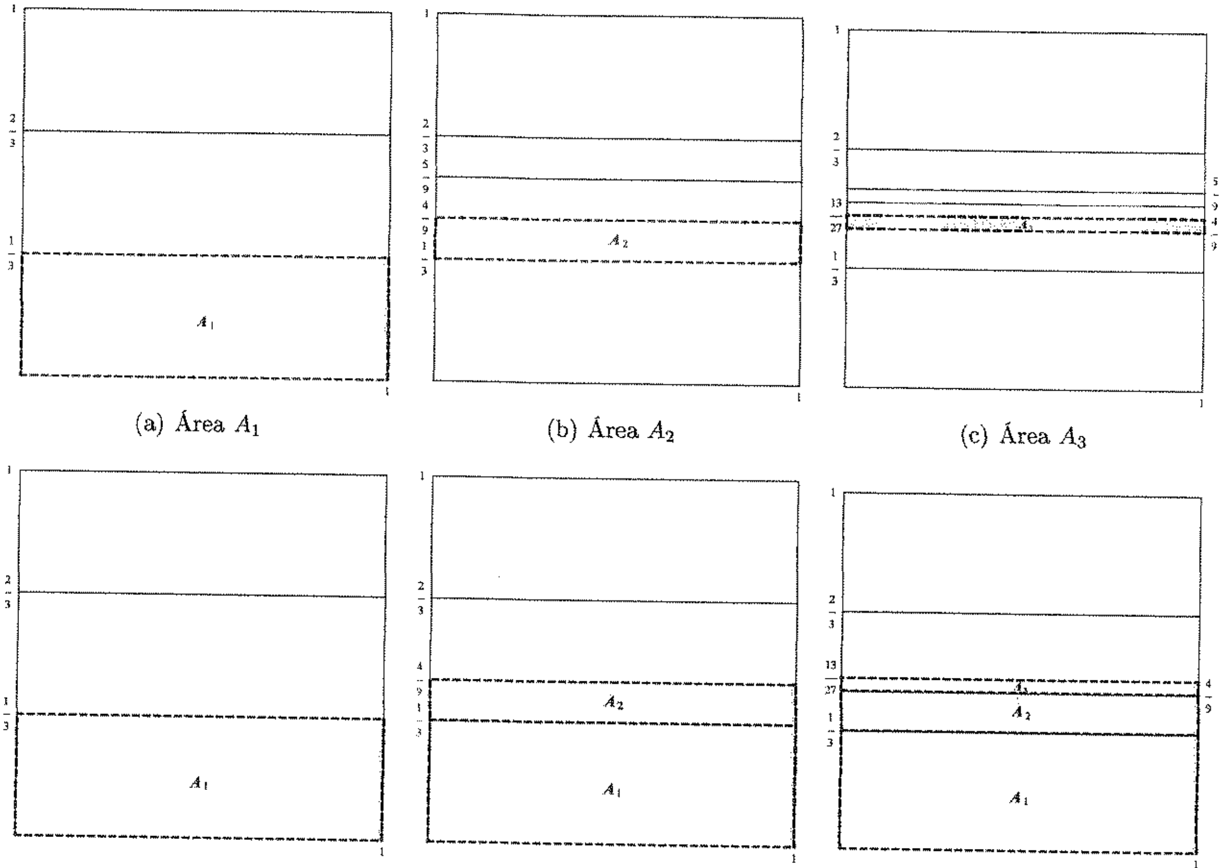
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p55

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Un proceso Infinito es aquel en el cual se considera que un intervalo se hace cada vez mas pequeño hasta desaparecer o llegar a ser cero o crecer hasta hacerse "muy" grande. Ocurre tambien cuando una variable puede tomar valores cercanos a cierto numero o alejarse tambien.

P<6

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: Ana Maria Saldaña Heredia **Curso:** Cálculo multivariado

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

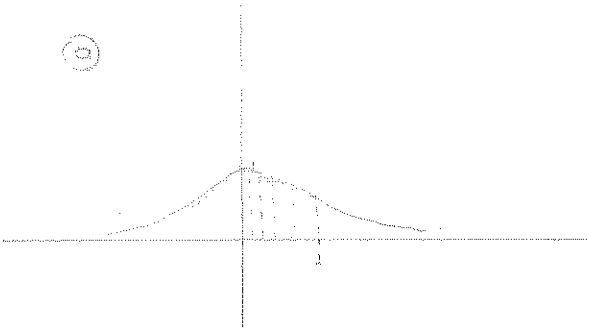
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$\Delta x = \frac{1}{10}$

(a)



(b) $\sum_{n=1}^{10} \Delta x f(x_i) = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1+(n/10)^2} = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1+\frac{n^2}{100}}$

$= \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{\frac{100+n^2}{100}} = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} \frac{100}{100+n^2} = 0,7099$

(c) Si es integrable porque es continua en todo su dominio.

(d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x_0 = ?$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

(a) Verdadero, porque por el T.F.C tenemos que toda función diferenciable es integrable.

(b) Verdadera, porque f es la derivada de F (por el T.F.C), y para que una función sea diferenciable debe ser continua, por lo tanto la función es continua.

(c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p56

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

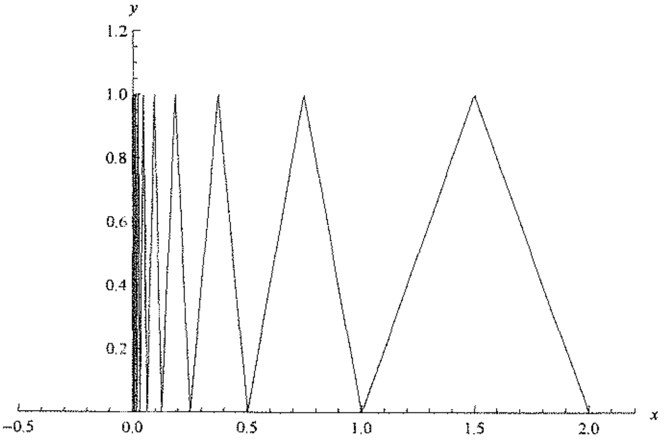


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

p56

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

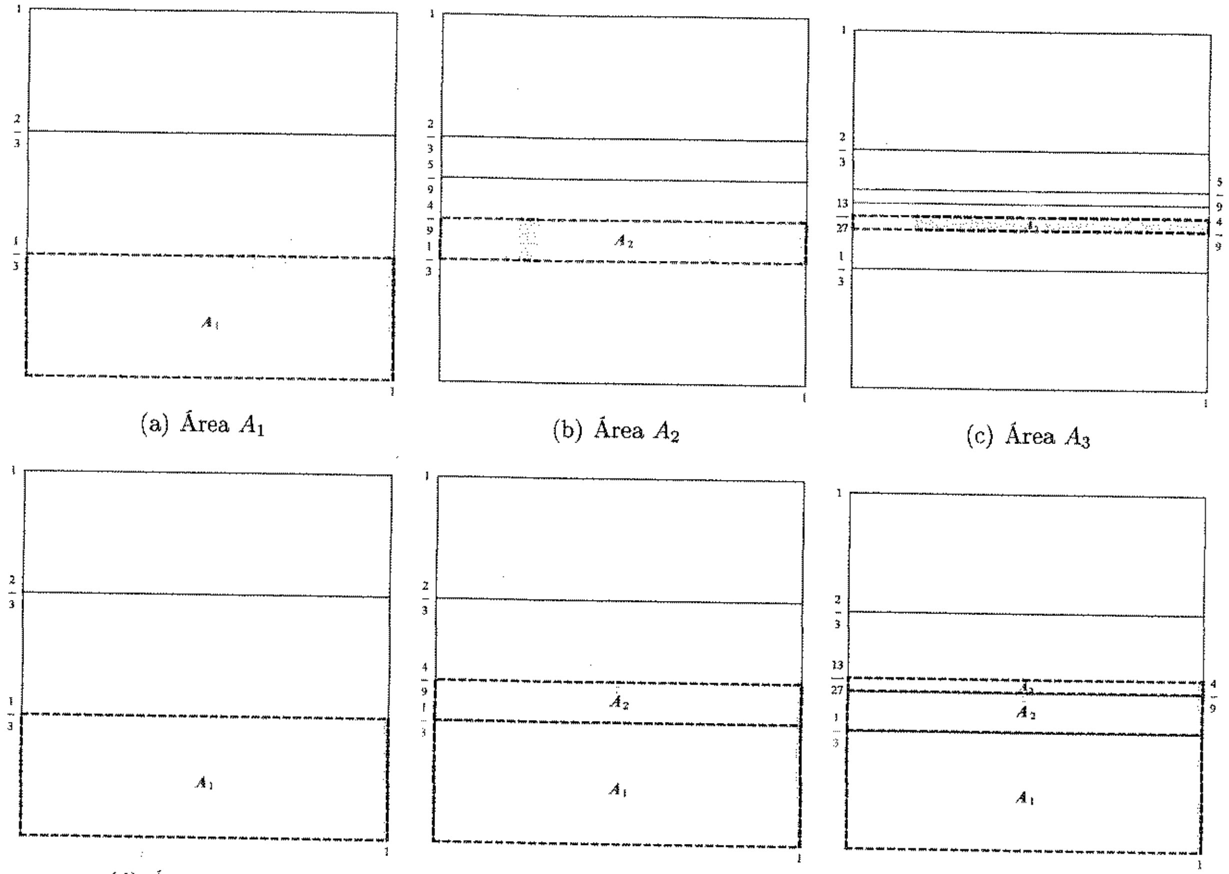
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p56

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Un proceso infinito es aquel que tendría que realizarse reiteradamente por ello existen formas que nos permiten simplificarlo un poco para así poder dar una respuesta.

(57) P57

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:** Analisis

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral [X] | Sucesiones y Series [ ] | Cálculo multivariado [ ] |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a) $[0,\frac{1}{10}) \cup [\frac{1}{10},\frac{2}{10}) \cup [\frac{2}{10},\frac{3}{10}) \cup [\frac{3}{10},\frac{4}{10}) \cup [\frac{4}{10},\frac{5}{10}) \cup [\frac{5}{10},\frac{6}{10}) \cup [\frac{6}{10},\frac{7}{10}) \cup [\frac{7}{10},\frac{8}{10})$
$\cup [\frac{8}{10},\frac{9}{10}) \cup [\frac{9}{10},\frac{10}{10}]$

b) $\frac{1}{10}(f(\frac{1}{10})) + \frac{2}{10}(f(\frac{2}{10})) + \frac{3}{10}(f(\frac{3}{10})) + \frac{4}{10}(f(\frac{4}{10})) + \frac{5}{10}(f(\frac{5}{10})) + \frac{6}{10}(f(\frac{6}{10})) + \frac{7}{10}(f(\frac{7}{10}))$
$+ \frac{8}{10}(f(\frac{8}{10})) + \frac{9}{10}(f(\frac{9}{10})) + f(1)$

c) Si es integrable

d) $F(x) = \tan^{-1}(1)$

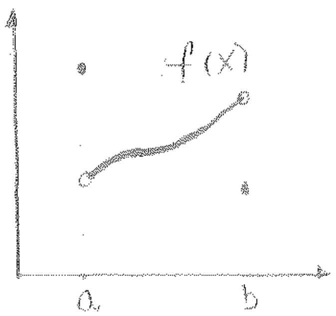
Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a)


f es deferenciable sobre (a,b) y como es diferenciable es continua en el intervalo abierto (a,b), y ademas es integrable solo en (a,b)

b)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

b) es verdadera ya que una funcion integrable necesita ser continua en el intervalo para ser integrable

P5T

PS 7

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

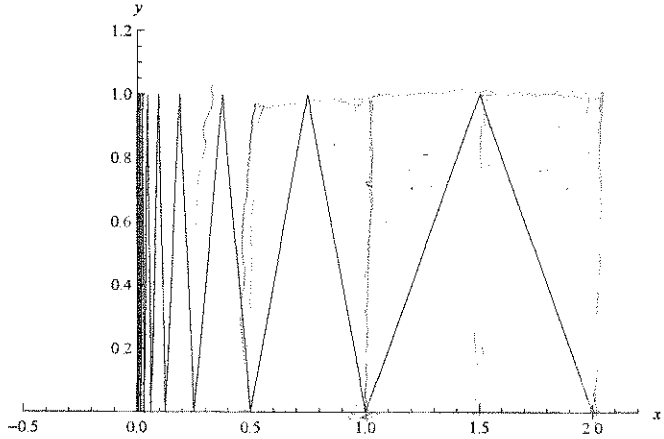


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

c) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^0}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right) + \cdots\cdots \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

P57

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar },0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

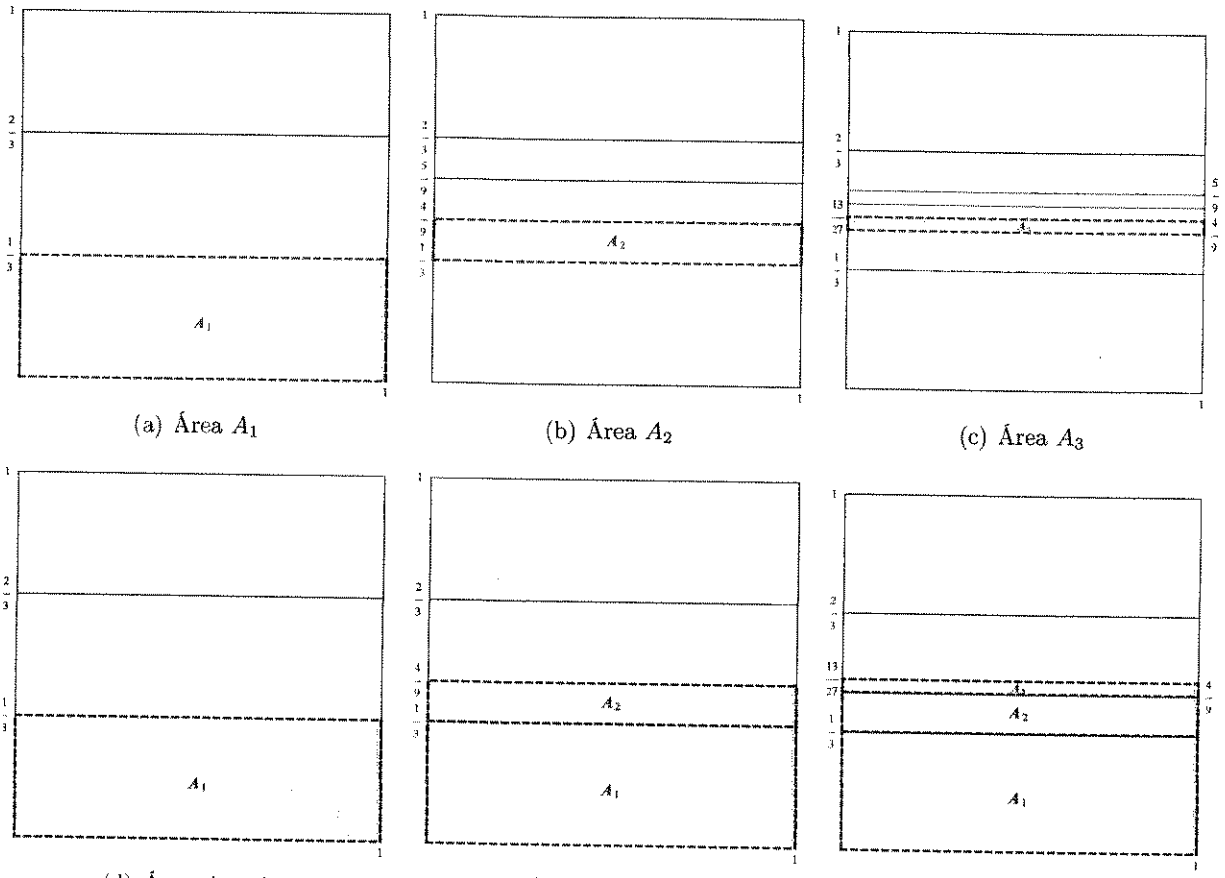
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P57

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(58) P58

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:** Análisis Matemático

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$\int \frac{1}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+\tan^2\theta} d\theta = \int \frac{1}{\sec^2\theta} d\theta = \tan^{-1}\theta \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{10} f(\frac{1}{10}) + \frac{1}{10}(f(\frac{2}{10})) + \frac{3}{10} f(\frac{3}{10}) + \frac{4}{10}(f(\frac{4}{10})) + \frac{5}{10}(f(\frac{5}{10})) + \frac{6}{10}(f(\frac{6}{10})) + \frac{7}{10}(f(\frac{7}{10}))$

$+ \frac{8}{10}(f(\frac{8}{10})) + \frac{9}{10}(f(\frac{9}{10})) + \frac{1}{2}$

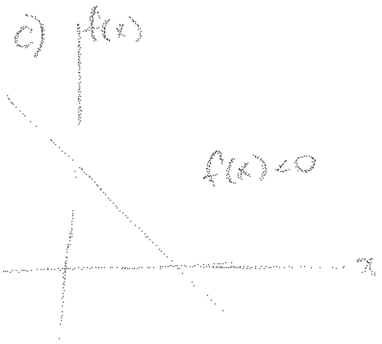
c) Es integrable ya que es continua y derivable

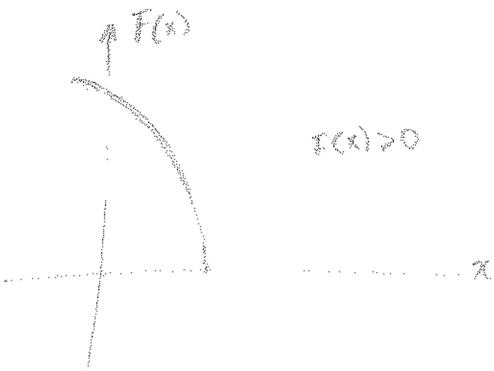
Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   V a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   V b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   F c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

c)





Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p5 8

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

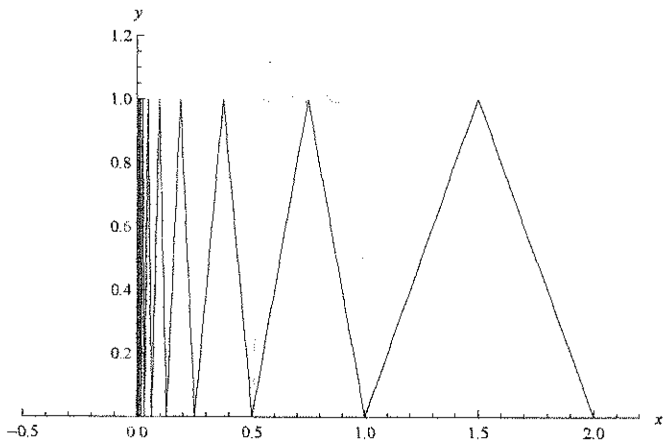


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

$$\frac{x f(x)}{2} \Rightarrow \frac{x}{2^{x+1}}$$

$$\int \frac{x}{2^{x+1}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{2^x} = \left[x 2^x \ln_2 x - 2^x \ln_2 x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^t} dt = \lim_{x\to\infty} \left[2^x \ln_2 x\right]$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

958

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

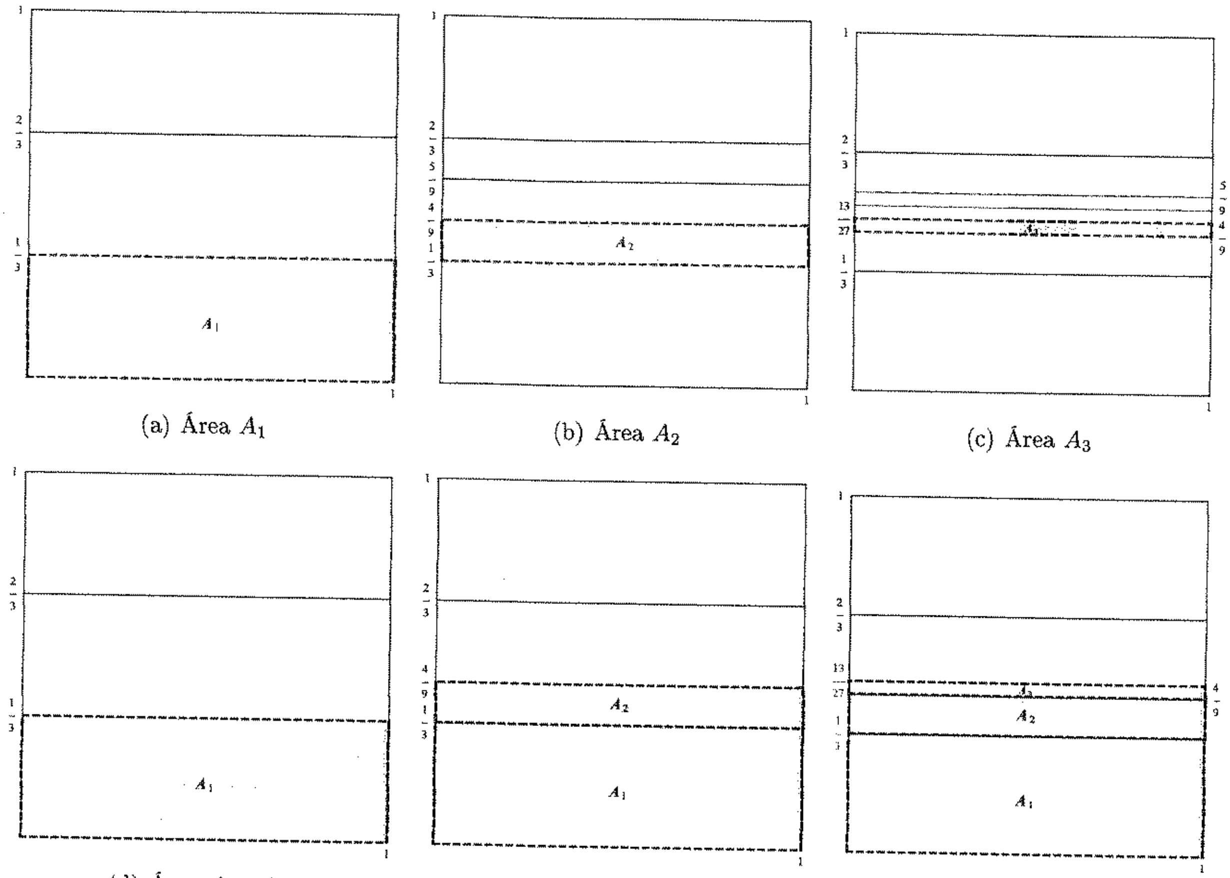
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

PS8

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = 1\left(\frac{1}{3}\right)$

$A_2 = 1\cdot\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{4-3}{9} = \frac{1}{9}$

$A_3 = 1\left(\frac{13}{27} - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{27}$

$A = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{13}{27} - \frac{4}{9}\right) =$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(59)

P59

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:** Análisis 1

Señale con una **X** los temas vistos

Cálculo Integral		Sucesiones y Series		Cálculo multivariado	

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

d) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$, Sea $x = \tan\theta$; $x^2 = \tan^2\theta \Rightarrow \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^2\theta} = \int 1\, d\theta = \theta + C = \operatorname{Arctan}(x) + C$

c) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{Arctan}(x)\Big]_0^1 = \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

b) $\frac{1}{10}(0{,}99 + 0{,}96 + 0{,}91 + 0{,}86 + 0{,}8 + 0{,}73 + 0{,}67 + 0{,}60 + 0{,}55 + 0{,}5) = \underline{0{,}756}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p59

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

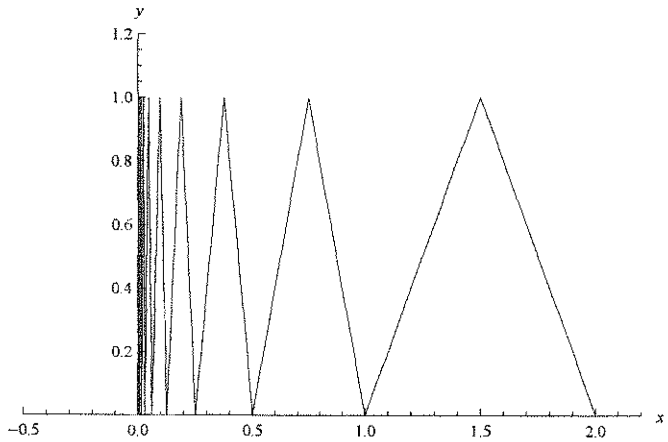


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p59

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Para demostrar Que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, Significa Que $f(x) = 0$, para a Todo $x \in [0,1]$, Entonces vamos a Suponer Que Existe un $x \in [0,1]$ tal Que $x = \frac{k}{2^n}$, pero Como n es fijo entonces Sea $n=2$ y Quedaría

$x = \frac{k}{4}$, $\Rightarrow$ $4x = k$, pero k debe Ser de la forma $4p+1$ $\Rightarrow\Leftarrow$

por lo tanto $f(x)=0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = 0$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.
   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) Como la Sucesión de Fibonacci es Creciente, Entonces $a_{n-1} < a_n$

Entonces $\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1 \Rightarrow 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2 \Rightarrow \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2$

$\frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} < 2 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 2$, Para Cualquier n, luego $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ Es Acotada

b) Es Creciente.

c)

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

p59

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

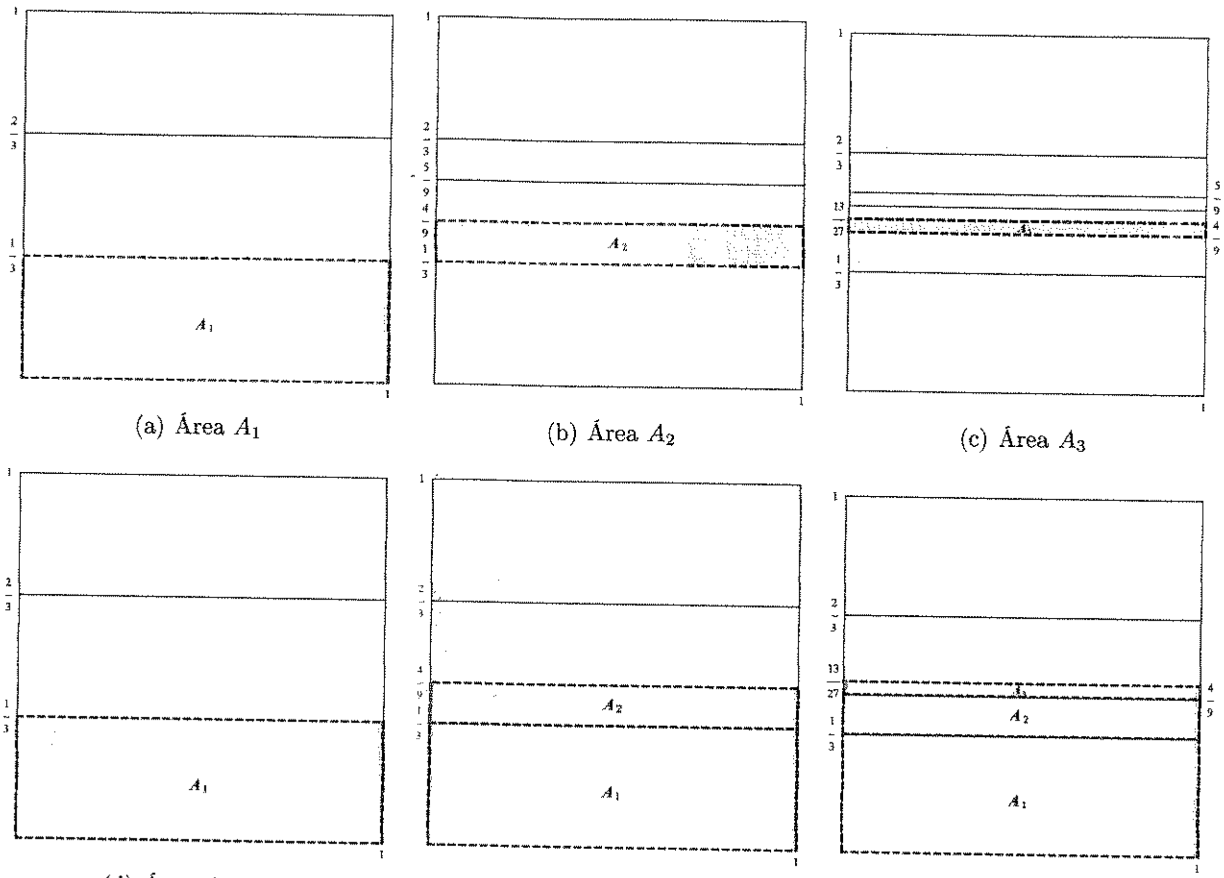


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \quad A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$

$A = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = 1/2$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(60)

P60

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: [redacted] **Curso:** Análisis matemático

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo ~~Integral~~ | | Sucesiones ~~y~~ Series | | Cálculo ~~multivariado~~ | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0,1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0,1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a) Una partición de $[0,1]$ es $P_n=\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}=1\}$

b) Una suma de Riemann para f es $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

c) Como f es continua en $[0,1]$ entonces f es integrable en $[0,1]$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable en (a,b).
   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a,b]$.
   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]\bigcap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Si f es diferenciable en (a,b) entonces f es continua en (a,b), como la continuidad implica integrabilidad entonces f es integrable en (a,b).

b)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p60

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

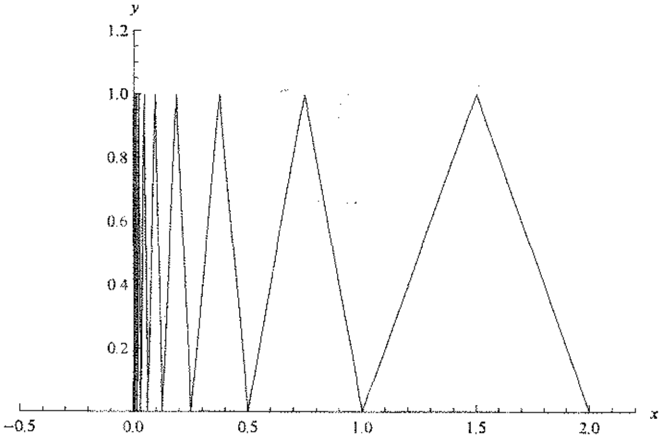


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}}{2} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2^n} = \frac{3}{2^{n+1}}$$

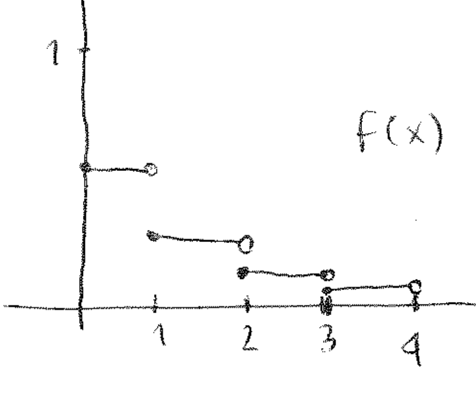
a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a)

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$



Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P6

Al ser f escalonada en $[0, \infty)$, se tiene que para $a \in \mathbb{Z}^+$

$$\int_0^a f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{a} \frac{1}{2^k} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{a+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - 1 = \frac{\frac{1}{2^{a+1}} - 1}{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1 - \frac{1}{2^{a+1}}}{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{2^{a+1} - 1}{2^a} - 1 = 1 - \frac{1}{2^a}$$

Si $a \notin \mathbb{Z}^+$ entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < a < n+1$, luego

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^n f(x)\,dx + \int_n^a f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + (a-n)\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 + (a-n)\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{(a-n)}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} - 1$$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{a \to \infty} 1 - \frac{1}{2^a} = 1$$

P6 ②

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Tenemos que $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo tanto $a_n + a_{n-1} > 0 + a_n = a_n$ entonces $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

luego $a_{n-1} < a_n$, como a_{n-1} y a_n son positivos entonces $\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$, luego

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1 + 1 = 2, \text{ por tanto}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, con lo cual la sucesión $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ es acotada

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

b) Sea $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, ~~considere~~mos entonces

$$\cancel{(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \frac{a_5}{a_4} \right\}}$$

$\cancel{a_2 < a_4}$

$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{ 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}; \right\}$, observamos que $x_1 = 1 < \frac{5}{3} = x_4$, pero $x_2 = 2 > \frac{8}{5} = x_5$, por lo tanto la sucesión no es ~~monótona~~ ni creciente ni decreciente, entonces no es monótona.

c) Podemos ver que la subsucesión (x_{2n}) es decreciente, mientras que (x_{2n+1}) es creciente, como (x_{2n}) está acotada ~~superiormen~~ inferiormente por 0 y (x_{2n+1}) está acotada superiormente por 2. entonces (x_{2n}) y (x_{2n+1}) convergen, y ~~ambas luego (x_n) converge~~ también tenemos que:

$$x_{2(n+1)} = x_{2n+2} = \frac{a_{2n+3}}{a_{2n+2}} = \frac{a_{2n+2} + a_{2n+1}}{a_{2n+2}}$$

$$= 1 + \frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n}}}$$

Como (x_{2n}) converge entonces la subsucesión (x_{2n+2}) converge y ambas convergen a algún l, por tanto

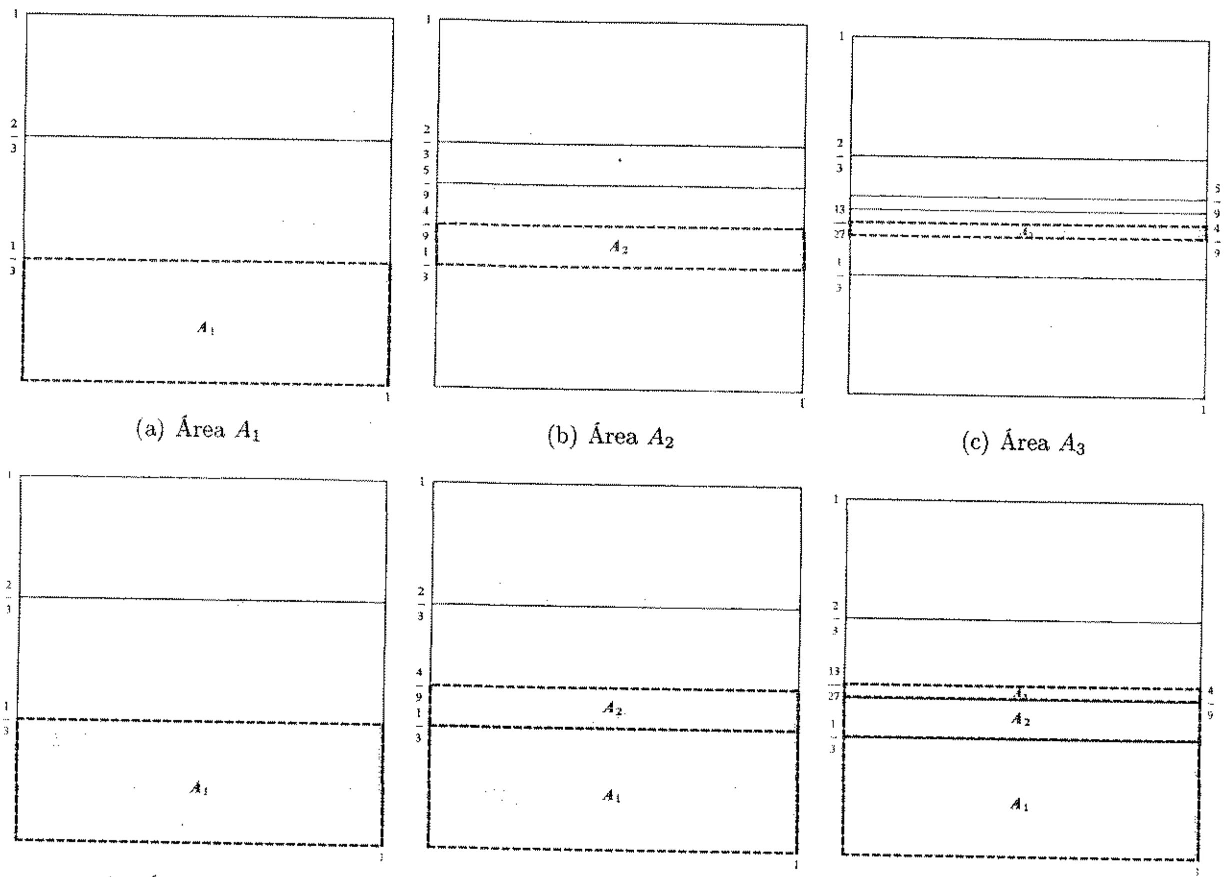
$$l = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{l}} \qquad l = 1 + \frac{1}{\frac{l+1}{l}}$$

$$\cancel{l = \frac{1}{l+1} \quad \frac{l}{l+1}} \qquad l = 1 + \frac{l}{l+1}$$

$$l = \frac{2l+1}{l+1} \qquad l^2 + l = 2l + 1 \qquad l^2 - l - 1 = 0$$

P60

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ $A_2 = 1\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) = 1\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}$,

$A_3 = 1\left(\frac{13}{27} - \frac{4}{9}\right) = 1\left(\frac{1}{27}\right) = \frac{1}{27}$, observamos que $A_n = \frac{1}{3^n}$;

por tanto $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{\frac{2}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Continuación del 1.c de sucesiones

$$l = \frac{1+\sqrt{1^2-4(-1)}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ como todos los términos son positivos tomamos solo la solución positiva, luego $(x_{2n}) \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$x_{2(n+1)+1} = \frac{a_{2n+4}}{a_{2n+3}} = 1 + \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+3}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{2n+3}}{a_{2n+2}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2n+1}}}$$, como

la sucesión (x_{2n+1}) converge, entonces (x_{2n+3}) converge ~~lue~~ luego ambas subsucesiones convergen a un m, por tanto

$$m = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{m}} \qquad m = 1 + \frac{1}{\frac{m+1}{m}}$$

$$m = 1 + \frac{m}{m+1} \qquad m = \frac{2m+1}{m+1} \qquad m^2+m = 2m+1$$

$$m^2 - m - 1 = 0$$

Y la solución positiva es $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, por tanto $(x_{2n+1}) \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, como las subsucesiones par e impar convergen ambas a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ entonces $(x_n) \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(61)

P61

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

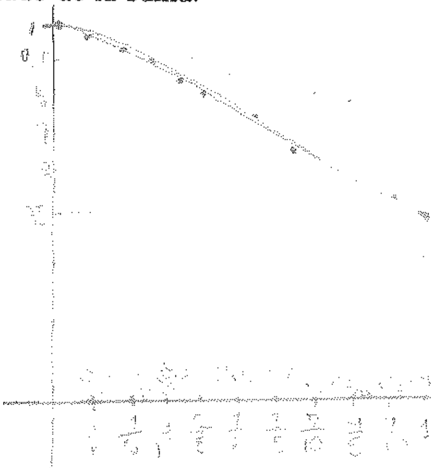
La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:** Análisis Matemático

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?



a. $[0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{4}, \ldots) \cup \ldots \cup [\ldots, 1]$

b. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{10}\left[f(\frac{1}{10}) + f(\frac{1}{5}) + \ldots + f(\frac{1}{2}) + \ldots + f(1) \right] = 0{,}76$

c. f si es integrable en el intervalo $[0,1]$

d. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ $x = \tan\theta$ $= \int_0^1 \ldots = \int_0 d\theta = \theta + c = \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b). (F)
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$. (V)
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

6λ

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

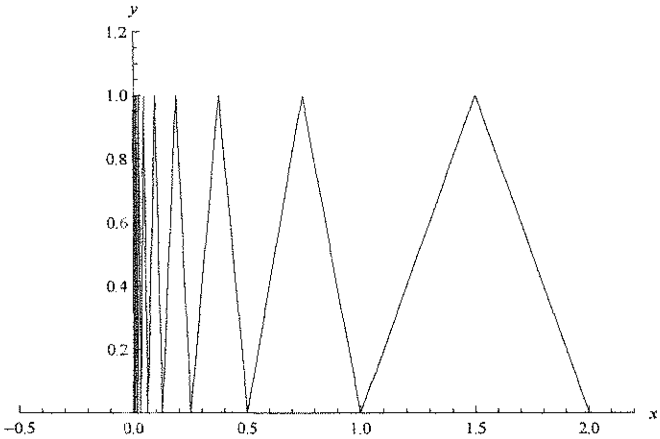


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

61

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

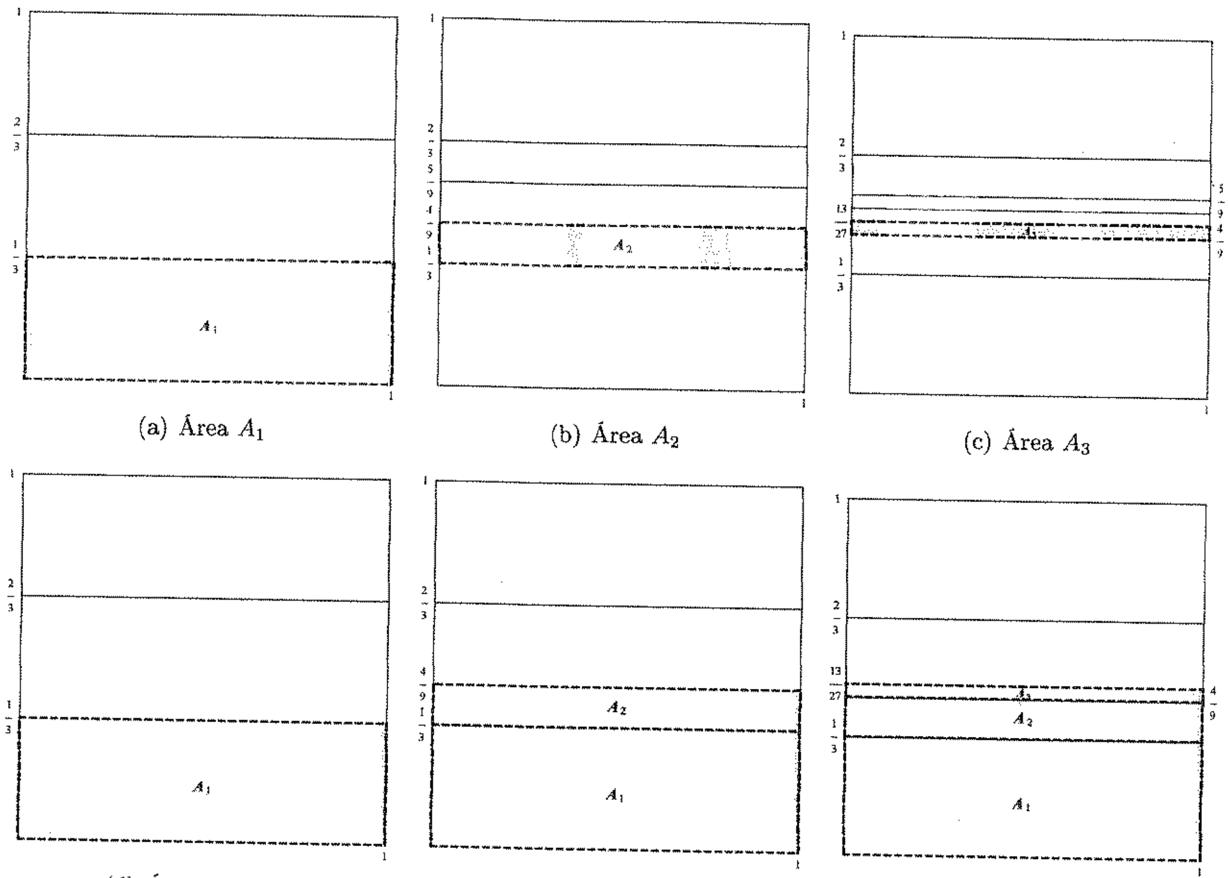
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a. la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada al número áureo

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

61

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

→ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3^3} \ldots \quad f(x) = \frac{1}{3^x}$

→ $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

$= \int_{1}^{\infty} \frac{1}{3^x}\, dx =$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

→ Un proceso infinito, es aquel procedimiento que se repite indefinidamente, pero que el hombre a llegado a "acotar" para dar solución a dicho proceso.

