



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

MATH-ORIGAMI

Aspectos algebraicos de las construcciones con origami

JAVIER GÓMEZ VILLAMAYOR

Tutor: PHILIPPE T. GIMENEZ

MATH-ORIGAMI

**ASPECTOS ALGEBRAICOS DE LAS
CONSTRUCCIONES CON ORIGAMI**

Javier Gómez Villamayor

TRABAJO FIN DE GRADO:

Math-Origami. Aspectos algebraicos de las construcciones con origami

Grado en Matemáticas, Universidad de Valladolid

LUGAR:

Valladolid

FECHA:

Julio de 2017

El presente Trabajo de Fin de Grado (TFG) pretende abordar el estudio de la teoría matemática relacionada con el origami. Siendo este un tema relativamente amplio, abierto e inexplorado (aún), nosotros sólo nos ocuparemos de precisar las construcciones mediante dobleces sobre una hoja de papel infinita (i.e., equiparando la hoja con el plano complejo, de analizar los conjuntos de números complejos origami-constructibles). Esta es la concepción del origami más elemental, análoga al concepto de construcciones con regla y compás, aunque alejada quizá de la idea esperable de origami (esculturas trimidimensionales de papel).

El contenido del trabajo tiene como argumento principal el estudio de los números construibles por origami siguiendo la formalización clásica dada por los axiomas Huzita-Justin. El resultado fundamental a demostrar en este ámbito será el siguiente:

Un número $\alpha \in \mathbb{C}$ pertenece al conjunto $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ de los números origami-construibles (siguiendo los axiomas Huzita-Justin) si, y sólo si, existe una torre de cuerpos

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

de forma que $\alpha \in F_n$ y el grado de cada extensión $F_j \subset F_{j+1}$ sea 2 ó 3.

Una vez realizado dicho estudio propondremos diferentes generalizaciones y extensiones de los axiomas de partida, creando así nuevas concepciones del origami que analizar; estudiaremos en cada caso las consecuencias y limitaciones de cada una de estas nuevas herramientas de construcción mediante doblado, dando caracterizaciones precisas siempre que nos sea posible.

En cada caso intentaremos tratar también algunas aplicaciones de tales herramientas; así, por ejemplo, veremos cómo caracterizar los polígonos regulares construibles por origami (siguiendo los axiomas Huzita-Justin) o cómo resolver ecuaciones polinomiales simplemente doblando una hoja de papel. También compararemos estos resultados con los correspondientes a otras herramientas más clásicas (e.g., la regla y compás), y daremos respuestas alternativas a los problemas de la geometría clásica.

La teoría de Galois será la materia crucial que nos permitirá entender con precisión, caracterizar y clarificar estas construcciones; siendo imprescindible por tanto para este trabajo la asignatura “Ecuaciones Algebraicas” del Grado de Matemáticas aquí en la Universidad de Valladolid. Si bien el contenido del trabajo queda fuera de los temas examinados en el Grado (así como de los manuales académicos tradicionales en esta materia), parte de éste bien podría considerarse como un ejemplo práctico inmediato de los conceptos fundamentales de teoría de Galois impartidos.

El trabajo pretende dar una visión global sobre este tema, históricamente poco tratado de forma matemática y que actualmente ha vuelto a ser objeto de

análisis (motivado por el reciente auge del origami computacional). La exposición se persigue rigurosa y formal, de forma que se reflejen las capacidades alcanzadas durante el transcurso de los estudios de grado en matemáticas; de igual forma el contenido; siendo este el fin último de cualquier TFG.

El contenido del trabajo se estructura como sigue: los tres primeros capítulos constituyen una parte preparatoria; en el [capítulo 1](#) empezaremos ofreciendo un breve resumen sobre origami; en el [capítulo 2](#) hemos recogido el conjunto de resultados teóricos ya conocidos que se utilizarán durante el trabajo; y en el [capítulo 3](#) presentamos el lenguaje técnico sobre construcciones. La parte central del contenido del TFG queda constituida en los tres capítulos restantes; en el [capítulo 4](#) nos ocuparemos de estudiar las construcciones con origami siguiendo los axiomas Huzita-Justin, esto es, permitiendo un único pliegue a la vez; en el [capítulo 5](#) analizaremos las consecuencias de permitirnos construir cualquier polígono regular; y, por último, en el [capítulo 6](#) estudiaremos el origami autorizándonos a realizar múltiples pliegues simultáneamente en el papel.

ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN AL ORIGAMI	1
1.1	Historia del origami	1
1.2	Origami y matemáticas	2
2	PRELIMINARES ALGEBRAICOS	5
2.1	Rudimentos sobre extensiones de cuerpos	5
2.2	Teoría de Galois	9
2.3	Extensiones ciclotómicas	11
2.4	Resolubilidad por radicales	13
2.5	Composición de extensiones	14
3	CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS	17
3.1	Sobre constructibilidad plana general	17
3.2	Axiomas y herramientas	18
3.3	Construcciones y mapas	20
3.4	Equivalencias entre herramientas	23
4	ORIGAMI: CONCEPCIÓN CLÁSICA	25
4.1	Axiomas Huzita-Justin	25
4.1.1	Observaciones relativas a los axiomas Huzita-Justin	26
4.2	Origami-constructibilidad	30
4.3	El cuerpo \mathcal{C}_P	32
4.3.1	Construcciones auxiliares	32
4.3.2	Construcciones de cuerpo	33
4.3.3	Otras construcciones algebraicas	37
4.4	Caracterización del conjunto \mathcal{C}_P	43
4.4.1	Caracterización mediante torres de cuerpos	43
4.4.2	Otras caracterizaciones	48
4.4.3	Algunas consecuencias inmediatas	53
4.5	Caracterización del conjunto \mathcal{C}_C	54
4.6	Polígonos regulares \mathcal{C} -construibles	55
4.7	Resolubilidad de ecuaciones mediante origami	57
4.8	Escapando a los axiomas clásicos	59
5	GON-ORIGAMI	61
5.1	Axioma regularGon	61
5.1.1	El método de doblado	61
5.2	RegularGon-constructibilidad	65
5.2.1	Caracterización de \mathcal{C}_{RG} mediante torres de cuerpos	66
5.2.2	Consecuencias	68
5.3	Una visión alternativa: origami anudado	71
5.3.1	Axiomas nudoGon	71

5.3.2	NudoGon-Constructibilidad	75
5.4	Generalizaciones: axiomas ciclicGon y origami poliédrico	77
5.4.1	Origami ciclicGon	77
5.4.2	Origami poliédrico	78
6	MP-ORIGAMI	79
6.1	1P-Origami	79
6.1.1	Preparación a la teoría de superposición	79
6.1.2	Condiciones de superposición por un dobléz	80
6.1.3	Axiomas 1P	86
6.1.4	Revisión de los axiomas Huzita-Justin	89
6.2	2P-Origami y <i>mP</i> -Origami	96
6.2.1	Multiplegado y teoría de superposición	96
6.2.2	2P-origami	99
6.2.3	Resolución de polinomios de grado n mediante origami multipliegue	106
6.2.4	Observaciones finales	110
	BIBLIOGRAFÍA	113
	ÍNDICE DE TÉRMINOS	125

INTRODUCCIÓN AL ORIGAMI

La papiroflexia (del latín *papiro*, papel, y *flexux*, doblado), o cocotología¹, es el arte y la habilidad de realizar figuras reconocibles mediante el doblado de papel. Daremos preferencia a la voz japonesa *origami*, pues es la denominación más universal y extendida².

Habitualmente³ el origami busca “esculpir” el papel para conseguir una determinada figura a partir de una hoja de papel únicamente mediante dobleces, sin estar permitido cortar ni pegar el papel.

Las referencias principales para este capítulo son: [Hat; Hat11; Smi05; Eng94; Pri02] (historia) y [DO07; NY15; Hul11] (matemáticas).

1.1 HISTORIA DEL ORIGAMI

La historia del origami va ligada al nacimiento del papel (China, siglo II) y a su difusión por el mundo. El papel viajaría desde Corea a Japón en el siglo VII con los monjes budistas. Durante la ocupación árabe de Samarcanda (s. VIII) el papel comenzó a transmitirse por los territorios musulmanes, llegando hasta Egipto (siglo X), y recalando finalmente (junto con las matemáticas) en la península ibérica. En el siglo XIV su uso se habría extendido ya prácticamente por toda Europa.

Posiblemente ciertos modelos de origami se transmitiesen junto con la difusión del papel (de aquí considerar el origami originario de China, Corea o Japón); otros surgirían independientemente en diferentes territorios (conociendo así el origami como una actividad natural sin origen concreto). La historia del origami no examina quién dobló primero⁴, sino de rastrear las influencias y precedentes del origami que conocemos. Y aparentemente lo más razonable es pensar que el origami surgió y evolucionó de manera independiente en Europa y Japón, desembocando en la distinción de dos corrientes en la papiroflexia moderna (anterior a 1980)⁵.

- 1 Cocotología (del francés *cocotte*; gallina, ave, pajarita; y el griego *logía*; tratado, estudio de), término introducido por Unamuno; en palabras suyas «es la ciencia que trata de las pajaritas de papel» [Una02].
- 2 Los trabajos de Akira Yoshizawa (1911-2005) popularizaron el término japonés por el mundo, en detrimento de los términos nativos de las lenguas locales, o de la voz *zhezhi* china.
- 3 Existen otras variantes del origami, como el modular o las teselaciones. En la rama más purista del origami no se permite más de un pliegue a la vez, ni pliegues ubicados intuitivamente. Otras ramas más artísticas conceden “licencia poética” al autor para moldear a conveniencia la hoja, creando pliegues y superficies curvas.
- 4 Ya habría existido papel “antes del papel” en Mesoamérica, Hawái y Asia del sur hace 7000 años, y probablemente tuviesen su propio “origami”; pero ese origami no tendría relación alguna con el nuestro (cfr. [Hat11]).
- 5 En [Hat] se citan numerosas referencias sobre origami europeo simultáneamente desconocido en japon; junto con las características distintivas entre ambas corrientes japonesa y europea discutidas en [Hat11], llevan al autor a sostener que «el origami no es un arte “japonés”».



Figura 1.1: Origami. Graffía japonesa: el radical superior deriva de mano, el inferior de seda; se leen *ori*, doblar, y *kami*, papel. Imagen extraída de [Eng94]

El origami modular confecciona los modelos a partir de numerosas piezas de papel (módulos) ensamblados (sin pegarlos). Las teselaciones buscan crear un patrón en el plano de papel, apareciendo las figuras como textura. Para crear dobleces curvos suele recurrirse a la técnica de plegado en húmedo

Son muestras del origami ceremonial los *noshi* y las envolturas de copas en bodas en Japón, y los certificados bautismales en Europa (cfr. [Hat11])

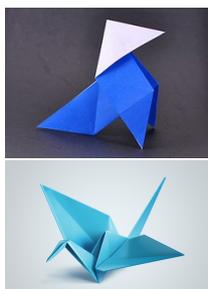


Figura 1.2: Pajarita y grulla de papel

Sabemos poco de este autor, presumiblemente llamado Tandalam Sundara Rao y de origen indio. Es una incógnita como su tratamiento (publicado en lengua inglesa) llegó a manos del afamado geómetra alemán Felix Klein (1849-1925).

En Japón el origami estuvo reservado a las clases altas y el ámbito ceremonial hasta el fin de la era Muromachi (1573); siendo durante la era Edo (1603-1867) donde se popularizó y comenzó su desarrollo en el sentido actual de origami⁶. La escuela japonesa dota al origami de un sentido espiritual, buscando captar la esencia de lo representado, a menudo buscando la economía en los pliegues. En Europa, igualmente encontramos precedentes de uso ceremonial, desarrollándose posteriormente como una actividad recreativa y artística; a menudo como entretenimiento para niños. La escuela europea persigue una mayor exactitud anatómica.

Con la restauración Meiji (1867-1912) comenzó el contacto entre ambas corrientes⁷. La influencia del trabajo del japonés Akira Yoshizawa, quien introdujo ([Yos54]) un sistema de notación universal para las creaciones en origami, desembocó en un resurgir del interés del origami durante el siglo XX, popularizándolo como arte.

A día de hoy ya no tiene sentido distinguir entre estas dos escuelas, puesto que ya la influencia mutua es total; de hecho, estamos viviendo la época más prolífica del origami, como consecuencia de cientifización y el desarrollo del origami computacional.

1.2 ORIGAMI Y MATEMÁTICAS

En los *sangakus*⁸ (s. XVII-XIX) encontramos las primeras referencias al origami desde un punto de vista matemático. Por otra parte, en Europa, el alemán Friedrich Fröbel propondría utilizar a nivel escolar⁹ el origami como instrumento con el que ilustrar conceptos y problemas geométricos¹⁰.

En 1893, T. Sundara Row, [Rao93], fue el primero en considerar el origami como una herramienta geométrica, ilustrando múltiples construcciones geométricas (tradicionalmente ejecutadas con regla y compás) mediante plegado. Ese mismo año, en Alemania, Hermann Wiener publicaría independientemente sus propios trabajos sobre origami; estos constituirán propiamente el primer análisis matemático realizado sobre origami¹¹.

- 6 Hasta la era Showa (1926-1989) no se usó en Japón la palabra *origami* con el significado actual de papiroflexia (Cfr. [Hat]).
- 7 Incluso en nuestros días la *pajarita* es, simultáneamente, apenas conocida en Japón y la figura más popular en España; y la *orizuru* (grulla de papel) es la figura más típica en Japón y muy poco conocida en Europa (ver figura 1.2).
- 8 Los *sangakus* son problemas geométricos escritos en tablillas de madera y colgados en los templos sintoístas japoneses durante la era Edo (1603-1867). Véase [Hul13, activs. 10 y 11].
- 9 Estos planteamientos resultaron muy influyentes en Japón, donde se acabó incluyendo el origami como parte del currículo educativo a partir del periodo Meiji (Cfr. [Hat]).
- 10 De acuerdo con [DO07], el primer documento occidental donde aparece al origami en un contexto científico es un libro de 1840 de Dionysius Lardner, [Lar40], haciendo uso del origami como recurso explicativo de este modo.
- 11 Wiener trata el origami mediante teoría de grupos y una concepción axiomática de la geometría, analizando las relaciones entre objetos mediante un doblez (Cfr. [Fri15]). Este tratamiento resulta cercano al actual; de hecho, describe dobleces mediante reflexiones e implícitamente quedan descritos algunos de los axiomas con los que se modela en el presente la concepción clásica del origami (axiomas Huzita-Justin, ver sección 4.1). A pesar de esto, su trabajo es desconocido u obviado en el mundo del origami (podemos sospechar que a causa de haber centrado parte de su trabajo en origami anudado).

Felix Klein referenciaría los trabajos de Wiener y Row en uno de sus libros ([Kle97, pág. 42], 1897), popularizando el interés en la geometría del origami. A raíz de la citación de Klein aparecieron en esta época numerosos artículos, sobre todo centrados en la resolución de ecuaciones cuadráticas a través del origami. Sirvan de ejemplo los trabajos de Lotka, [Lot07], o Rupp, [Rup24]. En 1930 Giovanni Vacca realizaría una revisión del global conocido por la comunidad matemática sobre origami¹² hasta la fecha en [Vac30].

En este contexto aparece la figura de Margherita Beloch Piazzolla (1879-1976). La italiana sería la primera en apreciar que el origami es capaz de construir las rectas tangentes comunes a dos parábolas (doblando de forma que simultáneamente llevemos dos puntos sobre dos rectas). En 1936 Beloch publica “*Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici*”, [Pia36], donde mediante este método de plegado se resuelve la ecuación cúbica general¹³.

Aunque brillante, el trabajo de Beloch pasó desapercibido hasta nuestros días. Así, entre los 40s y 80s, se pensó que el origami tenía las mismas capacidades de construcción que la regla y el compás (véase. [Coo40, págs. 57-58], [Yat41, sec. IV]).

A finales de los 80 volvería a redescubrirse el mayor potencial del origami, teniendo lugar en 1989 el *First Internation Meeting of Origami Science and Technology* (precursor de los encuentros OSME actuales¹⁴), donde Justin y Huzita introdujeron ([Jus89; Huz89a]) los axiomas básicos que modelan el origami¹⁵.

Desde entonces el mundo del origami ha crecido exponencialmente, fuertemente vinculado al ámbito científico: encontramos modelos matemáticos¹⁶ ligados a la creación artística, también numerosas aplicaciones prácticas del origami¹⁷; convirtiéndose en un campo de investigación activa, creando nue-

En este punto el trabajo de Row se había convertido en la referencia principal en el tema, mientras que el de Wiener se había perdido.

En este tiempo surge también literatura sobre nudos de papel: [Mor24; Yat41; Bru61]

El primer encuentro internacional de origami ciencia y tecnología (1OST), organizado por Humiaki Huzita, se realizó en Ferrara (Italia) como honra al trabajo de Beloch

-
- 12 Se resume como el origami es capaz de resolver ecuaciones cuadráticas; sin ninguna mención sobre resolución de cúbicas (la principal referencia en esta época era el trabajo de Row, donde erróneamente se había afirmado que no podía construirse $\sqrt[3]{2}$ mediante origami).
- 13 De acuerdo con [Hul11], el trabajo de Beloch se centra en describir una solución a la duplicación del cubo mediante pliegues sobre una hoja cuadrada de papel. Repara además en que su construcción es equivalente al caso cúbico del método de Lill (véase sección 6.2.3.1), y que por tanto puede usarse para resolver ecuaciones polinomiales de tercer grado. De hecho, también nota que, dado que la resolución de cuárticas puede reducirse a ecuaciones cúbicas y cuadráticas (cfr. [Bew06, capítulo 3]), podemos construir las raíces de ecuaciones de hasta cuarto grado mediante origami.
- 14 Los encuentros OSME son conferencias científicas donde se exponen trabajos e investigaciones vinculando origami y ciencia, tecnología, matemáticas o educación (cfr. [Lana]).
- 15 Específicamente: se axiomatiza como herramienta de construcción el origami con pliegues rectos y un sólo pliegue a la vez; lo que nosotros llamaremos concepción clásica del origami (lo estudiaremos en profundidad en el capítulo 4).
- 16 El método de empaquetamiento de círculos de Toshiyuki Meguro y la teoría del árbol de Robert J. Lang (implementado computacionalmente como TreeMaker) han posibilitado el diseño de nuevas y más complejas figuras (cfr. [Lan11; Lanb; DO07]).
- 17 Podemos encontrar aplicaciones del origami en multitud de campos; sirven como ejemplo la industria aeroespacial, automovilística, biología, medicina, biotecnología, arquitectura, robótica o diseño de materiales. Hay multitud de publicaciones donde contrastar estas aplicaciones (e.g., [Miu09], [TGS15]); algunas se recogen en [Lan09; WILY11; MK+15]; una búsqueda en la web también puede resultar esclarecedora.

vos problemas matemáticos y conectando multitud de materias (entre otras: teoría de grafos, teoría de grupos, álgebra abstracta, teoría de la computación y, por supuesto, geometría).

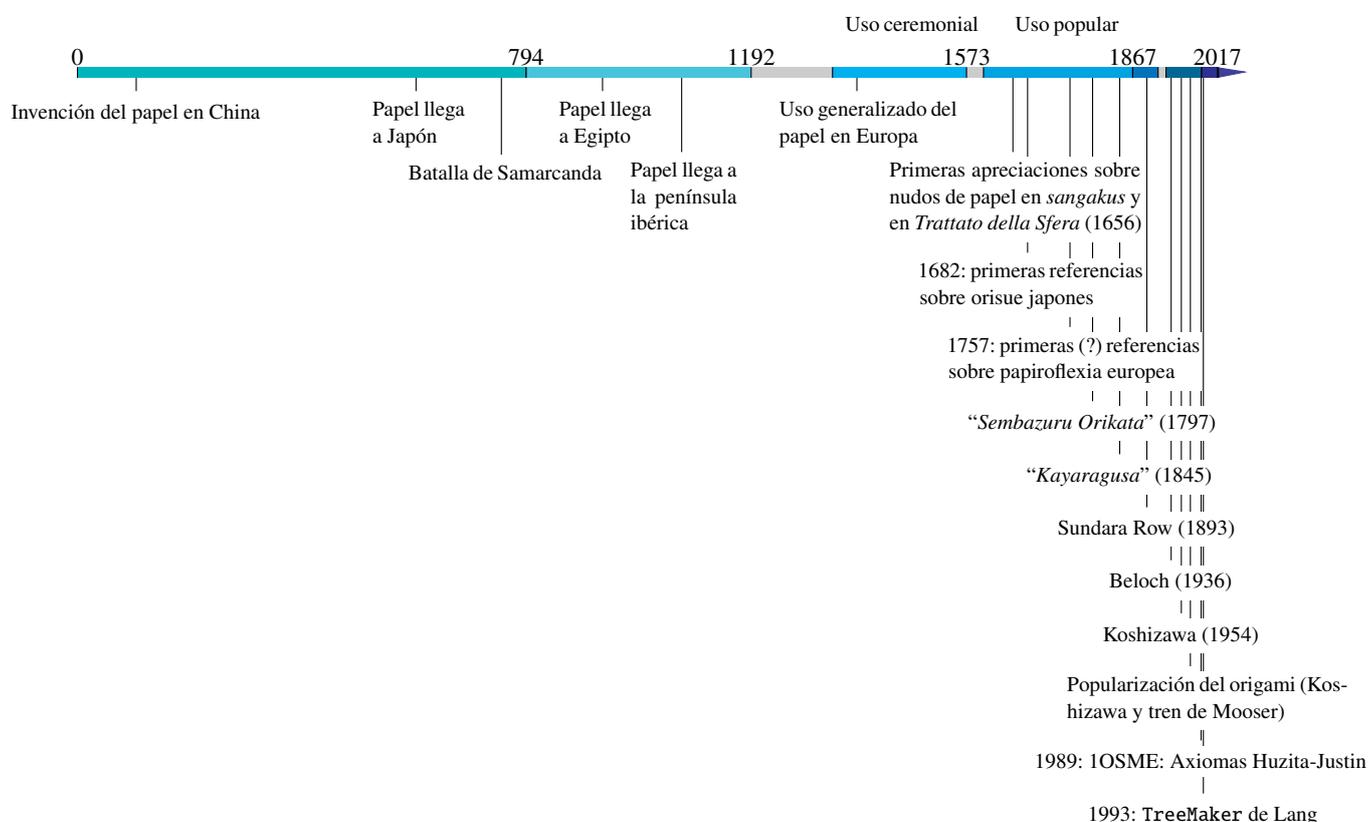


Figura 1.3: Línea temporal de sucesos relevantes en origami

Nosotros durante este trabajo nos dedicaremos al estudio del origami como herramienta de construcción sobre el plano euclideo. Sin embargo, la relación entre origami y matemáticas no acaba aquí; podemos citar como referencias esenciales [DO07] y [Hul02; Lan09; WILY11; MK+15], donde se cubren múltiples marcos de trabajo y planteamientos sobre origami.

Al margen del planteamiento que ocupará nuestro TFG, podemos destacar entre otros subcampos de estudio la doblabilidad plana (véanse [Hul94; BH96]) y la doblabilidad rígida. Desde que Robert Lang desarrollase su algoritmo de diseño TreeMaker ([Lan96]), el estudio en origami computacional ha sido un terreno prolífico; en [DD02] podemos encontrar un buen esbozo sobre el estado del arte en 2001; posteriormente, podemos destacar también el algoritmo Origamizer de "origamización" de superficies de Tomohiro Tachi ([Tac10]).



Figura 1.4: Conejo de Stanford mediante origami

Imagen extraída de [Tac10]

PRELIMINARES ALGEBRAICOS

En este capítulo se presentan, a modo de compendio, el conjunto de resultados teóricos necesarios en nuestro trabajo, con el fin de que la materia en esta memoria sea autocontenida. El lector versado en teoría de Galois no encontrará nada interesante aquí; tampoco será una buena guía para los no instruidos (dado que prescindimos aquí de explicaciones y demostraciones); servirá llanamente como cimentación sobre la que sustentarnos en los capítulos posteriores, permitiéndonos referenciar para su consulta directa cualquier resultado que apliquemos.

Este capítulo está fundamentalmente basado en [Cox12]

2.1 RUDIMENTOS SOBRE EXTENSIONES DE CUERPOS

Daremos por supuesto que el lector está familiarizado con las nociones de *grupo*, *anillo*, *ideal*, *cociente*, *cuerpo* o *morfismo*, entre otros. Asumiremos por tanto como conocidos algunos conceptos y resultados “satélites” que los rodean, como por ejemplo puedan ser el teorema de Lagrange sobre índices de subgrupos¹ o los conceptos de *automorfismo* o *isomorfía*. De igual forma con los convenios comunes de notación; por ejemplo, $A[X]$ denotará el *anillo de polinomios* en la indeterminada X con coeficientes sobre A un anillo conmutativo.

Sobre estos tópicos recomendamos consultar [XDF93] y [DFX99]

2.1.1 Extensiones de cuerpos, elementos algebraicos y polinomio mínimo

Definición 2.2 Dados dos cuerpos K y L , si existe un homomorfismo (inyectivo²) $\psi : K \rightarrow L$ diremos que L es una *extensión* de K (vía ψ). Habitualmente identificaremos K con su imagen, $\psi(K)$, y escribiremos $K \subset L$.

Cfr. [Cox12, def. 3.1.2]

Definición 2.3 Dado un cuerpo K , diremos que un polinomio $h \in K[X]$ *descompone completamente* sobre K si todas sus raíces están en K , es decir, si puede escribirse como producto de factores lineales:

Cfr. [Cox12, pág. 59]

$$h = c(X - x_1) \dots (X - x_n), \quad \text{donde } c, x_1, \dots, x_n \in K.$$

Proposición 2.4 Sea $h \in K[X]$ un polinomio en K no constante. Entonces existe una extensión $K \subset L$ tal que h descompone completamente sobre L .

Cfr. [Cox12, teo. 3.1.4]

Definición 2.5 Diremos que un cuerpo K es *algebraicamente cerrado* si todo polinomio no constante en $K[X]$ descompone completamente sobre K .

Cfr. [Cox12, def. 3.2.5]

¹ Teorema 2.1 Si G es un grupo de orden finito y $S \subset G$ es un subgrupo suyo, entonces $|S|$ divide a $|G|$ y $[G : S] = |G|/|S|$.

Como es habitual, estamos denotando mediante $|G|$ el *orden* de un grupo G , y mediante $[G : S]$ al *índice* de un subgrupo S de G . (Cfr. [Rot95, págs. 25-26]).

² Si $\psi : K \rightarrow L$ es un morfismo de cuerpos no nulo, necesariamente es inyectivo. Consecuentemente, induce un isomorfismo entre K y $\psi(K)$.

Cfr. [Cox12, def. 4.1.1] **Definición 2.6** Sea L una extensión de K , y $\alpha \in L$ un elemento suyo. Diremos que α es *algebraico* sobre K si existe algún polinomio no constante $h \in K[X]$ tal que $h(\alpha) = 0$. En caso contrario, diremos que α es *trascendente* sobre K .

Cfr. [Cox12, lema 4.1.3] **Lema 2.7** Sea $K \subset L$, y $\alpha \in L$. Si α es algebraico sobre K , entonces existe un único polinomio $h \in K[X]$ mónico y tal que:
 i) α es una raíz de h ; y
 ii) si $g \in K[X]$ es otro polinomio tal que $g(\alpha) = 0$, entonces g es múltiplo de h .

Cfr. [Cox12, def. 4.1.4] **Definición 2.8** En las condiciones del lema anterior, diremos que h es el *polinomio mínimo* de α sobre K . Habitualmente simbolizaremos tal polinomio como $m_{\alpha,K}$ (o simplemente m_α , si no hay lugar a confusión).

Cfr. [Cox12, prop. 4.1.5] **Observación:** Es usual definir $m_{\alpha,K}$ el polinomio mínimo de un elemento α sobre un cuerpo K mediante alguna de las siguientes caracterizaciones equivalentes:
 a) $m_{\alpha,K}$ es el polinomio mónico en $K[X]$ de menor grado satisfaciendo $m_{\alpha,K}(\alpha) = 0$.
 b) $m_{\alpha,K}$ es un polinomio mónico en $K[X]$, irreducible sobre K y tal que $m_{\alpha,K}(\alpha) = 0$.

2.1.ii Grado de una extensión. Extensiones finitas y finitamente generadas. Extensiones algebraicas

Cfr. [Cox12, def. 4.3.1] **Definición 2.9** Sea $K \subset L$ una extensión de cuerpos. Diremos que L es una extensión *finita* de K si L puede verse como un espacio vectorial sobre K de dimensión finita; en tal caso, llamaremos *grado* de la extensión a dicha dimensión $\dim_K L$, y lo denotaremos como $[L : K]$. En caso contrario conveniremos definir su grado como $[L : K] = \infty$ y diremos que es una extensión *infinita*.

Cfr. [Cox12, lema 4.1.9] **Definición 2.10** Sea $K \subset L$ una extensión de cuerpos, y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$. Simbolizaremos como $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ al menor subcuerpo de L conteniendo tanto a K como a los elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Diremos que $K \subset K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es una extensión *finitamente generada* y que se ha generado añadiendo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Cfr. [Cox12, lema 4.3.3] **Lema 2.11** Una extensión $K \subset L$ es de grado $[L : K] = 1$ si, y sólo si, $K = L$.

Cfr. [Cox12, prop. 4.3.4] **Proposición 2.12** Sea $K \subset L$ una extensión y $\alpha \in L$. Se verifica:
 a) El elemento α es algebraico sobre K si, y sólo si, $[K(\alpha) : K] < \infty$.
 b) Si α es algebraico sobre K , entonces³ $[K(\alpha) : K] = \deg(m_{\alpha,K})$.

Cfr. [Cox12, prop. 4.3.8] **Teorema 2.13** Sean $K \subset F \subset L$ dos extensiones sucesivas. Si $[F : K] < \infty$ y $[L : F] < \infty$, entonces $[L : K] = [L : F][F : K]$. En otro caso, $[L : K] = \infty$.

Lema 2.14 Si $K \subset L$ es una extensión finita, entonces todo elemento $\alpha \in L$ es algebraico sobre K , y $\deg(m_{\alpha,K})$ divide a $[L : K]$.

Cfr. [Cox12, lema. 4.4.2]

Observación: Se denomina extensión *algebraica* a cualquier extensión $K \subset L$ tal que todo elemento de L sea algebraico sobre K . Así, en estos términos, el lema afirma que toda extensión finita es algebraica⁴.

Cfr. [Cox12, def. 4.4.1]

Proposición 2.15 Sea $K \subset L$ una extensión de cuerpos. $K \subset L$ es finita si, y sólo si, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ algebraicos sobre K y tales que $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Cfr. [Cox12, prop. 4.4.3]

Observación: La proposición anterior establece la equivalencia entre extensiones finitas y extensiones generadas añadiendo elementos algebraicos. Para hacer énfasis sobre esta segunda visión las denominaremos como *algebraicamente (finitamente) generadas*.

Cfr. [Pos62, pág. 3]. Es una especialización de la def. 2.10

2.1.iii Cuerpos de descomposición. Extensiones normales y extensiones separables

Definición 2.16 Sea $h \in K[X]$ un polinomio no constante. Llamaremos *cuerpo de descomposición* de h sobre K a una extensión $K \subset L$ tal que:

Cfr. [Cox12, def. 5.1.1]

- i) el polinomio h descompone completamente en L , es decir, $h = \kappa(X - x_1) \dots (X - x_n)$ para ciertos $x_1, \dots, x_n \in L$ y $\kappa \in K$; y
- ii) $L = K(x_1, \dots, x_n)$.

Observación: La existencia de un cuerpo de descomposición de $h \in K[X]$ queda garantizada en virtud de la [proposición 2.4](#). Además, tal extensión será única⁵ salvo isomorfismos que dejan fijo a K .

Proposición 2.17 Sea L el cuerpo de descomposición de un polinomio en $K[X]$. Sean $h \in K[X]$ un polinomio irreducible sobre K , y $x_s, x_r \in L$ dos raíces de h . Entonces existe un automorfismo $\sigma : L \rightarrow L$ verificando:

Cfr. [Cox12, prop. 5.1.8]

- i) es la identidad sobre K , i.e., $\sigma(\kappa) = \kappa$ para todo elemento $\kappa \in K$; y
- ii) lleva x_s en x_r : $\sigma(x_s) = x_r$.

Proposición 2.18 Sea L el cuerpo de descomposición de un polinomio $h \in K[X]$, y sea $g \in F[X]$ un polinomio irreducible sobre F . Entonces, si g tiene alguna raíz en L , las tendrá todas (i.e., descompondrá completamente sobre L).

Cfr. [Cox12, prop. 5.2.1]

Definición 2.19 Diremos que una extensión algebraica $K \subset L$ es *normal* si todo polinomio irreducible en $K[X]$ con alguna raíz en L descompone completamente sobre L .

Cfr. [Cox12, def. 5.2.3]

Proposición 2.20 Una extensión algebraica $K \subset L$ será normal si, y sólo si,

Cfr. [Cox12, sec. 5.2, ejer. 2]

- 3 De hecho, $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ es una base de $K(\alpha)$ como espacio vectorial sobre K .
- 4 No toda extensión algebraica será finita; e.g., $\overline{\mathbb{Q}}$ el conjunto de los números algebraicos sobre \mathbb{Q} es una extensión algebraica no finita de \mathbb{Q} (Cfr. [Cox12, ejem. 4.4.6 y ejer. 1 (sec. 4.4)])
- 5 Si L_1 y L_2 son dos cuerpos de descomposición de $h \in K[X]$, existe un isomorfismo $L_1 \cong L_2$ que es la identidad sobre K (Cfr. [Cox12, coro. 5.1.7]). En tal caso diremos que el morfismo *deja fijo* a K .

para todo $\alpha \in L$, $m_{\alpha,K}$ el polinomio mínimo de α sobre K descomponga completamente sobre L .

Cfr. [Cox12, teo. 5.2.4]

Teorema 2.21 Una extensión $K \subset L$ es el cuerpo de descomposición de cierto $h \in K[X]$ si, y sólo si, es una extensión normal y finita.

Cfr. [Cox12, defs. 5.3.1 y 5.3.3]

Definición 2.22 Sea $K \subset L$ una extensión algebraica.

Sea $h \in K[X]$ un polinomio no constante, y supongamos que descomponga completamente sobre L . Diremos que h es *separable* si todas sus raíces son simples (i.e., distintas entre sí).

Diremos que un elemento $\alpha \in L$ es *separable* sobre F si su polinomio mínimo sobre F es separable.

Diremos que la extensión $K \subset L$ es *separable* si todo elemento $\alpha \in L$ es separable sobre K .

Cfr. [Cox12, lema 5.3.4]

Lema 2.23 Un polinomio no constante $h \in K[X]$ es separable si, y sólo si, es producto de polinomios irreducibles y tales polinomios son todos separables y ninguno de ellos es múltiplo de otro.

Cfr. [Cox12, prop. 5.3.7]

Proposición 2.24 Si K es un cuerpo de característica 0, se verifica⁶:

- a) Todo polinomio irreducible en $K[X]$ es separable.
- b) Toda extensión algebraica de K es separable.

Cfr. [Cox12, prop. 7.1.6]

Proposición 2.26 Sea $K \subset L$ una extensión finita. Entonces, L es separable sobre K si, y sólo si, $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donde cada uno de los elementos α_j es separable sobre K .

Cfr. [Cox12, teo. 5.4.1]

Teorema 2.27 (del elemento primitivo) Sea $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ una extensión finita de K , y donde los elementos α_j son separables sobre K . Entonces existe un elemento $\alpha \in L$ separable sobre K y tal que $L = K(\alpha)$. Es más, si K es de cardinal infinito, α puede tomarse de la forma $\alpha = t_1\alpha_1 + \dots + t_n\alpha_n$ para ciertos $t_1, \dots, t_n \in K$.

En general, podemos caracterizar las extensiones simples finitas como aquellas con un número finito de cuerpos intermedios (de acuerdo con el teorema de Steinitz. Cfr. [Jac85, teo. 4.28])

Observación: De una extensión generada por un único elemento se dirá que es una extensión *simple*; y de tal elemento generador, que es un elemento *primitivo*. Así, el teorema anterior establece (en virtud de la [proposición 2.15](#)) que toda extensión finita y separable es simple. Como consecuencia, (de acuerdo con la [proposición 2.24](#)) en particular toda extensión finita de un cuerpo de característica 0 es simple.

⁶ Recordemos que se dice que un cuerpo tiene *característica* p si p es el menor natural tal que para todo elemento no nulo $\alpha \in K$ se tiene $p\alpha = 0$. Si no existe ningún número natural tal, se dice que el cuerpo es de característica 0.

Puede resultar sorprendente que la separabilidad esté relacionada con la característica. Veamos con un ejemplo como este resultado puede fallar en característica p .

Ejemplo 2.25 Sea $h = X^p - a \in K[X]$ donde K es un cuerpo de característica p con $p \in \mathbb{N}$ primo. Si x es una raíz de h (en alguna extensión de K), tenemos $x^p - a = 0$, i.e., $x^p = a$. Puesto que en característica p la fórmula del binomio de Newton se convierte en $(a \pm b)^p = a^p \pm b^p$, tenemos

$$(X - x)^p = X^p - x^p = X^p - a.$$

Puesto que la factorización es única, x es la única raíz de h y es múltiple. Respecto a la irreducibilidad de h , basta garantizar que x no esté en K (cfr. [Cox12, prop. 4.2.6]). §

2.2 TEORÍA DE GALOIS

2.2.1 Grupo de Galois

Definición 2.28 Sea $K \subset L$ una extensión finita. El *grupo de Galois* de $K \subset L$ se define como $\text{Gal}(L/K)$ el conjunto de automorfismos de L que son la identidad en K .

Cfr. [Cox12, def. 6.1.1]

$$\text{Gal}(L/K) = \{\sigma : L \rightarrow L \mid \sigma \text{ es un automorfismo, y } \sigma(\kappa) = \kappa \quad \forall \kappa \in K\}$$

Proposición 2.29 $\text{Gal}(L/K)$ es un grupo con la operación de composición de funciones usual⁷. De hecho, es un grupo finito.

Cfr. [Cox12, prop. 6.1.2 y coro. 6.1.5]

Proposición 2.30 Sea $K \subset L$ una extensión finita, y sea $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$. Entonces:

Cfr. [Cox12, prop. 6.1.4]

- Dado un polinomio no constante $h \in K[X]$, si $x \in L$ es una raíz de h , entonces también $\sigma(x) \in L$ es raíz de h .
- Si $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, entonces σ queda completamente determinado por sus valores sobre $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Proposición 2.31 Supongamos que $K \subset L_1$ y $K \subset L_2$ son dos extensiones finitas de K , y sea $\psi : L_1 \rightarrow L_2$ un isomorfismo que es la identidad sobre K . Entonces podemos definir un isomorfismo de grupos $\dot{\psi}$ entre $\text{Gal}(L_1/K)$ y $\text{Gal}(L_2/K)$ mediante $\sigma \mapsto \dot{\psi}(\sigma) = \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}$.

Cfr. [Cox12, prop. 6.1.11]

Observación: De acuerdo con la [observación](#) hecha tras la definición de cuerpo de descomposición, la proposición anterior legitima que podamos hablar de grupo de Galois en los siguientes sentidos:

Cfr. [Cox12, def. 6.1.12]

Dado un polinomio (no constante) $h \in K[X]$, llamaremos *grupo de Galois de h sobre K* al grupo $\text{Gal}(L_{h,K}/K)$, donde $L_{h,K}$ es un cuerpo de descomposición de h sobre K .

Dado un elemento $\alpha \in K$, llamaremos *grupo de Galois de α sobre K* al grupo $\text{Gal}(L_{m_{\alpha,K}}/K)$, donde $L_{m_{\alpha,K}}$ es un cuerpo de descomposición de $m_{\alpha,K}$ el polinomio mínimo de α sobre K .

Teorema 2.32 Si L es el cuerpo de descomposición de un polinomio separable en $K[X]$, entonces el grupo de Galois de $K \subset L$ es un grupo de orden $|\text{Gal}(L/K)| = [L : K]$.

Cfr. [Cox12, teo. 6.2.1]

Proposición 2.33 Sea L es el cuerpo de descomposición de un polinomio separable en $K[X]$ y nombremos como $x_1, \dots, x_n \in L$ a las raíces de tal polinomio. En esta situación podemos asociar a cada automorfismo $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ una permutación $\hat{\sigma} \in S_n$ mediante:

Cfr. [Cox12, prop. 6.3.1]

$$\hat{\sigma}(j) = k \in \{1, \dots, n\} \iff \sigma(x_j) = x_k.$$

⁷ La composición de f y g se define, siempre que tenga sentido (i.e., que la imagen de g esté contenida en el dominio de f), como la función $f \circ g = fg$ tal que $fg(a) = f(g(a))$ para cualquier elemento a en el espacio de salida. En particular, la composición de automorfismos siempre tiene sentido.

Y, la aplicación $\text{Gal}(L/K) \rightarrow S_n$ así definida es un morfismo de grupos inyectivo.

Observación: De la proposición anterior se extrae que podemos pensar en el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de un polinomio separable de grado n como un subgrupo del grupo simétrico de n elementos S_n .

2.2.II Extensiones de Galois

Cfr. [Cox12, def. 7.1.2]

Definición 2.34 Diremos que una extensión $K \subset L$ es *de Galois*, o que L es *(de) Galois* sobre K , si L es el cuerpo de descomposición de un polinomio separable de $K[X]$.

Cfr. prop. 2.17

Proposición 2.35 Sea $K \subset L$ es una extensión de Galois. Dado un polinomio irreducible $h \in K[X]$ con alguna raíz $x \in L$, si x' es otra raíz de h , existe un automorfismo $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ de forma que $\sigma(x) = x'$ y que deja fijo a K .

Cfr. [Cox12, teo. 7.1.1 y teo. 7.1.5]

Teorema 2.36 Sea $K \subset L$ una extensión finita. Son equivalentes:

- (a) L es de Galois sobre K .
- (b) El cuerpo K queda fijo bajo la acción del grupo $\text{Gal}(L/K)$ actuando sobre L , i.e., $\{\alpha \in L / \sigma(\alpha) = \alpha \ \forall \sigma \in \text{Gal}(L/K)\} = K$.
- (c) La extensión $K \subset L$ es normal y separable.
- (d) $|\text{Gal}(L/K)| = [L : K]$.

Cfr. [Cox12, prop. 7.1.7]

Proposición 2.37 Sea $K \subset L$ una extensión finita y separable. Entonces existe una extensión $L \subset M$ tal que M es de Galois sobre K . Además, dada cualquier otra extensión $L \subset M'$ tal que M' sea Galois sobre K , existe un homomorfismo (inyectivo) $\psi : M \rightarrow M'$ que es la identidad sobre L .

Cfr. [Cox12, sec. 7.1, ejer. 5]

Definición 2.38 En las condiciones de la proposición anterior, diremos que M es un *cierre de Galois* de L sobre K . Además, tal cierre es único⁸ salvo isomorfismos que dejan fijo a L .

2.2.III Correspondencia de Galois

Cfr. [Cox12, sec. 7.1, ejer. 1]

Lema 2.39 Sea $K \subset L$ una extensión finita, y $\text{Gal}(L/K)$ su grupo de Galois. Dado cualquier subgrupo $H \subset \text{Gal}(L/K)$, se tiene que el conjunto de puntos fijos de L bajo la acción de H , $L_H = \{\alpha \in L / \sigma(\alpha) = \alpha, \ \forall \sigma \in H\}$, es un subcuerpo de L conteniendo a K .

Definición 2.40 En las condiciones del lema anterior, diremos que L_H es el *cuerpo fijo* asociado a H .

⁸ De acuerdo con la [proposición 2.37](#), existe un homomorfismo inyectivo entre M y cualquier otra extensión de L que sea Galois sobre K ; consecuentemente M será isomorfa a su imagen por dicho homomorfismo, y tal imagen es otro cierre de Galois de L sobre K . En este sentido, podemos pensar en el cierre de Galois como la menor extensión de L que es Galois sobre K .

Definición 2.41 Sea L una extensión de K . Llamaremos *cuerpo intermedio* a cualquier subcuerpo F de L que constituya una extensión de K , y lo denotaremos como $K \subset F \subset L$.

Proposición 2.42 Sea $K \subset L$ una extensión de Galois, y supongamos que existe un cuerpo intermedio $K \subset F \subset L$. Entonces $F \subset L$ es de Galois.

Cfr. [Cox12, prop. 7.1.3]

Lema 2.43 Sean $K \subset F \subset L$ extensiones finitas, y $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$. Entonces $\sigma(F) = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in F\}$ también es un subcuerpo de L de forma que $K \subset \sigma(F) \subset L$, y además $[F : K] = [\sigma(F) : K]$.

Cfr. [Cox12, lema 7.2.2]

Observación: En las condiciones del lema anterior, se dice que $\sigma(F)$ es el *cuerpo conjugado*⁹ de F por σ .