(62)

P62

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:__________ **Curso:** Analisis Matematico

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | X |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

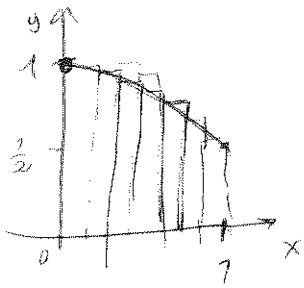
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$\frac{1}{1+x^2}$ en $[0,1]$



Para $n=10$
cada intervalo $\boxed{\frac{1}{10}}$ Por izquierda.

$\frac{1}{10} \times f(\frac{1}{10})$ = Primer intervalo

↓

al respaldo

Calificación de la dificultad | 1 | X | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

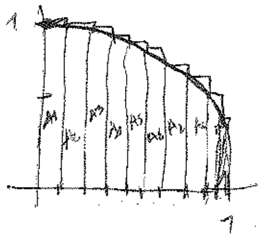
√ a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

F b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

F c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | X |

Por la justificación.

$\frac{1}{1+x^2} \rightarrow$ 

$n=10$

Cada intervalo $\frac{1}{10}$, y Por la izquierda. p62

$A_1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1+(0)^2}$ con $x=0$. $= \frac{1}{10}$.

$A_2 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{\frac{101}{100}} = \frac{1}{\frac{101}{10}} = \frac{10}{101}$

integrable, al ser ~~cont~~

$\forall x$, $f(x) \in \mathbb{R}$.

$A_3 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1+\left(\frac{2}{10}\right)^2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1+\frac{4}{100}} = \frac{1}{\frac{104}{10}} = \frac{10}{104}$

$A_4 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1+\left(\frac{3}{10}\right)^2}$ - - - - -

entonces

$$\frac{1}{10} \boxed{\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{10}\right)^2}} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{4}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{5}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{6}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{7}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{8}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{9}{10}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{10}{10}\right)^2}\right.$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{\frac{101}{100}} + \frac{1}{\frac{104}{100}} + \frac{1}{\frac{109}{100}} + \frac{1}{\frac{116}{100}} + \frac{1}{\frac{125}{100}} + \frac{1}{\frac{136}{100}} + \frac{1}{\frac{149}{100}} + \frac{1}{\frac{164}{100}} + \frac{1}{\frac{181}{100}} + \frac{1}{\frac{200}{100}}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{100}{101} + \frac{100}{104} + \frac{100}{109} + \frac{100}{116} + \frac{100}{125} + \frac{100}{136} + \frac{100}{149} + \frac{100}{164} + \frac{100}{181} + \frac{100}{200}\right)$$

$$= \frac{10}{101} + \frac{10}{104} + \frac{10}{109} + \frac{10}{116} + \frac{10}{125} + \frac{10}{136} + \frac{10}{149} + \frac{10}{164} + \frac{10}{181} + \frac{10}{200}.$$

$$= \boxed{0{,}76}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \int_0^1 \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} = \int_0^1 d\theta \quad -\theta$$

$$\Rightarrow x = \tan\theta \rightarrow \theta = \tan^{-1}(x)\Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4}$$

p62

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

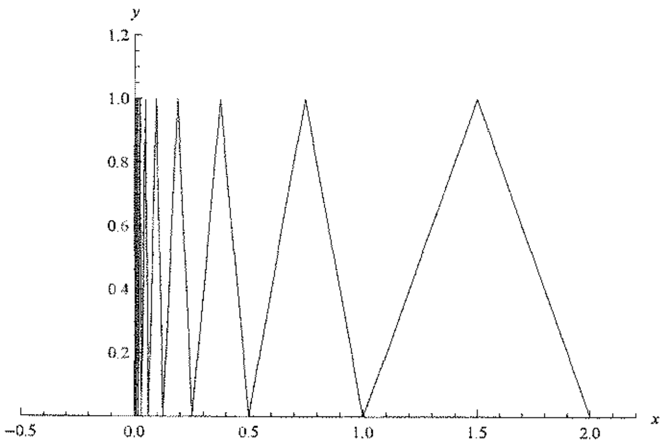


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

$\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}$ valor de la integral:

altura

$\frac{1 \times \text{Base}}{2.} \rightarrow \frac{1}{2} \times \text{Base}.$ y la base corresponde a. $(2^n - 2^{n-1})$ luego al ser

no esta acotada

$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2^n - 2^{n-1})} \rightarrow \frac{1}{2}\int_1^{\infty} 2^x - 2^{x-1} \rightarrow$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^n} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{f}{2}x$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P62

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$\int_0$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

3), $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to$ como a_1 y $a_2 > 0$. $\wedge$ $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

$a_{n+1} > a_n$ $\wedge$ $a_{n+1} > a_{n-1}$. entonces. $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

acotada inferiormente.

1) $\frac{a_n}{a_n} = 1$ y 2) $\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n}$. dos Sucesiones.

$\frac{a_{n-1}}{a_n} \leq 1$ entonces esta acotada superiormente.

b) a_1 y $a_2 > 0$, $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_3 + a_2$. $a_5 = a_4 + a_3 \ldots$

además.

$a_3 > a_1 \wedge a_3 > a_2$, $a_4 > a_3$, $a_5 > a_4$. Por transitiva $a_n > a_{n-1} \ldots a_2$

Calificación de la dificultad 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ¿es monotona Creciente o decreciente? Pb2

$a_{n+1} > a_n \ \forall n$ luego $a_{n+1} > a_n > a_{n-1} \ldots > a_1$.

es monotona creciente.

c) converge al numero aureo.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x_n+1}{x_n} = \left(\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} \frac{x_n}{x_n} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x_n}. \\ \lim_{x\to\infty} \frac{x_n}{x_n} = 1 \ , \ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0. \end{array} \right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x_n+1}{x_n} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x_n}{x_n} + \frac{1}{x_n} \right) = \boxed{1 + \frac{1}{x_n}}$$

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

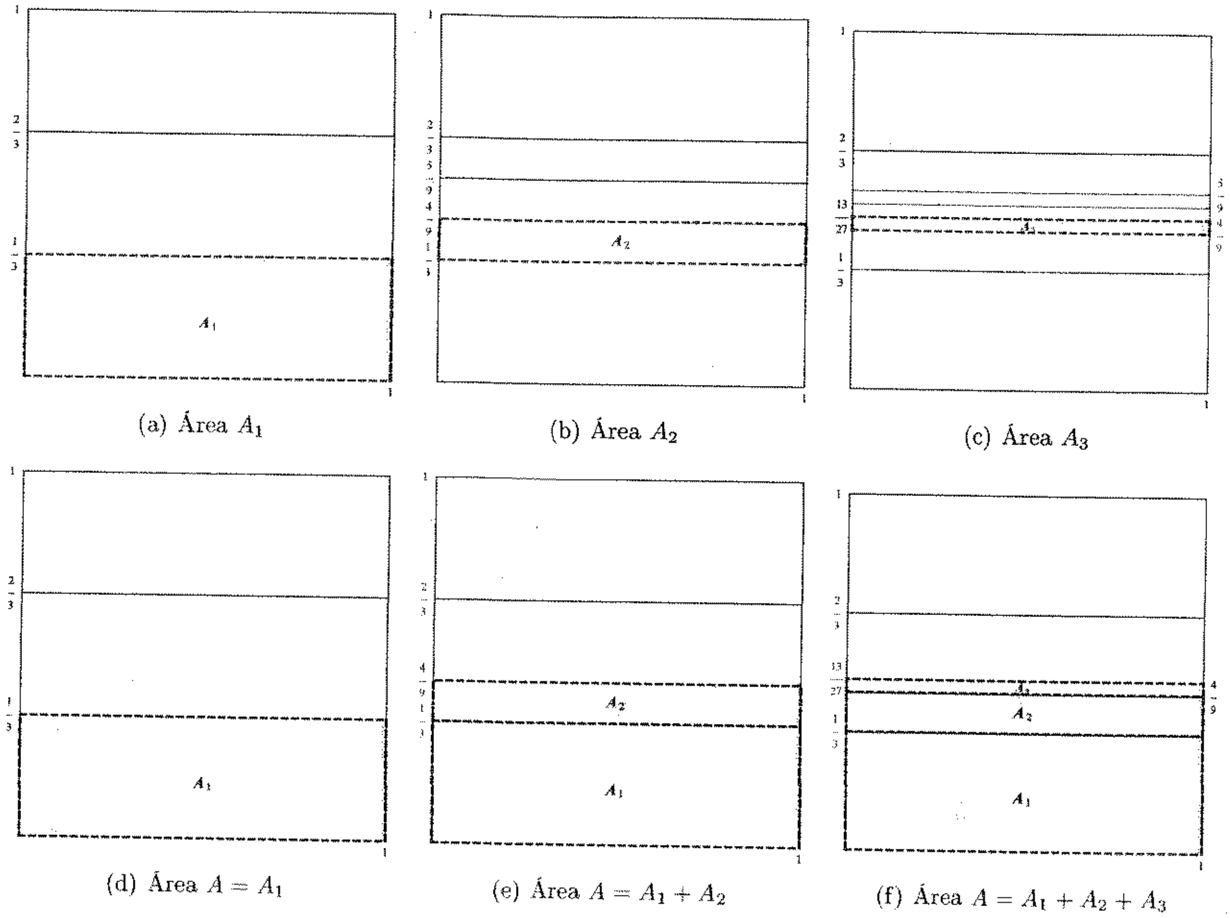


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Base

a) $A_1 = 1 \times \left(0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

b) $A_2 = 1 \times \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{3}\right) - A_1\right]$

$A_3 = 1 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3}$

d) $A_4 = \frac{1}{3} +$

e) $A_5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

f) $A_6 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Un proceso infinito asumo que hace referencia a procesos que no tienen fin, que cambian en el tiempo.

(63) P63

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre: ______________ **Curso:** Análisis

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | X |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

a) $[0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \cup [\frac{3}{4}, 1]$

b) $\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\left[\frac{1}{1+n^2}\right] = \frac{1}{10}\left[f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{3}{10}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{7}{10}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f\left(\frac{9}{10}\right) + f(1)\right] = 0,76$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) es falso
b) es verdadero
c) es verdadero

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

1a).

p63

$$= \int_0^1 f(x)\,dx \qquad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \begin{array}{l} x = \tan\theta \\ dx = \sec^2\theta\,d\theta \end{array} \longrightarrow \theta = \tan^{-1}(x)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+\tan^2\theta} \sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int_0^1 d\theta = \theta + C = \tan^{-1}(x)\Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

P63

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

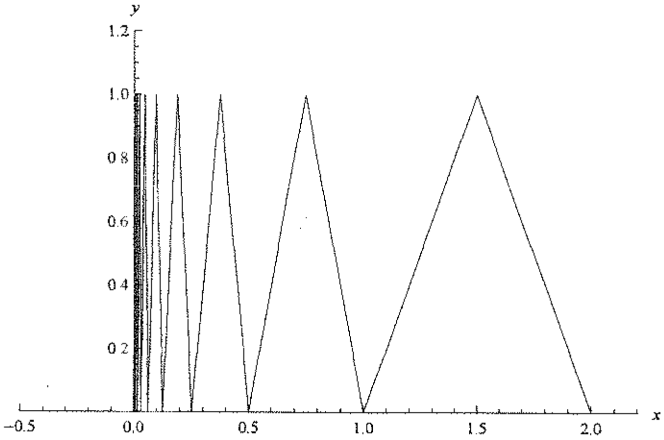


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^x}dx = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^0}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} - 1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} - \lim\limits_{x\to\infty} 1$

$= -(-1) = 1$

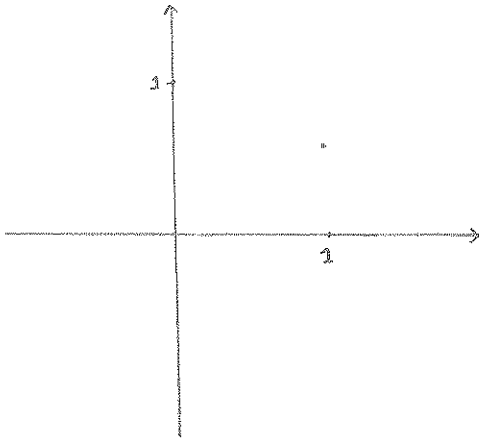
Calificación de la dificultad 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5

p63

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.



Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 2$
$a_4 = 3$
$a_5 = 5$
$a_6 = 8$
$\vdots$
$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$\frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5}$

$\frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3}$

b)

$a_{n+1} > a_n$

$a_n > a_{n-1}$

Luego $a_{n+1} > a_n > a_{n-1} > \ldots > 1$

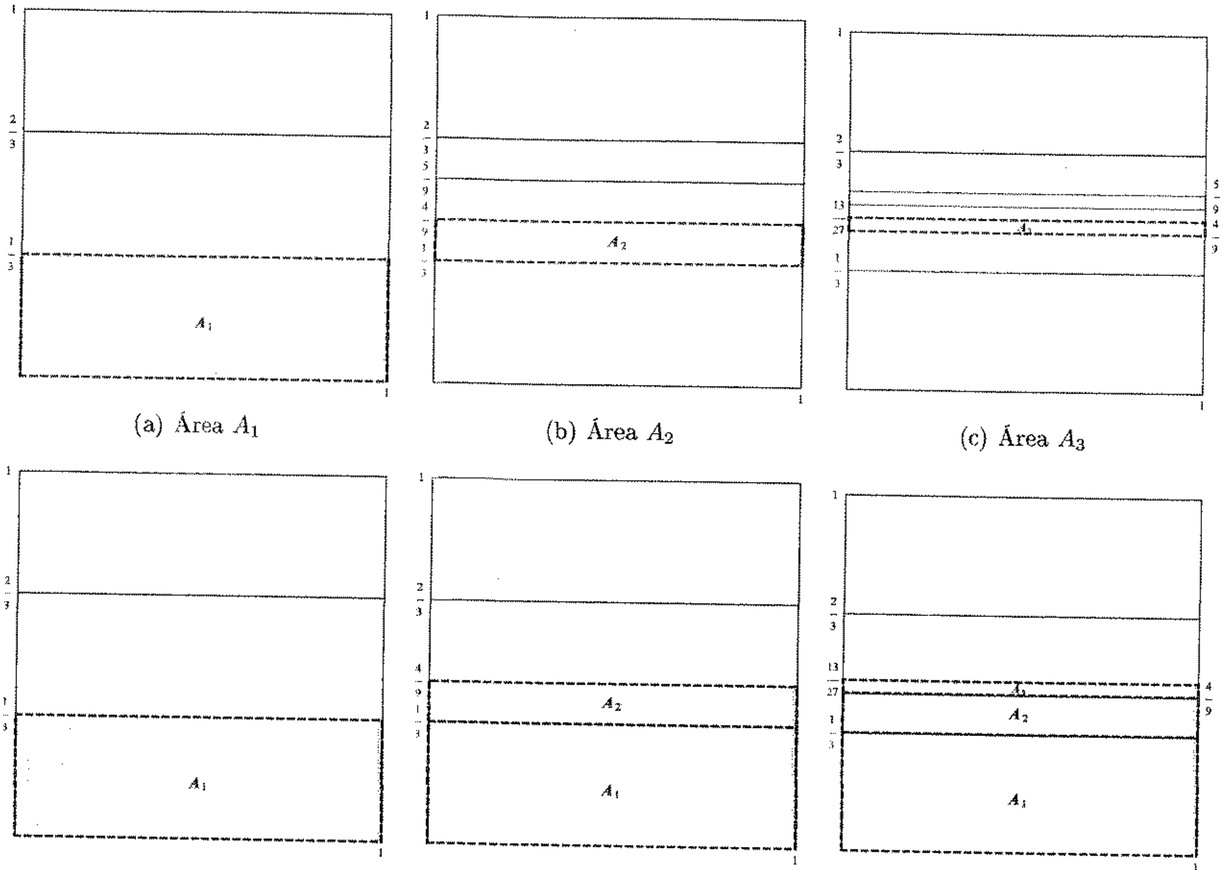
Por tanto la sucesión es monótona creciente

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5

p63

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{3x} = \lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{1}{3^x} dx$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Un proceso infinito es aquel que se repite un innumerable número de veces y por ende no se puede llegar a su terminación.

(64)

P64

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:** Análisis

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

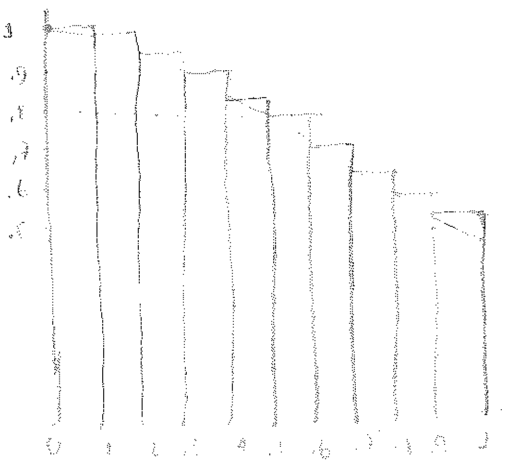
1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?



$\sum_{n=0}^{9} \frac{1}{1+x^2} \approx 1 + 0{,}99 + 0{,}96 + 0{,}91 + 0{,}86 + 0{,}8 + 0{,}73 + 0{,}67 + 0{,}6 + 0{,}55$

8,07 , Si es integrable

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) verdadero
si f es diferenciable en $(a,b) \to f$ es continua en (a,b) por lo cual f es integrable en (a,b)

b) Verdadero,

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

p64

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

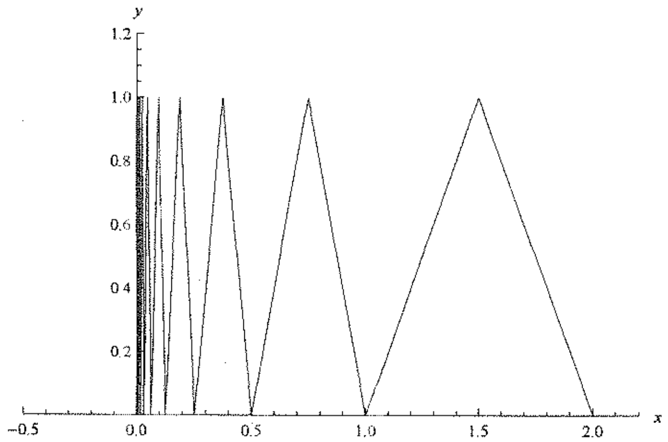


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

$x - 2 =$

$a = (\frac{1}{2^n}, 0)$

$b = (\frac{n+(n-1)}{2}, 1)$

$\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2^n}}$

Para el intervalo $(n, n-1)$

$x \leq \frac{n+(n-1)}{2}$, $\frac{1}{\frac{2n-1}{2} - \frac{1}{2^n}} x - \frac{1}{2^n}$

$x > \frac{n+(n-1)}{2}$, $-\frac{1}{\frac{2n}{2} - \frac{1}{2^n}} x - \frac{1}{2^n}$

$1, 0$ $(n, n-1)$

$(0.5, 1)$

$(2, 1) - (n, n-1)$

$(0, 1)$

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cancel{3}}\boxed{4}\boxed{5}$

p64

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

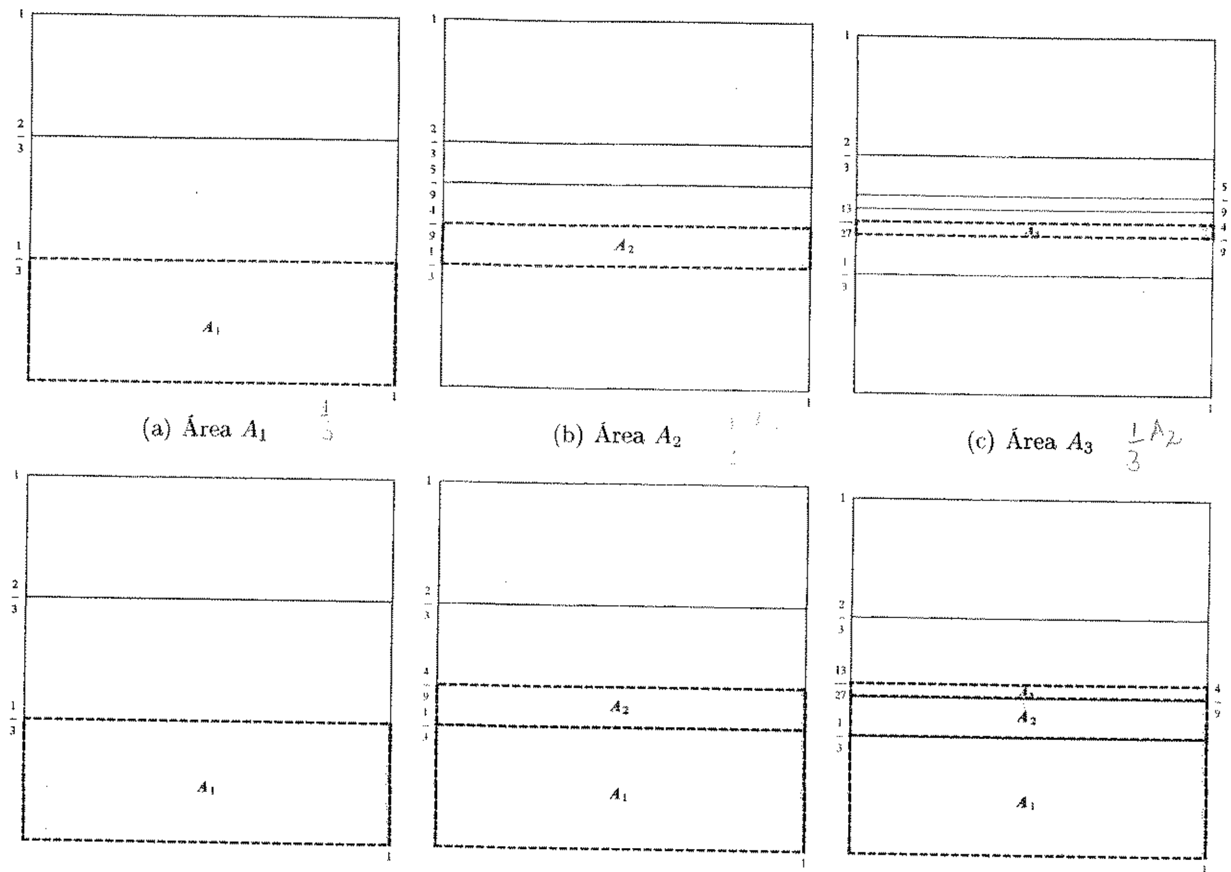
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p64

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1

(b) Área A_2

(c) Área A_3 $\frac{1}{3}A_2$

(d) Área $A = A_1$

(e) Área $A = A_1 + A_2$

(f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Sé que converge, no recuerdo como hallar el valor al que converge

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

La integral definida es un proceso infinito, Una sucesión que convergue es un proceso infinito que tiene como resultado el valor de la convergencia.

$\frac{1}{1+x^2}$, $f(0) = 1$

$f(1) = \frac{1}{2} = 0.5$

$f(0{,}1) = \frac{1}{1{,}01} = 0{,}990099$

$f(0{,}2) = \frac{1}{1{,}04} = 0{,}9615385$

$f(0{,}3) = \frac{1}{1{,}09} = 0{,}9174$

$f(0{,}4) = \frac{1}{1{,}16} = 0{,}8620$

$f(0{,}5) = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$

$f(0{,}6) = 0{,}7352$

$f(0{,}7) = 0{,}6711$

$f(0{,}8) = 0{,}6097$

$f(0{,}9) = 0{,}5524$

P64

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1+x^2)^{-1} dx = \ln|1+x^2|$

$\ln|2| - \ln|1|$

c). $\int_a^b x^2 dx \rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b \quad \frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3}$

(65)

P65

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:** Análisis Matemático.

Señale con una **X** los temas vistos | ~~Cálculo Integral~~ | X | ~~Sucesiones y Series~~ | X | Cálculo multivariado | X |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b). $\lim_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{1+x^2}$

c). como $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en $[0,1]$ entonces es integrable

d). $\int_0^1 f(x) = \int \frac{1}{1+y^2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | X | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

No se muestra que si es diferenciable tenga que ser integrable

Verdadero ya que al ser integrable en el intervalo (a,b) permite que la integral sea continua en todos sus puntos

Calificación de la dificultad | X | 2 | 3 | 4 | 5 |

p65

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

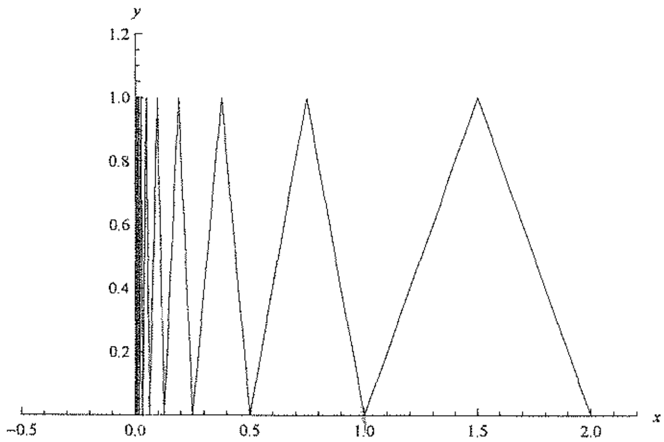


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n}dt = \lim_{x\to\infty} \left.\frac{1}{2^n}t\right]_0^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2^n}x - 0\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^n}x$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

pb5

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$n = 1$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases}$ $\quad x = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad n=2$

$\frac{1}{2}$ $\quad 1$

$n = 2$

$f(x) \begin{cases} \frac{1}{4} \end{cases}$ $\quad x = \frac{1}{4}, \frac{3}{}$ $\quad 0 < k < 4$ $\quad 1, 3 \to$ Impares

$n = 3$ $\quad f(x) \begin{cases} \frac{1}{3} \\ 0 \end{cases}$ $\quad x = \frac{1}{}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

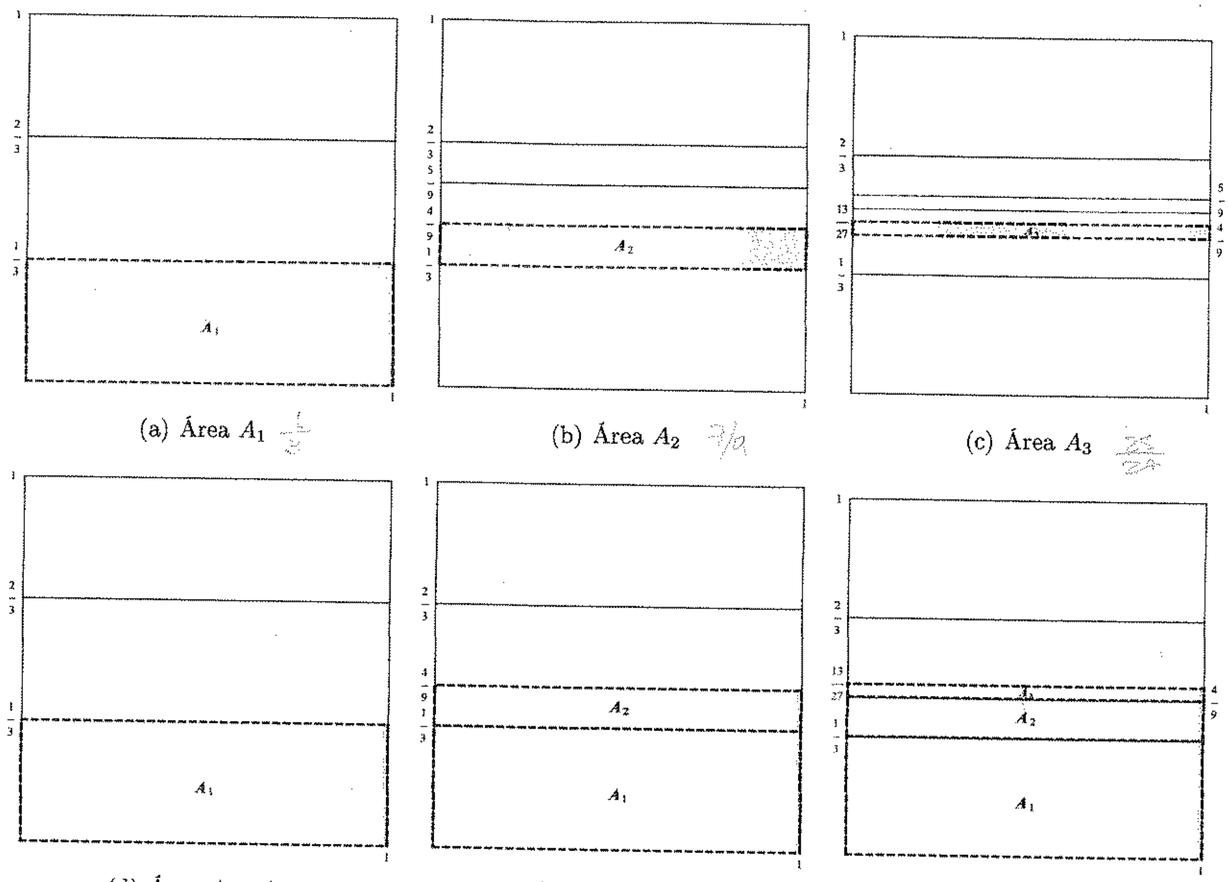
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p65

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 $\frac{1}{3}$

(b) Área A_2 $7/12$

(c) Área A_3 [illegible]

(d) Área $A = A_1$

(e) Área $A = A_1 + A_2$

(f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

d). $A = \frac{1}{3}$.

e) $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$

f). $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{2}{27} = \frac{10}{9} + $ [illegible] $=$ [illegible]

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

(66)

P66

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:________________________________ **Curso:**________________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad x^2 = \tan^2\theta,\quad x = \tan\theta,\quad dx = \sec^2\theta$$

$$\int_0^1 \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \int_0^1 d\theta = \theta\Big]_0^1$$

$$= \arctan x\Big]_0^1$$

$$= \arctan 1 - \arctan 0 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Si f es diferenciable siempre es ... que f es integrable

b) Verdadero.

c) falso.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

P66

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

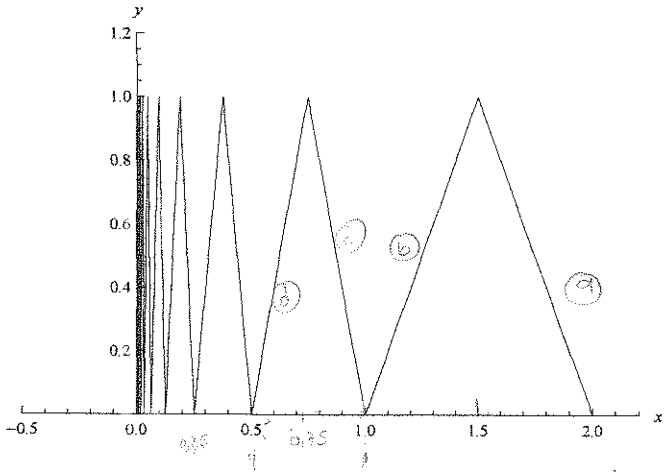


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

$[1, 2]$ $[\frac{1}{2}, 1]$ $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$

* $(2,0)$ $(1.5, 1)$
$m = \frac{1}{-0.5} = -2$
$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 0 = -2(x - 2)$
$y = -2x + 4$, (a)

* $(1.5, 1)$ $(1, 0)$
$m = \frac{1}{0.5} = 2$
$y - 0 = 2(x - 1)$
$y = 2x - 2$, (b)

* $(1, 0)$ $(0.75, 1)$
$m = \frac{1}{0.25 - 1} = \frac{1}{-0.25} = -4$
$y = -4(x - 1)$
$y = -4x + 4$, (c)

* $(0.75, 1)$ $(0.5, 0)$
$m = \frac{1}{0.25} = 4$
$y - 0 = 4(x - 0.5)$ (d)
$y = 4x - 2$

$(0.5, 0)$ $(0.375, 1)$
$m = \frac{1}{-0.125} = -8$
$y = -8x + 4$
$(0.25, 0)$ $(0.375, 1)$
$y = 8x - 2$

$\begin{cases} y = 2^n - 2 & \text{pendientes positivos} \\ y = -2^n + 4 & \text{negativos} \end{cases}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\lim_{x \to \infty} \int_0^x \frac{1}{2^n} dn = \infty$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p66

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior? Es monótona creciente

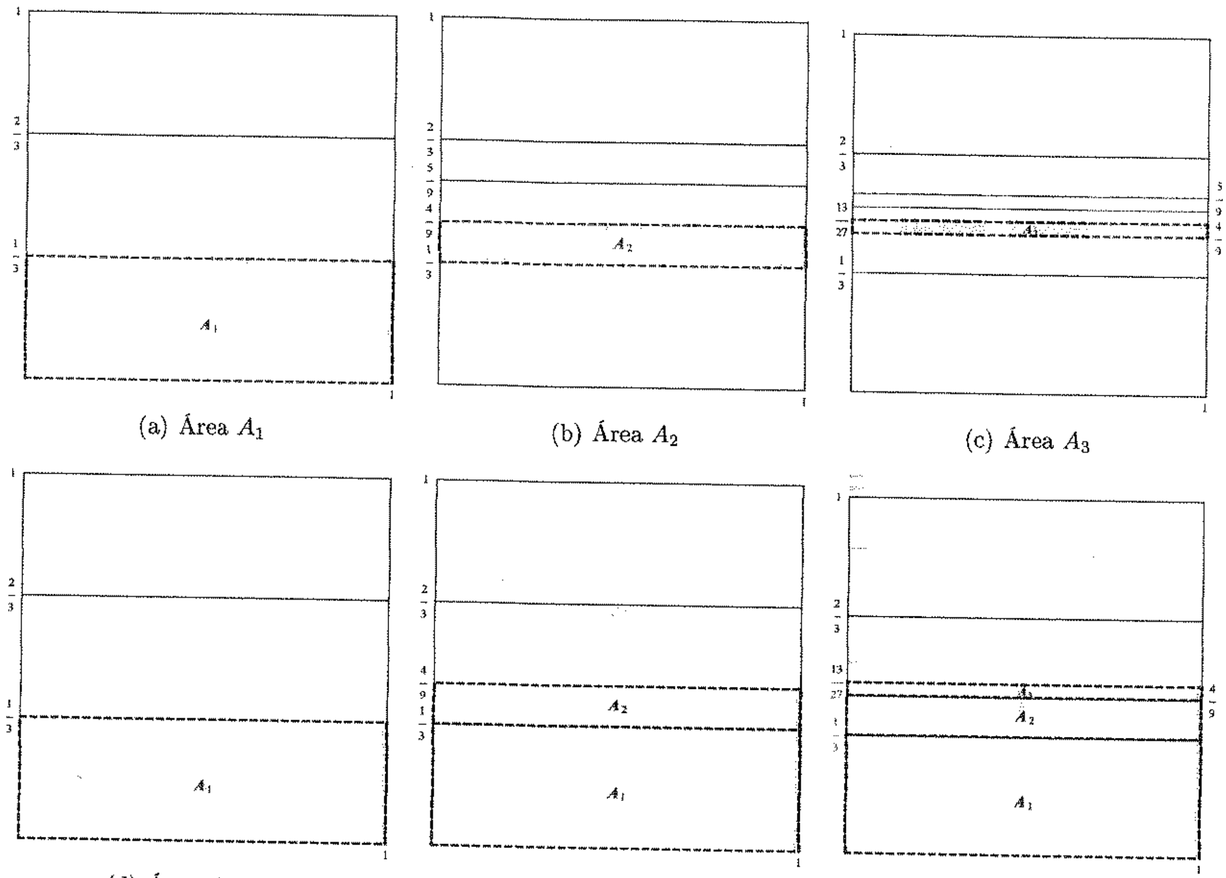
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Creciente.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

P66

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2). el área tiende a 0,5



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A = \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{13}{27} - \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{40}{81} - \frac{13}{27}\right) + \ldots$

$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} = 0.5$

$n \neq 0$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Un proceso que nunca termina, no tiene fin.

(67)

P67

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________________________ **Curso:**__________________

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ $\qquad x = a\tan\theta$ $\qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

$x = \tan\theta.$ $\qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta.$

$dx = \sec^2\theta.$

$$\int_0^1 \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \int_0^1 \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} = \int_0^1 d\theta = \theta\Big|_0^1 = \tan^{-1}x\Big|_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b). Verdadero

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$. Verdadero

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. falso

a) si f es diferenciable siempre si no dice que f es integrable, luego es verdadero.

b) Verdadero

c) falso

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p67

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

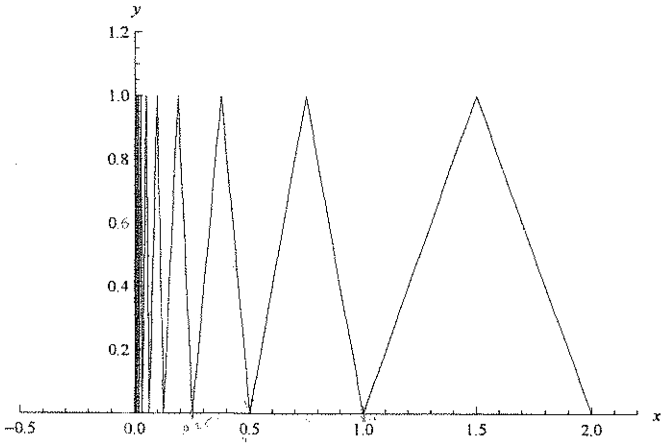


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

$[1, 2]$

$[\frac{1}{2}, 1]$

$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

(1.0;0) (1.5;1) (1.5;1) (2.0;0)

$\frac{1}{0.5} = 2$ $\frac{-1}{0.5} = -2$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y = -2(x-2)$

$y = -2x+4$

$y = 2(x-1)$

$y = 2x-2$

$y = 2^n - 2$ positivos

$y = -2^n + 4$ negativos

(0.5;0) (0.75;1) (1.0;0) (0.75;1)

$\frac{1}{0.25} = 4$ $\frac{1}{-0.25} = -4$

$y = -4(x-1)$

$y = 4(x-0.5)$

$y = 4x-2$ $y = -4x+4$

(0.25;0) (0.375;1)

$\frac{1}{0.125} = 8$

$y = 8(x-0.25)$

$y = 8x-2$ $y = -8x+4$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n} dn = \infty$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

pb7

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p67

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

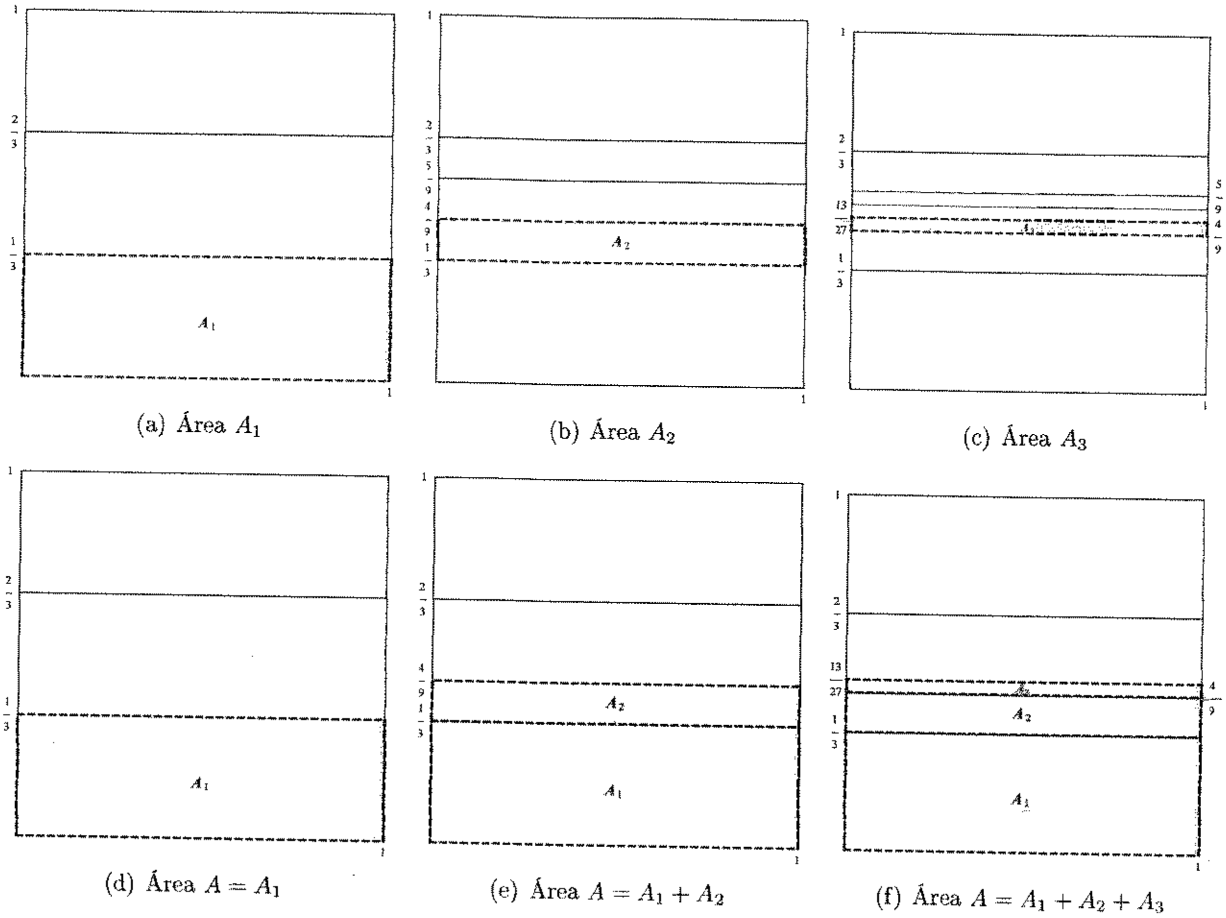


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A = \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{13}{27} - \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{40}{81} - \frac{13}{27}\right) + \ldots\ldots$

$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots.$

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | $\cancel{4}$ | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

un proceso que nunca termina.