Teorema 2.44 (fundamental de la teoría de Galois) Sea $K \subset L$ una extensión de Galois. Entonces se verifica:

Cfr. [Cox12, teos. 7.3.1 y 7.3.2]

- a] Para cada cuerpo intermedio $K \subset F \subset L$, el grupo de Galois $\text{Gal}(L/F)$ es un subgrupo de $\text{Gal}(L/K)$ y su cuerpo fijo asociado es $L_{\text{Gal}(L/F)} = F$. Es más, $|\text{Gal}(L/F)| = [L : F]$ y por tanto el índice de $\text{Gal}(L/F)$ en $\text{Gal}(L/K)$ es $[\text{Gal}(L/K) : \text{Gal}(L/F)] = [F : K]$.
- b] Para cada subgrupo $H \subset \text{Gal}(L/K)$, su cuerpo fijo asociado $K \subset L_H \subset L$ tiene grupo de Galois $\text{Gal}(L/L_H) = H$. Es más, $[L : L_H] = |H|$ y por tanto el grado de la extensión $L_H \subset L$ es $[L : L_H] = [\text{Gal}(L/K) : H]$.

De esta forma, tenemos una correspondencia biyectiva entre cuerpos intermedios de la extensión $K \subset L$ y subgrupos de $\text{Gal}(L/K)$ su grupo de Galois:

$$\begin{array}{ccc} F & \mapsto & \text{Gal}(L/F) \\ L_H & \longleftarrow & H \end{array} .$$

Además, si F y H son (respectivamente) un cuerpo intermedio y un subgrupo correspondientes entre sí, entonces $K \subset F$ es una extensión de Galois si, y sólo si, H es normal en $\text{Gal}(L/K)$; y en tal caso, $\text{Gal}(L/K)/H \cong \text{Gal}(F/K)$.

2.3 EXTENSIONES CICLOTÓMICAS

Definición 2.45 Dado $n \in \mathbb{N}$, llamaremos *raíz n -ésima primitiva*¹⁰ *principal de la unidad* a $\xi_n = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$.

Proposición 2.46 (de radicales primos) Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Entonces, dado $\alpha \in K$, el polinomio $X^p - \alpha \in K[X]$ es irreducible si, y sólo si, no tiene ninguna raíz en K .

Cfr. [Cox12, prop. 4.2.6]

⁹ Esta terminología se justifica en base a la correspondencia entre cuerpos conjugados y subgrupos conjugados (cfr. [Cox12, lema 7.2.4]).

¹⁰ A cualquier raíz de $X^n - 1$ se le denomina *raíz n -ésima de la unidad*. $X^n - 1$ tiene n raíces distintas en su cuerpo de descomposición, y tales raíces forman un grupo multiplicativo cíclico. Llamaremos *primitiva* a aquellas raíces ξ que sean generadoras del grupo U_n , es decir, tales que las n raíces distintas de $X^n - 1$ puedan describirse como $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$.

Respecto a las raíces n -ésimas de la unidad, es claro que siempre podemos factorizar $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ como $(X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1)$.

Cfr. [Cox12, prop. 4.2.5]

Proposición 2.47 Si $p \in \mathbb{N}$ es primo, $\Phi_p = X^{p-1} + \dots + X + 1$ es irreducible sobre \mathbb{Q} .

De esta forma, para $p \in \mathbb{N}$ primo, $\Phi_p = X^{p-1} + \dots + X + 1$ es el polinomio mínimo de ξ_p sobre \mathbb{Q} . Para $n \in \mathbb{N}$ en general necesitaremos algo más de estudio.

Cfr. [Cox12, pág. 230] y [JJ98, pág. 85]

Definición 2.48 Se conoce como *función ϕ de Euler* a $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función definida de forma que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n)$ es el número de enteros positivos $1 \leq a \leq n$ coprimos con n , i.e., tales que $\text{mcd}(a, n) = 1$.

Cfr. [Cox12, pág. 230] y [JJ98, págs. 84-85]

Observación: Alternativamente, $\phi(n)$ puede interpretarse como el número de elementos primitivos del grupo multiplicativo U_n de raíces n -ésimas de la unidad; o, equivalentemente, como el número de unidades del grupo multiplicativo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de enteros módulo n .

Cfr. [JJ98, págs. 86-88]

Propiedades 2.49 La función ϕ de Euler verifica:

- a) Si $p \in \mathbb{N}$ es primo, entonces $\phi(p) = p - 1$.
- b) $\phi(p^s) = p^{s-1}(p - 1)$ para $p \in \mathbb{N}$ primo y $s \in \mathbb{N}$.
- c) Si $n, m \in \mathbb{N}$ son coprimos entre sí, entonces $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$.

Cfr. [Cox12, pág. 231]

Definición 2.50 Dado $n \in \mathbb{N}$, se denomina *n -ésimo polinomio ciclotómico* a

$$\Phi_n = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \text{mcd}(j, n) = 1}} (X - \xi_n^j).$$

Cfr. [Cox12, págs. 231-233]

Propiedades 2.51 Dado $n \in \mathbb{N}$, el polinomio Φ_n es mónico con coeficientes enteros y de grado $\phi(n)$; sus raíces son las $\phi(n)$ raíces n -ésimas primitivas de la unidad. Además, se verifica:

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d.$$

Cfr. [Cox12, teo. 9.1.9]

Proposición 2.52 El polinomio ciclotómico Φ_n es irreducible sobre \mathbb{Q} para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 2.53 Dado $n \in \mathbb{N}$, Φ_n es el polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} de cualquier raíz n -ésima primitiva de la unidad. En particular, es el polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} de $\xi_n = e^{2\pi i/n}$.

Cfr. [Spr, cyclotomic extension]

Definición 2.54 Llamaremos *extensión ciclotómica* de \mathbb{Q} a cualquier extensión generada añadiendo una raíz primitiva de la unidad.

Corolario 2.55 Dado $n \in \mathbb{N}$, la extensión ciclotómica $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi_n)$ es una extensión de grado $[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$.

2.4 RESOLUBILIDAD POR RADICALES

2.4.I Grupos solubles

Definición 2.56 Se dice que un grupo finito G es *soluble* si existen subgrupos de la forma

$$\{e\} = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_1 \subset G_0 = G$$

tales que, para cada $1 \leq j \leq n$, es:

- i) G_j normal¹¹ en G_{j-1} , y ii) $[G_{j-1} : G_j]$ primo¹².

Cfr. [Cox12, def. 8.1.1]

Teorema 2.57 Sea G un grupo finito.

- a) Si G es soluble, cualquier subgrupo suyo lo es.
 b) Si $H \triangleleft G$ un subgrupo normal, entonces G será soluble si, y sólo si, G/H y H lo son.

Cfr. [Cox12, prop. 8.1.3 y teo. 8.1.4]

Teorema 2.58 Todo grupo abeliano¹³ es soluble.

Cfr. [Cox12, prop. 8.1.5]

Teorema 2.59 (de Burnside) Siendo p y q dos primos distintos, cualquier grupo de orden $p^n q^m$ (con $n, m \geq 0$) es un grupo soluble.

Cfr. [Cox12, teo. 8.1.8]. Véase también [Bur04] y [Bur11, cap. XVI, coro. III]

2.4.II Extensiones resolubles

Definición 2.60 Se dice que una extensión finita $K \subset L$ es *radical* si existen subcuerpos de la forma

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_{n-1} \subset K_n = L$$

tales que, para cada $1 \leq j \leq n$, para algún $\alpha_j \in F_j$ sea $F_j = F_{j-1}(\alpha_j)$ y $\alpha_j^{m_j} \in F_{j-1}$ para cierto $m_j \in \mathbb{N}$.

Se dice que una extensión finita $K \subset L$ es *resoluble por radicales*, o simplemente *resoluble*, si existe una extensión $L \subset M$ tal que $K \subset M$ sea radical.

Cfr. [Cox12, defs. 8.2.1 y 8.2.2]

A partir de aquí todos los cuerpos se considerarán de característica 0¹⁴.

Teorema 2.61 (de Galois) Sea $K \subset L$ una extensión de Galois. Entonces son equivalentes:

Cfr. [Cox12, teo. 8.3.3]

- (a) $K \subset L$ es una extensión resoluble.
 (b) $\text{Gal}(L/K)$ es un grupo soluble.

11 Recordemos que se dice que un subgrupo $N \subset G$ es *normal*, y se denota $N \triangleleft G$, si es invariante por conjugación, i.e., si gHg^{-1} para todo $g \in G$.

12 Puesto que G_j es normal en G_{j-1} , es equivalente decir que es un subgrupo de índice p primo a decir que el grupo cociente G_{j-1}/G_j es cíclico de orden p primo: $G_{j-1}/G_j \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

13 En general, se llama *abeliano* a un grupo o a cualquier objeto algebraico verificando la propiedad de conmutatividad (Cfr. [Wei02]); en honor a Neils Henrik Abel, por su estudio de las ecuaciones con esta propiedad (ver [definición 2.64](#)).

14 La relación entre extensiones resolubles y grupos solubles dada en el [teorema 2.61](#) se estropea en característica p ; véase [Cox12, ej. 8.6.11] como ejemplo. En consecuencia, esta asunción será necesaria durante las secciones [2.4.III](#) y [2.4.IV](#).

2.4.III Resolubilidad de polinomios

Cfr. [Cox12, def. 8.5.1] Definición 2.62 Sea $h \in K[X]$ un polinomio no constante, y sea L_h su cuerpo de descomposición sobre K . Diremos que h es *resoluble por radicales sobre K* , o simplemente *resoluble*, si $K \subset L_h$ es una extensión resoluble. De cualquier raíz x de h , diremos que es *expresable por radicales sobre K* .

Cfr. [Cox12, teo. 8.5.3] Observación: Con esta terminología, el teorema 2.61 nos dice que un polinomio (no constante) $h \in K[X]$ es resoluble si, y sólo si, el grupo de Galois de h sobre K es soluble.

Cfr. [Cox12, prop. 8.5.4] Corolario 2.63 Todo polinomio no constante $h \in K[X]$ de grado $n \leq 4$ es resoluble por radicales sobre K .

Para $n \geq 5$ no será cierto que todos los polinomios de grado n sean resolubles por radicales. Seamos conscientes, sin embargo, de que siempre habrá ciertos polinomios que sí lo sean.

2.4.IV Ecuaciones abelianas

Cfr. [Cox12, págs. 143-145, 217-218].
También [Pra04, pág. 204], con una exposición más cercana a la original de Abel ([Abe29])

Definición 2.64 Sea $h \in K[X]$ un polinomio no constante, y sea L_h su cuerpo de descomposición sobre K . Si hay $x \in L_h$ una raíz de h satisfaciendo:

i) el conjunto de raíces de h , $x_1 = x, x_2, \dots, x_n$, se pueden expresar como funciones racionales de x , es decir, $L_h = K(x)$; y

ii) siendo $x_j = \theta_j(x)$ tales funciones, estas conmutan, es decir,
$$\theta_j(\theta_k(x)) = \theta_k(\theta_j(x)), \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Entonces, diremos que $h = 0$ es una ecuación *abeliana*.

Cfr. [Cox12, teo. 6.5.3] Teorema 2.65 El grupo de Galois de una ecuación abeliana es¹⁵ un grupo abeliano.

Cfr. [Cox12, teo. 6.5.2] Corolario 2.66 Sea $h \in K[X]$. Si $h = 0$ es una ecuación abeliana, entonces h es resoluble por radicales (sobre K).

2.5 COMPOSICIÓN DE EXTENSIONES ¹⁶

Cfr. [Cox12, def. 8.2.5] Definición 2.67 Sea L un cuerpo. Dados $K_1, K_2 \subset L$ dos subcuerpos suyos, se define la *composición* de K_1 y K_2 como el menor subcuerpo de L conteniendo a ambos; y lo denotaremos como $K_1 K_2$.

¹⁵ La relación entre grupos abelianos y ecuaciones abelianas es, de hecho, más estrecha que lo aquí enunciado (Cfr. [Cox12, teo. 8.5.8]).

¹⁶ El contenido de esta sección (si bien podría haberse incorporado distribuido en otras secciones) aparece desglosado aquí por no haberlo encontrado apropiadamente redactado en la bibliografía. Por este motivo, su exposición será ligeramente menos breve e incluiremos algunas demostraciones.

Observación: La existencia del cuerpo $K_1 K_2$ está garantizada por ser la intersección de todos los subcuerpos de L conteniendo a ambos. Como vemos, es crucial poder considerar K_1 y K_2 como subcuerpos de un cuerpo común¹⁷.

Proposición 2.68 Sean $K \subset K_1$, $K \subset K_2$ dos extensiones finitas de un cuerpo K , pongamos $K_1 = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $K \subset K_2 = K(\beta_1, \dots, \beta_m)$; y supongamos que están contenidas en un mismo cuerpo mayor, $K_1, K_2 \subset L$. Entonces $K_1 K_2 = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m)$.

Cfr. [Cox12, sec. 8.2, ejer 3.]

Proposición 2.69 Dadas dos torres de cuerpos $K = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{s-1} \subset F_s$, $K = J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J_{t-1} \subset J_t$, extensiones finitas de un cuerpo K ; si están contenidas en un mismo cuerpo mayor, i.e., si $F_s, J_t \subset L$, entonces podemos definir una torre de cuerpos que extienda K hasta $F_s J_t$

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_{n-1} \subset K_n = F_s J_t \subset L$$

de forma que, para cada $1 \leq j \leq n$, se tiene que $K_j = K_{j-1}(\alpha_j)$, donde $\alpha_j \in L \setminus K_{j-1}$ es tal que: o bien $F_{s^*-1} \subset K_{j-1}$ y $F_{s^*} = F_{s^*-1}(\alpha_j)$ para cierto índice $s^* \in \{1, \dots, s\}$ o bien $J_{t^*-1} \subset K_{j-1}$ y $J_{t^*} = J_{t^*-1}(\alpha_j)$ para cierto índice $t^* \in \{1, \dots, t\}$.

Demostración: Dado que se trata de extensiones finitas, de acuerdo con la [proposición 2.15](#) cada extensión es algebraicamente finitamente generada, y en virtud del [teorema 2.27](#) existe un elemento primitivo para cada una de ellas; pongamos

$$\begin{aligned} K = F_0 \subset F_1 = F_0(\alpha_{s_1}) \subset \dots \subset F_s = F_{s-1}(\alpha_{s_s}) = F_0(\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \dots, \alpha_{s_s}) &\subset L, \\ K = J_0 \subset J_1 = J_0(\alpha_{t_1}) \subset \dots \subset J_t = J_{t-1}(\alpha_{t_t}) = J_0(\alpha_{t_1}, \alpha_{t_2}, \dots, \alpha_{t_t}) &\subset L. \end{aligned}$$

Basta ir componiendo “de forma ordenada”¹⁸ las subextensiones de ambas torres para definir una torre como la buscada; estando garantizado que tal proceso de composiciones sucesiva acabará en a lo sumo $s + t$ etapas. \square

Observación: De cualquier torre como en la proposición anterior diremos que es *composición* de las torres dadas. En vista a la demostración dada, podremos trasladar ciertas propiedades de las torres iniciales a la torre compuesta. Por ejemplo, para una subextensión de la torre compuesta $K_{j-1} \subset K_j = K_{j-1}(\alpha_j)$, supongamos que se corresponde con una subextensión $F_{s^*-1} \subset F_{s^*} = F_{s^*}(\alpha_j)$. Si tal subextensión inicial es de grado menor o igual que p , también $K_{j-1} \subset K_j$ será de grado menor o igual que p . O si tal subextensión inicial es una extensión ciclotómica, también lo será $K_{j-1} \subset K_j$.

Lema 2.70

- a) Si $K \subset F \subset L$ es una extensión finita y $K \subset L$ es radical, entonces también $F \subset L$ es radical.

Cfr [Cox12, lema 8.2.7] y [CL05, prop. 5.6.2]

¹⁷ Una definición más general sobre la composición de dos extensiones $K \subset K_1$ y $K \subset K_2$ de un cuerpo común K puede verse en [Che42].

¹⁸ Cualquier ordenación entre ‘ α_s ’s y ‘ α_t ’s es válida, siempre que se respete el orden de los α_{s_j} entre sí y el orden de los α_{t_j} entre sí. Por ejemplo, podemos generar la torre compuesta mediante *yustaposición*, es decir, añadiendo primeramente todos los α_s (en orden) y luego todos los α_t (en orden).

- b) Si $K \subset F$ y $F \subset L$ son extensiones radicales, entonces también $F \subset L$ es radical.
- c) Si tenemos $K \subset K_1 \subset L$ y $K \subset K_2 \subset L$ dos extensiones intermedias de $K \subset L$, y se verifica que $K \subset K_1$ es radical, entonces también $K_2 \subset K_1K_2$ es radical.

Siendo respectivamente $F_1 \subset L_1$ tal que $K \subset L_1$ es radical, $F_2 \subset L_2$ tal que $F_1 \subset L_2$ es radical, y L_1, L_2 contenidos en un mismo cuerpo L

Corolario 2.71 Si $K \subset F_1$ y $F_1 \subset F_2$ son extensiones resolubles; entonces también $K \subset F_2$ es resoluble.

Demostración: Dado que $K \subset F_1$ es resoluble, existe $F_1 \subset L_1$ tal que $K \subset L_1$ es radical. Análogamente, por ser $F_1 \subset F_2$ resoluble, existe $F_2 \subset L_2$ tal que $F_1 \subset L_2$ es radical. Para ver que $K \subset F_2$ es resoluble, vamos a ver que $K \subset L_1L_2$ es radical.

Y en efecto: por ser $K \subset L_1$ radical, también es $L_2 \subset L_1L_2$ es radical (**lema 2.70, c**)). Dado que $F_1 \subset L_2$ es radical, también $F_1 \subset L_1L_2$ es radical (**2.70, b**)). Ahora, tenemos que L_1 es un cuerpo intermedio de $F_1 \subset L_1L_2$ una extensión radical, luego $L_1 \subset L_1L_2$ es radical (**2.70, a**)). Por último, se concluye que $K \subset L_1L_2$ es radical como yuxtaposición de $K \subset L_1$ y $L_1 \subset L_1L_2$ extensiones radicales (**2.70, a**)). Así, se tiene $K \subset F_2 \subset L_1L_2$, y consecuentemente, como queríamos, $K \subset F_2$ es resoluble. \square

El presente capítulo pretende proporcionar un marco general común donde tratar los diferentes conceptos de los que nos ocuparemos en el resto del TFG. Hay conceptos que históricamente han sido utilizados de manera natural, sin necesidad de previamente haberlos establecido a través de una definición formal; conceptos como *herramienta*, *construcción* o *constructibilidad*, que, sin esta formalización precisa, pueden conducirnos a ciertas confusiones por su ambigüedad a través de la literatura.

El contenido de este capítulo está fundamentalmente basado en el lenguaje formal propuesto por Eulàlia Tramuns y Jordi Guàrdia en [Tra11], [Tra12] y [GT15] para tratar de manera unificada las construcciones geométricas planas y las correspondientes herramientas de construcción.

3.1 SOBRE CONSTRUCTIBILIDAD PLANA GENERAL

Nos vamos a encargar de estudiar construcciones geométricas planas; esto es, procesos geométricos que a partir de ciertos objetos iniciales generan nuevos objetos en el plano afín. Tales objetos básicos a considerar serán puntos y curvas del plano afín.

De forma genérica nos referiremos a un punto a través de sus coordenadas como punto del plano cartesiano; ó también identificándolo como número complejo, según el contexto.

$$\begin{aligned} a + bi \in \mathbb{Q}(a, b, i) \subset \mathbb{C} &\equiv (a, b) \in \mathbb{Q}(a, b)^2 \subset \mathbb{R}^2 \\ &\equiv \{(x, y) / x - a = 0 = y - b\} \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Para referirnos a una curva utilizaremos cualquier polinomio (en X e Y) que la represente¹. Será habitual confundir tal polinomio con la noción de curva como subconjunto de puntos. Por ejemplo, simbolizaremos una recta genérica como

$$\begin{aligned} r = aX + bY + c \in \mathbb{Q}(a, b, c)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y] \\ \equiv V(r) = \{(x, y) / r(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Sobra aclarar que a través de la especialización de las indeterminadas (a, b, c) las anteriores representaciones simbolizarán puntos y curvas particulares.

Mediante la idea de *herramienta* formalizaremos las capacidades que permitirán generar nuevos objetos; por su lado los *mapas* nos permitirán estudiar estos nuevos objetos construibles del plano. En la literatura, el estudio de los

¹ Consideramos la noción de curva algebraica afines como la de una clase de equivalencia vía (la relación de equivalencia definida por) proporcionalidad sobre el conjunto de polinomios $\mathbb{R}[X, Y]$ no constantes y sin factores múltiples.

objetos construibles suele limitarse únicamente a considerar puntos. Surgen dos planteamientos, bien estudiando el conjunto de números (reales positivos) construibles como la distancia entre puntos; bien mediante la identificación de puntos y números complejos, a estudiar el conjunto de números complejos construibles. Nosotros optamos por esta segunda opción; además de considerar también el conjunto de curvas construibles. El estudio de tales conjuntos buscará (cuando sea posible) identificarlo explícitamente, determinar su estructura algebraica y describir sus propiedades.

Estas cuestiones de constructibilidad geométrica estarán estrechamente ligados con aspectos aritméticos; de hecho, algunos problemas geométricos surgen directamente de problemas aritméticos (e.g., la duplicación del cubo es en esencia la construcción de $\sqrt[3]{2}$). En este sentido, también nos interesará responder asuntos como la n -sección de ángulos, la construcción de polígonos o la resolución de ecuaciones.

3.2 AXIOMAS Y HERRAMIENTAS

Usaremos el término axioma en un sentido distinto al usual en matemáticas, pues así lo hace la literatura, otorgándole un nuevo significado como “procedimiento elemental”. Para las siguientes definiciones denotaremos como \mathcal{P} al conjunto de tuplas (n -uplas ordenadas para cualquier $n \in \mathbb{Z}$) formadas por puntos (considerados bien como elementos de \mathbb{R}^2 , bien como números complejos) y como C al conjunto de tuplas formadas por curvas (curvas algebraicas afines planas sobre \mathbb{R}).

Definición 3.1 Un *axioma de construcción* es un proceso geométrico elemental que genera un conjunto finito y ordenado de curvas a partir de un conjunto de puntos y curvas finito, ordenado y no vacío. Podemos pensar en esto como una aplicación $\mathbf{A} : D \subset \mathcal{P} \times C \rightarrow C$.

Definición 3.2 Un *axioma de intersección* es un proceso geométrico elemental que genera un conjunto finito y ordenado de puntos a partir de un conjunto de puntos y curvas finito, ordenado y no vacío. Como antes, podemos considerarlo una aplicación $\mathbf{A} : D \subset \mathcal{P} \times C \rightarrow \mathcal{P}$.

Ejemplo 3.3 Consideremos poder unir dos puntos dados (por ejemplo, con una regla). Formalmente tendríamos un axioma de construcción

$$\mathbf{Recta} : D_{\mathbf{Recta}} \subset \mathcal{P} \times C \rightarrow C,$$

cuyo dominio de definición será el conjunto de pares de puntos distintos $D_{\mathbf{Recta}} = \{(A, B) / A \neq B\} \times \{\emptyset\}$; y donde dado un par $(A, B) \in D$ su imagen se define como $\mathbf{Recta}(A, B)$ la recta que pasa por A y B .

Observemos que en este caso el papel de los puntos en la 2-upla es simétrico, pero no tiene porqué ser así (y en general no lo será). Notemos también que la imagen de este axioma es siempre una 1-upla. §

Ejemplo 3.4 Construidas dos rectas, si fuesen secantes su intersección define un punto del plano. Considerar tal punto como constructible formalmente es

Aunque usualmente la generación de puntos se efectúa como intersección de curvas preexistentes, también existen procedimientos elementales permitiendo generar puntos a partir de puntos y curvas (por ejemplo, mediante una regla marcada (cfr. [Mar98]))

Habitualmente prescindiremos de los paréntesis al escribir 1-uplas

ejecutar un axioma de intersección **RectaIntersec** : $D_{RI} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}$, definido sobre el conjunto de los pares de rectas. La imagen en este caso podrá ser bien una 1-upla (cuando exista el punto de intersección), bien una 0-upla (cuando no exista). §

Simbolizaremos una 0-upla mediante \emptyset

Notación: Utilizaremos estilo tipográfico “negrita” para nombrar axiomas. Simbolizaremos que un objeto V es imagen de U por un axioma **A** mediante $V = \mathbf{A}(U)$.

Formalizar un instrumento de construcción ahora no será más que considerar conjuntamente ciertos de estos procedimientos elementales: aquellos que modelen las capacidades de engendrar puntos y curvas que le son propias a la herramienta.

Definición 3.5 Una *herramienta* es una dupla $\langle A_C, A_I \rangle$, donde A_C es un conjunto finito de axiomas de construcción y A_I es un conjunto finito de axiomas de intersección².

Ejemplo 3.6 Los axiomas presentados anteriormente formalizan las posibilidades de construcción de puntos y rectas mediante una *regla*:

$$\mathcal{R} = \langle \{\mathbf{Recta}\}, \{\mathbf{RectaIntersec}\} \rangle.$$

Como ejemplo menos trivial, aprovechamos para presentar en este lenguaje la herramienta más estudiada históricamente: la herramienta *regla y compás*.

$$\mathcal{RC} = \langle \{\mathbf{Recta}, \mathbf{Circun}, \mathbf{CircunRadio}\}, \{\mathbf{RectaIntersec}, \mathbf{CircIntersec}, \mathbf{RectCircIntersec}\} \rangle;$$

donde los restantes axiomas de construcción permiten generar:

$c = \mathbf{Circun}(A, B)$ la circunferencia de centro A que pasa por B ,

A, B puntos

$c = \mathbf{CircunRadio}(A, B, C)$ la circunferencia de centro A y radio $d(B, C)$ la distancia entre B y C ;

A, B, C puntos

y los de intersección:

$A, B = \mathbf{CircIntersec}(c_1, c_2)$, cuando existan, los puntos comunes a ambas circunferencias,

c_1, c_2 circunferencias distintas

$A, B = \mathbf{RectCircIntersec}(r, c)$, cuando existan, los puntos comunes a la recta y la circunferencia. §

r una recta,
 c una circunferencia

2 Para que una herramienta sea útil cabe esperar cierta consistencia adicional en su definición: que los conjuntos de axiomas sean (además de no vacíos) completos en el sentido de que (a) las curvas que intervengan en algún axioma sean generables mediante un axioma de construcción y (b) los puntos de intersección de curvas generables por algun axioma de construcción sean generables por un axioma de intersección.

3.3 CONSTRUCCIONES Y MAPAS

Considerar la aplicación secuencial de determinados axiomas nos permitirá realizar procesos geométricos más complejos.

Definición 3.7 Llamaremos *procedimiento de construcción*, o simplemente *construcción*, de V un conjunto de puntos y curvas a partir de U_0 un conjunto de puntos y curvas iniciales no vacío, y lo denotaremos $C(U_0; V)$, a una sucesión finita

$$C(U_0; V) = \{V_1 = \mathbf{A}_1(U_1), \dots, V_n = \mathbf{A}_n(U_n)\}$$

tal que:

- $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ son axiomas;
- En cada paso j , el conjunto U_j sobre el que aplicar el axioma \mathbf{A}_j ha sido generado previamente, es decir: $U_j \subset U_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{j-1}$ para cada $j = 1, \dots, n$; y
- $V \subset U_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n$, pero $V \not\subset U_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{n-1}$.

Si $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \in A_C \cup A_I$ para alguna herramienta $\mathcal{T} = \langle A_C, A_I \rangle$, diremos que $C(U_0; V)$ es una construcción (de V a partir de U_0) *realizable con \mathcal{T}* , que es una *\mathcal{T} -construcción*, o que es *\mathcal{T} -construible*, y lo denotaremos como $C(U_0; V) \in \mathcal{T}$.

Observaciones:

1. Estamos aquí considerando que el conjunto U_0 a partir del cual se realiza la construcción está formado por objetos genéricos. Podemos entender así una construcción como una aplicación $\mathbf{C}(\mathbf{U}_0; \mathbf{V}) : D \subset \mathcal{P} \times C \rightarrow \mathcal{P} \times C$, formada como composición³ de los axiomas que la definen. En este sentido los procesos de construcción generalizan el concepto de axioma.
2. Es inmediato que cualquier axioma $V = \mathbf{A}(U_0)$ es un proceso de construcción de un solo paso $C(U_0, V)$; diremos en ese caso que es una construcción elemental. Construcciones complejas (de más de un paso) para los axiomas de una determinada herramienta pueden ser elementales con los axiomas propios de alguna otra herramienta. Parece así natural considerar *herramientas generalizadas* constituidas como una colección finita de construcciones (en el sentido de aplicaciones), que serán valoradas elementales para dicha herramienta.
3. Es claro que, si $C(U_0; V) \in \mathcal{T}$, para todo subconjunto $V' \subset V$ es $C(U_0; V') \in \mathcal{T}$. En particular, para cualquier elemento $v \in V$ diremos que v es *\mathcal{T} -construible* a partir de U_0 .

³ Estrictamente hablando, no sería la composición de aplicaciones ordinaria entre los axiomas, sino

$$\mathbf{C}(\mathbf{U}_0; \mathbf{V}) = i_V \circ (1_n, A_n(i_{U_n})) \circ \dots \circ (1_1, A_1(i_{U_1}));$$

siendo 1_j la aplicación identidad definida consistentemente para que $U_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{j-1}$ esté contenido en su dominio, y i_S la aplicación que envía a cualquier conjunto que contenga a S en S , definida igualmente donde corresponda a cada caso.

Aunque hemos utilizado aquí 'conjunto' para menor opacidad en la escritura, estrictamente hablando deberíamos sustituir en esta definición 'conjunto' por 'tupla'

Ejemplo 3.8 El procedimiento habitual de construcción de la mediatriz de un segmento con regla y compás se describiría como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Mediatriz}(A, B; l) &= \{c_1 = \mathbf{Circun}(A, B), \\ & c_2 = \mathbf{Circun}(B, A), \\ & C, D = \mathbf{CircIntersec}(c_1, c_2), \\ & l = \mathbf{Recta}(C, D)\}. \end{aligned}$$

Sobra decir que $\mathbf{Mediatriz}(A, B; l) \in \mathcal{RC}$.

§

Con la definición de construcción aún nos quedamos lejos de poder abordar el problema de determinar que puntos y curvas son construibles con una determinada herramienta. Notemos que este problema pasa en primer lugar por fijar un conjunto de puntos y curvas iniciales concreto; si bien es cierto que para ciertas herramientas ciertos conjuntos iniciales quedarán determinados de forma más natural⁴, cualquier elección es legítima y los resultados finales del estudio dependerán estrechamente de ello.

Definición 3.9 Un *mapa* es una pareja $M = (\mathcal{T}, U_0)$ formada por una herramienta \mathcal{T} y un conjunto inicial de puntos y curvas U_0 finito y no vacío.

Notación: Dado un conjunto de puntos y curvas U , escribiremos $U = [P, C]$ para indicar que P es el subconjunto de sus puntos y C el de sus curvas.

Definición 3.10 Sea $M = (\mathcal{T}, U_0)$ un mapa, con $\mathcal{T} = \langle A_C, A_I \rangle$. Llamaremos *sucesión de capas* asociada al mapa M a la sucesión $\{[P_n, C_n]\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ definida como:

- i) $U_0 = [P_0, C_0]$,
- ii) C_n es la unión de C_{n-1} con el conjunto de las curvas obtenidas de aplicar de todas las maneras posibles los axiomas de construcción de \mathcal{T} sobre los elementos de $[P_{n-1}, C_{n-1}]$, y
- iii) P_n es la unión de P_{n-1} con el conjunto de los puntos obtenidos de aplicar de todas las maneras posibles los axiomas de intersección \mathcal{T} sobre los elementos de $[P_{n-1}, C_n]$.

Notemos que hasta ahora sólo contemplamos procesos con un número de pasos n fijo; procesos iterativos, recursivos o que impliquen un número variable o arbitrariamente alto de pasos quedaban fuera de la formalización anterior, pero sí que pueden contemplarse ahora en el contexto de los mapas.

Definición 3.11 Sea $M = (\mathcal{T}, U_0)$ un mapa. Llamaremos *conjunto de puntos y curvas construible* del mapa M al conjunto definido como:

$$(U_0)^{\mathcal{T}} = [P^M, C^M] := \bigcup_{n=0}^{\infty} [P_n, C_n].$$

De cualquier elemento suyo, $v \in (U_0)^{\mathcal{T}}$, diremos que es *M-construible*.

4 Véase el [ejemplo 3.13](#) y la [terminología](#) allí introducida.

Notación: Para no sobrecargar la escritura, describiremos los conjuntos U_0 y V directamente mediante la enumeración de sus elementos, indicando la separación entre ellos mediante el uso de ‘;’ punto y coma

Y recíprocamente: dados P un conjunto de puntos y C un conjunto de curvas, $[P, C]$ denotará el conjunto formado como unión de ambos

Observación: El uso de la terminología “elemento construible” se justifica en la equivalencia:

$$M = (\mathcal{T}, U_0) \quad M\text{-constructibilidad} \quad \equiv \quad \mathcal{T}\text{-constructibilidad a partir de } U_0.$$

Es claro que todo elemento \mathcal{T} -construible a partir de U_0 es M -construible. Recíprocamente, si v es M -construible a partir de U_0 , existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $v \in [P_n, C_n]$; trivialmente podemos definir una construcción $C(U_0; [P_n, C_n]) \in \mathcal{T}$ luego, por ser $\{v\} \subset [P_n, C_n]$, v también es \mathcal{T} -construible a partir de U_0 ⁵.

Ejemplo 3.12 Consideremos el mapa $M = (\mathcal{T}, U_0)$ dado por:

$$\mathcal{T} = \{\{\text{Mediatriz}\}, \{\text{Recta Intersec}\}\}, \quad U_0 = [\{0, 1\}, \{Y\}].$$

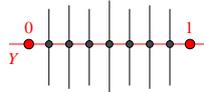


Figura 3.1: Tercera capa del mapa. Los objetos iniciales aparecen en rojo

En general nos interesará el estudio de mapas con cardinal de $U^{\mathcal{T}}$ infinito

Es sencillo ver que la n -ésima capa de la sucesión de capas de M está formada por:

$$C_n = \{Y\} \cup \{X - \frac{j}{2^n} : 1 \leq j \leq 2^{n-1}, j \in \mathbb{N}\}, \text{ y}$$

$$P_n = \{\frac{j}{2^n} : 0 \leq j \leq 2^n, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Obsérvese que P^M es denso en el intervalo $[0, 1]$. Sin embargo, si hubiésemos tomado $U_0 := \{0, 1\}$ tendríamos que $(U_0)^{\mathcal{T}}$ solo estaría formado por los puntos 0 y 1 y la recta $X - 1/2$. §

Ejemplo 3.13 Históricamente, el estudio de la herramienta \mathcal{RC} se ha realizado con el análisis de los puntos \mathcal{RC} -construibles a partir de $\{0, 1\}$; al igual que en el resto de literatura, también nosotros juzgamos que este conjunto inicial es el asociable a \mathcal{RC} de manera más natural⁶.

Notación: En caso de valorar un mapa como el vinculado su herramienta de forma natural, hablaremos de que es el *mapa canónico* asociado a dicha herramienta. Será habitual que nos refiramos al mapa canónico con el nombre de la herramienta; también, si $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, U_{\mathcal{H}})$ es el mapa canónico de \mathcal{H} , que substituyamos la notación general dada en la [definición 3.11](#) por $\mathcal{H} = [\mathcal{H}_P, \mathcal{H}_C] := (U_{\mathcal{H}})^{\mathcal{H}}$.

Continuando con el ejemplo y siguiendo esta terminología, llamaremos mapa canónico de la herramienta regla y compás a $\mathcal{RC} := (\mathcal{RC}, \{0, 1\})$.

(Cfr. [Cox12, teo. 10.1.6])

Es un resultado clásico⁷ que un número $\alpha \in \mathbb{C}$ es construible mediante regla y compás a partir de $\{0, 1\}$, esto es, $\alpha \in \mathcal{RC}_P = P^{\mathcal{RC}}$, si, y solo si,

- 5 $C(U_0; [P_n, C_n])$ está bien definida salvo reordenación de curvas (entre sí) y puntos (entre sí) dentro de cada capa. Un método para definir $C(U_0; v) \in \mathcal{T}$ es tomar n el de la menor capa (en el sentido de inclusión) conteniendo a v y cribar iterativamente (descendiendo por las capas) sus “elementos precursores”. La construcción de $v \in [P_n, C_n]$ puede no ser única, y en general no lo será, pero siempre podemos asegurar la existencia de al menos una.
- 6 Por su simplicidad, por resultar intuitivo en relación a las capacidades de la regla y el compás, y puesto que podemos construir infinitos puntos a partir de él.
- 7 Entre otras caracterizaciones posibles del conjunto de los puntos \mathcal{RC} -construibles, podemos describir también a \mathcal{RC}_P como \mathbb{E}^2 el menor subcuerpo de \mathbb{C} cerrado por raíces cuadradas (cfr [Cox12, coro. 10.1.7]) y [Mar98, coro. 2.16]).

existe una torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset \mathbb{C}$ verificando que $\alpha \in F_n$ y $[F_{j+1} : F_j] = 2$ para cada j . §

3.4 EQUIVALENCIAS ENTRE HERRAMIENTAS

Perfilaremos aquí ciertas nociones que nos permitan comparar entre sí y clasificar las distintas herramientas. Para una exposición más detallada remitimos al lector a [Tra12], aunque puede que algunas de nuestras definiciones no sean iguales a las allí declaradas.

Definición 3.14 Sea $C(U_0; V)$ una construcción (no realizable con una herramienta \mathcal{T}). Diremos que $C(U_0; V)$ es *equivalentemente \mathcal{T} -construible*, y lo denotaremos como $C(U_0; V) \tilde{\in} \mathcal{T}$, si existe una \mathcal{T} -construcción $C_{\mathcal{T}}(U_0; V)$ de V a partir de U_0 .

Definición 3.15 Sean \mathcal{T} y \mathcal{H} dos herramientas. Diremos que \mathcal{T} *genera (geométricamente) a \mathcal{H}* , y escribiremos $\mathcal{T} \circ \rightarrow \mathcal{H}$, si cualquier construcción de \mathcal{H} es equivalentemente \mathcal{T} -construible, es decir:

$$\mathcal{T} \circ \rightarrow \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall C(U_0; V) \in \mathcal{H} \quad \exists C_{\mathcal{T}}(U_0; V) \in \mathcal{T}.$$

Definición 3.16 Diremos que dos herramientas \mathcal{T} y \mathcal{H} son *geométricamente equivalentes*, y lo denotaremos como $\mathcal{T} \circ \leftrightarrow \mathcal{H}$, si $\mathcal{T} \circ \rightarrow \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \circ \rightarrow \mathcal{T}$.

Lema 3.17 Dadas \mathcal{T} y \mathcal{H} dos herramientas, con $\mathcal{H} = \langle A_C, A_I \rangle$, es claro que:

$$\mathcal{T} \circ \rightarrow \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \mathbf{A} \in A_C \cup A_I \quad \mathbf{A} \tilde{\in} \mathcal{T}.$$

La anterior caracterización es más que evidente en tanto a que podemos “traducir” cualquier construcción axioma por axioma, sustituyendo cada axioma por su correspondiente construcción con la otra herramienta.

Es especialmente obvio el caso de una herramienta constituida por un subconjunto de los axiomas de la herramienta generadora.

Definición 3.18 Dadas dos herramientas $\mathcal{H} = \langle A_C^{\mathcal{H}}, A_I^{\mathcal{H}} \rangle$ y $\mathcal{T} = \langle A_C^{\mathcal{T}}, A_I^{\mathcal{T}} \rangle$, si $A_C^{\mathcal{H}} \subseteq A_C^{\mathcal{T}}$ y $A_I^{\mathcal{H}} \subseteq A_I^{\mathcal{T}}$ diremos que \mathcal{H} es una *subherramienta* de \mathcal{T} , y lo denotaremos mediante $\mathcal{H} \sqsubseteq \mathcal{T}$.

Si \mathcal{H} es una subherramienta de \mathcal{T} , siempre $\mathcal{T} \circ \rightarrow \mathcal{H}$. Pero puede ocurrir que $\mathcal{H} \sqsubset \mathcal{T}$ y aun \mathcal{H} generar a \mathcal{T} ; en este caso hablaremos de *redundancia* en los axiomas de \mathcal{T} , y diremos que los axiomas de $A_{\mathcal{T}} \setminus A_{\mathcal{H}}$ (el conjunto diferencia) son redundantes para $A_{\mathcal{H}}$.

Definición 3.19 Sea \mathcal{T} una herramienta y $\mathcal{H} \sqsubseteq \mathcal{T}$ una subherramienta suya. Diremos que \mathcal{H} es una *subherramienta minimal* de \mathcal{T} si se cumple que $\mathcal{H} \circ \leftrightarrow \mathcal{T}$ y ninguna subherramienta propia de \mathcal{H} genera a \mathcal{T} ; es decir, si es tal que $\mathcal{H} \circ \rightarrow \mathcal{T}$ y además $\mathcal{H}' \not\circ \rightarrow \mathcal{T}$ para cualquier $\mathcal{H}' \sqsubset \mathcal{H}$.

Ejemplo 3.20 Reescribiendo a Euclides, la regla y compás euclídeo es una subherramienta minimal de \mathcal{RC} (cfr. [Tra12, coro. 3.6]).

$$\mathcal{RC} \circ \leftrightarrow \mathcal{RC}\mathcal{E}$$

§

En virtud de esta caracterización pudo resolverse (Wantzel 1837, Lindemann 1882) que la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo no son realizables mediante regla y compás (cfr. [Cox12, ejcs. 10.1.9 - 10.1.11])

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \langle A_C^{\mathcal{T}}, A_I^{\mathcal{T}} \rangle \\ \mathcal{H} &= \langle A_C^{\mathcal{H}}, A_I^{\mathcal{H}} \rangle \\ A_{\mathcal{T}} &= A_C^{\mathcal{T}} \cup A_I^{\mathcal{T}} \\ A_{\mathcal{H}} &= A_C^{\mathcal{H}} \cup A_I^{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

El compás euclídeo, \mathcal{CE} , no permite transportar distancias (i.e., prescindimos del axioma **CincunRadio**)

La equivalencia geométrica entre herramientas produce una clasificación muy restrictiva, basta con que haya un tipo de curvas construibles distinto para que la equivalencia entre herramientas no se pueda dar. Esto aduce la introducción de criterios de comparación más laxos. Una primera opción es la de replantear las anteriores definiciones contemplando únicamente *procedimientos de construcción de puntos* ($V = [V, \emptyset]$) realizados *a partir de puntos* ($U_0 = [U_0, \emptyset]$); esta es la noción de equivalencia virtual.

Definición 3.21 Sean \mathcal{T} y \mathcal{H} dos herramientas. Diremos que \mathcal{T} genera virtualmente a \mathcal{H} , y denotaremos $\mathcal{T} : \rightarrow \mathcal{H}$, si cualquier construcción de puntos a partir de puntos realizable con \mathcal{H} es equivalentemente \mathcal{T} -construible. Si $\mathcal{T} : \rightarrow \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} : \rightarrow \mathcal{T}$, diremos que las herramientas \mathcal{T} y \mathcal{H} son virtualmente equivalentes, $\mathcal{T} : \leftrightarrow \mathcal{H}$.

Ejemplo 3.22 En virtud del teorema de Poncelet-Steiner (cfr. [Tra12, teo. 3.15]) se tiene la equivalencia virtual entre \mathcal{RC} y la regla y compás fijo:

$$\mathcal{RC} : \leftrightarrow \mathcal{RCF}. \quad \S$$

Otra forma alternativa de establecer relaciones entre herramientas es mediante el análisis de mapas constructibles asociados con ellas.

Definición 3.23 Dados dos mapas M_1 y M_2 , diremos que son *equivalentes*, si $P^{M_1} = P^{M_2}$. Si además $C^{M_1} = C^{M_2}$, diremos que son *idénticos*.

Definición 3.24 Diremos que dos herramientas \mathcal{T} y \mathcal{H} son *aritméticamente equivalentes*, y lo denotaremos como $\mathcal{T} \bullet \leftrightarrow \bullet \mathcal{H}$, si existen mapas $M = (\mathcal{T}, U_0)$ y $N = (\mathcal{H}, U'_0)$ tales que:

- i) U_0 y U'_0 están formados solo por puntos.
- ii) Los conjuntos $(U_0)^\mathcal{T}$ y $(U'_0)^\mathcal{H}$ de puntos y curvas construibles de cada uno de los mapas son de cardinal infinito.
- iii) M y N son mapas equivalentes.
- iv) No hay ningún axioma \mathbf{A} de \mathcal{T} (resp. de \mathcal{H}) que no sea aplicable con los elementos de $(U_0)^\mathcal{T}$ (resp. de $(U'_0)^\mathcal{H}$).

Esta es la relación entre herramientas más comúnmente estudiada (aun sin hacerlo bajo el nombre de equivalencia aritmética); también es la relación más débil de las aquí definidas.

Ejemplo 3.25 El teorema de Mohr-Mascheroni (cfr. [Tra12, teo. 4.6]) establece que el compás es aritméticamente equivalente a la regla y compás:

$$\mathcal{RC} \bullet \leftrightarrow \bullet C. \quad \S$$

Proposición 3.26 Sean $M = (\mathcal{T}, U_0)$ y $N = (\mathcal{H}, U'_0)$ dos mapas. Si $\mathcal{T} : \rightarrow \mathcal{H}$ y $U'_0 \subset P^M$, entonces $P^N \subset P^M$. Consecuentemente, si $\mathcal{T} : \leftrightarrow \mathcal{H}$, $U'_0 \subset P^M$ y $U_0 \subset P^N$ entonces M y N son mapas equivalentes.