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y
Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:** Análisis

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | X | Sucesiones y Series | X | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.

   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.

   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.

   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b) $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{1+x_i}\right)$ [illegible]

c) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \to$ Si es integrable en ese intervalo porque f es continua en él

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = 0{,}785 - 0 = 0{,}785$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | X | 4 | 5 |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Para que una función sea diferenciable tiene que ser continua. Para [illegible] sea [illegible] también tiene que ser continua. Luego si es diferenciable entonces es integrable. Verdadera la afirmación.

b) Verdadera

c) Verdadera

Calificación de la dificultad | 1 | X | 3 | 4 | 5 |

p68

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

$$\frac{1.0-0}{1.5-1.0} = \frac{1.0}{0,5} = 2$$

$$\boxed{\frac{1.0-0}{0,75-0,5} = \frac{1.0}{0,25} = 4}$$

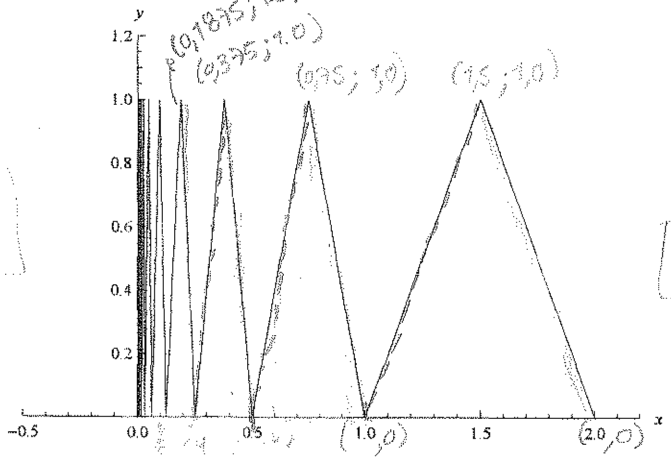


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{0-1.0}{2.0-1.5} = \frac{-1.0}{0,5} = -2$$

$$\boxed{\frac{0-1.0}{1.0-0,75} = \frac{-1.0}{0,25} = -4}$$

$$\frac{0-1.0}{0,5-0,375} = \frac{-1.0}{0,125} = -8$$

$$\frac{0-1.0}{0,25-0,1875} = \frac{-1.0}{0,0625} = -16$$

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

a) Como nos están pidiendo una expresión algebraica para el intervalo $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$ entonces $f(x)$ está definida entre $[0, 1.0]$

$$f(x) = \begin{cases} 4x-2.0 & si \ 0,5 \leq x \leq 0.75 \\ -4x-4.0 & si \ 0.75 \leq x < 1.0 \end{cases} \Bigg\} [0,5 ; 1.0]$$

Ahora comparando los n y m (pendientes de rectas) se tiene

$n=1 \longrightarrow m=4$
$n=2 \longrightarrow m=8$
$n=3 \longrightarrow m=16$
$\vdots$
$n=k \longrightarrow m=2^{k+1}$ } pendientes de las rectas crecientes.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2^n} dn = \int_0^\infty 2^n dn$$ ← Integral impropia, el resultado debe ser un logaritmo pero no sé cuál

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

p 67

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n}}{\frac{a_n}{a_n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{a_n}}{1}$

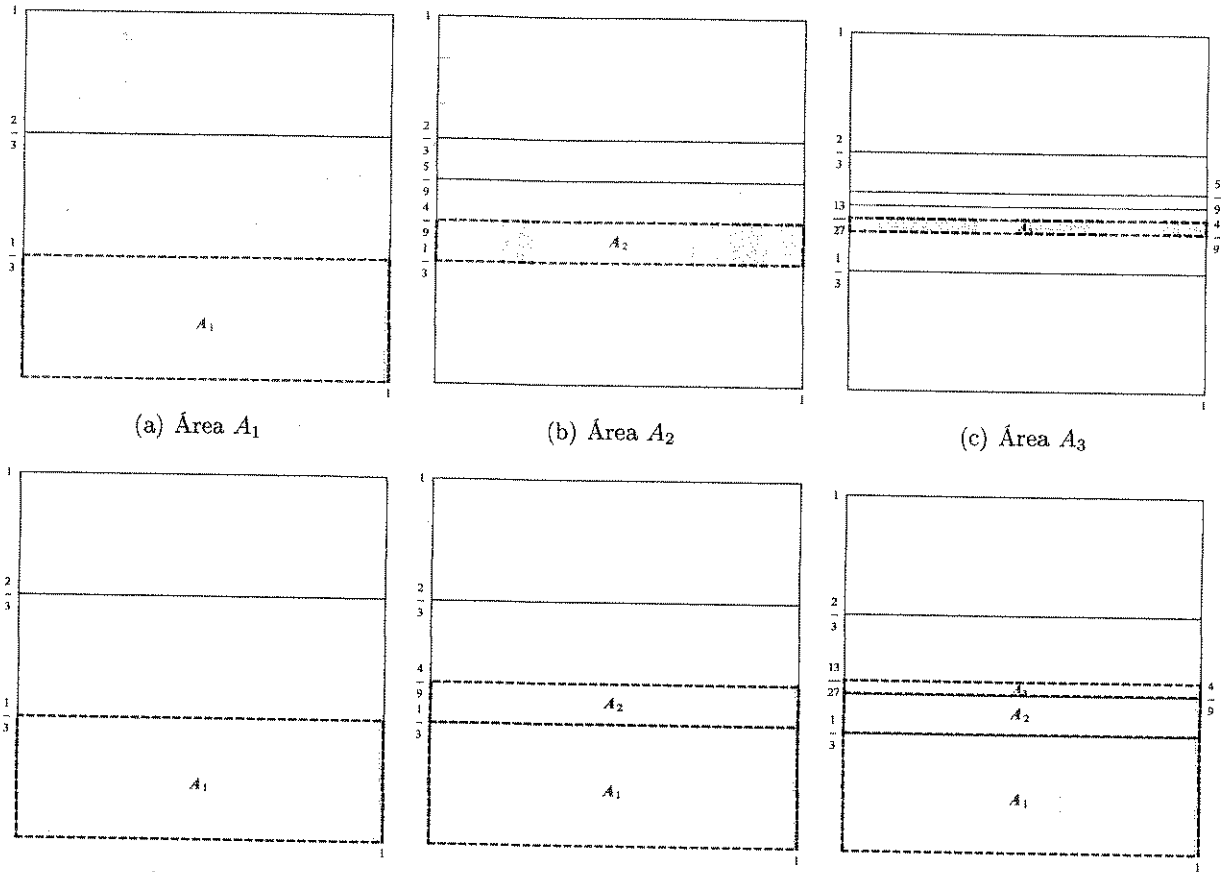
b) Si

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p 68

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = \frac{1}{3}$

$A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

$A_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$

$A_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} \quad n \in \mathbb{N}$

Es una serie geométrica

$A_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{r<1} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}}$

$\boxed{\text{Límite del área } A = \frac{3}{2}}$

Calificación de la dificultad $\boxed{\cancel{1}}$ 2 | 3 | 4 | 5

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Un proceso infinito es una serie de pasos que se realizan una y otra vez, sin que el número de veces tenga fin. Pero que al transcurrir de los años, se han perfeccionado técnicas para poder trabajar con el infinito (numerable o no numerable) como por ejemplo: las sumas de rectángulos debajo de una curva para aproximarse al área

(69) P69

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:__________ **Curso:** Análisis

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

b) $\sum_{n=0}^{10}$

c) Como la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en el intervalo $[0,1]$ entonces est. es integrable

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arct}\, x \Big|_0^1 = 0{,}785 - 0 = 0{,}785$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | X |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) V

b) V. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ya que se debe cumplir el teo. fundam. del cálculo entonces si $f(t)$ es integrable F debe ser derivable x ende f es continua.

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | X | 4 | 5 |

p69

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

Para $[0.5, 1]$

$m_1 = \frac{1-0}{0.75-1} = -4$

$m_2 = \frac{1-0}{0.75-0.5} = 4$

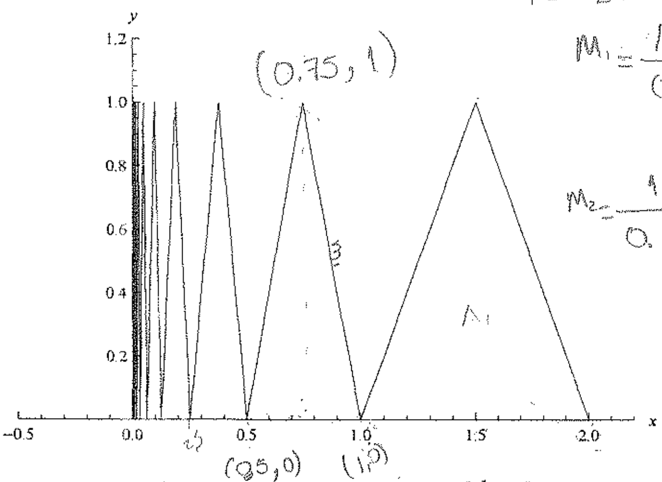


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

b) Determine la integrabilidad de la misma.

c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 $\cancel{5}$

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n} = \lim_{x\to\infty} \int_0^x 2^{-n}$

Calificación de la dificultad 1 2 3 $\cancel{4}$ 5

p69

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

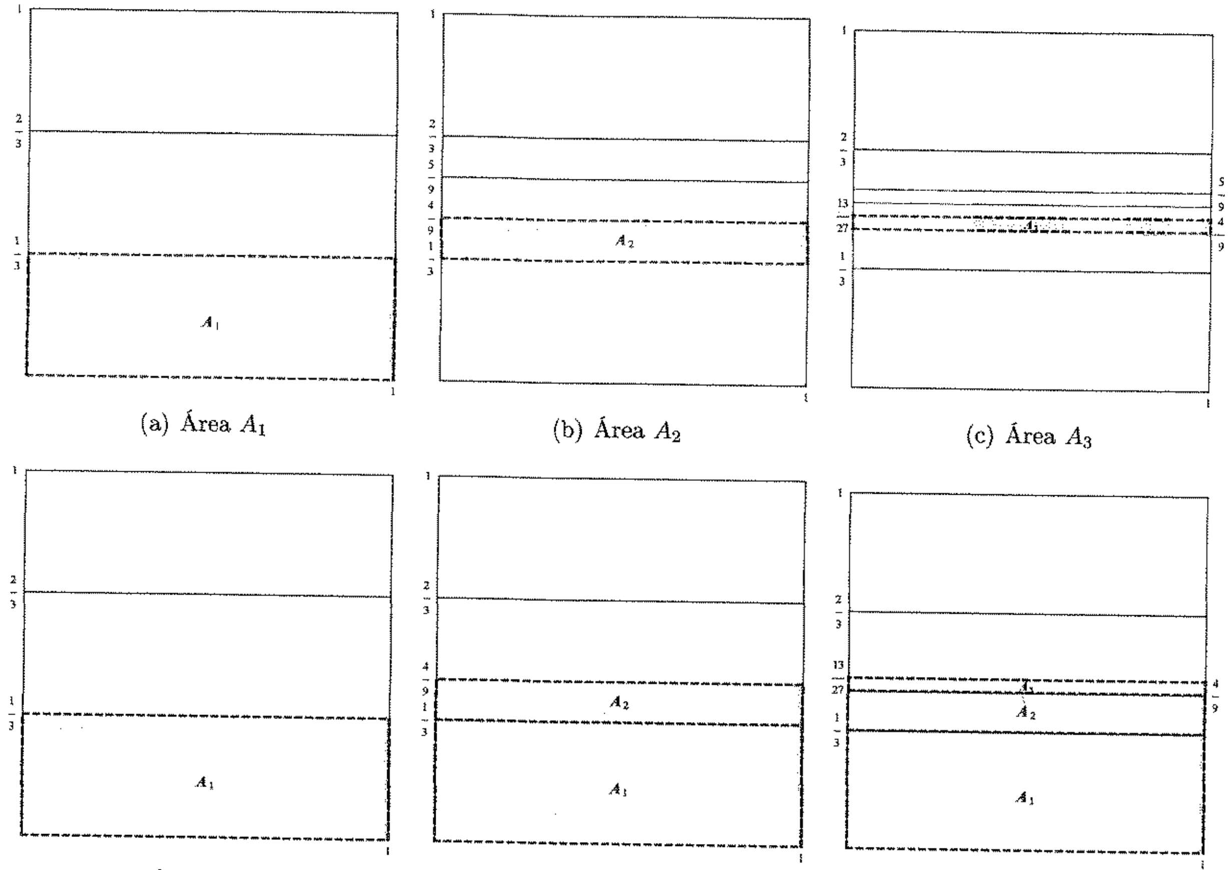
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

b) Si

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p69

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$ Como es una serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Es aquel que presenta determinadas características o acciones constantes iniciales y continua de forma repetitiva

(70) Pxo

Universidad de Valladolid
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Procesos Infinitos en la Integral Definida

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de los procesos infinitos inherentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Nombre:____________________ **Curso:** Análisis

Señale con una **X** los temas vistos | Cálculo Integral | | Sucesiones y Series | | Cálculo multivariado | |

INTEGRACIÓN

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Haga una partición de $[0, 1]$.
   b) Defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$ dé un valor aproximado de la suma.
   c) Determine si f es integrable en $[0, 1]$.
   d) ¿Cuál es el valor de la Integral Definida?

c) f es integrable en [0,1] porque es continua en ese intervalo y definida entre estos puntos

d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x \Big|_0^1 = 0'785 - 0 = 0'785$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 X |

2. Decida si la afirmación es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
   a) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable en (a, b).
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua en $[a, b]$.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) V, porque para que f [a,b] sea diferenciable es porque es continua, al ser continua es integrable.

b) V.

c) Si como la función se encuentra debajo del eje x y la integral puede ser menor que 0

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 X | 5 |

p70

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1).

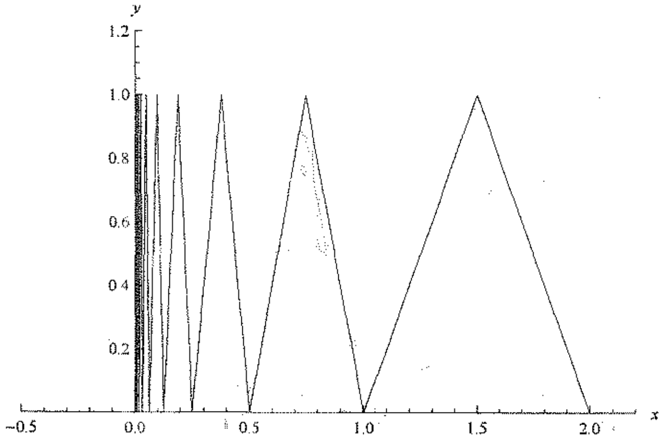


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenga una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
b) Determine la integrabilidad de la misma.
c) Calcule según sea el caso, el valor de la integral.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & 0.5 < x < 0.75 \\ -2x + 2 & 0.75 < x \leq 1. \end{cases}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^n} dn = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{2^n} dn = \lim_{t\to\infty} \int 2^{-n} dn$

$\ln (2^n) \ldots$

Debe ser algún Log Natural

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

pxo

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.
   a) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?
   c) Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a)

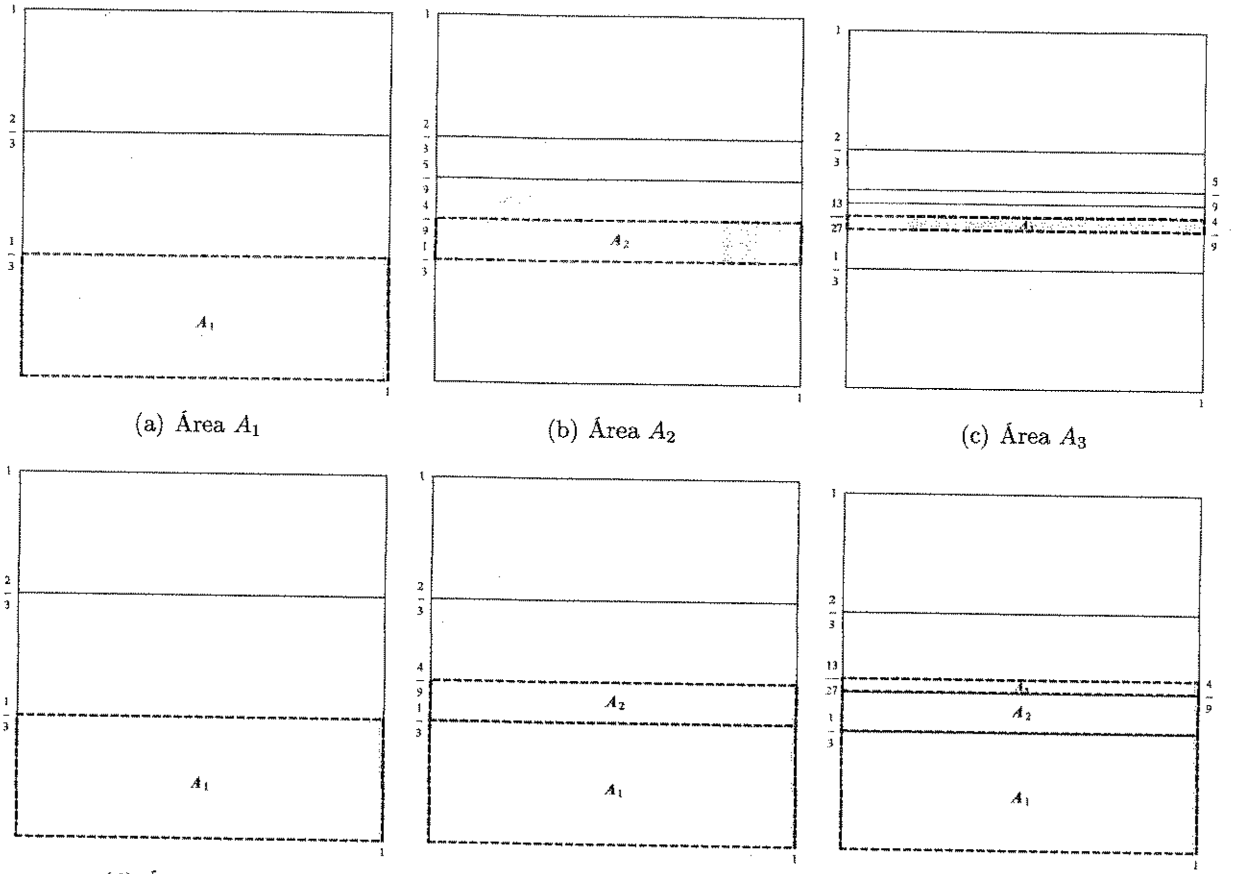
b) Si

c)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

p70

2. Halle el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = \frac{1}{3}$ $A_2 = \frac{1}{9}$ $A_3 = \frac{1}{27}$ $A_n = \frac{1}{3^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n =$ Serie Geometrica $S = \frac{1}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué entiende por Proceso Infinito?

Un proceso Infinito es aquel que se debe realizar un número Indeterminado de veces, en donde en ocasiones se puede obtener una conclusión ó número

(71) S1

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Teodoro M. Ibáñez Guadaño 2º

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? IES MARÍA DE CÓRDOBA (las navas del Marqués) (Ávila)
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones	X	funciones	X	Series		Particiones		Superior/Inferior	X	Integral Definida	X

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato? Nos daba el/la profesor/a apuntes sobre la asignatura.

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

El criterio de integrabilidad dice que si una función es continua salvo en un conjunto de puntos de medida nula es integrable. Como f es continua en $[0,2] \Rightarrow f$ es integrable.

$$\int_0^2 3x\,dx = 3\frac{x^2}{2}\Big]_0^2 = \frac{12}{2} = 6$$

Calificación de la dificultad 1 ~~2~~ 3 4 5

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

   a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable.
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \le 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap \underbrace{(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})}_{\mathbb{I}}$ entonces $\int_a^b f(x)dx \le 0$.

a) Por el criterio de integrabilidad si una función es continua salvo en un conjunto de puntos de medida nula entonces es integrable. La función f es diferenciable en $[a,b] \Rightarrow$ es continua en $[a,b] \Rightarrow$ es integrable en $[a,b]$ Verdadero

b) Verdadero, puesto que al ser F una primitiva de $f \Rightarrow F' = f$, luego F es derivable pues f es continua. $\Rightarrow$ F es continua.

c) ~~Si f es integrable~~

Calificación de la dificultad 1 2 ~~3~~ 4 5

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Sup}\, S(f, \pi) \text{ donde } \pi = \text{partición de } (a,b) \text{ y}$$

$$S(f,\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\max(f, (t_i, t_{i+1}))}_{\le 0} \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\ge 0} \le 0 \Big| \pi = a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$$

VERDADERO

S1

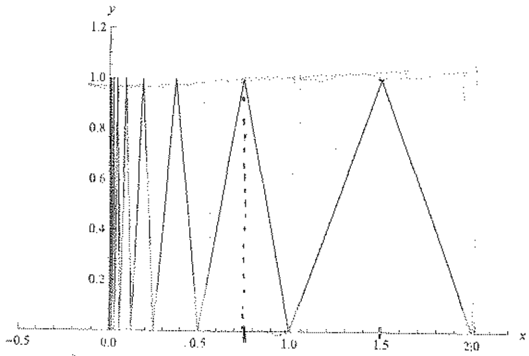


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(x)\,dx = \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)\cdot\frac{1}{2}}_{\text{área del triángulo que forma con el eje}}$

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-0}{\frac{-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}}{2}}\left(x - \frac{1}{2^n}\right) + 1 & x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}}{2}\right] \\ \dfrac{0-1}{\frac{-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}}{2}}\left(x - \frac{1}{2^{n-1}}\right) & x \in \left[\frac{\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}}{2}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \end{cases}$

b) Sí es integrable pues es continua.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

S1

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

f es integrable porque es discontinua en un conjunto finito de puntos (de medida nula en $\mathbb{R}$).

Como $\int_0^1 f(x)dx = \text{Sup } s(f,\pi)$ donde π es una partición de $[0,1]$ y $\pi = 0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = 1$.

y $s(f,\pi) = \sum_{t=0}^{n-1} \min(f,(t_i,t_{i+1}))(t_{i+1}-t_i)$

Como cojamos como cojamos los puntos de la partición π siempre va a haber un $x \in (t_i, t_{i+1}) / x \neq \frac{k}{2^n}$ para k impar, $0<k<2^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\forall \pi}{s(f,\pi) = 0} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 0.$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?
   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) Como $a_{n+1} > a_n$ y $a_n > a_{n-1} \ldots$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2$ pues $a_{n-1} < a_n \Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$

b) $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}+a_n}{a_n - a_{n-1}} - \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} =$

$= \frac{2a_n^2 + a_n a_{n-1} - (a_n^2 - a_{n-1} a_n)}{a_n(a_n - a_{n-1})} \leq$

$a_{n-1}a_n < a_n^2$

$\leq \frac{3a_n^2}{a_n(a_n - a_{n-1})} = \frac{3a_n}{(a_n - a_{n-1})} > 0 \Rightarrow$ crece.

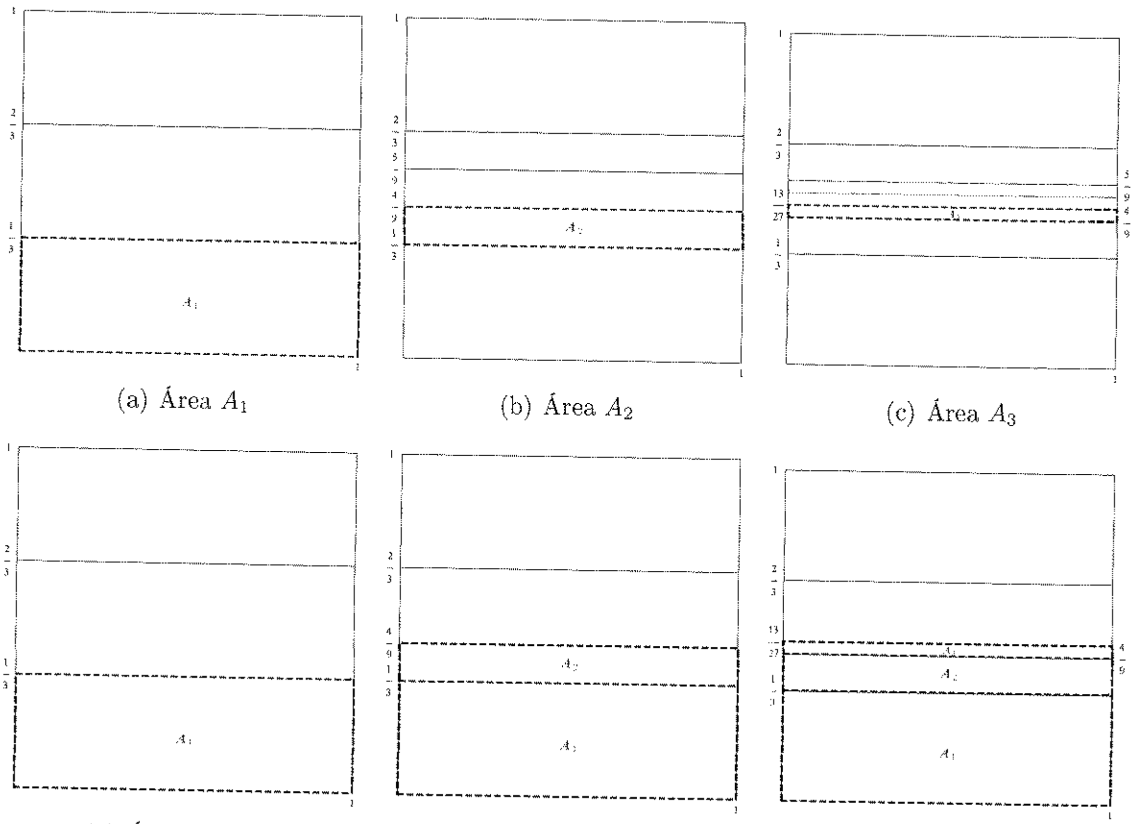
$a_n > 0$

$a_n > a_{n-1}$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

S1

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

Son mucho más técnicos y explican el porqué de las cosas, es decir de dónde vienen las explicaciones que vimos y cómo se extienden en sus campos.

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

Entiendo que es un continuo estudio de lo que ya has estado estudiando, es decir, no olvidar nada de lo que has estado estudiando y seguir investigando sobre lo que sabes

(72) S2

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Rafael Ángel García Martínez 2º

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? I.E.S. Castilla (Soria)
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones	X	funciones	X	Series	X	Particiones	X	Superior/Inferior	X	Integral Definida	X

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato?

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

$f(x)=3x$ es una función continua por lo tanto es integrable.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 3x\,dx = \frac{3x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{3 \cdot 0^2}{2} = 6$$

Regla de Barrow

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable. V

b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua. √

c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. √

a) Si f es diferenciable $\Rightarrow$ ~~quiere~~ f es continua $\Rightarrow$ f es integrable

b) ~~Como F(x) es continua~~ Como $F'(x) = f(x)$ por el teorema fundamental del cálculo integral y $f(x)$ es integrable $\Rightarrow$ $F(x)$ es continua

c) Como f es integrable y ~~es igual~~ a 0 para un conjunto de puntos no numerable (de medida no nula) $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

S2

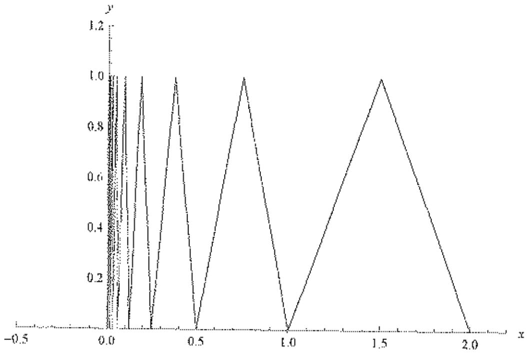


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

a) En el punto $\frac{1}{2^n}$ ~~es~~ $f(x)=0$ y en $\frac{1}{2^{n-1}}$ $f(x)=0$ pero en $f\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=1$

$$f(x)=\begin{cases} 2^{n+1}\cdot x-2 & \text{si } \frac{1}{2^n}\le x\le \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} \\ -2^{n+1}\cdot x+4 & \text{si } \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\le x\le \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}$$

La función es continua en el intervalo $[1/2^n, 2]$ por lo que es integrable.

$$\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(x)dx = 2\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}} 2^{n+1}\cdot x-2\,dx = 2\left[2^n\cdot x^2-2x\right]_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}} = 2\cdot\left(2^n\cdot\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+2}}\right)-2\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right.$$
$$\left.-2^n\cdot\frac{1}{2^{2n}}+2\cdot\frac{1}{2^n}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2^n}+\cancel{\frac{1}{2^n}}+\frac{1}{2^{n+2}}-\cancel{\frac{1}{2^{n-1}}}-\cancel{\frac{1}{2^n}}\right.$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

$$-\frac{1}{2^n}+\cancel{\frac{1}{2^{n-1}}}) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Por lo que las integrales $\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2^{n+1}}$

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x)=\frac{1}{2^n}$, con $x\in[n-1,n)$, $n=1,2,3,\ldots$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in[0,1)\\ \frac{1}{4} & x\in[1,2)\\ \vdots\end{cases}$$

$$\int_{n-1}^{n}\frac{1}{2^n}dx = \frac{1}{2^n}x\Big|_{n-1}^{n} = \frac{n}{2^n}-\frac{n-1}{2^n} = \frac{+1}{2^n}$$

$$\int_0^\infty\frac{1}{2^n}dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{2^n}dx = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \underline{\underline{1}}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

S2

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{I}$ (irracionales) Por lo tanto si f es integrable $\int_0^1 f(x)dx = 0$

Como los $0<k<2^n$ impares son finitos $f(x)$ es continua (e igual a 0) excepto en un conjunto finito de puntos por lo que $f(x)$ es integrable. Al ser su conjunto de puntos de discontinuidades de medida nula.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ si vemos que es creciente (lo que veremos en la parte b) $a_{n-1} < a_n \Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2$ (excepto en el caso que a_1 y a_2 sean iguales pues $\frac{a_1}{a_2} = 1 \Rightarrow 1 + 1 = 2$) (o que $a_1 > a_2$ que, aunque en los demás términos se ve que es creciente aquí se violaría, por lo que para ser más exactos $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + (a_1, \cancel{a_2})$ de esta manera evitamos todos los problemas. ya que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

~~b) Como a_1 y a_2 son positivos $a_3 = a_2 + a_1$ es mayor que a_2 $a_3 > a_2$, $a_4 = a_3 + a_2$ como $a_2 > 0 \Rightarrow a_4 > a_3$. Como $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ y a_{n-2} es positivo $a_n > a_{n-1}$ por lo que es creciente.~~

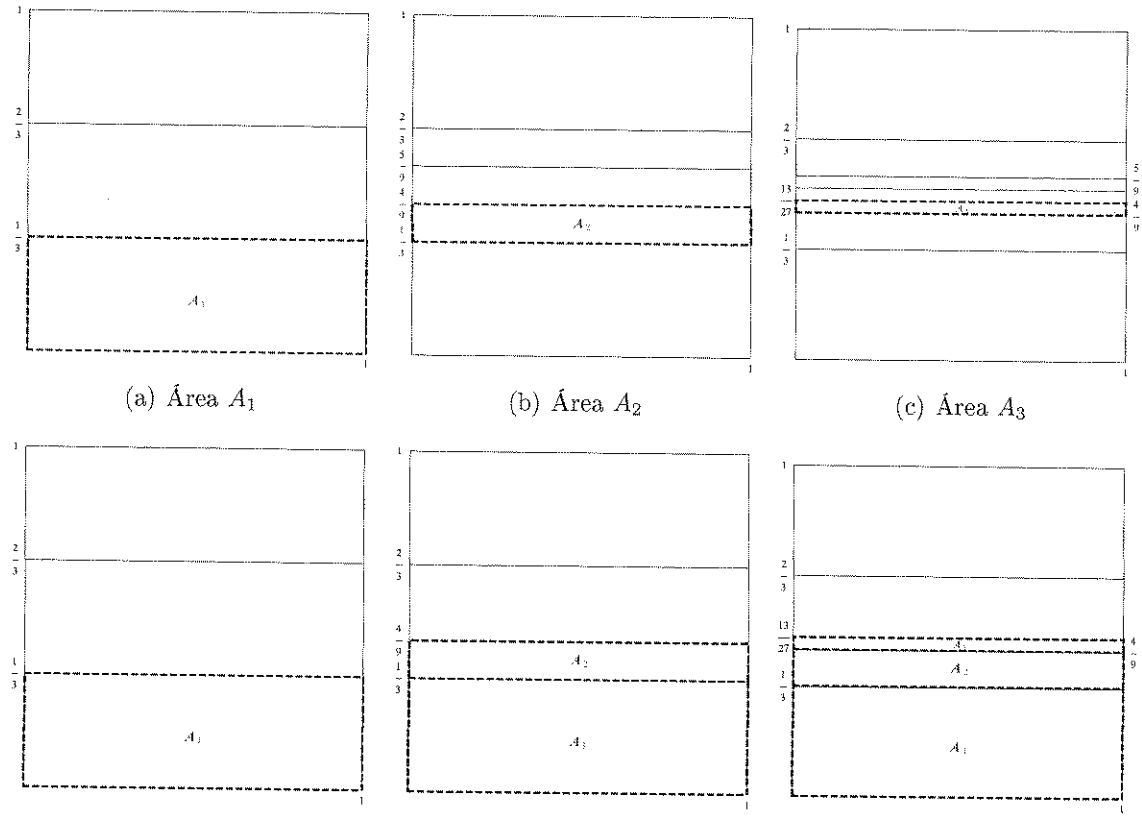
~~c) Al ser monótona y acotada es convergente~~

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

b) la sucesión en sí no es monótona pues crece y decrece alternativamente, pero si nos quedamos solo con los términos $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ es decreciente o creciente y la de los $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}$ es creciente o decreciente dependiendo de la otra, siendo opuesta.

S2

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

El área de cada ~~rectángulo~~ A_n es base $= 1$, altura $= 1/3^n$ $= 1/3^n$

El área de $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

En la universidad son mucho más profundos y se dan con mucho más rigor, al tener solo una asignatura de matemáticas en bachillerato hay menos tiempo, y hay que ir demasiado rápido.

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

Un algoritmo cuyo número de pasos es infinito por lo tanto no es computable y hay que llegar a él por otros métodos, distintos de las meras cuentas.

S3

(73)

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Antonio López Villa 1º

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste?
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites		Sucesiones		funciones		Series		Particiones		Superior/Inferior		Integral Definida	

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato? Santillana.

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

$f(x) = 3x.$

Sí es integrable.

$$\int_0^2 3x = \frac{3}{2}x^2 \Big]_0^2 = \left(\frac{3}{2} \cdot 4\right) - 0 = 6.$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

   a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable.

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) falso. ~~para que f: [a,b] → R sea integrable debe ser diferenciable en el extremo~~ f es integrable en el intervalo [a,b]

b) verdadero

c) Verdadero (si f es continua)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

53

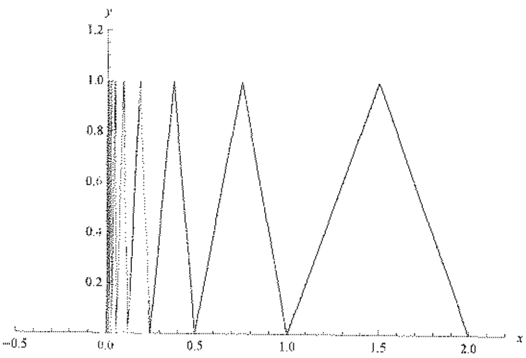


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
   b) Determina la integrabilidad de la misma.
   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

a)

c).

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\,dt.$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

S3

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx =$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

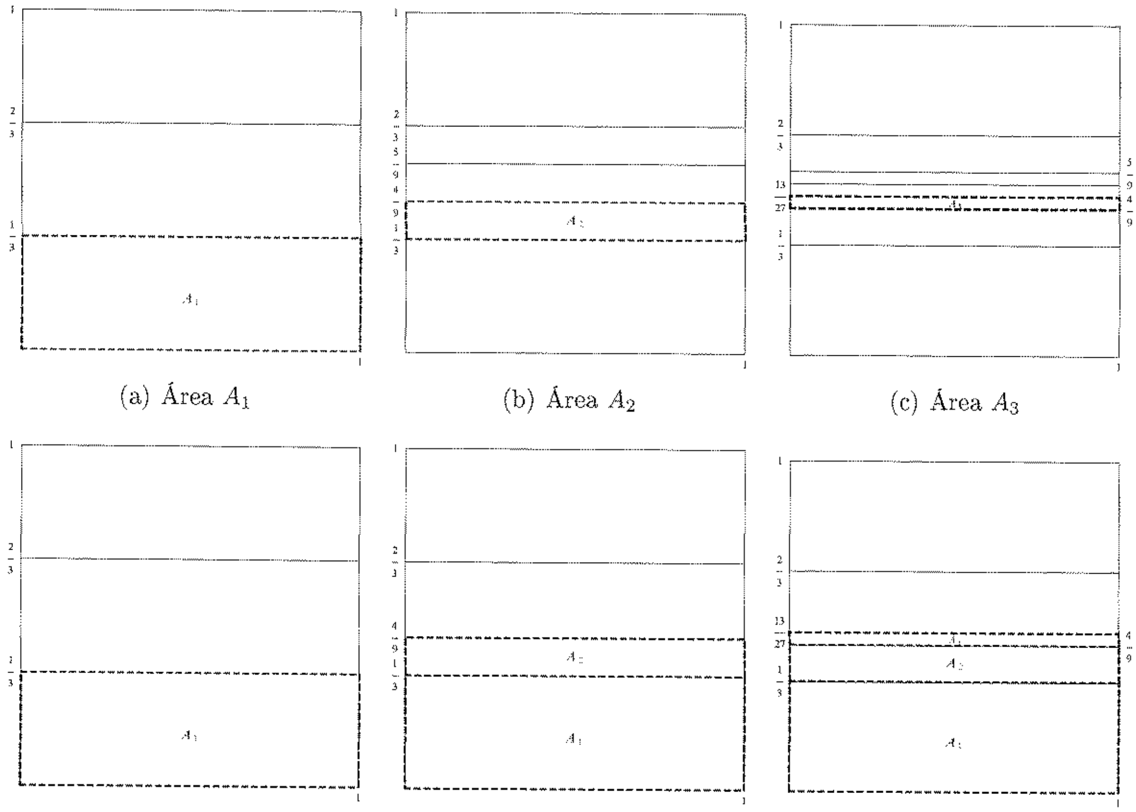
   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

b).

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

S3

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A_1 = 1/3 \cdot 1 = 1/3.$

$A_2 = 1/9 \cdot 1 = 1/9.$

$A_3 = \frac{1}{27}$

$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \ldots$

$r = 1/3 = \frac{A_2}{A_1} \ldots \frac{A_n}{A_{n-1}}$

$A_\infty = \frac{A_1}{(1-r)} = \frac{9}{6}.$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

Mucha.