El compás fijo, \mathcal{CF} , únicamente permite construir circunferencias con cierto radio fijo (que podemos considerar unitario)

Esto es: si existen U_0 y U'_0 dos conjuntos finitos de puntos

ORIGAMI: CONCEPCIÓN CLÁSICA

En este capítulo vamos a analizar el origami modelizado de acuerdo con los axiomas Huzita-Justin; esta es la concepción usual del origami como herramienta, de forma que nos restringimos a realizar pliegues rectos y un único pliegue a la vez.

Identificaremos, idealmente, el plano complejo con una hoja de papel infinita. Estamos otorgando una doble naturaleza a la hoja de papel, como herramienta de construcción y como lugar en el que operar. Podemos pensar en bifurcar tal dualidad a la hora de ejecutar cada operación de doblado: podemos imaginarnos el “papel-herramienta” como una hoja transparente con una extensión suficientemente grande para contener a los elementos que intervengan en la operación de doblado, y que una vez doblada esta hoja como corresponda volvemos a desdoblarla y fundirla con el “papel-lugar”, quedando así constituido el doblez como una recta en el plano complejo.

La referencia central para este capítulo es [Cox12, ch. 10]. Podemos recomendar, además, como referencias más significativas a [Alp00], [Lor08] y [Mar98, ch. 10]. Proporcionan cada una de ellas enfoques distintos al nuestro y distintos entre sí.

4.1 AXIOMAS HUZITA-JUSTIN

En la década de 1930, Margherita Beloch Piazzolla fue la primera en darse cuenta de la potencia de las construcciones mediante dobleces ([Pia36]); aunque la sistematización que hoy manejamos de este contenido no comenzó hasta los 1970s, cuando aficionados a la papiroflexia comenzaron interesarse por las posibilidades de resolver problemas geométricos mediante dobleces y a enumerar y describir las posibles combinaciones de dobleces.

En 1986 Jacques Justin ([Jus86]) introducirá un conjunto de siete axiomas, bajo la denominación de *operations elementaires de pliage* (operaciones elementales de plegado), precisando así por primera vez las capacidades del origami como herramienta. Seis de estos axiomas serían descritos separadamente por Humiaki Huzita en [Huz89a; Huz92], teniendo sus publicaciones mayor calado¹ y quedando establecidos así en el saber colectivo sólo estos seis como los axiomas del origami. Eventualmente, el séptimo axioma sería redescubierto (entre otros) por Koshiro Hatori ([Hat01]) en 2001.

Definición 4.1 Denominaremos *axiomas Huzita-Justin* al conjunto $HJAs = \{O1, O2, O3, O4, O5, O6, O7\}$ formado por los siguientes axiomas de construcción:

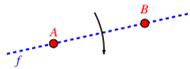
¹ El trabajo de Justin serían prácticamente eludido durante veinte años. Se da, de hecho, la circunstancia de que dicho trabajo fue presentado en el IOST (y republicado en [Huz89b]; [Jus89]) junto con artículo original de Huzita ([Huz89a]).

Como “papel-lugar”, adelantamos que será clave estar trabajando en un cuerpo de característica 0

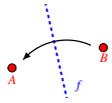
Sirva como ejemplos el descubrimiento en esta década del método de trisección de Abe, [Abe80], o el de duplicación de Messer, [Mes86]

Hasta hace poco era frecuente denominarlos *axiomas Huzita-Hatori*

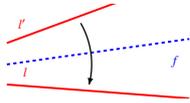
A, B serán puntos;
 l, l' rectas



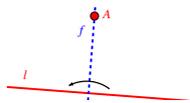
O1 Dados (A, B) un par de puntos distintos, podemos construir mediante un doblar la recta que pasa por A y B ; doblando a través de ellos.



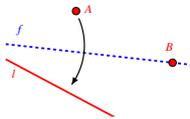
O2 Dados (A, B) un par de puntos distintos, podemos construir mediante un doblar la recta mediatriz del segmento AB ; doblando a través del pliegue que lleva un punto sobre el otro.



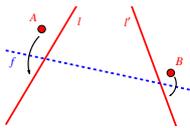
O3 Dadas (l, l') un par de rectas distintas, podemos construir mediante un doblar las rectas bisectrices de los ángulos formados por l y l' ; doblando a través del pliegue que lleva una sobre la otra.



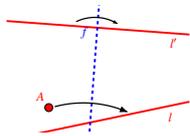
O4 Dados (l, A) un punto y una recta, podemos construir mediante un doblar la recta perpendicular a l que pasa por A ; doblando la línea sobre sí misma (y de forma que el pliegue sea a través de A).



O5 Dados (l, A, B) una tupla tal que $A \notin l$, podemos construir mediante un doblar las rectas tangentes a la parábola de directriz l y foco A que pasan por B ; doblando a través de un pliegue que pasa por B y lleva A sobre l .



O6 Dados (l, A, l', B) una tupla tal que $A \notin l, B \notin l'$ y $(l, A) \neq (l', B)$, podemos construir mediante un doblar las rectas tangentes comunes a las parábolas determinadas por los pares directriz-foco (l, A) y (l', B) ; doblando a través de un pliegue que lleve A sobre l y B sobre l' .



O7 Dados (l, A, l') una tupla tal que $A \notin l$, podemos construir mediante un doblar la recta tangente a la parábola de directriz-foco (l, A) perpendicular a l' ; doblando a través de un pliegue perpendicular a l' y que lleve A sobre l .

Figura 4.1: Axiomas Huzita-Justin

Estos axiomas describen las diferentes maneras de construir una recta mediante un solo doblar a partir de puntos y rectas preexistentes; hecho esto, formalizar la concepción clásica del origami como herramienta de construcción es inmediato.

Definición 4.2 Denominaremos *origami* a la herramienta constituida por el conjunto de axiomas Huzita-Justin y el axioma de intersección entre rectas:

$$O = \langle HJAs, \{\mathbf{RectaIntersec}\} \rangle.$$

4.1.1 Observaciones relativas a los axiomas Huzita-Justin

TEORÍA DE SUPERPOSICIÓN Con la herramienta origami se pretende formalizar la construcción de pliegues (léase ‘rectas’) sobre el papel (léase ‘plano complejo’) mediante un único doblar cada vez. La cuestión principal aquí es cómo queda determinado el doblar a realizar. La respuesta ([Jus86; AL09;

GKK13; Luc16): mediante condiciones de alineamiento entre pares de objetos que el doblez debe satisfacer.

Lo más natural quizá hubiese sido iniciar nuestra exposición estudiando estas condiciones de alineamiento y sus posibles combinaciones, y a partir de ahí definir los axiomas dados. Pospondremos este análisis hasta el **capítulo 6**, donde dedicaremos la primera sección a hablar con más profundidad sobre las condiciones de alineamiento y analizaremos algebraicamente cada uno de los axiomas. Como anticipo introduciremos la siguiente simbología: $(W, Z)_f$ representará que dos objetos W y Z quedan superpuestos al doblar por la línea de pliegue f .

Siendo W y Z dos objetos: puntos o rectas

RESTRICCIONES A LOS AXIOMAS Las restricciones impuestas sobre la aplicabilidad de los axiomas forman parte de los mismos. Buscan garantizar que el número de pliegues solución sea finito; para ello se imponen condiciones de tipo no degeneración ($A \neq B$ y $l \neq l'$). Las condiciones sobre las relaciones de incidencia entre elementos ($A \notin l$) evitan que unos axiomas se conviertan en casos particulares de otros.

(Véase **definición 3.1**)

Por ejemplo, si $A = B$ en **O2** el conjunto de líneas de pliegue cumpliendo con superponer A consigo mismo, $\{f/A \in f\}$, es infinito

COMPLETITUD DE LOS AXIOMAS Los axiomas Huzita-Justin son un conjunto de axiomas completo (**[AL09; Lan15; Luc16]**) en el sentido de que no existen más formas (diferentes a las dadas) de definir nuevas² líneas de pliegue mediante un único doblez. Robert Lang fue el primero en dar constancia de esto (**[Lan04]**), despejando así la duda sobre el descubrimiento de un nuevo axioma no equivalente a alguno de los ya contemplados.

Analizaremos este tema con más detalle en la **sección 6.1.3.2**

REDUNDANCIA DE LOS AXIOMAS Hablamos de redundancia en el conjunto de axiomas en el sentido de que determinados axiomas pueden expresarse como procedimientos de construcción a partir de otros. Por ejemplo³:

$$\mathbf{O1} \tilde{\in} \langle \{\mathbf{O2}, \mathbf{O4}\}, \{\emptyset\} \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{O7} \tilde{\in} \langle \{\mathbf{O2}, \mathbf{O4}\}, \{\mathbf{RectaIntersec}\} \rangle.$$

Es claro así que podríamos suprimir ambos axiomas sin mermar las capacidades de nuestra herramienta; esto es:

$$\langle \{\mathbf{O2}, \mathbf{O3}, \mathbf{O4}, \mathbf{O5}, \mathbf{O6}\}, \{\mathbf{RectaIntersec}\} \rangle \leftrightarrow \mathcal{O}.$$

2 Lucero (**[Luc16]**) sugiere la inclusión de un octavo axioma para hablar de completitud de forma consistente con la definición combinatoria (mediante pares de superposición) de los axiomas (véase la **sección 6.1.3**); este octavo axioma siempre ha sido soslayado por no definir ningún nuevo pliegue (se trata de, dado un pliegue preexistente, doblar a través de él).

3 Se tiene que:

$$r = \mathbf{O1}(A, B) \quad \equiv \quad C(A, B; r) = \{l_1 = \mathbf{O2}(A, B), r = \mathbf{O4}(l_1, A)\};$$

y, si $l \nparallel l'$ (en caso contrario **O7** no tiene solución):

$$\begin{aligned} r = \mathbf{O7}(l, A, l') &\quad \equiv \quad C(l, A, l'; r) = \{r_1 = \mathbf{O4}(l', A), \\ &\quad r_2 = \mathbf{O4}(r_1, A), \\ &\quad P = \mathbf{RectaIntersec}(l, r_2), \\ &\quad r = \mathbf{O2}(A, P)\}. \end{aligned}$$

Para una mayor justificación sobre esta construcción puede consultarse **[Lor08]**

En [Tra12] se prueba que las únicas subherramientas minimales de \mathcal{O} son:

$$\mathcal{O}_1 := \langle \{\mathbf{O2}, \mathbf{O3}, \mathbf{O4}, \mathbf{O6}\}, \{\mathbf{RectaIntersec}\} \rangle, \text{ y}$$

$$\mathcal{O}_2 := \langle \{\mathbf{O1}, \mathbf{O3}, \mathbf{O4}, \mathbf{O6}\}, \{\mathbf{RectaIntersec}\} \rangle.$$

Es más, la definición del origami clásico mediante los axiomas Huzita-Justin constituye un auténtico pleonasma: podemos realizar cualquier \mathcal{O} -construcción mediante la repetida aplicación de una única operación fundamental de doblado (cfr. [Hat01; Mar98; GKK13]). Esta operación, que aquí llamaremos **GO6**, es esencialmente la generalización del axioma **O6** (eliminando las restricciones dadas en nuestra definición) y la extensión de su uso definiéndolo también sobre pares y ternas de elementos al permitir añadir parámetros adicionales cumpliendo ciertas condiciones cuando sea necesario.

Por ejemplo, para realizar **O3**(l, l') basta con seleccionar cualquier par de puntos $A \in l'$ y $B \in l$, y es: $\mathbf{GO6}(l, l') = \mathbf{O6}(l, A, l', B)$

$$\langle \{\mathbf{GO6}\}, \{\mathbf{RectaIntersec}\} \rangle \leftrightarrow \mathcal{O}$$

INTERPRETACIÓN Y PARTICULARIDADES DE CADA AXIOMA Al definirlos ya hemos dado su descripción geométrica; adelantaremos aquí su descripción mediante pares de superposición (sección 6.1.3) y su descripción algebraica (sección 6.1.4). También revisaremos su aplicabilidad y la existencia y multiplicidad de sus soluciones.

Como en la definición 4.1: A, B serán puntos y l, l' rectas; pongamos: $A = (u_1, u_2)$, $B = (v_1, v_2)$, $l = a_1X + b_1Y + c_1$ y $l' = a_2X + b_2Y + c_2$.

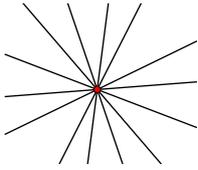


Figura 4.2: En **O1** y **O2**, si $A = B$, habría infinitas soluciones: $\{f/A \in f\}$.

$$\mathbf{O1} \equiv f = \mathbf{Recta}(A, B) \equiv \{f/(A, A)_f \text{ y } (B, B)_f\}$$

No es aplicable si $A = B$, en cuyo caso habría infinitas soluciones (figura 4.2). Si $A \neq B$ siempre hay solución y es única:

$$f = (v_2 - u_2)(X - u_1) - (v_1 - u_1)(Y - u_2) \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

$$\mathbf{O2} \equiv f = \mathbf{Mediatriz}(A, B) \equiv \{f/(A, B)_f\}$$

Como antes: sólo es aplicable (número de soluciones finito) si $A \neq B$, y en ese caso siempre hay solución y es única:

$$f = (v_1 - u_1)\left(X - \frac{u_1 + v_1}{2}\right) + (v_2 - u_2)\left(Y - \frac{u_2 + v_2}{2}\right) \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

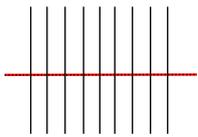


Figura 4.3: En **O3**, si $l = l'$, habría infinitas soluciones: $\{f/f \perp l\} \cup \{l\}$.

$$\mathbf{O3} \equiv f_1, f_2 = \mathbf{Bisector}(l, l') \equiv \{f/(l, l')_f\}$$

No es aplicable si $l = l'$ (figura 4.3). En caso contrario siempre hay solución. Si es $l' \not\parallel l$ hay dos soluciones diferentes: las bisectrices de $\angle(l, l')$ y $\angle(l', l)$. Si es $l' \parallel l$ la solución es única: la recta paralela y equidistante entre ambas⁴.

$$\begin{aligned} f_1 &= (m_2a_1 - m_1a_2)X + (m_2b_1 - m_1b_2)Y + (m_2c_1 - m_1c_2), \\ f_2 &= (m_2a_1 + m_1a_2)X + (m_2b_1 + m_1b_2)Y + (m_2c_1 + m_1c_2), \\ &\in \mathbb{Q}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \sqrt{a_2^2 + b_2^2})[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]. \end{aligned}$$

$\angle(l, l')$ denota el ángulo orientado (en sentido antihorario) de l a l'

$$\begin{aligned} \text{Siendo } m_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \\ m_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

⁴ Si $l' \parallel l$, f_1 degenera en el conjunto vacío, mientras que f_2 puede expresarse sencillamente como $a_2X + b_2Y + \frac{\mu c_1 + c_2}{2}$, siendo $\mu = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ (cuando estos cocientes tengan sentido).

O4 $\equiv f = \mathbf{Perpendicular}(l, A) \equiv \{f / (l, l)_f \text{ y } (A, A)_f\}$

Siempre hay solución única:

$$f = b(X - u_1) - a(Y - u_2) \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, a, b)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

O5 $\equiv f_1, f_2 = \mathbf{Tangencial}(l, A, B) \equiv \{f / (l, A)_f \text{ y } (B, B)_f\}$

Evitamos su aplicación si $A \in l$ pues bajo esta incidencia serían solución $\{f / B \in f\} \cap \{f / A \in f \text{ ó } f \perp l\}$ y estaríamos construyendo **O1**(A, B) y **O4**(l, B). Si $A \notin l$ tenemos bien definida $\mathcal{P}_{l,A}$ la parábola de foco A y directriz l; la interpretación geométrica de $(l, A)_f$, la superposición entre un punto y una recta, es menos evidente: f debe ser tangente a la parábola $\mathcal{P}_{l,A}$ ⁵. Pueden darse tres casos:

- si $d(A, B) < d(B, l)$, es decir, si B está en la “parte interna” de la parábola $\mathcal{P}_{l,A}$. En este caso no hay solución (no hay ninguna tangente a $\mathcal{P}_{l,A}$ pasando por B).
- si $d(A, B) = d(B, l)$, esto es, si $B \in \mathcal{P}_{l,A}$. Existe solución única: la recta tangente a $\mathcal{P}_{l,A}$ en B.
- si $d(A, B) > d(B, l)$, i.e., si B está en en la “parte externa” de $\mathcal{P}_{l,A}$. En este caso hay doblemente solución: las dos rectas tangentes a $\mathcal{P}_{l,A}$ que pasan por B.

Algebraicamente, si $A \notin l$:

$$f_j = \tilde{\tau}_1 \tilde{X} - \tilde{Y} - \tilde{\tau}_1^2 / 2 \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, a, b, c, \tilde{\tau}_1)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y],$$

donde $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \varphi(X, Y)$, con φ una afinidad tal que $\varphi(A) = (0, 1/2)$ y $\varphi(l) = \tilde{Y} + 1/2$; y $\tilde{\tau}_1 \in \mathbb{R}$ es solución de $\tilde{\tau}_1^2 - 2\tilde{\tau}_1 \tilde{v}_1 + 2\tilde{v}_2 = 0$, siendo $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = \varphi(v)$.

O6 $\equiv f_1, f_2, f_3 = \mathbf{TangencialComún}(l, A, l', B) \equiv \{f / (l, A)_f \text{ y } (l', B)_f\}$

No es aplicable si ocurren simultáneamente que $A = B$ y $l = l'$ (serían solución, si $A \notin l$, el conjunto de todas las rectas tangentes a la parábola $\mathcal{P}_{l,A}$ de foco A y directriz l (figura 4.4); si $A \in l$, $\{f / A \in f \text{ ó } f \perp l\}$). Excluiremos también los casos de incidencia $A \in l$ y $B \in l'$ por dar lugar a disposiciones ya consideradas por otros axiomas, como veremos a continuación. Supuesto que $(l, A) \neq (l', B)$, puede ocurrir:

- $A = B, (l \neq l')$: si $A \in l$ (ó $A \in l'$) en este caso: si $l \parallel l'$, no habría solución; si $l \not\parallel l'$, serían solución $\{f / f \perp l \text{ y } f \text{ tangente a } \mathcal{P}_{l',A}\} = \mathbf{O7}(l', A, l)$ (resp. $\mathbf{O7}(l', A, l)$), salvo si $A \in l \cap l'$ (caso degenerado de **O7** con infinitas soluciones $\{f / A \in f\}$).
- $l = l', (A \neq B)$: si $A \in l$ (ó $B \in l$) en este caso: sería solución $\{f / A \in f \text{ y } f \text{ tangente a } \mathcal{P}_{l,B}\} = \mathbf{O5}(l, B, A) = \mathbf{O3}(l, AB)$ (resp. $\mathbf{O5}(l, A, B)$); salvo si ocurren ambas incidencias a la vez, presentándose el caso degenerado de **O3** $\{f / f \perp l\} \cup \{l\}$.

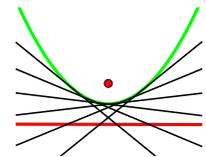


Figura 4.4: En **O6**, si $(l, A) = (l', B)$, y $A \notin l$, habría infinitas soluciones: $\{f / f \text{ tangente } \mathcal{P}_{l',A}\}$.

5 «Sean r una recta, P ≠ r un punto, y P la parábola de foco P y directriz r. Sean l otra recta, y Q el simétrico de P respecto del eje l. Entonces: Q ∈ r si, y sólo si, l es tangente a P.» Nos ocuparemos de demostrar este resultado más adelante (teorema 6.7).

- $l \neq l'$ y $A \neq B$: si $A \in l$ (ó $B \in l'$) en este caso: serían solución $\{f/A \in f \text{ y } f \text{ tangente a } \mathcal{P}_{l',B}\} \cup \{f/f \perp l \text{ y } f \text{ tangente a } \mathcal{P}_{l',B}\} = \mathbf{O5}(l', B, A) \cup \mathbf{O7}(l', B, l)$ (resp. $\mathbf{O5}(l, A, B) \cup \mathbf{O7}(l, A, l')$); o, en caso de ocurrir ambas incidencias a la vez, si $\{f/A \in f \text{ y } B \in f\} \cup \{f/f \perp l \text{ y } B \in f\} \cup \{f/A \in f \text{ y } f \perp l'\} \cup \{f/f \perp l \text{ y } f \perp l'\}$, lo que equivale respectivamente a $\mathbf{O1}(A, B)$, $\mathbf{O4}(l, B)$, $\mathbf{O4}(l', A)$ y \emptyset si $l \nparallel l'$ o $\{f/f \perp l\}$ (un caso degenerado de $\mathbf{O3}$) si $l \parallel l'$.

Supuesto que $(A, l) \neq (B, l')$, $A \notin l$ y $B \notin l'$, tenemos:

$$f_j = m\tilde{X} - \tilde{Y} - m^2/2 \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, m)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y],$$

donde $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \varphi(X, Y)$ es una afinidad tal que $\varphi(A) = (0, 1/2)$ y $\varphi(l) = \tilde{Y} + 1/2$; y $m \in \mathbb{R}$ es solución real de

$$\tilde{a}_2 m^3 + (\tilde{a}_2 \tilde{v}_1 + \tilde{b}_2 (\tilde{v}_2 - 1) + \tilde{c}_2) m^2 + 2(\tilde{a}_2 \tilde{v}_2 + \tilde{b}_2 \tilde{v}_1) m - \tilde{b}_2 \tilde{v}_2 + \tilde{c}_2 = 0,$$

siendo $\tilde{a}_2 \tilde{X} + \tilde{b}_2 \tilde{Y} + \tilde{c}_2 = \tilde{l}' = \varphi(l')$ y $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = \varphi(v)$.

El número de soluciones posibles podrá ser desde ninguna hasta 3, dependiendo del discriminante de la ecuación (esto es, en última instancia, de la posición relativa de los elementos).

$$\mathbf{O7} \equiv f = \mathbf{PerpTangencial}(l, A, l') \equiv \{f/(l, A)_f \text{ y } (l', l')_f\}$$

Evitaremos su aplicación si $A \in l$ (en tal caso sería solución $\{f/f \perp l'\} \cap \{f \perp l \text{ ó } A \in f\} = \mathbf{O4}(l', A) \cup \{f/f \perp l \text{ y } f \perp l'\}$ (observe que este último conjunto puede ser o vacío, si $l \nparallel l'$, o infinito, si $l \parallel l'$)). Si $A \notin l$, está bien definida la parábola $\mathcal{P}_{l,A}$, pudiendo ocurrir:

- si $l \parallel l'$: no hay solución, puesto que ninguna tangente a $\mathcal{P}_{l,A}$ puede ser perpendicular a la recta directriz (se incluye el caso $l = l'$).
- si $l \nparallel l'$: hay solución y es única, la recta tangente a $\mathcal{P}_{l,A}$ y perpendicular a l' . Esto es:

$$f_j = \tilde{\tau}_1 \tilde{X} - \tilde{Y} - \tilde{\tau}_1^2/2 \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, a, b, c, \tilde{\tau}_1)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y],$$

donde $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \varphi(X, Y)$, con φ una afinidad tal que $\varphi(A) = (0, 1/2)$ y $\varphi(l) = \tilde{Y} + 1/2$; y $\tilde{\tau}_1 = \tilde{b}_2/\tilde{a}_2 \in \mathbb{R}$, siendo $\tilde{a}_2 \tilde{X} + \tilde{b}_2 \tilde{Y} + \tilde{c}_2 = \tilde{l}' = \varphi(l')$.

En la [tabla 4.1](#) recopilamos de forma compacta las propiedades de los axiomas que constituyen la herramienta \mathcal{O} .

4.2 ORIGAMI-CONSTRUCTIBILIDAD

A partir de un conjunto de puntos y rectas preexistentes, mediante los axiomas de \mathcal{O} podremos construir nuevas rectas (las definidas como pliegues mediante los axiomas Huzita-Justin) y nuevos puntos (como intersección de rectas \mathcal{O} -construibles) recurrentemente. Esta es la idea que formalizamos mediante la definición de mapa ([definición 3.9](#)); lo particularizaremos para la herramienta origami en esta sección.

Nombre del axioma		Definición	Restricciones de aplicación		Núm. soluciones
Clásico	Descriptivo		Degeneración	Incompatibilidad	
O1 (A, B)	Recta (A, B)	$(A, A)_f, (B, B)_f$	$A = B$	-	1
O2 (A, B)	Mediatriz (A, B)	$(A, B)_f$	$A = B$	-	1
O3 (l, l')	Bisector (l, l')	$(l, l')_f$	$l = l'$	-	1 ó 2
O4 (l, A)	Perpendicular (l, A)	$(l, l)_f, (A, A)_f$	-	-	1
O5 (l, A, B)	Tangencial (l, A, B)	$(l, A)_f, (B, B)_f$	-	$A \in l$	0, 1 ó 2
O6 (l, A, l', B)	TangencialComún (l, A, l', B)	$(l, A)_f, (l', B)_f$	$A = B$ y $l = l'$	$A \in l$ ó $B \in l'$	0, 1, 2 ó 3
O7 (l, A, l')	PerpTangencial (l, A, l')	$(l, A)_f, (l', l')_f$	-	$A \in l$	0 ó 1
-	RectaIntersec (l, l')	$l \cap l'$	$l = l'$	-	0 ó 1

Tabla 4.1: Esquema de los axiomas del origami

Definición 4.3 Diremos que un punto o una recta del plano es *origami-construible*, o *construible por origami*, a partir de U_0 si existe una construcción (del punto o de la recta) a partir de U_0 realizable por \mathcal{O} .

Notemos que las siguientes situaciones no son interesantes:

- Si U_0 tiene un solo elemento; dado que no podríamos aplicar ningún axioma. $(U_0)^{\mathcal{O}} = U_0,$
 $|P^{(\mathcal{O}, U_0)}| \leq 1$
- Si U_0 está formado únicamente por rectas paralelas; en este caso sólo podríamos aplicar el axioma **O3**, obteniendo nuevas rectas paralelas y ningún punto nuevo. $P^{(\mathcal{O}, U_0)} = \emptyset,$
 $|P^{(\mathcal{O}, U_0)}| = 0$
- Si U_0 está formado por rectas concurrentes en un punto (y posiblemente también dicho punto P_\cap); en este caso sólo podríamos aplicar los axiomas **O3** y **O4**, obteniendo nuevas rectas concurrentes en el mismo punto que las anteriores y ningún punto nuevo (distinto al de concurrencia). Se incluye aquí también el caso de estar el conjunto inicial formado únicamente por un punto y una recta que pasa por él. $P^{(\mathcal{O}, U_0)} = \{P_\cap\},$
 $|P^{(\mathcal{O}, U_0)}| = 1$

Evitando estas situaciones especiales podemos garantizar que el mapa (\mathcal{O}, U_0) tendrá infinitos puntos (\mathcal{O}, U_0) -construibles, puesto que en tal caso siempre será posible construir dos puntos distintos⁶.

Los conjuntos iniciales que de forma natural parecen más propicios a ser vinculados con la herramienta origami son:

- a) dos puntos distintos (que podremos identificar con $U_{\mathcal{O}} = \{0, 1\}$),
- b) el cuadrado unidad $U'_{\mathcal{O}} = [\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}, \{X, Y, X-1, Y-1\}]$.

$$U'_{\mathcal{O}} = [\{0, 1, i, 1+i\}, \{X, Y, X-1, Y-1\}]$$

⁶ El argumento se completa con la [proposición 3.26](#) y que a partir de dos puntos distintos \mathcal{O} genera un mapa infinito (como luego veremos).

Puesto que $U_O \subset U'_O$ y U'_O es (O, U_O) -construible⁷, ambas semillas darán lugar a mapas idénticos:

$$(U_O)^O = (U'_O)^O.$$

Por consistencia con la mayoría de definiciones en la literatura y por similitud con los mapas canónicos asociados al resto de herramientas, consideraremos el mapa del origami definido de forma natural a partir de U_O .

Definición 4.4 Llamaremos *mapa canónico del origami* al mapa:

$$\mathcal{O} := (O, \{0, 1\}).$$

A propósito de esta notación, véase la [terminología](#) introducida en el [ejemplo 3.13](#)

A $\mathcal{O} = [\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_C] = \{0, 1\}^O$ lo llamaremos *conjunto de puntos y rectas \mathcal{O} -construibles*; y de cualquier elemento o subconjunto suyo diremos que es *\mathcal{O} -construible* o *construible por origami*. En particular, un número complejo $\alpha \in \mathbb{C}$ se dirá *construible por origami* si $\alpha \in \mathcal{O}_P$.

Dedicaremos la siguiente sección a estudiar la estructura del conjunto de los puntos construibles por origami.

4.3 EL CUERPO \mathcal{O}_P DE LOS NÚMEROS ORIGAMI-CONSTRUIBLES

Nuestra primer objetivo será demostrar que el conjunto de los números complejos origami-construibles es un subcuerpo de \mathbb{C} . Estudiaremos las operaciones de cuerpo (de \mathbb{C}) restringidas a \mathcal{O}_P , introduciendo los procesos de construcción con O correspondientes a cada operación.

Por definición es claro que \mathcal{O}_P es no vacío ($0, 1 \in \mathcal{O}_P$), además (puesto que el cuadrado unidad es origami-construible) el eje real y el imaginario son \mathcal{O} -construibles ($X, Y \in \mathcal{O}_C$) y también lo es la unidad imaginaria: $i \in \mathcal{O}_P$.

En lo que sigue todos los puntos y rectas con los que trabajemos serán \mathcal{O} -construibles.

4.3.1 Construcciones auxiliares

Antes de abordar las operaciones aritméticas vamos a introducir algunas O -construcciones auxiliares.

Definición 4.5 Dados una recta l y un punto P , el procedimiento **Paralela $_O$** permite construir l' la recta paralela a l que pasa por P mediante origami.

$$\mathbf{Paralela}_O(l, P; l') = \{l_1 = \mathbf{Perpendicular}(l, P), \\ l' = \mathbf{Perpendicular}(l_1, P)\}.$$

⁷ En efecto, si nombramos $U'_O = \{P_1, P_2, P_3, P_4, r_1, r_2, r_3, r_4\}$:

$$\begin{aligned} C(U_O; U'_O) = \{ & P_1 = 0, P_2 = 1, r_1 = \mathbf{O1}(0, 1), \\ & r_2 = \mathbf{O4}(r_1, 0), r_3 = \mathbf{O4}(r_1, 1), \\ & l_1, l'_1 = \mathbf{O3}(r_1, r_2), l'_2, l_2 = \mathbf{O3}(r_1, r_3), \\ & P_3 = \mathbf{RectaIntersec}(r_2, l_2), P_4 = \mathbf{RectaIntersec}(r_3, l_1), \\ & r_4 = \mathbf{O1}(P_3, P_4)\}. \end{aligned}$$

Definición 4.6 Dados dos puntos P y Q distintos, el procedimiento **SimetríaCentral** $_O$ permite construir P^S el punto simétrico de P respecto de Q el foco de la simetría central.

$$\begin{aligned} \mathbf{SimetríaCentral}_O(P, Q; P^S) = \{ & l_1 = \mathbf{Recta}(Q, P), \\ & l_2 = \mathbf{Perpendicular}(l_1, Q), \\ & l_3, l'_3 = \mathbf{Bisector}(l_1, l_2), \\ & l_4 = \mathbf{Perpendicular}(l_3, P), \\ & A = \mathbf{RectaIntersec}(l_2, l_4), \\ & l_5 = \mathbf{Perpendicular}(l'_3, A), \\ & P^S = \mathbf{RectaIntersec}(l_1, l_5)\}. \end{aligned}$$

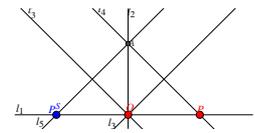


Figura 4.5:
SimetríaCentral $_O$.
Es necesario $P \neq Q$

Definición 4.7 Dados una recta l y un punto P , el procedimiento **Reflexión** $_O$ permite construir P^R el punto simétrico de P respecto de l el eje de la simetría axial.

$$\begin{aligned} \mathbf{Reflexión}_O(P, l; P^R) = \{ & l_1 = \mathbf{Perpendicular}(l, P), \\ & l_2, l'_2 = \mathbf{Bisector}(l, l_1), \\ & l_3 = \mathbf{Perpendicular}(l_1, P), \\ & A_1 = \mathbf{RectaIntersec}(l_2, l_3), \\ & l_4 = \mathbf{Perpendicular}(l_1, A_1), \\ & A_2 = \mathbf{RectaIntersec}(l'_2, l_4), \\ & l_5 = \mathbf{Perpendicular}(l_1, A_2), \\ & P^R = \mathbf{RectaIntersec}(l_1, l_5)\}. \end{aligned}$$

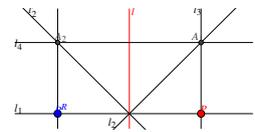


Figura 4.6:
Reflexión $_O$. Es necesario $P \notin l$

Definición 4.8 Dados los ejes real (Y) e imaginario (X) y un punto $P = a + bi$, el procedimiento **Re** $_O$ (resp. **Im** $_O$) permite construir a la parte real (resp. b la parte imaginaria) de P .

$$\begin{aligned} \mathbf{Re}_O(Y, a + bi; a) = \{ & l = \mathbf{Perpendicular}(Y, a + bi), \\ & a = \mathbf{RectaIntersec}(Y, l)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Im}_O(Y, X, a + bi; b) = \{ & l_1 = \mathbf{Perpendicular}(X, a + bi), \\ & bi = \mathbf{RectaIntersec}(X, l_1), \\ & l_2, l'_2 = \mathbf{Bisector}(X, Y), \\ & \mathbf{Reflexión}_O(bi, l_2; b)\}. \end{aligned}$$

Observación: Otra O -construcción alternativa de P^R a partir de $\{l, P\}$ sería $\{l_1 = \mathbf{Perpendicular}(l, P), A = \mathbf{RectaIntersec}(l, l_1), \mathbf{SimetríaCentral}_O(P, A; P^R)\}$. Análogamente, otra O -construcción alternativa de P^S a partir de $\{Q, P\}$ sería $\{l_1 = \mathbf{Recta}(P, Q), l_2 = \mathbf{Perpendicular}(l_1, Q), \mathbf{Reflexión}_O(P, l_2; P^S)\}$

4.3.2 Construcciones de cuerpo

Nos ocuparemos en primer lugar de la suma en \mathcal{C}_P .

Definición 4.9 (Suma) Dados el origen (0) y dos números complejos z y z' distintos y tales que $z \propto z'$ ⁸, el procedimiento **SumaR** $_O$ permite construir

⁸ $z \propto z'$ simboliza que z y z' son múltiplos escalares entre sí; esto es, que están alineados respecto al origen.

El nombre 'SumaR' por 'Suma Real'

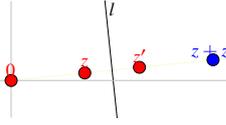


Figura 4.7:
Suma_R_O. Deben ser $z \neq z'$ y colineales con el 0

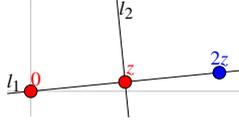


Figura 4.8:
Duplicar_O. Debe ser z no nulo

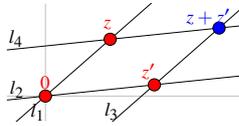


Figura 4.9:
Suma_O. Deben ser z, z' no nulos y no colineales con el 0

$z + z'$ la suma habitual de z y z' como números complejos.

$$\mathbf{SumaR}_O(0, z, z'; z + z') = \{l = \mathbf{Mediatriz}(z, z'), \\ \mathbf{Reflexión}_O(0, l; z + z')\}.$$

En las mismas circunstancias, pero con $z = z' \neq 0$, el procedimiento para la suma es:

$$\mathbf{Duplicar}_O(0, z; 2z) = \{l_1 = \mathbf{Recta}(0, z), \\ l_2 = \mathbf{Perpendicular}(l_1, z) \\ \mathbf{Reflexión}_O(0, l_2; 2z)\}.$$

En el caso general, el procedimiento **Suma_O** permite construir $z + z'$ la suma habitual de z y z' dos números complejos no nulos y no colineales con el 0.

$$\mathbf{Suma}_O(0, z, z'; z + z') = \{l_1 = \mathbf{Recta}(0, z), \\ l_2 = \mathbf{Recta}(0, z') \\ \mathbf{Paralela}_O(l_1, z'; l_3), \\ \mathbf{Paralela}_O(l_2, z; l_4), \\ z + z' = \mathbf{RectaIntersec}(l_3, l_4)\}.$$

Proposición 4.10 (Adición) Dados dos números origami-construibles $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_P$, su suma es origami-construible:

$$\alpha, \beta \in \mathcal{C}_P \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathcal{C}_P.$$

Demostración: Los procedimientos dados en **definición 4.9** construyen la suma habitual de dos números complejos: ■ si z y z' no están alineados con el origen: $z + z'$ es el cuarto vértice del paralelogramo definido a partir de $z, 0$ y z' . ■ si z y z' están alineados con el origen: $z + z'$ es el simétrico ortogonal del 0 respecto de la mediatriz del segmento de extremos z y z' . □

Proposición 4.11 (Elemento opuesto) Dado un número origami-construible $\alpha \in \mathcal{C}_P$, su inverso aditivo es origami-construible:

$$\alpha \in \mathcal{C}_P \Rightarrow -\alpha \in \mathcal{C}_P.$$

Demostración: Basta observar que $-\alpha$ es el simétrico de α respecto del origen: **SimetríaCentral_O**($\alpha, 0; -\alpha$). □

Corolario 4.12 \mathcal{C}_P es un subgrupo abeliano aditivo de los números complejos.

Demostración: Por definición $0 \in \mathcal{C}_P$, y, en virtud de las dos proposiciones anteriores, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_P$ también $\alpha - \beta \in \mathcal{C}_P$. □

A continuación estudiaremos la multiplicación de números origami-construibles. Apreciemos que la multiplicación entre números complejos puede implementarse mediante la suma y dos operaciones más sencillas: el producto por un número real y el producto por la unidad imaginaria.

$$z, w \in \mathbb{C}, \\ z_1 = \text{Re}(z) \in \mathbb{R}, \\ z_2 = \text{Im}(z) \in \mathbb{R}$$

$$z \cdot w = (z_1 + z_2i) \cdot w = z_1 \cdot w + (z_2 \cdot w)i \tag{4.1}$$

Definición 4.13 (Producto) Dados el origen (0) y un número complejo z (no nulo), el procedimiento **iProducto** $_O$ permite construir zi el producto de z por la unidad imaginaria.

$$\begin{aligned} \mathbf{iProducto}_O(0, z; zi) = \{ & l_1 = \mathbf{Recta}(0, z), \\ & l_2 = \mathbf{Perpendicular}(l_1, 0), \\ & l_3, l'_3 = \mathbf{Bisector}(l_1, l_2), \\ & \mathbf{Reflexión}_O(z, l_3; zi)\}. \end{aligned}$$

Dados $0, 1, z \in \mathbb{C}$ y $m \in Rset$, con $z \notin \mathbb{R}$, el procedimiento **ProductoCR** $_O$ permite construir mz .

$$\begin{aligned} \mathbf{ProductoCR}_O(0, 1, z, m; mz) = \{ & l_1 = \mathbf{Recta}(1, z), \\ & \mathbf{Paralela}_O(l_1, m; l_2) \\ & l_3 = \mathbf{Recta}(0, z), \\ & mz = \mathbf{RectaIntersec}(l_2, l_3)\}. \end{aligned}$$

Este último procedimiento no es aplicable si $z \in \mathbb{R}$; en ese caso, el procedimiento **ProductoRR** $_O$ construye mz el producto de dos números reales a partir de $0, 1, i, Y$ y $z, m \in \mathbb{R}$ (con $z \neq 0$).

$$\begin{aligned} \mathbf{ProductoRR}_O(0, 1, i, Y, z, m; mz) = \{ & \mathbf{Suma}_O(0, i, z; z + i), \\ & \mathbf{ProductoCR}_O(0, 1, z + i, m; m(z + i)), \\ & \mathbf{Re}_O(Y, m(z + i); mz)\}. \end{aligned}$$

Lema 4.14 Si $\alpha \in \mathcal{O}_P$ es un número origami-construible, entonces también αi es origami-construible. Si además $m \in \mathcal{O}_P \cap \mathbb{R}$ es un número real origami-construible, $m\alpha$ es también origami-construible.

Demostración: Los procedimientos dados en [definición 4.13](#) permiten realizar estas operaciones:

- Multiplicar un número por i es equivalente a aplicarle un giro de 90° en sentido antihorario. **iProducto** $_O$ define αi como el punto de l_2 obtenido al reflejar α a través del pliegue que biseca a $\angle(l_1, l_2)$.
- Multiplicar un número por un escalar m es incrementar su módulo en proporción $m:1$. Para ello nos servimos de la propiedad de proporcionalidad entre los lados de triángulos semejantes: **ProductoCR** $_O$ define $m\alpha$ como el punto de l_3 tal que el triángulo $\Delta(0, 1, \alpha)$ es semejante con $\Delta(0, m, m\alpha)$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ no podemos hacer uso de esta construcción, dado que los triángulos degeneran en una línea; podemos solventar tal caso con **ProductoRR** $_O$: realizando la anterior construcción con el punto auxiliar $\alpha + i$, y luego proyectando sobre el eje real para obtener $Re(m(\alpha + i)) = Re(m\alpha + mi) = m\alpha$.

En las situaciones $z = 0$ y $z = 1$ los procedimientos anteriores pueden no ser aplicables; mas en estos casos no será necesaria su aplicación, puesto que la solución será origami-construible de forma trivial. \square

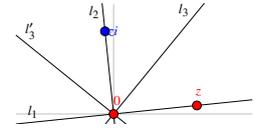


Figura 4.10:
iProducto $_O$. Es necesario $z \neq 0$

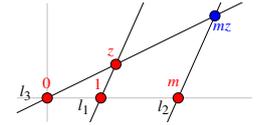


Figura 4.11:
ProductoCR $_O$. Es necesario $z \neq 0$ y $z \neq 1$

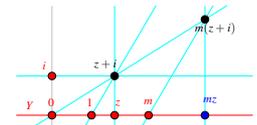


Figura 4.12:
ProductoRR $_O$. Es necesario $z \neq 0$

Proposición 4.15 (Producto) Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_P$ dos números complejos origami-construibles, su producto es origami-construible:

$$\alpha, \beta \in \mathcal{C}_P \Rightarrow \alpha\beta \in \mathcal{C}_P.$$

Demostración: Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_P$.

Sirviéndonos de las construcciones **Re**_O y **Im**_O tenemos que $Re(\alpha) \in \mathcal{C}_P$ e $Im(\alpha) \in \mathcal{C}_P$.

Puesto que $Re(\alpha), Im(\alpha) \in \mathbb{R}$, en virtud del lema 4.14, $Re(\alpha) \cdot \beta \in \mathcal{C}_P$, $Im(\alpha) \cdot \beta \in \mathcal{C}_P$, y también $(Im(\alpha) \cdot \beta)i \in \mathcal{C}_P$.

La prueba se completa a partir de la descomposición del producto de complejos dada en la ecuación 4.1, dado que la suma de origami-construibles es origami-construible (proposición 4.10). \square

Proposición 4.16 (Elemento inverso) Dado un número origami-construible $\alpha \in \mathcal{C}_P$ no nulo, su inverso multiplicativo es origami-construible:

$$\alpha \in \mathcal{C}_P \setminus \{0\} \Rightarrow \alpha^{-1} \in \mathcal{C}_P.$$

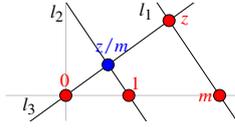


Figura 4.13: **división**_{CR_O}. Es necesario $z \neq 0$ y $z \neq m$

Demostración: Podemos adaptar el procedimiento **Producto**_{CR_O} de multiplicación por un escalar para invertir la proporción aplicada, esto es, para construir z/m ; basta con intercambiar los papeles de 1 y m en las definiciones de l_1 y l_2 . Así tenemos (advirtiendo que el caso $\alpha \in \mathbb{R}$ se solventa como para el producto):

$$\alpha \in \mathcal{C}_P, m \in \mathcal{C}_P \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \alpha/m \in \mathcal{C}_P$$

Por tanto, dado $\alpha \in \mathcal{C}_P \setminus \{0\}$, basta observar que $\bar{\alpha}$ y $|\alpha|^2$ son origami-construibles (por ser suma de origami-construibles), y que $|\alpha|^2 \in \mathbb{R}$ para concluir:

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\alpha} &= |\alpha|^2, \text{ y como} \\ \alpha \neq 0 \text{ (luego } |\alpha| \neq 0), \\ \text{es } \alpha \cdot \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} &= 1, \text{ es decir:} \\ \alpha^{-1} &= \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} \end{aligned}$$

$$\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} = \frac{Re(\alpha) - Im(\alpha)i}{Re(\alpha)^2 + Im(\alpha)^2} \in \mathcal{C}_P. \quad \square$$

Observación: Pueden proporcionarse procedimientos de construcción directos tanto para el producto de origami-construibles como para la construcción del inverso. Así se hace, por ejemplo, en [Lor08].

Teorema 4.17 El conjunto \mathcal{C}_P de los números origami-construibles es un subcuerpo de \mathbb{C} . Además:

- Con $a, b \in \mathbb{R}$
- a) Dado $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, se tiene que $\alpha \in \mathcal{C}_P$ si, y sólo si, $a, b \in \mathcal{C}_P$.
 - b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{C}_P$.