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

S4

(74)

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Sergio Ramos Hernández 2º CURSO

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? GONZALO TORRENTE BALLESTER (SALAMANCA)
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	Sucesiones	funciones	Series	Particiones	Superior/Inferior	Integral Definida
SÍ	NO	SÍ	NO	NO	NO	SÍ

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato? Editorial ~~SM~~. Anaya

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

La función $f(x)$ es integrable siempre por ser polinómica

$$\int_0^2 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2\Big]_0^2 = 6 - 0 = 6$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 X | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable.

b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.

c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \le 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \le 0$.

a) ~~V~~ F ~~Si es diferenciable es integrable~~

Si f es derivable ⇒ existe una primitiva pero no tiene el porqué poderse integrar.

b) V

c) √

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 X | 5 |

34

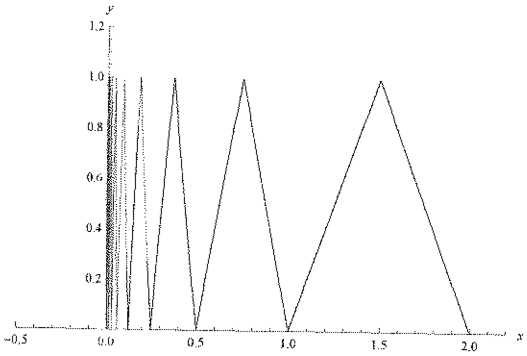


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n)$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

54

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{\log_2(1)}_{0} - 0 = \frac{1}{2^n} \cdot 0 - 0 = 0.$$

Existe la integral $\Rightarrow$ es integrable.

dif. media

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | ~~3~~ | ~~4~~ | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

 a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

 b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

 c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al <u>número áureo</u>.

$$\frac{a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-1}}{a_{n-1} + a_{n-2}} = \frac{2a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1} + a_{n-2}}$$

b) Es monótona creciente pues $a_3 = a_1 + a_2$ $a_3 > a_1$ $a_3 > a_2$ puesto que $a_1, a_2 > 0$

Entonces $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

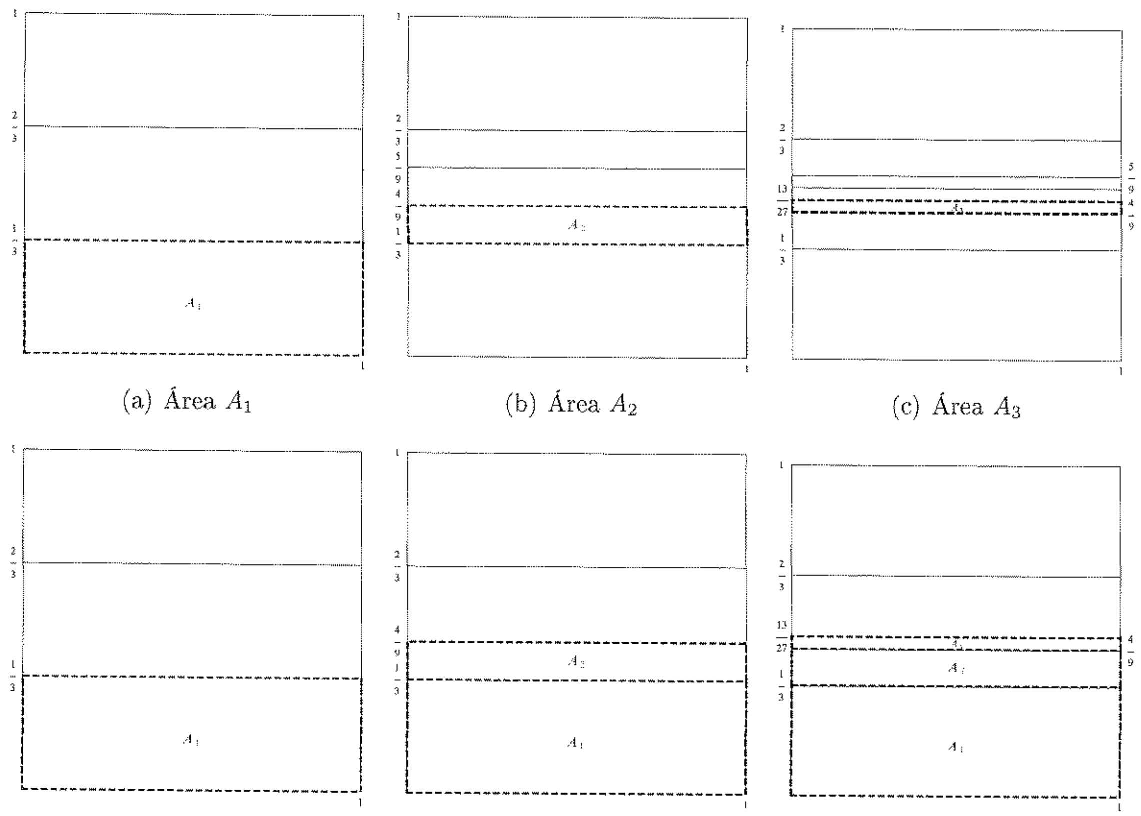
a) Está acotada por 0 inferiormente

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\lim a_{n+1} = \lim a_n}{=} \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \boxed{L = 2} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

54

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Lím $A = \frac{1}{2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

En la universidad se han complicado, en bachillerato eran más mecánicos.

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

Proceso finito: es un transcurso que no tiene fin.

(75) 55

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Héctor Martín Martín 1º

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? I.E.S José Luis López Aranguren
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones	X	funciones	X	Series		Particiones		Superior/Inferior		Integral Definida	

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato?

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

$$\int_0^2 3X = \frac{3}{2}X^2 \Big|_0^2 = 6$$

f(x) es continua, y por tanto f es integrable.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

   a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable.
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Verdadera.

b) Verdadera.

c) Falsa.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

55

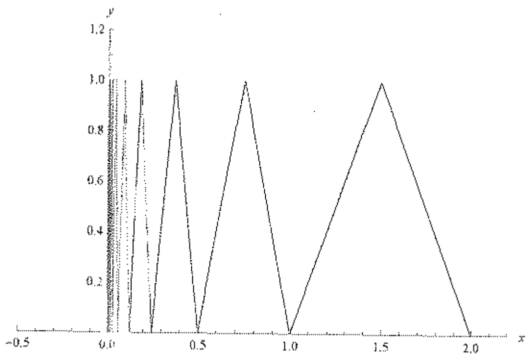


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{2^n}\,dx = \int_0^\infty 2^{-n}\,dx = \frac{2^{-n+1}}{-n+1}\Big|_0^\infty = 0 - 2 = -2$$

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt$$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

SS

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Si f es continua en $[0,1]$, f es integrable.

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

$\lim_{x \to \infty} 0 = 0$

$\int_0^1 \frac{1}{2^n} = \int_0^1 2^{-n} = \left. \frac{2^{-n+1}}{-n+1} \right]_0^1 =$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

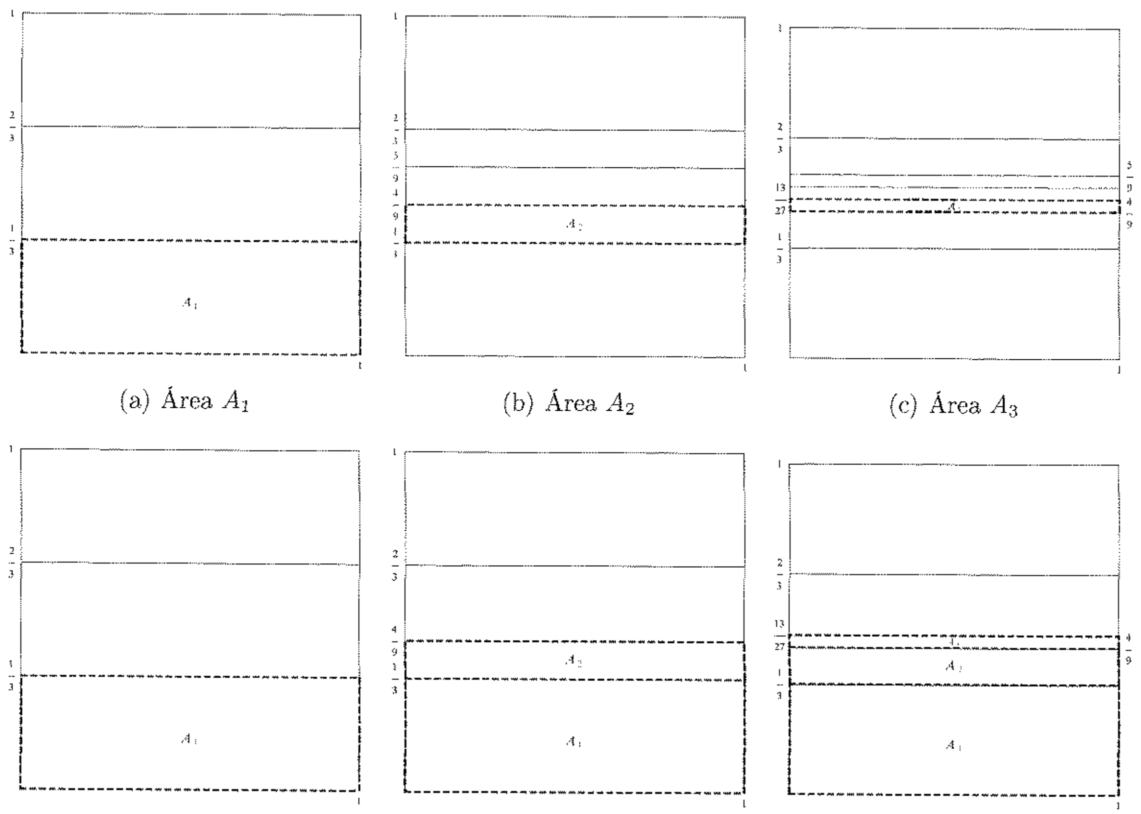
a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq 2$

b) Es monótona creciente

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

55

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

Que en bachillerato básicamente solo se hacen integrales y apenas se dan conceptos teóricos.

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

(76) 56

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Teresa Álvarez Martín 1º

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? I.E.S. Gabriel Alonso de Herrera (Talavera de la Reina) en año 2004
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones	X	funciones	X	Series		Particiones		Superior/Inferior		Integral Definida	X

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato? —

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

Sí es integrable porque es continua.

$$\int_0^2 3x\, dx = 3\int_0^2 x\, dx = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 3 \cdot 2 = 6$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable. V

b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua. V

c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a)

b) Porque el hecho de que sea integrable, implica que la función ha de ser continua.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

56

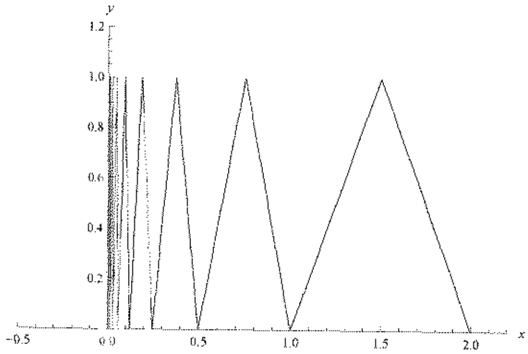


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

b) Sí es integrable, puesto que es continua

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

S6

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow$

$\int_0^1 0 \, dx = 0$

$\int_0^1 \frac{1}{2^n} \, dx$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

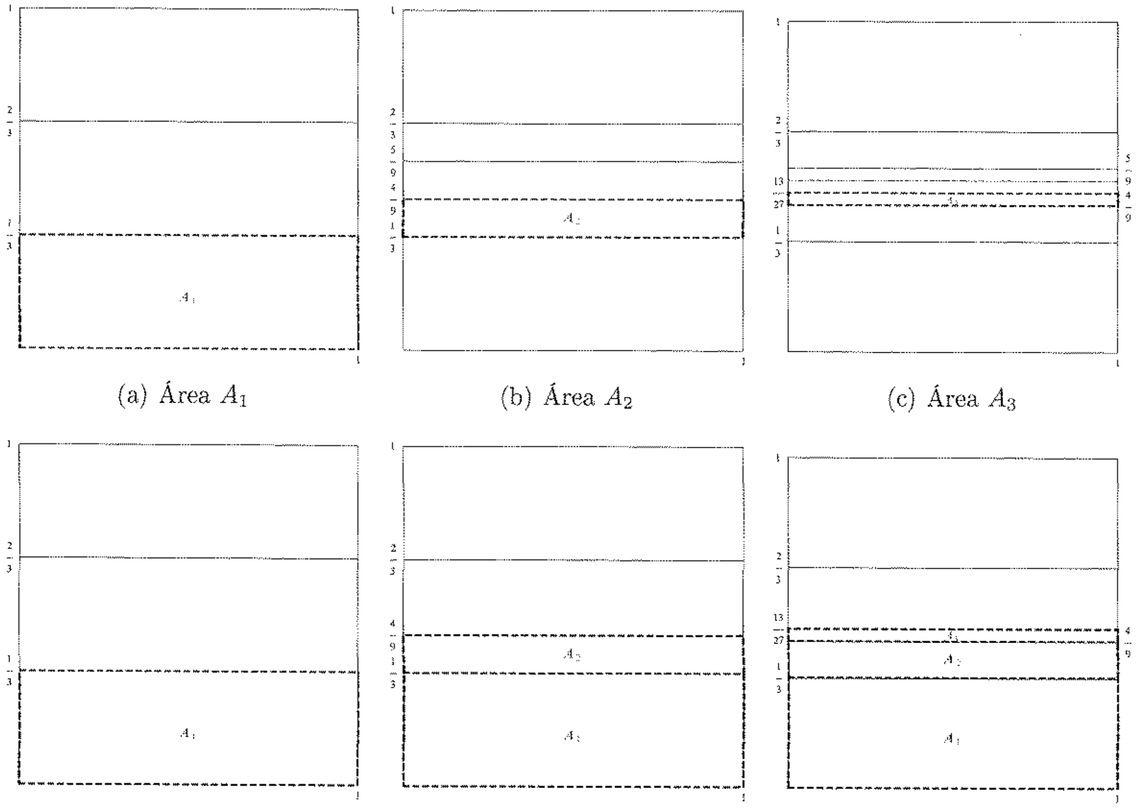
a) $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \lim \frac{a_{n-1}}{a_n}$

b) Sí, es creciente.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

56

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$\lim A_1 = 1/3$

$\lim A_2 = 4/9 - \frac{1}{3} = \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$

$\lim A_3 = \frac{13}{27} - \frac{1}{9} = \frac{13}{27} - \frac{3}{27} = \frac{10}{27}$

$\lim A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{10}{27} = \frac{9+3+10}{27} = \frac{22}{27}$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

Ahora se profundiza mucho más, lógicamente.

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

No sé qué es Proceso Infinito.

(77) 57

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Julio Antonio Rubio Moreno 1º - 9º

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? IES Virgen del puerto (Plasencia)
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones		funciones	X	Series		Particiones		Superior/Inferior		Integral Definida	X

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato?

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

si es integrable por ser función ~~continua~~ polinomica y continua

$$\int_0^2 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2\Big|_0^2 = \frac{12}{2} = 6$$

Calificación de la dificultad | X | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

V a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable.

V b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.

F c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) si f diferenciable $\Rightarrow$ ~~continua~~ ~~$\Rightarrow$ integrable~~ f' integrable y f integrable

b) ~~si f " $\Rightarrow$ integrable $\Rightarrow$ continua~~ si f es integrable $\Rightarrow$ F continua

c) que f' sea ≤ 0 no implica que $\int f(x) \leq 0$ y no es continua

Calificación de la dificultad | 1 | X | 3 | 4 | 5 |

57

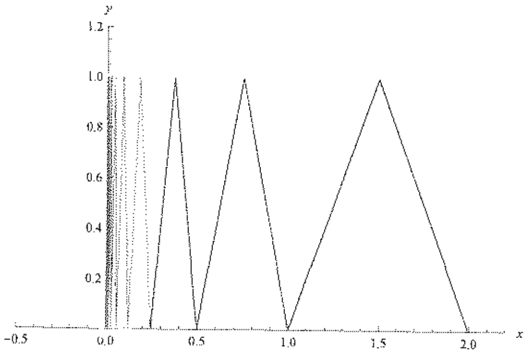


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty f(x)\,dx$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

S+

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_{n-1} + a_{n-2}} = L$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-1}}{a_{n-1} + a_{n-2}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1} + a_{n-2}}$

b) si es monótona

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{a_n}{a_{n-1}}$

$\frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} > \frac{a_n}{a_{n-1}}$

$\frac{a_{n-1}(a_n + a_{n-1})}{a_n^2} > 1$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

es fácil pero se me a olvidado

57

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

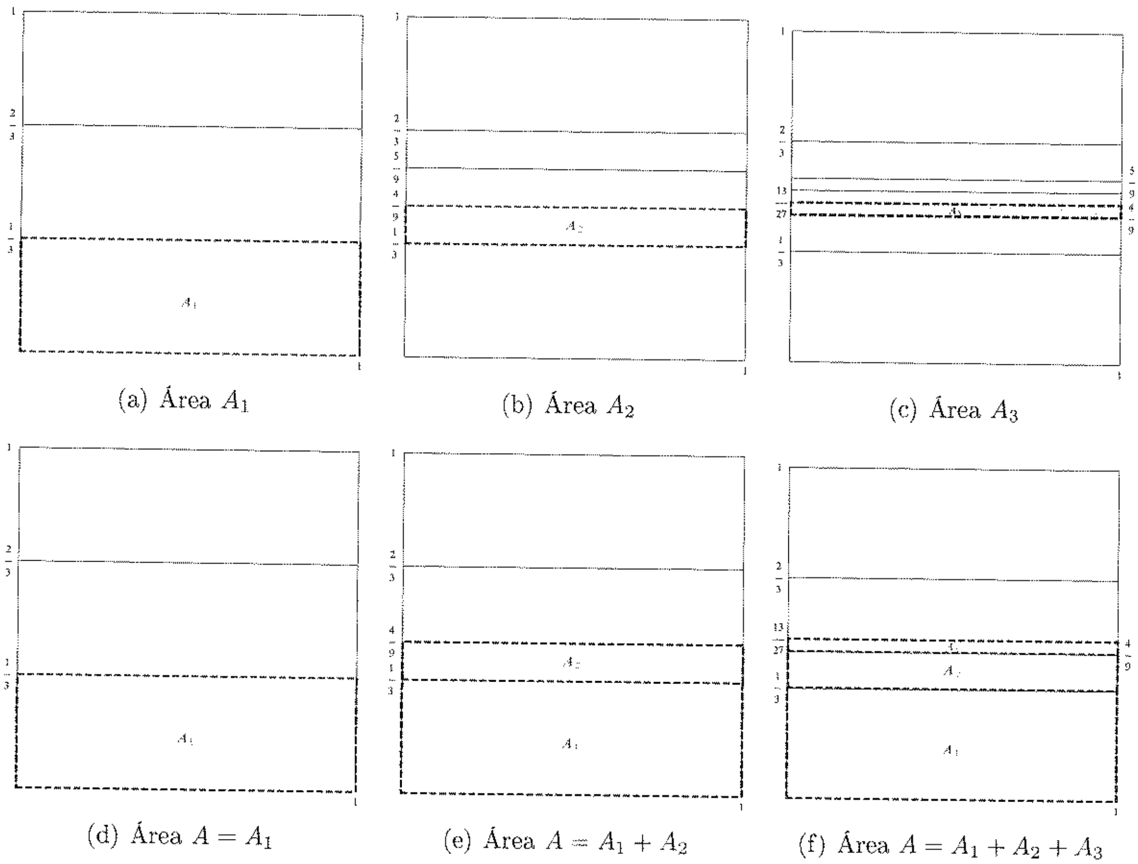


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n + b_{n-1}}{b_n^2}$$

$a_1 = 1$

$b_0 = 0$

$b_1 = 3$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

mucha

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

Que se repite "infinitas veces".

(78) S8

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Alvar González ALVAR GONZÁLEZ. 1º

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? Calisto y melibea
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	Sucesiones	Funciones	Series	Particiones	Superior/Inferior	Integral Definida

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato? No hice bachillerato

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

$$\left.\frac{3x^2}{2}\right]_0^2 = 6$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta. $f(x) = \frac{1}{x}$ diferenciable en, x ej., $[-2,1]$ y no integrable

   a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable. Falso
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua. V
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. F Sea $f(x) = -x + 5$ en $[0,5]$ $f(x) \leq 0\ \forall x \in [0,5]$
   $\int f(x) \geq 0$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

58

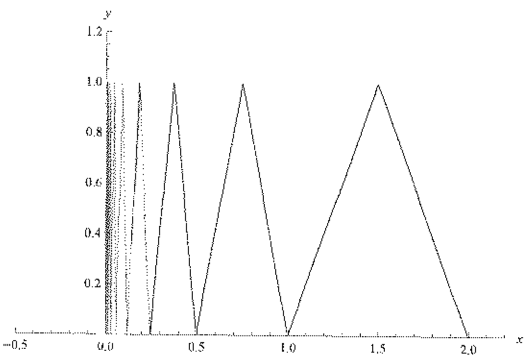


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1) $f(n) = \frac{1}{2^n}$

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

58

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

No

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada. $\exists \varepsilon > 0$ $a_{n+1} = \varepsilon a_n$

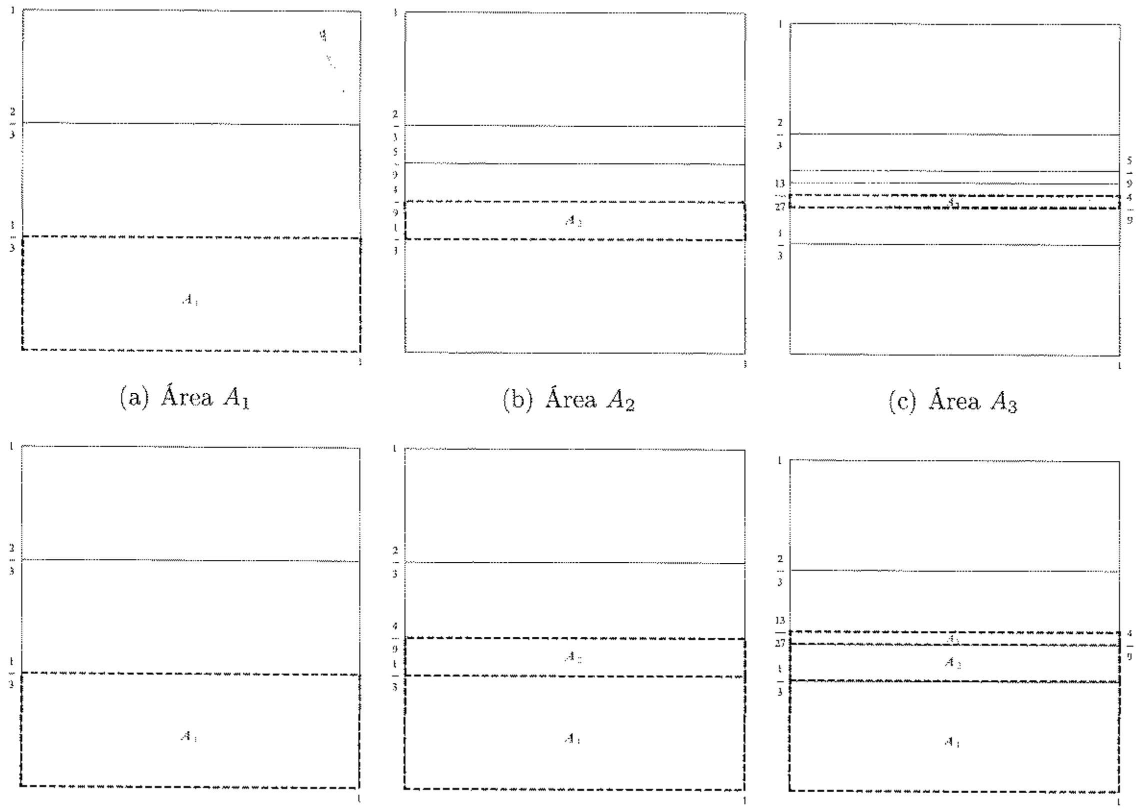
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior? Creciente

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo. $\left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^n$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

58

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$\lim_{n \to \infty} A = 1$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

Todo difícil

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

Aprobar una asignatura

(79) S9

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Daniel de los Dolores Paradinas 2º

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? Padres Reparadores (Alba de Tormes)
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones		funciones	X	Series		Particiones		Superior/Inferior		Integral Definida	

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato? SM creo

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

$$\int_0^2 3x\,dx = \frac{3x^2}{2}\Big]_0^2 = 6 - 0 = 6$$

Regla de Barrow

Calificación de la dificultad | X | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

F a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable.

V b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.

V c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a)

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | X | 4 | 5 |

59

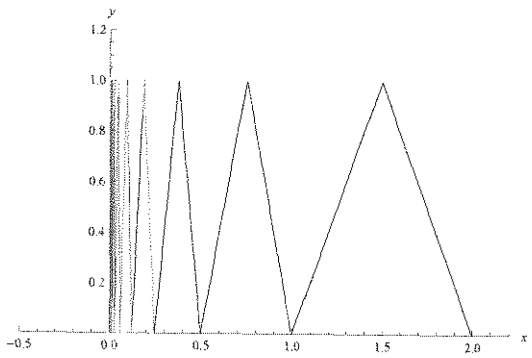


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cancel{5}$ |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cancel{5}$ |

S9

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

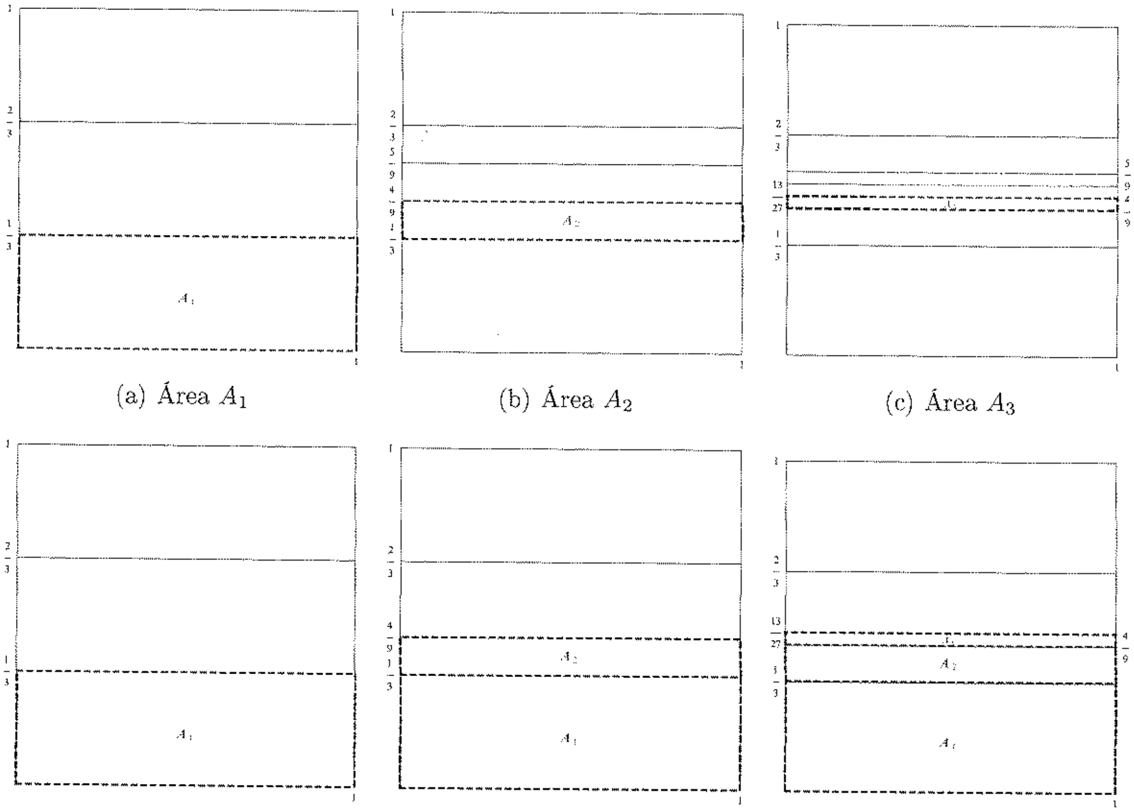
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

59

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

El área en cada caso serán la suma de las áreas de cada rectángulo:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$ c) $\frac{13}{27} - \frac{4}{9} = \frac{13}{27} - \frac{3}{27} = \frac{10}{27}$

d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{13}{27}$

Calificación de la dificultad | ~~1~~ | 2 | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

La profundidad y la diferencia en cuanto a argumentos teóricos

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

Un proceso que no está acotado entre 2 valores.

(80) 510

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Jose Antonio Gonzalez Hernández 1º - 2º

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? Gabriel y Galan
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites		Sucesiones		funciones		Series		Particiones		Superior/Inferior		Integral Definida	

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato?

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

si $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2\Big]_0^2 = \frac{3\cdot 4}{2} - 0$

$= 6$

Calificación de la dificultad | ~~1~~ | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

   a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable. si
   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.
   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) si porque si f es derivable es continua

b) si porque F(x) es una integral f se puede derivar y derivable implica continua

c solo si $b \geq a$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5 |

S10

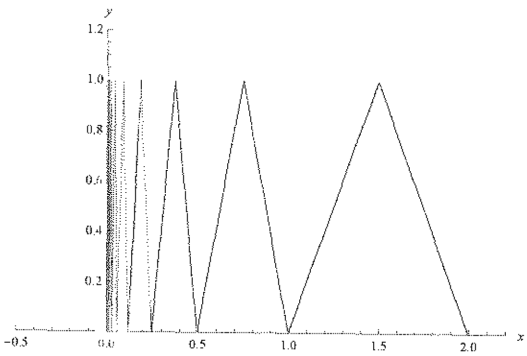


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x \to \infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

510

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0, 1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

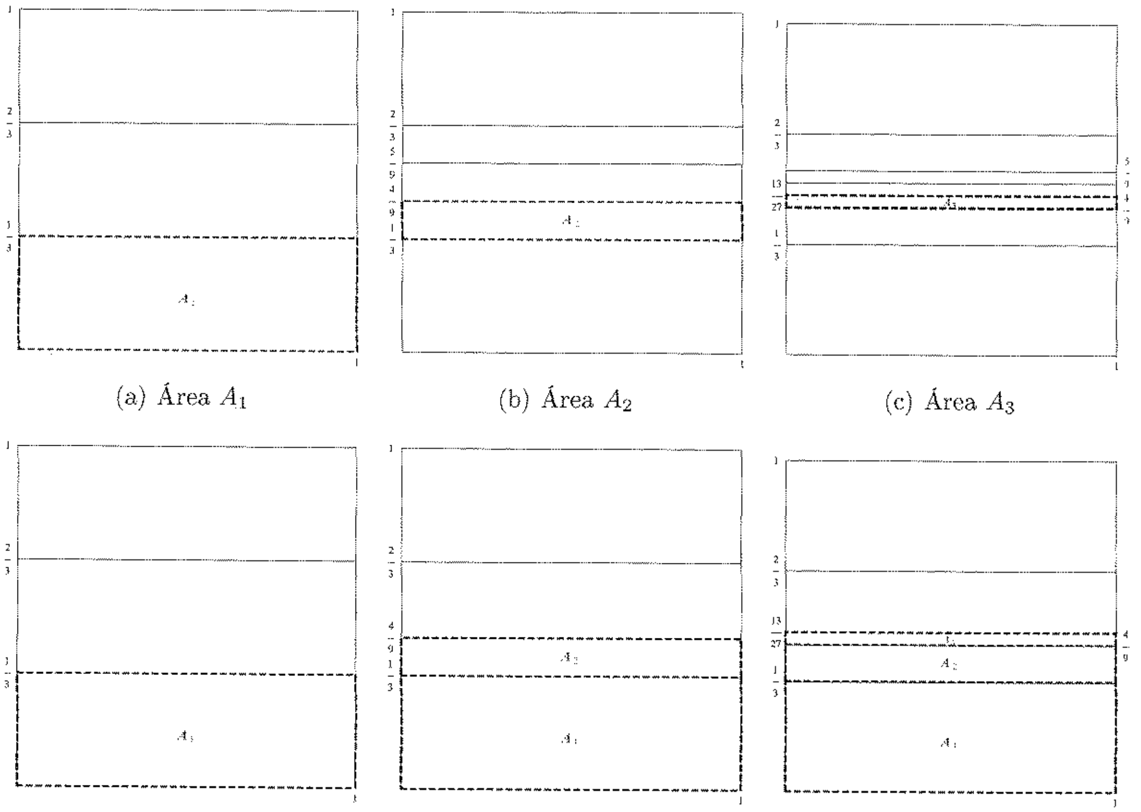
   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

supongamos que no esta acotada

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n-1} + a_n} \Rightarrow \mathbb{R} \quad a_n + a_{n+1} > k(a_{n+1}\, a_i)$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$A = $ [illegible] $- \frac{2}{3} - \frac{2}{}$

~~A es un metro~~

A es $\frac{1}{2}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

todo es mas general y menos ambiguo

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

S11

(81)

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

2 do

Nombre: Roger Fernández Enríquez

A. ESTUDIOS PREVIOS

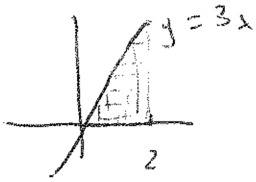
1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? I. E. S. Birgidum Flavium.
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones	X	funciones	X	Series		Particiones	X	Superior/Inferior	X	Integral Definida	X

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato?

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.



$f(x) = 3x$ es integrable en $[0,2]$. La integral definida calcula el área bajo la curva y el eje x. Esta área es finita => es integrable.

$$\int_0^2 3x\,dx = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 3\cdot(2-0) = 6\ u^2$$ (u^2 unidades de superficie)

Calificación de la dificultad | ~~1~~ | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

   a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable. Falsa

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

R - Q.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

- n par

pto $\left(\frac{1}{2^{n-1}}, 0\right)$ punto $\left(\frac{1}{2^n}, 1\right)$ $\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}, 1-0\right)$ S11

- n impar

pto. $\left(\frac{1}{2^{n-1}}, 1\right)$ $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$

$\left(\frac{1-2}{2^n}, 1\right) = \left(\frac{-1}{2^n}, 1\right)$

$\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}, 1\right)$

$m = -2^n$

$\left(\frac{1}{2^n}, 1\right)$

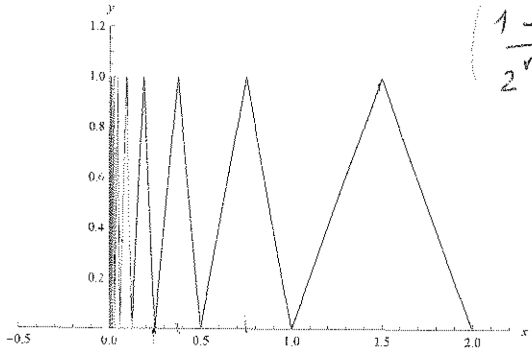


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$. $n = 0, 1$ —

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

a) n par. $f(x) = y = -2^n \cdot \left(x - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = -2^n \cdot x + \frac{2^n}{2^{n-1}} = -2^n \cdot x + 2$

n impar. $f(x) = y = 2^n \cdot \left(x - \frac{1}{2^n}\right) = 2^n \cdot x - 1$

no hay sitio para operar

b) las funciones son polinómicas, por tanto pueden integrarse.

c) n par. $\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} -2^n \cdot x + 2 \, dx = \left[-2^{n-1} \cdot x^2 + 2x\right]_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} =$ operar

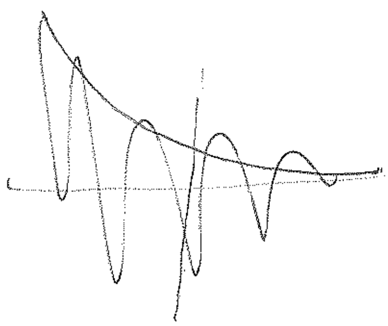
n impar $\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} 2^n \cdot x - 1 \, dx = \left[2^{n-1} \cdot x^2 - x\right]_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} =$ operar

Calificación de la dificultad ~~1~~ 2 3 4 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^{x} \frac{1}{2^n} dt = \left[\frac{1}{2^n} t\right]_0^{x} = \frac{1}{2^n} \cdot x$. haciendo tender x a infinito.

$\lim_{t \to \infty} \int_0^x \frac{1}{2^n} dt = \int_0^\infty \frac{1}{2^n} dt = \infty$



Calificación de la dificultad ~~1~~ 2 3 4 5

511

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq 2 \cancel{+} a_1 + a_2 \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ está acotada

esto es debido a que $\frac{a_{n-1}}{a_n} \leq 1 \ \forall n > 2$ ya que. $a_n \geq a_{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

si $n = 1$ o 2.

$\frac{a_{n-1}}{a_n} < a_1 + a_2 + 1$

b) Si, es monotona creciente ya que $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n > 2$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ $\qquad$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$

$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

pasando al límite

L pasando al límite.

$L = 1 + \frac{1}{L} = \frac{L+1}{L} \Rightarrow$

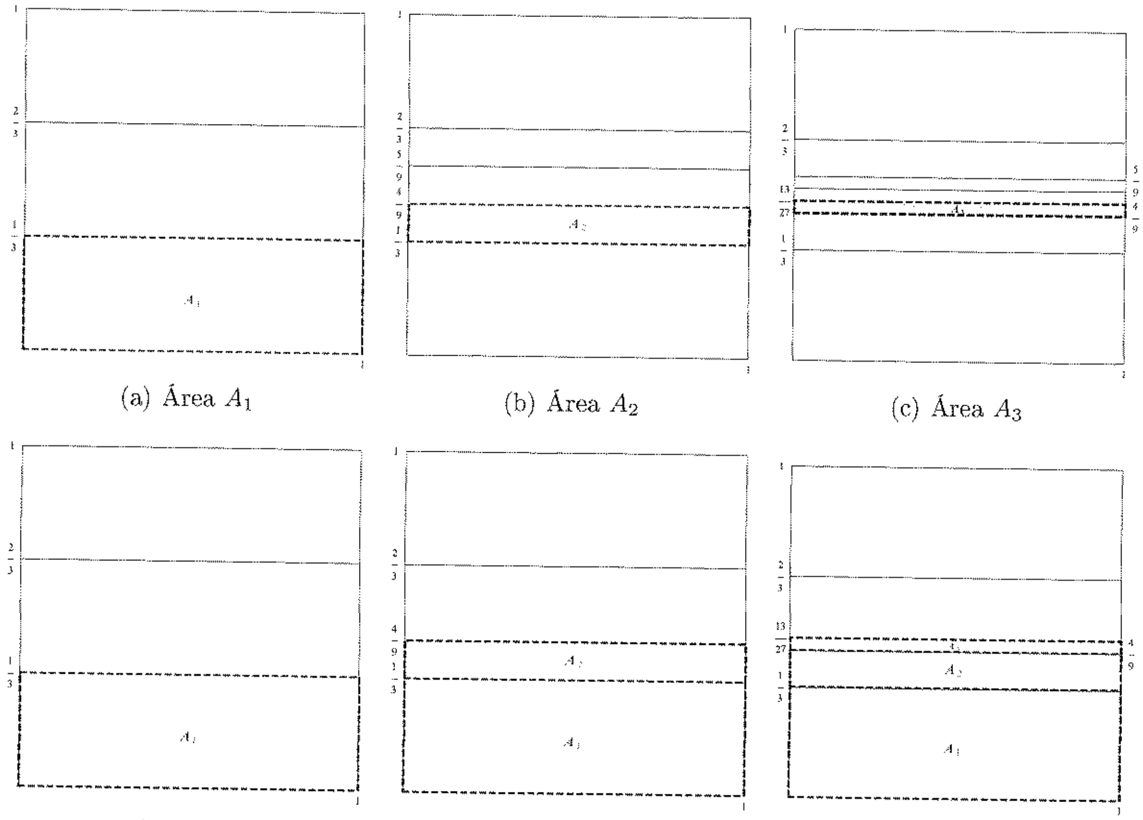
Calificación de la dificultad | $\cancel{1}$ | 2 | 3 | 4 | 5 |

$\Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La división es de positivos luego

$\boxed{L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi}$ como se pedía probar

S11

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Sucesión $0, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{13}{27}, \frac{40}{81}$ $n=1, \ldots, \infty$

$$\text{Area} = 1 \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{13}{27} + \frac{40}{81} + \cdots}_{\text{Hay que que calculamos el límite}} \Big).$$

$a_n = \frac{b_n}{c_n}$ $c_n = 3^n$ $b_n = b_{n-1} + c_{n-1}$

$$a_n = \frac{b_{n-1} + c_{n-1}}{c_n} = \frac{b_{n-1} + 3^{n-1}}{3^n} = \frac{b_{n-2} + 3^{n-2} + 3^{n-1}}{3^n} = \frac{1 + 3 + \cdots + 3^{n-1}}{3^n} = \frac{1 - 3^n}{-2 \cdot 3^n}$$

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

La diferencia fundamental pienso que es la formalización de los conceptos teóricos. En el instituto muchas demostraciones de lo que usabamos no se daban.

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

Rafael Ángel García Martínez (82) S12

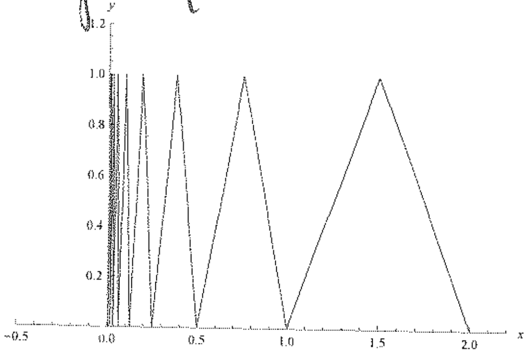


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

S12

S12

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Rafael Angel García Martínez. S1 2...

Veámoslo:

$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ es ~~decreciente~~

Veamos lo por inducción:

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2+a_1}{a_2} = 1 + \frac{a_1}{a_2}$$

si

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} > \frac{a_2}{a_3} \text{ es decreciente}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3+a_2}{a_3} = 1 + \frac{a_2}{a_3}$$

pw

sabiendo cierto

$$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}} > \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$$

$$\frac{a_{2n+3}}{a_{2n+4}} \overset{?}{<} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}}$$

$\Updownarrow$

$$\cancel{\frac{a_{2n+4}+a_{2n+3}}{a_{2n+3}+a_{2n+2}} = 1+\frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}} \overset{?}{<} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}}$$

$$\cancel{1+\frac{a_{2n}+a_{2n-1}}{a_{2n+2}}}$$

Por inducción se demuestra que ambas son monótonas. Por lo tanto como son acotadas a la vez son de Cauchy y tienen límite. Veamos cual es.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow \lim \frac{a_n+a_{n-1}}{a_n} = L = \lim 1+\frac{a_{n-1}}{a_n} = L$$

$$\Rightarrow 1 + \lim \frac{a_{n-1}}{a_n} = L$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{L} = L$$

$$\Rightarrow L^2 - L - 1 = 0$$

$L = \Phi$ ó $L = \frac{-1}{\Phi}$ pero L es positivo

por lo que $L = \Phi$

S12

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).

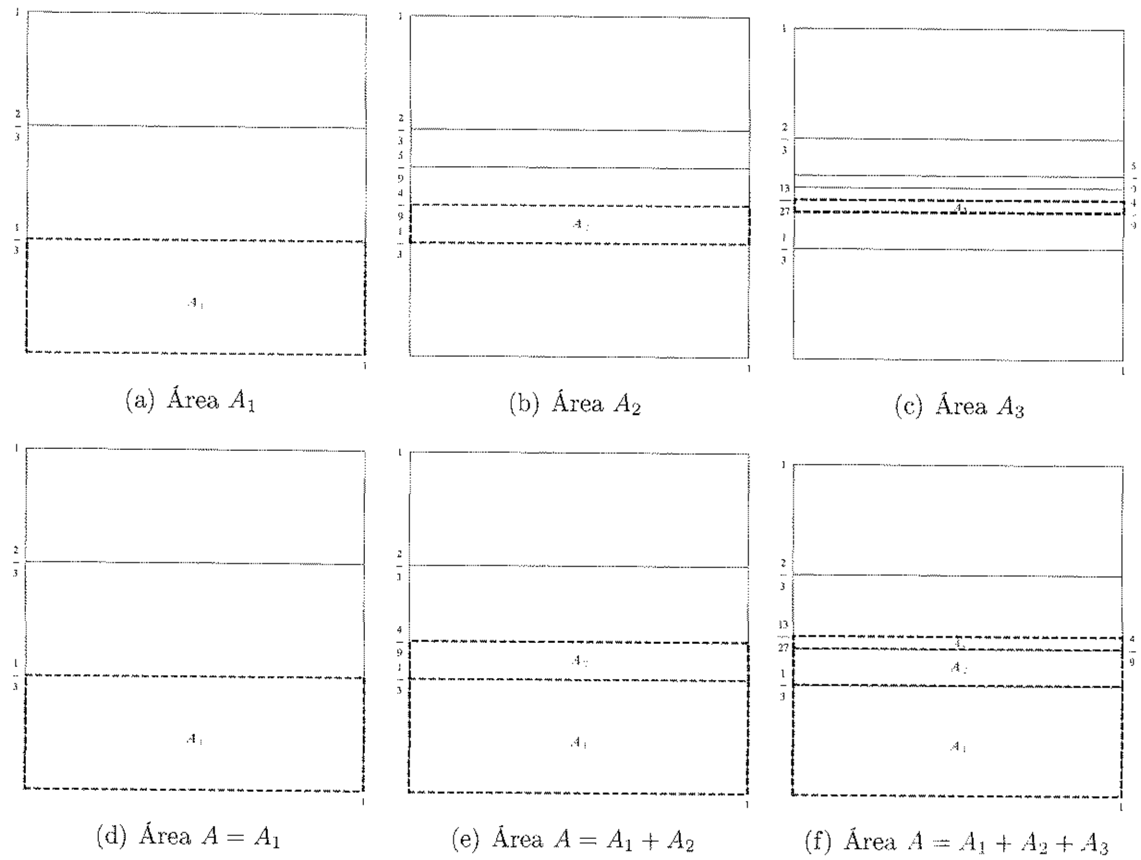


Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

S13

(83)

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Diego Ávila Hernández 3º

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? León Felipe Benavente (Zamora)
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones		funciones	X	Series		Particiones	X	Superior/Inferior		Integral Definida	X

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato?

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

es integrable ya que no tiene discontinuidades

$$\int_0^2 3x\, dx = 3\frac{x^2}{2}\Big]_0^2 = 6$$

Calificación de la dificultad | X | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

   a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable.

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) Falsa, ya que el conjunto de discontinuidades de f puede no tener medida nula

b) verdadera.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | X | 4 | 5 |

513

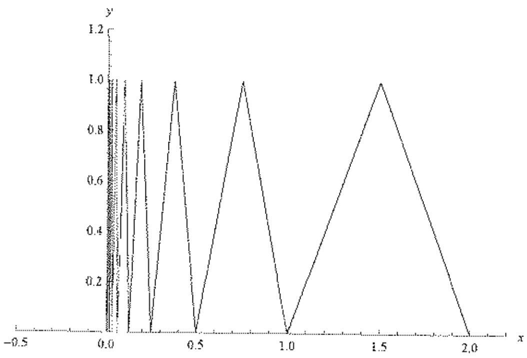


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

~~a) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{2^n}x & \text{si } x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}] \\ -\frac{1}{2^n}x & x \in \end{cases}$~~

Calificación de la dificultad 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty} t\frac{1}{2^n}\Big]_0^x = 0$$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5

513

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | X | 4 | 5

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a/ $\{a_n\}_{n \in I}$ $\qquad \frac{a_n+1}{a_n}$

b/ es ~~creciente $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$ porque~~ a_1 y a_2 son positivos con lo que todos los demas tambien

supongamos $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$

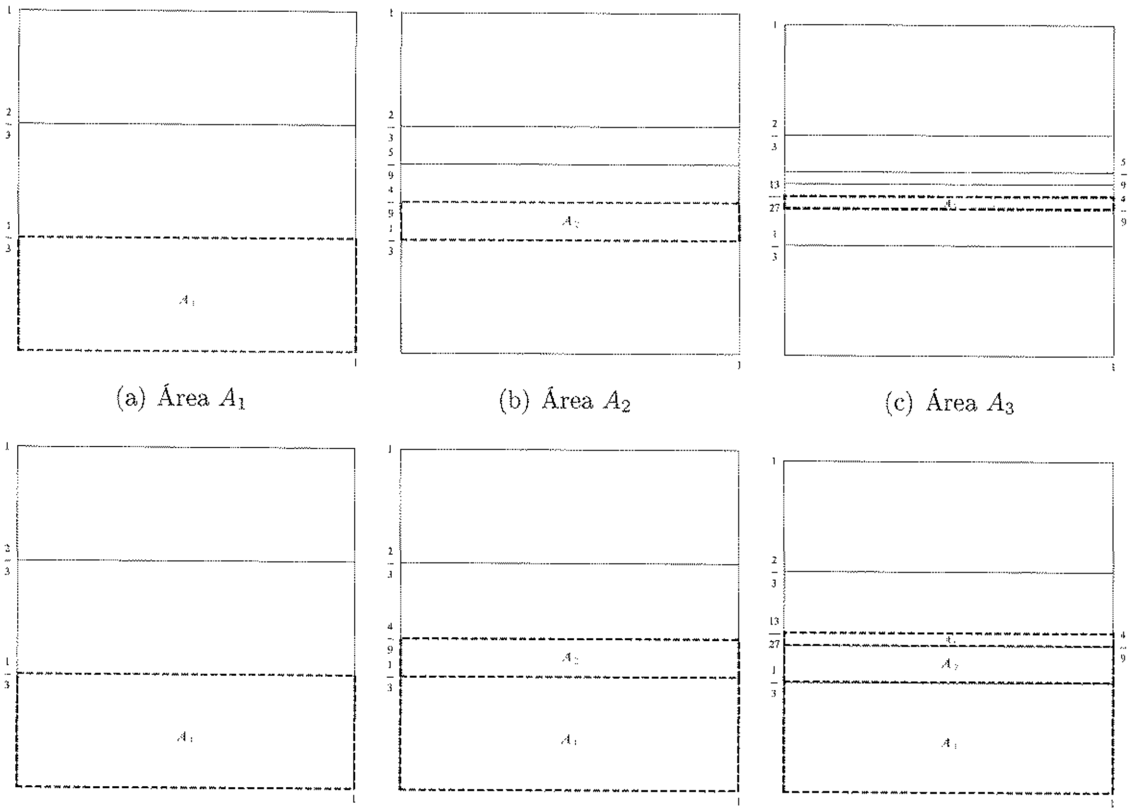
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{?}{\leq} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}+a_n}{a_n+a_{n-1}} = \frac{2a_n+a_{n-1}}{a_n+a_{n-1}} = 1 + \frac{a_n}{a_n+a_{n-1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\| $$

$$\frac{a_n+a_{n-1}}{a_{n-1}+a_{n-2}} = \frac{2a_{n-1}+a_{n-2}}{a_{n-1}+a_{n-2}} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+a_{n-2}} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Calificación de la dificultad X | 2 | 3 | 4 | 5

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

Área $A_i = \frac{1}{3^i}$ $\Rightarrow$ si $n=3$ Área $= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$

$\lim_{n\to\infty}$ área $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

Una gran diferencia de nivel

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

Un proceso que se repite sin llegar a parar nunca

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Darío Sánchez García

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? IES Isabel de Castilla

2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones	X	funciones	X	Series	X	Particiones	X	Superior/Inferior		Integral Definida	

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato?

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$. $f(x)=3x$ integrable en $[0,2]$, $f(x)$ es continua en el intervalo $[0,2]$ y $f(x)$ es derivable $\Rightarrow$ $f(x)$ es integrable

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 3x\,dx = \left[\frac{3x^2}{2}+k\right]_0^2 = \frac{3\cdot 2^2}{2}+k-\frac{3\cdot 0}{2}-k = 6.$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

   a) Supón que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces f es integrable.

   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.

   c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b] \bigcap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) F. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es diferenciable ~~es continua sobre (a,b) es entonces f es integrable~~

b) V. Para que $F(x)$ sea derivable tiene que ser continua y $F(x)$ es derivable ya que es la primitiva de $f(t)$ $\Rightarrow F(x)$ es continua

c) V

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

514

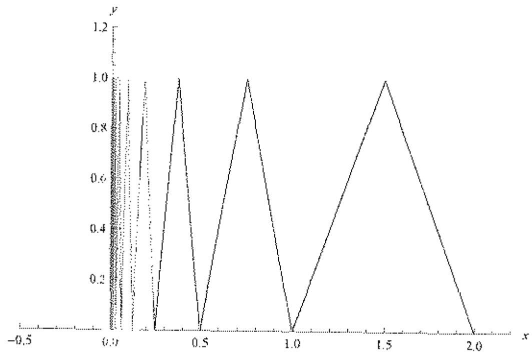


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.
   b) Determina la integrabilidad de la misma.
   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt$, $f(x) = \frac{1}{2^n}$ $\rightarrow$ $\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{2^n}\,dx =$ $=$

$x \in [n-1, n]$, $n = 1, 2, 3 \ldots$; $x \to \infty \Rightarrow x \in [n-1, \infty)$ $\Downarrow$ $n \to \infty$

$= \lim_{x\to\infty} \int_0^x \lim$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

S14

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada $\begin{cases} \text{superior} \\ \text{inferiormente} \end{cases}$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ y sabemos que $a_{n+1} \geq a_n \geq a_{n-1} \Rightarrow$

está acotada inferiormente por 1 puesto que a_1 y a_2 son positivos($a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n > 0$)

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{\infty}{\infty} = 1 + 0 = 1.$ Superiormente está acotada por 2 ~~Ginaga~~

$a_{n-1} < a_n \Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_\infty} = 0$. (Si $a_n = a_{n-1} \Rightarrow 1 + \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$).

b) Como hemos visto antes $a_{n+1} \geq a_n$ puesto que $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ y a_n y a_{n-1} son positivos, entonces

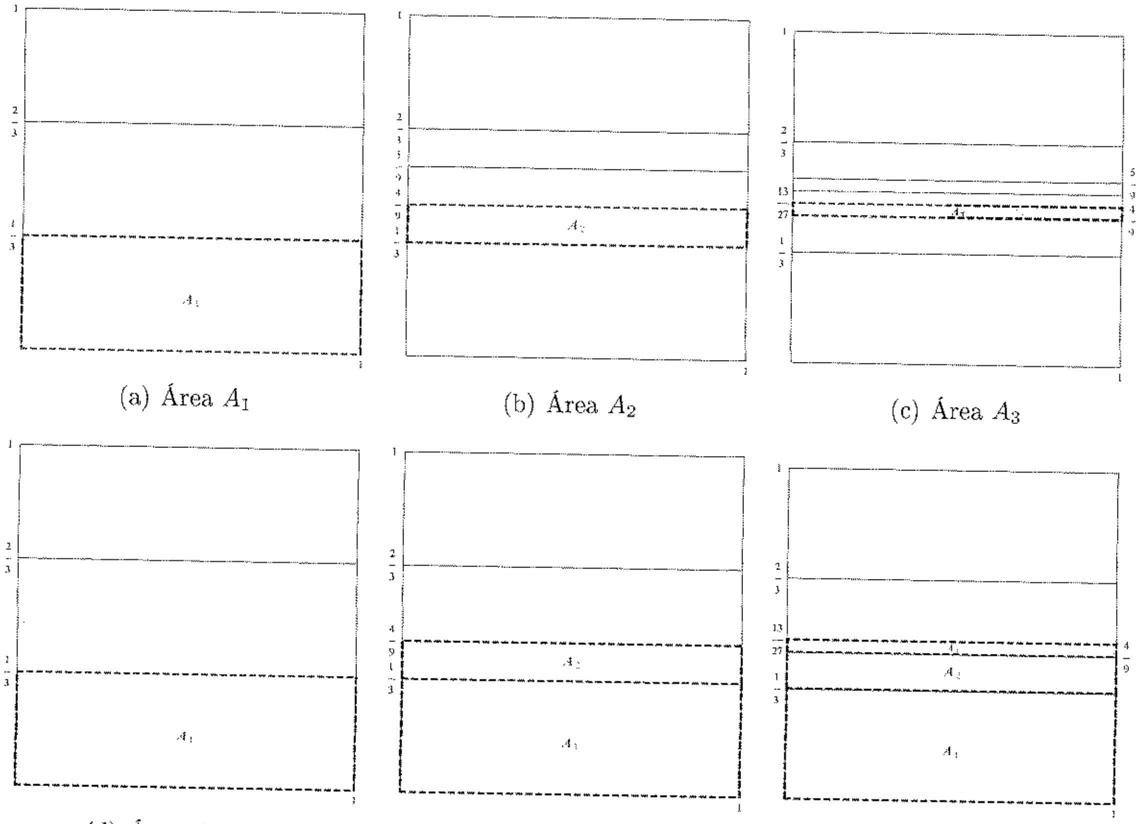
$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Es decreciente}}$

ejercicio anterior

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

514

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

~~a) Área $A = A_1 = \frac{1}{3}$ $\lim A = A_1 = \frac{1}{3}$, b) Área A A_2 $(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$ $\lim A$ $A_1 = \frac{1}{9}$~~

Área $A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n + \ldots$

$\lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty} A_1 + A_2 + \ldots + A_n \ldots = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^{\infty}} \leq 1.$

$A_1 = \frac{1}{3}$, $A_2 = \frac{1}{9}$, $A_3 = \frac{1}{27}$, ...

Calificación de la dificultad 1 2 3 4 5

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

En el bachillerato eran conceptos cerrados que ~~[illegible]~~ no se explicaban del todo y en la universidad son conceptos que se busca entender y comprender para manejarlos correctamente

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

Un proceso que se puede repetir un número infinito de veces sin hallar la solución buscada.

S15

(85)

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Nombre: Concepción Rueda Prol 3.º.

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? IES. GREDOS

2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones	X	funciones	X	Series		Particiones		Superior/Inferior		Integral Definida	

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato? Ninguno, apuntes del profesor.

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

$f(x) = 3x$. integrable en $[0,2]$. Para que sea integrable ~~su derivada existe y es continua~~.

$f'(x) = 3$ y es continua. SI es integrable.

$\int_0^2 f(x)\,dx = 3\Big]_0^2 = 3$.

Calificación de la dificultad

1	$\cancel{2}$	3	4	5

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable. V

b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua. F

c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. F

b) $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Calificación de la dificultad

1	$\cancel{2}$	3	4	5

S13

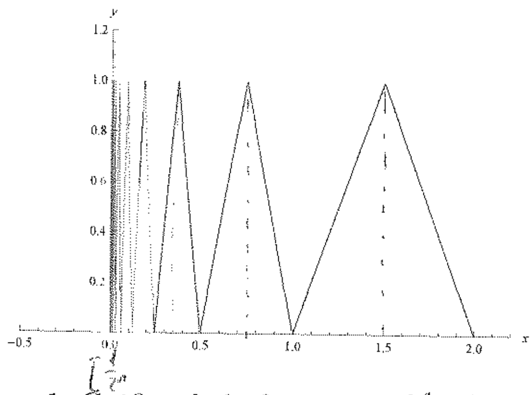


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

a) $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ $\{y = 2x - 2$ $\quad x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-2}}]$ e $\{y = -2x - 2$ $\quad x \in [\frac{1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2^{n-1}}]$

b) No es integrable, pero sí a trozos.

c) $\int_{1/2^n}^{1/2^{n-2}} g(x)\, dx.$

$\int_{1/2^{n-2}}^{1/2^{n-1}} g(x)\, dx.$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty g(x)\, dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x g(t)\, dt.$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^n}\, dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n}\, dt. = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} t \Big]_0^x \right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2^n} x$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

5/5

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

• f integrable en $[0,1]$ $\quad x \in (0,1) \quad \in \mathcal{L}^1$? $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\int$ es convergente. $\overset{?}{\Rightarrow}$

$\int <$ finita. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{2^n} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$ que n es fijo $\Rightarrow$ convergente.

• $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{2^n} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. $\quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{?}{\leq} M$ acotada?

$$a_{n+1} = \left|\frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}\right| = \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leq |1| + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leq$$

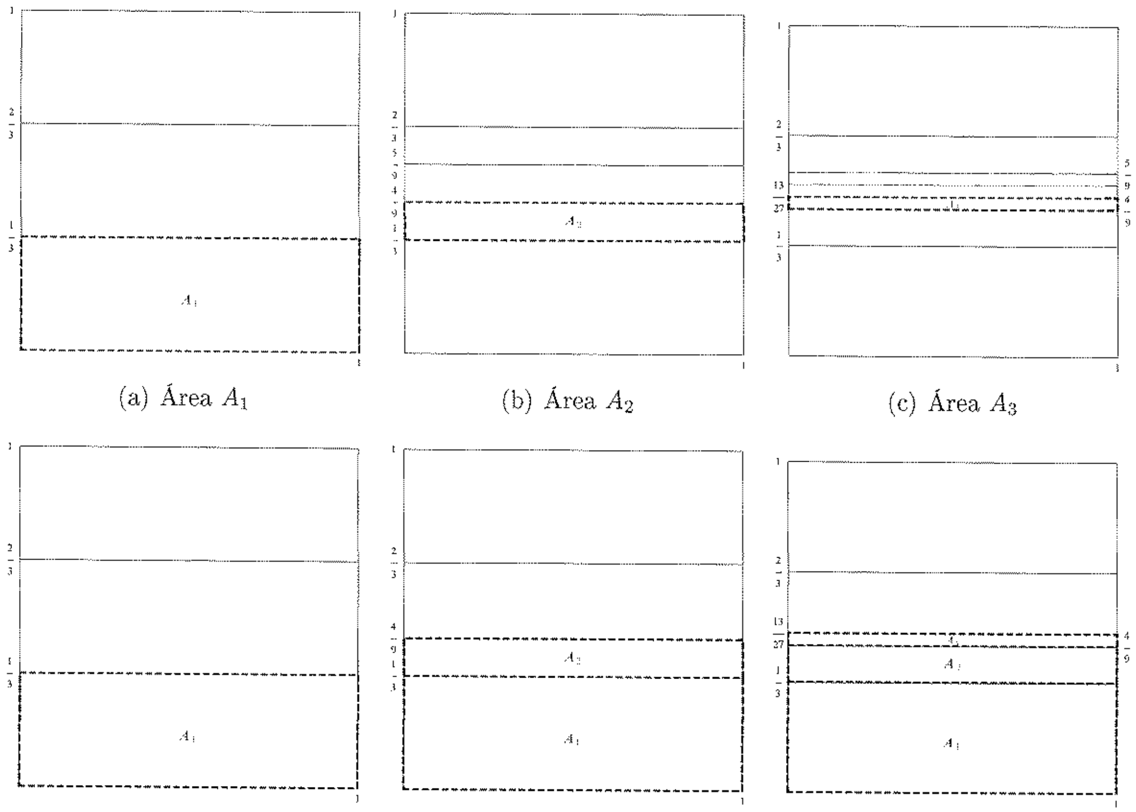
$$= 1 + \underbrace{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|}_{\leq\, 1 + \left|\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right| \cdots \leq 1 + \left|\frac{a_1}{a_2}\right|} \leq n \Rightarrow a_{n+1} \text{ acotada.}$$

$\left|\frac{a_1}{a_2}\right| \leq 1$.

Calificación de la dificultad 1 | 2 | ~~3~~ | 4 | 5

515

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty} (A_1 + \cdots + A_n + \cdots) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \longrightarrow \infty.$$

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ X | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

Que los del bachillerato son muy inferiores a los de la Universidad. Además, en Bachillerato no se dan tantos conceptos para venir preparados a la carrera de Matemáticas (En mi caso)

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

S16

(86)

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

2°

Nombre: Luis García Corona

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? IES Vaguada de la palma
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	x	Sucesiones	x	funciones	x	Series		Particiones		Superior/Inferior		Integral Definida	x

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato?

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$. Si es integrable.

$$\int_0^2 3x\,dx = 3\int_0^2 x\,dx = 3\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 6$$

Calificación de la dificultad | $\cancel{1}$ | 2 | 3 | 4 | 5 |

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

   a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable. V

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.

   c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | $\cancel{4}$ | 5 |

S16

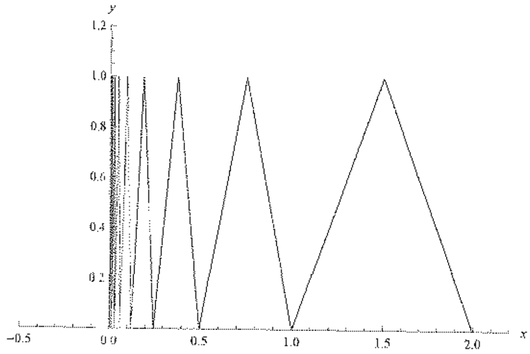


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

$\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{t}{2^n}$

Calificación de la dificultad $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

5116

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar } , 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.
   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?
   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

c)/ y a) Sabemos que la sucesión es creciente por lo que su limite inferior será a_1. Tenemos que ver cual es su limite superior. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq L$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \frac{L}{L - a_{n-1}} = 1 + \frac{L - a_n}{a_n} \Rightarrow$

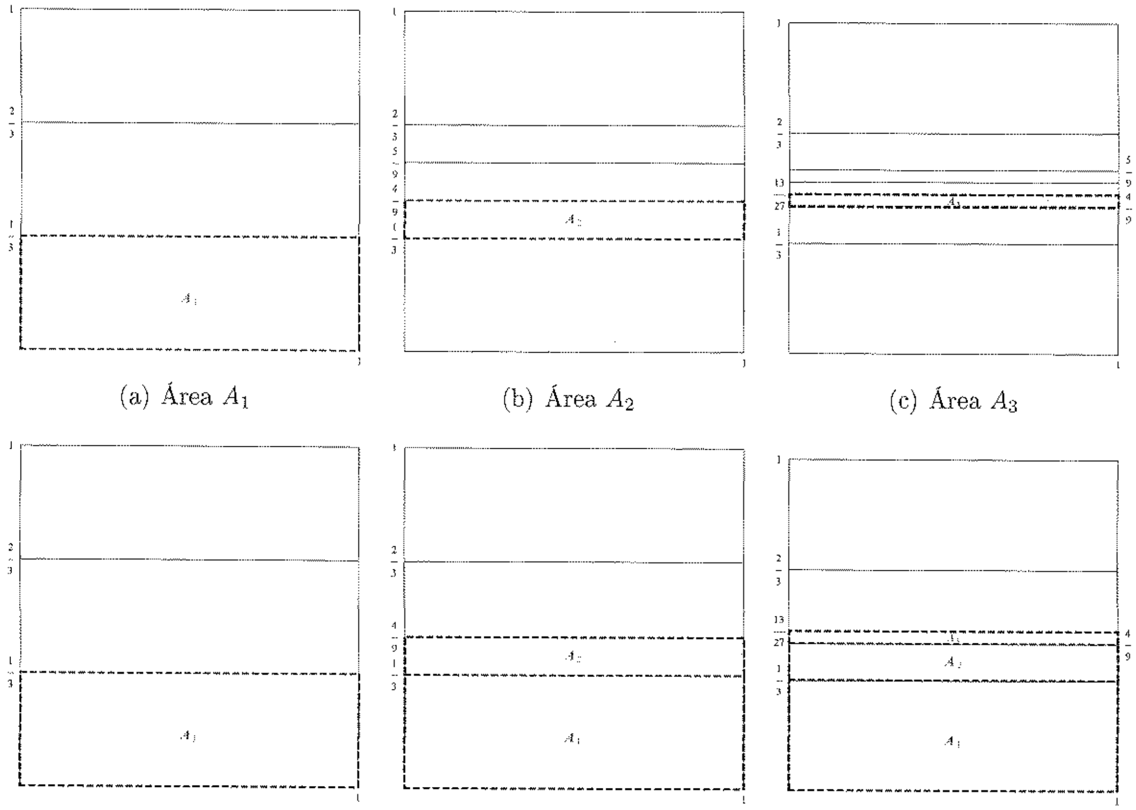
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow$ No me acuerdo ~~de~~ como se hacia.

b) Es monótona Creciente y se ve facilmente, ya que la sucesión se genera de la suma de ~~los~~ numeros positivos, dando otro numero positivo, y así sucesivamente.

Calificación de la dificultad | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

516

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \cancel{\tfrac{1}{3}} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad? En realidad no es ni parecido. Antes de estudiar la carrera nunca habia leido ninguna definición matematica como he leido durante la carrera, lo que dificultaba mi compresión ~~en~~, y no entendia los conceptos matematicos, cosa que dificultaba mucho el estudio.

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

~~Un proceso que~~ Una aplicación que se hace ~~un numero~~ infinitas veces.

S 1+

(87)

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

2do

Nombre: Miguel Julián Molina

A. ESTUDIOS PREVIOS

1. ¿En qué instituto o colegio estudiaste? IES LA VAGUADA DE LA PALMA (SALAMANCA)
2. Señala con una **X** los conceptos que viste en las Matemáticas del Instituto

Límites	X	Sucesiones	X	funciones	X	Series		Particiones		Superior/Inferior		Integral Definida	X

3. ¿En qué texto estudiaste las matemáticas de bachillerato?

B. INTEGRACIÓN

1. Determina si la función $f(x) = 3x$ es integrable en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

f es una función ~~[illegible]~~ polinómica, luego es integrable en todo $\mathbb{R}$

$$\int_0^2 3x\,dx = \left.\frac{3x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3\cdot 4}{2} - 0 = 6$$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

2. Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

a) Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces f es integrable.

b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es continua.

c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b] \bigcap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

a) ~~Falso. Su [illegible] derivada es integrable, pero de~~
Verdadero por el criterio de integrabilidad de Riemann.

b) Falso. Por ejemplo $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ -x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$

es integrable y $F(x)$ no es continua en $[a, b]$.

c) Verdadero, ya que hay mayor volumen de irracionales que racionales

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

517

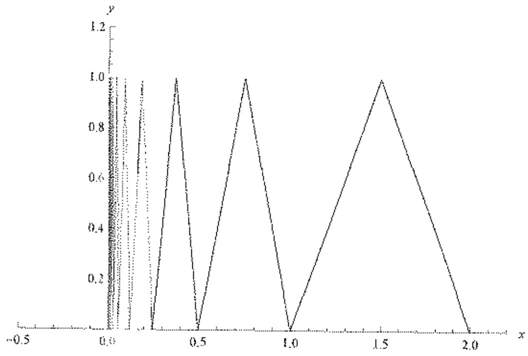


Figura 1: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función cuya gráfica es la dada en la figura (1)

   a) Obtén una expresión algebraica para la misma en el intervalo $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$.

   b) Determina la integrabilidad de la misma.

   c) Calcula según sea el caso, el valor de la integral.

a) $f : [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \left| \frac{1}{2^n} x \right|$

b) Es integrable porque el conjunto de puntos de discontinuidad es finito (0). (Criterio de Lebesgue).

c) $\int_a^b \frac{1}{2^n} x\,dx = \frac{1}{2^n} \left. \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

4. Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$. Determina $\int_0^\infty f(x)dx$, siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n], n = 1, 2, 3, \ldots$

$\int_0^\infty \frac{1}{2^n} dx = \left. \frac{x}{2^n} \right]_0^\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{t}{2^n} = \infty$

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

517

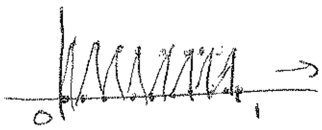
5. Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar }, 0 < k < 2^n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$, y que, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

El conjunto de puntos de discontinuidad es finito, por tanto $f(x)$ es integrable por el criterio de Lebesgue.

$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ porque es una superficie sin área:



→ pero sin unirlos, que son discontinuidades

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

C. SUCESIONES

1. Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ con $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   a) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada.

   b) ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión del literal anterior?

   c) Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_{n-1} + a_{n-2}} = \ldots =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-2} + a_{n-4} + \ldots + a_2}{a_{n-1} + a_{n-3} + \ldots + a_1} = \phi$

b) Es monótona creciente si a_1 y a_2 positivos

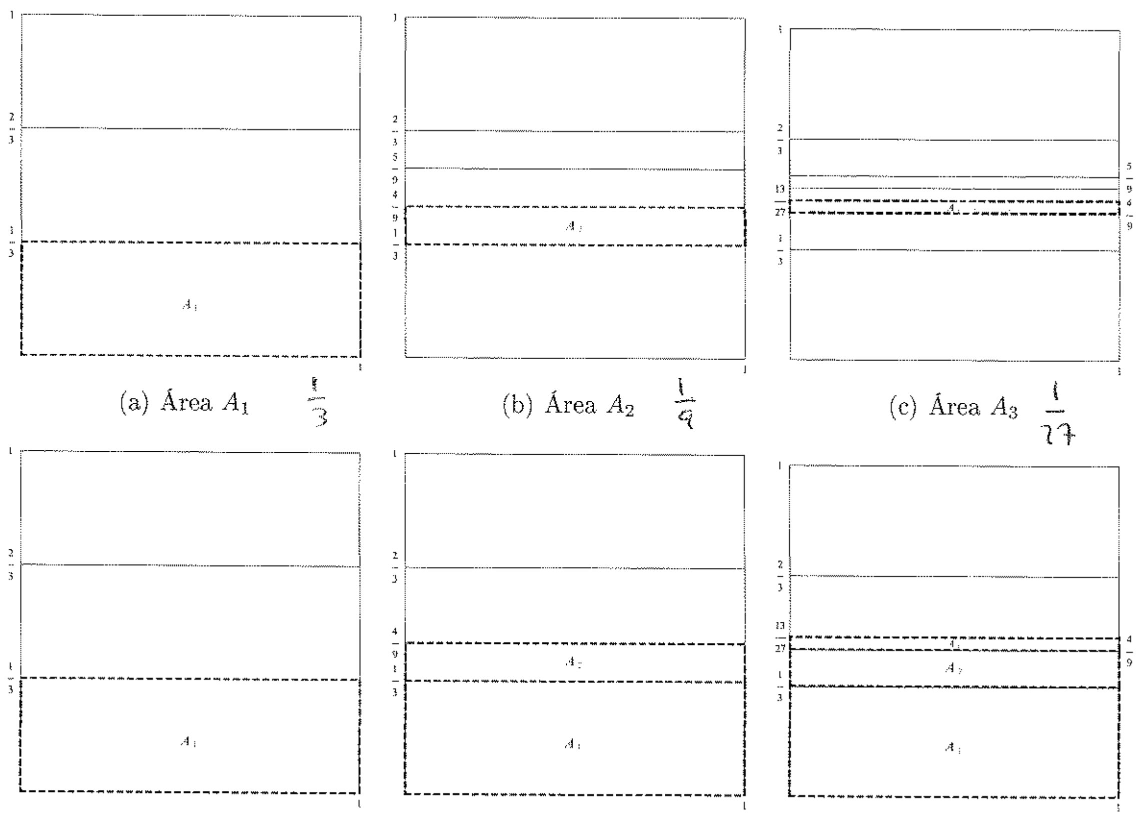
Es monótona decreciente si a_1 y a_2 negativos

Es oscilante si a_1 y a_2 de distinto signo

Calificación de la dificultad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

S17

2. Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la figura (2).



(a) Área A_1 $\frac{1}{3}$ (b) Área A_2 $\frac{1}{9}$ (c) Área A_3 $\frac{1}{27}$

(d) Área $A = A_1$ $\frac{1}{3}$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ (f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$

Figura 2: Con $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ se obtiene $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3}$$

Calificación de la dificultad 1 | 2 | 3 | 4 | 5

D. ESTUDIOS ACTUALES

1. ¿Qué diferencia has notado entre estos conceptos estudiados en el bachillerato y ahora en la Universidad?

La principal diferencia es que en el instituto no había conceptos; la mayoría de los profesores se limitaban a enseñar recetas para solucionar ejercicios tipo, luego para mí fueron nuevos.

2. ¿Qué entiendes por Proceso Infinito?

Un algoritmo de infinitas iteraciones.

Anexo 8

Tabla Inicial de Actos

	SUCESIONES ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDENTIFICACIÓN	Identifica las formas de presentación de sucesiones numéricas: Numérica: $\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13, \cdots\}$, Algebraica: $(a_n)_{n\in N}$ y Gráfica del proceso infinito que se presenta en la Figura 1.29.	Creencia errónea de que la sucesión $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots, \frac{1}{3^n}$ es infinita.
		Confusión de las áreas gráficas con dibujos exentos de significación o con una significación distinta a la pretendida.
	Identifica una sucesión.	Asignación al subíndice n lavariación cuando no es tal: $(a_{in})_{i\in N}$
DISCRIMI.	Discrimina entre los distintos tipos de sucesiones.	No distinción entre sucesiones convergentes y no convergentes, monótonas y no monótonas, con llegada en distintos conjuntos numéricos $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.
GENER.	Relaciona una sucesión con subsucesiones suyas.	Dificultad para determinar la conservación d elas subsucesiones.
SISTEMATIZACIÓN	Aplica la aritmética de límites de sucesiones.	Confusión de las propiedades de las sucesiones.
	Maneja los criterios de convergencia de sucesiones y subsucesiones.	Dificultad a la hora de relacionar la completitud de $\boldsymbol{R}$ (Principio de encaje de Cantor), el teorema de Bolzano-Weierestrass[1] y el criterio de Cauchy[2], entre otros.

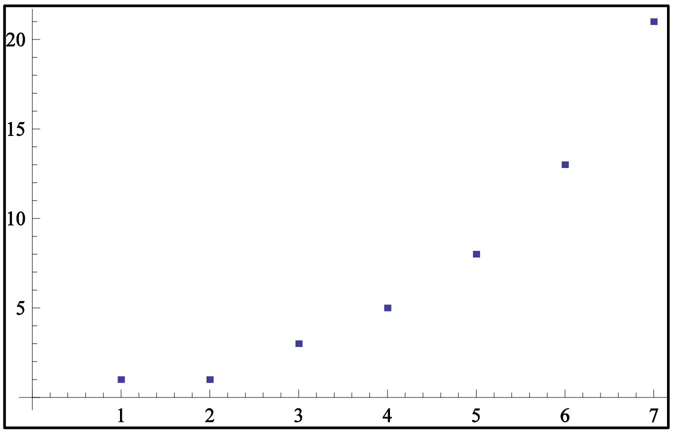


Figura 1.1 Sucesión de Fibonacci con $a_1 = 1, a_2 = 2$.

---

[1] Cualquier sucesión acotada en $\boldsymbol{R}$posee una subsucesión convergente.

[2] Una sucesión en $\boldsymbol{R}$es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Tabla 1.1 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con la monotonía.

MONOTONÍA		
	ACTOS DE COMPRENSIÓN	**ERRORES Y/O OBSTÁCULOS**
IDEN.	Identifica una función (sucesión) monótona creciente o decreciente.	Dificultad en la reproducción y experimentación de los modos de representación de una función (sucesión, serie).
DISC.	Discrimina entre las funciones (sucesiones) que son monótonas y las que no lo son.	Confusión entre monotonía y convergencia.
GEN.	Manipula expresiones genéricas asociadas a la monotonía.	Dificultad en el tratamiento de desigualdades algebraicas.
SIST.	Utiliza adecuadamente el concepto.	Posesión de esquemas inadecuados de variación de variables: $(n,\ a_n)$ y $(x,\ f(x))$.

Tabla 1.2 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con la variación infinita.

VARIACIÓN INFINITA		
	ACTOS DE COMPRENSIÓN	**ERRORES Y/O OBSTÁCULOS**
IDENTIFICA.	Identifica dominios y valores numéricos: $n \to a_n, n \to \sum_{1<i<n} a_i , x \to f(x)$	Confusión entre los extremos absoluto y relativo.
DISCCRIMINACIÓN	Discrimina entre conjuntos finitos e infinitos.	No distinción entre conjuntos infinitos y los que no lo son.
	Discrimina entre conjuntos numerables y no numerables.	No distinción entre el infinito potencial y el actual.
	Discrimina entre conjuntos densos y no densos	No distinción entre las propiedades de numerabilidad y densidad de conjuntos.
GEN.	Manipula algebraicamente conjuntos infinitos.	Confusión de la naturaleza de subíndices y variables reales
SISTEMATIZACIÓN	Es capaz de utilizar los criterios de caracterización.	Dificultad para plasmar algebraicamente conjuntos con variaciones infinitas.
		Dificultad comprensión de la relación de inclusión y cardinalidad en conjuntos infinitos.

Tabla 1.3 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con los extremos.

	EXTREMO ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDENTIF.	Identifica numérica y gráficamente extremos absolutos $(máx, mín)$, extremos relativos $(máx, mín)$, supremo e ínfimo $(sup, ínf)$.	Confusión entre extremos absolutos y relativos
DISCCRIMINACIÓN		Falta de criterios para aplicar recursos discriminatorios
	Discrimina entre cota superior, supremo (sup), cota inferior e ínfimo $(ínf)$.	Confusión entre extremos y cotas, entre extremo superior y máximo (Ídem inferior)
GEN.	Maneja conceptos de supremo e ínfimo, es decir, saber lo que es la menor cota superior y la mayor de las inferiores.	Falta de conocimiento y manejo orden de los reales y su totalidad.
SIST.	Maneja los axiomas relacionados con el (sup), y el $(ínf)$.	Dificultad en la determinación analítica o algebraica del (sup), y el $(ínf)$.

Tabla 1.4 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con el límite.

	LÍMITE ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDEN.	Identifica el concepto de límite de una función y de una sucesión, de “series de sucesiones”	Dificultad en la comprensión del concepto de límite.
DISC.	Discrimina entre los conceptos de límite de una función, límite de una sucesión y límite de una serie	Dificultad en el manejo algebraico de expresiones que son inherentes al uso de desigualdades relacionadas con el $\varepsilon - \delta$.
GENE.	Es capaz de determinar si existe o Noel límite de una función, serie o sucesión.	Falta de conocimiento y manejo de las concepciones geométricas, numérica, analítica o topológica relacionadas con el concepto de límite.
SIST.	Aplica los teoremas de caracterización de límites de funciones, sucesiones y series.	Imprecisión o errores en el cálculo de límites vía procedimientos algebraicos o analíticos.

Tabla 1.5 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con particiones.

<table>
<tr><th colspan="3">PARTICIÓN</th></tr>
<tr><th></th><th>ACTOS DE COMPRENSIÓN</th><th>ERRORES Y/O OBSTÁCULOS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">IDENTIFICACIÓN</td><td>Identifica e interpreta verbal o simbólicamente los elementos de un conjunto.</td><td>Aceptación de un conjunto infinito como una partición.</td></tr>
<tr><td>Identifica partición e intervalo y la pertenencia de los puntos a una partición.</td><td>Aceptación de particiones como intervalos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">DISCRIMINACIÓN</td><td rowspan="2">Distingue entre particiones y conjuntos que no lo son.</td><td>Dificultad en el recubrimiento del intervalo de partida.</td></tr>
<tr><td>Confusión entre inclusión y pertenencia.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Discrimina la finura de una partición.</td><td>Confusión entre número de puntos con finura.</td></tr>
<tr><td>Dificultad para realizar el procedimiento de refinamiento</td></tr>
<tr><td rowspan="3">GENERALIZACIÓN</td><td>Construye de manera general particiones, sean equidistribuidas o no.</td><td>Carencia del dominio de la aritmética de los números reales. Por ejemplo, cuando $\frac{b-a}{p} = h$; con $a, a+h, a+2h, a+3h, \cdots, a+ph = b$.</td></tr>
<tr><td>Construye numéricamente particiones equidistribuidas más finas, de forma general, conservando los puntos iniciales.</td><td>Dificultad para construir particiones más finas</td></tr>
<tr><td>Sabe construir particiones equiespaciadas con paso dado.</td><td>Dificultad para definir particiones</td></tr>
<tr><td>SIST.</td><td>Sabe procesar algebraicamente las particiones.</td><td>Desconocimiento de la topología real. Intersecciones y uniones de abiertos, cerrados, compactos,…</td></tr>
</table>

Tabla 1.6 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con series.