Demostración: En primer lugar, es inmediato de la exposición anterior que \mathcal{C}_P es un subcuerpo de \mathbb{C} . En efecto, por definición $0, 1 \in \mathcal{C}_P$, y, en virtud del corolario 4.12 y de las proposiciones 4.15 y 4.16, tenemos: para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_P$ tenemos que también $\alpha - \beta$ y α/β pertenecen a \mathcal{C}_P .

El apartado a) es evidente teniendo en cuenta que las partes real e imaginaria de cualquier número origami-construible es origami-construible, que $i \in \mathcal{O}_p$ y que \mathcal{O}_p es cerrado por sumas y productos.

Queda probar la parte b). Es claro que todos los números naturales son \mathcal{O} -construibles (por inducción: dado que $1 \in \mathcal{O}_p$, y si $n \in \mathcal{O}_p$ también $n + 1 \in \mathcal{O}_p$ por ser suma de origami-construibles). También que $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}_p$ (pues $0 \in \mathcal{O}_p$ por definición, y si $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, tenemos $-n \in \mathbb{N} \subset \mathcal{O}_p$ y consecuentemente $n = -(-n) \in \mathcal{O}_p$ (por ser el opuesto aditivo de un origami-construible). Finalmente, dado $p \in \mathbb{Q}$, existen $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, tales que $p = a/b$; como $a, b \in \mathbb{Z} \subset \mathcal{O}_p$, también $1/b \in \mathcal{O}_p$ (por ser el inverso de un origami-construible), y por tanto $p \in \mathcal{O}_p$ (por ser producto de origami-construibles), de donde se concluye $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{O}_p$. \square

$$\mathbb{Z}_{<0} = \{n \in \mathbb{Z} / n < 0\}$$

4.3.3 Otras construcciones algebraicas

Terminaremos esta sección analizando la origami-constructibilidad de las raíces cuadradas y cúbicas de números \mathcal{O} -constructibles.

Lema 4.18 Si $r \in \mathcal{O}_p \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$ es un número real positivo origami-construible, entonces $\sqrt{r} \in \mathcal{O}_p$.

Demostración: Vamos a dar una \mathcal{O} -construcción de \sqrt{r} ; nos basaremos en las mismas propiedades⁹ que permiten construir la raíz cuadrada de una distancia dada mediante regla y compás (cfr. [Mar98, pág. 259]).

Sea $r \in \mathcal{O}_p \cap \mathbb{R}_{>0}$. Es claro que ri y $-i$ son origami-construibles, y consecuentemente también lo es su punto medio: $M = (r-1)i/2 \in \mathcal{O}_p$. Si considerásemos la circunferencia de centro M y radio $r+1/2$ (i.e., tal que pasa por $-i$ y por ri), mediante su intersección con el eje real Y quedarían determinados¹⁰ los puntos $-\sqrt{r}$ y \sqrt{r} como queremos. Por supuesto, aquí no necesitamos construir toda la circunferencia, sólo su intersección con el eje real positivo.

En el caso $r = 0$ no hay nada que construir

Ejecutando **O5**($Y, -i, M$) (esto es, plegando de forma que el pliegue pase por M y $-i$ quede superpuesto sobre el eje real) es claro que $-i$ y su imagen vía plegado están a la misma distancia de M , es decir, el punto de Y sobre el que $-i$ se superpone es el punto de intersección que buscábamos. Concluimos así que $\sqrt{r} \in \mathcal{O}_p$ (dado que es origami-construible como el reflejo de $-i$ a través del pliegue definido en el paso anterior).

Nótese que **O5** puede ejecutarse de dos formas: hacia el lado positivo o hacia el lado negativo del eje real; dando lugar, respectivamente, a \sqrt{r} y a $-\sqrt{r}$

⁹ Dados dos segmentos de longitudes 1 y r , consideremos la circunferencia de centro $(r + 1)/2$ que pasa por 0 (y $r + 1$), y el punto de intersección P de ésta con la recta $X - 1$. El triángulo $\Delta(0, P, r + 1)$ es rectángulo ([JDD63]), luego los dos triángulos menores $\Delta(0, 1, P)$ y $\Delta(P, 1, r + 1)$ son semejantes. Consecuentemente, si d es la longitud del lado $\overline{1, P}$:

$$\frac{1}{d} = \frac{d}{r}$$

Esto es: $d^2 = r$, y por tanto $d = \sqrt{r}$.

¹⁰ En efecto: si $C(M, R) \equiv \left\{ (X-0)^2 + (Y - \frac{r-1}{2})^2 = (\frac{r+1}{2})^2 \right\}$ es la circunferencia de centro $M = \frac{(r-1)i}{2}$ y radio $R = \frac{(r+1)}{2}$, evaluando en $Y = 0$ y reordenando tenemos:

$$X^2 = \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{r-1}{2}\right)^2 = \frac{r^2 + 2r + 1}{4} - \frac{r^2 - 2r + 1}{4} = r \Rightarrow X = \pm \sqrt{r}.$$

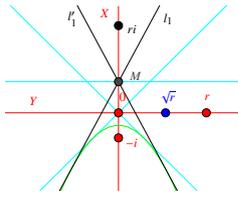


Figura 4.14:
RRaízCuadrada_O,
siendo $r > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{RRaízCuadrada}_O(0, -i, X, Y, r; \sqrt{r}) &= \{\mathbf{iProducto}_O(0, r; ri), \\ M &= \mathbf{RectaIntersec}(X, \mathbf{Mediatriz}(ri, -i)), \\ l'_1, l_1 &= \mathbf{Tangencial}(Y, -i, M), \\ \mathbf{Reflexión}_O(-i, l_1; \sqrt{r}) \} \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 4.19 Dado un número origami-construible $\alpha \in \mathcal{C}_P$, sus raíces cuadradas son origami-construibles.

$$\alpha \in \mathcal{C}_P \Rightarrow \sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}_P$$

Demostración: Basta ver que $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}_P$. Mediante la expresión en forma polar de un número complejo puede reducirse este problema al caso real y biseccionar un ángulo.

Sea $\alpha \in \mathcal{C}_P \setminus \{0\}$. Entonces $|\alpha| \neq 0$ y existe¹¹ $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. De esta manera, tenemos:

$$\sqrt{\alpha} = (\alpha)^{1/2} = (|\alpha|e^{i\theta})^{1/2} = |\alpha|^{1/2}e^{i\theta/2}.$$

Se concluye que $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}_P$ dado que es producto de origami-construibles:

- $|\alpha|^{1/2} \in \mathcal{C}_P$ en virtud del lema anterior, dado que $|\alpha| \in \mathcal{C}_P \cap \mathbb{R}_{>0}$.
- $e^{i\theta/2} \in \mathcal{C}_P$ pues el argumento θ queda definido construyendo la recta $0, \alpha$ (como el ángulo que forma dicha recta con el eje Y) y biseccionarlo es una operación elemental en origami.

Si $\theta = 0$: no podemos biseccionar θ , ni es necesario

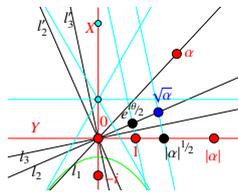


Figura 4.15:
RaízCuadrada_O,
siendo $\alpha \notin \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{RaízCuadrada}_O(0, 1, -i, X, Y, \alpha; \sqrt{\alpha}) &= \{l_1 = \mathbf{Recta}(0, \alpha), \\ l_2, l'_2 &= \mathbf{Bisector}(Y, l_1), \\ \mathbf{Reflexión}_O(\alpha, l_2; |\alpha|), \\ l_3, l'_3 &= \mathbf{Bisector}(Y, l_2), \\ \mathbf{Reflexión}_O(1, l_3; e^{i\theta/2}), \\ \mathbf{RRaízCuadrada}_O(0, -i, X, Y, |\alpha|; |\alpha|^{1/2}), \\ \mathbf{ProductoCR}_O(0, 1, e^{i\theta/2}, |\alpha|^{1/2}; \sqrt{\alpha}) \} \end{aligned}$$

En el caso $\alpha \in \mathbb{R}_{<0}$ (i.e., $\theta = \pi$), no es aplicable el axioma **Bisector** entre l_1 e Y (son coincidentes), en su lugar la construcción de la recta bisectriz de θ es $l_2 = \mathbf{Perpendicular}(Y, 0)$. □

Afrontaremos la construcción de raíces cúbicas con esta misma estrategia: mediante la trisección del ángulo y la construcción de la raíz cúbica real de números reales positivos.

Proposición 4.20 (Trisección de Abe) Dados $P, Q, R \in \mathcal{C}_P$ tres números origami-construibles distintos, si el ángulo $\theta = \angle(P, Q, R)$ es agudo (o recto), entonces podemos O -construir una recta f que pase por Q y sea tal que $\angle(\overline{QP}, f) = \theta/3$.

$\angle(A, B, C) = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ el ángulo formado entre \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BC} , yendo del primero al segundo en sentido antihorario

¹¹ La elección de este dominio se excusa en que el valor “positivo” de la raíz quedará emplazado sobre la semirecta bisectriz “interior” al ángulo.

Demostración: Sean $P, Q, R \in \mathcal{O}_P$ tales que $\theta = \angle(P, Q, R) \in (0, \pi/2)$. Vamos a construir f como en el enunciado mediante el método de trisección de Abe¹²:

$$\begin{aligned} \mathbf{AbeTrisec}_O(P, Q, R; f) &= \{l_x = \mathbf{Recta}(Q, P), l_z = \mathbf{Recta}(Q, R), \\ & l_1 = \mathbf{Perpendicular}(l_x, Q), \\ & \mathbf{Paralela}_O(l_x, R; l_2), \\ & A = \mathbf{RectaIntersec}(l_1, l_2), \\ & l_3 = \mathbf{Mediatriz}(Q, A), \\ & l_4, l'_4, l''_4 = \mathbf{TangencialComún}(l_z, A, l_3, Q), \\ & f = \mathbf{Perpendicular}(l'_4, B)\}. \end{aligned}$$

Donde $l'_4 \in \{l_4, l'_4, l''_4\}$ es la única tangente tal que su perpendicular por Q atraviesa tanto a $\angle(P, Q, R)$ como a $\angle(R, Q, P)$ su complementario.

Queda por justificar que en esta construcción f realmente triseca a $\theta = \angle(P, Q, R)$; lo haremos de forma geométrica¹³. Consideremos los puntos Q, A y el pliegue l'_4 . Sea M el punto medio de A y Q , y sean A', M' y Q' sus respectivas imágenes a través de la simetría axial de eje l'_4 (ver figura 4.17).

Por construcción, $M, Q' \in l_3$ y $l_3 \perp \overline{QA}$, luego (dado que M está a igual distancia de Q y A) tenemos que $\triangle(Q, Q', A)$ es isósceles ($d(Q, Q') = d(A, Q')$). Por simetría respecto a l'_4 también tenemos que M' es el punto medio de A' y Q' y que $\triangle(Q', Q, A')$ es también isósceles ($d(Q', Q) = d(A', Q)$).

De esto último se deduce que $\angle(Q', Q, M') = \angle(M', Q, A')$, digamos igual a α , y así $\angle(Q', Q, A') = 2\alpha$.

También por ser $\triangle(Q', Q, A')$ isósceles es claro que $\angle(A', Q', Q) = \angle(Q, A', Q')$, y por tanto:

$$\begin{aligned} \pi &= \angle(Q', Q, A') + \angle(A', Q', Q) + \angle(Q, A', Q') = 2\alpha + 2\angle(A', Q', Q) \\ \Rightarrow \angle(A', Q', Q) &= \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha. \end{aligned}$$

Considerando, por último, la recta l_a que une Q' con el punto de intersección entre \overline{QP} y l'_4 ; tenemos que $l_a \perp \overline{A'Q'}$ (por simetría respecto a l'_4), de donde se deduce:

$$\angle(\overline{QQ'}, l_a) = \angle(\overline{A'Q'}, l_a) - \angle(A', Q', Q) = \pi/2 - (\pi/2 - \alpha) = \alpha.$$

De nuevo por simetría respecto a l'_4 , tenemos que $\angle(\overline{QP}, \overline{QQ'}) = \alpha$; luego, como queríamos, $\theta = \angle(Q', Q, A') + \angle(\overline{QP}, \overline{QQ'}) = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, o equivalentemente: $\angle(\overline{QP}, f) = \alpha = \theta/3$.

Falta por contemplar el caso $\theta = \pi/2$; es fácil ver que la construcción sigue teniendo validez en este caso simplemente con reemplazar **O6** por **O5** para construir de l'_4 . \square

Observaciones:

1. Notemos que es la primera vez que hemos hecho uso del axioma **O6** en una construcción. Hasta ahora todas nuestras construcciones habían

12 Descubierta por Hisashi Abe durante los 70s ([Abe80; Hus80]). Es el método más frecuentemente descrito; puede consultarse, por ejemplo, en [Hul96; Hul13; Fuc11; DO07].

13 Esto es lo más común en la literatura. También puede probarse también el buen comportamiento de la construcción de forma aritmética (véase [Fuc11]), haciendo uso de los puntos $\{Q, P, R\}$ como sistema de referencia. La estrategia de resolución en ese caso se basa en el método de las bases de Gröbner. Esta es una herramienta recurrente en origami computacional (e.g., es destacable el trabajo de Tetsuo Ida con Buchberger [IB03; IK+11]).

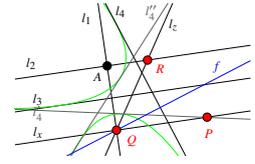


Figura 4.16: $\mathbf{AbeTrisec}_O$, siendo $\theta \in (0, \pi/2)$.

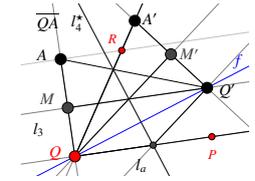


Figura 4.17: Trisección de Abe

sido equivalentemente \mathcal{RC} -construibles, sin embargo no es posible trisecar un ángulo genérico con regla y compás ([Wan37]). Es en este axioma donde reside el mayor potencial de la herramienta \mathcal{O} ¹⁴.

2. Otros métodos de trisección mediante origami¹⁵ son el descrito por Martin en [Mar98, lema 10.12], el método de Justin para ángulos obtusos ([Jus86; Bri84]), el de Huzita (cfr. [DO07]) o el de Geretschläger (cfr. [Lan15]). Todos ellos tienen en común la utilización del axioma $\mathbf{O6} = \mathbf{TangencialComún}$ en alguna etapa.

Estamos llamando aquí ángulo \mathcal{O} -construible a cualquier ángulo definido mediante puntos \mathcal{O} -construibles

Corolario 4.21 Podemos trisecar cualquier ángulo \mathcal{O} -construible.

Demostración: Ya hemos visto mediante el lema anterior que podemos trisecar cualquier ángulo $\theta \in (0, \pi/2]$ \mathcal{O} -construible. Para ángulos obtusos $\theta \in (\pi/2, \pi]$ la trisección puede realizarse en dos pasos: operando sobre $\pi/2$ y sobre el ángulo agudo $\theta_1 = \theta - \pi/2$.

En efecto, es claro que ambos son \mathcal{O} -construibles: $\pi/2 = \angle(1, 0, i)$; y si $\theta = \angle(P, Q, R)$, podemos obtener $\theta - \pi/2$ mediante l_{aux} la perpendicular a $\overline{Q, P}$ en Q . Así, construyendo un punto $P_{aux} \in l_{aux}$ podemos trisecar $\angle(P_{aux}, Q, R)$ mediante el método de Abe. Finalmente, la trisección de θ se obtiene multiplicando por $e^{\pi i/6}$.

$e^{\pi i/6}$ es \mathcal{O} -construible como el reflejo de 1 sobre la trisección de $\angle(1, 0, i)$

Terminamos por observar que los ángulos cóncavos $\theta \in (\pi, 2\pi)$ pueden trisecarse operando sobre su complementario, y que el giro completo $\theta = 2\pi$ queda trisecado con la “segunda” trisección del ángulo llano. \square

El siguiente paso será proporcionar un procedimiento de construcción apropiado para generar la raíz cúbica real y justificar su validez. En dicha justificación necesitaremos el siguiente lema auxiliar.

Lema 4.22 En el plano cartesiano, denotemos $P^R = (x', y')$ al punto simétrico de $P = (x, y)$ respecto de l el eje de simetría axial de ecuación $aX + bY + c = 0$. Si $(x, y) \in l$ es claro que $(x', y') = (x, y)$; en caso contrario las coordenadas de (x', y') son:

$$x' = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}, \quad \text{e} \quad y' = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2}.$$

Demostración: Con la notación del enunciado, sea $P \notin l$. Por definición de simetría axial la recta que une P y P^R es perpendicular al eje de simetría, y ambos puntos están a igual distancia de este; es decir:

(Ver [definición 3.21](#))

14 Nos referimos aquí, por supuesto, a mayor potencia operativa respecto a la regla y compás, la herramienta clásica en las construcciones euclídeas. Explícitamente: $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{RC}$, la herramienta origami genera virtualmente a la regla y compás (cfr. [Tra12; Ger95]); pero no son virtualmente equivalentes (dado que no podemos trisecar mediante \mathcal{RC} : $e^{i\theta/3}$ no es \mathcal{RC} -construible sino \mathcal{O} -construible).

15 Si permitimos realizar dos pliegues simultáneos (i.e., 2P-origami, ver [capítulo 6](#)), trisecar un ángulo es una operación elemental, es decir, hay un procedimiento directo (al igual que ocurre aquí con la bisección). Cfr. [ejemplo 6.20](#) y [AL09].

- $\overline{P, P^R} \perp l$; lo que se traduce en:

$$a(y' - y) = b(x' - x),$$

- el punto medio de P y P^R está en el eje de simetría: $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}) \in l$; luego verifica la ecuación de l :

$$a\left(\frac{x+x'}{2}\right) + b\left(\frac{y+y'}{2}\right) + c = 0.$$

Obtenemos así un sistema lineal de dos ecuaciones en las indeterminadas x' e y' , que tras simplificar podemos reescribir como:

$$\begin{cases} bx' - ay' = bx - ay & [1] \\ ax' + by' = -ax - by - 2c & [2] \end{cases}$$

Despejaremos x' por reducción:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)x' &= -a^2x - aby - 2ac + b^2x - bay = (b^2 - a^2)x - 2a(by + c) \\ &= (b^2 + a^2 - a^2 - a^2)x - 2a(by + c) \\ &= (a^2 + b^2)x - 2a(ax + by + c) \\ \Rightarrow x' &= x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Análogamente se procede para y' , mutatis mutandis. □

Estamos ya en condiciones de probar el siguiente resultado, abordando el problema de las raíces cúbicas con el que cerraremos esta sección.

Lema 4.23 Si $r \in \mathcal{O}_P \cap \mathbb{R}$ es un número real origami-construible, entonces $\sqrt[3]{r} \in \mathcal{O}_P$.

Demostración: Sea $r \in \mathcal{O}_P \cap \mathbb{R}_{\neq 0}$, y consideremos la siguiente construcción:

$$\begin{aligned} \mathbf{RRaízCúbica}_O(0, i, X, Y, r; \sqrt[3]{r}) &= \{\mathbf{SimetríaCentral}_O(i, 0; -i), \\ &\quad \mathbf{SimetríaCentral}_O(r, 0; -r), \\ l_1 &= \mathbf{Perpendicular}(X, -i), \\ l_2 &= \mathbf{Perpendicular}(Y, r), \\ l_3 &= \mathbf{TangencialComún}(l_1, i, l_2, -r), \\ \sqrt[3]{r} &= \mathbf{RectaIntersec}(Y, l_3)\}. \end{aligned}$$

Nos ocupa comprobar, por tanto, que la intersección de l_3 con el eje horizontal es $\sqrt[3]{r}$; para ello vamos a caracterizar l_3 en función de $i, -r, l_1$ y l_2 . Pongamos que¹⁶ $mX - Y + n \in \mathbb{R}[X, Y]$ determina la recta l_3 , y denotemos i^R y $(-r)^R$ a las imágenes reflejas a través de l_3 de i y $-r$ respectivamente. Por comodidad en esta exposición identificaremos los puntos mediante notación cartesiana.

Las dos condiciones que definen la generación de l_3 son:

¹⁶ Podemos asegurar que, si existe l_3 , entonces queda definido por una ecuación de la forma $Y = mX + n$, i.e., que el coeficiente de Y es no nulo. En caso contrario la imagen de i por l_3 forzosamente pertenecería a $Y - 1$, y esta recta no tienen ningún punto en común con $l_1 \equiv Y + 1$, es decir, no puede superponer i^R con l_1 (en contra de la definición de l_3).

Sus pendientes son inversas: $\frac{a}{b} = (\frac{x'-x}{y'-y})^{-1}$ (cuando los cocientes tengan sentido)

[1]
[2]

$$a[1] + b[2]$$

$$b[1] - a[2]$$

En el caso $r = 0$ no hay nada que construir

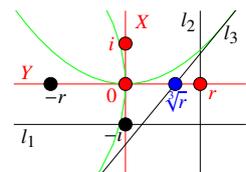


Figura 4.18:
RRaízCúbica_O,
siendo $r \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

- $(0, 1)^R \equiv i^R \in l_1$. Por construcción $l_1 \equiv Y + 1$, implicando que $i^R = a - i \equiv (a, -1)$ para algún $a \in \mathbb{R}$. En virtud del [lema 4.22](#), tenemos:

$$\begin{aligned} -1 &= 1 - \frac{2(-1)(0 + (-1) + n)}{m^2 + (-1)^2} = 1 + \frac{2(n-1)}{m^2 + 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2(m^2 + 1) = 2(n-1) \Rightarrow n = -m^2. \end{aligned}$$

- $(-r, 0)^R \equiv (-r)^R \in l_2$. Por construcción $l_2 \equiv X + 1$, de donde $(-r)^R = r + bi \equiv (r, b)$ para algún $b \in \mathbb{R}$. De nuevo, haciendo uso al lema precedente, esta condición se traduce en:

$$r = -r - \frac{2m(m(-r) + 0 + n)}{m^2 + (-1)^2} \Rightarrow 2r = \frac{2(m^2 - mn)}{m^2 + 1}.$$

Sustituyendo la primera igualdad en la segunda ecuación la resolución del sistema es inmediata:

$$r = \frac{rm^2 - m(-m^2)}{m^2 - 1} \Rightarrow rm^2 + r = rm^2 + m^3 \Rightarrow m = r^{1/3},$$

y con esto $n = -r^{2/3}$.

Queda así determinado l_3 como $r^{1/3}X - Y + (-r^{2/3})$; advirtamos que acabamos de demostrar la existencia de solución en **TangencialComún**($l_1, i, l_2, -r$) y que, de hecho, la solución es una única recta (l_3).

Con todo, tenemos que la intersección de l_3 con el eje horizontal es $\sqrt[3]{r}$, como queríamos:

$$\left. \begin{aligned} r^{1/3}X - Y - r^{2/3} &= 0 \\ Y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} X &= r^{1/3} \\ Y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (r^{1/3}, 0) \equiv r^{1/3}. \quad \square$$

Implícitamente en la construcción ya se adelantaba esta unicidad en la solución de **O6** (debida a la especial disposición espacial de las parábolas $\mathcal{P}(l_1, i)$ y $\mathcal{P}(l_2, -r)$ implicadas: tienen directrices perpendiculares y el vértice en común), queda ahora justificada esa escritura

Proposición 4.24 Dado un número origami-construible $\alpha \in \mathcal{O}_p$, sus raíces cúbicas son origami-construibles.

$$\alpha \in \mathcal{O}_p \Rightarrow \sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[3]{\alpha} \xi_3, \sqrt[3]{\alpha} \xi_3^2 \in \mathcal{O}_p$$

ξ_3 denota una raíz cúbica primitiva de la unidad

Demostración: Puesto que $e^{2\pi i/3} \in \mathcal{O}_p$, nos basta con probar $\sqrt[3]{\alpha} \in \mathcal{O}_p$. La demostración será análoga al caso cuadrático, aprovechándonos, como entonces, de la escritura en forma polar de un número complejo.

Sea $\alpha \in \mathcal{O}_p \setminus \{0\}$. Entonces $|\alpha| \neq 0$ y existe $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. De esta manera, tenemos: $\sqrt[3]{\alpha} = |\alpha|^{1/3}e^{i\theta/3}$, y podemos concluir que $\sqrt[3]{\alpha} \in \mathcal{O}_p$ por ser producto de origami-construibles:

- $|\alpha|^{1/3} \in \mathcal{O}_p$, dado que $|\alpha| \in \mathcal{O}_p \cap \mathbb{R}_{>0}$, en virtud del [lema 4.23](#).
- $e^{i\theta/3} \in \mathcal{O}_p$ puesto que podemos trisecar θ mediante $\angle(1, 0, \alpha)$ o $\angle(\alpha, 0, 1)$ según corresponda, y obtener tal punto como el reflejo de la unidad sobre esta trisección.

$$\begin{aligned} \mathbf{RaízCúbica}_{\mathcal{O}}(0, 1, i, X, Y, \alpha; \sqrt[3]{\alpha}) &= \{l_1 = \mathbf{Recta}(0, \alpha), \\ l_2, l'_2 &= \mathbf{Bisector}(Y, l_1), \mathbf{Reflexión}_{\mathcal{O}}(\alpha, l_2; |\alpha|), \\ \mathbf{RRaízCúbica}_{\mathcal{O}}(0, i, X, Y, |\alpha|; |\alpha|^{1/3}), \\ \mathbf{AbeTrisec}_{\mathcal{O}}^*(1, 0, \alpha; f), \\ l_3, l'_3 &= \mathbf{Bisector}(Y, f), \mathbf{Reflexión}_{\mathcal{O}}(1, l_3; e^{i\theta/3}), \\ \mathbf{ProductoCR}_{\mathcal{O}}(0, 1, e^{i\theta/3}, |\alpha|^{1/3}; \sqrt[3]{\alpha}) \} \end{aligned}$$

$\theta \in (0, \pi)$.
El caso $\theta \in (-\pi, 0)$ es idéntico, aplicando la trisección sobre $(\alpha, 0, 1)$

□

Concluimos aquí esta sección, estando en disposición de añadir al [teorema 4.17](#) un tercer apartado:

Teorema 4.25 El cuerpo $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ de los números complejos origami-construibles es estable por raíces cuadradas y cúbicas, es decir, verifica:

c) Si $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$, entonces también $\sqrt{\alpha}, \sqrt[3]{\alpha} \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$.

Entiéndase aquí la notación de raíz en sentido amplio

4.4 CARACTERIZACIÓN DEL CONJUNTO DE NÚMEROS \mathcal{O} -CONSTRUIBLES

Históricamente se ha enfocado el estudio de la constructibilidad con una determinada herramienta al de resolver ecuaciones algebraicas mediante ella, y como consecuencia garantizar que ciertos números algebraicos (las raíces de esas ecuaciones) sean construibles. Aquí procederemos en sentido contrario, caracterizando en primer lugar de forma precisa qué números son origami-construibles.

4.4.1 Caracterización mediante torres de cuerpos

El principal resultado sobre la caracterización de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ el conjunto de los números \mathcal{O} -construibles es su caracterización mediante torres de cuerpos.

Teorema 4.26 (Teorema principal del origami) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. El número complejo α es \mathcal{O} -construible si, y sólo si, existe una torre de cuerpos

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

verificando que $\alpha \in F_n$ y que $[F_j : F_{j-1}] \in \{2, 3\}$, para cada j .

$1 \leq j \leq n$

Intuitivamente, el [teorema 4.26](#) resulta de añadir la capacidad de resolver ecuaciones cúbicas a la caracterización análoga para regla y compás. El esquema de demostración será el mismo que en dicho caso; es más, tanto en [\[Cox12\]](#) como en [\[Lor08\]](#) se reutiliza esa demostración¹⁷. Nuestra demostra-

Véanse el [ejemplo 3.13](#) y [\[Cox12, teo. 10.1.6\]](#)

¹⁷ No hacen uso directo del conjunto de axiomas Huzita-Justin, en su lugar utilizan un sistema de axiomas alternativo; concretamente, se apoyan en la siguiente equivalencia virtual entre el origami y una extensión de la regla y compás:

$$\mathcal{O} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{RCO} = \langle \{\mathbf{Recta}, \mathbf{CircunRadio}, \mathbf{O6}\}, \{\mathbf{RectaIntersec}, \mathbf{CircIntersec}, \mathbf{RectaCircIntersec}\} \rangle.$$

De hecho, esta axiomatización es la utilizada en [\[Cox12\]](#) como definición de origami

ción sí hará uso directo de los axiomas Huzita-Justin. Que tengamos constancia, es la primera vez que se realiza de esta manera. Por comodidad, antes de abordarla introduciremos la siguiente definición.

Definición 4.27 De una secuencia de subcuerpos $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n$ diremos que forman una *2,3-torre de cuerpos* si cada una de las extensiones intermedias $F_{j-1} \subset F_j$ es una extensión o de grado 2 o de grado 3; es decir, si $[F_j : F_{j-1}] \in \{2, 3\}$ para cada $1 \leq j \leq n$.

Demostración: (del [teorema 4.26](#))



Sea $\alpha \in \mathbb{C}$; supongamos en primer lugar que existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ tal que $\alpha \in F_n$ y veamos que $\alpha \in \mathcal{C}_P$. Vamos a probar que $F_n \subset \mathcal{C}_P$ por inducción finita sobre j el índice de cada subcuerpo de la 2,3-torre.

El caso $j = 0$ es obvio ($\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}_P$ es la segunda parte del [teorema 4.17](#)), supongamos que $F_{j-1} \subset \mathcal{C}_P$ y veamos que entonces también $F_j \subset \mathcal{C}_P$. Dado un elemento $\beta \in F_j$, puesto que la extensión $F_{j-1} \subset F_j$ es finita ($[F_j : F_{j-1}]$ es 2 ó 3), β es algebraico sobre F_{j-1} . Sea $m_\beta \in F_{j-1}[X]$ el polinomio mínimo de β en F_{j-1} . Tenemos que $\deg(m_\beta)$ divide a $[F_j : F_{j-1}]$ ([lema 2.14](#)).

([Lema 2.11](#))

Si $\deg(m_\beta) = 1$ entonces $\beta \in \mathcal{C}_P$ de forma directa (es $\beta \in F_{j-1} \subset \mathcal{C}_P$); en otro caso, debe ser $\deg(m_\beta) = [F_j : F_{j-1}] \in \{2, 3\}$. Dado que las ecuaciones cuadráticas y cúbicas son resolubles por radicales ([corolario 2.63](#)) podemos expresar β en función de los coeficientes de m_β como una combinación de sumas, productos y raíces cuadradas y cúbicas anidadas, de acuerdo con las fórmulas de Cardano¹⁸. Puesto que $F_{j-1} \subset \mathcal{C}_P$, los coeficientes de $m_\beta \in F_{j-1}[X]$ son \mathcal{C} -construibles y en consecuencia también β es \mathcal{C} -construible.

En virtud de los teoremas [4.17](#) y [4.25](#)

Se concluye por tanto que $F_n \subset \mathcal{C}_P$, y en particular $\alpha \in \mathcal{C}_P$.



La exposición de la implicación recíproca es más tediosa. Dado $\alpha \in \mathcal{C}_P$, veamos que está en una 2,3-torre de cuerpos como en el enunciado. Para ello, sea $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ el índice de la menor capa de \mathcal{C} que contiene a α , es decir, tal que $\alpha \in P_N^\mathcal{C}$ y $\alpha \notin P_{N-1}^\mathcal{C}$. Vamos a probar, por inducción sobre el número de capa N , que existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{C}$ tal que F_n contenga las partes real e imaginaria de α .

Menor en el sentido de inclusión (ver [definición 3.10](#))

Si $N = 0$ los únicos números origami-construibles son 0 y 1, en cuyo caso tomando $F_n = F_0 = \mathbb{Q}$ hemos acabado.

$N > 0$

Pongamos ahora que α está en una capa $P_N^\mathcal{C}$ superior y, por hipótesis de inducción, supongamos que para cualquier número \mathcal{C} -construible $\beta \in P_{N-1}^\mathcal{C}$ en la capa $N - 1$ existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{C}$ tal que $Re(\beta), Im(\beta) \in K_n$ y que para cualquier recta \mathcal{C} -construible l en la capa $C_{N-1}^\mathcal{C}$ existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{C}$ tal que sus coeficientes están en K_n .

Esto es, que cualquier recta $l \in C_{N-1}^\mathcal{C}$ admite un representante con coeficientes en una 2,3-torre; i.e., abusando de la notación $l \in K_n[X, Y]$

Es claro que α queda determinado como intersección de dos rectas pre-existentes, digamos $\alpha = \mathbf{RectaIntersec}(l_1, l_2)$ con $l_1, l_2 \in C_N^\mathcal{C}$. Observemos además que al menos una de ellas se ha creado en la capa N (en caso contrario, α pertenecería a una capa inferior). Si l_1 (resp. l_2) pertenece a una capa

18 No detallaremos la escritura de β de acuerdo a dichas fórmulas aquí por brevedad, sí lo haremos en la demostración del [corolario 4.28](#); no obstante, pueden consultarse en multitud de referencias (e.g., [[Bew06](#); [Cox12](#)]).

inferior, por hipótesis admite un representante con coeficientes en una 2,3-torre. Si l_1 (resp. l_2) se ha creado en la capa N será necesario un poco más de análisis; lo estudiaremos en función del axioma con el que dicha recta haya sido generada.

O1 Si existen $A, B \in P_{N-1}^{\mathcal{O}}$ tales que $l = \mathbf{O1}(A, B)$. En tal caso, por hipótesis existen dos 2,3-torres de cuerpos conteniendo las partes reales e imaginarias de A y B , respectivamente. Consecuentemente, como composición de éstas (cfr. [proposición 2.69](#) y la [observación posterior](#)), existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset \cdots \subset K_k \subset \mathbb{C}$ con $Re(A), Im(A), Re(B), Im(B) \in K_k$. Renombremos $u_1 = Re(A), u_2 = Im(A), v_1 = Re(B)$ y $v_2 = Im(B)$.

De acuerdo con la descripción algebraica del axioma **O1**, tenemos que

$$(v_2 - u_2)(X - u_1) - (v_1 - u_1)(Y - u_2) \in K_k[X, Y]$$

es un representante de l ; esto es, l admite un representante con coeficientes en una 2,3-torre.

O2 Si existen $A, B \in P_{N-1}^{\mathcal{O}}$ tales que $l = \mathbf{O2}(A, B)$. Como antes, existirá una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset \cdots \subset K_k \subset \mathbb{C}$ con $Re(A), Im(A), Re(B), Im(B) \in K_k$. Y, de acuerdo con la descripción algebraica del axioma **O2**, renombrando $u_1 = Re(A), u_2 = Im(A), v_1 = Re(B)$ y $v_2 = Im(B)$, tenemos que

$$(v_1 - u_1)\left(X - \frac{u_1 + v_1}{2}\right) + (v_2 - u_2)\left(Y - \frac{u_2 + v_2}{2}\right) \in K_k[X, Y]$$

es un representante de l ; esto es, l admite un representante con coeficientes en una 2,3-torre.

O3 Si existen $r, r' \in C_{N-1}^{\mathcal{O}}$ tales que $l = \mathbf{O3}(r, r')$. Por hipótesis existen dos 2,3-torre de cuerpos tales que r y r' están definidos por ecuaciones con coeficientes su 2,3-torre respectiva; pongamos r determinado por $a_1X + b_1Y + c_1$ y r' por $a_2X + b_2Y + c_2$. Como antes, existe una 2,3-torre composición de las anteriores $\mathbb{Q} = K_0 \subset \cdots \subset K_k \subset \mathbb{C}$ de forma que $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in K_k$. Y, de acuerdo con la descripción algebraica del axioma **O3**, hay un representante de l de la forma

$$(m_2a_1 \pm m_1a_2)X + (m_2b_1 \pm m_1b_2)Y + (m_2c_1 \pm m_1c_2) \in K_k(m_1, m_2)[X, Y].$$

siendo $m_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ y $m_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$.

Ahora, si $m_1 \in K_k$, entonces $K_k(m_1) = K_k$. En caso contrario, $X^2 - (a_1^2 + b_1^2)$ es el polinomio mínimo de m_1 sobre K_k ; y por tanto $[K_k(m_1) : K_k] = 2$. Análogamente con m_2 respecto de $K_k(m_1)$. Y, en definitiva, tenemos que

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset \cdots \subset K_k \subset K_k(m_1) \subset K_k(m_1)(m_2) \subset \mathbb{C}$$

es¹⁹ una 2,3-torre de cuerpos conteniendo los coeficientes de un representante de l .

¹⁹ Estrictamente puede no serlo: esta expresión puede contener extensiones de grado 1, mas basta con eliminar tales cuerpos repetidos (si los hay) para obtener propiamente una 2,3-torre.

A partir de aquí escribiremos simplemente l , léase la recta que corresponda (l_1 o l_2) en su lugar

(Cfr. [proposición 2.69](#) y la [observación posterior](#))

Ibidem

(Lema 2.11)

(Def. 2.8, obs. a))

(Proposición 2.12, b))

$K_k(m_1)(m_2) = K_k(m_1, m_2)$

(Cfr. proposición 2.69 y la observación posterior)

O4 Si existen $A \in P_{N-1}^{\mathcal{O}}$ y $r \in C_{N-1}^{\mathcal{O}}$ tales que $l = \mathbf{O4}(r, A)$. Por hipótesis existen una 2,3-torre de conteniendo a $Re(A)$ y $Im(A)$ (renombrémoslos respectivamente como u_1 y u_2) y una 2,3-torre de cuerpos de forma que r admite un representante (pongamos $aX + bY + c$) con coeficientes en dicha torre. En consecuencia, como composición de éstas, tenemos una 2,3-torre $\mathbf{Q} = K_0 \subset \dots \subset K_k \subset \mathbb{C}$ con $u_1, u_2, a, b, c \in K_k$. Conforme a la descripción algebraica del axioma **O4**, tenemos que

$$b(X - u_1) - a(Y - u_2) \in K_k[X, Y]$$

es un representante de l ; esto es, l admite un representante con coeficientes en una 2,3-torre.

Ibidem

O5 Si existen $A, B \in P_{N-1}^{\mathcal{O}}$ y $r \in C_{N-1}^{\mathcal{O}}$ tales que $l = \mathbf{O5}(r, A, B)$. En tal caso, por hipótesis existen dos 2,3-torres de cuerpos conteniendo las partes reales e imaginarias de A y B (digamos $u_1 = Re(A)$, $u_2 = Im(A)$, $v_1 = Re(B)$ y $v_2 = Im(B)$) y una 2,3-torre de cuerpos de forma que r admite un representante (pongamos $aX + bY + c$) con coeficientes en dicha torre. Por tanto, componiendo dichas torres obtendremos una 2,3-torre de cuerpos $\mathbf{Q} = K_0 \subset \dots \subset K_k \subset \mathbb{C}$ con $u_1, u_2, v_1, v_2, a, b, c \in K_k$.

Con arreglo a la descripción algebraica del axioma **O5**, tenemos que

$$\tilde{\tau}_1 \tilde{X} - \tilde{Y} - \tilde{\tau}_1^2/2 \in \mathbb{R}[X, Y]$$

es un representante de l para cierto $\tilde{\tau}_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\tau}_1^2 - 2\tilde{v}_1\tilde{\tau}_1 + 2\tilde{v}_2 = 0$; donde $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \varphi(X, Y)$ y $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = \varphi(v_1, v_2)$, con φ una afinidad tal que $\varphi(A) = (0, 1/2)$ y $\varphi(r) = \tilde{Y} + 1/2$.

Explícitamente, φ es

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \frac{1}{au_1 + bu_2 + c} \left[\begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} au_2 - bu_1 \\ (-au_1 - bu_2 + c)/2 \end{pmatrix} \right].$$

Tenemos garantizado que $au_1 + bu_2 + c \neq 0$, pues, al suponer que l se ha generado como

O5(r, A, B), implícitamente estamos asumiendo que $A \notin r$

Así, es claro que $\tilde{X}, \tilde{Y} \in K_k[X, Y]$; también que $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in K_k$. En consecuencia, $\tilde{\tau}_1$ es una raíz de $Z^2 - 2\tilde{v}_1Z + 2\tilde{v}_2 \in K_k[Z]$, y por tanto $K_k \subset K_k(\tilde{\tau}_1)$ será una extensión de grado 1 ó 2. Con todo, $\tilde{\tau}_1 \tilde{X} - \tilde{Y} - \tilde{\tau}_1^2/2 \in K_k(\tilde{\tau}_1)[X, Y]$ y, en definitiva, $\mathbf{Q} = K_0 \subset \dots \subset K_k \subset K_k(\tilde{\tau}_1) \subset \mathbb{C}$ es¹⁹ una 2,3-torre conteniendo los coeficientes de un representante de l .

Ibidem

O6 Si existen $A, B \in P_{N-1}^{\mathcal{O}}$ y $r, r' \in C_{N-1}^{\mathcal{O}}$ tales que $l = \mathbf{O6}(r, A, r', B)$. Por hipótesis, como hasta ahora, existen dos 2,3-torres de cuerpos conteniendo las partes reales e imaginarias de A y B (digamos $u_1 = Re(A)$, $u_2 = Im(A)$, $v_1 = Re(B)$ y $v_2 = Im(B)$) y dos 2,3-torre de cuerpos tales que r y r' están definidos por ecuaciones con coeficientes su 2,3-torre respectiva (pongamos r determinado por $a_1X + b_1Y + c_1$ y r' por $a_2X + b_2Y + c_2$). Como composición suya, por tanto, existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbf{Q} = K_0 \subset \dots \subset K_k \subset \mathbb{C}$ con $u_1, u_2, v_1, v_2, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in K_k$.

De acuerdo con la descripción algebraica del axioma **O6**, tenemos que

$$m\tilde{X} - \tilde{Y} - m^2/2 \in \mathbb{R}[X, Y]$$

es un representante de l para cierto $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{a}_2 m^3 + (\tilde{a}_2 \tilde{v}_1 + \tilde{b}_2 (\tilde{v}_2 - 1) + \tilde{c}_2) m^2 + 2(\tilde{a}_2 \tilde{v}_2 + \tilde{b}_2 \tilde{v}_1) m - \tilde{b}_2 \tilde{v}_2 + \tilde{c}_2 = 0;$$

siendo $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \varphi(X, Y)$, $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = \varphi(v_1, v_2)$ y $\tilde{a}_2 \tilde{X} + \tilde{b}_2 \tilde{Y} + \tilde{c}_2 = \varphi(r')$, con φ una afinidad tal que $\varphi(A) = (0, 1/2)$ y $\varphi(r) = \tilde{Y} + 1/2$.

Explícitamente, φ es

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1} \left[\begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 u_2 - b_1 u_1 \\ (-a_1 u_1 - b_1 u_2 + c_1)/2 \end{pmatrix} \right].$$

Así, es claro que $\tilde{X}, \tilde{Y} \in K_k[X, Y]$; y que $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in K_k$. Además,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_1^{-1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ \varphi_2^{-1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2 + b_1^2} \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ -a_1 & b_1 \end{pmatrix} \left[(a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1) \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 u_2 - b_1 u_1 \\ (-a_1 u_1 - b_1 u_2 + c_1)/2 \end{pmatrix} \right]; \end{aligned}$$

luego²⁰ también podemos asegurar que $\tilde{a}_2, \tilde{b}_2, \tilde{c}_2 \in K_k$.

Con todo, el polinomio mínimo de m sobre K_k debe ser de grado a lo sumo 3, y consecuentemente, $K_k \subset K_k(m)$ será una extensión de grado $\deg(m_{m, K_k}) \in \{1, 2, 3\}$. Finalmente, $m\tilde{X} - \tilde{Y} - m^2/2 \in K_k(m)[X, Y]$ es un representante de l con coeficientes en $\mathbb{Q} = K_0 \subset \dots \subset K_k \subset K_k(m) \subset \mathbb{C}$ una 2,3-torre¹⁹.

- O7** Por último, si existen $A \in P_{N-1}^{\mathcal{O}}$ y $r, r' \in C_{N-1}^{\mathcal{O}}$ tales que $l = \mathbf{O7}(r, A, r')$. Como en los casos anteriores, por hipótesis y mediante composición de torres, existirá una 2,3-torres de cuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset \dots \subset K_k \subset \mathbb{C}$ conteniendo las partes reales e imaginarias de A y B y los coeficientes de r y r' (digamos $u_1 = \text{Re}(A)$ y $u_2 = \text{Im}(A)$, $r = a_1 X + b_1 Y + c_1$ y $r' = a_2 X + b_2 Y + c_2$, con $u_1, u_2, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in K_k$). Acorde con la descripción algebraica del axioma **O7**

$$\tilde{b}_2/\tilde{a}_2 \tilde{X} - \tilde{Y} - \tilde{b}_2^2/2\tilde{a}_2 \in \mathbb{C}[X, Y],$$

es un representante de l ; donde es $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \varphi(X, Y)$ y $\tilde{a}_2 \tilde{X} + \tilde{b}_2 \tilde{Y} + \tilde{c}_2 = \varphi(r')$, con φ una afinidad tal que $\varphi(A) = (0, 1/2)$ y $\varphi(r) = \tilde{Y} + 1/2$.

Como antes, $\tilde{X}, \tilde{Y} \in K_k[X, Y]$, y también $\tilde{a}_2, \tilde{b}_2, \tilde{c}_2 \in K_k$. Y, por tanto, l admite un representante con coeficientes en una 2,3-torre.

Con todo, queda visto que tanto l_1 como l_2 tienen polinomios representantes con coeficientes en sendas 2,3-torres, digamos $l_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1$ y $l_2 = a_2 X + b_2 Y + c_2$. De nuevo, como composición de torres, existe $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{C}$ una 2,3-torre conteniendo los coeficientes de ambas expresiones. Como resultado, α también tendrá sus partes real e imaginaria en dicha torre; explícitamente, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i$ es el único punto de intersección de l_1 y l_2 por definición, luego se verifica

$$\begin{cases} a_1 \alpha_1 + b_1 \alpha_2 + c_1 = 0, \\ a_2 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Tenemos garantizado que $au_1 + bu_2 + c \neq 0$, pues, al suponer que l se ha generado como **O6**(r, A, r', B), implícitamente estamos asumiendo que $A \notin r$

También $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, dado que para definir r al menos uno de los coeficientes a y b debe ser no nulo

(Cfr. [proposición 2.69](#) y la [observación posterior](#))

Aunque resulte tautológico, suponer que α se ha generado como

RectaIntersec(l_1, l_2) implica que l_1 y l_2 son secantes. Por tanto,...

... implícitamente se garantiza que su intersección es un único punto (α) , y que la matriz del sistema de ecuaciones es invertible

Consecuentemente es:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix};$$

luego, $Re(\alpha) = \alpha_1, Im(\alpha) = \alpha_2 \in K_k$ como queríamos.

Con esto hemos probado que para todo número \mathcal{O} -constructible $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i \in \mathcal{O}_P$ existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{C}$ con $a, b \in F_n$. Concluimos observando que, entonces, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i \in F_n(i)$. Si $i \in F_n$ entonces $F_n(i) = F_n$ y ya tenemos una 2,3-torre conteniendo a α ; en caso contrario se tiene que $X^2 + 1$ es el polinomio mínimo de i sobre F_n ; de grado 2, luego $[F_n(i) : F_n] = 2$, y por tanto

(Proposición 2.12, b))

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset F_{n+1} = F_n(i) \subset \mathbb{C}$$

es una 2,3-torre de cuerpos con $\alpha \in F_{n+1}$ como queríamos. \square

4.4.2 Otras caracterizaciones

De este resultado se derivan varias caracterizaciones alternativas del conjunto de números \mathcal{O} -construibles. La siguiente es la más simple, atendiendo a sus operaciones internas características.

Corolario 4.28 (Caracterización descriptiva de \mathcal{O}_P) \mathcal{O}_P es el menor subcuerpo de \mathbb{C} estable por raíces cuadradas y cúbicas.

El argumento de esta prueba es el mismo que la primera parte de la demostración del teorema 4.26

Demostración: Ya hemos visto (teorema 4.25) que \mathcal{O}_P es estable por raíces cuadradas y cúbicas; esto es: si denotamos como L al menor subcuerpo de \mathbb{C} estable por raíces cuadradas y cúbicas, por definición, tenemos que $L \subset \mathcal{O}_P$. Veamos ahora que $\mathcal{O}_P \subset L$.

Sea $\alpha \in \mathcal{O}_P$ un número \mathcal{O} -construible. Por el teorema 4.26, existe una 2,3-torre de subcuerpos complejos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ tal que $\alpha \in F_n$. Observemos que, por ser L un subcuerpo de \mathbb{C} debe²¹ contener a \mathbb{Q} ; esto es: $F_0 = \mathbb{Q} \subset L$. Si suponemos que $F_{j-1} \subset L$ y vemos que entonces también $F_j \subset L$, por inducción finita quedará probado que F_n está contenido en L y en consecuencia $\alpha \in L$, de donde se concluye.

Supongamos $F_{j-1} \subset L$ y sean β un elemento de F_j y m_β su polinomio mínimo sobre F_{j-1} . Tenemos que $deg(m_\beta) = [F_{j-1}(\beta) : F_{j-1}] \leq 3$, consecuentemente:

- 1) Si $deg(m_\beta) = 1$ entonces $\beta \in F_{j-1} \subset L$.
- 2) Si $deg(m_\beta) = 2 = [F_j : F_{j-1}]$, β es solución de $m_\beta = 0$ y de acuerdo con las fórmulas de resolución de la ecuación cuadrática, si es $m_\beta = X^2 + bX + c \in F_{j-1}[X] \subset L[X]$:

$$\beta = \frac{-b + (-1)^s \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

²⁰ Es: $\tilde{a}_2 \tilde{X} + \tilde{b}_2 \tilde{Y} + \tilde{c}_2 = a_2 \varphi_1^{-1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + b_2 \varphi_2^{-1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + c_2 \in K_k[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

²¹ Pues por ser \mathbb{C} de característica 0, también lo debe ser L ; y \mathbb{Q} es el menor subconjunto complejo que verifica las propiedades de cuerpo en estas condiciones, es decir, está contenido en cualquier otro subcuerpo complejo.

para $s \in \{0, 1\}$ adecuado; y, por tanto, $\beta \in L$ dado que $\sqrt{b^2 - 4c} \in L$ por ser L estable en particular por raíces cuadradas y β ser combinación de elementos del cuerpo L .

- 3) Si $\deg(m_\beta) = 3 = [F_j : F_{j-1}]$, β es solución de $m_\beta = 0$ y de acuerdo con las fórmulas de Cardano, si es $m_\beta = X^3 + aX^2 + bX + c \in F_{j-1}[X] \subset L[X]$:

$$\beta = \frac{a}{3} + \mu_1 \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \mu_2 \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

para $(\mu_1, \mu_2) \in \left\{ (1, 1), \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right), \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \right\} \subset L$ adecuados, donde $p = -a^2/3 + b$, $q = -2a^3/27 - ab/3 + c \in F_{j-1} \subset L$ y $\Delta = q^2 + 4p^3/27 \in F_{j-1} \subset L$; y, por tanto, $\beta \in L$ por ser combinación de elementos del cuerpo L , dado que L es estable por raíces cuadradas y cúbicas. \square

También, mediante el uso de la teoría de Galois, se deriva del [teorema 4.26](#) una nueva caracterización, matizando y basada en la siguiente propiedad: el grado del polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} de un número \mathcal{O} -construible es potencia de 2 y 3.

Corolario 4.29 Si $\alpha \in \mathcal{O}_p$, entonces α es algebraico sobre \mathbb{Q} y existen $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de forma que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$.

Demostración: Sea $\alpha \in \mathcal{O}_p$ un número \mathcal{O} -construible. Por el [teorema 4.26](#), existe una 2,3-torre de subcuerpos complejos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ tal que $\alpha \in F_n$.

En virtud del [teorema 2.13](#) tenemos que

$$[F_n : \mathbb{Q}] = [F_n : F_{n-1}] \cdots [F_2 : F_1] \cdot [F_1 : \mathbb{Q}] = 2^r 3^s,$$

donde r y s son el número de extensiones de grado 2 y 3, respectivamente, de la 2,3-torre. Así, es claro que $[F_n : \mathbb{Q}] < \infty$; es decir, F_n es una extensión algebraica sobre \mathbb{Q} y por tanto α es algebraico sobre \mathbb{Q} .

Finalmente, puesto que $\alpha \in F_n$, tenemos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset F_n$, y por tanto:

$$[F_n : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [F_n : \mathbb{Q}] = 2^r 3^s.$$

Esto es, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ divide a $2^r 3^s$. En consecuencia, existen $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a \leq r$, $b \leq s$, tales que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$. \square

Teorema 4.30 (Caracterización-Galois de \mathcal{O}_p) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Y sea L_α el cuerpo de descomposición del polinomio mínimo de α sobre \mathbb{Q} . Entonces: α es \mathcal{O} -construible si, y sólo si, existen $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de forma que $[L_\alpha : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$.

$$\alpha \in \mathcal{O}_p \iff [L_\alpha : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b \text{ (para ciertos } a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\text{)}$$

$$r + s = n < \infty$$

([Teorema 2.13](#))

Así, $m_{\alpha, \mathbb{Q}}$ el polinomio mínimo de α sobre \mathbb{Q} es de grado $2^a 3^b$ ([proposición 2.12, b](#))

Demostración: Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y L_α como en el enunciado.

\Rightarrow

Supongamos que $\alpha \in \mathcal{C}_p$ y veamos que $[L_\alpha : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$. Vamos a probar en primer lugar que \mathcal{C}_p es una extensión normal de \mathbb{Q} , y, por tanto, $L_\alpha \subset \mathcal{C}_p$. Después obtendremos que $[L_\alpha : \mathbb{Q}]$ es de la forma deseada como consecuencia del [teorema 4.26](#) aplicado a un elemento primitivo de L_α .

(Proposición 2.20)

Para ver que $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}_p$ es una extensión normal comprobaremos que $m_{\beta, \mathbb{Q}}$ el polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} de cualquier $\beta \in \mathcal{C}_p$ descompone completamente sobre \mathcal{C}_p .

(Teorema 4.26)

En efecto, en estas condiciones, puesto que β es \mathcal{C} -construible, existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{C}$ con $\beta \in K_n$. Sea $M \subset \mathbb{C}$ el cierre de Galois²² de K_n sobre \mathbb{Q} . Por ser $\mathbb{Q} \subset M$ de Galois, en particular es normal sobre \mathbb{Q} , y $m_{\beta, \mathbb{Q}}$ descompone completamente en M (por definición de extensión normal, dado que $\beta \in K_n \subset M$ es una raíz de $m_{\beta, \mathbb{Q}}$ y $m_{\beta, \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible sobre \mathbb{Q}).

(Teorema 2.36)

Sea $\beta' \in M$ una raíz de $m_{\beta, \mathbb{Q}}$. De acuerdo con la [proposición 2.35](#), existe un automorfismo $\sigma \in \text{Gal}(M/\mathbb{Q})$ tal que $\sigma(\beta) = \beta'$. Ahora consideremos la torre de cuerpos definida mediante σ como la imagen de los subcuerpos de la 2,3-torre asociada a β ; por definición de σ es claro que $\sigma(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ y tenemos:

$$\mathbb{Q} = \sigma(K_0) \subset \sigma(K_1) \subset \cdots \subset \sigma(K_{n-1}) \subset \sigma(K_n) \subset M \subset \mathbb{C},$$

(Y el [teorema 2.13](#))

con $\beta' = \sigma(\beta) \in \sigma(K_n) = K'_n$. Además, según el [lema 2.43](#), es tal que:

Para cada
 $j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$[\sigma(K_j) : \sigma(K_{j-1})] = [K_j : K_{j-1}] \in \{2, 3\}.$$

Es decir, renombrando $K'_j = \sigma(K_j)$, tenemos que $\mathbb{Q} = K'_0 \subset \cdots \subset K'_n \subset \mathbb{C}$ es una 2,3-torre con $\beta' \in K'_n$; y en consecuencia: $\beta' \in \mathcal{C}_p$.

(Teorema 4.26)

Con todo queda visto que cualquier raíz de $m_{\beta, \mathbb{Q}}$ es \mathcal{C} -construible, i.e., $m_{\beta, \mathbb{Q}}$ descompone completamente sobre \mathcal{C}_p y \mathcal{C}_p es normal sobre \mathbb{Q} . Así, en particular²³, $m_{\alpha, \mathbb{Q}}$ el polinomio mínimo en \mathbb{Q} de $\alpha \in \mathcal{C}_p$ descompone completamente en \mathcal{C}_p .

Por consiguiente, queda garantizado que \mathcal{C}_p contiene a L_α el cuerpo de descomposición de $m_{\alpha, \mathbb{Q}}$ sobre \mathbb{Q} :

$$\mathbb{Q} \subset L_\alpha \subset \mathcal{C}_p.$$

(Proposición 2.24, b))

Puesto que $\mathbb{Q} \subset L_\alpha$ es una extensión algebraica finita por definición²⁴, y \mathbb{Q} es de característica 0, en particular L_α es finita y separable sobre \mathbb{Q} . Así, en

22 La existencia de clausuras o cierres de Galois de $\mathbb{Q} \subset K_n$ está garantizada puesto que K_n es una extensión finita (en concreto de grado $2^i 3^s$) y separable ([proposición 2.24, b](#)), puesto que \mathbb{Q} es de característica 0). Falta ver que, de hecho, podemos tomar $\mathbb{Q} \subset M \subset \mathbb{C}$ tal que el subcuerpo M es una clausura de Galois de K_n sobre \mathbb{Q} . Esto queda garantizado por ser \mathbb{C} algebraicamente cerrado; basta con adaptar la demostración de [[Cox12](#), proposición 7.1.7] para dar una construcción explícita de tal extensión $M \subset \mathbb{C}$.

23 De hecho: no era necesario ver que $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}_p$ es normal, lo único que necesitábamos era ver que $m_{\alpha, \mathbb{Q}}$ descompone completamente sobre \mathcal{C}_p ; lo cual queda garantizado con el mismo argumento que hemos usado, sustituyendo el elemento genérico $\beta \in \mathcal{C}_p$ por α donde corresponda.

24 Si $\alpha_1, \dots, \alpha_{\deg(m_{\alpha, \mathbb{Q}})} \in \overline{\mathbb{Q}}$ son las raíces de $m_{\alpha, \mathbb{Q}}$, es $L_\alpha = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\deg(m_{\alpha, \mathbb{Q}})})$. Con esto, $\mathbb{Q} \subset L_\alpha$ es una extensión finita con arreglo a la [proposición 2.15](#), y en consecuencia también algebraica ([lema 2.14](#)).

virtud del [teorema 2.27](#), existe un elemento $\omega \in L_\alpha$ tal que $L_\alpha = \mathbb{Q}(\omega)$. Puesto que $\omega \in L_\alpha \subset \mathcal{C}_p$, es decir, puesto que además ω es \mathcal{C} -construible, con arreglo al [corolario 4.29](#), se concluye, como queríamos, la existencia de $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $[L_\alpha : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$.

Recíprocamente, supongamos ahora que L_α verifica $[L_\alpha : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y veamos que entonces α es \mathcal{C} -construible. De acuerdo con el [teorema 4.26](#), buscaremos construir una 2,3-torre que lo contenga; sirviéndonos para ello de la correspondencia entre los subgrupos del grupo de Galois $\text{Gal}(L_\alpha/\mathbb{Q})$ y sus cuerpos fijos asociados, y del teorema $p^a q^b$ de Burnside ([teorema 2.59](#) en nuestra memoria).

Advirtamos en primer lugar que L_α es Galois sobre \mathbb{Q} por definición, pues es el cuerpo de descomposición de un polinomio separable en \mathbb{Q} ²⁵. Consecuentemente, de acuerdo con el [teorema 2.32](#), es: $|\text{Gal}(L_\alpha/\mathbb{Q})| = [L_\alpha : \mathbb{Q}]$, es decir: $|\text{Gal}(L_\alpha/\mathbb{Q})| = 2^a 3^b$.

En virtud del [teorema 2.59](#) podemos asegurar que $\text{Gal}(L_\alpha/\mathbb{Q})$ es un grupo resoluble; luego por definición existe una cadena de subgrupos de la forma

$$\{e\} = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_1 \subset G_0 = \text{Gal}(L_\alpha/\mathbb{Q})$$

y tal que, para cada j , tenemos que G_j es un subgrupo normal de G_{j-1} y $[G_{j-1} : G_j]$ es primo. Puesto que

$$\begin{aligned} |\text{Gal}(L_\alpha/\mathbb{Q})| &= [G_0 : G_1] |G_1| = [G_0 : G_1] [G_1 : G_2] |G_2| = \cdots = \\ &= [G_0 : G_1] \cdots [G_{n-1} : G_n] |G_n| = [G_0 : G_1] \cdots [G_{n-1} : G_n], \end{aligned}$$

necesariamente $n = a + b$ y tenemos que, para cada j , $[G_{j-1} : G_j] \in \{2, 3\}$.

Así, de acuerdo con la correspondencia de Galois (dada en el [teorema 2.44](#)), obtenemos, asociada a ésta, la torre de subcuerpos

$$L_\alpha = L_{G_n} \supset L_{G_{n-1}} \supset \cdots \supset L_{G_1} \supset L_{G_0} = \mathbb{Q}$$

verificando $[L_{G_j} : L_{G_{j-1}}] = [G_{j-1} : G_j]$ para cada j . Renombrando $F_j = L_{G_j}$, puesto que $[L_{G_j} : L_{G_{j-1}}] = [G_{j-1} : G_j] \in \{2, 3\}$ para cada j , tenemos que $\mathbb{Q} = F_0 \subset \cdots \subset F_n = L_\alpha \subset \mathbb{C}$ es una 2,3-torre con $\alpha \in L_\alpha = F_n$, i.e., $\alpha \in \mathcal{C}_p$ como queríamos. \square

Observación: Como sabíamos, si $\alpha \in \mathbb{C}$ es \mathcal{C} -construible entonces $m_{\alpha, \mathbb{Q}}$ su polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} es de grado $2^a 3^b$; pero no supone ninguna contradicción la existencia de números complejos con polinomio mínimo cuyo grado sea de la forma $2^a 3^b$ y no sean \mathcal{C} -construibles. Sirvan como muestra ilustrativa los siguientes casos de aplicación del [teorema 4.30](#):

Ejemplo 4.31 Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $f = X^6 + X + 1$. Mediante **Maple** (o cualquier otro programa similar) podemos comprobar que f es irreducible sobre \mathbb{Q} , luego $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ es una extensión de grado 6. Sin embargo α no es \mathcal{C} -constructible, aún siendo $6 = 2 \cdot 3$. Podemos comprobarlo calculando el grupo de Galois de L_f el cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Q} (de nuevo mediante **Maple**): $\text{Gal}(L_f/\mathbb{Q}) \simeq S_6$.

²⁵ En efecto, L_α es el cuerpo de descomposición de $m_{\alpha, \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[X]$; y $m_{\alpha, \mathbb{Q}}$ es separable en virtud de la [proposición 2.24, a](#)), puesto que es irreducible sobre \mathbb{Q} y \mathbb{Q} es de característica 0.



(Definición 2.56)

$$1 \leq j \leq n$$

Con arreglo al teorema de Lagrange ([teo. 2.1](#))

$$|G_n| = |\{e\}| = 1$$

$$1 \leq j \leq n$$

Como en [2.44](#), L_G denota al cuerpo fijo por el grupo G

$$1 \leq j \leq n$$

$$1 \leq j \leq n$$

([Teorema 4.26](#))

Sobra decir que **Maple** es un lenguaje orientado al cálculo simbólico en álgebra computacional

S_6 denota, como es habitual, el grupo simétrico de 6 letras

Dado que $|S_6| = 6!$, tenemos que $[L_f : \mathbb{Q}] = |\text{Gal}(L_f/\mathbb{Q})| = 2^4 3^2 5$ y en virtud del [teorema 4.30](#) $\alpha \notin \mathcal{C}_P$. §

A_4 denota, como habitualmente, el grupo alternado de 4 letras

Ejemplo 4.32 Si consideramos ahora $f = X^4 + 8X + 12$, puede comprobarse como antes que f es irreducible sobre \mathbb{Q} y $\text{Gal}(L_f/\mathbb{Q}) = A_4$. Por tanto $[L_f : \mathbb{Q}] = |\text{Gal}(L_f/\mathbb{Q})| = 4!/2 = 2^2 3$ y de acuerdo con [teorema 4.30](#) cualquier raíz suya es \mathcal{C} -construible. Podemos adelantar que no se trata de un caso excepcional, hablaremos más sobre esto en la [sección 4.7](#). §

Concluimos esta sección recopilando otras caracterizaciones comunes en la bibliografía (mediante herramientas aritméticamente equivalentes).

Teorema 4.33 Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Son equivalentes:

- a) α es origami-construible (a partir de $\{0, 1\}$).
- b) $\alpha \in \mathcal{C}_P$, donde \mathcal{C}_P son los puntos de \mathcal{C} el menor conjunto de puntos y rectas conteniendo a $\{0, 1\}$ y cerrado para los axiomas Huzita-Justin y la intersección de rectas.
- c) $\alpha \in \mathcal{C}_P$, donde \mathcal{C}_P es el menor subcuerpo de \mathbb{C} estable por raíces cuadradas y cúbicas.
- d) $\alpha \in \mathcal{C}_P$, donde \mathcal{C}_P es el menor subcuerpo de \mathbb{C} estable por raíces cuadradas, cúbicas y conjugación compleja.
- e) Existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{C}$ con $\alpha \in F_n$.
- f) Existe una torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{C}$ con $\alpha \in F_n$ y $[F_j : F_{j-1}] \leq 3$ para cada j .
- g) El cuerpo de descomposición del polinomio mínimo de α sobre \mathbb{Q} , L_α , es una extensión de \mathbb{Q} de grado $2^a 3^b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- h) El grupo de Galois de α sobre \mathbb{Q} , $\text{Gal}(L_\alpha/\mathbb{Q})$, es un grupo de orden $2^a 3^b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- i) $\alpha \in L$, donde L es una extensión normal de \mathbb{Q} de grado $2^a 3^b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- j) α es construible mediante \mathcal{RCO} (a partir de $\{0, 1\}$).
- k) α es Mira-construible (a partir de $\{0, 1\}$).
- l) α es construible mediante cónicas (a partir de $\{0, 1\}$).
- m) α es construible mediante regla y elipses (a partir de $\{0, 1\}$).
- n) α es construible mediante regla marcada (a partir de $\{0, 1\}$).

Esto es, \mathcal{C}_P el de la [definición 4.4](#)

La herramienta Mira es un espejo traslúcido que, perpendicular al papel, permite construcciones vía el reflejo de objetos preexistentes. La herramienta cónicas...

Demostración: De la **a)** a la **i)** son reescrituras de las caracterizaciones que hemos estudiado. La **j)** es la definición de origami-constructibilidad de Cox (véanse la [nota 17 a pie de página](#) y [[Cox12](#)]).

En [[EMN94](#)] se presenta la herramienta Mira y se caracteriza el conjunto de números Mira-construibles. En [[Vid97](#)] se definen y caracterizan las construcciones mediante intersección de cónicas. En [[Mar98](#)] podemos encontrar sendos resultados para la regla marcada. Por último, consúltese [[GS09](#)] para lo respectivo a construcciones con regla y elipses. Todos resultan en el mismo conjunto de puntos construibles, quedando así justificadas las caracterizaciones **k)**, **l)**, **m)** y **n)**. \square

Observaciones:

1. La relación entre origami y Mira es directa en cuanto a que ambas se axiomatizan mediante reflexiones. Sobre construcción de cónicas y origami también recomendamos consultar [[Alp00](#)] y [[Lot07](#)]. Por último, añadir que la discusión sobre origami-constructibilidad en [[Mar98](#)] se efectúa, de hecho, vía equivalencia con construcciones realizables con regla marcada.
2. Con las caracterizaciones **a)**, **j)**, **k)**, **l)**, **m)** y **n)** se establece la equivalencia aritmética entre las herramientas implicadas.

$$O \leftrightarrow RCO \leftrightarrow Mi \leftrightarrow Co \leftrightarrow RE \leftrightarrow MR$$

4.4.3 Algunas consecuencias inmediatas

Es inmediato de las caracterizaciones dadas que el origami extiende estrictamente el conjunto de números construibles con regla y compás.

Corolario 4.34

$$\mathcal{RC}_p \subsetneq \mathcal{C}_p.$$

Demostración: De acuerdo con la caracterización de los números construibles mediante regla y compás, dado cualquier $\alpha \in \mathcal{RC}_p$, existe una torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{C}$ verificando que conteniendo a α y tal que $[F_{j+1} : F_j] = 2$ para cada j . En particular, esto es una 2,3-torre de cuerpos luego también $\alpha \in \mathcal{C}_p$.

Ahora, consideremos $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{C}$. $\sqrt[3]{2}$ es algebraico sobre \mathbb{Q} y su polinomio mínimo es $m_{\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}} = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. El cuerpo de descomposición de $m_{\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}}$ es $L_{\sqrt[3]{2}} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, y por tanto $[L_{\sqrt[3]{2}} : \mathbb{Q}] = 3$. Consecuentemente, $\sqrt[3]{2}$ es origami-constructible, pero no constructible mediante regla y compás. \square

Acabamos de ver que $\sqrt[3]{2}$ es constructible mediante origami. Esto implica en particular que el problema de duplicación del cubo es resoluble mediante origami. La construcción explícita de raíces cúbicas ya fue presentada en la [sección 4.3.3](#). Asimismo, la trisección de ángulos.

Ninguno de los problemas clásicos era resoluble mediante regla y compás; queda visto ahora que mediante origami sí podemos construir el ángulo $\theta/3$ a

... considera construible cualquier parábola, hipérbola o elipse si su directriz, foco y excentricidad es construible. La construcción de elipses mediante hilo y agujas es de sobra conocida. Una regla con dos marcas, además de construir rectas, permite realizar *verging*, o *neusis*, sobre un punto y curvas preexistentes. La axiomatización como herramienta de estos tres últimos puede consultarse en [[Tra12](#)]

(Véase el [ej. 3.13](#))

partir de θ y construir un cubo de volumen $2V$ a partir de un cubo de volumen V . Sin embargo, la cuadratura del círculo seguirá siendo irresoluble mediante origami: construir un cuadrado de área A a partir de una circunferencia de área A precisa de construir $\sqrt{\pi} \in \mathbb{C}$. Si $\sqrt{\pi}$ fuese origami-construible, también tendríamos $\pi \in \mathcal{C}_P$, y por tanto que π es algebraico sobre \mathbb{Q} , mas tal afirmación es falsa.

La trascendencia de π sobre \mathbb{Q} fue demostrada por Carl F. Lindemann en 1882

4.5 CARACTERIZACIÓN DEL CONJUNTO DE RECTAS \mathcal{C} -CONSTRUIBLES

Lema 4.35 Por cualquier par de puntos \mathcal{C} -construibles pasa una recta \mathcal{C} -construible, y cualquier recta \mathcal{C} -construible contiene un par de puntos \mathcal{C} -construibles.

Demostración: La primera afirmación es el axioma **O1**. Para la segunda, basta observar que el cuadrado unidad es \mathcal{C} -construible. En consecuencia, los puntos de intersección de $X, Y, X - 1$ e $Y - 1$ con cualquier recta $l \in \mathcal{C}_C$ son \mathcal{C} -construibles (mediante **RectaIntersec**), y hay al menos 2 de ellos: $|(l \cap X) \cup (l \cap Y) \cup (l \cap X - 1) \cup (l \cap Y - 1)| \geq 2$. \square

Proposición 4.36 (Caracterización de \mathcal{C}_C) Sea $l \in \mathbb{R}[X, Y]$ una curva del plano. Entonces l es \mathcal{C} -construible si, y sólo si, es una recta y puede representarse mediante un polinomio con coeficientes \mathcal{C} -construibles; es decir:

$$l \in \mathcal{C}_C \iff \exists a, b, c \in \mathcal{C}_P \cap \mathbb{R} \text{ tales que } l = V(aX + bY + c).$$

Como es habitual, $V(f)$ denota la variedad algebraica afín asociada al polinomio $f \in K[X_1, \dots, X_n]$

Demostración: Si $l \in \mathcal{C}_C$, en virtud del **lema 4.35** contiene dos puntos distintos \mathcal{C} -construibles, pongamos $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}_P$. Basta con describir l como la recta que pasa por α_1 y α_2 :

$$(v_2 - u_2)(X - u_1) - (v_1 - u_1)(Y - u_2) \in (\mathcal{C}_P \cap \mathbb{R})[X, Y]$$

es un representante de l ; siendo $u_1 = \text{Re}(\alpha_1)$, $u_2 = \text{Im}(\alpha_1)$, $v_1 = \text{Re}(\alpha_2)$, $v_2 = \text{Im}(\alpha_2)$. Y, en efecto, u_1, u_2, v_1 y v_2 son reales por definición y \mathcal{C} -constructibles en virtud del **teorema 4.17, a**.

Recíprocamente, supongamos que l es una recta del plano definida mediante $aX + bY + c \in (\mathcal{C}_P \cap \mathbb{R})[X, Y]$. Tomemos dos rectas \mathcal{C} -construibles secantes con l (su existencia está garantizada, puesto que al menos dos de los lados del cuadrado unidad serán secantes con cualquier recta); digamos r y r' . Conforme a la implicación anterior, existen representantes suyos en $(\mathcal{C}_P \cap \mathbb{R})[X, Y]$, digamos $a_1X + b_1Y + c_1$ y $a_2X + b_2Y + c_2$ respectivamente. Ahora, los puntos de intersección $l \cap r$ y $l \cap r'$ tienen partes reales e imaginarias \mathcal{C} -construibles. En efecto, si nombramos $l \cap r = \{(\alpha_1, \alpha_2)\}$, $l \cap r' = \{(\beta_1, \beta_2)\}$, se tiene que

$$\alpha_1 = \frac{bc - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \quad \alpha_2 = \frac{a_1c - ac}{ab_1 - ba_1}, \quad \beta_1 = \frac{bc - b_2c}{ab_2 - a_2b}, \quad \beta_2 = \frac{a_2c - ac}{ab_2 - ba_2} \in \mathcal{C}_P$$

por ser combinación lineal de \mathcal{C} -construibles (**teorema 4.17**); y, consecuentemente, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2i$ y $\beta = \beta_1 + \beta_2i$ están en \mathcal{C}_P , de nuevo por **teorema 4.17**. Se concluye que l es \mathcal{C} -constructible como **O1**(α, β). \square

4.6 CARACTERIZACIÓN DE LOS POLÍGONOS REGULARES \mathcal{C} -CONSTRUIBLES

La construcción de polígonos regulares ha sido un problema central en geometría euclídea. Gauss culmina sus *Disquisitiones Arithmeticae* dando por primera vez²⁶ una caracterización de los polígonos regulares construibles con regla y compás:

«Para que la división geométrica de un círculo en N partes sea posible, N debe ser bien 2 o una potencia de 2, bien un número primo de la forma $2^m + 1$, o bien factorizarse como producto de una potencia de 2 por uno o varios primos distintos de esa forma.» [Gau01, prop. 366] (trad. p.).

En esta sección buscaremos dar una caracterización equivalente para la constructibilidad de polígonos regulares mediante origami.

En el caso de la regla y compás, la constructibilidad de n -ángulos regulares con n de la forma $2^u + 1$ primo se explica de acuerdo con la teoría de extensiones ciclotómicas. Dado que (para n primo) el grado de una raíz n -ésima primitiva de la unidad es $n - 1$, para que tal raíz primitiva sea $\mathcal{R}\mathcal{C}$ -constructible, $n - 1$ debe ser una potencia de 2. El producto por múltiples potencias de 2 adicionales corresponde a la capacidad de bisección de la herramienta.

En vista a lo comentado, lo esperable para el origami es construir n -ángulos con n primos de la forma $2^u 3^v + 1$ y sucesivas bisecciones y trisecciones. Pierpont estableció por primera vez esta caracterización en el contexto de intersección de cónicas en [Pie95].

Antes de empezar cabe aclarar que consideraremos que un polígono está construido si lo están sus vértices.

Lema 4.37 Podemos construir un n -ángulo regular mediante origami si, y sólo si, podemos construir $\xi_n = e^{2\pi i/n}$ mediante origami.

Demostración: Supongamos que tenemos construido un n -ángulo regular en algún lugar del plano. El centro C del n -ángulo es origami-constructible (por ejemplo como intersección de las bisectrices de dos ángulos interiores consecutivos del n -ángulo). Restando C a todos los vértices, y posteriormente dividiendo por la imagen del 1 sobre uno de los radios del n -ángulo, obtenemos un nuevo polígono regular de n lados, trasladado y girado de forma que quede centrado en el origen y uno de sus vértices esté en la semirecta $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Puesto que el ángulo central abarcando un lado del n -ángulo es $\theta = 2\pi/n$, la imagen del 1 sobre la recta radial asociada al primer vértice en sentido antihorario del n -ángulo, consecuentemente, será $\xi_n = e^{2\pi i/n}$.

Recíprocamente, si $\xi_n = e^{2\pi i/n} \in \mathcal{C}_P$, multiplicándolo por si mismo queda formado un n -ángulo regular (inscrito en la circunferencia unidad; cualquier otro n -ángulo regular podrá construirse escalándolo, trasladándolo y rotándolo como corresponda). \square

²⁶ En los *Elementos* de Euclides se recogen las construcciones de polígonos regulares mediante regla y compás conocidas en la antigüedad. Ahora sabemos que tal catálogo estaba incompleto, sin embargo, durante un lapso de 2000 años ningún nuevo n -ángulo fue construido. Hasta que en 1796 un joven Gauss despertase convencido de la constructibilidad del heptadecágono.

Tales primos son conocidos como *primos de Fermat*

(Véase [ej. 3.13](#))

Definición 4.38 Llamaremos *primo de Pierpont*²⁷ a los números primos $p \in \mathbb{N}$ de la forma $p = 2^u 3^v + 1$, con $u, v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Procedemos ya a enunciar la caracterización de los polígonos regulares construibles mediante origami. Como en la [sección 2.3](#), denotaremos Φ_n al n -ésimo polinomio ciclotómico y $\phi(n)$ será el valor de la función ϕ de Euler asociado a $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.39 (de Pierpont) Sea $n \in \mathbb{N}$. Podemos construir ξ_n una raíz n -ésima primitiva de la unidad mediante origami, es decir, $\xi_n \in \mathcal{O}_P$, si, y sólo si, n es de la forma $n = 2^r 3^s p_1 \cdots p_m$, donde $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \geq 0$ y p_1, \dots, p_m son primos de Pierpont distintos entre sí y distintos de 2 y 3.

Demostración: Dividiremos la demostración en dos partes. Primero veremos que ξ_n es \mathcal{O} -construible si, y sólo si, $\phi(n) = 2^a 3^b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Después estudiaremos la relación entre n y $\phi(n)$ cuando sea $\phi(n)$ de la forma anterior.

Parte I. Empezaremos probando que:

$$\xi_n \in \mathcal{O}_P \iff \phi(n) = 2^a 3^b \quad (a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

(Proposición 2.52)

(Def. 2.8, obs. a)

Observemos en primer lugar que (puesto que Φ_n es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ y por definición $\Phi_n(\xi_n) = 0$) Φ_n es el polinomio mínimo de ξ_n sobre \mathbb{Q} . Consecuentemente, tenemos:

(Proposición 2.12, b))

$$[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}] = \deg(\Phi_n) = \phi(n),$$

siendo la segunda igualdad por una de las propiedades de los polinomios ciclotómicos.

(Propiedades 2.51)

Si x es una raíz de Φ_n ,
entonces existe
 $0 \leq j < n$ tal que
 $x = \xi_n^j$

$a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Además es claro por definición que Φ_n descompone completamente en $\mathbb{Q}(\xi_n)$, esto es, $\mathbb{Q}(\xi_n) = L_{\xi_n}$ es el cuerpo de descomposición de Φ_n sobre \mathbb{Q} . Así, en virtud de la caracterización-Galois de \mathcal{O}_P (teorema 4.30), es:

$$\xi_n \in \mathcal{O}_P \iff [L_{\xi_n} : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n) = 2^a 3^b.$$

Parte II. Falta caracterizar n en caso de ser $\phi(n) = 2^a 3^b$. Vamos a ver que:

$$\phi(n) = 2^a 3^b \iff n = 2^r 3^s p_1 \cdots p_m,$$

El caso $m = 0$ está
también incluido

donde es $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, y son $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y p_1, \dots, p_m primos de Pierpont distintos entre sí y distintos de 2 y 3.

Supongamos $n = 2^r 3^s p_1 \cdots p_m$ como en el enunciado, y pongamos que cada uno de los distintos primos de Pierpont es $p_j = 2^{u_j} 3^{v_j} + 1$. Al desarrollar

²⁷ Nombrados en honor al matemático francés James Pierpont. Son, en cierto modo, una generalización de los primos de Fermat. De acuerdo con OEIS [Slo17], secuencia A005109, los primeros primos de Pierpont son: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 37, 73, 97, 109, 163, 193, 257, ... En [Gle88] se sugiere la existencia de infinitos primos de Pierpont, aunque actualmente esto es un problema abierto. A junio de 2017, según Prime Pages [Cal17], el mayor primo de Pierpont conocido es $2^{10829346} 3 + 1$.

$\phi(n)$ de acuerdo con las [propiedades 2.49](#) se obtiene²⁸:

$$\phi(n) = 2^r \cdot 3^{s-1} (2^{u_1} 3^{v_1}) \cdots (2^{u_m} 3^{v_m}) = 2^a 3^b.$$

Supongamos ahora que existen $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de forma que $\phi(n) = 2^a 3^b$. De acuerdo con el teorema fundamental de la aritmética, podemos escribir n factorizado como producto de primos de forma única: $n = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_m^{c_m}$, donde $m > 1, c_1, \dots, c_m \geq 1$ y p_1, \dots, p_m son primos distintos dos a dos. Manipulando $\phi(n)$ de acuerdo con esta factorización de n y las propiedades de la función ϕ de Euler tenemos²⁹:

$$2^a 3^b = \phi(n) = (p_1^{c_1} - 1) p_1^{c_1-1} \cdot (p_2^{c_2} - 1) p_2^{c_2-1} \cdots (p_m^{c_m} - 1) p_m^{c_m-1}.$$

En vista a esta igualdad se deduce que $(p_j - 1) | 2^a 3^b$ para cada j ($1 \leq j \leq m$), luego deben existir $u_j, v_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, u_j \leq a, v_j \leq b$ tales que $p_j - 1 = 2^{u_j} 3^{v_j}$; esto es, equivalentemente, que $p_j = 2^{u_j} 3^{v_j} + 1$ es de Pierpont para cada j .

Además, si $c_j - 1 > 0$, entonces también p_j divide a $2^a 3^b$. Puesto que p_j es un número primo por hipótesis, debe ser $p_j = 2$ ó 3 , ó $c_j = 1$ en otro caso.

Con todo, tenemos que necesariamente n es de la forma $n = 2^r 3^s p_1 \cdots p_m$ con $r, s \geq 0$ y $p_j = 2^{u_j} 3^{v_j} + 1$ primos de Pierpont distintos entre sí y distintos de 2 y 3. □

Renombrando
 $a = r + \sum_1^m u_j,$
 $b = s - 1 + \sum_1^m v_j$

Como es habitual,
 $d|n$ denota que d es
 divisor de n

Reordenando y
 renombrando
 adecuadamente

Ejemplo 4.40 Los menores polígonos regulares no construibles con regla y compás son el heptágono, el eneágono y el endecágono. De acuerdo con la caracterización dada, los dos primeros son origami-construibles, mientras que el endecágono sigue sin ser realizable. A continuación se listan los menores polígonos regulares no construibles para cada herramienta:

Regla y compás: 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, ...

Origami: 11, 22, 23, 25, 29, ... §

4.7 RESOLUBILIDAD DE ECUACIONES MEDIANTE ORIGAMI

Como ya hemos comentado, Margherita Beloch fue la primera en darse cuenta del potencial adicional que poseía el origami frente a las construcciones clásicas con regla y compás, observando que esta ventaja residía en el

28 Puesto que p_1, \dots, p_m son primos distintos, en particular son coprimos entre sí y con 2^r y 3^s ; por tanto $\phi(n) = \phi(2^r 3^s p_1 \cdots p_m) = \phi(2^r) \cdot \phi(3^s) \cdot \phi(p_1) \cdots \phi(p_m)$ (2.49, c). Los valores de cada uno de los factores en el producto son conocido mediante 2.49, a) y b); sustituyendo éstos, y los p_j por su valor donde corresponda se obtiene la igualdad.

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \phi(2^r) \cdot \phi(3^s) \cdot \phi(p_1) \cdots \phi(p_m) = (1)2^{r-1} \cdot (2)3^{s-1} \cdot (p_1 - 1) \cdots (p_m - 1) \\ &= 2^r \cdot 3^{s-1} \cdot [(2^{u_1} 3^{v_1} + 1) - 1] \cdots [(2^{u_m} 3^{v_m} + 1) - 1] \\ &= 2^r \cdot 3^{s-1} \cdot (2^{u_1} 3^{v_1}) \cdots (2^{u_m} 3^{v_m}) = 2^{r+u_1+\dots+u_m} \cdot 3^{s+v_1+\dots+v_m-1}. \end{aligned}$$

29 Dado que p_1, \dots, p_m son primos distintos, $p_1^{c_1}, \dots, p_m^{c_m}$ son coprimos entre sí. Aplicando las [propiedades 2.49, b\) y c\)](#) conseguimos:

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \phi(p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_m^{c_m}) = \phi(p_1^{c_1}) \cdot \phi(p_2^{c_2}) \cdots \phi(p_m^{c_m}) \\ &= (p_1^{c_1} - 1) p_1^{c_1-1} \cdot (p_2^{c_2} - 1) p_2^{c_2-1} \cdots (p_m^{c_m} - 1) p_m^{c_m-1}. \end{aligned}$$

axioma **O6**, el cual podía traducirse en la resolución de una ecuación cúbica. Así, en [Pia36] proporciona la primera prueba de que cualquier ecuación cúbica con coeficientes origami-construibles puede resolverse mediante origami. Independientemente, este resultado también se demuestra en [Jus86; Ger95; Alp00]. Consecuentemente, también³⁰ las ecuaciones cuárticas serán resolubles por origami.

(Teorema 4.30)

En primer lugar debemos aclarar que entendemos por resolver una ecuación con origami. Después, como consecuencia de la caracterización de \mathcal{C}_P mediante teoría de Galois, daremos nuestra propia prueba sobre la resolubilidad de ecuaciones polinomiales de hasta cuarto grado mediante origami.

Definición 4.41 ³¹ Dado $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio no constante con coeficientes en \mathbb{Q} , diremos que f es *resoluble mediante origami* si todas las raíces de f son origami-construibles, es decir, si

$$\{x \in \overline{\mathbb{Q}} \mid f(x) = 0\} \subset \mathcal{C}_P.$$

Teorema 4.42 Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio no constante. Si $\deg(f) \leq 4$, entonces f es resoluble mediante origami.

Demostración: Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado $n = \deg(f) \leq 4$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que f es mónico³². Se plantean dos escenarios, dependiendo de si f es irreducible sobre \mathbb{Q} o no.

Supongamos que f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. Sea, como habitualmente, L_f al cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Q} ; y sea $x \in L_f$ una raíz de f . Notemos que x es algebraico sobre \mathbb{Q} y $f \in \mathbb{Q}[X]$ es su polinomio mínimo por definición.

(Proposición 2.24, a)

Por ser f irreducible sobre \mathbb{Q} y \mathbb{Q} de característica 0, f es separable sobre \mathbb{Q} . Así, L_f es el cuerpo de descomposición de un polinomio separable en $\mathbb{Q}[X]$, y tenemos:

- a) $[L_f : \mathbb{Q}] = |\text{Gal}(L_f/\mathbb{Q})|$, en virtud del [teorema 2.32](#); y
- b) $|\text{Gal}(L_f/\mathbb{Q})|$ divide a $n!$. En efecto, de acuerdo con la [proposición 2.33](#), podemos considerar $\text{Gal}(L_f/\mathbb{Q})$ como un subgrupo de S_n (el grupo de permutaciones de n elementos); y en consecuencia, en aplicación del [teorema de Lagrange](#), $|\text{Gal}(L_f/\mathbb{Q})|$ divide a $|S_n| = n!$.

(Teorema 2.1)

³⁰ De acuerdo con las contribuciones de Ludovico Ferrari al *Ars Magna* de Cardano (cfr. [Bew06, capítulo 3]), las ecuaciones cuárticas pueden resolverse a través de cúbicas (mediante el llamado *resolvente cúbico de la ecuación cuártica*).

³¹ Podemos plantear esta definición de manera más general en los siguientes dos sentidos:

Definición 4.41.1 Dados $M = (\mathcal{T}, U_0)$ un mapa, y $f \in K[X]$ un polinomio no constante con coeficientes en $K \subset P^M$ un cuerpo M -construible, diremos que f es *resoluble mediante M* si sus raíces son M -construibles, i.e., si $\{x \in \overline{K} \mid f(x) = 0\} \subset P^M$.

Definición 4.41.2 Dados una herramienta \mathcal{T} , y $f \in K[X]$ un polinomio no constante con coeficientes en el cuerpo K , siendo $\{k_0, \dots, k_n\} \subset K$ el conjunto de sus coeficientes; diremos que f es *resoluble mediante \mathcal{T}* si existe una construcción de $\{x \in \overline{K} \mid f(x) = 0\}$ mediante \mathcal{T} a partir de $\{0, 1, k_0, \dots, k_n\}$.

³² De otra forma, dividiendo f entre su coeficiente principal obtendríamos $f^* \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio mónico del mismo grado y con las mismas raíces que f .

Combinando estos dos hechos tenemos que $[L_f : \mathbb{Q}]$ divide a $n!$. Puesto que tal grado es $n \leq 4$, tenemos que $n! \in \{1!, 2!, 3!, 4!\} = \{1, 2, 2 \cdot 3, 2^3 \cdot 3\}$. Y así, con todo, debe ser $[L_f : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ adecuados, de donde podemos concluir mediante el [teorema 4.30](#) que $x \in \mathcal{C}_P$.

Una vez probado el caso de f irreducible, el resto de casos son triviales. En efecto, si supongamos que f no es irreducible sobre \mathbb{Q} , f descompone en $\mathbb{Q}[X]$ como producto de polinomios irreducibles de grado menor. Y de acuerdo con lo anterior, las raíces de estos factores irreducibles (que son las raíces de f) son \mathcal{C} -construibles. \square

Observación: Puesto que las pruebas sobre la resolubilidad de ecuaciones polinomiales mediante origami usualmente fueron dadas de forma constructiva, durante años permaneció como un problema abierto determinar si el origami era capaz de ir más allá de resolver cuárticas. La respuesta es negativa. Podemos, por supuesto, encontrar ecuaciones concretas resolubles por origami, pero en general no será así. A modo de ejemplo, notemos cómo³³ cualquier polinomio irreducible de grado 5 tiene asociado un grupo de Galois de cardinal múltiplo de 5, luego no serán resolubles por origami.