	SERIE ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDENTIFICACIÓN	Identifica las formas de presentación de series numéricas: Algebraica: $\sum_0^\infty \frac{1}{3^n}$, numérica: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots$	Creencia errónea de que también son series infinitas sumas finitas como: $\frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{3^n}$.
		Confusión de las áreas gráficas con dibujos exentos de significación.
	Identifica una serie infinita	Asignación al subíndice n la variación infinita cuando no es tal, o finita, cuando es infinita: $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.
DISCRIMINACIÓN.	Discrimina entre los distintos tipos de series.	No distinción entre series convergentes y divergentes.
	SU$_4$: Discrimina entre el término general de una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y una suma parcial $\sum_{i=1}^{n} a_i$.	Confusión entre término general de una serie y una suma parcial.
		Confusión entre la suma parcial y la serie.
	Discrimina la convergencia de la necesidad de que el término general tienda a cero: $\sum \frac{1}{n} = \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$.	Identificación de la tendencia a 0 del término general de una serie con la convergencia de la misma.
GENE.RALIZACIÓN	Sabe manejar los restos. Por ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$	Dificultad para manejar los restos.
	Sabe aplicar los criterios de convergencia, y sumabilidad de una serie.	Dificultad para aplicar criterios de sumabilidad y de convergencia de una serie.
SISTE.	Sabe aplicar los criterios de convergencia, y sumabilidad de una serie.	Dificultad para aplicar criterios de sumabilidad y de convergencia de una serie.

Tabla 1.7 Actos de comprensión y obstáculos relacionados con la integral definida.

	INTEGRAL ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
IDENTIFICACIÓN	Identifica las sumas inferior y superior y discriminar entre ambas.	Imprecisión o errores en la determinación gráfica de las superficies inferiores y superiores.
	Identifica la integral inferior como el extremo superior de las sumas inferiores (ídem integral superior) y discrimina entre integral inferior y superior.	La integral inferior no se alcanza, se aproxima a un valor (ídem superior).
		Por la no comprensión del axioma del extremo superior (ídem Inferior)
	Identifica la función de Dirichlet y discriminar entre números racionales e irracionales.	Inseguridad en la representación de los números sobre la recta real.
	Identifica una partición del intervalo compacto $[a\,,b]$.	Confusión entre los subíndices y los nodos de la partición.
	Identifica los extremos absolutos de una función continua en un intervalo y discrimina entre mínimo y máximo absolutos.	Confusión entre extremo relativo y absoluto.
GEN.ERALIZACIÓN	Generaliza la sucesión de las áreas de una sucesión creciente de polígonos regulares inscritos en un círculo.	Desconocimiento u olvido de las razones trigonométricas.
	Generaliza los extremos absolutos para cada uno de los subintervalos de una partición.	No se acepta fácilmente que un máximo RELATIVO pueda ser REBASADO POR un mínimo RELATIVO o viceversa.
	IGeneraliza el conjunto de puntos intermedios asociados a una partición	El desconocimiento del conjunto de puntos intermedios genera ambigüedad.
	Generaliza el teorema del valor medio a cada uno de los subintervalos de la partición.	El valor que toma la función en los puntos intermedios es impreciso. Además, si el número de dichos puntos es "n", entonces la correspondiente suma de Riemann, más que comprendida, es aceptada.
	Generaliza y sintetiza el cálculo de áreas comprendidas entre la gráfica de una función (positiva, negativa, que cambia de signo, definida a trozos), el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.	El cálculo de áreas se reduce a: $\int_a^b f(x) = F(x)[_a^b = F(b) - F(a)$
	Generaliza y síntesis del área comprendida entre dos curvas y las rectas $x = a$ y $x = b$.	Dificultad para aplicar el algoritmo para calcular el área entre dos curvas.

INTEGRAL	ACTOS DE COMPRENSIÓN	ERRORES Y/O OBSTÁCULOS
SISTEMATIZACIÓN	Sintetiza el área del círculo mediante el límite de la sucesión de áreas poligonales.	Dificultad en la comprensión del concepto de límite de una sucesión.
		Aceptación como un axioma que el área del círculo es πr^2.
	Sintetiza la suma inferior, área y suma superior, es decir: $s(f,P) \leq A \leq S(f,P)$	Las desigualdades no resultan evidentes para los estudiantes cuando la partición tiene un número indeterminado "$n+1$" nodos.
	Sintetiza una función integrable Darboux en un intervalo compacto $[a,b]$.	Si las sumas inferior y superior se aproximan a un mismo valor tanto como deseemos, no necesariamente son iguales las integrales inferior y superior.
		No es fácil encontrar la partición P del teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.
	Sintetiza la existencia de funciones no integrables Darboux.	No resulta fácil aplicar correctamente el algoritmo correspondiente.
	Sintetiza las sumas inferior y superior de Darboux y la suma de Riemann, es decir: $s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P)$	Dificultad en la comprensión analítica de expresiones algebraicas asociadas a las desigualdades entre la suma de Riemann y las sumas inferiores y superiores de Darboux.
	Sintetiza una función integrable Riemann en un intervalo compacto $[a,b]$.	Confusión en la definición conceptual de función integrable Riemann.
	Sintetiza el teorema de los incrementos finitos.	Desconocimiento del teorema del valor medio del cálculo diferencial y comprensión deficiente de su interpretación geométrica.
SISTEMATIZACIÓN	Sintetiza el teorema fundamental del cálculo.	El teorema fundamental del cálculo es la regla de Barrow.
	Sintetiza la tesis de que no siempre es posible encontrar una primitiva de una función integrable.	Siempre es posible encontrar una primitiva de una función.
		Todas las funciones integrables tienen una primitiva que puede ser escrita en forma explícita.
	Sintetiza la integración numérica como sumas agrupadas bajo diferentes criterios.	Utilización indiscriminada del método rectangular como método de integración numérica.
		Asociación de la utilización de una regla de integración numérica con la facilidad de sus cálculos, y no con la precisión de la misma.

Anexo 9
Redes Sistémicas

PREGUNTA	ACTO DE COMPRENSIÓN ASOCIADO	OBSTÁCULO ASOCIADO
1A	Construye de manera general particiones, sean equidistribuidas o no.	Carencia del dominio de la aritmética de los números reales. Por ejemplo, cuando $\frac{b-a}{p} = h$; con $a, a+h, a+2h, a+3h, \cdots, a+ph = b$.
1B	Generaliza la suma de Riemann	Dificultad para establecer las expresiones analíticas de las sumas de Riemann.
1C-1D	Sintetiza el teorema fundamental del cálculo.	Dificultad para aplicar correctamente los teoremas de caracterización de las funciones integrables.
2A	Sintetiza una función integrable Riemann en un intervalo compacto $[a, b]$.	Confusión en la definición conceptual de función integrable (Riemann o Darboux).
2B	Sintetiza el teorema de los incrementos finitos.	Desconocimiento del teorema del valor medio del cálculo diferencial y comprensión deficiente de su interpretación geométrica.
2C	Generaliza la suma inferior y la suma superior.	Dificultad para establecer las expresiones analíticas de sumas superiores e inferiores.
3A	Identifica una función (sucesión) a trozos, monótona creciente o decreciente, etc.	Dificultad en la reproducción y experimentación de los modos de representación de los modos de representación de una función (sucesión, serie).
3B	Confusión de las áreas gráficas con dibujos exentos de significación.	Confusión de las áreas gráficas con dibujos exentos de significación o con una significación distinta a la pretendida.
4	Generaliza y sintetiza del concepto integral indefinida: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.	Dificultad para identificar el extremo superior de la integral y la variable de integración y posible intercambio de uno y otro.
5	Sintetiza una función integrable Darboux en un intervalo compacto $[a, b]$.	No es fácil encontrar la partición P del teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.
6A	Pasa de la representación del término general a la sucesión. Por ejemplo, como muestra la Figura 1: $A_1 = \frac{1}{3}, \cdots, A_n = \frac{1}{3^n}$.	Dificultad para interpretar, representar y manipular con solvencia el simbolismo algebraico de las sucesiones.
6B	Discrimina entre los distintos tipos de sucesiones.	No distinción entre sucesiones convergentes y no convergentes, monótonas y o monótonas, con llegada en distintos conjuntos.
6C	Aplica la aritmética de límites de sucesiones.	Confusión de las propiedades de las sucesiones.
7	Discrimina entre el término general de una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y una suma parcial $\sum_{i=1}^{n} a_i$.	Confusión entre la convergencia del término general con el de la serie.

Red sistémica del ítem 1A del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Determine una partición del intervalo $[0,1]$. **(R1A)**

R1A

- Respuesta Correcta
  - (41)(43)(54)(55)(57)(60)(61)(62)(63)(70)
- Respuesta incorrecta
  - A través de los subintervalos de la partición y no del conjunto de elementos de la partición.
    - Ejemplos
      - $\left[0,\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\left[\frac{2}{3},\frac{3}{3}\right)$ — (2)(38)
      - $\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{6},1\right]$ — (24)
      - $[\ (0,0.5)\cup(0.5{,}0.7)\cup(0.7{,}1)]$ — (29)(30)(34)
      - $\left[0,\frac{1}{10}\right);\left[\frac{1}{10},\frac{1}{5}\right);\left[\frac{1}{5},\frac{3}{10}\right);\cdots;\left[\frac{9}{10},1\right]$ — (9)(11)
  - A través de una gráfica.
    - (7)(12)(14)(15)(16)(40)(42)(44)(46)(47)(49)(50)(51)(52)(53)(56)
  - A través de un contador. Por ejemplo escribiendo sólo $n=100$.
    - (10)
- No lo hace
  - (1)(3)(4)(5)(6)(8)(13)(17)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(25)(26)(27)(28)(31)(32)(33)(35)(36)(37)(39)(45)(48)(58)(59)(64)(65)(66)(67)(68)(69)

Red sistémica del ítem 1B del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ defina una suma de Riemann para f. Para $n = 10$, dé un valor aproximado de la suma. **(R1B)**

R1B

- Respuesta incorrecta
  - Utiliza la regla de Barrow
    - Correctamente — (7)
    - Incorrectamente — (15)
  - Calcula el valor
    - Correcto
      - $\sum_{i=1}^{10} \Delta_i$
      - $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1+n^2}$
      - (26)(61)
    - Incorrecto
      - $\sum_{x=1}^{10} \frac{1}{1+x^2}$ — (13)
  - Con mal manejo de contadores y subíndices y sin discriminar el papel que juega la imagen de la etiqueta del intervalo. — (6)(15)(19)(21)(31)(32)(35)(44)(49)(53)(54)(55)(58)(64)(65)(68)
- Respuesta Correcta
  - No calcula su valor. — (4)(9)(40)(57)(60)
  - Calcula erróneamente el valor — (16)(22)(41)
  - Partición equidistribuida — (2)(3)(10)(11)(23)(24)(25)(27)(29)(30)(34)(38)(39)(43)/45)(46)(47)(50)(51)(52)(56)(62)(63)
- No Responde — (1)(2)(7)(14)(15)(17)(18)(20)(33)(36)(37)(42)(45)(48)(66)(67)(69)(70)

Red sistémica del ítem 1C del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ determine si f es integrable en $[0,1]$. **(R1C)**

R1C

- Respuesta Correcta
  - Criterio de Continuidad.
    - (5)(9)(10)(13)(22)(24)(26)(27)(28)(31)(32)(34)(38)(39)(44)(45)(46)(50)(51)(56)(60)(65)(68)(69)
- Respuesta incorrecta
  - Integrable porque:
    - Se puede calcular la primitiva y usar la regla de Barrow *"hallar el área bajo la curva".*
      - (6)(14)(23)(43)(47)(59)
    - Todo $x \in [0,1]$ pertenece al dominio de la función.
      - (11)(29)(30)(62)
    - Es derivable.
      - (15)(58)
    - Como es continua es derivable por tanto, integrable.
      - (38)
    - Las sumas de Riemann pueden ser tan pequeñas como se quiera.
      - (16)
  - No es integrable "*porque no pude hallar la antiderivada".*
    - (19)
- No responde
  - (1)(2)(3)(7)(8)(12)(17)(18)(20)(21)(25)(33)(35)(36)(37)(40)(41)(42)(48)(49)(52)(54)(55)(57)(69)(63)(64)(66)(67)

Red sistémica del ítem 1D del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ¿Cuál es el valor de la ID? **(R1D)**

R1D

- Respuesta incorrecta
  - porque
    - La integral definida es el área bajo la curva y el eje x. Esta área es finita luego es integrable — (81)
    - Todo $x \in [0,1]$ pertenece al dominio de la función — (11)(29)(30)(62)
    - Como es continua es derivable por tanto, integrable. — (38)(84)
    - Las sumas de Riemann pueden ser tan pequeñas como se quiera. — (16)
  - No es integrable “*porque no pude hallar la antiderivada”* . — (19)
- Respuesta correcta
  - Criterio de continuidad. — (5)(9)(10)(13)(22)(24)(26)(27)(28)(31)(32)(34)(38)(39)(44)(45)(46)(50)(51)(56)(60)(65)(68)(69)(71)(72)(75)(76)(77)(83)
  - Se puede calcular la primitiva y usar la regla de Barrow *“hallar el área bajo la curva”.* — (6)(14)(23)(43)(47)(59)
  - Su derivada existe y es continua. — (85)
  - Por ser polinómica. — (74)
  - Es derivable. — (15)(58)
- No responde — (1)(2)(3)(7)(8)(12)(17)(18)(20)(21)(25)(33)(35)(36)(37)(40)(41)(42)(48)(49)(52)(54)(55)(57)(69)(63)(64)(66)(67)(73)(78)(79)(80)(82)

Red sistémica del ítem 2A del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

Supón que $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a, b). Entonces es integrable en $[a, b]$. **(R2A)**

R2A	Respuesta incorrecta	Sin justificación.	(12)(46)(58)(62)(69)(75)(85)(86)
		Por el criterio de integrabilidad de Riemann.	(87)
		Si f es derivable entonces se puede calcular la integral.	(3)(7)(14)(52(66)(67)
		Aplica el criterio de integrabilidad sin tener en cuenta que el intervalo es abierto.	(9)(13)(15)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(31)(34)(38)(39)(43)(44)(45)(47)(48)(49)(50)(51)(53)(54)(55)(57)(60)(64)
		Si f es diferenciable entonces f' es integrable y f es integrable.	(5)(41)(77)
		Es acotada y continua.	(6)
		Por el Teorema fundamental del cálculo	(23)(11)(21)(22)(23)(56)
		Si es diferenciable la antiderivada también lo será.	(16)
		Para que sea diferenciable debe ser continua y el límite debe existir.	(40)(68)(70)
		Si f es diferenciable, su integral también es continua por lo tanto es integrable.	(42)
	Respuesta correcta	Si f es derivable existe una primitiva porque no tiene porqué poderse integrar.	(74)
		Sin justificación.	(8)(19)(61)(63)(65)
		Responde correctamente. Da un contraejemplo.	(78)
	No responde	(1)(2)(4)(10)(17)(18)(20)(32)(33)(35)(36)(59)	

Red sistémica del ítem 2B del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.			
Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta. Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces $F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$. **(R2B)**			
R2B	Respuesta incorrecta	Sin justificación.	(12)(32)(33)(39)(45)(58)(63)(64)(66)(67)(68)(70)(73)(74)(75)(78)(79)(80)(83)
		$F' = f$, f es derivable pues f es continua	(71)(84)
		$F'(x) = f(x)$ por el TFCI y f es integrable entonces es continua.	(9)(38)(50)(69)(72)(76)(77)
		Una condición para que una función sea integrable es su continuidad.	(14)(65)
		Si es integrable es diferenciable, por lo tanto la derivada también lo será.	(16)(52)
		F es derivable en $[a,b]$ por tanto es continua.	(22)(31)
		$F(x) = f(t)\Big\|_a^x \cdot f'(x)$	(47)
		$F'(x) = f(x)$ por el TFCI y, para que una función sea diferenciable debe ser continua, por lo tanto la función es continua.	(56)
		f es integrable entonces existe su antiderivada y es continua	(43)
		Sin justificación.	(21)(23)(25)(26)(27)(28)(46)(62)
		F no tiene los límites de integración bien definidos y no sabemos qué pueda pasar en ese intervalo.	(13)
		Puede existir una discontinuidad de salto. Aún así f es integrable pero no continua	(11)(19)(24)(29)(30)(34)(49)(53)(54)(55)(87)
		x no garantiza la continuidad de la integral porque no pertenece a $[a,b]$	(7)
		F no es acotada superiormente	(6)
		La integrabilidad no implica continuidad sino que por el contrario la continuidad implica integrabilidad y derivabilidad.	(2)(3)(5)
		La integrabilidad no garantiza la continuidad, eso depende del intervalo que se toma	(40)(41)(42)
	No responde	(1)(4)(8)(10)(15)(17)(18)(20)(35)(36)(37)(44)(48)(51)(57)(59)(60)(61)(81)(82)(85)(86)	

Red sistémica del ítem 2C del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Decide si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable y satisface $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ entonces se tiene que $F(x) = \int_a^b f(x)dx \leq 0$. **(R2C)**

R2C	Respuesta incorrecta Verdadero	Sin justificación.	(12)(40)(42)(45)(51)(63)(68)(74)(79)(84)
		Al intersecar los $[a,b] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ se tienen finitos puntos de discontinuidad en $f(x)$, además si $f(x) \leq 0, \forall x \in [a,b] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$, la integral es el área comprendida por f y el eje x con signo negativo.	(24)(29)(30)(34)
		$f(x) \leq 0, -\int_a^b f(x) > 0$	(21)
		La función se encuentra debajo del eje x y la integral puede ser negativa.	(70)
		Como f está definida en el cuadrante III entonces la integral es negativa.	(3)
		Si f es continua.	(73)
	Respuesta incorrecta Falso	Sin justificación.	(62)(66)(67)(75)(80)
		Puesto que el área no es negativa.	(25)(26)(27)(28)(31)(41)
		Puesto que ninguna integral es negativa.	(16)(32)
		El que f sea no negativo no necesariamente implica que la integral también esté por debajo de cero: $f(x) = -3x^2$ y $\int_a^b -x^3$ no necesariamente es negativa.	(14)
		f no es continua para cada $[a,b] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.	(13)
		No sabemos si su integral es positiva o negativa puesto que, existen valores en esa integral que desconocemos como cuando $x \in \mathbb{Q}$.	(11)
		Es un intervalo con infinitas discontinuidades por tanto la función no es integrable.	(39)(44)
		Una función puede ser negativa pero los valores están sobre el eje x lo que implica que el valor de la integral sea positivo.	(19)
		Que f' sea no negativa no implica que $\int f' \leq 0$ y no es continua.	
		Sea $F(x) = -x + 5$ se tiene que $f(x) \leq 0$ y $F(x) \geq 0$, $\forall x$ en $[0,5]$	(78)
	Respuesta correcta	Demuestra correctamente.	(71)
		Ya que hay mayor volumen de irracionales	(87)
	No Responde	(1)(2)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(15)(17)(18)(20)(22)(23)(33)(35)(36)(37)(38)(43)(46)(47)(48)(49)(50)(52)(53)(54)(55)(56)(57)(58)(59)(60)(61)(64)(65)(69)(72)(76)(81)(82)(83)(85)(86)	

Red sistémica del ítem 3A del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Dada la función cuya gráfica es la dada en la Figura 1 (siguiente página).
Obtenga la expresión algebraica de la misma en el intervalo $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. **(R3A)**

R3A	Respuesta correcta		(1)(9)(11)(12)(66)(67)(71)(72)(81)
	Respuesta incorrecta	$f(x) = -\lvert 2^n x\rvert + 1$	(46)(47)
		$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$	(54)
		$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{2n-1}{2}-\frac{1}{2^n}}x - \frac{1}{2^n} & si \quad x \leq \frac{n(n+1)}{2} \\ -\frac{1}{\frac{2n-1}{2}-\frac{1}{2^n}}x - \frac{1}{2^n} & si \quad x > \frac{n(n+1)}{2} \end{cases}$	(64)
		$f(x) = -\left\lvert x - \frac{1}{2^x}\right\rvert + 1$	(4)
		$\left[\left(2^{-n}, (2^{n+1}x - 2)\right), \left(2^{n+1}, (-2^{n+1}x + 4)\right), \dots, \left(2^0, (2^1 x - 2)\right), \left(2^1, (-2^1 x - 4)\right)\right]$	(5)(6)
		$-\lvert 2^{n+1}x + 1\rvert + \frac{3}{2^{n+1}}$	(43)
		$f(x) = \left\lvert\frac{1}{2^x}\right\rvert, x \in [n, n-1]$	(13)
		$f(x) = \begin{cases} 2^n x - 2 & si \quad x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}\right] \\ -2^n x + 6 & si \quad x \in \left[\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \end{cases}.$	(16)
		$f(x) = \frac{1}{2x}.$	(19)
		$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & si \quad x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-2}}\right] \\ -2x + 2 & si \quad x \in \left[\frac{1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \end{cases}$	(85)
		$-\left\lvert\frac{x}{2^n}\right\rvert + 1, n \in \mathbb{N}.$	(24)(29)(30)(87)
		$\frac{xf(x)}{2} \Rightarrow \frac{x}{2^{x+1}}.$	(58)
		No da la expresión pero concluye que $m = 2^{k+1}$ son las pendientes de las rectas “crecientes”.	(68)
		$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = \frac{2}{2n(2n-1)} \\ 1 & si \quad x = \frac{2}{2^{n+1}(2^n - 1)} \end{cases}.$	(25)(27)(28)
	No responde		(2)(3)(7)(8)(10)(14)(15)(17)(20)(21)(22)(23)(26)(31)(32)(33)(34)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(44)(45)(48)(49)(50)(51)(52)(53)(55)(56)(57)(59)(60)(61)(62)(63)(65)(69)(70)(73)(74)(75)(76)(77)(78)(79)(80)(82)(83)(84)(86)

Red sistémica del ítem 3B del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Dada la función cuya gráfica es la dada en la Figura 1. Determina la integrabilidad de la misma en el intervalo $[0,2]$, sabiendo que $f(0) = 0$. **(R3B)**

R3B	Respuesta Correcta	Criterio de continuidad	(30)(43)(71)(72)(76)(81)(86)
	Respuesta Incorrecta	Si $n \to \infty$, $\frac{\frac{1}{2^n}}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$ por lo tanto el área tiende a ser cero.	(11)
		$\int_{\frac{1}{2^x}}^{\frac{1}{2^{x-1}}} \left\|\frac{1}{2^x}\right\| dx$	(13)
		No es integrable, pero sí a trozos	(15)
		Dado que es diferenciable es integrable	(16)
		$\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\frac{1}{2^{j-1}} - \frac{1}{2^j}}{2}$	(9)
	No responde		(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(10)(12)(14)(15)(17)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(31)(32)(33)(34)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(44)(45)(46)(47)(48)(49)(50)(51)(52)(53)(54)(55)(56)(57)(58)(59)(60)(61)(62)(63)(64)(65)(66)(67)(68)(69)(70)(73)(74)(75)(77)(78)(79)(80)(82)(83)(84)

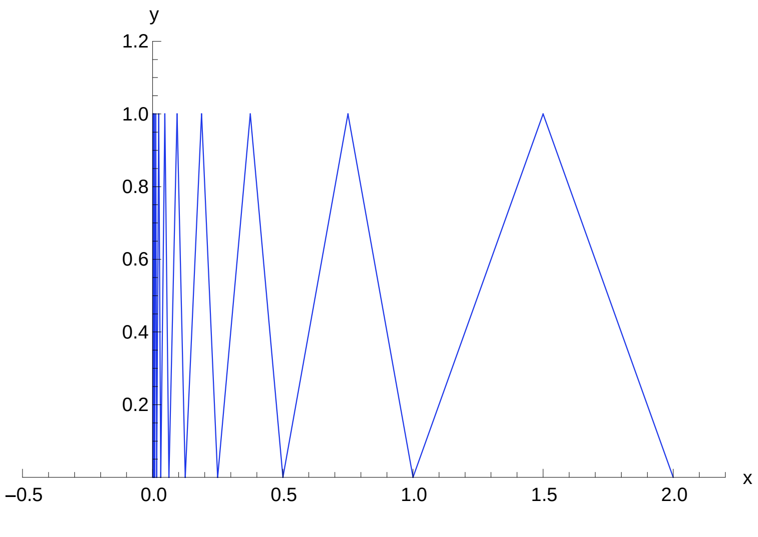


Figura 1

Red sistémica del ítem 3C del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Dada la función cuya gráfica es la dada (Figura 1). Calcule según sea el caso el valor de la integral. **(R3C)**
.

R3C

- Respuesta Correcta
  - (60)(57)(71)(72)(81)
- Respuesta Incorrecta
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ — (1)(4)
  - $\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{3}{2^{n+1}}} (2^n x - 2)dx + \int_{\frac{3}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} (2^n x + 6)dx$ sin evaluar — (16)
  - $\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(x)dx = 2\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{3}{2^{n-1}}} (2^{n+1}x - 2)dx = \frac{-17}{2^{n-1}}$ — (12)
  - $\int \frac{x}{2^{x+1}} dx = [x2^x \ln_2 x - 2^x \ln_2 x] \frac{1}{2}$ — (58)
  - $\int_0^2 (-2^{n+1}\, x\ + 4)dx + \int_0^2 (2^{n+1}\, x - 2)dx = (-2^n x^2 + 4x) + (2^n x^2 - 2x)\ \Big|_0^2 = 4$ — (11)
  - $\int_0^2 \frac{1}{2x} dx$ — (19)
  - $\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} -\left|\frac{x}{2^n}\right| + 1\, dx$ para intervalos de la forma $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$ y $\int_{\frac{1}{k^n}}^{\frac{1}{k^{n-1}}} -\left|\frac{x}{2^n}\right| + 1\, dx$ con $k \notin \mathbb{N}$ para aquellos intervalos que no lo son. — (30)
  - $\int -|2^{n+1}x + 1| + \frac{3}{2(n+1)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(-|2^{n+1}x + 1| + \frac{3}{2(n+1)}\right) dx$ — (43)
  - $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 2^{n-1})$ — (62)
  - $\int_{\frac{1}{2^x}}^{\frac{1}{2^{x-1}}} \left|\frac{1}{2^x}\right| dx = -x \ln 2 \Big|_{\frac{1}{2^x}}^{\frac{1}{2^{x-1}}} = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{2^{x-1}} \ln 2 + \frac{1}{2^x} \ln 2\right) = 0$ — (13)
  - $\int_a^b \frac{1}{2^n} dx = \frac{b-a}{2^{n+1}}$ — (87)
- No Responde
  - (2)(3)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(14)(15)(17)(18)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(31)(32)(33)(34)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(44)(45)(46)(47)(48)(49)(50)(51)(52)(53)(54)(55)(56)(59)(61)(63)(64)(65)(66)(67)(68)(69)(70)(73)(74)(75)(76)(77)(78)(79)(80)(82)(83)(84)(85)

Red sistémica del ítem 4 del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Considerando que $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^x f(x)dx$. Determine $\int_0^\infty f(x)dx$ siendo $f(x) = \frac{1}{2^n}$, con $x \in [n-1, n), n = 1,2,3,\ldots$ **(R4)**

R4

- Respuesta Correcta
  - Analítica: (60)(72)
  - Gráfica: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} \approx 1$ (24)
- Respuesta Incorrecta
  - $\int_{x-1}^{x} \frac{1}{2^x} dx = -x \ln 2 \Big|_{x-1}^{x} = -\infty + \infty = \infty$ (13)
  - $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n} dn$ (16)(17)(46)(66)(67)(68)(69)(70)
  - $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n} dx = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{-n+1}}{n+1} \Big|_0^x = 0$ (21)
  - $\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{2^n} dx = \frac{2^{-n+1}}{-n+1} \Big|_0^\infty = -2$ (75)
  - $\lim_{n\to\infty} \sum_{x=1}^{n} f(t)dt$ (29)(30)
  - $\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ (38)
  - $\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^n} dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^n} t \Big|_0^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^n} x$ (65)(81)(83)(85)(87)
  - $\int_0^x \left(\frac{1}{2^n}\right) dx$ (43)
  - $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ (9)
  - $\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^t} dt = \lim_{x\to\infty} (2^x \ln_2 x)$ (58)
  - $\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{2^x}$ (62)
  - $\int_0^\infty \frac{1}{2^x} dx = \lim_{x\longrightarrow\infty} \int_0^x \frac{1}{2^t} dt = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2^{-t}}{\ln 2} \Big|_0^x = \frac{1}{\ln 2}$ (1)(4)(19)(27)(28)
- No responde: (2)(3)(6)(7)(8)(10)(11)(12)(14)(15)(18)(20)(22)(23)(25)(26)(31)(32)(33)(34)(35)(36)(37)(39)(40)(41)(42)(44)(45)(47)(48)(49)(50)(51)(52)(53)(54)(55)(56)(57)(59)(61)(64)(71)(73)(74)(76)(77)(78)(79)(80)(82)(84)(86)

Red sistémica del ítem 5 del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x = \frac{k}{2^n} \text{ para } k \text{ impar}, 0 < k < 2^n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$. Demuestre que f es integrable en $[0,1]$, y que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. **(R5)**

R5	Respuesta Correcta	Criterio de Lebesgue	Analítica	(71)(72)
			Geométrica	(87)
	Respuesta Incorrecta	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{2^n} = 0$, ó $\lim\limits_{x\to a} 0 = 0$ entonces f es continua y $\displaystyle\int_0^1 0dx = 0$		(21)(75)(76)
		$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2^n} dn = \frac{2^n}{\ln 2}\Big\|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$		(25)(27)(28)
		$\displaystyle\int \frac{1}{2^n} dx = \frac{1}{2^n} x \Big\|_0^1 = 0 - 0$		(22)(23)
		Como $\frac{1}{2^n} = z,$ con $z \in \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z} \in \mathbb{R}$ entonces la integral de un punto z en un intervalo $[a,b]$ es cero.		(24)(29)(30)(43)
		Que $\int_0^1 f(x)dx = 0$ significa que $f(x) = 0$. […]Suponemos que existe un $x \in [0,1]$ tal que tal que $x = \frac{k}{2^n}$, pero como n es fijo, entonces sea $n = 2$, se tiene que $4x = k$, pero k debe ser de la forma $4p + 1$ lo que sería una contradicción. Por tanto $f(x) = 0$ y también $\int_0^1 f(x)dx = 0$.		(59)
		$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{2^n} dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ como n es fijo entonces es convergente por tanto integrable.		(85)
		$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2^n} \underbrace{\log_2(1)}_{\substack{\parallel \\ 0}} - 0 = 0$. Existe la integral luego es integrable.		(74)
	No responde	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(20)(24)(26)(29)(31)(32)(33)(34)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(44)(45)(46)(47)(48)(49)(50)(51)(52)(53)(54)(55)(56)(57)(58)(60)(61)(62)(63)(64)(65)(66)(67)(68)(69)(70)(73)(77)(78)(79)(80)(81)(82)(83)(84)(86)		

Red sistémica del ítem 6A del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ en donde se tiene: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Demuestre que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada. **(R6A)**

R6A

- Respuesta correcta
  - Sólo acota superiormente | (1)(4)(11)(12)(20)(59)(75)
  - Sólo acota Inferiormente | (9)(33)(43)(74)
  - Ambas | (18)(60)(71)(72)(81)
- Respuesta Incorrecta
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{\infty}{\infty} \underbrace{=}_{a_{n-1}<a_n \Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_n}=0} 1 + 0 = 1$ Superiormente está acotada por 2. | (84)(86)
  - Después de hacer varios tanteos: supongo que está acotado en 2 | (22)
  - $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ Tiene valor mayor el denominador por lo que la fracción siempre tendrá un límite definido y un máximo. | (19)
  - $\underbrace{a_{n+1} > a_n \text{ y } a_{n+1} > a_{n-1}}_{\text{acotada inferiormente}}$ entonces $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n}$
 $\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$, entonces está acotada superiormente | (62)
  - Suponemos que no está acotada, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > K$, así $a_n + a_{n+1} > K(a_n + a_{n-1})$ | (80)
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n}$ | (76)(77)
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-2} + a_{n-4} + \cdots a_2}{a_{n-1} + a_{n-5} + a_{n-3} + a_1} = 0$ | (87)
  - Por tanteo | (26)
  - Por recursión incompleta, no halla el límite | (85)
  - La sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está acotada al número áureo. | (61)
  - $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon$ demostrar que el límite existe, pero no puedo llevar $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ a una función | (32)(78)
  - $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1\ ;\ 0 < 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1\ ;\ 0 < 2 + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2$ | (17)
  - Está acotada puesto que nunca será 0 y el valor mayor es 2. | (16)
- No responde | (2)(3)(5)(6)(7)(8)(10)(13)(14)(15)(21)(23)(24)(25)(27)(28)(29)(30)(31)(34)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(44)(45)(46)(47)(48)(49)(50)(51)(52)(53)(54)(55)(56)(57)(58)(63)(64)(65)(66)(67)(68)(69)(70)(73)(79)(82)(83)

Red sistémica del ítem 6B del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ en donde se tiene: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. ¿Es monótona (creciente o decreciente) la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$?. **(R6B)**

R6B	Respuesta Correcta	Contraejemplo	(17)(18)(60)
		Las subsucesiones con los términos de la forma $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ y $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}$ tienen monotonías opuestas (creciente/decreciente) o (decreciente/creciente) respectivamente según sea el caso.	(72)
	Respuesta Incorrecta	Es monótona creciente si a_1 y a_2 son positivos Es monótona creciente si a_1 y a_2 son negativos Es oscilante si a_1 y a_2 son de distinto signo	(87)
		Creciente sin justificación.	(2)(11)(12)(15)(19)(23)(31)(32)(59)(75)(76)
		Decreciente sin justificación.	(16)
		Decreciente. Demostración por inducción.	(82)
		Es creciente y se ve fácilmente, ya que la sucesión se genera de la suma de dos positivos, dando otro número positivo y así sucesivamente.	(86)
		$a_{2n} < a_{2(n+1)}$ y $a_{2n+1} > a_{2(n+1)+1}$	(1)(4)
		Por transitiva $a_n > a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2$, se tiene $a_{n+1} > a_n, \forall n$ luego $a_{n+1} > a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > \cdots > a_1$ es monótona creciente.	(62)(63)(74)(81)
		Si $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, y $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$, es decreciente.	(84)
		Como a_{2k} es convergente además a_{2k} y a_{2k+1} son alternadas. Entonces $\lvert a_{2k+1} \rvert$ es convergente. Esto no implica que a_n sea monótona.	(9)
		Creciente, $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n}$=[…]= $\frac{3a_n}{a_n - a_{n-1}} > 0.$	(71)
		Sí es monótona $\frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} > \frac{a_n}{a_{n-1}}$ con lo cual $\frac{a_{n-1}(a_n + a_{n-1})}{(a_n)^2} > 1$	(77)
		Creciente, $\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = [\dots]= \frac{2a_n + a_{n-1} + (a_{n-1})^2 + (a_n)^2 + a_{n-1}a_n}{a_n a_{n-1} + (a_n)^2} > 0$	(22)
	No responde	(3)(5)(6)(7)(8)(10)(13)(14)(20)(21)(24)(25)(26)(27)(28) (29)(30)(32)(34)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(43)(44) (45)(46)(47)(48)(49)(50)(51)(52)(53)(54)(55)(56)(57)(58)(61) (64)(65)(66)(67)(68)(69)(70)(73)(78)(79)(80)(83)(85)	

Red sistémica del ítem 6C del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Si a_1 y a_2 son positivos. Si se construye la sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ en donde se tiene: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Demuestra que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge al número áureo. **(R6C)**

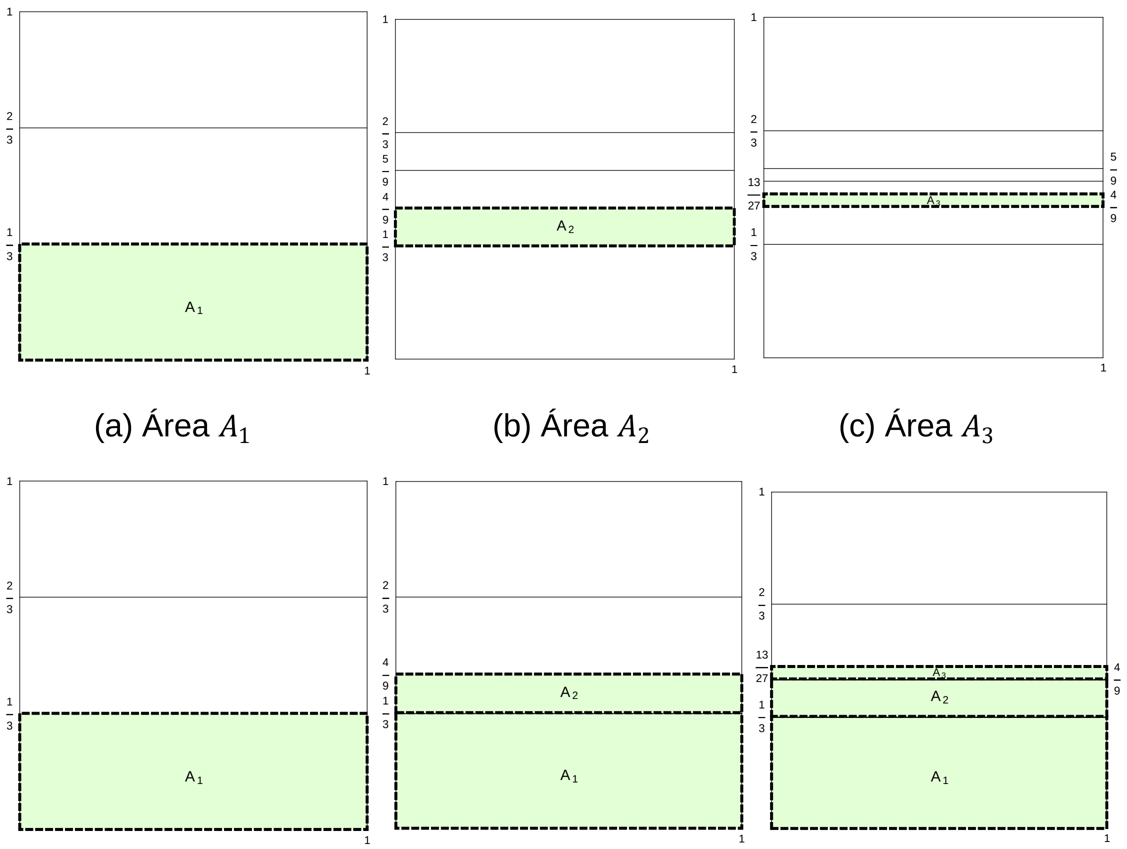
R6C

- Correcta
  - Analíticamente muy completa
    - (60)
  - (81)(82)
- Incorrecta
  - Reducción a la solución de la ecuación $x = 1 + \frac{1}{x}$ y exenta de cualquier justificación analítica.
    - (1)
  - $x = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ entonces se repite n veces y luego se obtiene $x = 1 + \frac{a_{n-1}}{1+\frac{a_{n-2}}{\underbrace{a_{n-1}}_{\vdots}}}$ luego $x = 1 + \frac{1}{x}$ de aquí se tiene el número áureo.
    - (11)(18)
  - Tenemos que ver el límite superior L. Como $L > a_{n+1} > a_n > a_{n-1} > \cdots > a_1$ así, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \Longrightarrow \frac{L}{L-a_{n-1}} = 1 + \frac{L-a_n}{a_n}$, no me acuerdo cómo se hacía.
    - (86)
  - $\lim_{x\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x_n}{x_n} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1 + 0$
    - (62)
- No responde
  - (2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(31)(32)(33)(34)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(43)(44)(45)(46)(47)(48)(49)(50)(51)(52)(53)(54)(55)(56)(57)(58)(59)(61)(63)(64)(65)(66)(67)(68)(69)(70)(71)(72)(73)(74)(75)(76)(77)(78)(79)(80)(83)(84)(85)(87)

Red sistémica del ítem 7 del Cuestionario a estudiantes. Fase de Refinamiento.

Halla el límite del área A sombreada siguiendo el proceso que se describe en la Figura 2. **(R7)**

R7	Respuesta Correcta	Algebraica	Gauss. $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, $3A-1=A$, así $A=\frac{1}{2}$	(17)(18)
		Progresión geométrica		(20)(49)(60)
	Respuesta Incorrecta	$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\int_1^{\infty}\frac{1}{3^x}dx$		(61)(63)
		$\int_0^{\infty}A_n$		(3)
		$A=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=\frac{13}{27}$		(31)(32)
		$\lim_{n\to\infty}(A_1+A_2+A_3+A_n+\cdots)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right)\Longrightarrow\infty$		(85)
		$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$		(10)(66)(67)
		$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$		(86)
		$\mathrm{Lim}\ A_1=\frac{1}{3}$, $\mathrm{Lim}\ A_2=\frac{1}{9}$, $\mathrm{Lim}\ A_3=\frac{10}{27}$ entonces Lim A=$A_1+A_2+A_3=\frac{22}{27}$		(76)
		$A=1\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{13}{27}+\frac{40}{81}+\cdots}_{\text{Hay que calcular este límite}}\right)$		(81)
		Calcula la medida de cada área A_i sobre la correspondiente Gráfica pero no hace ningún tipo de conexión entre ellas.		(12)(53)(65)
		Calcula la medida de cada área y la respectiva A para los casos que se visualizan en la figura (en total 3).		(41)(58)(62)(79)
		$r=\frac{1}{3}, A_{\infty}=\frac{A_1}{1-r}=\frac{9}{6}$		(73)
		$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, luego $A=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)=\frac{1}{3}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{2}$		(59)
		$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\Longrightarrow\mathrm{Lím}\ A=0$		(7)(8)(9)(40)(42)
		$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$		(39)(44)
		Es una serie geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$		(68)(69)(70)(71)(72)
		La suma de las áreas tiende a dar $\frac{1}{2}$. $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. Da la expresión algebraica sin hacer ningún cálculo.		(16)(19)(83)(84)
	No responde	(1)(2)(4)(5)(6)(11)(13)(14)(15)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(33)(34)(35)(36)(37)(38)(43)(45)(46)(47)(48)(50)(51)(52)(54)(55)(56)(57)(64)(74)(75)(77)(78)(80)(82)		



(a) Área A_1 (b) Área A_2 (c) Área A_3

(d) Área $A = A_1$ (e) Área $A = A_1 + A_2$ f) Área $A = A_1 + A_2 + A_3$

Figura 2

Anexo 10
Facsímil del Cuestionario Inicial

La presente encuesta se ha implementado con el objetivo de estudiar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes universitarios de algunos procesos infinitos subyacentes al concepto de Integral Definida. Se desarrolla en el marco de investigación de una tesis Doctoral titulada: *Procesos Infinitos inherentes a la Integral Definida*, que se adelanta en el Departamento Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid.