(Cfr. [\[D007\]](#))

En [\[ES01\]](#) se exploran y describen métodos para la construcción de las raíces de ecuaciones cúbicas y cuárticas (en el contexto de intersección de cónicas). En [\[Hul11\]](#) y [\[Hul13, activ. 8-9\]](#), Hull describe explícitamente la resolución de la ecuación de tercer grado; es en cierta forma una reexposición del trabajo de M. P. Beloch, [\[Pia36\]](#), quien fue la primera en advertir que el caso cúbico del método de Lill³⁴ puede ser realizado con origami. Hablaremos más sobre esto en la [sección 6.2.3](#), donde presentaremos la versión del método con origami y veremos que si permitimos realizar varios pliegues simultáneamente cualquier ecuación algebraica será resoluble.

Aquí, resoluble referido a resoluble mediante origami multipliegue (ver [capítulo 6](#))

4.8 ESCAPANDO A LOS AXIOMAS CLÁSICOS

Hasta aquí abarca la modelización clásica del origami como herramienta de construcción. No obstante, no quedan recogidas todas las posibilidades que el papel nos ofrece; por ejemplo, es habitual realizar varios pliegues a la vez; también es conocido que podemos construir polígonos regulares irrealizables según la caracterización anterior anudando una tira de papel. Abordaremos estos problemas en los siguientes capítulos. Cerraremos el presente con un par de consideraciones finales.

En primer lugar, parece natural preguntarnos por el uso conjunto del origami con otras de las herramientas vistas. De acuerdo con [\[KGI11\]](#), el uso conjunto del origami y el compás no amplía el conjunto de puntos construibles

33 «En el caso de ecuaciones irreducibles de quinto grado, sólo hay cinco posibilidades (salvo isomorfismo) para el grupo de Galois asociado, siendo grupos de 5, 10, 20, 60 ó 120 permutaciones» ([\[Bew06, sección 9.17\]](#), trad. a.).

34 El método de Lill hace referencia al método gráfico de localización de las raíces de un polinomio de grado cualquiera ([\[Lil67; Lil68\]](#)) desarrollado por Eduard Lill, un ingeniero austríaco. Puede consultarse una descripción general del método en [\[Ria62\]](#), donde se muestra que es el equivalente geométrico al proceso de factorización algebraica.

en modo alguno, si bien podrá permitirnos realizar algunas construcciones de forma más simple y elegante. Esto no parece sorprendente en vista a la caracterización de \mathcal{C}_p dada en [teorema 4.33.j](#)). Sin embargo, en contra de lo que intuitivamente podríamos imaginar dada la equivalencia virtual con la regla marcada ([teorema 4.33.n](#)); la regla marcada y compás permiten construir puntos más allá de los origami-construibles (cfr. [\[Bar02\]](#)).

(Ver [nota 17](#) a pie de página)

Finalmente, cabe comentar que la ampliación del conjunto de polígonos regulares construibles depende únicamente de la capacidad del origami para trisecar ángulos. En [\[Gle88\]](#), Gleason prueba que los polígonos regulares construibles con origami (o con \mathcal{RCO}) son los mismos que los construibles con regla, compás y una herramienta que únicamente nos permita trisecar ángulos; y que, en general, la construcción de un n -ágono precisa únicamente de la capacidad de p -sectar ángulos (para p divisor de $\phi(n)$). Sin embargo, como hemos visto, el origami permite resolver la ecuación general de tercer grado, mientras que, de acuerdo con Gleason, la trisección corresponde al caso particular de cúbicas con sus tres raíces reales.

Como ya hemos comentado anteriormente, los axiomas Huzita-Justin están lejos de recoger todos los movimientos de doblado realizables en papiroflexia; en este capítulo presentaremos una nueva noción del origami, añadiendo nuevos axiomas de construcción a los ya considerados.

En el capítulo 4 analizamos la constructibilidad de ciertos polígonos regulares. Nuestros nuevos axiomas se basarán en el hecho de que a partir de uno de estos polígonos regulares podemos construir el cono de una pirámide regular de base cualquier polígono regular con un número de lados estrictamente menor. Para realizar esta construcción, por supuesto, deberemos abandonar el mundo de dobleces planos en el que nos hemos movido hasta ahora y manejar la hoja de papel en el espacio tridimensional; no obstante, formalizaremos como hasta ahora tales movimientos como parte de una herramienta de construcción en el plano.

Hemos elegido este sentido de expansión de la noción matemática clásica de origami como nuestra primera propuesta dado que los procedimientos de doblado son en la práctica muy fácilmente realizables con una hoja de papel. Llamaremos *origami regularGon* a esta nueva noción, originalmente formulada por José Ignacio Royo Prieto y Eulàlia Tramuns en [PT15].

5.1 AXIOMA REGULARGON

Consideremos que un polígono está construido si están construidos sus vértices. Como convenio listaremos los vértices (o los lados) de cualquier polígono convexo de forma consecutiva y en sentido antihorario.

Definición 5.1 Llamaremos *axioma regularGon* al axioma de construcción **RGon** definido, sobre las $(n+1)$ -uplas de puntos del plano $(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$ tales que son vértices de un $(n+1)$ -ágono regular, como

$n \geq 3$

$$\left(\overline{B_1 B_2}, \dots, \overline{B_{n-1} B_n}, \overline{B_n B_1} \right) = \mathbf{RGon} (A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$$

la n -upla de rectas que contienen los lados del n -ágono regular de vértices B_1, \dots, B_n determinado por $B_1 = A_1$ y $B_2 = A_2$.

Definición 5.2 Llamaremos *origami regularGon*, o *RG-origami*, a la herramienta

$$O_{RG} = \langle HJA \cup \{\mathbf{RGon}\}, \{\mathbf{RectaIntersec}\} \rangle.$$

5.1.1 El método de doblado

Lo primero es introducir las operaciones de doblado en las que nos sustentamos para considerar que podemos construir cualquier polígono regular

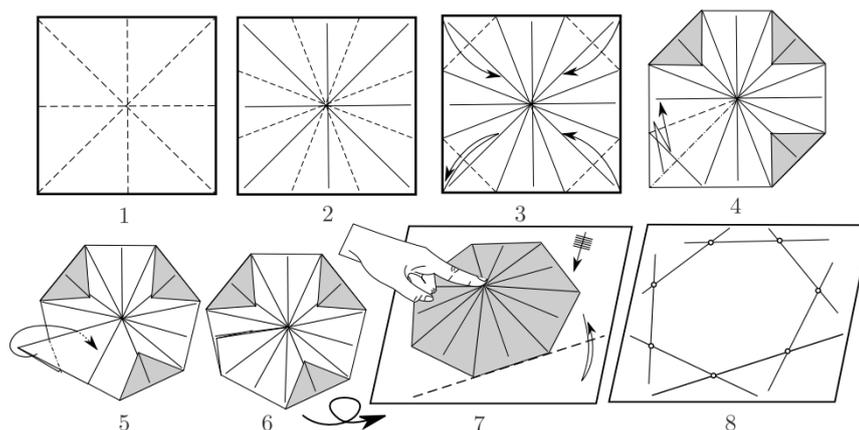
(ver [teorema 4.39](#))

mediante origami. Como vimos en la [sección 4.6](#), mediante origami clásico podemos construir n -ágonos regulares cuando n es de la forma $2^r 3^s p_1 \cdots p_m$, donde $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \geq 0$ y p_1, \dots, p_m son primos de Pierpont¹.

Consideremos que D uno de estos polígonos regulares origami-construibles, pongamos de n lados. Vamos a trabajar sobre esta región D ; por mayor comodidad consideraremos que disponemos de una hoja de papel conteniendo a D extra (adicional a la hoja ideal que identificamos con el plano de construcción), que nos servirá como instrumento de construcción. Además, asumiremos contruidos los diámetros pasando por los vértices de D .

Figura 5.1: Secuencia de doblado de un heptágono regular a partir de un octógono regular.

Imagen extraída de [\[PT15\]](#)



La secuencia de doblado se ilustra en la [figura 5.1](#) en el caso de ser D un octógono. En los pasos 4-6 se elimina una de las caras triangulares del polígono, formando una superficie no plana² en forma de cono piramidal. Esta superficie triangulada es flexible en el sentido de que sus ángulos diedros³ son variables. Si presionamos contra una superficie plana, esta libertad permitirá a la superficie desplegarse⁴ de forma que todos los vértices toquen tal superficie, esto es, que sean coplanares (y por tanto también los lados del $(n-1)$ -ágono). Conseguimos así una pirámide regular cuya base es un polígono regular con un lado menos que el original. Tras alinear uno de los lados con A_1 y A_2 , podemos doblar el papel-“plano de construcción” (paso 7) generando el conjunto de líneas de pliegue que son lados de tal $(n-1)$ -ágono.

Esto es, la amplitud en los pliegues (el ángulo formado entre dos caras triangulares) es libre

5.1.1.1 Validación matemática

Vamos a justificar la validez del método de construcción presentado, es decir, vamos a ver que verdaderamente se construye un polígono como el que queremos. Para ello, necesitaremos introducir algunas ideas previas.

- 1 Esto es, si son primos de la forma $p = 2^u 3^v + 1$, con $u, v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ([definición 4.38](#)).
- 2 Dado que ahora la suma de los ángulos centrales es menor que una vuelta completa.
- 3 Estamos llamando ángulo *diedro*, o *diedral*, al formado en la arista común entre dos caras; léase aquí: en el pliegue entre dos caras triangulares. Véase [\[Spr, dihedral angle\]](#).
- 4 En el sentido de ocupar el espacio, de expandirse mediante esta variabilidad en los ángulos diedrales; no de desdoblarse. Podemos prevenir que la pirámide se desdoble (en este método simple) plegando una solapa en el lado superpuesto; o usando modelos más robustos (e.g., la secuencia alternativa propuesta en [\[PT15\]](#) basada en un modelo de *tato* octogonal).

Un *tato* es una caja plana tradicional japonesa

Definición 5.3 Llamaremos *polígono cíclico* a cualquier polígono inscribible en una circunferencia, es decir, tal que todos sus vértices pertenecen a una misma circunferencia.

Dado un polígono cíclico, la circunferencia que pasa por todos sus vértices se conocerá como *circunferencia circunscrita*; y su radio y su centro, respectivamente, como *circunradio* y *circuncentro* del polígono.

Proposición 5.4 Dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ una lista ordenada de longitudes satisfaciendo

$$2 \max_{1 \leq j \leq n} \{a_j\} \leq \sum_{j=1}^n a_j, \tag{5.1}$$

existe un polígono cíclico convexo con lados de longitud las dadas (en ese orden y en sentido antihorario); y, además, es único. Además, dicha condición es necesaria para la existencia de un polígono cíclico.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_1 = \max \{a_1, \dots, a_n\}$. Fijados A_1 y A_2 los vértices de un segmento de longitud a_1 , tomemos una circunferencia que pase por A_1 y A_2 y con radio lo suficientemente grande como para inscribir sin autointersecciones una poligonal abierta de longitudes las dadas.

Emplacemos en la circunferencia el resto de vértices A_3, \dots, A_{n+1} a distancias a_2, \dots, a_n , respectivamente, en sentido antihorario. Variando el centro de la circunferencia a lo largo de la recta mediatriz de A_1 y A_2 podemos encontrar un único radio de forma que la poligonal se cierre sin autointersecciones (i.e., tal que $A_{n+1} = A_1$ y la poligonal delimite un polígono convexo).

Para la segunda parte, supongamos que P es un polígono cíclico con lados de longitud las dadas; y, como antes, que $a_1 = \max \{a_1, \dots, a_n\}$. Su perímetro define una poligonal cerrada de dichas longitudes; cortémosla por el punto de unión entre el primer y el último lado. Si no se cumple 5.1, esto es, si la suma del resto de lados es menor que el primero, la poligonal no podría cerrarse. \square

Lema 5.5 Dado un cono piramidal⁵ S formado por n caras triangulares planas T_1, \dots, T_n , si denotamos por θ_j el ángulo formado en cada T_j en la cúspide, entonces se verifica:

$$2 \max_{1 \leq j \leq n} \{\theta_j\} \leq \sum_{j=1}^n \theta_j, \tag{5.2}$$

Demostración: Pongamos que es $\theta_1 = \max \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, y cortemos el cono piramidal por la arista común a T_n y T_1 . Obtenemos así un desarrollo plano de la pirámide. Supongamos que no se cumple 5.2, es decir, que $\theta_1 > \theta_2 + \dots + \theta_n$; consecuentemente las caras triangulares T_2, \dots, T_n no pueden cubrir el ángulo θ_1 . En tal caso, para poder reconstruir la pirámide (i.e., volver a pegar T_n y T_1 por su arista común), será necesario que T_1 se doble, llegando así a contradicción puesto que T_1 es una cara plana. \square

⁵ Estamos llamando *cono piramidal* a la superficie poliédrica formada por las caras laterales de una pirámide; i.e., a una pirámide hueca y sin su base.

Si suponemos que $a_1 = \max \{a_1, \dots, a_n\}$, esta condición es equivalente a:
 $a_1 \leq a_2 + \dots + a_n$

Único, salvo movimiento.

Podemos suponer además que el centro de la circunferencia queda emplazado “superiormente” respecto de A_1 y A_2 . En estas condiciones, la idea intuitiva de la demostración es ir reduciendo el radio de la circunferencia hasta cerrar la articulación de segmentos

Si suponemos que $\theta_1 = \max \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, esta condición es equivalente a:
 $\theta_1 \leq \theta_2 + \dots + \theta_n$

Que se doble, bien curvándose, bien introduciendo un nuevo pliegue que subdivida T_1 en dos caras

Estamos ya en condiciones de abordar la validez matemática del método, basándonos en el siguiente resultado.

Proposición 5.6 Sea S una superficie poliédrica inmersa en \mathbb{R}^3 formada por n triángulos isósceles $\Delta(d, d, a_1), \dots, \Delta(d, d, a_n)$ pegados consecutivamente por sus lados iguales formando un cono piramidal con vértice C . Supongamos que esta superficie es flexible y que la suma de los ángulos triangulares de vértice C es menor que 2π . Entonces existe un único polígono tal que, pegado a S por su frontera, forma una pirámide.

Flexible en el sentido de la construcción, i.e., que pueden variar sus ángulos diedrales al doblarse a través de cualquiera de las aristas. Las caras triangulares permanecen rígidas (planas)

Demostración: Sea d la longitud de los lados iguales de los triángulos, y para cada j ($1 \leq j \leq n$), a_j la longitud del lado restante del triángulo $\Delta(d, d, a_j)$ y $\theta_j \in (0, \pi)$ el ángulo opuesto a dicho lado. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_n\}$.

Empezaremos abordando la unicidad de una pirámide con cono piramidal S . Supongamos la existencia de una pirámide tal; entonces sus vértices deben estar en la esfera de radio d centrada en su cúspide C (puesto que todas las aristas de S son de longitud d) y ser coplanares (puesto que su base debe ser plana). La intersección de la esfera con tal plano es una circunferencia, luego la base de tal pirámide es un polígono cíclico de lados a_1, \dots, a_n , es decir, la base es el único polígono cíclico con esas características .

(proposición 5.4)

Probemos ahora la existencia de tal pirámide. Vamos a ver primeramente que a_1, \dots, a_n verifican la [condición 5.1](#).

Antes de nada, observemos que por definición, para cada cara triangular, tenemos que $\sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right) = \frac{a_j/2}{d}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\theta_1 = \max\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, y así (puesto que $\theta_j \in (0, \pi]$) también $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_n\}$. Razonaremos por reducción al absurdo: supongamos que no se cumple [5.1](#), es decir, que $a_1 > a_2 + \dots + a_n$.

Y por tanto $\frac{\theta_j}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ para cada $1 \leq j \leq n$; siendo en este dominio la función seno creciente

Puesto que $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n < 2\pi$, tenemos que $(\theta_2 + \dots + \theta_n)/2 < \pi$. Así, aplicando repetidamente que $\sin(\omega_1 + \omega_2) \leq \sin(\omega_1) + \sin(\omega_2)$ (válido si tanto ω_1 y ω_2 como $\omega_1 + \omega_2$ están en $[0, \pi]$)⁶, tenemos:

$$\sin\left(\frac{\theta_2 + \dots + \theta_n}{2}\right) \leq \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \dots + \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \frac{a_2 + \dots + a_n}{2d} < \frac{a_1}{2d} = \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right). \quad (5.3)$$

Observemos además que, bajo nuestra hipótesis de reducción al absurdo, debe ser $\theta_2 + \dots + \theta_n \leq \pi$. En efecto, en caso contrario la poligonal de lados a_2, \dots, a_n inscrita en una circunferencia de radio d abarcaría un ángulo mayor o igual que π , y consecuentemente: $a_2 + \dots + a_n \geq 2d$. Pero la existencia de la primera cara triangular del cono asegura que $a_1 \leq 2d$; y por tanto, se tendría $a_2 + \dots + a_n \geq a_1$, en contradicción con nuestra hipótesis.

De esta forma, tenemos que $\frac{\theta_1}{2}$ y $\frac{\theta_2 + \dots + \theta_n}{2}$ están en $[0, \frac{\pi}{2}]$, y de la [desigualdad 5.3](#) se deduce que $\theta_1 > \theta_2 + \dots + \theta_n$; lo cual, de acuerdo con el [lema 5.5](#), es absurdo.

⁶ Esta desigualdad se sigue de la fórmula del seno de la suma:

$$\begin{aligned} |\sin(\omega_1 + \omega_2)| &= |\sin(\omega_1)\cos(\omega_2) + \cos(\omega_1)\sin(\omega_2)| \\ &\leq |\sin(\omega_1)| |\cos(\omega_2)| + |\cos(\omega_1)| |\sin(\omega_2)| \leq |\sin(\omega_1)| + |\sin(\omega_2)|, \end{aligned}$$

y, dado que $\sin(\omega) = |\sin(\omega)|$ para $\omega \in [0, \pi]$.

Con esto, tenemos que a_1, \dots, a_n son las longitudes de un polígono cíclico, y por tanto puede formarse una pirámide como en el enunciado. Explícitamente, sea r el circunradio de tal polígono cíclico; y consideremos la esfera inmersa en \mathbb{R}^3 de radio d y centro $C = (0, 0, \sqrt{d^2 - r^2})$. Su intersección con el plano Z es una circunferencia de radio r . Construyendo sobre tal circunferencia el polígono cíclico de lados a_1, \dots, a_n , y uniendo sus vértices con C queda construida una pirámide tal. \square

Está garantizado que $r < d$, dado que el cono piramidal no es plano

Corolario 5.7 En las condiciones de la proposición anterior, si los n triángulos isósceles son iguales (pongamos de lado a), entonces P es el n -ágono regular de lado a .

Con la notación de la [proposición 5.6](#):
 $a_j = a \quad \forall j, 1 \leq j \leq n$

Queda así demostrada la validez del método de construcción; es decir, realmente se construye un n -ágono regular. Además, en la práctica podemos justificar su buen funcionamiento en base a que:

- El circuncentro del $(n+1)$ -ágono regular pertenece a su interior (para que el cono piramidal pueda construirse a partir de la superficie del polígono preexistente).
- El circunradio del n -ágono regular es menor que el del $(n+1)$ -ágono regular (obsérvese que éste último hace el papel de la longitud d en la [proposición 5.6](#)).
- De acuerdo con el teorema de rigidez de Cauchy-Legendre⁷, cualquier construcción física de la pirámide con papel será válida, sin importar los pliegues alrededor de tal construcción.

5.2 REGULARGON-CONSTRUCTIBILIDAD

Definición 5.8 Llamaremos *mapa canónico del origami regularGon* al mapa

$$\mathcal{O}_{RG} = (O_{RG}, \{0, 1\}).$$

De sus elementos y subconjuntos diremos que son construibles mediante origami regularGon, y escribiremos \mathcal{O}_{RG} -construibles.

También, que son regularGon-construibles o RG-construibles

Puesto que O_{RG} genera geoméricamente a \mathcal{O} , es claro que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{RG}$. En esta sección vamos a ver que esta inclusión es estricta; que todos los polígonos regulares (de lado \mathcal{O}_{RG} -construible) serán construibles; y proporcionaremos una caracterización del conjunto de punto regularGon-construibles.

Durante esta sección, siguiendo con la notación de la [definición 5.1](#), A_1, \dots, A_{n+1} serán los vértices de un $(n+1)$ -ágono regular, y B_1, \dots, B_n los vértices del n -ágono regular construido mediante **RGon** (A_1, \dots, A_{n+1}) .

⁷ «Si dos poliedros convexos son combinatoriamente equivalentes y sus caras correspondientes son congruentes entre sí, entonces los poliedros son también congruentes» (cfr. [AZ14]). Como consecuencia, si construimos un modelo físico de un poliedro convexo como unión de caras rígidas entre sí mediante bisagras, entonces tal construcción forma en conjunto una estructura rígida.

Proposición 5.9 Sea $K \subset \mathbb{C}$ un cuerpo tal que $A_1, \dots, A_{n+1} \in K$. Entonces

$$K(B_1, \dots, B_n) = K(\xi_n).$$

Demostración: Sea C el circuncentro del n -ágono de vértices B_1, \dots, B_n .

Es claro que

$$B_j - C = (\xi_n)^{j-1} (B_1 - C) \quad (5.4)$$

para $j = 2, \dots, n$. Por tanto $K(B_1, \dots, B_n) \subset K(B_1, \xi_n, C) = K(\xi_n)$; esta última igualdad por ser $B_1 = A_1 \in K$ y dado que, a partir de 5.4 (con $j = 2$), $C = (A_2 - \xi_n A_1)/(1 - \xi_n) \in K(\xi_n)$.

$B_2 = A_2 \in K$

Ahora, por definición $C = (B_1 + \dots + B_n)/n$, luego $C \in K(B_1, \dots, B_n)$. Y tenemos (como antes de la igualdad 5.4 para $j = 2$) que

$$\xi_n = (B_2 - C)/(B_1 - C) \in K(B_1, B_2, C) \subset K(B_1, \dots, B_n),$$

de donde se concluye la inclusión $K(\xi_n) \subset K(B_1, \dots, B_n)$, y por tanto la igualdad entre ambos. \square

Advirtamos que indirectamente en esta prueba hemos visto que el circuncentro (y por tanto el circunradio) de un polígono regular RG-construible es RG-construible

Proposición 5.10 El conjunto de los puntos \mathcal{O}_{RG} -construibles contiene todas las raíces de la unidad; esto es:

$$\xi_n \in \mathcal{O}_{RG} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración: Dado $n \in \mathbb{N}$, es claro que existe⁸ un natural $m \geq n$ tal que $\xi_m \in \mathcal{O}$, es decir, tal que un polígono de m lados sea \mathcal{O} -construible. Nombremos A_1, \dots, A_m a los vértices de tal polígono origami-construible; mediante la aplicación del axioma **RGon** obtenemos un polígono de $m - 1$ lados; puesto que $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{RG}$, en virtud de la proposición 5.9, tenemos que $\mathcal{O}(B_1, \dots, B_{m-1}) = \mathcal{O}(\xi_{m-1}) \subset \mathcal{O}_{RG}$. Aplicando iterativamente **RGon** sobre los sucesivos polígonos de $m - 1, m - 2, \dots, n + 1$ lados finalmente obtenemos que $\mathcal{O}(\xi_{m-1}, \dots, \xi_{n+1})(\xi_n) \subset \mathcal{O}_{RG}$, y por tanto, como queríamos, $\xi_n \in \mathcal{O}_{RG}$. \square

Como consecuencia inmediata de esta proposición podemos afirmar que el origami regularGon extiende estrictamente al origami clásico, es decir, que la contención

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{RG}$$

es estricta. Basta advertir que, por ejemplo, ξ_{11} es regularGon-construible pero no lo es mediante origami clásico (cfr. teorema 4.39 y ejemplo 4.40).

5.2.1 Caracterización de \mathcal{O}_{RG} mediante torres de cuerpos

Teorema 5.11 Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. El número complejo α es \mathcal{O}_{RG} -construible si, y sólo si, existe una torre de cuerpos

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

verificando que $\alpha \in F_n$ y que, para cada j , o bien $[F_j : F_{j-1}] \in \{2, 3\}$, o bien $F_j = F_{j-1}(\xi_k)$ para cierto $k \in \mathbb{N}$.

$1 \leq j \leq n$

Definición 5.12 De una secuencia de subcuerpos $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n$ diremos que forman una *2,3,c-torre de cuerpos* si cada una de las extensiones intermedias $F_{j-1} \subset F_j$ es o de grado 2, o de grado 3, o una extensión ciclotómica.

‘c’ por ‘ciclotómica’

Demostración: El proceder de esta prueba es completamente análogo al seguido en la demostración del teorema principal del origami clásico. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$.

Supongamos en primer lugar que existe una 2,3,c-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ conteniendo a α , y veamos que $\alpha \in \mathcal{C}_{RG}$. Razonaremos mediante inducción finita sobre los índices de cada subcuerpo de la 2,3,c-torre.



Es claro para el primer subcuerpo: $F_0 = \mathbb{Q} \subset \mathcal{C}_{RG}$. Supongamos ahora que para cierto subcuerpo $F_{j-1} \subset \mathcal{C}_{RG}$ y veamos que también $F_j \subset \mathcal{C}_{RG}$.

Puesto que $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$ (prop. 4.17, ii), y $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_{RG}$ (dado que $\mathcal{O}_{RG} \hookrightarrow \mathcal{O}$)

En caso de ser $F_{j-1} \subset F_j$ una extensión de grado 2 o 3, basta adaptar los argumentos dados en la demostración del [teorema 4.26](#) para garantizar $F_j \subset \mathcal{C}_{RG}$. En otro caso es $F_j = F_{j-1}(\xi_k)$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, y el axioma **RGon** nos permite añadir tal raíz de la unidad; explícitamente, $\xi_k \in \mathcal{C}_{RG}$ en virtud de la [proposición 5.10](#), y consecuentemente $F_j = F_{j-1}(\xi_k) \subset \mathcal{C}_{RG}$.

Podemos concluir por tanto que $F_n \subset \mathcal{C}_{RG}$, y en particular $\alpha \in \mathcal{C}_{RG}$.

Recíprocamente, si $\alpha \in \mathcal{C}_{RG}$, veamos que existe una 2,3,c-torre conteniéndolo como en el enunciado. Sea $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ el número de la menor capa de \mathcal{C}_{RG} a la que pertenezca α , es decir, tal que $\alpha \in P_N^{\mathcal{C}_{RG}}$ y $\alpha \notin P_{N-1}^{\mathcal{C}_{RG}}$.



Menor en el sentido de inclusión (ver [definición 3.10](#))

En primer lugar, por inducción sobre el número de capa N , vamos a ver que existe una 2,3,c-torre de cuerpos conteniendo las partes real e imaginaria de α . El caso $N = 0$ es trivial: $P_0^{\mathcal{C}_{RG}} = \{0, 1\}$ y basta tomar $F_n = F_0 = \mathbb{Q}$.

Supongamos ahora que α pertenece a una capa superior, pongamos $P_N^{\mathcal{C}_{RG}}$, y asumamos como hipótesis de inducción que para todo número $\beta \in P_{N-1}^{\mathcal{C}_{RG}}$ en la capa $N - 1$ existe una 2,3,c-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_{\beta,0} \subset \dots \subset K_{\beta,n_\beta} \subset \mathbb{C}$ conteniendo $Re(\beta)$, $Im(\beta)$ sus partes real e imaginaria, y que para toda recta $l \in C_{N-1}^{\mathcal{C}_{RG}}$ en la capa $N - 1$ existe una 2,3,c-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_{l,0} \subset \dots \subset K_{l,n_l} \subset \mathbb{C}$ de forma que hay un representante de l con sus coeficientes en la 2,3,c-torre ($l \in K_{l,n_l}[X, Y]$).

Inexcusablemente α es intersección de dos rectas, digamos $\alpha = \mathbf{RectaIntersec}(l_1, l_2)$ (y al menos una de ellas creada en la capa N). Si podemos construir estas rectas a partir de elementos de la capa $N - 1$ mediante axiomas Huzita-Justin, es la prueba del [teorema 4.26](#) y hemos acabado.

Por contra, supongamos que es necesario aplicar el axioma **RGon** para generar una de ellas, digamos $l_1 = \mathbf{RGon}(A_1, \dots, A_{k+1})$ con $A_1, \dots, A_k \in P_{N-1}^{\mathcal{C}_{RG}}$. Por hipótesis de inducción, existe, para cada vértice A_j , una 2,3,c-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_{A_j,0} \subset \dots \subset K_{A_j,n_{A_j}} \subset \mathbb{C}$ conteniéndolo. Y consecuentemente,

8 Aunque posiblemente habrá mejores candidatos (en el sentido de más cercanos a n), siempre podemos tomar $m = 2^k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande mediante consecutivas bisecciones (tal y como se muestra en el paso 2 de la [figura 5.1](#)).

(Cfr. [proposición 2.69](#) y
la [observación](#)
[posterior](#))

como composición de éstas, una 2,3,c-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset \cdots \subset K_m \subset \mathbb{C}$ con $A_1, \dots, A_{k+1} \in K_m$. Así, puesto que l_1 es una recta conteniendo uno de los lados del k -ágono regular de vértices B_1, \dots, B_k , en particular podemos describirlo como la recta que pasa por dos de estos vértices y, por tanto, hay un representante de l_1 con coeficientes en $K_m(B_1, \dots, B_k) = K_m(\xi_k)$. En definitiva, hemos visto que podemos construir (yuxtaponiendo esta extensión ciclotómica a la torre anterior) una 2,3,c-torre de cuerpos de forma que contenga los coeficientes de (un representante de) l_1 .

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset \cdots \subset K_m \subset K_{m+1} = K_m(\xi_k) \subset \mathbb{C}$$

Finalmente, como en la demostración del [teorema principal del origami](#), puesto que en todo caso tenemos dos 2,3,c-torres conteniendo respectivamente los coeficientes de l_1 y l_2 , existirá como composición suya una 2,3,c-torre $\mathbb{Q} = K_0 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{C}$ conteniendo los coeficientes de ambas rectas; luego también las coordenadas de su intersección, i.e., $Re(\alpha), Im(\alpha) \in K_n$. Y, en definitiva, (añadiendo la unidad imaginaria i , una extensión de grado 2, si fuese necesario) una 2,3,c-torre de cuerpos conteniendo a α . \square

5.2.2 Consecuencias

Corolario 5.13 El cuerpo de los números \mathcal{O}_{RG} -construibles, \mathcal{O}_{RGp} , es el menor subcuerpo de \mathbb{C} estable por raíces cúbicas, cuadradas y conteniendo a todas las raíces de la unidad.

(Cfr. [proposiciones](#)
[4.10](#), [4.11](#), [4.15](#) y [4.16](#))

Demostración: Es claro que \mathcal{O}_{RGp} es un cuerpo extensión de \mathbb{Q} , puesto que $0, 1 \in \mathcal{O}_{RG}$, \mathcal{O}_{RG} genera geoméricamente a \mathcal{O} y las operaciones de cuerpo son \mathcal{O} -construibles.

(Cfr. [proposiciones](#)
[4.19](#) y [4.24](#))

Igualmente, ya vimos que las raíces cuadradas y cúbicas eran origami-construibles, luego, puesto que $\mathcal{O}_{RG} \circlearrowright \mathcal{O}$, queda garantizado que \mathcal{O}_{RGp} es estable por raíces cuadradas y cúbicas. Además, en virtud de la [proposición 5.10](#), $\xi_n \in \mathcal{O}_{RGp}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, si denotamos como M al menor subcuerpo de \mathbb{C} estable por raíces cuadradas, cúbicas y conteniendo todas las raíces de la unidad, entonces es claro que $M \subset \mathcal{O}_{RGp}$.

Veamos que también $\mathcal{O}_{RGp} \subset M$. El razonamiento es parejo al realizado en la demostración del [corolario 4.28](#). Sea $\alpha \in \mathcal{O}_{RGp}$ un número regularGon-construible; en virtud del [teorema 5.11](#) existe una 2,3,c-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ conteniéndolo. Es claro que $\mathbb{Q} \subset M$ por ser $M \subset \mathbb{C}$ cuerpo. Por inducción finita sobre el índice del subcuerpo de la torre, visto que si $F_{j-1} \subset M$ entonces también $F_j \subset M$, quedará probado que $\alpha \in M$.

Supongamos que $F_{j-1} \subset M$. Si $F_{j-1} \subset F_j$ es una extensión de grado 2 ó 3 son casos ya contemplados en la demostración del [corolario 4.28](#). Esquemáticamente, dado cualquier elemento $\beta \in F_j$, el grado de $m_{\beta, F_{j-1}}$ su polinomio mínimo sobre F_{j-1} será bien 1 bien el grado de la extensión (2 ó 3); y en cualquier caso, puesto que M es cerrado por raíces cuadradas y cúbicas por definición, β podrá escribirse mediante sumas, productos, raíces cuadradas y

cúbicas de los coeficientes de $m_{\beta, F_{j-1}}$, esto es, como combinación de elementos de M , luego $\beta \in M$ y por tanto también $F_j \subset M$.

Queda por tratar el caso de ser $F_{j-1} \subset F_j$ una extensión ciclotómica; digamos $F_j = F_{j-1}(\xi_k)$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. En este supuesto, cualquier elemento $\beta \in F_j$ puede escribirse como $\beta = a_0 + a_1\xi_k + \cdots + a_{k-1}\xi_k^{k-1}$ con $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in F_{j-1} \subset M$; puesto que M contiene cualquier raíz n -ésima de la unidad por definición, en particular $\xi_k \in M$. En definitiva, tenemos que $\beta \in M$ por ser combinación de elementos de M , y por tanto también en este caso $F_j \subset M$. \square

$$\xi_k^k = 1$$

Advirtamos que, como consecuencia del célebre teorema de Kronecker-Weber:

Teorema 5.14 (de Kronecker-Weber) Dada una extensión $\mathbb{Q} \subset L$ finita y tal que $L \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:

(Cfr. [Cox12, Teo. 6.5.5])

- a) $\mathbb{Q} \subset L$ es normal y $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ es abeliano.
- b) Existe una raíz de la unidad ξ_n tal que $L \subset \mathbb{Q}(\xi_n)$.

todo número $\alpha \in L$ contenido en una extensión $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{C}$ como la del teorema es \mathcal{C}_{RG} -construible (puesto que $\mathbb{Q}(\xi_n) \subset \mathcal{C}_{RG}$).

De cualquier extensión $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{C}$ como la del enunciado diremos que es una *extensión abeliana*⁹; y de cualquier elemento suyo $\alpha \in L$ diremos que es un *número abeliano*.

Si denotamos \mathbb{Q}^{Ab} al conjunto de todos los números abelianos, entonces, la caracterización anterior puede reescribirse como sigue.

Siguiendo la terminología de [PT15], llamaremos a $\mathbb{Q}^{\text{Ab}} \subset \mathbb{C}$ *extensión abeliana maximal* de \mathbb{Q}

Corolario 5.15 El cuerpo de los números \mathcal{C}_{RG} -construibles, \mathcal{C}_{RGp} , es el menor subcuerpo de \mathbb{C} conteniendo a \mathbb{Q}^{Ab} y estable por raíces cúbicas, cuadradas.

Demostración: Es claro que

$$\mathbb{Q}^{\text{Ab}} \subset \mathcal{C}_{RG}.$$

En efecto, si $\alpha \in \mathbb{Q}^{\text{Ab}}$, entonces existe una extensión abeliana $\mathbb{Q} \subset L$ tal que $\alpha \in L$, y de acuerdo con el [teorema 5.14](#), existe cierto $n \in \mathbb{N}$ tal que $L \subset \mathbb{Q}(\xi_n)$. En virtud de la [proposición 5.10](#) se concluye $\alpha \in \mathbb{Q}(\xi_n) \subset \mathcal{C}_{RG}$.

Ahora, si denotamos como M al menor subcuerpo de \mathbb{C} estable por raíces cuadradas, cúbicas y conteniendo a \mathbb{Q}^{Ab} , de la caracterización anterior tenemos trivialmente que $M \subset \mathcal{C}_{RGp}$. Basta probar, por tanto, que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\xi_n \in M$ para concluir $\mathcal{C}_{RGp} \subset M$, y en consecuencia, la igualdad. Para ello, veamos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi_n)$ es una extensión abeliana para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es claro que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi_n)$ es de Galois, pues $\mathbb{Q}(\xi_n)$ es el cuerpo de descomposición de $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio separable. Para ver que $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q})$ es un grupo abeliano, consideremos $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q})$. Todo elemento $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q})$ queda determinado al definir la imagen

([proposición 2.30](#))

$$\sigma(\xi_n) \in \{1, \xi_n, \dots, \xi_n^{n-1}\}$$

⁹ En general, en concepto de *extensión abeliana* se aplica a cualquier extensión de Galois cuyo grupo de Galois sea abeliano. En nuestro caso es claro que $\mathbb{Q} \subset L$ es Galois puesto que es normal (por definición) y separable (puesto que es una extensión algebraica de \mathbb{Q} un cuerpo de característica 0 ([prop. 2.24, b](#))).

de ξ_n ; pongamos $\sigma_1(\xi_n) = \xi_n^{j_1}$ y $\sigma_2(\xi_n) = \xi_n^{j_2}$. Se tiene:

$$\sigma_1\sigma_2(\xi_n) = \sigma_1(\xi_n^{j_2}) = (\sigma_1(\xi_n))^{j_2} = (\xi_n^{j_1})^{j_2} = \xi_n^{j_1j_2} = \xi_n^{j_2j_1} = \dots = \sigma_2\sigma_1(\xi_n)$$

y por tanto, puesto que $\sigma_1\sigma_2$ y $\sigma_2\sigma_1$ quedan definidos por su imagen de ξ_n , es $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$, i.e., $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q})$ es abeliano, como queríamos. \square

Esto es, todo número algebraico cuyo grupo de Galois sea abeliano es \mathcal{C}_{RG} -construible

Queda visto que todo número abeliano es regularGon-construible. Advirtamos, no obstante, que hay números regularGon-construibles no abelianos.

Ejemplo 5.16 Consideremos $h = X^3 - 2X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Es obvio que h es irreducible sobre \mathbb{Q} en virtud del criterio de Eisenstein¹⁰.

El grupo de Galois de h es S_3 de acuerdo con el siguiente lema:

Cfr. [PT15, lema 2.5]

« Sea $h \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible sobre \mathbb{Q} y de grado $\deg(h) = p$ primo. Si h tiene exactamente $p - 2$ raíces reales, entonces su grupo de Galois sobre \mathbb{Q} es el grupo simétrico S_p »¹¹.

Con esto, tenemos que $\text{Gal}(L_h/\mathbb{Q}) \cong S_3$ no es abeliano (ningún S_n con $n \geq 3$ lo es¹²). Consecuentemente, las raíces de h no son números abelianos; sin embargo, puesto que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(x)$ es una extensión de grado 3, tales raíces sí son regularGon-construibles (de hecho, son origami-construibles). \S

Finalmente, observemos que sí es cierto que todo número construible mediante origami regularGon tiene grupo de Galois soluble. Esto proporciona un criterio negativo sobre regularGon-constructibilidad.

Esto es, su grupo de Galois es soluble (teorema 2.61)

Corolario 5.17 Si $\alpha \in \mathcal{C}_{RGp}$, entonces es expresable por radicales sobre \mathbb{Q} .

10 «Dado $h = a_nX^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio no constante. Si existe $p \in \mathbb{N}$ un número primo tal que $p \nmid a_n$, $p \mid a_{n-1}, \dots, p \mid a_0$, y $p^2 \nmid a_0$, entonces h es irreducible sobre \mathbb{Q} » [Cox12, teorema 4.2.3]. En particular, cualquier polinomio de la forma $X^n + pX + p$ con $n \geq 2$ y p primo es irreducible de acuerdo con este criterio ([Cox12, ejercicio 4.2.4]).

11 Vamos a demostrar aquí el lema, dado que no puede encontrarse en la bibliografía consultada. Demostración: Sea L_h el cuerpo de descomposición de h sobre \mathbb{Q} . Es claro, puesto que \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, que $\mathbb{Q} \subset L_f \subset \mathbb{C}$. De acuerdo con la proposición 2.33, podemos considerar $\text{Gal}(L_f/\mathbb{Q})$ como un subgrupo de S_p el grupo simétrico de p elementos; digamos $\text{Gal}(L_f/\mathbb{Q}) \cong G \subset S_p$.

Además, puesto que $p \mid [L_f : \mathbb{Q}] = |G|$ (lema 2.14 y teorema 2.32), tenemos como consecuencia del teorema de Cauchy (cfr. [XDF93, pág. 147]) que G contiene un elemento de orden p , digamos $\sigma \in G$. Por tanto, tenemos definido un p -ciclo.

Si probamos que, además, en G hay un 2-ciclo (una transposición), necesariamente $G = S_p$. Y, en efecto, considerando la conjugación compleja $\bar{\cdot}$, y restringiéndola a L_f , es claro que deja fijo a \mathbb{Q} , luego $\bar{\cdot}|_{L_f} \in \text{Gal}(L_f/\mathbb{Q})$. Puesto que, por hipótesis, h tiene exactamente dos raíces no reales (complejas conjugadas entre sí, por tanto), $\bar{\cdot}|_{L_f}$ simplemente intercambia estas raíces entre sí, dejando fijas al resto. Y de aquí, tenemos definida una transposición τ en G .

Finalmente, como anticipábamos, se concluye que $G = S_p$ por contener un p -ciclo y una transposición. Sin pérdida de general podemos suponer que $\sigma = (1, 2, 3, \dots, p)$ y $\tau = (1, 2)$; y se tiene que, para cada $1 \leq k < p$,

$$\sigma^{k-1} \circ \tau \circ \sigma^{-(k-1)} = (k, k+1),$$

y $\{(1, 2), \dots, (k, k+1), \dots, (p-1, p)\}$ genera a S_p (consúltase [XDF93, pág. 99]). \square

12 Pues: $(2, 3) \circ (1, 2) = (2, 3, 1) \neq (3, 1, 2) = (1, 2) \circ (2, 3)$.

Demostración: Sea $\alpha \in \mathcal{O}_{RG_P}$. De acuerdo con el [teorema 5.11](#), existe una 2,3,c-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{C}$ conteniendo a α .

Es claro que cada una de las subextensiones de grado 2 y 3 son resolubles. También, puesto que las extensiones ciclotómicas $F_j = F_{j-1}(\xi_k)$ son radicales, en particular son resolubles. Se concluye a partir de que la yuxtaposición de extensiones resolubles es una extensión resoluble. \square

([corolario 2.71](#))

5.3 UNA VISIÓN ALTERNATIVA: ORIGAMI ANUDADO

El método de doblado presentado para respaldar la inclusión de la capacidad de construir cualquier polígono regular mediante origami puede antojársenos de alguna manera extraño (dado que exige construir objetos 3D no planos). Vamos a presentar una justificación alternativa para despejar cualquier desconfianza: los nudos poligonales.

Es un hecho conocido que al “atar” (un nudo simple en) una tira de papel, aplanándola con cuidado, se forma un pentágono regular. A menudo presentado como una curiosidad, la realidad es que, generalizando este hecho, podemos construir, “atándolo”, cualquier polígono regular de orden mayor (a excepción del de 6 lados).

Sospechamos que la construcción del nudo pentagonal ha sido siempre conocida, formando parte de la cultura popular como un divertimento para niños. Encontrar referencias en la literatura científica es más difícil; remontándonos hasta el *Trattato della Sfera* de d’Aviso y Cavalieri (1656) para encontrar la primera¹³ referencia escrita occidental.

En la era moderna destacan como referencias básicas los artículos de Morley ([\[Mor24\]](#)) y Brunton ([\[Bru61\]](#)) en matemática recreativa; si bien, en el contexto del origami, recomendamos el trabajo de Maekawa [\[Mae11\]](#) como el mejor para introducirnos y el más completo sobre nudos de papel.

Atar, realizar un nudo como haríamos con una cuerda

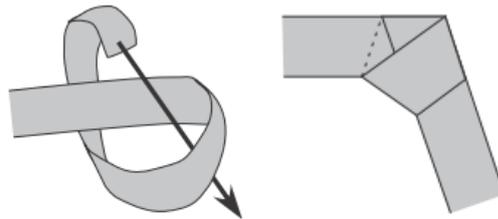


Figura 5.3: Anudado del pentágono regular.

Imagen extraída de [\[Hul13\]](#)

5.3.1 Axiomas nudoGon

Asumamos que hemos construido con un nudo simple el pentágono regular como en la [figura 5.3](#). Se observa que la tira de papel “envuelve” el pentágono recorriendo los lados saltándose uno cada vez. Si marcamos una línea por el centro de la tira, tal línea dibujaría una estrella pentagonal.