Marca con V o F, según que sea un enunciado verdadaero o falso.

BLOQUE Q

1. La suma $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ con $n \in \mathbb{N}$
   a) ___ Tiene un número finito de sumandos.
   b) ___ Tiene un número infinito de sumandos.
   c) ___ Tiene cuatro sumandos.
   d) ___ No se sabe cuántos sumandos tiene.

2. Dados los siguientes conjuntos de números reales:
   $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{3n}\}$, $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots\}$,
   $B = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\}$
   a) ___ $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$
   b) ___ $\text{Card}(A) < \text{Card}(C)$
   c) ___ $\text{Card}(A \bigcup B) = \text{Card}(C)$
   d) ___ $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$

3. Dados los siguientes conjuntos de números reales:
   $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, y $B = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$
   a) ___ $A \subset B$
   b) ___ $A = B$
   c) ___ $B \subset A$
   d) ___ Ni $A \subset B$, ni $B \subset A$

4. Las siguientes sucesiones son monótonas:
   a) ___ $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \cdots$
   b) ___ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ con a_1 y a_2 positivos y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$
   c) ___ $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{8^2}, \frac{1}{9^2}, \frac{1}{10^2}, \cdots$
   d) ___ $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \cdots$

5. Sabiendo que los cuadrados de la figura (1) son de lado $1u$. Halla, si es posible el área de las regiones sombredas según se muestra en la figura dada.

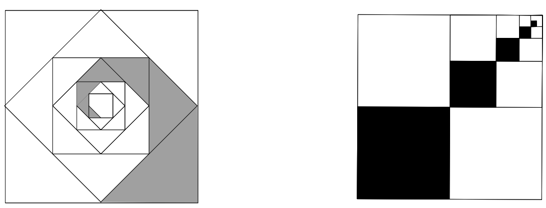


Figura 1:

6. Las expresiones siguientes son sucesiones:

   a) ___ $a_n = \frac{1}{n}$
   b) ___ $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$
   c) ___ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{n}$
   d) ___ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{p}, \cdots$

7. El valor de la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ es:

   a) ___ 1
   b) ___ $\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$
   c) ___ No se puede calcular
   d) ___ Es infinita si n tiende a infinito

8. Dadas las sucesiones de números: $0'8, 0'88, 0'888, 0'888, \ldots$ y $0'3, 0'33, 0'333, 0'3333, \ldots$

   a) Escribe los tres primeros términos de la sucesión producto ambas
   b) Escribe el término general de la sucesión producto
   c) Calcula el límite de la sucesión producto
   d) No se puede calcular el término general

9. Dadas las sucesiones:

   A. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$
   B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \cdots$
   C. $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \cdots$

   a) ___ Las tres sucesiones son diferentes
   b) ___ Las tres sucesiones son iguales
   c) Escribe el tercer y cuarto términos siguientes de las sucesiones B y C respectivamente.
   d) ___ No se puede saber cómo se forman los términos generales

10. Dadas las sucesiones: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces:

    a) ___ La suma de ambas se halla sumando a cada término de la primera todos los términos de la segunda
    b) ___ El producto se halla multiplicando a cada término de la primera todos los términos de la segunda
    c) ___ El cociente de ambas se halla dividiendo cada término de la primera por todos los términos de la segunda
    d) ___ La potencia: a cada término de la primera se le eleva al correspondiente término de la segunda

11. Si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l entonces:

    a) ___ $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $2l$
    b) ___ $(a_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l, $\forall k \in \mathbb{N}$
    c) ___ $(a_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$no tiene porqué ser cnvergente
    d) ___ a_n es monótona

BLOQUE E

12. Se considera un conjunto ordenado E

 a) ___ Un extremo superior de E ($\overline{\text{ext}}E$) es máximo
 b) ___ El extremo superior de E es la mayor de las cotas superiores
 c) ___ El $\overline{\text{ext}}E$ debe pertenecer al conjunto
 d) ___ Todo conjunto totalmente ordenado debe tener un máximo

13. La expresión $\forall x \in E$ quiere decir

 a) ___ Que x es un elemento concreto de E
 b) ___ Que x es un elemento cualquiera de E
 c) ___ Que x representa a todos los elementos de E
 d) ___ Que x es un valor que pertenece al interior de E

14. Que el orden usual $\leq$ de los números reales tenga un orden total quiere decir:

 a) ___ Que todo intervalo acotado tiene extremo superior
 b) ___ Que todo intervalo acotado tiene máximo
 c) ___ Que todo subconjunto numerable tiene primer elemento
 d) ___ Que si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $A \subset B$, todos números de A son menores que todos los de B

15. Considerando el conjunto $E = (-6, 1] \cup [3, 5)$

 a) ___ 1 y 5 son extremos superiores de E
 b) ___ -6 y 3 son extremos inferiores
 c) ___ 1 es $\overline{\text{ext}}E$, pero no 5
 d) ___ 5 es el único $\overline{\text{ext}}E$, y -6 el único inferior

16. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ y, $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ son sucesiones de áreas inferiores y superiores respectivamente, asociadas a una partición $\mathcal{P}$ y a función f acotada sobre $[a, b]$ entonces, $\forall i$ y $\forall j$:

 a) ___ $A_i \leq B_i$
 b) ___ $A_i \leq \text{ínf}(B_j)$
 c) ___ $\sup A_i \leq \text{ínf}(B_j)$
 d) ___ $\sup A_i \leq B_j$

17. De acuerdo con la gráfica de la función g dada en la figura 2 :

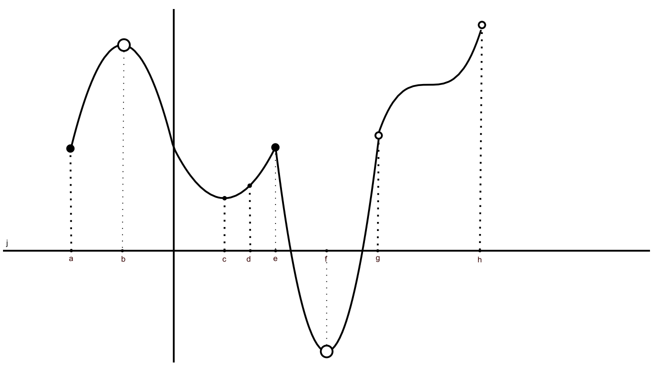


Figura 2:

 a) ___ g tiene máximos en $x = b$ y en $x = e$
 b) ___ g tiene mínimos en $x = a$ y en $x = f$
 c) ___ g tiene máximos en $x = b$, $x = e$ y en $x = h$
 d) ___ Si g tiene mínimo en $x = a$ y en $x = e$ tiene máximo.

BLOQUE L

18. $\text{lím}_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow$

 a) ___ $\forall\varepsilon, \exists\delta \geq 0, \ /|x-a| \leq \delta \to |f(x)-l| \leq \varepsilon$
 b) ___ Cuando x se aproxima a a entonces los valores $f(x)$ se aproximan a l
 c) ___ Fijada una aproximación k de l, existe un entorno reducido de a tal que todas sus imágenes están más cerca de l que k
 d) ___ $f(a) = l$
 e) ___ x se acerca a a pero $x \neq a$ y, $f(x)$ se acerca a l pero $f(x) \neq l$

19. Las siguientes series tienen límite:

 a) ___ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
 b) ___ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \ k > 1$
 c) ___ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
 d) ___ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k$ con k

20. Dada la función $f(x$
 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal qu
 la desigualdad $\Rightarrow |f$

 a) ___ $\delta < 0,005$
 b) ___ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$
 c) ___ $\delta < \varepsilon$
 d) ___ $\delta \leq 0,0025$

21. Se dispone de un esp
 la figura 3.

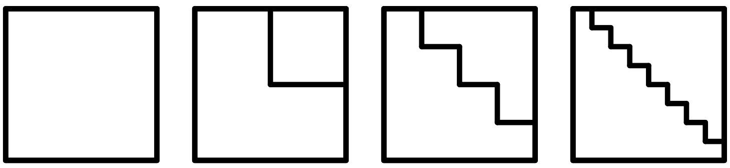


Figura 3:

Cuando el número de escalones tienda a ∞ el, la longitud de la escalera es:

 a) ___ 1
 b) ___ 2
 c) ___ No se puede calcular
 d) ___ $\sqrt{2}$

BLOQUE M

22. Señala:

   a) ___ Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces es monótona
   b) ___ Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, y todos sus términos son menores que el límite, entonces, es monótona creciente
   c) ___ Si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y menor que otra sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona decreciente que tiene límite, entonces $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente
   d) ___ Si a_n es monótona creciente y, decreciente, está acotada

23. Si a y b son dos números reales

   a) ___ Si $|a| < |b|$ entonces $a < b$
   b) ___ Si $a < b$ y $-a < b$ entonces, $|a| < b$
   c) ___ $|a + b| \leq |a| + |b|$
   d) ___ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

24. Si $n \in \mathbb{N}$ y x, a_n y $f(x) \in \mathbb{R}$

   a) ___ $n \to a_n$ es un caso particular de una función real de variable real
   b) ___ Tiene sentido calcular $\lim\limits_{n\to 1000} a_n$ en la sucesión $a_n = \frac{1}{n} + 1000$
   c) ___ $n \to a_n$ es una función discontinua
   d) ___ $x \to f(x)$ es una función continua

BLOQUE V

25. Sea G el cardinal del conjunto de granos de arena de la tierra, $\aleph_0$ el cardinal de $\mathbb{N}$, C el cardinal del conjunto de puntos de un cuadrado de lado unidad y H el cardinal del intervalo $[0,1]$ entonces:

 a) ___ $G = \aleph_0 < C = H$
 b) ___ $G < \aleph_0 < H < C$
 c) ___ $H < C < \aleph_0 < C$
 d) ___ $G < \aleph_0 < C = H$

26. En adelante, dado un conjunto X, $\mathrm{Card}\,(X)$ denotará el cardinal de X. Dados los conjuntos : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{I}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}, [0,5]$ y $\mathbb{P}$ el conjunto de los números pares:

 a) ___ $\mathrm{Card}\,(\mathbb{Z}) < \mathrm{Card}\,(\mathbb{Q}^+)$
 b) ___ $\mathrm{Card}\,(\mathbb{Q}^+) < \mathrm{Card}\,([0,5])$
 c) ___ $\mathrm{Card}\,([0,5]) < \mathrm{Card}\,(\mathbb{R}^+)$
 d) ___ $\mathrm{Card}\,(\mathbb{I}) < \mathrm{Card}\,(\mathbb{R})$

27. a) ___ Hay $\mathrm{Card}\,(\mathbb{N})$ fracciones equivalentes
 b) ___ Hay $\mathrm{Card}\,(\mathbb{N})$ números con coma que tienen menos de 100 cifras decimales
 c) ___ El cardinal de pares ordenados (a,b) con $a,b \in \mathbb{Z}$ es igual que $\mathrm{Card}\,(\mathbb{N})$
 d) ___ El cardinal de partes de $\mathbb{N}$, coincide con el cardinal de las particiones de $[0,2]$

28. a) ___ $\mathbb{Q}$ es numerable pero no denso
 b) ___ $\mathbb{I}$ es numerable y denso
 c) ___ $\mathbb{I} \bigcup \mathbb{N}$ es numerable y denso
 d) ___ $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ es numerable y denso

29. Considerando las expresiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = f(x)$

 a) ___ n es una variable natural, pero a_n no es una variable
 b) ___ Tanto n como a_n son variables naturales
 c) ___ Tanto a_n como $f(x)$ son variables
 d) ___ x debe tomar valores en un intervalo
 e) $f(x)$ puede tener dos valores para un x determinado

30. Escribe de forma algebraica los siguientes conjuntos

 a) Todos los números enteros comprendidos entre 50 y 100
 b) Todos los números enteros impares
 c) Todos los números reales negativos mayores que -50
 d) Todos los números reales positivos menores que 50

31. Sean, $A = \{x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$,$B = \{x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \in \mathbb{I}, 0 \leq x < 36\}$ y $C = [0,36) \cup \mathbb{I}$

 a) A está formado por todos los números pares positivos y $C = [0,36) \cap \mathbb{I}$
 b) A está formado por todos los números pares y $C = [0,36) \cup \mathbb{I}$
 c) B está formado por todos los números impares y $C = [0,36) \cap \mathbb{I}$
 d) A está formado por todos los números pares y $C = (0,36) \cap \mathbb{I}$

BLOQUE P

32. a) ___ $[1,2] \in [0,3]$

 b) ___ $\{-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, \dots\} \subset [-1,0]$

 c) ___ $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\} \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$

 d) ___ $1 \in \{1\}$

33. La afirmación: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces $f(x)$ está acotada en $[a,b]$, significa que:

 a) ___ Es condición necesaria que f sea continua en $[a,b]$ para que sea acotada en $[a,b]$

 b) ___ Es condición suficiente que f sea continua en $[a,b]$ para que sea acotada en $[a,b]$

 c) ___ Si f está acotada f es continua en $[0,3]$

 d) ___ Si f no es cotinua f no es acotada en $[0,3]$

34. a) ___ $\{-1,2\}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$

 b) ___ $(1,2) \cup (0,5)$ es un intervalo de $\mathbb{R}$

 c) ___ $\{x/x = 5\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$

 d) ___ $\{x/3x - 2 < -2x + 3, x \in \mathbb{R}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$

35. Se consideran las siguientes particiones de $[0,1]$:
$\mathcal{P}_1 = \{0, 0'1, 0'2, 0'3, 0'4, \dots, 0'9, 1\}$, $\mathcal{P}_2 = \{0, 0'25, 0'75, 1\}$, $\mathcal{P}_3 = \{0, 0'2, 0'25, 0'4, 0'5, 0'6, 0'8, 1\}$,
$\mathcal{P}_4 = \{0, 0'2, 0'25, 0'4, 0'5, 0'6, , 0'75, 0'8, 1\}$, $\mathcal{P}_5 = \{0, 1, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}, \cdots, 1-\frac{1}{n}\}$

 a) ___ $\mathcal{P}_1$ es más fina que $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$

 b) ___ $\mathcal{P}_3$ es más fina que $\mathcal{P}_2$

 c) ___ $\mathcal{P}_4$ es más fina que $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$

 d) ___ $\mathcal{P}_5$ es más fina que todas las anteriores

36. Para refinar una partición $\mathcal{P}$ hay que proceder así:

 a) ___ Escribir otra con un número de puntos mayor que el número de puntos que tiene $\mathcal{P}$

 b) ___ Conservar los puntos de $\mathcal{P}$ y añadir alguno distinto

 c) ___ Intercalar un punto entre cada dos de $\mathcal{P}$

 d) ___ Añadir algún punto medio entre dos de $\mathcal{P}$

37. El número de puntos de cada partición de $[a,b]$, siendo $k, p, q \in \mathbb{N}$ y k múltiplo de 4, es el que se indica en cada caso:

 a) ___ $a = a_0 = 10, a_1 = 10 + h, a_2 = 10 + 2h, \dots, b = 100$ con $\frac{100-10}{50} = h$. $\underline{50\ puntos}$

 b) ___ $a = a_0 = 10, a_1 = 10 + h, a_2 = 10 + 2h, \dots, b = 10 + ph = 100$ con $\frac{100-10}{p} = h$. $\underline{p\ puntos}$

 c) ___ $a = a_0 = 10, a_1 = 10 + 2h, a_2 = 10 + 4h, \dots, b = 10 + 2qh = 100$ con $\frac{b-a}{2q} = h$. $\underline{2q\ puntos}$

 d) ___ $a = a_0 = 10, a_1 = 10 + 2h, a_2 = 10 + 3h, \dots, b = 10 + kh = 100$ con $\frac{b-a}{k} = h$. $\underline{k+1\ puntos}$

38. Dado $A = [0,3) \cup (3,6]$:

 a) ___ La frontera de A es $\{0,6\}$

 b) ___ La frontera de A es $\{3\}$

 c) ___ La frontera de A es $\{0,3,6\}$

 d) ___ 3 es un punto de acumulación de A

 e) ___ 0 y 6 no son puntos de acumulación de A

 f) ___ A tiene infinitos puntos de acumulación

39. Indica si los siguientes conjuntos son particiones de $[0, 1]$

a) ___ $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$
b) ___ $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$
c) ___ $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$
d) ___ $\{0, 1\} \cup \{\frac{e}{10^6 - n}\}_{n=1,2,\cdots,1000}$

40. Considerando que $A = [0, 3) \cup (3, 6]$:

a) ___ A es abierto
b) ___ A no es abierto ni cerrado
c) ___ A es cerrado
d) ___ $\mathbb{R} \backslash A$ es cerrado

41. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto, A^c es:

a) ___ Abierto
b) ___ Cerrado
c) ___ Ni abierto ni cerrado
d) ___ $\mathbb{Q}^c$ es cerrado

42. Considerando $K = \{a_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$. Si H es el conjunto de puntos interiores, E el conjunto de puntos exteriores, F el conjunto de puntos frontera y A el conjunto de puntos de acumulación de K, respectivamente:

a) ___ $H = K$ y $F = K$
b) ___ $A = \emptyset$ y $F = K$
c) ___ $H = \emptyset$ y A=0
d) ___ $F = K \cup \{0\}$ y $A = \{0\}$

43. Indica cuáles de los siguientes conjuntos son particiones, del intervalo $[a, b]$:

a) ___ $\mathbb{Q} \cap [a, b]$
b) ___ $\mathbb{I} \cap [a, b]$
c) ___ $\{x/x = a + k\frac{b-a}{n}$ con $n \in \mathbb{N}\}$ y $k = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$
d) ___ $\{x/x = k\frac{b-a}{10^n}$ con $n \in \mathbb{N}\}$ y $k = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$

BLOQUE S

44. Las siguientes sumas son series:

a) ___ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

b) ___ $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$

c) ___ $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p}$

d) ___ $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} k$

45. Escribe el término de orden 3 de las siguientes series:

a) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} 3$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$

d) $\sum_{i=1}^{\infty} a_{3i}$

46. Indica la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) ___ Todas las series aritméticas son divergentes

b) ___ Todas las series geométricas son convergentes

c) ___ Si $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

d) ___ Si $a_n > b_n$ y $\sum a_n$ es convergente, entonces $\sum |b_n|$ es convergente

47. Indica la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) ___ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ es convergente porque $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^n} = 0$

b) ___ Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k>n_0}^{\infty} a_k$ está acotada

c) ___ Si $0 > \displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} b_n > 0$, entonces para algún $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} b_n > \sum_{n=k}^{\infty} a_n$

d) ___ Se puede hallar la suma de todas las series convergentes

e) ___ La combinación lineal de series convergentes es convergente. Es decir, si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes entonces $\lambda\mu \sum a_n + \sum a_n$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ es convergente

48. Halla, si es posible el perímetro de la curva (figura 4) que se genera después infinitas iteraciones, sabiendo que la longitud del segmento inicial es $1u$. Jusifica tu respuesta.

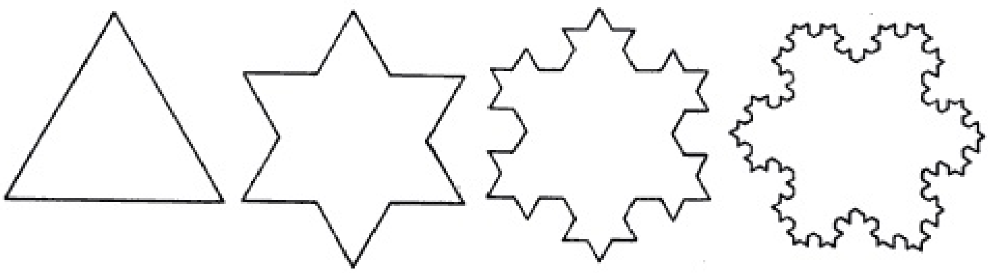


Figura 4:

BLOQUE I

49. Responde sobre la veracidad o falsedad de las siguientes integrales

a) ___ $\int_{-1}^{1}|x|dx = \frac{x^2}{2}\mid_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}=0$

b) ___ $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}\mid_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$

c) ___ Si $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$, $\int_1^2 f(x)dx = x|_1^2 + (-x)|_1^2 = 2-1-2+1 = 0$

d) ___ Si $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in (0,1) \\ 2 & \text{si } x \in (1,3) \\ -1 & \text{si } x \in (3,4) \end{cases}$, $\int_0^4 f(x)dx = 3x|_0^1 + (x)|_3^4 = 4$

50. Si f es integrable, el área bajo la curva integral de f y sobre el eje de abscisas es:

a) ___ $\int_a^b f(x)dx$

b) ___ $\int_a^b |f(x)|dx$

c) ___ $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

d) ___ Ninguna de las anteriores

51. Sea f una función integrable en $[a,b]$. Si se consideran f y a fijas, $F(l) = \int_a^l f(x)dx$, con $a \leq l \leq b$:

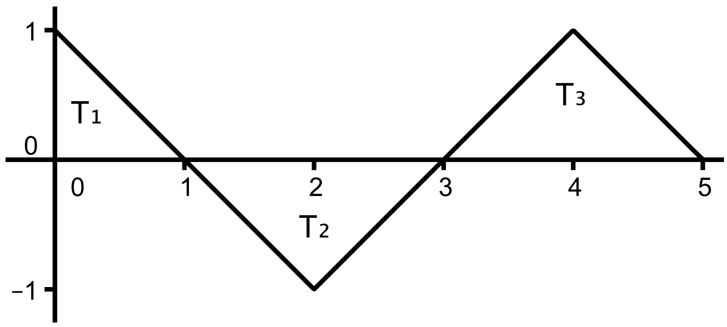
a) ___ $F(l)$ es un número

b) ___ $F(l)$ es una primitiva de $f(x)$

c) ___ $F(l) + k$ es una primitiva de $f(x)$

d) ___ $F(l)$ es la función de Área bajo la curva asociada a f sobre el intervalo $[a,b]$

52. La integral de la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} & 0 < x < 2, \\ x-3 & \text{si} & 2 < x < 4 \\ -x+5 & \text{si} & 4 < x < 5 \end{cases}$ representada en la figura es:



a) ___ La suma de las áreas de los triángulos T_1, T_2 y T_3

b) ___ La suma de las áreas T_1 y T_3 porque están por encima del eje OX

c) ___ La suma de las áreas T_2 y T_3

d) ___ $\int_0^2(-x+1)dx + \int_2^4(x-3)dx \int_4^5(-x+5)dx$

53. Señala la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) ___ Si una función es integrable en el sentido de Riemannn entonces es integrable en el sentido de Darboux

b) ___ Si una función es integrable en el sentido de Darboux entonces es integrable en el sentido de Riemann

c) ___ La integral de Darboux es equivalente a la integral de Riemann

d) ___ La integral de Riemann utiliza dos sumas de áreas

54. Una función f no es integrable en $[a, b]$ cuando:

a) ___ f no está acotada en $[a, b]$

b) ___ f no es continua en $[a, b]$

c) ___ No se puede hallar la primitiva de f

d) ___ El ext de las sumas superiores no coincide con el ext de las inferiores.

55. Las siguientes funciones son integrables sobre $[0, 2]$. ($[x]$ denota la parte entera de x).

a) ___ $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ x - 2, & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

b) ___ $f(x) = x + [x]$

c) ___ $f(x) = \begin{cases} x + [x], & \text{si} \quad x \text{ es racional}, \\ 0 & \text{si} \quad x \text{ es irracional}. \end{cases}$

d) f es la función indicada en la figura (5)

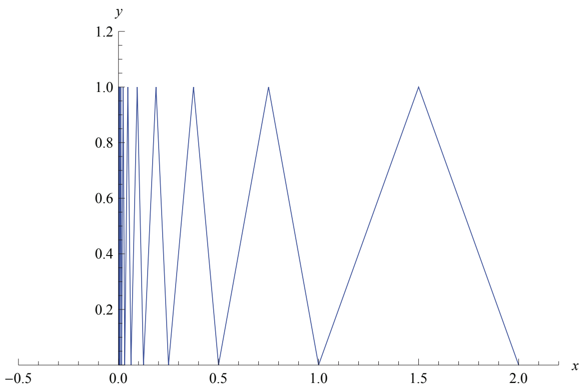


Figura 5: Gráfica de la función en $[\frac{1}{2^n}, 2]$, $n \in \mathbb{N}$.

Figura 6:

BLOQUE G

56. Si dividimos un segmento mediante un proceso el dado en la figura (6), y denotamos por B el conjunto de segmentos borrados y por $\overline{B}$ el conjunto de los que no se borran:

a) ¿Cuál es el $\text{Card}(B)$?

b) ¿Cuál es la longitud de cada elemento de B

c) ___ $\text{Card}(\overline{B}) = \text{Card}(B)$

d) ___ $\text{Card}(\overline{B}) < \text{Card}(B)$

e) ___ $\text{Card}(\overline{B}) > \text{Card}(B)$

57. Imagina que tienes un conjunto infinito de pelotas de tenis numeradas $1, 2, 3, \ldots$ y un barril muy grande; estás a punto de iniciar un experimento. El experimento terminará exactamente en un minuto, ni más, ni menos. Tu tarea es tomar las primeras 10 pelotas e introducirlas en el barril y sacar la número 1 en 30 segundos. En la mitad del tiempo anterior, vas a colocar las pelotas 11 a la 20 dentro del barril y vas a sacar la pelota número 2. Siguiendo en la mitad del tiempo resultante (y trabajando cada vez más rápido), coloca las pelotas 21 al 31 en el barril, y quita la pelota 3. Continúa con esta tarea al infinito. Después de 60 segundos, al final del experimento, ¿Cuántas pelotas de tenis permanecen dentro del barril?

Anexo 11
Facsímil del Cuestionario Final

ANEXO
FACSÍMIL DEL CUESTIONARIO APLICADO
A LOS ESTUDIANTES

FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Curso:__________________________________

Marca con V o F, según sea el enunciado verdadero o falso.

1. La suma $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$ con $n \in \mathbb{N}$

   a) ______ Tiene un número finito de sumandos.
   b) ______ Tiene un número infinito de sumandos.
   c) ______ Tiene cuatro sumandos.
   d) ______ No se sabe cuántos sumandos tiene.

En adelante, dado un conjunto X, $Card(X)$ denotará el cardinal de X.

2. Dados los siguientes conjuntos de números reales:

   $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{3n}\}$, $B=\{a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}\,,a_{21},a_{22},\dots,a_{2n}\}$,
   $C=\{a_1,a_2,\dots,a_n\,,\dots\ \}$,

   a) ______ $Card(A)=Card(B)$
   b) ______ $Card(A)<Card(C)$
   c) ______ $Card(A\cup B)=Card(C)$
   d) ______ $Card(A)<Card(B)$

3. Dados los siguientes conjuntos de números reales:
   $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, y $B=\{(a_n)_{n\,\in\mathbb{N}}\}$
   $\mathrm{A}=\{\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\dots,\mathrm{a}_{3\mathrm{n}}\}$
   a) ______ $A\subset B$

b) ______ $A = B$
c) ______ $B \subset A$
d) ______ Ni $A \subset B$, ni $B \subset A$

4. Las expresiones siguientes son sucesiones:

a) ______ $a_n = \frac{1}{n}$
b) ______ $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
c) ______ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{n}$
d) ______ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

5. Si la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a l, entonces:

a) ______ $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente a $2l$
b) ______ $(a_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a l, $\forall k \epsilon \mathbb{N}$
c) ______ $(a_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ con $k \in \mathbb{N}$no tiene porqué ser convergente
d) ______ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona

6. Sabiendo que el cuadrado de partida de la figura (1) es de lado 1 u. Si se repite el proceso de división del cuadrado infinitas veces, el área de la región sombreada es:

a) ______ $\frac{1}{8}$
b) ______ $\frac{1}{7}$
c) ______ $\frac{1}{4}$
d) ______ Ninguna de las anteriores

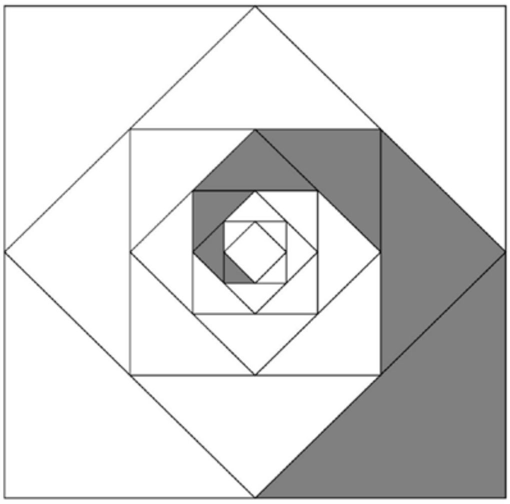


Figura 1.

7. El valor de la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ es :
   a) ______ 2
   b) ______ $2 - \frac{1}{2^n}$
   c) ______ No se puede calcular
   d) ______ Es infinita si n tiende a infinito

8. Los siguientes conjuntos son intervalos de $\mathbb{R}$:
   a) ______ $\{-1, 2\}$
   b) ______ $(1,2) \cup (0,5)$
   c) ______ $\{x : x = 5\lambda\,, \lambda \in \mathbb{R}\}$
   d) ______ $\{x : 3x - 2 < -2x + 3\,, x \in \mathbb{R}\}$

9. Se consideran las siguientes particiones de $[0,1]$:

   $\mathcal{P}_1 = \{0,\ 0\,´1,\ 0\,´2,\ 0\,´3,\ 0\,´4,\ 0\,´5,\ \ldots\,,\ 0\,´9,\ 1\}$, $\mathcal{P}_2 = \{0,\ 0\,´25,\ 0\,´75,\ 1\}$,
   $\mathcal{P}_3 = \{0,\ 0\,´2,\ 0\,´25,\ 0\,´4,\ 0\,´5,\ 0\,´6,\ 0\,´8,\ 1\}$,
   $\mathcal{P}_4 = \{0,\ 0\,´2,\ 0\,´25,\ 0\,´4,\ 0\,´5,\ 0\,´6\,,0\ \,´75,\ 0\,´8,\ 1\}$,
   $\mathcal{P}_5 = \left\{0,\ 1,\ 1 - \frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{3},\ 1 - \frac{1}{4}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}\right\}$

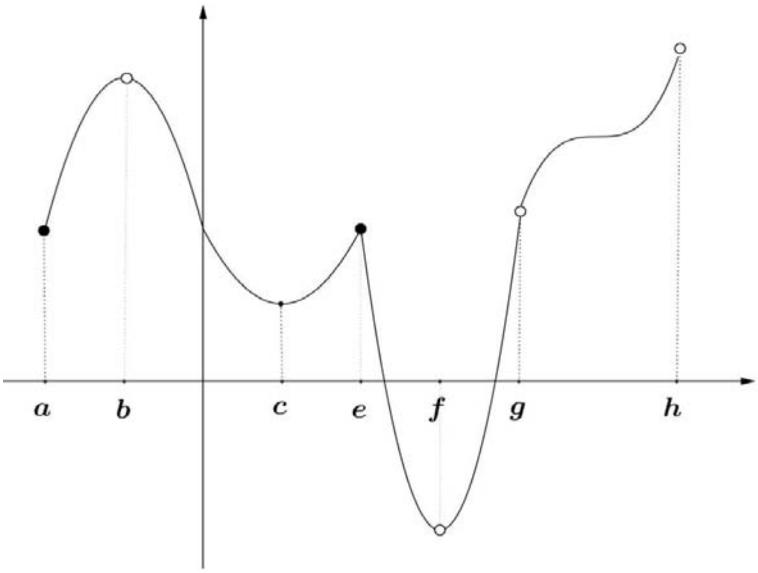
   a) ______ $\mathcal{P}_1$ es más fina que $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$
   b) ______ $\mathcal{P}_3$ es más fina que $\mathcal{P}_2$
   c) ______ $\mathcal{P}_4$ es más fina que $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$
   d) ______ $\mathcal{P}_5$ es más fina que todas las anteriores.

10. Dado $A = [0,3) \cup (3,6]$:

a) ______ La frontera de A es $\{0,6\}$
b) ______ La frontera de A es $\{3\}$
c) ______ 3 es un punto de acumulación de A
d) ______ A tiene infinitos puntos de acumulación

11. De acuerdo con la gráfica de la función g, dada en la figura de abajo:

a) ______ g tiene máximos en $x = b$ y en $x = e$
b) ______ g tiene mínimos en $x = a$ y en $x = f$
c) ______ g tiene máximos en $x = b$, en $x = e$ y en $x = h$
d) ______ g tiene mínimo en $x = a$ y en $x = e$ tiene máximo



En adelante $\overline{ext}$ denotará el extremo superior o supremo y $\underline{ext}$ el extremo inferior o ínfimo.

12. Considerando el conjunto $E = (-6,1] \cup [3,5)$:

a) ______ 1 y 5 son extremos superiores de E.
b) ______ -6 y 3 son extremos inferiores de E.
c) ______ 5 es $\overline{ext}E$, pero no 1.
d) ______ 5 es el único $\overline{ext}E$, y -6 el único $\underline{ext}E$.

13. Dada la función real de variable real $f(x) = 4x + 1$. De acuerdo con la sentencia:

$$“\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon ”,$$

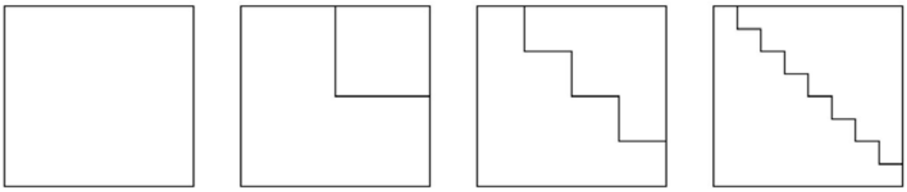
los valores de δ para los cuales se cumple la desigualdad $|f(x) - 9| < 0´01$ con $a = 2$ son:

a) ______ $\delta < 0´005$
b) ______ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$
c) ______ $\delta < \varepsilon$
d) ______ $\delta \leq 0´0025$

14. Señala:

a) ______ Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces es monótona.
b) ______ Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, y todos sus términos son menores que el límite, entonces, es monótona creciente.
c) ______ Si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y menor que otra sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona decreciente que tiene límite, entonces $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
d) ______ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y decreciente, está acotada.

15. Se dispone de un espacio cuadrado de lado $1u$ para construir una escalera, tal y como se muestra en la siguiente figura:



Cuando el número de escalones tiende a ∞, la longitud de la línea quebrada que recorre la escalera es:

a) ______ 1
b) ______ 2
c) ______ No se puede calcular
d) ______ $\sqrt{2}$

16. $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow$

a) ______ $\forall\varepsilon \geq 0,\ \exists\delta \geq 0$, tal que $|x-a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$
b) ______ Fijada una aproximación k de l, existe un entorno reducido de a tal que todas sus imágenes están más cerca de l que k.
c) ______ $f(a) = l$
d) ______ x se acerca a a pero $x \neq a$ y, $f(x)$ se acerca a l pero $f(x) \neq l$.

17. Las siguientes series son convergentes:

   a) ______ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
   b) ______ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, $k > 1$
   c) ______ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
   d) ______ $\sum_{n=1}^{\infty} k$ con $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$

18. Sea G el cardinal del conjunto de granos de arena de la tierra, $\aleph_0$ el cardinal de $\mathbb{N}$, C el cardinal del conjunto de puntos de un cuadrado de lado unidad y H el cardinal del intervalo $[0,1]$, entonces:

   a) ______ $G = \aleph_0 < C = H$
   b) ______ $G < \aleph_0 < H < C$
   c) ______ $H < C < \aleph_0 < C$
   d) ______ $G < \aleph_0 < C = H$

19.
   a) ______ $\mathbb{Q}$ es numerable pero no denso en $\mathbb{R}$.
   b) ______ $\mathbb{R}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.
   c) ______ $\mathbb{I} \cup \mathbb{N}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.
   d) ______ $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.

20. Dado un segmento de longitud $1\,u$. Si realizamos el proceso indicado en la figura dada, un número infinito de veces y denotamos por B el conjunto de segmentos borrados a lo largo de todo el proceso y por $\overline{B}$ el conjunto de los que no se borran:

   a) ______ $Card(\overline{B}) = 0$
   b) ______ En el paso n, la suma de las longitudes de los segmentos borrados es $\frac{1}{3^n}$
   c) ______ $Card(\overline{B}) = Card(B)$
   d) ______ $Card(\overline{B}) < Card(B)$

21. Sean $A = \{x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \in \mathbb{I}\,, 0 \leq x < 36\}$

a) ______ A está formado por todos los números pares positivos y $C = [0,36) \cap \mathbb{I}$
b) ______ A está formado por todos los números pares y $C = [0,36) \cup \mathbb{I}$
c) ______ B está formado por todos los números impares y $C = [0,36) \cap \mathbb{I}$
d) ______ A está formado por todos los números pares y $C = (0,36) \cap \mathbb{I}$

22. Imagina que tienes un conjunto infinito de pelotas de tenis numeradas $1,2,3,4,5,\ldots$ y un barril con capacidad ilimitada. Estás a punto de iniciar un experimento. El experimento terminará exactamente en un minuto, ni más, ni menos. El experimento empieza tomando las 10 primeras pelotas, luego se introducen en el barril y se saca la número 1 en 30 segundos. En la mitad del tiempo anterior, se colocan las pelotas 11 a la 20 dentro del barril y se saca la pelota número 2. Siguiendo, en la mitad del tiempo resultante (y trabajando cada vez más rápido), se colocan las pelotas 21 al 30 en el barril, y se saca la pelota 3. Se continúa con este proceso indefinidamente siguiendo el mismo patrón. Después de 60 segundos, al final del experimento, ¿Cuántas pelotas de tenis quedan dentro del barril?

a) ______ $9 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = 9 \cdot 30 \cdot 1$ = 270 pelotas
b) ______ No se puede saber
c) ______ Infinitas pelotas
d) ______ $60 \cdot 10 - 60 = 60 \cdot 9 = 540$ pelotas

23. La afirmación: Si "*$f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces $f(x)$ está acotada en $[a,b]$*", significa que:

a) ______ Es condición necesaria que f sea continua en $[a,b]$ para que sea acotada en $[a,b]$
b) ______ Es condición suficiente que f sea continua en $[a,b]$ para que sea acotada en $[a,b]$
c) ______ Si f está acotada, f es continua en $[0,3]$
d) ______ Si f no es continua, f no es acotada en $[0,3]$

24. Los siguientes conjuntos son particiones de $[0,1]$:

a) ______ $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$
b) ______ $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$
c) ______ $[0,1] \cap \mathbb{Q}$
d) ______ $\{0,1\} \cup \left\{\frac{e}{10^6-n}\right\}_{n=1,2,3,\ldots,1000}$

25.
a) ______ Todas las series aritméticas no nulas son divergentes
b) ______ Todas las series geométricas son convergentes
c) ______ Si $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
d) ______ Si $a_n > b_n$ y $\sum a_n$ es convergente, entonces $\sum |b_n|$ es convergente.

26. Considerando $K = \left\{a_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Si H es el conjunto de puntos interiores, F el conjunto de puntos frontera y A el de puntos de acumulación de K:

a) ______ $H = K$ y $F = K$
b) ______ $A = \emptyset$ y $F = K$
c) ______ $H = \emptyset$ y $A = \{0\}$
d) ______ $F = K \cup \{0\}$ y $A = \{0\}$

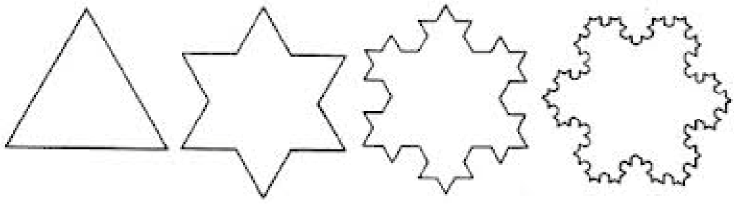
27. Los siguientes conjuntos son particiones del intervalo $[a, b]$, con a y b irracionales:

a) ______ $\mathbb{Q} \cap [a, b]$
b) ______ $\mathbb{I} \cap [a, b]$
c) ______ $\{x: x = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, con $n \in \mathbb{N}\}$ y $k = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$
d) ______ $\{x: x = k \cdot \frac{b-a}{10^n}$, con $n \in \mathbb{N}\}$ y $k = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

28. Las siguientes sumas son series:

a) ______ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$
b) ______ $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$
c) ______ $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p}$
d) ______ $\sum_{p=1}^{n} k$

29. Sabiendo que el perímetro del triángulo inicial de la figura dada es $3u$. La longitud del perímetro de la curva que se genera después de infinitas iteraciones, es:



a) ______ $3+\frac{9}{3}$
b) ______ $3+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots$
c) ______ $\lim_{n\to\infty}\left(3+n\cdot\frac{1}{3}\right)$
d) ______ $\lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

30.
a) ______ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$ es convergente porque $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k^n}=0$, para todo $k\neq 0$.
b) ______ Si $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, entonces para algún $n_0\in\mathbb{N}$, $\sum_{k>n_0}^{\infty} a_k$ está acotada
c) ______ Si $0>\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n>0$, entonces para algún $k\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=k}^{\infty} b_n>\sum_{n=k}^{\infty} a_n$
d) ______ Se puede hallar la suma de todas las series convergentes

En adelante, las integrales definidas que se señalan deben interpretarse en el sentido de Riemann o de Darboux.