Affronimiche 255
 Con l'occasione di quello disporre le figure, ti voglio dare il modo di descriverle e formare meccanicamente un Pentagono che è una delle più difficili figure da disegnare e più facile e la più facile che si faccia in natura, perché non è altro che un semplice nudo. Prendersi per tanto una striscia di carta della larghezza che tu vorrai, e che habbi i lati paralleli, e com'è quella procura di fare un nudo, e come se fosse una corda, assicurando però che la curva resti sempre ferma nella piegatura che frangendosi tanto che resti ben tesa; se tagliarsi con le forbici i capi che avanzano, basterà farlo un Pentagono qualunque. Farai anche la figura Pentagono prenderai due striscie di carta di eguale larghezza, e con i lati paralleli, e procurerai di fare con esse un nudo, facendo che le punte dell'incannatura che basterai fatta di una striscia di carta, per l'aperta dell'incannatura dell'altra, che frangendosi adattamente, e che maneggiano sempre la loro larghezza tagliando l'istesso della punta, basterai fatto un Pentagono perfetto.

Figura 5.2: Portada y página 255 del *Trattato della Sfera* [d’A90]

13 De acuerdo con la revisión bibliográfica realizada en [\[Sha16\]](#).

Supongamos ahora que queremos atar un n -ágono regular; cada doblez en la tira de papel definirá un lado del n -ágono, y el ángulo “de entrada” y “de salida” de la tira (el de la línea central) respecto al doblez será el mismo. Así, es claro que la tira avanza siempre la misma distancia (digamos que con *paso* m) progresando en un determinado sentido hasta recorrer los n lados.

Nombremos los lados del n -ágono como $0, 1, \dots, n-1$; y supongamos que el “comienzo” de la tira corresponde con el lado 0 , y el primer lado que visitamos es el m . La tira, por tanto, avanza con paso m y debemos poder recorrer todos los lados siguiendo la siguiente secuencia:

$$0 \rightarrow m \rightarrow 2m \rightarrow 3m \rightarrow \dots \rightarrow (n-1)m \rightarrow nm \equiv 0,$$

formando así un polígono estrellado regular no degenerado. Queda claro que, para que esto pueda ocurrir, m ser un elemento generador del grupo cíclico \mathbb{Z}_n . Por supuesto, debemos prescindir de los casos $m = 1$ y $m = n - 1$ ¹⁴.

(definición 2.48) En definitiva, asociado a cada nudo tenemos un polígono estrellado regular no degenerado definido por la secuencia de lados; y dado n el problema se reduce a determinar la existencia de un tal polígono regular no degenerado; o equivalentemente, a determinar si existen elementos $m \in \mathbb{Z}/(n)$ de orden n distintos de 1 y $n - 1$. Es decir, si, y sólo si, existe algún $m \in \mathbb{Z}/(n)$ distinto de 1 y $n-1$ coprimo con n . Esto es, de acuerdo con la definición de la función ϕ de Euler, si, y sólo si, $\phi(n) > 2$ el número de enteros positivos menores que n y coprimos suyos es estrictamente mayor que 2 .

Definición 5.18 Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(n) > 2$, llamaremos *axioma nudoGon de orden n* , ó *n -nudoGon*, al axioma de construcción

$$\left(\overline{B_1 B_2}, \dots, \overline{B_{n-1} B_n}, \overline{B_n B_1} \right) = n\mathbf{KGon}(A_1, A_2)$$

definido sobre cualquier par de puntos distintos; donde B_1, \dots, B_n son los vértices del n -ágono regular definido al posicionar el n -ágono anudado construido con una tira de papel de anchura $d(A_1, A_2)$ de forma que uno de sus lados repose sobre la recta $\overline{A_1 A_2}$ y sus puntos medios queden superpuestos.

(propiedades 2.49) En virtud a las propiedades de la función ϕ de Euler, es fácil ver que $\phi(n) > 2$ para todo $n > 6$. Ya sabemos que el caso pentagonal es constructible, y en efecto $\phi(5) = 4 > 2$. Por contra, $\phi(3) = \phi(4) = \phi(6) = 2$, luego tales polígonos regulares no son constructibles anudando una tira de papel.

14 Esto correspondería a dibujar con la línea central de la tira el polígono regular, no con ningún nudo. Si reparamos en los bordes de la tira de papel que forma el n -ágono anudado, cada una de éstos forma una secuencia sobre los vértices que atraviesa. Tales secuencias se definen avanzando alternativamente $m - 1$ y $m + 1$ vértices (resp. $m + 1$ y $m - 1$). Por ejemplo, en el caso del pentágono, ambas secuencias coinciden y son:

$$\dots 0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 0 \rightarrow 3 \dots$$

Esto no siempre será así, sirva de ejemplo el caso del octógono ($n = 8, m = 3$), donde se trata de dos secuencias disjuntas.

5.3.1.1 Consideraciones relativas a la familia de axiomas nudoGon

REGULARIDAD DE LOS n -ÁNGONOS ANUDADOS Podemos encontrar demostraciones explícitas de que en nudo pentagonal realmente conforma un pentágono regular en [Mae11] o [Hul13, actividad 10]. Probar la regularidad de cualquier n -ángono anudado puede resumirse en un «es trivial por simetría», en vista de su polígono estrellado subyacente, donde se pone de manifiesto el idéntico papel que juegan todos los pliegues¹⁵.

REALIZABILIDAD DEL NUDO Como hemos visto, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(n) > 2$ tenemos al menos un n -ángono estrellado regular no degenerado. Supongamos que ya tenemos construido el polígono regular siguiendo con nuestra tira de papel tal polígono estrellado, y volvemos al estado desdoblado de la tira. Habrá múltiples maneras de volver a doblar la tira de papel en la figura del polígono regular (según asignemos “tipo valle” o “tipo montaña” a cada pliegue y según la estratificación en la que dispongamos cada capa del papel una vez doblado); algunas combinaciones de asignaciones constituirán nudos mientras que otras no lo harán. Por ejemplo, en el caso del pentágono (figura 5.5) sólo una de las combinaciones constituye topológicamente un nudo (no trivial)¹⁶.

Es decir, supongamos que ya tenemos en la tira de papel los dobleces definidos

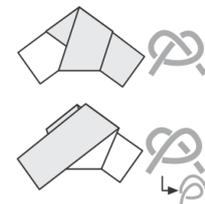
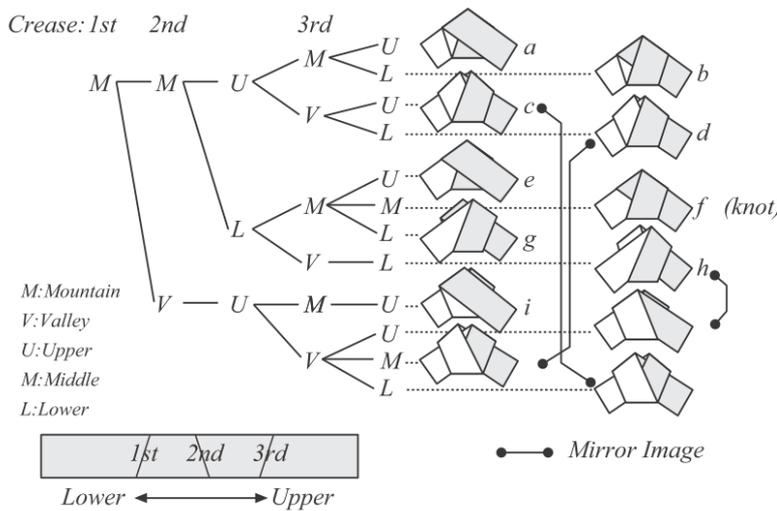


Figura 5.4: Detalle de los patrones f e i . El primero es un nudo anudado, el segundo no.

Imagen extraída de [Mae11]

Figura 5.5: Posibles patrones de doblado¹⁷ del pentágono con una tira de papel.

Imagen extraída de [Mae11]

15 Al margen de estos argumentos geométricos, en [IGT15] se realizan computacionalmente demostraciones algebraicas de la regularidad en los casos $n = 5$ y $n = 7$ mediante el sistema Eos (*e-origami system*, [IT+09]), posibilitando demostrar explícitamente la regularidad en cualquiera de los casos (siempre que la carga computacional sea abordable).

16 Topológicamente, un *nudo* es un subespacio de \mathbb{R}^3 homeomorfo a la circunferencia S^1 . Nosotros estamos llamando nudo a nuestras construcciones con papel en el sentido de que, realizando una retracción de la tira de papel sobre su línea central y posteriormente identificando ambos extremos, obtenemos un nudo topológico.

De forma general, coloquialmente reservamos el término *nudo* para nudos “anudados”, es decir, nudos no triviales (i.e., aquellos nudos k tales que no existe ningún homeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h(k) = \{(x, y, 0) / x^2 + y^2 = 1\}$). Cfr. [Kos86].

Observemos en primer lugar que todos los patrones posibles se cumplen las mismas relaciones de incidencia entre puntos, rectas y dobleces¹⁸. Desde este punto de vista el origami anudado puede verse como parte del origami multipliegue (capítulo 6), y consecuentemente, tiene sentido construir (mediante origami multipliegue) el polígono regular mediante cualquiera de los patrones de doblado, independientemente del nudo que constituyan.

No obstante, si el patrón conforma topológicamente un nudo no trivial, la construcción multipliegue será mucho más fácilmente realizable dado que serán las propias restricciones físicas del papel (i.e., la no intersección entre capas) las que fuercen a que las condiciones de superposición se cumplan. En este sentido, en [Mae11], Maekawa introduce la noción de *writhe number*¹⁹ como medida de la estabilidad de la construcción con cada patrón. Cuanto mayor sea (de manera absoluta²⁰) el writhe del (diagrama del) patrón de anudado, más estable será ese método de doblado. Por ejemplo, en el caso del

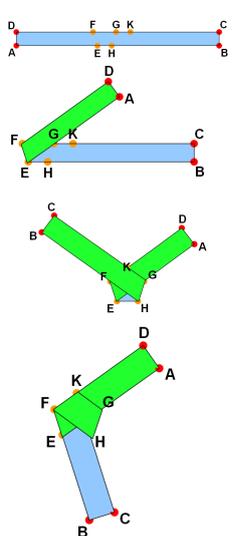


Figura 5.6: Alineamientos del nudo pentagonal.

Imágenes a partir de [Ida14]

Intuitivamente, son nudos dóciles los equivalentes a un nudo poligonal (cfr. [Kos86] para la definición precisa)

17 Se muestran todos los patrones de doblado, salvo imagen especular; por ejemplo, V-V-V es la imagen especular de M-M-M y no aparece representada.

18 Vamos a mostrar como ejemplo el caso pentagonal (ver figura 5.6). Bautizaremos los tres dobleces de la tira de papel (de izquierda a derecha) como f_a , f_b y f_c .

A partir del doblez f_a : una vez doblado éste, debe cumplirse que el doblez f_b está en contacto con el borde inferior de la tira de papel. Además, una vez doblado f_b , el borde inferior de la tira debe quedar superpuesto con el punto de intersección de f_a y el borde superior. En este punto (estando la tira doblada por f_a y f_b), el tercer doblez f_c queda definido por descansar sobre el borde superior de la tira de papel.

Si f_a tenía la inclinación adecuada para formar el pentágono, se cumplirá adicionalmente: el borde inferior (en la última capa creada) queda superpuesto con f_a y que el borde superior (en la última capa creada) toca al doblez f_b en su intersección con el borde inferior (en esa capa).

En lenguaje de pares de superposición, si llamamos l_1 y l_2 respectivamente a los bordes superior e inferior de la tira de papel, el anudado del pentágono regular queda definido por:

$$(l_2, f_b \cap l_1)_{f_a}, \quad (f_a \cap l_1, R_{f_a}(f_c \cap l_2))_{f_b}, \quad (l_1, R_{f_a}(f_c))_{f_b}, \\ (f_a, R_{f_b}(R_{f_a}(l_2)))_{f_c}, \quad (R_{f_c}(R_{f_b}(R_{f_a}(l_1))), f_b \cap l_2)_{f_a}.$$

Algunas de estas condiciones son redundantes entre sí; conjuntamente constituyen un sistema de ecuaciones de codimensión 5 sobre los 6 grados de libertad disponibles para definir los tres pliegues (el sexto grado de libertad corresponde a la distribución longitudinal de los pliegues en la tira de papel).

19 El número de writhe, es un indicador de cuánto de “anudado” está un nudo; a veces traducido como *número de enlace* (del inglés *writhe*, literalmente «retorcer»).

Observemos que, de acuerdo con la naturaleza combinatoria en la definición de los patrones de doblado, todos constituyen nudos dóciles. Esto permite proyectar el nudo sobre un plano de forma conveniente y generar un diagrama sin patologías del nudo.

Definición 5.19 Llamaremos *número de writhe* de un diagrama D , $Wr(D)$, al número de cruces positivos menos el número de cruces negativos (ver figura 5.7, arriba) en el diagrama (dotado con alguna orientación).

Habitualmente se define de forma generalizada sobre enlaces (*links*). En el caso de nudos no constituye un invariante topológico (i.e., depende del diagrama; cfr. [Mur96, pág. 68]), por lo que cuando nosotros hablemos de número de writhe de un nudo debe entenderse que hacemos referencia al patrón de doblado a partir del cual lo hemos definido.

20 Aun que como nudos, las imágenes especulares constituyen nudos no equivalentes (i.e., no existe ningún homeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ llevando uno en el otro y que conserve la orientación), ambos cuentan con la misma dificultad de doblado: están igualmente “anudados” y sus números writhe son iguales en valor absoluto. Por ello, para nuestro propósito será indiferente, por ejemplo, doblar un trébol levógiro que un trébol dextrógiro para construir el pentágono.

pentágono, el patrón f es más estable que el i (figura 5.7); pueden encontrarse ejemplos de mayor complejidad en [Mae11].

Como vemos, no se asocia a cada axioma $n\mathbf{KGon}$ ningún nudo en concreto; y en realidad ni tan siquiera pedimos que exista un n -nudo (no trivial) en sentido topológico, nos basta con la existencia de al menos un n -ágono estrellado regular no degenerado para justificar la realizabilidad del axioma. Además, indirectamente hemos dado un método para seleccionar buenos candidatos a patrón de anudado²¹: estudiar a partir de los n -ángonos estrellados los distintos patrones de doblado posibles y dar preferencia a aquellos con número writhe mayor (en valor absoluto). Todas ellas serán teóricamente realizables, si bien unos patrones serán más difíciles de ejecutar que otros; sobra decir que tales dificultades van en aumento al incrementar n el número de lados que tratamos de doblar.

5.3.2 NudoGon-Constructibilidad

En la sección anterior hemos presentado toda una nueva familia de axiomas, los axiomas nudoGon: $\{n\mathbf{KGon}\}_{n \in \mathbb{N}_{\{5\} \vee \{ \geq 7 \}}}$. Consecuentemente, vamos a poder definir una nueva familia de herramientas.

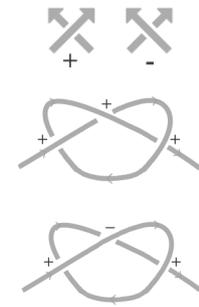


Figura 5.7: Arriba: cruces de writhe positivo y negativo. Abajo: diagramas de los patrones de anudado f e i . En el primer caso, $Wr(f) = 3 - 0 = 3$; en el segundo, $Wr(i) = 2 - 1 = 1$

21 En la práctica, estudiar todas las posibilidades será inabarcable. Dado n , habrá $\phi(n)/2 - 1$ formas distintas de realizar el axioma en función del polígono estrellado subyacente, y para cada una de ellas habría que estudiar las diferentes combinaciones posibles de asignación de pliegue y estratificación de capas. El número de posibilidades se vuelve gigantesco rápidamente.

Por ello, para n impar el método de anudado se ha presentado siempre a partir del nudo simple (el del pentágono). Añadiendo un paso de “anudado” (pasando por debajo, entrando y saliendo con la tira de papel) tendremos, sucesivamente, un heptágono, eneágono, endecágono, ..., $(2n+1)$ -ágono, ... Esta construcción responde a que, aquí, 2 y n son siempre coprimos.

Para n par, aunque puedan darse en cada caso métodos de construcción concretos, dar un método general no es posible. Alternativamente, sí podemos dar un método de construcción para nudos pares con dos tiras de papel (esto responde al concepto matemático de *linkage*). Una construcción del hexágono es habitualmente presentada entrelazando dos lazos simples.

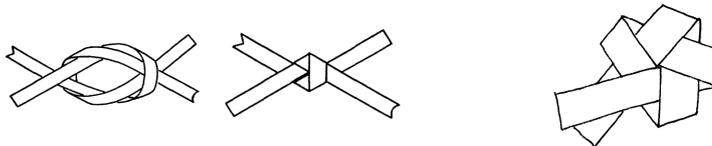


Figura 5.8.: A la izquierda: hexágono regular mediante dos tiras entrelazadas. Imagen extraída de [Mor24]. A la derecha: 10-ágono mediante dos tiras complementarias. Sólo se muestra una de las tiras (un 5-nudo). Imagen extraída de [Bru61]

Generalizando esta idea, a partir de un m -nudo impar, podemos construir un $2m$ -nudo entrelazando dos tiras complementarias (anudadas siguiendo el m -nudo). Si analizamos el papel una de las tiras de papel, cada una corresponde a la clase lateral de algún subgrupo de $\mathbb{Z}/(n)$ (por ejemplo, en el caso del hexágono, son $H = \{0, 2, 4\}$ y $H + 1 = \{1, 3, 5\}$). Así, aún más generalmente, dado $n \in \mathbb{N}$, si H es un subgrupo del grupo cíclico de orden n , podemos construir un n -ágono regular mediante el anudado de $n/|H|$ tiras de papel $|H|$ -anudadas, de forma que cada una de ellas recorra los elementos de una clase lateral de H .

Pueden consultarse varios patrones de doblado de nudos de orden bajo ($n < 12$) en [Mae11] y [Hul13, activ. 10]. En la figura 5.9 recogemos algunos de ellos.

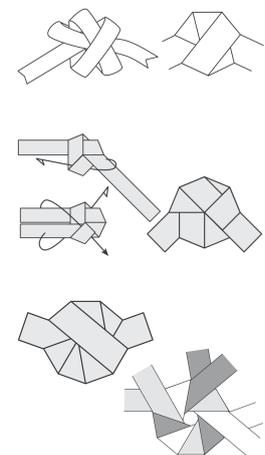


Figura 5.9: De arriba a abajo: anudado del heptágono, anudado del octógono y eneágono anudado simple y mediante 3 tiras de papel.

Imágenes extraídas de [Mae11; Hul13]

Recuérdese (def. 3.5) que el conjunto de axiomas de una herramienta es finito. Suponemos que si podemos realizar un n -anudado, hipotéticamente seremos lo suficientemente habilidosos como para realizar cualquier anudado de orden menor

Definición 5.20 Dado $n \in \mathbb{N}$, llamaremos *origami n -anudado* a la herramienta formada por los axiomas clásicos del origami y los axiomas nudoGon de hasta orden n :

$$O_{KG_n} := \langle HJA \cup \{m\mathbf{KGon}\}_{m \leq n}, \{\mathbf{RectaIntersec}\} \rangle.$$

Definición 5.21 Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamaremos *mapa canónico del origami n -anudado* al mapa $\mathcal{O}_{KG_n} = (O_{KG_n}, \{0, 1\})$. De sus elementos y subconjuntos diremos que son construibles mediante origami n -anudado, y escribiremos \mathcal{O}_{KG_n} -construibles; también que son KG_n -construibles.

Vamos a estudiar la relación existente entre el origami anudado y el regularGon. En adelante, siguiendo la notación de la [definición 5.18](#), A_1 y A_2 serán dos puntos distintos y B_1, \dots, B_n los vértices del n -ágono regular construido mediante $n\mathbf{KGon}(A_1, A_2)$.

Debemos empezar notando que la longitud de los lados del n -ágono construido mediante un axioma nudoGon ya no es igual a la distancia entre los puntos de partida $d(A_1, A_2)$. No obstante, es un ejercicio sencillo relacionar algebraicamente ambas magnitudes.

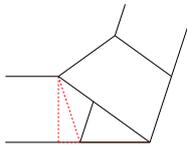


Figura 5.10: Pentágono anudado

Lema 5.22 Dados A_1 y A_2 dos puntos distintos, sea $d = d(A_1, A_2)$ la distancia entre ellos y l la longitud del lado de un n -ágono regular anudado a partir de una tira de papel de ancho d ; es decir, $l = d(B_j, B_{j+1})$ siendo B_j y B_{j+1} vértices consecutivos de $n\mathbf{KGon}(A_1, A_2)$. Entonces:

$$l = \frac{d}{\text{sen}(2\pi/n)}.$$

Demostración: En cualquier polígono regular de n lados, sus ángulos exteriores serán de $2\pi/n$ radianes. Consecuentemente, mediante un lado del n -ágono y la altura de la tira, queda formado un triángulo rectángulo de hipotenusa el lado (l) y siendo la anchura de la tira (d) la medida del cateto opuesto al ángulo exterior. En definitiva: $d = \text{sen}(2\pi/n) \cdot l$. \square

Estamos llamando ángulo exterior al suplementario del ángulo interior (al n -ágono en un vértice)

Como resultado, de acuerdo con la fórmula de Euler²², tenemos que, para todo axioma n -anudado, la nueva longitud creada, l , está en $\mathbb{Q}(d, \text{sen}(2\pi/n)) = \mathbb{Q}(d, \text{Im}(\xi_n))$.

Proposición 5.23 Todo punto KG_n -construible es RG -construible. Es más, el conjunto de puntos construibles mediante origami anudado de cualquier orden es igual al conjunto de puntos \mathcal{O}_{RG} -construibles, y, en definitiva,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{KG_n} = \mathcal{O}_{RG}.$$

Demostración: En primer lugar, vamos a ver que \mathcal{O}_{RG} genera geoméricamente a \mathcal{O}_{KG_n} para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Basta ver que, dado n y dos puntos distintos A_1, A_2 , tenemos que $n\mathbf{KGon}(A_1, A_2) \tilde{\in} \mathcal{O}_{RG}$. Y en efecto: ya sabemos que podemos RG -construir ξ_n , luego también $\text{Im}(\xi_n)$; consecuentemente

también lo será l , y en definitiva, podemos RG -construir los vértices B_1 y B_2 en el segmento $[A_1, A_2]$. Ahora, basta determinar $m > n$ tal que podamos O -construir el m -ágono regular que contiene a B_1 y B_2 como vértices consecutivos (listados de forma antihoraria). A partir de tal m -ágono, mediante $m - n$ aplicaciones sucesivas del axioma **RGon**, queda construido, como queríamos, $(\overline{B_1 B_2}, \dots, \overline{B_{n-1} B_n}, \overline{B_n B_1}) = n\mathbf{KGon}(A_1, A_2)$ mediante origami regularGon.

Una vez probado $O_{RG} \circ \rightarrow O_{KG_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que $\mathcal{C}_{KG_n} \subset \mathcal{C}_{RG}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{KG_n} \subset \mathcal{C}_{RG}$.

La inclusión contraria, al margen de formalismos, es intuitivamente simple: construir (las rectas que son lados de) los polígonos generados por **RGon** anudando una tira de papel de anchura adecuada.

Dado $\alpha \in \mathcal{C}_{RG}$, fijemos una O_{RG} -construcción de α . Puesto que los HJAs son comunes a ambas herramientas, basta con traducir cada aplicación del axioma **RGon** a una construcción mediante O_{KG_n} (para algún n adecuado). Así, para un paso $(l_1, \dots, l_n) = \mathbf{KGon}(A_1, \dots, A_{n+1})$, podemos construir ξ_n (si no está construido ya) a partir de $n\mathbf{KGon}(0, 1)$. Ahora, mediante operaciones clásicas, $Im(\xi_n)$ es construible, y por tanto también $d = l \cdot Im(\xi_n)$, donde $l = d(A_1, A_2)$. Consecuentemente, también dos puntos distintos D_1 y D_2 en $\overline{A_1, A_2}$ de forma que disten $d/2$ del punto medio de A_1 y A_2 (nombrados de forma que $d(D_1, A_1) < d(D_1, A_2)$). En estas condiciones, es $(l_1, \dots, l_n) = n\mathbf{RGon}(D_1, D_2)$.

Tras sustituir en la construcción de α cada utilización de **KGon** por el procedimiento con anterior, obtendremos una construcción de α realizable con $\mathcal{C}_{KG_{n^\blacktriangle}}$, siendo n^\blacktriangle el mayor de los ordenes n necesitados. Así, con todo, $\alpha \in \mathcal{C}_{KG_m}$ para todo $m \geq n^\blacktriangle$, y consecuentemente $\mathcal{C}_{RG} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{KG_n}$. \square

Construidos ξ_n, B_1 y B_2 , en realidad basta observar las relaciones con el circuncentro del n -ágono y el resto de vértices (véase eq. 5.4) para garantizar la RG -constructibilidad

Si llamamos C_1, \dots, C_n a los vértices de $n\mathbf{KGon}(0, 1)$, y C a su circuncentro, es:
 $\xi_n = (C_2 - C)/(C_1 - C)$
 (cfr. prueba prop. 5.9)

5.4 GENERALIZACIONES: AXIOMAS CICLIGON Y ORIGAMI POLIÉDRICO

Para cerrar este capítulo parece oportuno comentar dos extensiones del origami regularGon propuestas en [PT15]: el origami cyclicGon y el origami poliédrico. Sobra decir que estas construcciones pierden la simplicidad de ejecución con la que condecorábamos al origami regularGon.

5.4.1 Origami cyclicGon

El primero sigue el mismo método de construcción que el presentado en origami regularGon, pero permitiendo partir de cualquier polígono cíclico en lugar de restringirnos a polígonos regulares. Y, además, permitiendo eliminar varias caras simultáneamente.

Definición 5.24 Llamaremos *axioma cyclicGon de paso k* al axioma de construcción

$$(\overline{B_1 B_2}, \dots, \overline{B_{n-1} B_n}, \overline{B_n B_1}) = \mathbf{CGon}_k(A_1, \dots, A_{n+k})$$

definido sobre las $(n+k)$ -uplas de puntos (A_1, \dots, A_{n+k}) tales que son los

$$n \geq 3, k \geq 1$$

22 Nombrada en honor a Leonhard Euler, establece la conocida relación

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x) \equiv (\cos(x), \operatorname{sen}(x)).$$

Estas condiciones se corresponden con lo comentado sobre la ejecutabilidad del método regularGon al finalizar la sección 5.1.1.1

vértices de un polígono cíclico y se cumple que: ■ puede existir un polígono cíclico con lados de longitud $a_1 = |A_2 - A_1|, \dots, a_n = |A_{n+1} - A_n|$, es decir, se verifica la [condición 5.1](#); ■ PC_1 es central²³; y ■ el circunradio de PC_1 es mayor que el de PC_2 . En tal caso, B_1, \dots, B_n denotan los vértices del polígono cíclico de lados de longitud a_1, \dots, a_n y con $B_1 = A_1$ y $B_2 = A_2$.

Royo y Tramuns prueban que²⁴ sólo son necesarios los axiomas cyclicGon de paso 1 y 2 para construir cualquier polígono cíclico dados A_1, A_2 y longitudes a_2, \dots, a_n .

Llamaremos *origami cyclicGon* a la herramienta O_{CG} formada por los axiomas Huzita-Justin junto con **CGon₁** y **CGon₂**. Es claro que el origami cyclicGon genera geoméricamente al regularGon, puesto que los polígonos regulares son un caso particular de polígonos cíclicos.

$$O_{CG} \circlearrowright O_{RG}$$

Así pues, es claro que \mathcal{O}_{RG} es un subconjunto de $\{0, 1\}^{O_{CG}} = \mathcal{O}_{CG}$ el conjunto de puntos y curvas construibles del mapa canónico del origami cyclicGon. Desconocemos una caracterización completa de los números cyclicGon-construibles; permaneciendo esto como problema abierto, el único resultado en este sentido en [\[PT15\]](#) es que la contención $\mathcal{O}_{RG^p} \subset \mathcal{O}_{CG^p}$ es estricta.

5.4.2 Origami poliédrico

Una segunda generalización de estos métodos de construcción nace, a partir de un polígono convexo cualquiera, de formar el cono piramidal mediante la selección del punto cúspide C ; o considerando varios puntos y mediante ellos la construcción de algún poliedro P .

Por último, cabe advertir, y así hacen Royo y Tramuns, que los números construibles con estas herramientas serán en todo caso números algebraicos. No podemos esperar números trascendentes construibles mediante origami poliédrico dado que, de acuerdo con el trabajo desarrollado por Sabitov sobre poliedros, la longitud de cualquier diagonal de un poliedro P es raíz de un polinomio cuyos coeficientes dependen únicamente de la estructura combinatorial de P y la longitud de sus lados, es decir, cuyos coeficientes son funciones racionales de estas longitudes ([\[Sab02, teorema 2\]](#)).

Adviértase que para poder eliminar la cara $(n+1)$ -ésima, “identificando A_{n+1} y A_1 ”, C debe cumplir $|A_1 - C| = |A_{n+1} - C|$

23 Diremos que un polígono cíclico es *central* si su circuncentro pertenece a su interior.

24 Asumiendo que puede construirse una poligonal cíclica de lados $a_1 = |A_2 - A_1|, a_2, \dots, a_n$. Tal construcción es trivial provistos de un compás, sobre una circunferencia suficientemente grande. En general no conocemos procedimientos de construcción mediante doblado (i.e., sin compás) concretos para generar polígonos cíclicos a partir de longitudes dadas.

En el [capítulo 4](#) hemos estudiado las construcciones realizables mediante secuencias de operaciones de un único doblez. Esta es la formalización clásica efectuada en la literatura, pero... ¿qué ocurriría si permitiésemos realizar más de un pliegue a la vez? En 2009, Alperin y Lang introdujeron por primera vez nuevos axiomas formalizando esta idea; su trabajo, [\[AL09\]](#), constituirá nuestra principal referencia durante este capítulo.

Bajo el nombre de *origami multipliegue*, o *MP-origami*, abarcaremos cualquier herramienta que formalice la creación de posiblemente múltiples rectas simultáneas como dobleces de una hoja de papel. Un ejemplo claro de operación realizable mediante origami multipliegue es el doblado de un tríptico a partir de un folio en blanco, operación donde intervienen dos pliegues simultáneos. En este contexto la herramienta \mathcal{O} recoge las operaciones del origami multipliegue donde interviene un único doblez a la vez.

Como hasta ahora, consideramos la hoja de papel infinita identificándola con el plano complejo

6.1 1P-ORIGAMI

6.1.1 Preparación a la teoría de superposición

La cuestión principal aquí es como decidir el pliegue que quedará determinado cuando doblemos; por supuesto no consideraremos realizar dobleces al azar, si no que nos basaremos en elementos preexistentes para definir cualquier línea de pliegue.

Obsérvese que una línea de pliegue está definida como una recta $V(f)$ donde $f = mX + nY + d \in \mathbb{Q}(m, n, d)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]$. Definir un pliegue es, por tanto, definir (salvo proporcionalidad) los coeficientes de f . Esto se conseguirá mediante la imposición de ciertas condiciones sobre f ; las cuales son denominadas *alineamientos* en [\[AL09\]](#), *condiciones de superposición* en [\[GKK13\]](#), o *condiciones de incidencia* en [\[Luc16\]](#). Serán impuestas entre pares de objetos que deben quedar superpuestos al realización el doblez; donde se involucrarán al propio pliegue f o a las imágenes de un punto o una recta a través de la simetría axial definida tomando el pliegue f como eje de simetría.

Definición 6.1 Dados dos puntos $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, diremos que satisfacen la condición de *alineamiento entre puntos* si $v = u$.

Esto es: si $v_1 = u_1$ y $v_2 = u_2$

Definición 6.2 Dadas dos rectas $l_1 = a_1X + b_1Y + c_1$, $l_2 = a_2X + b_2Y + c_2$, diremos que satisfacen la condición de *alineamiento entre rectas* si existe un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ no unipuntual y no vacío tal que

$$V_D(l_1) = \{(x, y) \in D / l_1(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in D / l_2(x, y) = 0\} = V_D(l_2).$$

Esto es: si existe $\mu \neq 0$ tal que $a_2 = \mu a_1$, $b_2 = \mu b_1$ y $c_2 = \mu c_1$

Esto es: si $au_1 + bu_2 + c = 0$

Definición 6.3 Dados un punto $u = (u_1, u_2)$ y una recta $l = aX + bY + c$, diremos que satisfacen la condición de *alineamiento punto-recta* si $u \in V(l)$.

Recordemos que, dada una recta $f = mX + nY + d$, la *simetría axial*, o *reflexión*, de eje f es la aplicación del plano en sí mismo que asociada a cada punto p un punto $R_f(p)$ definido como:

$$R_f(p) = \begin{cases} p & \text{si } p \in V(f), \\ p^{R_f} & \text{si } p \notin V(f) \text{ y } f \text{ es la mediatriz del segmento } \overline{p, p^{R_f}}. \end{cases}$$

Y, en virtud del [lema 4.22](#), tenemos que si $p = (x, y) \notin V(f)$, la imagen de p por la reflexión tiene coordenadas (x', y') dadas por:

$$x' = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}, \quad \text{e} \quad y' = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2}. \quad (6.1)$$

En el caso de ser f una línea de pliegue: llamaremos a $R_f(p)$ *imagen doblada* de p , y, por extensión, llamaremos imagen doblada de una recta l a la recta $R_f(l)$ formada por la imagen de los puntos en $V(l)$.

Si $l = R_f(l)$ diremos que l es *invariante por la reflexión*; esto puede ocurrir de dos formas: si $l = f$ por supuesto será invariante (es de puntos invariantes), pero también cuando l y f sean perpendiculares (en este caso hay un único punto invariante en l). Observemos además que si l y f son paralelas entonces también l y su imagen $R_f(l)$ son paralelas; y si l y f no son paralelas entonces f bisecta al ángulo formado por l y su imagen doblada.

6.1.2 Condiciones de superposición por un dobléz

Si trabajamos con una sola recta prescindiremos de los subíndices

En lo que sigue sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2)^2 \subset \mathbb{R}^2$ dos puntos conocidos, y sean $l_1 = a_1X + b_1Y + c_1, l_2 = a_2X + b_2Y + c_2 \in \mathbb{Q}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]$ rectas conocidas. Y, además, $f = mX + nY + d \in \mathbb{Q}(m, n, d)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]$ será el eje de simetría de una reflexión genérica.

Vamos a analizar a continuación las condiciones de superposición por un dobléz posibles entre pares de objetos (puntos y rectas preexistentes y sus imágenes dobladas). Como idea básica, diremos que dos objetos forman un *par de superposición* si manteniendo doblada la hoja de papel por una línea de pliegue adecuada el segundo objeto queda emplazado “sobre” el primero; si esto ocurre, al desdoblar la hoja de papel tendremos que ambos objetos estarán alineados con la imagen simétrica del otro respecto del pliegue en cuestión.

Esto justifica la terminología de ‘imagen doblada’ introducida anteriormente

Llamaremos aquí *condición de incidencia* a las condiciones derivadas del cumplimiento de un par de superposición junto con una situación relativa concreta entre los objetos que intervienen. Así, distinguiremos diferentes tipos de condiciones de incidencia según el tipo de los objetos que intervengan y si son o no distintos entre sí.

6.1.2.1 Superposición punto-punto

Definición 6.4 Diremos que u y v forman un *par de superposición por plegado*, y lo denotaremos como $(u, v)_f$, si u y $R_f(v)$ satisfacen la condición de alineamiento entre puntos, es decir:

$$(u, v)_f \iff R_f(v) = u \iff v = R_f(u).$$

ENTRE PUNTOS DISTINTOS Si $u \neq v$, entonces la condición $(u, v)_f$ solo se verifica, de acuerdo con la definición de reflexión, si f es la recta mediatriz del segmento $\overline{u, v}$.

$$(u, v)_f \iff f \perp \overrightarrow{u, v} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2) \text{ y } \frac{u+v}{2} \in V(f)$$

En consecuencia, tenemos que (salvo proporcionalidad) f debe ser:

$$f = (v_1 - u_1)\left(X - \frac{u_1+v_1}{2}\right) + (v_2 - u_2)\left(Y - \frac{u_2+v_2}{2}\right) \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

A esta condición la llamaremos incidencia de tipo 1 (I1 de forma abreviada).

DE UN PUNTO CONSIGO MISMO En este caso la condición $(u, v)_f$ se verifica para cualquier recta f que contenga al punto $u = v$. Esto es, f pertenece a H_u el haz de rectas que pasan por u .

$$(u, u)_f \iff f \in H_u = \{f \in \mathbb{R}[X, Y] / u \in V(f)\}$$

Por tanto puede describirse como:

$$f = m(X - u_1) + n(Y - u_2) \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, m, n)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y],$$

para ciertos $m, n \in \mathbb{R}$. A esta condición la llamaremos incidencia de tipo 2 (I2). Observemos que el haz H_u es una familia de rectas con 1 grado de libertad¹.

6.1.2.2 Superposición recta-recta

Definición 6.5 Diremos que l_1 y l_2 forman un *par de superposición por plegado*, y lo denotaremos como $(l_1, l_2)_f$, si l_1 y $R_f(l_2)$ satisfacen la condición de alineamiento entre rectas, es decir:

$$(l_1, l_2)_f \iff V(R_f(l_2)) = V(l_1) \iff V(l_2) = V(R_f(l_1)).$$

ENTRE RECTAS DISTINTAS Cuando $l_1 \neq l_2$, como ya hemos comentado, si $l_1 \nparallel l_2$ entonces f bisecta el ángulo entre ambas, y si $l_1 \parallel l_2$ entonces f es la recta paralela a ambas y a igual distancia entre ellas. En ambos casos f se caracteriza por ser el locus de los puntos a igual distancia entre ambas rectas.

$$(l_1, l_2)_f \iff V(f) \subset \{p \in \mathbb{R}^2 / d(p, l_1) = d(p, l_2)\}$$

¹ Determinar m y n es determinar un vector director de la recta; esto es, dar (m, n) un vector normal a f . Puesto que sólo nos interesa la dirección, la magnitud del vector es indiferente, podemos tomarlo unitario ($m^2 + n^2 = 1$), y entonces es $m = \cos(\theta)$, $n = \sin(\theta)$ para cierto parámetro $\theta \in [0, 2\pi)$.

Más precisamente: *par de superposición por plegado mediante 1 doblez entre puntos*

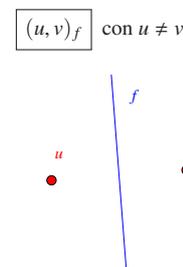


Figura 6.1: Incidencia tipo 1

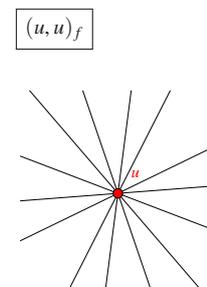


Figura 6.2: Incidencia tipo 2

Más precisamente: *par de superposición por plegado mediante 1 doblez entre rectas*

$$(l_1, l_2)_f \text{ con } V(l_1) \neq V(l_2)$$

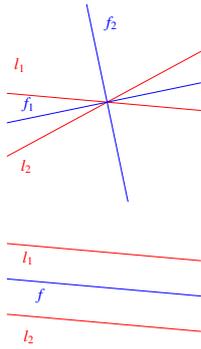


Figura 6.3:
Incidencia tipo 3.
Arriba si $l_1 \not\parallel l_2$.
Abajo si $l_1 \parallel l_2$

Está garantizado que $\sqrt{a_1^2+b_1^2} \neq 0$, dado que $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$. También que $\mu = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq 0$ (cuando los cocientes tengan sentido)

$$(l_1, l_1)_f$$

Obsérvese que esto es f_2 en el caso anterior con $c_2 = \mu c_1$

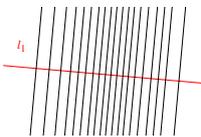


Figura 6.4: Arriba, incidencia tipo 4. Abajo, incidencia tipo 5

Así, los puntos $p = (x, y) \in V(f)$ deben cumplir²:

$$d(p, l_1) = \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} = d(p, l_2).$$

Analizando tal requerimiento en función del signo de los valores absolutos, se obtiene en definitiva que $p = (x, y)$ debe verificar $f_1(x, y) = 0$ ó $f_2(x, y) = 0$, siendo

$$f_1 = (\sqrt{a_2^2+b_2^2}a_1 - \sqrt{a_1^2+b_1^2}a_2)X + (\sqrt{a_2^2+b_2^2}b_1 - \sqrt{a_1^2+b_1^2}b_2)Y + (\sqrt{a_2^2+b_2^2}c_1 - \sqrt{a_1^2+b_1^2}c_2),$$

$$f_2 = (\sqrt{a_2^2+b_2^2}a_1 + \sqrt{a_1^2+b_1^2}a_2)X + (\sqrt{a_2^2+b_2^2}b_1 + \sqrt{a_1^2+b_1^2}b_2)Y + (\sqrt{a_2^2+b_2^2}c_1 + \sqrt{a_1^2+b_1^2}c_2).$$

Con todo:

- Si $l_1 \not\parallel l_2$, ambos polinomios definen rectas distintas y tenemos que la condición $(l_1, l_2)_f$ se cumple si f es una de ellas, es decir, si es (salvo proporcionalidad) f_1 ó f_2 . Advirtamos por último que

$$f_1, f_2 \in \mathbb{Q}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \sqrt{a_1^2+b_1^2}, \sqrt{a_2^2+b_2^2})[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

- Si $l_1 \parallel l_2$, entonces para cierto $\mu \neq 0$ tenemos $(a_2, b_2) = \mu(a_1, b_1)$ y $c_2 \neq \mu c_1$; f_1 degenera en una constante distinta de cero (luego no define ningún eje, $V(f_1) = \emptyset$) mientras que f_2 (salvo proporcionalidad) es

$$\frac{f_2}{\mu \sqrt{a_1^2+b_1^2}} = a_2X + b_2Y + \frac{\mu c_1 + c_2}{2} \in \mathbb{Q}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

A esta condición la llamaremos incidencia de tipo 3 (I3).

DE UNA RECTA CONSIGO MISMA Si $V(l_1) = V(l_2)$: hay dos formas de reflejar una recta l_1 sobre sí misma, como ya se ha comentado.

- Si $\forall p \in V(l_1)$ se tiene que $R_f(p) = p$ (esto es, si es de puntos invariantes bajo la reflexión R_f), entonces el par de superposición $(l_1, l_1)_f$ únicamente se verifica si $V(f) = V(l_1)$, es decir, si (salvo proporcionalidad) es $f = a_1X + b_1Y + c_1 \in \mathbb{Q}(a_1, b_1, c_1)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]$. A esto lo llamaremos incidencia de tipo 4 (I4).
- Si $\exists! p \in V(l_1)$ tal que $R_f(p) = p$ (esto es, si l_1 es invariante pero no de puntos invariantes), entonces la condición $(l_1, l_1)_f$ se verifica para cualquier recta f perpendicular a l_1 . Denotaremos a la familia de rectas perpendiculares a l_1 como

$$H_{l_1} = \{f \in \mathbb{R}[X, Y] / f \perp l_1\} = \{b_1X - a_1Y + \lambda / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

y tenemos en definitiva que la recta de pliegue f puede describirse como un polinomio en $\mathbb{Q}(a_1, b_1, \lambda)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]$ para cierto λ . Notemos por último que la familia de rectas H_{l_1} tiene 1 grado de libertad. A esta condición la llamaremos incidencia de tipo 5 (I5).

² Es un ejercicio de precálculo trivial verificar que la distancia entre un punto $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y una recta $l = aX + bY + c \in \mathbb{R}[X, Y]$ es

$$d(p, l) = d(p, l \cap l_p^\perp) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{6.2}$$

Observación: Hemos dividido el caso anterior para referirnos a él como dos tipos de incidencias separadamente por dos razones: la primera es que I4 no se tiene en cuenta habitualmente en la literatura al no crear pliegues nuevos; la segunda es que, mientras que I4 determina un número de elementos solución finito, I5 delimita una familia infinita de posibles pliegues.

En el lenguaje de procedimientos de construcción: I4 es una construcción de l_1 a partir de l_1 , mientras que I5 no puede considerarse una construcción

6.1.2.3 Superposición punto-recta

Definición 6.6 Diremos que l y u forman un *par de superposición por plegado*, y lo denotaremos como $(l, u)_f$, si l y $R_f(u)$ satisfacen la condición de alineamiento punto-recta, es decir:

$$(l, u)_f \iff R_f(u) \in V(l) \iff u \in V(R_f(l)).$$

Más precisamente: *par de superposición por plegado mediante 1 doblez entre un punto y una recta*

ENTRE PARES PUNTO-RECTA AUTOINCIDENTES Si $u \in V(l)$. Es claro que si también $u \in V(f)$ siempre se verifica la condición $(l, u)_f$. Si $u \notin V(f)$ es sencillo ver que $R_f(u)$ estará en $V(l)$ sólo si f es perpendicular a l .

$$\boxed{(l, u)_f} \text{ con } u \in V(l)$$

$$(l, u)_f \iff f \in \{f \in \mathbb{R}[X, Y] / u \in V(f)\} \cup \{f \in \mathbb{R}[X, Y] / f \perp l\}$$

Así, f está en la unión de las soluciones de I2 e I5, dos familias con 1 grado de libertad, y este tipo de incidencia no es más que considerarlas conjuntamente.