31. Sea f una función integrable en $[a,b]$. Si se consideran f y a fijas, sea $F(l)=\int_a^l f(x)dx$, con $a\leq l\leq b$:

a) ______ $F(l)$ es un número
b) ______ $F(l)$ es una primitiva de $f(x)$
c) ______ $F(l)+k$ es una primitiva de $f(x)$
d) ______ $F(l)$ es la función cuya imagen es el área bajo la curva asociada a f sobre el intervalo $[a,b]$

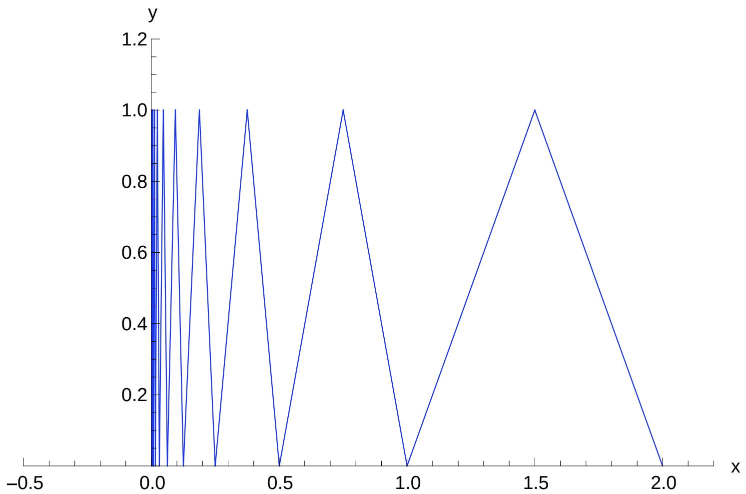
32. Las siguientes funciones son integrables sobre $[0,2]$. ($[\![x]\!]$ denota la parte entera de x).

a) ______ $f(x) = \begin{cases} x, & si \quad 0 \le x < 1 \\ x-2, & si \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

b) ______ $f(x) = x + [\![x]\!]$

c) ______ $f(x) = \begin{cases} x + [\![x]\!], & si \quad x \text{ es racional} \\ 0, & si \quad x \text{ es irracional} \end{cases}$

d) ______ f es la función dada en la figura de abajo.



33. Una función f no es integrable en $[a, b]$ cuando:

a) ______ f no está acotada en $[a, b]$
b) ______ f no es continua en $[a, b]$
c) ______ No se puede hallar la primitiva de f
d) ______ El $\underline{ext}$ de las sumas superiores no coincide con el $\overline{ext}$ de las sumas inferiores.

34.

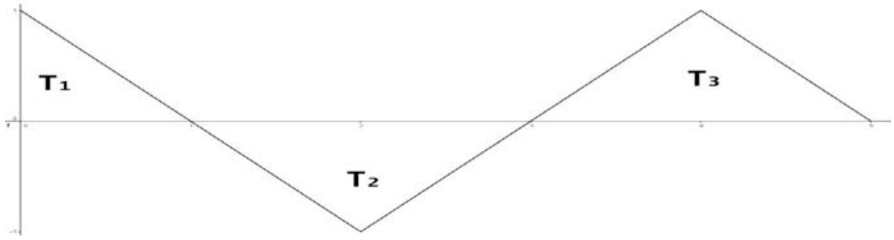
a) ______ $\int_{-1}^{1} |x|\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$

b) ______ $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$

c) ______ Si $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & si \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$, $\int_{1}^{2} f(x)\, dx = x|_1^2 + (-x)|_1^2 = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$

d) ______ Si $f(x) = \begin{cases} 3, & si\ x \in (0,1) \\ 2, & si\ x \in (1,3), \\ -1, & si\ x \in (3,4) \end{cases}$ $\int_0^4 f(x)\,dx = 3x + 2x - x\Big|_0^4 = 4x\Big|_0^4 = 16$

35. La función $f(x) = \begin{cases} -x+1, & si \quad 0 < x < 2 \\ x-3, & si \quad 2 < x < 4 \\ -x+5 & si \quad 4 < x < 5 \end{cases}$, está representada en la figura dada y su integral es:



a) ______ La suma de las áreas de los triángulos T_1, T_2 y T_3, es decir $A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3}$

b) ______ $A_{T_1} + A_{T_3}$ porque T_1 y T_3 están por encima del eje OX

c) ______ $A_{T_1} + A_{T_3} - A_{T_2}$

d) ______ $\int_0^2 (-x+1)\,dx + \int_2^4 (x-3)\,dx + \int_4^5 (-x+5)\,dx$

36. Las siguientes son sumas de Riemann:

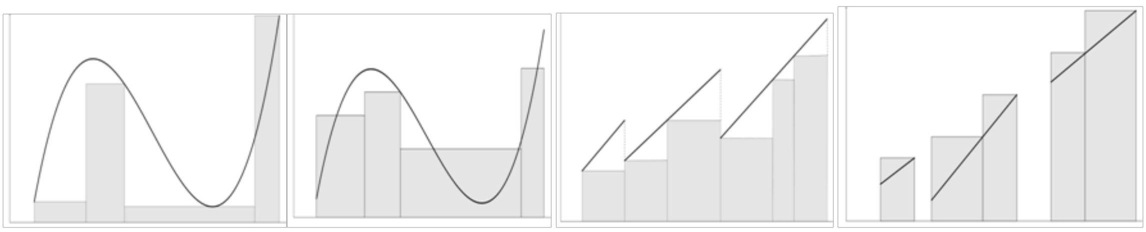
a) ______ $\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ con $M_i = \overline{ext}$ de f en (x_{i-1}, x_i)

b) ______ $\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ con $m_i = \underline{ext}$ de f en (x_{i-1}, x_i)

c) ______ $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$ con $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$

d) ______ $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$ con $\alpha_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$

37. De acuerdo con las áreas de los rectángulos representadas en figura dada



(a) (b) (c) (d)

a) ______ La figura 8(a) representa sumas de Darboux asociadas a la integral definida.

b) ______ La figura 8(b) representa sumas de Darboux asociadas a la integral definida.

c) ______ La figura 8(c) representa sumas de Darboux asociadas a la integral definida.

d) ______ La figura 8(d) representa sumas de Darboux asociadas a la integral definida.

Para terminar, escribe brevemente, y con tus propias palabras, lo que piensas que son un conjunto infinito y un proceso infinito.

Anexo 12
Entrevista a Vladimir

ENTREVISTA A VLADIMIR

[I]:¿Cómo entiendes las integrales de Riemann y de Darboux?

[V]: Para mí, la integral de Riemann es la que se define mediante la sumas superiores y las sumas inferiores, y se dice que la función es integrable cuando la diferencia infinitesimal de esas sumas tiende a cero. El límite superior y el límite inferior de esas sumas coinciden.

[I]: Hmmmm coinciden. El que tiende a cero es la diferencia.

[V]: Claro la diferencia.

[I]: ¿Y la de Darboux?

[V]: La de Darboux , para mí, no era nada y pensaba que era sobre puntos, coger un punto cualquiera dentro de la partición. O sea si de la partición se coge un punto cualquiera t_i de ese subintervalo, $t_i \in [t_{i-1}, t]$.

[I]: Y eso que me acabas de decir es lo que pensabas, ¿y ahora qué piensas?

[V]: Después del cuestionario creo que era al revés, que la de Darboux era la de las sumas superiores e inferiores, y la de Riemann , la de los puntos intermedios.

[I]: Vale, ya que sabes cuál es cada una, dime qué similitudes y qué diferencias les ves, o si como me decías antes…

[V]: Ehhmmm… A priori parece que la de Riemann en el sentido , en el buen sentido, en el punto, un punto de un intervalo cualquiera, es menos característica ,está menos definida ¿no?. Tienes que ver que es independiente del punto que coges, que hay…o sea escogiendo cualquier punto te sigue saliendo el mismo valor, tienes que probar más cosas, mientras que en la otra están caracterizados para cada subintervalo de la partición tú tienes dos puntos marcados, el máximo y el mínimo.

[I]: Huhum.

[V]: Entonces la … es más precisa la definición, quiero decir. Claro, te está dando ya… te está diciendo: ¡No escojas un punto cualquiera!, sino toma es este y este.

[I]: Ajá, ya ya…¿Y…..?

[V]: En cuanto a probar cosas o demostraciones.

[I]: Y la una o la otra, si te dicen, no hay nivel de comparación con lo que me acabas de decir de si es más precisa una o la otra y qué similitudes les ves. O sea la una vía que se hace y la otra vía qué necesitas para cada una.

[V]: ¿Cómo que qué necesitas?

[I]: Tú me estás diciendo: escoger un punto, en el otro hacer una suma… es decir, ¿qué es relevante en cada una de ellas, para ti, y cómo podrías, si fuese posible (interrumpe)([V]: son equivalentes los conceptos.)

[V]: Pues en la línea de lo que te he dicho antes, parece que la de Riemann es una generalización de la de Darboux, porque puedes escoger los puntos que quieras pero son equivalentes.

[I]: Sí, hay un teorema de equivalencia entre las dos.

[V]: Cuando es integrable claro.

[I]: ¿Porqué pusiste que $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{n}$ no es una sucesión?

[V]: Parece ser, entre ver, por los ejercicios anteriores que quieres sucesiones de términos infinitos y estás quedándote con un número finito de términos. Si me dijeras es: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{n}$ y luego a partir de ahí ceros, eso es una sucesión sobre infinitos términos, me está dando una regla que asigne a cada n cada número natural un término. Pero ahí solo hay truncas en él.

[I]: Tenías respondido en la primera pregunta esa suma que tú ves ahí ($\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$ con $n \in \mathbb{N}$) tiene un número finito de sumandos, dijiste que sí, y en el ítem (d), a la pregunta : No se sabe los sumandos que tiene(interrumpe [V]: Es falso.). Es falso ([V] :Sí que se sabe.) Y por qué se sabe y cuánto es.

[V]: ¿El número de sumandos que tiene?

[I]: Sí, el número de sumandos que tiene.

[V]: Ehhh…. Tiene n.

[I]: Es que en esa pregunta hubo bastantes cosas que sacamos, y en el 6, en la parte c…

[V]: ¿Cuál era…? Ahh sí …

[I]: En la parte c tú pusiste… ([V]: No te va a gustar, es que la vi geométricamente.) ¿Si?

[V]: S i recolocas los cuadrados se ve que están rellenando la parte... o sea si partieras el cuadrado de lado 1 en cuatro trozos iguales el proceso este lo que te está haciendo es rellenar infinitamente el área del cuadrado pequeño de la esquina derecha, que es la cuarta parte del grande. Lo vi así porque no me salían las cuentas…jejeje

[I]: Bueno… y por qué dices que no me va a gustar, pues si me gusta porque precisamente tú estás haciendo una asociación geométrica a una asociación de cosas. Fíjate y te lo voy a decir que yo no lo vi así ([V]: Es más visual.) Claro pero estás utilizando la representación, a eso se le llama la representación geométrica o gráfica más bien de lo que es en este caso por ejemplo una serie geométrica ¿no? . Yo te digo que yo no la vi así, yo… ([V]: Claro había términos, suma…) Pero fíjate que, en ese sentido, puedo decir de mi parte que tú tienes mejor percepción visual.

[V]: Lo vi así porque no me salían las cuentas… jeje

[I]: No te salían. Y a priori qué fue lo que viste. ([V]: Ehhh… ¿así?)Al hacer la suma, ¿tuviste lío para sacarla?

[V]: sí es que me marean un poco las series…

[I]: Y luego en el 7…

[V]: Pero también te digo que una vez sabiendo que salía ¼ es mucho más fácil hacer la suma.([I]: Ahhh… Tú ya sabías que salía ¼ …) Claro, visualmente vi que era ¼ y luego hice la cuenta y dije "Ah mira ,salió", pero si me pongo a hacer las cuentas sin saber qué me va a salir…me sale 1/8 perfectamente.

[I]: En el c tú dices que eso sí es un intervalo.

[V]:Sí, bueno no es un intervalo, es $\mathbb{R}$, no …es ….es $\mathbb{R}$ sí. $\mathbb{R}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

[I]: Y en el 9, en el (a) y en el (b)…

[V]: Vale , voy a ver las particiones

[I]:Tú pusiste que es falso que sea más fina.

[V]: que $\mathcal{P}_2$ seguro porque no aparecen esos puntos en la partición $\mathcal{P}_1$, los de $\mathcal{P}_2$, y que $\mathcal{P}_3$ también porque el 0.25 por ejemplo no aparece en $\mathcal{P}_1$. Y el (a) y el (b) me has dicho ¿no?

[I]: El (a) y el (b) solamente quería…

[V]: Y en el (b), $\mathcal{P}_3$ es más fina que $\mathcal{P}_2$, lo cual es falso porque tiene el 0.75 no está en $\mathcal{P}_3$.

[I]: Huhum…Claro, tiene que estar contenido allí. Y en el punto 10d, que tú dices que el conjunto A tiene infinitos puntos de acumulación… ([V]: Sí) ¿Por qué?

[V]: Porque cualquier punto del 0 al 3, sin contar con el 3, el punto de acumulación, y del 3 al 6 también. Sin contar el 3 claro.

[I]: Hay un punto muy interesante en el 13 particularmente quiero saber cómo lo hiciste, cómo lo pensaste.

[V]: He hecho la cuenta, pero bueno…

[I]: ¿Has hecho la cuenta?!

[V]: Sí, se puede acotar esta función manualmente y te sale esa cota si no recuerdo mal.

[I]: O utilizaste la definición y diste…(interrumpe)

[V]: Es la definición de límite, y te dice) calculé la delta para que pase eso si está hecho a mano.

[I]: Ajá…Y en el 14 que es una afirmación y me puedes refutar si es cierta o no, el (a) y (b).

[V]: El A es falsa porque una sucesión convergente no tiene por qué ser monótona, véase: $\frac{(-1)^n}{n}$ esa sucesión no es monótona va cambiando de (No se entiende 10:08) y aun así su límite es 0 cuando tiende a infinito.

[I]: Perfecto.

[V]: El (b) también es falso porque puedes hacer que vaya oscilando y siempre que esté acotado por un límite superior puede estar oscilando y monótono quiere decirte que el término superior siempre es mayor que el término anterior.

[I]: Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y decreciente, está acotada ¿Qué piensas de eso?

[V]: Hummm…Me parece un poco raro, o sea que cada término sea mayor que el anterior y menor, ¿cómo va a ser mayor y menor que el anterior? Son excluyentes, o sea, tiene que ser constante. Y si es constante….tiene que ser constante…y si es constante es acotado.

[I]: la pregunta 15, ¿Cómo la pensaste?

[V]: Es que este, este… si tú coges una franja, bueno, con la línea quebrada y la acotas entre dos diagonales, lo que estás calculando es cuánto mide la longitud de la línea quebrada cuando el límite de esa, de ese área que la está encerrando tiende a 0.

[I]: Pero por qué el área ¡si se ha pedido la longitud!

[V]: La longitud encerrada en esa área. Porque estás,…ese límite estás tendiendo la línea quebrada en el límite deja de ser quebrada, por eso aunque la sucesión sea constante (es que de este me acuerdo porque estuve mucho tiempo pensando..) aunque la sucesión sea constante ([I]: O sea y tú por qué línea ibas, bueno, hubo dos formas de pensar ese problema…) Claro, porque nos pusimos a discutir, porque nos pareció muy curioso, porque había gente que decía: “ No, no yo me quedo con: La sucesión de términos es constante, por lo tanto el límite de esa sucesión es igual a la constante. Lo que está asegurando entonces es que la línea quebrada en el límite sigue siendo quebrada, o sea infinitamente tiene sus escalones, y nosotros lo que pensábamos (Carlos y yo), déjame pensarlo, es que esa línea quebrada en el límite deja de ser quebrada para ser una línea recta, entonces el teorema de Pitágoras te da que es $\sqrt{2}$ ([I]: Entonces qué os hace pensar que esa línea quebrada en el infinito deja de ser quebrada si siempre se supone que así, sea en el infinito, siempre se va a mantener…

[V]: Por eso digo porque si la estás intentando meter en una franja de área 0, no puedes hacerlo porque te estarías saliendo, al aplastarlo la estás aplanando, no puede haber escalones, ni infinitamente pequeños ni nada. Creo, luego hay teorías fractales que a lo mejor dicen que lo que estoy diciendo es falso. Pero luego cojo el área de Riemann, y no sé, no parece un límite de una sucesión. Nosotros estábamos empeñados que salía $\sqrt{2}$ y en que al final no es quebrada.

[I]: Y en el 16, respecto del concepto de límite.

[V]: Ahh esto es definición. Ehhh…

[I]: ¿Por qué has puesto verdadero?

[V]: Sí. Es la pura definición porque lo que te está diciendo es “Límite es la interpretación de que cuanto más te acerques de $f(x)$, es decir, cuando te estás acercando a $f(x)$, cada vez te acercas más a la l, y eso es lo que está ahí reflejado. Si coges puntos muy cercanos a "a", entonces sus imágenes están muy cercanos a l, que es su límite.

[I]: Ajá, pero fíjate que la definición de límite, si tú eres bien riguroso con la definición de límite… (interrumpe)

[V]: Has puesto un número igual en el delta) claro, y en el épsilon también. Y en el épsilon también. Hummm!!

[I]: Entonces ya no es… (interrumpe)

[V]: Ya no es coherente con lo que dice, entonces debería ser continua para que eso fuera cierto.

[I]: Claro, entonces quería saber por qué habías puesto eso… (Interrumpe)

[V]: ¿Que por qué puse verdadero? Sí, porque pensaste que era la definición de límite, porque tú ya te habías fijado por lo que me dices, que era menor o igual.

[V]: Por pura definición yo me fijo en esas cosas, pero a lo mejor se me olvidan,… que…bueno que seguro que pensé también en… es que hace tanto tiempo…seguro que pensé…

[I]: No si te has dado cuenta ahora mismo que…que es menor o igual, te habrás dado cuenta, sino que pese a eso, pese a eso, pusiste que era…

[V]: Bueno es que a lo mejor pensé que pues a lo mejor es aproximación, ya que al fin y al cabo estás diciendo que los puntos cercanos se acercan.

[I]: Ya, y por qué si sabes bien la definición en continuidad y en límite, las definiciones rigurosas en continuidad y en límite de la expresión que está ahí, hmmmm, ¿cuál es la diferencia entre los dos, en que es te el mayor e igual o que no esté?

[V]: Ehhh… la diferencia es el valor en el punto. O sea la continuidad implica que el valor en el punto sea el límite, mientras que el límite puede ser cualquier cosa, no el valor en el punto.

[I]: Ajá, y en el b, pusiste falso ¿no? Fijada una aproximación K de l existe un entorno reducido de a tal que todas sus imágenes están más cerca de l que de K. Y me acabas tú de decir la palabra, aproximación, me estás diciendo entonces:" Eso quiere decir que la aproximación…" Tú mismo lo has dicho. Y curiosamente has marcado falso…

[V]: No, pues esta definición no es la buena, es la anti-imagen del abierto, dice que puedes encontrar el entorno de a…entonces…

[I]: Te lo pregunto precisamente porque me acabas de decir, en términos, que fijamos una aproximación, es como si me hubieses dicho la que sigue, digo entonces que por qué la has puesto…

[V]: A lo mejor me lié y la he puesto mal, el concepto sí sé cuál es, pero…

[I]: Pero entonces consideras que el…

[V]: A lo mejor cuando lo pensé vi un error, y ahora no lo estoy viendo, pero sí, ahora así a simple vista sí me parece que está bien. Cambio la a por la (b).

[I]: Mira en el 18, que es un punto que también nos parece interesante[1] ¿qué piensas del ítem (d)?

[V]: El (d) G es finito, por lo tanto es menor que $G < \aleph_0$, que es el menor de los cardinales infinitos, y luego el conjunto de puntos del cuadrado unidad es igual que el conjunto del puntos de $[0,1]$.

[1] Sea G el cardinal del conjunto de granos de arena de la tierra, $\aleph_0$ el cardinal de $\mathbb{N}$, C el cardinal del conjunto de puntos de un cuadrado de lado unidad y H el cardinal del intervalo $[0,1]$.

[I]: Y por qué el cuadrado unidad es igual…

[V]: Producto de cardinales iguales es igual a cardinal.

[I]: ¿cómo enfrentaste la pregunta 20?

[V]: ¿El del conjunto de Cantor?

[I]: Sí. Digamos que es el conjunto de Cantor pero visto…Digámoslo que con "borramientos". En ese punto, por ejemplo, por qué tú afirmas que el cardinal de lo borrado y el cardinal de lo no borrado es exactamente igual.

[V]: Así a bote pronto voy a decir una cosa de la que quizá me arrepienta. En cada paso tienes intervalos, un número infinito de intervalos, que son intervalos de R, o sea que tienen cardinal de continuo, por eso un número finito es el producto de ellos, cada vez tienen más, pero siguen teniendo cardinal de continuo. Y pasa eso tanto en borrado como en coloreado.

[I]: O sea que tú me dices que al borrar, el número de intervalos que se borran tanto los…. ([V]: Son, son distintos…) vale, son distintos, pero me estás diciendo que es un número finito de intervalos borrados.

[V]: Claro, en cada paso están borrando un número finito, y entonces tienes un número finito de intervalos borrados, y un número finito también de intervalos no borrados.

El número es distinto, pero el cardinal de esos son iguales. Por ser productos finitos del mismo cardinal. Esto fue así a bote rápido, no me acuerdo si fue así mi razonamiento.

[I]. Y en el 21, tú ves ahí conjuntos expresados de distinta manera…en (Tos) en el 21(a) que era verdadero…

[V]: Ah no pues no son los positivos, me acabo de dar cuenta, también pueden ser negativos, pueden ser todos los pares. Me acabo de dar cuenta.

[I]: Y en el (d)…

[V]: Es falso porque no coges el 0, bueno no, el 0 es irracional, digo nada, el 0 es racional. Pues el d es cierto y el a es falso.

[I]: Ajá… bueno bueno, quería saber el por qué pusiste…

[V]: Porque no me fijé bien, tardábamos mucho en hacerlo.

[I]: ¿Y hablasteis entre vosotros por ejemplo del ejercicio 22, de las pelotas…? ([V].Sí) ¿Y también trajo problemas?

[V]: Había gente que decía, si no recuerdo mal, que no se puede realizar el experimento, porque nunca puedes hacer infinitas realizaciones, es un proceso mental.

[I]: Bueno sí, bajo ese supuesto porque esos son experimentos ¿no?

[V]: Ehh… había gente que decía que…

[I]: Y los que decían eso, por ejemplo, ¿a qué conclusión llegaban?, ¿que no era ninguna de las respuestas?

[V]: Que no se puede saber claro, es una cosa que no se puede realizar, por lo tanto no tiene sentido plantearse qué pasaría. Ehh… ¿Cómo era, tenías…? Bueno lo voy a leer. Si, el problema era si numerabas las pelotas o no las numerabas. Si numerabas las pelotas, parecía que estuvieras metiendo 9 más, 9 más…entonces, el número de bolas al final sería infinito.

Pero el otro razonamiento es: “Dime qué bola… que bola está” ¿no? Si yo las numerara siempre voy metiendo tantas más, pero… quiero decir, si van numeradas, parece que estás metiendo 9 bolas más, entonces son infinitas, porque estás añadiendo una cantidad finita infinitas veces y tal. Pero por el contrario si las estás numerando y quitas la 1, y en el siguiente paso quitas la 2, y en el siguiente paso, al hacerlo infinitas veces, la pregunta qué bola sigue dentro, no tiene respuesta, es decir, no hay ninguna bola dentro, porque siempre la voy a sacar. En el paso siguiente la voy a sacar, va a haber un paso finito en el que saque esa bola.

[I]: Bueno, entonces tu respuesta ¿cuál es?

[V]: ¿La mía propia? Ehh…Yo pensé con no numerarlo cuando lo hice, pero luego cuando lo hablamos la otra respuesta me convenció bastante. O sea, creo que no se puede saber por qué no hay,… no me puedes decir que no la hay, ningún número está. Pero a la vez parece que tiene que haber alguna. Por lo tanto hay 0, o…

[I]: ¿y las otras posibilidades que pusimos?

[V]: Ah, lo de los dos números finitos, eso no tiene sentido ninguno, y las dos que entran en disputa: ”no se puede saber” e “infinitas pelotas”.

[V]: Y si hay infinitas…pero y a la respuesta de ¿qué pelota hay?

[I]: Ah ¿qué pelota? No, la pregunta era cuántas hay.

[V]: ¿Cuál hay si están numeradas? un número finito. O sea que…

[V]: Ya, ya, pero un infinito de primer orden, por así decirlo, y por eso el número de pelotas debería ser numerable, no puedes hacer biyección.

[I]: Bueno, pero el que sea numerable no significa que no sean infinitas ¿no? La pregunta era si eran infinitas.

[V]: Sí, pero digo que debería ser numerable, debería por construcción ser numerable. ([I]: Por construcción, sí, sí…) pero el dato te pide “Dame esa biyección” y no me puedes dar esa biyección, porque no me puedes decir qué pelotas hay…

Claro, pero es lo mismo que te he dicho al principio, si no las numerases, fantástico, estás metiendo 9 pelotas, estás añadiendo una cantidad, es como una suma de una serie de términos mayores que 1.¡¡¡Pues eso se va al quinto carajo!!! Se va a infinito. Pero si las numeras, tienes ese problema, que no sabes qué pelota es.

[I]: Claro, ajá. El cuántas sí, pero tú quieres mirar cómo se puede hacer la biyección, eso es lo que me estás… pues lo giraremos, eso sí, sí… cuándo lo tenga te lo digo. Ahora, particiones. Me has puesto ahí todo verdadero creo. En el 24, ¿por qué es una partición?

[V]: Porque todos son numerables o finitos.

[I]: ¿Y una partición tiene que ser numerable?

[V]: Ehh… por lo que nosotros dimos sí… dábamos particiones numerables… Creo, creo recordar…

[I]: Claro, cuando…

[V]: Definición de partición…

[I]: ¿Qué es una partición?

[V]: Ehh… por lo que nosotros dimos sí…creo recordar que era un… que podías escoger numerables, o sea que no tenía por qué ser un paso finito. Las sumas superiores de Riemann por ejemplo, podías coger las series superiores de Riemann. Si la partición la haces en $\mathbb{Q}$ por ejemplo, coges todos los racionales, acabas en b también. En una partición tienes que llegar del 0, al 1. Y la partición que coges es del 0 al $0{,}5$, y bueno $\frac{1}{n}$ intersecado con el $[0{,}1]$, ahí están, y le añades el 0. Le añades el 0, pero ya tendrías una partición numerable ¿no? Que empieza en 0 y acaba en 1, lo que pasa es que es numerable. Depende de si consideras numerable una partición numerable.

[V]: Le añades el 0, pero ya tendrías una partición numerable ¿no? Que empieza en 0 y acaba en 1, lo que pasa es que es numerable. Depende de si consideras numerable una partición numerable.

[I]: Hmmm…vale. Bueno, este sí que creo que tenías todo bien. Todas las series aritméticas de un inglés son divergentes.

[V]: En el 25, el (c) y el (d).

[V]: La (c) es una condición necesaria pero no suficiente. Convergente, sus términos tienden a 0 pero eso no tiene nada que ver con que sea la serie de 1/n, sumar esos términos, no es convergente pero sus términos tienden a 0. Y la otra… el problema estaba “Si fueran los dos, si fuese una serie de términos positivos”, Fantástico y maravilloso, pero si no lo es no.

[I]: Vale, estas preguntas yo sé que tú las tuviste bien, pero muchos no las tuvieron bien, entonces quería precisamente detectar el… ([V]: sí, sí.)

[V]: Considera la topología en R ¿no?

[I]: Sí, sí.

[V]: El 16 (c) no tiene puntos interiores porque son todos puntos cerrados, o sea, son un conjunto discreto de puntos, y el conjunto de puntos de acumulación es el 0, claro, es el límite de esa sucesión. Y el (d), la frontera… sí, cada punto es frontera y el 0 como es acumulación también…no, a ver, el conjunto de puntos frontera $F = K$ y 0 al es el límite.

[I]: En el 29.

[V]: Con las particiones ¿no?

[I]: Sí, en el 29 … ¿cómo lo pensaste?

[V]: Ehh… si no recuerdo mal iba calculándolo al añadirle… esto es del a1 ¿no?, si lo partes es lo mismo + 1/3, y eso lo estás repitiendo por 3, o sea que sería 3* (1/3) y recursivamente te sacas la regla de recursividad y te sale.

[I]: Y así como tú dices, a bote pronto, ¿cuánto da eso? Como te preguntábamos por la… Si es ese límite que tú dices que tienes bien…

[V]: ¿El límite de esto?

[I]: Ajá.

[V]: Pues… pff divergente. Jejeje

[I]: Claro, es…

[V]: Estás haciendo infinita esa longitud… y lo de la línea quebrada…

[I]: ¡Sí! Jjejejejeje

[V]: Sí, sí, es lo de la línea quebrada. Si puedes hacer infinitas veces el paso ese estás diciendo que (Habláis al mismo tiempo, no se entiende. 37:47)

[I]: Claro, esto es desde el punto de vista que tú veías el fractal, aquí claro.

[V]: Claro, esto es un fractal…

[I]: Y es más o menos lo que tú pensaste cuando lo de las escaleras. Fíjate… En el 30, hmmm… en el 30 para justificar tus respuestas, en lo usual cogiste algún contraejemplo o…

[V]: En el primero sí,… es convergente… o sea no es convergente por eso. Es lo mismo que hemos dicho antes, eso es una condición suficiente pero no necesaria.

[I]: Como por ejemplo qué sucesión… que te venga a la mente.

[V]: Con k distinta de 0, la de con $k = -1$ ¿puede ser?, o con $k = 1$ que es divergente. Bueno no, pero el del límite también sería 1 ¿o no?

[MyV]: No, el límite no sería 0.

[V]: Para que el límite sea 0 tiene que ser un número comprendido entre -1 y 1.

[I]: Distinto de 0.

[V]: Y esa es la serie geométrica entonces, sí, es convergente, pero no por eso. Porque siempre la puedes acotar por la serie del valor absoluto, que es geométrica, y la razón está comprendida entre 0 y 1, por lo tanto converge.

[I]: O sea que es verdadero.

[V]: Ehmmm… Sí…Jejejejejejje

[I]: Ehh…bien, otro, si, en ese mismo, es que en ese tuvimos también… el (b). Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{k>n_0}^{\infty} a_k$ está acotada.

[V]: Lo que estás diciendo es que a partir de ese $n_0 \in \mathbb{N}$, por ejemplo, los a_n tienen módulo menor que una cantidad prefijada, la que quieras...

[I]: Sí.

[V]: Por lo tanto sumarlos sería meno o igual que sumar esa cantidad… pero es una cantidad fija, bueno…

[I]: Claro, dice que implica que está acotada.

[V]: Lo que tendrías que hacer es ir variando la cota y conseguir cotas… o sea, para n_0, acotar…bueno, por una serie que vaya a converger, acotar por un número, bueno, para n_{0+1} acotar por…o sea, ir acotando por una sucesión que converge

[I] ¿Y el (c)?

[V]: Estas cosas las pensé pero no sé si…

[I]: Es que en esas particularmente las has tenido mal. Por que nosotros buscamos contraejemplos, entonces quería saber qué fue lo que pensaste, bueno, no todas… no te voy a decir cuáles bien y cuáles mal.

[V]: No recuerdo, las series se me dan mal y…

[I]: Vale,…así me dijiste al principio, jejejeje.

[V]: Sí, sí, se me dan mal y si pensé algo se me ocurrió entonces, y no se me va a volver a ocurrir.

[I]: En el 32, que tiene que ver con la integral, ¿se te hizo sencillo…?

[V]: ¿Calcular las integrales? Sí, no es difícil.

[I]: ¿Las calculaste o sencillamente viste las características de la integral y las calculaste? De la función, perdona, las características de la función.

[V]: Creo que la 32(a) se calcula a ojo, no hace falta plantear la integral.

[I]: En el 32 lo único que preguntábamos es si son integrables o no.

[V]: Ah son integrables, vale. Ah bueno, esto hay otro problema, es que mi noción de integrabilidad, utilizo siempre el teorema de que el conjunto de discontinuidades sea de medida 0, de medida 0 de Lebesgue. Pero no sé si eso es integrabilidad Riemann, no sé si el teorema es: es integrable Riemann si son así, el conjunto de discontinuidades es de medida 0 por la medida de Lebesgue. Por ejemplo, la función esta de característica de dos racionales, el sentido de Riemann no sería integrable… ([I]: No.) En el sentido de Lebesgue sí, pero yo pensaba que era en el sentido de Riemann.

[I]: De todos modos, sí claro, por eso os pusimos aquí…

[V]: Usando ese criterio.

[I]: … en el sentido de Riemann y Darboux.

[V]: Claro, yo uso siempre ese criterio entonces a lo mejor…

[I]: Bueno, con ese criterio sí, sé que te dieron…

[V]: La 32(a) tiene una discontinuidad sólo, la otra tiene un número numerable de discontinuidades que es de medida 0, pero no es finito, la tercera es otro tanto de lo mismo.

[I]: La tercera… sí.

[V]: Y la última… es continua.

[I]: Y la última a ojo, de lo que te diste cuenta es que es…

[V]: ¿Cuánto vale la integral dices?

[I]: No, no, aquí también sólo preguntamos si era integrable.

[V]: Es continua.

[I]: Sí, es continua.

[V]: Por tanto es integrable…visualmente también se puede ver.

[I]: Bien, qué dices del 34(b).

[V]: Se sale por cálculo.

[I]: Sí.

[V]: Creo que sí que sale por cálculo…De todas formas la función tiene simetría respecto del eje normal, entonces…

[I]: ¿Pero por qué pusiste falso?

[V]: Ahh… vale, porque te sale negativo, tiene que ser positivo.

[I]: ¿Por qué?

[V]: Es una función positiva, integrando un intervalo. El valor tiene que ser positivo.

[I]: Bueno…

[V]: Se puede ver con lo que te digo, entre el 0 y el 1 tiene que salir, o sea por la simetría es el doble de lo que vale entre 0 y 1, que todos los valores de $\frac{1}{x^2}$ 1 entre 0 y 1 son positivos. Así que sale positivo…

[I]: No, porque esa función es discontinua en 0, tiene una discontinuidad infinita, entonces tú no puedes calcular la integral así.

[V]: ¡Ahhh pedrín!… no me había acordado, sí.

[I]: ¡Lo ves! Entonces claro, por eso estamos mirando,…ehhh sí, y yo creo que no sólo tú, sino muchos pensaron en ello ¿no? Hmmm… Claro, fue precisamente para eso… y muchos lo tuvieron bien, pero fíjate que no…

[V]: Pero no saben por qué…

[I]: Jejejeje no saben por qué…bueno el 35 en general preguntas no mira…quería hacerte preguntas del 36 y el 37. ¿Vale? En general habéis puesto que esas son sumas de Riemann ¿vale? ([V]: sí) Hmmm… ¿Por qué?

[V]: ¿Por qué las dos últimas y no las dos primeras?

[I]: No, en el 36 y 37, bueno, te pregunto en orden, el 36 ¿vale? El 36, que son sumas de Riemann me has respondido.

[V]: Te he respondido que son la (c) y la (d), las dos primeras no serían de Riemann, entre otras cosas porque el máximo y el mínimo no tienen por qué alcanzarse.

[I]: Aquí es falso, ¿me has puesto falso?

[V]: Sí, porque el máximo y el mínimo no tienen por qué ser valores que alcance f. Y las otras sí, lo otro es: fijas un punto a... además aquí está fijando un punto, bueno, pues el que tú quieras.

[I]: Bueno, y en el 37...

[V]: Sí... que ¿por qué representan la suma de Darboux? Como hemos dicho es la de los máximos y los mínimos. Ehhh...sí, son el máximo y el mínimo ¿no?

[I]: O sea lo hiciste visualmente y te diste cuenta en la gráfica, ehh... satisfacían valores máximos o mínimos.

[V]: Claro.

[I]: Bueno... Sí, en ese lo... es que recursivamente tú lo tuviste bien, pero muchos otros no.

[V:]Para terminar, escribiste qué un conjunto infinito es:

* Conjunto infinito: colección de elementos cuyo conteo no puede realizarse, es un proceso mental en el que empleamos inducción.
* Proceso infinito: proceso obligatoriamente mental pues es irrealizable físicamente pues necesitaríamos una cantidad infinita de tiempo para llevarlo a cabo. Es decir, proceso cuya realización necesita obligatoriamente de tiempo no finito.

Respuesta de Vladimir a la última pregunta del cuestionario.

[V]: Eso tiene vida, esa preguntita... Es que siempre es casi lo mismo, un conjunto infinito es un conjunto no finito, ya estás saltando a qué es lo no finito.

[I]: Claro...

[V]: Que alguno define finito. Estás en el mismo problema. Qué no puede contabilizarse...porque necesitarías tiempo infinito para contarlo, físicamente hablando.

[I]: O sea que tú ligas el infinito es al tiempo... ¿o qué?

[V]: Bueno, sí, un proceso finito, como un algoritmo o el proceso este de meter bolas, algo infinito es algo que no se puede realizar, es algo que necesitaríamos, si lo tuviéramos que realizar nosotros, de un tiempo infinito para realizarlo.

[I]: Entonces qué piensas, por ejemplo, si yo tengo un segmento y lo voy dividiendo a la mita, y luego a la mitad de la mitad, y así sucesivamente…

[V]: Que es un proceso infinito, pero tú, como persona, nunca vas a partirlo. Mentalmente sí podrías pensar qué pasaría si algo o alguien lo hiciera. Pero tú no puedes hacerlo.

[V]: Un proceso finito es algo físico, que se puede realizar. Y el infinito es el salto mental. Para mí; es una extracción de lo que es finito, de un proceso finito…

[I]: Entonces el concepto de límite…

[V]: ¿De límite de una función o de límite de un proceso un proceso?

[I]: Hablemos del límite de una función en un punto. ¿Para ti es un proceso o…?

[V]: Es que para mí eso no es lo mismo, el límite de una función lo que te está diciendo es, como hemos dicho antes, el valor al que se aproxima…

[I]: Aproxima, aproxima, aproxima… en el tiempo, aproxima, aproxima…

[V]: No, pero es distinto, porque tú me dices… yo me acerco hasta este punto, y yo te digo, pues yo puedo darte una aproximación más.

En ningún momento estoy partiendo algo infinitas veces, sino, a cada pregunta que tú me haces, yo tengo una respuesta, es…a ese punto, en ese tono que tú me estás dando, todos estos están dentro de ese entorno, es una respuesta inmediata, no estoy aplicando intuición de “si tú me dieras todos los intervalos, yo te doy todos los recubrimientos… “No, no, no, en ningún momento, sólo te estoy diciendo que si tú no eres capaz de escoger un entorno, yo te escojo otro, que todos los puntos van ahí.

[I]: O sea que en el proceso de división, división, división,... que yo te digo, del intervalo, te digo, hay un momento...(interrumpe)

[V]: Ahí no hace falta, no aparece ese proceso, creo, el límite de una función.

[I]: ¿Y ustedes no vieron la definición de conjuntos infinitos?

[V]: Sí.

[I]: ¿Y entonces? Claro, un conjunto infinito.

[V]: Pero un conjunto infinito, si lo definimos como sabemos, entonces no sería..., no creo que la pregunta vaya a "cuál es la definición que te han dado a ti de conjunto infinito"

[I]: Claro, ¿Qué es un conjunto infinito?, claro, estamos hablando de...

[V]: Para nosotros un conjunto infinito es un conjunto que tiene un subconjunto con el cual entra en biyección.

[I]: Pero eso es lo que precisamos, ¿qué es conjunto infinito?

[V]: Yo te lo acabo de responder,

[I]: ¿Entonces por qué lo escribiste de esa manera?

[V]: Porque es mi percepción de qué es un conjunto infinito...

[I]: ¡Ah tu percepción!...

[V]: Pero qué entiendes por conjunto infinito...creo que es lo que se me ha preguntado...

[I]: ¡Ajá...o sea que lo que tú entiendes...!

[V]: No, yo es que el infinito lo percibo físicamente, hay matemáticos que están en contra del infinito matemático como no va a haber otros en contra del infinito físico, el número de partículas del universo es finito, como puedes... no puedes hacer ese salto...la velocidad más alta es finita, es que nuestro universo es físico, lo que conocemos es finito.

[I]: Ya, ya… y bueno, te quería preguntar ya por último Víctor, ¿cuáles fueron las preguntas que más os causaron…(interrumpe)

[V]: ¿Que más me costaron?

[I]: Sí…

[V]: Las series, el fractal y esta.

[I]: Según tu percepción, porque tú ya viste todos los temas relacionados con estos conceptos que hemos tratado, y has inclusive trabajado la teoría de la medida e inclusive has ahondado en conceptos más abstractos ¿sí? Has cogido más cosas de otros sitios. Así que, desde tu punto de vista actual, ¿qué se necesita para saber bien la definición de integral definida, qué tú crees que se debe saber?

[V]: La de Lebesgue. Yo creo que habría que dar toda la teoría, y dejarse de la suma de Riemann, porque la suma de Riemann está bien para visualizarlo, pero al final, medir la fibra de cada punto es un concepto natural, muy natural, y por lo que se ha visto tiene muchísimo mejor comportamiento, es una generalización brutal, por lo tanto creo que es como un paso intermedio que debería de olvidarse. En muchas ramas de las matemáticas hay muchas cosas que no se explican, la geometría afín o la geometría proyectiva no sé, no se estudian como se estudia Euclides, ¿por qué?, porque se necesitaría, requeriría un tiempo y unos esfuerzos que quizás no valgan la pena, porque puedes directamente pasar a la geometría analítica o a la geometría algebraica y ya al pasar por todos esos problemas, con un lenguaje mucho más potente.

[I]: Y cuando tú viste la integral de Riemann qué tanto te costó ehhh… digamos, cuando te enfrentaste al concepto claro, ya es un límite que hay que hallar, pero ya no es un límite de una función en un punto sino de una suma.

[V]: Ah... bueno, eso no… Sí, es que las series y las series de funciones me parecen prácticamente lo mismo, simplemente, para ti qué es converger, utilizas una convergencia y ya está. O sea, me quieres decir que punto a punto converge a tanto, pues entonces fija un valor y la calculas con una serie normal. Que quieres convergencia absoluta, pues absoluta tienes que... No me parece un salto conceptual muy grande.

[I]: Vale, vale... Y respecto de las preguntas, ¿cuál fue la que generó más discusión entre vosotros?

[V]: La de las pelotas, pero sin ninguna duda. Y más ahora repasándolo porque estoy seguro de que fue esa.

¡Vladimir muchas gracias!