ENTRE PARES PUNTO-RECTA NO AUTOINCIDENTES Si $u \notin V(l)$. Vamos a ver que en este caso la parábola de foco u y directriz l está bien definida; y se verifica $(l, u)_f$ cuando el eje, f , sea tangente a dicha parábola. Esto es, si denotamos como $P_{l,u}$ a la parábola de directriz-foco (l, u) ,

$$\boxed{(l, u)_f} \text{ con } u \notin V(l)$$

$$(l, u)_f \iff f \in \{f \in \mathbb{R}[X, Y] / f \text{ es tangente a } P_{l,u}\}.$$

Recordemos que $P_{l,u}$ es el lugar geométrico de los puntos (x, y) que están a igual distancia de l y u .

$$P_{l,u} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d((x, y), l) = d((x, y), u)\}$$

Si $u = (u_1, u_2)$, $l = aX + bY + c$, y suponemos que $a^2 + b^2 = 1$, entonces la parábola $P_{l,u}$ queda determinada por³:

$$P_{l,u} = b^2X^2 + a^2Y^2 - 2abXY - 2(ac + u_1)X - 2(bc + u_2)Y + u_1^2 + u_2^2 - c^2 \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, a, b, c)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]. \quad (6.3)$$

Además, si $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in P_{l,u}$ es un punto de la parábola, la recta tangente a $P_{l,u}$ en τ está definida por⁴:

3 Resulta de imponer $[d((x, y), l)]^2 = [d((x, y), u)]^2$, sustituyendo por su expresión ambas distancias, y manipular aprovechando que aquí $a^2 + b^2 = 1$.
 4 Por definición, la recta tangente a $P_{l,u}$ en $\tau \in P_{l,u}$ es

$$t_{\tau_1, \tau_2} = \frac{\partial P_{l,u}}{\partial X}(\tau_1, \tau_2)(X - \tau_1) + \frac{\partial P_{l,u}}{\partial Y}(\tau_1, \tau_2)(Y - \tau_2).$$

La expresión dada se obtiene del cálculo directo de tales derivadas. Notemos que no pueden ser simultáneamente nulas; pues, si suponemos que $\nabla P_{l,u}(\tau_1, \tau_2) = (0, 0)$ para algún $\tau \in P_{l,u}$, se obtendría entonces que $au_1 + bu_2 + c = 0$, en contradicción con $u \notin V(l)$.

$$t_{(\tau_1, \tau_2)} = (b(b\tau_1 - a\tau_2) - ac - u_1)(X - \tau_1) + (a(a\tau_2 - b\tau_1) - bc - u_2)(Y - \tau_2) \\ \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, a, b, c, \tau_1, \tau_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]. \quad (6.4)$$

Lema 6.7 Sean $l \in \mathbb{R}[X, Y]$ una recta, $u = (u_1, u_2) \notin V(l)$ un punto de \mathbb{R}^2 no incidente con l , y $P_{l,u}$ la parábola de foco u y recta directriz l . Además, sean $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ otra recta y $w = R_f(u)$ el punto simétrico de u respecto de f . Entonces:

$$R_f(u) \in V(l) \iff f \text{ es tangente a } P_{l,u}.$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, bajo la elección de un sistema de referencia adecuado, podemos suponer que son $u = (0, 1)$ y $l = Y$. De esta forma (en este sistema de referencia) $P_{l,u}$ está definido implícitamente por $P_{l,u} = X^2 - 2Y + 1$. Pongamos por último que (en este sistema de referencia) $f = mX + nY + d$ y $w = (w_1, w_2)$.

\implies

Si $w \in V(l)$, debe ser $w = (\lambda, 0)$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Y, puesto que $w = R_f(u)$, f es perpendicular a $\overrightarrow{uw} = (\lambda - 0, 0 - 1)$, y $u + w/2 \in V(f)$, luego (salvo proporcionalidad) f es $\lambda(X - \frac{0+\lambda}{2}) - 1(Y - \frac{1+0}{2})$. Podemos tomar

$$f = 2\lambda X - 2Y - \lambda^2 + 1.$$

Así, hace falta ver que $V(f) \cap P_{l,u}$ se reduce a un sólo punto $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ y f es la recta tangente a $P_{l,u}$ en τ .

$$V(f) \cap P_{l,u} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0 = P_{l,u}(x, y)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\lambda x - 2y - \lambda^2 + 1 = 0 \\ x^2 - 2y + 1 = 0 \end{array} \right\} \implies x^2 + (-2\lambda x + \lambda^2 - 1) + 1 = 0 \iff x^2 - 2\lambda x \lambda^2 = 0$$

Obtenemos: $x = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda^2}}{2} = \lambda$, e $y = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{\lambda^2 + 1}{2}$. Por tanto $V(f) \cap P_{l,u}$ es unipuntual y la recta tangente a $P_{l,u}$ en $(\lambda, \frac{\lambda^2 + 1}{2})$ queda definida implícitamente por

$$t_{(\lambda, \frac{\lambda^2 + 1}{2})} = (2\lambda)(X - \lambda) + (-2)(Y - \frac{\lambda^2 + 1}{2}) = 2\lambda X - 2Y - \lambda^2 + 1.$$

En definitiva f y $t_{(\lambda, \frac{\lambda^2 + 1}{2})}$ son la misma recta, como queríamos.

\impliedby

Ahora supongamos que f es tangente a $P_{l,u}$ en algún punto $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in P_{l,u}$. Como consecuencia de $P_{l,u}(\tau_1, \tau_2) = 0$ obtenemos que $\tau_2 = \tau_1^2 + 1/2$, y así, de acuerdo con la expresión de la recta tangente dada, tenemos que (salvo proporcionalidad) f es igual a

$$t_{(\tau_1, \tau_1^2 + 1/2)} = \tau_1 X - Y - \tau_1^2/2 + 1/2.$$

Ahora, aplicando el lema 4.22, las coordenadas de $w = (w_1, w_2) = R_f(u)$ son:

$$w_1 = 0 - \frac{2(\tau_1)(0 - 1 - \tau_1^2/2 + 1/2)}{\tau_1^2 + (-1)^2} = \frac{-(\tau_1)(-\tau_1^2 - 1)}{\tau_1^2 + 1} = \tau_1,$$

$$w_2 = 1 - \frac{2(-1)(0 - 1 - \tau_1^2/2 + 1/2)}{\tau_1^2 + (-1)^2} = 1 - \frac{(-1)(-\tau_1^2 - 1)}{\tau_1^2 + 1} = 1 - 1 = 0.$$

Finalmente tenemos que $l(w_1, w_2) = w_2 = 0$ y, por tanto, $w = R_f(u) \in V(l)$ como pretendíamos demostrar. \square

De sustituir en (6.4).

Recordamos que

$$u = (0, 1) \text{ y}$$

$$l = 0X + 1Y + 0$$

Sustituyendo en (6.1).

Recordamos que

$$u = (0, 1) \text{ y}$$

$$f = \tau_1 X - 1Y - \tau_1^2/2 + 1/2$$

En vista a este resultado, l y u forman un par de superposición $(l, u)_f$ únicamente si f es tangente a la parábola $P_{l,u}$. Denotaremos H_l a esta familia de rectas. Observemos que si $l = aX + bY + c$ con $a^2 + b^2 =: \lambda \neq 0$, $u = (u_1, u_2) \notin V(l)$ y $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ es un punto de $P_{l,u}$, considerando alternativamente $l' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}l = \frac{a}{\sqrt{\lambda}}X + \frac{b}{\sqrt{\lambda}}Y + \frac{c}{\sqrt{\lambda}}$ tenemos que $V(l') = V(l)$, $P_{l',u} = P_{l,u}$, y de acuerdo con la igualdad 6.4 es:

$$H_{l,u} = \{f \in \mathbb{R}[X, Y] / f \text{ es tangente a } P_{l,u}\} \\ = \{(b^2\tau_1 - ab\tau_2 - ac - \lambda u_1)(X - \tau_1) + (a^2\tau_2 - ab\tau_1 - bc - \lambda u_2)(Y - \tau_2) \\ \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, a, b, c, \tau_1, \tau_2)[X, Y] / (\tau_1, \tau_2) \in P_{l,u}\}.$$

Finalmente debemos hacer notar que $H_{l,u}$ es una familia de rectas con 1 grado de libertad⁵.

A esta condición la llamaremos incidencia de tipo 6 (I6).

6.1.2.4 Observaciones complementarias

Puesto que la reflexión es una aplicación 2-nilpotente (i.e., es su propia inversa), tenemos trivialmente dada una equivalencia entre pares de superposición simétricos. Informalmente hablando, obtenemos la misma condición al doblar un punto sobre el otro que al doblar el otro sobre el uno; e igualmente entre rectas y entre un punto y una recta⁶.

Además de los tipos de incidencias ya nombrados quedarían aún por estudiar las condiciones obtenidas al contemplar otros modos posibles de relacionar objetos al realizar un dobléz. En general debemos considerar todas las relaciones posibles entre objetos preexistentes (puntos y rectas), sus imágenes dobladas, y los propios dobleces. Hasta ahora hemos analizado todas las formas de relacionar objetos e imágenes dobladas; nos faltaría por tanto estudiar las relaciones posibles con el dobléz.

Los alineamientos con el dobléz posibles son:

- Que un punto u esté sobre el dobléz f . Es equivalente a la incidencia I2, luego en realidad es ya un caso estudiado.

$$(f, u)_f \iff (u, u)_f$$

- Que una recta l esté sobre f . Es la condición contemplada en I4.

$$(l, f)_f \iff (l, l)_f, \text{ con } l \text{ de puntos invariantes}$$

Además, podríamos relacionar una recta preexistente y el dobléz en base a su posición relativa:

- Que las rectas l y f sean perpendiculares: es la condición dada en la incidencia I5.

$$f \perp l \iff (l, l)_f, \text{ con } l \text{ invariante}$$

5 De acuerdo con el teorema de la función implícita (cfr. [SGV05]), podemos considerar τ_2 (resp. τ_1) definida unívocamente como función de τ_1 (resp. τ_2) en un entorno adecuado de τ .

6 En este tercer caso (superposición punto-recta), concedemos preferencia a representar $(l, u)_f$ frente a $(u, l)_f$ dado que en la práctica es más fácil y cómodo doblar el punto sobre la recta que al revés.

$\lambda = a^2 + b^2 \neq 0$ dado que a y b son al menos uno no nulo. Consecuentemente también $\sqrt{\lambda} \neq 0$

Siendo $\lambda = a^2 + b^2$, $\lambda \in \mathbb{Q}(a, b)$

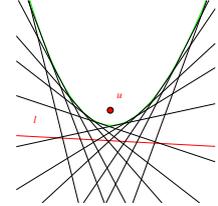


Figura 6.5: Incidencia tipo 6

Invariante (pero no de puntos invariantes)

Observación: Que las rectas sean secantes (es decir, que estén en posición general) no impone ninguna condición útil para definir el pliegue. Igualmente ocurriría exigiendo que un punto u y f estén en posición general

- Que las rectas l y f sean paralelas. Matemáticamente la condición de no ser incidentes tiene sentido, sin embargo no la contemplaremos dado que en la práctica no es ejecutable (se necesitaría una hoja de papel de extensión infinita para comprobar que ambas rectas no se cortan).

Notación: A partir de ahora utilizaremos $(l, f)_f$ para simbolizar I4, reservando $(l, l)_f$ para el caso I5.

6.1.3 Axiomas 1P

Como el lector habrá podido intuir, el propósito final es definir una línea de pliegue mediante las condiciones anteriores. Imponer una de las incidencias presentadas supone “consumir” ciertos grados de libertad; y será necesario “consumir” 2 grados de libertad para poder determinar una línea de pliegue⁷.

Definición 6.8 Un *axioma de construcción con un pliegue*, o simplemente *axioma 1P*, es un axioma de construcción \mathbf{A}_Ω definido a partir de un conjunto (combinación) de incidencias por plegado Ω minimal en el sentido de que hay un conjunto finito de (1-uplas de) líneas de pliegue solución de Ω .

Observaciones:

1. De acuerdo con la interpretación de axioma como aplicación dada en la [definición 3.1](#): para cada conjunto minimal de incidencias Ω tenemos definido un axioma 1P $\mathbf{A}_\Omega : D_\Omega \subset \mathcal{P} \times C \rightarrow C$ tal que

$$\text{dado } d \in D_\Omega, \quad \mathbf{A}_\Omega(d) \subset \{(f) : f \in \mathbb{R}[X, Y], \text{deg}(f) = 1\},$$

y si $f \in \mathbf{A}_\Omega(d)$ entonces $\omega(d)_f$ se verifica $\forall \omega \in \Omega$.

2. Estrictamente hablando Ω no es un conjunto de incidencias, si no una colección de incidencias aplicadas sobre ciertos subelementos de los elementos de partida. En este sentido, léase, si lo prefiere, ‘combinación de incidencias’ en lugar de ‘conjunto de incidencias’.

Aunque la idea es simple: cualquier forma elemental de definir un único pliegue, la definición puede ser algo turbia y seguramente quedará mucho más clara a través de un par de ejemplos.

Ejemplo 6.9 Si consideramos la incidencia I3 (es decir, que se cumpla la condición de superposición entre dos rectas distintos $(l_1, l_2)_f$), ésta nos basta para

⁷ Hablamos de que una incidencia “consume” d grados de libertad si, en el espacio de coeficientes a determinar, la imposición de la incidencia define un subespacio de codimensión d .

Una línea de pliegue posee 2 grados de libertad. En efecto, una recta $f = mX + nY + c$ queda determinada por m, n y c , donde (m, n) es un vector normal a f . Podemos tomar (m, n) en particular unitario ($m^2 + n^2 = 1$), y entonces debe ser $m = \cos(\theta)$, $n = \sin(\theta)$ para cierto $\theta \in [0, 2\pi)$. En definitiva, se trata de determinar θ y c , dirección y posición.

El espacio de coeficientes, por tanto, es en este caso un espacio de dimensión 2. Si se tratase de determinar dos pliegues en lugar de únicamente uno, el espacio de coeficientes sería de dimensión 4. Y así, por ejemplo, imponer I5 caracterizaría θ la dirección de una recta, dando lugar en el primer caso a un subespacio de soluciones de dimensión 1, en el segundo caso de a uno de dimensión 3; esto es, I5 define un subespacio de soluciones de codimensión 1.

Habitualmente prescindiremos de los paréntesis en este caso, dado que nos referimos a 1-uplas

definir un conjunto finito de pliegues solución. Así $\Omega = \{I3\} = \{I3(l_1, l_2)\}$ es minimal en este sentido. Tomando D_Ω como el conjunto de pares de rectas distintas, dado cualquier par $(l_1^*, l_2^*) \in D_\Omega \subset \mathcal{P} \times \mathcal{C}$, tenemos:

$$\mathbf{A}_\Omega(l_1^*, l_2^*) = \{(f) / f \text{ verifica } I3(l_1, l_2)(l_1^*, l_2^*)_f = (l_1^*, l_2^*)_f\}.$$

Como ya vimos, dependiendo de la posición relativa entre l_1^* y l_2^* , el conjunto de soluciones puede tener uno ($\{(f_2)\}$) o dos ($\{(f_1), (f_2)\}$) elementos (dependiendo de si l_1^* y l_2^* son paralelas o no, respectivamente). §

Ejemplo 6.10 Si consideramos la incidencia I2 (es decir, que se cumpla la condición de superposición de un punto consigo mismo $(u, u)_f$), queda determinado un conjunto de soluciones infinito (el haz de rectas H_u , un espacio de soluciones de codimensión 1), luego nos será necesario ampliar el conjunto de condiciones a imponer.

Podemos, por ejemplo, considerar I5 como segunda incidencia a imponer (es decir, que además se cumpla la superposición de una recta consigo misma $(l, l)_f$ de forma que haya un único punto invariante), logrando con ello reducir las soluciones a un número finito. Así, es $\Omega = \{I2, I5\} = \{I2(u), I5(l)\}$, y

$$\mathbf{A}_\Omega(u^*, l^*) = \left\{ (f) / f \text{ verifica } \begin{array}{l} (I2(u)(u^*))_f = (u^*, u^*)_f \\ (I5(l)(l^*))_f = (l^*, l^*)_f \end{array} \right\}.$$

La solución en este caso es, de hecho, única: $\mathbf{A}_\Omega(u^*, l^*) = \{(f)\}$, siendo f la única recta perpendicular a l^* que pasa por u^* ($\{f\} = H_{u^*} \cap H_{l^*}$).

También podríamos haber extendido el conjunto de condiciones a imponer volviendo a considerar I2, exigiendo ahora su cumplimiento sobre otro punto v (distinto de u). Así, como antes, quedan impuestas dos ecuaciones y obtenemos un conjunto finito de pliegues solución de $\Omega = \{I2, I2\} = \{I2(u), I2(v)\}$; siendo el axioma 1P asociado a esta combinación

$$\mathbf{A}_\Omega(u^*, v^*) = \left\{ (f) / f \text{ verifica } \begin{array}{l} (I2(u)(u^*))_f = (u^*, u^*)_f \\ (I2(v)(v^*))_f = (v^*, v^*)_f \end{array} \right\}.$$

De nuevo aquí $\mathbf{A}_\Omega(u^*, v^*)$ está formado por un único elemento solución: la recta que pasa por ambos puntos ($\{f\} = H_{u^*} \cap H_{v^*}$). §

Notemos que, de acuerdo con lo expuesto en la sección anterior: I2, I5 e I6 definen espacios de soluciones de codimensión 1 y deberán combinarse con otras incidencias para formar un conjunto de condiciones minimal; mientras que I1, I3 e I4 son de codimensión 2 y definen conjuntos de soluciones finitos, i.e., son por sí mismos un conjunto de condiciones minimal.

6.1.3.1 Correspondencia con los axiomas Huzita-Justin

Recordemos que hemos denominado axiomas Huzita-Justin al conjunto de axiomas de construcción de \mathcal{O} la herramienta origami (clásico).

Si retomamos los ejemplos anteriores, vemos que hay una correspondencia obvia entre los axiomas 1P ahí definidos y algunos de los axiomas Huzita-Justin. I3 se corresponde con $\mathbf{O3} = \mathbf{Bisector}(l_1, l_2)$; I2 en combinación

Mediante un abuso de notación amigable, estamos simbolizando una incidencia como una función de los objetos implicados en la superposición

Siendo aquí f_1 y f_2 los definidos durante el análisis de I3

Esto es: I1, I3 e I4 definen por sí mismos un axioma 1P; por contra I2 I5 e I6 deberán utilizarse conjuntamente para definir axiomas 1P

(ver [definición 4.1](#))

con I5 lo hace con **O4** = **Perpendicular**(l, u); mientras que I2 con I2 forma **O1** = **Recta**(u, v). Extendiendo esta apreciación al resto de incidencias, tenemos que: I1 es **O2** = **Mediatriz**(u, v); **O5** = **Tangencial**(l, u, v) es I2 con I6; **O7** = **PerpTangencial**(l_1, u, l_2) es I5 con I6; e I6 con I6 es **O6** = **TangencialComún**(l_1, u, l_2, v).

Estamos simbolizando
 $\Omega \equiv \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}_\Omega$

		I2	I5	I6
I1 \equiv O2	I2	O1	O4	O5
I3 \equiv O3	I5	O4	-	O7
I4 \equiv O8	I6	O5	O7	O6

Tabla 6.1: Correspondencia entre axiomas 1P y conjuntos de incidencias

I4 no se corresponde con ninguno de los axiomas Huzita-Justin (pues, al no crear ningún pliegue nuevo, en la literatura se ha prescindido de él como axioma de construcción), no obstante, como hemos visto, constituye un axioma 1P válido; y como axioma lo nombraremos **O8** = **O8**(l).

O8 = \mathbf{A}_Ω , siendo aquí
 $\Omega = \{I4\} = \{I4(l)\}$

I5 con I5 no define ningún axioma 1P dado que establecen o bien dos condiciones incompatibles (en el caso $l_1 \nparallel l_2$, se pide que f sea perpendicular a ambas), o bien condiciones redundantes entre sí (si $l_1 \parallel l_2$; y consecuentemente seguiremos teniendo la misma familia infinita de soluciones).

6.1.3.2 Completitud de los axiomas Huzita-Justin

Con lo anterior queda visto que no hay más formas de definir un único pliegue simultaneo (i.e., una 1-upla solución) mediante alineamientos. Es decir, los axiomas 1P asociados a los siguientes conjuntos minimales de incidencias

$$\{I1\}, \{I3\}, \{I4\}, \{I2, I2\}, \{I2, I5\}, \{I2, I6\}, \{I5, I6\}, \{I6, I6\}$$

son todos los axiomas 1P existentes. En base a esto, en [AL09] se afirma que el conjunto de axiomas Huzita-Justin es un conjunto de axiomas completo (en el sentido de que son todos los axiomas 1P que definen nuevas líneas de pliegue). En el marco de los axiomas 1P lo coherente para hablar de completitud es considerar también el axioma **O8**. Aunque para el estudio de los mapas asociados a una herramienta constituida con esta familia de axiomas la presencia o no de **O8** es irrelevante, de acuerdo con [Luc16] sí que hay razones prácticas que justifican su inclusión como axioma en otros campos de estudio⁸.

⁸ Por ejemplo, durante la construcción de figuras de origami es común tener marcado un pliegue (i.e., tener construido una línea de pliegue pero encontrarnos en un estado no doblado a través de él) en una de las capas del papel y mediante **O8** podemos doblar el resto de capas siguiendo esta línea de pliegue. Por ello, **O8** sí debe tenerse en cuenta para sistemas computacionales de diseño y simulación de origami; e.g., el sistema Eos ([IT+09]).

6.1.4 Revisión de los axiomas Huzita-Justin

Continuando con el análisis de las incidencias realizado, vamos a estudiar algebraicamente los axiomas Huzita-Justin como axiomas 1P. Como en la [tabla 6.1](#), simbolizaremos mediante \equiv la correspondencia entre un conjunto minimal de incidencias Ω y un axioma **A**.

6.1.4.1 **O1** $\equiv \{I2, I2\}$

Sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2)^2 \subset \mathbb{R}^2$, $u \neq v$ dos puntos dados distintos.

$$\mathbf{O1} = \mathbf{Recta}(u, v) = \mathbf{A}_\Omega(u, v), \quad \text{siendo } \Omega = \{I2, I2\} = \{I2(u), I2(v)\}$$

El conjunto de soluciones de $\Omega_{\mathbf{O1}} = \Omega$ es el de (1-uplas del conjunto de) los pliegues f que verifican $I2(u) = (u, u)_f$ e $I2(v) = (v, v)_f$, es decir, de:

$$H_u \cap H_v = \{f / u \in V(f)\} \cap \{f / v \in V(f)\}.$$

Hay una única recta f que pasa por dos puntos distintos u y v ; y es (salvo proporcionalidad):

$$f = (v_2 - u_2)(X - u_1) - (v_1 - u_1)(Y - u_2) \\ \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

6.1.4.2 **O2** $\equiv \{I1\}$

Sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2)^2 \subset \mathbb{R}^2$, $u \neq v$ dos puntos dados distintos.

$$\mathbf{O2} = \mathbf{Mediatriz}(u, v) = \mathbf{A}_\Omega(u, v), \quad \text{siendo } \Omega = \{I1\} = \{I1(u, v)\}$$

El conjunto de soluciones de $\Omega_{\mathbf{O2}} = \Omega$ es el de (1-uplas del conjunto de) los pliegues f que verifican $I1(u, v)_f = (u, v)_f$. Como ya vimos durante el análisis de la incidencia I1, hay un único pliegue solución:

$$f = (v_1 - u_1)\left(X - \frac{u_1 + v_1}{2}\right) + (v_2 - u_2)\left(Y - \frac{u_2 + v_2}{2}\right) \\ \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

6.1.4.3 **O3** $\equiv \{I3\}$

Sean $l_1 = a_1X + b_1Y + c_1, l_2 = a_2X + b_2Y + c_2 \in \mathbb{Q}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]$ dos rectas dadas distintas.

$$\mathbf{O3} = \mathbf{Bisector}(l_1, l_2) = \mathbf{A}_\Omega(l_1, l_2), \quad \text{siendo } \Omega = \{I3\} = \{I3(l_1, l_2)\}$$

El conjunto de soluciones de $\Omega_{\mathbf{O3}} = \Omega$ es el de (1-uplas del conjunto de) los pliegues f que verifican $I3(l_1, l_2)_f = (l_1, l_2)_f$. Como vimos durante el análisis de la incidencia I3, existirán uno o dos pliegues solución según sean o no las líneas paralelas.

Si $l_1 \parallel l_2$, entonces $\mathbf{O3}(l_1, l_2) = \{(f)\}$ siendo f el pliegue definido por

$$f = a_2X + b_2Y + \frac{\mu c_1 + c_2}{2} \in \mathbf{Q}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y];$$

Está garantizado que al menos uno de ellos (a_1 ó b_1) es no nulo

donde $\mu = a_2/a_1 = b_2/b_1$ (cuando los cocientes tengan sentido).

Si $l_1 \not\parallel l_2$, entonces $\mathbf{O3}(l_1, l_2) = \{(f_1), (f_2)\}$ siendo

$$\begin{aligned} f_1 &= (\sqrt{a_2^2 + b_2^2}a_1 - \sqrt{a_1^2 + b_1^2}a_2)X + (\sqrt{a_2^2 + b_2^2}b_1 - \sqrt{a_1^2 + b_1^2}b_2)Y + (\sqrt{a_2^2 + b_2^2}c_1 - \sqrt{a_1^2 + b_1^2}c_2), \\ f_2 &= (\sqrt{a_2^2 + b_2^2}a_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2}a_2)X + (\sqrt{a_2^2 + b_2^2}b_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2}b_2)Y + (\sqrt{a_2^2 + b_2^2}c_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2}c_2) \\ &\in \mathbf{Q}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \sqrt{a_2^2 + b_2^2})[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]. \end{aligned}$$

Observación: De acuerdo con lo comentado durante en el estudio de la incidencia I4, analíticamente parece razonable extender la definición del axioma $\mathbf{O3}$ a cualquier par de rectas:

$$\mathbf{O3}^{\text{ext}}(l_1, l_2) = \begin{cases} \mathbf{O3}(l_1, l_2) & \text{si } V(l_1) \neq V(l_2) \\ \mathbf{O8}(l_1) & \text{si } V(l_1) = V(l_2). \end{cases}$$

(Cfr. sección 6.1.3.2)

De esta forma podríamos hablar de completitud del conjunto de axiomas Huzita-Justin en un sentido más general. Para nuestro estudio es indiferente una u otra opción. En toda la literatura consultada se presenta $\mathbf{O3}$ definido sólo sobre rectas distintas; quizá por no haberse planteado hasta ahora la coherencia geométrica de esta opción, quizá por simplicidad en la presentación descriptiva del axioma.

6.1.4.4 $\mathbf{O4} \equiv \{I2, I5\}$

Sean $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{Q}(u_1, u_2)^2 \subset \mathbb{R}^2$ un punto y $l = aX + bY + c \in \mathbf{Q}(a, b, c)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]$ una recta.

$$\begin{aligned} \mathbf{O4} = \text{Perpendicular}(l, u) &= \mathbf{A}_\Omega(l, u), \quad \text{siendo} \\ \Omega &= \{I2, I5\} = \{I2(u), I5(l)\} \end{aligned}$$

El conjunto de soluciones de $\Omega_{\mathbf{O4}} = \Omega$ es el de (1-uplas del conjunto de) los pliegues f que verifican $I2(u) = (u, u)_f$ e $I5(l) = (l, l)_f$ (de forma que l no sea de puntos invariantes), es decir, de:

$$H_u \cap H_l = \{f / u \in V(f)\} \cap \{f / f \perp l\}.$$

Hay una única recta f perpendicular a l pasando por u ; y es (salvo proporcionalidad):

$$f = b(X - u_1) - a(Y - u_2) \in \mathbf{Q}(u_1, u_2, a, b)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

6.1.4.5 $\mathbf{O5} \equiv \{I2, I6\}$

Sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbf{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2)^2 \subset \mathbb{R}^2$ dos puntos, $l = aX + bY + c \in \mathbf{Q}(a, b, c)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]$ una recta, y tales que $u \notin V(l)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{O5} = \text{Tangencial}(l, u, v) &= \mathbf{A}_\Omega(l, u, v), \quad \text{siendo} \\ \Omega &= \{I2, I6\} = \{I2(v), I6(l, u)\} \end{aligned}$$

El conjunto de soluciones de $\Omega_{05} = \Omega$ es el de (1-uplas del conjunto de) los pliegues f que verifican $I2(v) = (v, v)_f \in I6(l, u) = (l, u)_f$, es decir, de:

$$H_v \cap H_{l,u} = \{f / v \in V(f)\} \cap \{f / f \text{ tangente a } P_{l,u}\}.$$

Con arreglo a lo expuesto en relación al tipo de incidencia I6,

$$H_{l,u} = \left\{ (b^2\tau_1 - ab\tau_2 - ac - \lambda u_1)(X - \tau_1) + (a^2\tau_2 - ab\tau_1 - bc - \lambda u_2)(Y - \tau_2) \right. \\ \left. \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, a, b, c, \tau_1, \tau_2)[X, Y] / (\tau_1, \tau_2) \in P_{l,u} \right\},$$

Siendo $\lambda = a^2 + b^2$,
 $\lambda \in \mathbb{Q}(a, b)$

y para definir los pliegues f solución de Ω_{05} el cometido es determinar $(\tau_1, \tau_2) \in P_{l,u}$ verificando $t_{(\tau_1, \tau_2)}(v_1, v_2) = 0$. Supongamos en lo que sigue que⁹ $\lambda = a^2 + b^2 = 1$. De acuerdo con las igualdades 6.3 y 6.4, debe ser:

$$P_{l,u}(\tau_1, \tau_2) = b^2\tau_1^2 + a^2\tau_2^2 - 2ab\tau_1\tau_2 - 2(ac + u_1)\tau_1 - 2(bc + u_2)\tau_2 + u_1^2 + u_2^2 - c^2 = 0 \quad (6.5)$$

$$t_{(\tau_1, \tau_2)}(v_1, v_2) = (b^2\tau_1 - ab\tau_2 - ac - u_1)(v_1 - \tau_1) + (a^2\tau_2 - ab\tau_1 - bc - u_2)(v_1 - \tau_2) = 0 \quad (6.6)$$

Desarrollando y agrupando, la suma de ambas ecuaciones resulta:

$$(-ac - u_1 + b^2v_1 - abv_2)\tau_1 + (-bc - u_2 + a^2v_2 - abv_1)\tau_2 \\ + (u_1^2 + u_2^2 - c^2 - acv_1 - bcv_2 - u_1v_1 - u_2v_2) = 0$$

Dado que (6.5)+(6.6) es lineal en τ_1 y τ_2 , podemos describir τ_2 (ó τ_1) como función lineal de τ_1 (resp. τ_2). Así, determinar (τ_1, τ_2) verificando 6.5 y 6.6 se reduce a resolver la ecuación en τ_1 (resp. τ_2) de segundo grado obtenida por sustitución de τ_2 (resp. τ_1) en 6.5.

De segundo grado, a lo sumo

Consecuentemente, el número de soluciones reales de τ_1 (resp. τ_2) es menor o igual a dos; esto es, pueden existir 0, 1 ó 2 puntos de tangencia (τ_1, τ_2) y por tanto 0, 1 ó 2 rectas tangentes solución, dependiendo del discriminante de dicha ecuación (i.e., dependiendo de una función de a, b, c, u_1, u_2, v_1 y v_2 ; y, en definitiva, de la posición relativa de v y $P_{l,u}$).

Por simplicidad, mediante un cambio de coordenadas adecuado¹⁰ podemos suponer que estamos trabajando con la parábola definida por $\tilde{P}_{\tilde{l}, \tilde{u}} = \tilde{X}^2 - 2\tilde{Y}$; y sea $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ el punto v en estas nuevas coordenadas. Así, es claro que cualquier punto de la parábola $\tilde{P}_{\tilde{l}, \tilde{u}}$ es de la forma $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2) = (\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_1^2/2)$, y de esta forma resulta:

$$t_{(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_1^2/2)}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = 0 \iff -\tilde{\tau}_1^2 + 2\tilde{v}_1\tilde{\tau}_1 - 2\tilde{v}_2 = 0.$$

El discriminante de la ecuación anterior es $\Delta = 4\tilde{v}_1^2 - 8\tilde{v}_2$, y puede ocurrir:

$\Delta = 0$ Este caso es, equivalentemente, si $\tilde{v}_2 = \tilde{v}_1^2/2$, es decir, si $\tilde{v} \in \tilde{P}_{\tilde{l}, \tilde{u}}$.

Tenemos una solución real de doble multiplicidad, luego (deshaciendo el cambio de variable) hay una única solución si $v \in P_{l,u}$.

9 En otro caso, basta redefinir a, b y c de aquí en adelante como $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, respectivamente.

10 Notemos que todas las parábolas son semejantes entre sí, basta determinar un cambio de posición, orientación y escala adecuado. En particular, $\tilde{P}_{\tilde{l}, \tilde{u}} = \tilde{X}^2 - 2\tilde{Y}$ corresponde a la parábola de directriz $\tilde{l} = \tilde{Y} + 1/2$ y foco $\tilde{u} = (0, 1/2)$. Durante la demostración del [teorema principal del origami](#) ya explicitamos para este caso la afinidad que lleva u en \tilde{u} y l en \tilde{l} .

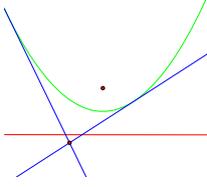


Figura 6.6: Caso particular de **O5** con 2 soluciones

$\Delta > 0$ Este caso es: $\tilde{v}_2 < \tilde{v}_1^2/2$, es decir, si \tilde{v} queda “por debajo de” $\tilde{P}_{l,\tilde{u}}$. Luego (deshaciendo el cambio de variable), hay dos soluciones distintas si v está en la “parte externa” de la parábola $P_{l,u}$.

$\Delta < 0$ Este caso es: $\tilde{v}_2 > \tilde{v}_1^2/2$, es decir, si \tilde{v} queda “por encima de” $\tilde{P}_{l,\tilde{u}}$. Y en este caso no hay soluciones reales. Por tanto (deshaciendo el cambio de variable), no hay solución si v está en la “parte interna” de $P_{l,u}$.

Con todo, en definitiva tenemos que cuando haya soluciones reales de (τ_1, τ_2) , el pliegue $f = t_{(\tau_1, \tau_2)}$ es solución de Ω_{O5} . Pudiendo ocurrir:

Si $v = (v_1, v_2) \in P_{l,u}$, entonces $\mathbf{O5}(l, u, v) = \{(f)\}$ siendo $f = t_{(v_1, v_2)}$ definido como

Siendo $\lambda = a^2 + b^2$,
 $\lambda \in \mathbb{Q}(a, b)$

$$t_{(v_1, v_2)} = (b^2 v_1 - abv_2 - ac - \lambda u_1)(X - v_1) + (a^2 v_2 - abv_1 - bc - \lambda u_2)(Y - v_2) \\ \in \mathbb{Q}(a, b, c, u_1, u_2, v_1, v_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

Si v está en la “parte exterior” de la parábola $P_{l,u}$, entonces $\mathbf{O5}(l, u, v) = \{(f_1), (f_2)\}$ siendo $f_1 = t_{(\tau_{1,1}, \tau_{1,2})}$ y $f_2 = t_{(\tau_{2,1}, \tau_{2,2})}$ las rectas tangentes a $P_{l,u}$ asociadas respectivamente a uno de los dos puntos solución $\tau_{(1)} = (\tau_{1,1}, \tau_{1,2})$ y $\tau_{(2)} = (\tau_{2,1}, \tau_{2,2})$. Así, para $j = 1$ ó 2 , tenemos¹¹:

Siendo $\lambda = a^2 + b^2$,
 $\lambda \in \mathbb{Q}(a, b)$

$$t_{(\tau_{j,1}, \tau_{j,2})} = (b^2 \tau_{j,1} - ab\tau_{j,2} - ac - \lambda u_1)(X - \tau_{j,1}) + (a^2 \tau_{j,2} - ab\tau_{j,1} - bc - \lambda u_2)(Y - \tau_{j,2}) \\ \in \mathbb{Q}(a, b, c, u_1, u_2, \tau_{j,1}, \tau_{j,2})[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y].$$

6.1.4.6 **O6** $\equiv \{I6, I6\}$

Sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, v_1, v_2)^2 \subset \mathbb{R}^2$ dos puntos, $l_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1, l_2 = a_2 X + b_2 Y + c_2 \in \mathbb{Q}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]$ dos rectas, y tales que $u \notin V(l_1), v \notin V(l_2)$ y $(u, V(l_1)) \neq (v, V(l_2))$.

$$\mathbf{O6} = \mathbf{TangencialComún}(l_1, u, l_2, v) = \mathbf{A}_\Omega(l_1, u, l_2, v), \quad \text{siendo} \\ \Omega = \{I6, I6\} = \{I6(l_1, u), I6(l_2, v)\}$$

El conjunto de soluciones de $\Omega_{\mathbf{O6}} = \Omega$ es el de (1-uplas del conjunto de) los pliegues f que verifican $I6(l_1, u) = (l_1, u)_f$ e $I6(l_2, v) = (l_2, v)_f$, es decir, de:

$$H_{l_1, u} \cap H_{l_2, v} = \{f / f \text{ tangente a } P_{l_1, u}\} \cap \{f / f \text{ tangente a } P_{l_2, v}\}.$$

Podemos anticipar que, de acuerdo con el teorema de Bezout dos parábolas tienen como mucho cuatro tangentes comunes en el plano proyectivo. Puesto que una de ellas es la recta del infinito, habrá a lo sumo tres rectas tangentes en el plano euclideo, luego a lo sumo tres pliegues solución

Buscamos, en definitiva, las rectas tangentes comunes a dos parábolas. Vamos a ver bajo qué circunstancias existirán pliegues tales y, en caso de existir, cuántos habrá.

Un modo de abordar esto es precisándolo como la intersección de $H_{l_1, u}$ y $H_{l_2, v}$; esto es, imponiendo que un pliegue solución f puede expresarse como la tangente $t_{(\tau_1, \tau_2)}$ a la parábola $P_{l_1, u}$ en un punto $(\tau_1, \tau_2) \in P_{l_1, u}$ y también

¹¹ Apreciemos que en este caso es más sencillo describir cada uno de los pliegues como la recta que pasa por dos puntos distintos (v y $\tau_{(1)}$ ó v y $\tau_{(2)}$, según corresponda). Damos preferencia a esta expresión para manejar una descripción de las soluciones común a todos los casos.

como la tangente $t_{(\varsigma_1, \varsigma_2)}$ a la parábola $P_{l_2, v}$ en un punto $(\varsigma_1, \varsigma_2) \in P_{l_2, v}$. Se trataría así, por tanto, de analizar la resolubilidad del sistema

$$\begin{cases} P_{l_1, u}(\tau_1, \tau_2) = 0 \\ P_{l_2, v}(\varsigma_1, \varsigma_2) = 0 \\ t_{(\tau_1, \tau_2)}(\varsigma_1, \varsigma_2) = 0 \\ t_{(\varsigma_1, \varsigma_2)}(\tau_1, \tau_2) = 0 \end{cases}$$

en función de u, v, l_1 y l_2 . Así se procede, por ejemplo, en [Lor08].

Nosotros seguiremos un nuevo camino, inspirándonos en la interpretación alternativa de este doblez comentada en [AL09, sección 7.1]. Para verificar $I6(l_1, u)$, esto es, para superponer u sobre l_1 mediante un doblez, debemos considerar f en $H_{l_1, u}$ la familia de rectas tangentes a $P_{l_1, u}$. Ahora, serán solución de Ω_{06} aquellas que además verifiquen $I6(l_2, v)$, es decir, aquellas tales que $R_f(v) \in V(l_2)$. Consideremos $PO_{P_{l_1, u}, v}$ el lugar geométrico de los puntos $R_f(v)$ simétricos de v respecto de las rectas f tangentes a $P_{l_1, u}$ ¹².

$$PO_{P_{l_1, u}, v} = \left\{ (x, y) \mid (x, y) = R_f(v) \text{ para cierta } f \in H_{l_1, u} \right\} \quad (6.7)$$

De esta forma, si $(x, y) \in PO_{P_{l_1, u}, v} \cap V(l_2)$, entonces existe $f \in H_{l_1, u}$ tal que $(x, y) = R_f(v)$, y consecuentemente tal recta f verifica Ω_{06} .

Mediante un cambio de coordenadas adecuado¹³ podemos trabajar con $\tilde{u} = (0, 1/2)$ y $\tilde{l}_1 = \tilde{Y} + 1/2$. Por simplicidad prescindiremos de subíndices para los coeficientes de \tilde{l}_2 . Para no sobrecargar la notación en adelante nombraremos los objetos sin tildar, no obstante mantengamos en la memoria que hacen referencia a sus imágenes vía el cambio de coordenadas realizado.

De esta forma, la parábola $P_{l_1, u}$ queda definida mediante $P_{l_1, u} = X^2 - 2Y$. Y las rectas tangentes a tal parábola (en un punto $(\tau_1, \tau_2) \in P_{l_1, u}$) descritas implícitamente mediante $t_{(\tau_1, \tau_2)} = \tau_1(X - \tau_1) - (Y - \tau_2)$. Observemos que cualquier punto en la parábola $P_{l_1, u}$ es de la forma $(\tau_1, \tau_2) = (\tau_1, \tau_1^2/2)$; y que τ_1 es la pendiente de $t_{(\tau_1, \tau_2)}$; es decir, podemos parametrizar la familia de tangentes a $P_{l_1, u}$ de acuerdo a su pendiente m :

$$H_{l_1, u} = \left\{ t_{\left(m, \frac{m^2}{2}\right)} \mid m \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{siendo } t_{\left(m, \frac{m^2}{2}\right)} = m(X - m) - \left(Y - \frac{m^2}{2}\right) \\ = mX - Y - \frac{m^2}{2} \in \mathbb{R}[X, Y].$$

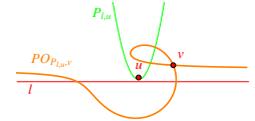
La imagen simétrica de $v = (v_1, v_2)$ respecto de una de estas tangentes es:

$$R_{t_{\left(m, \frac{m^2}{2}\right)}}(v) = \left(v_1 - \frac{2m(mv_1 - v_2 - m^2/2)}{m^2 + (-1)^2}, v_2 - \frac{2(-1)(mv_1 - v_2 - m^2/2)}{m^2 + (-1)^2} \right) \\ = \frac{1}{m^2 + 1} (v_1(m^2 + 1) - 2m^2v_1 + 2mv_2 + m^3, v_2(m^2 + 1) + 2mv_1 - 2v_2 - m^2).$$

Ahora, los puntos en la intersección $PO_{P_{l_1, u}, v} \cap V(l_2)$ son aquellos tales que

12 Se llama curva *podaria*, o curva *pedal*, de una curva C respecto a un punto p al lugar geométrico de las proyecciones ortogonales de p sobre la familia de tangentes a C (cfr. [Loc61]). Así, es claro que $PO_{P_{l_1, u}, v}$ es la curva podaria asociada a la parábola $P_{l_1, u}$ y al punto-pedal v , escalada por 2 desde el punto v (cfr. [Alp04]).

13 Durante la demostración del [teorema principal del origami](#) ya se explicitó la afinidad que lleva u en $\tilde{u} = (0, 1/2)$ y l en $\tilde{l} = \tilde{Y} + 1/2$.



Definición 6.12 Al locus $PO_{P_{l_1, u}, v}$ lo denominaremos *curva ori cúbica* asociada a l_1, u y v .

$$m = \frac{\tau_1}{-(-1)} = \tau_1$$

Sustituyendo en (6.1)

$$m \in \mathbb{R}$$

O, equivalentemente, en $(m^2 + 1)l_2$

$l_2(x, y) = 0$; sustituyendo en l_2 tenemos:

$$a(v_1(m^2 + 1) - 2m^2v_1 + 2mv_2 + m^3) + b(v_2(m^2 + 1) + 2mv_1 - 2v_2 - m^2) + (m^2 + 1)c = 0.$$

Agrupando, obtenemos una ecuación tercer grado (en general) en m ,

$$am^3 + \frac{(av_1 - 2av_1 + bv_2 - b + c)}{-av_1 + b(v_2 - 1) + c}m^2 + \frac{(2av_2 + 2bv_1)}{2(av_2 + bv_1)}m + \frac{(av_1 + bv_2 - 2bv_2 + c)}{av_1 - bv_2 + c} = 0, \quad (6.8)$$

y determinar las soluciones de ésta será determinar los pliegues $f = t_{(m, m^2/2)}$ solución de Ω_{06} . Puede ocurrir...

Recordemos que $l_1 = Y + 1/2$

... Si $a \neq 0$; esto es, si l_1 y l_2 no son paralelas. En este caso se trata de una ecuación de grado tres, y el número de soluciones reales distintas podrá ser (en función del signo del discriminante¹⁴): bien 1 (si $\Delta < 0$), bien entre 1 y 2 (si $\Delta = 0$), o bien 3 (si $\Delta > 0$). En todo caso hay al menos una raíz real m , luego está garantizada la existencia de al menos un pliegue solución $f = t_{(m, m^2/2)}$.

... Si $a = 0$; esto es, si l_1 y l_2 son paralelas. Entonces tenemos garantizado que $b \neq 0$ y la ecuación 6.8 queda:

$$(bv_2 - b + c)m^2 + (2bv_1)m + (-bv_2 + c) = 0.$$

... Y si además $bv_2 - b + c \neq 0$, entonces tenemos una ecuación de segundo grado en m , y (en función del discriminante) el número de soluciones reales distintas posibles será: bien 0 (si $\Delta < 0$), bien 1 (si $\Delta = 0$), o bien 2 (si $\Delta > 0$); y acorde con esto el número de pliegues solución.

Examinando el discriminante más detenidamente en este caso, es¹⁵:

si $d(u, v)^2 < d(l_1, l_2)^2$, entonces no hay solución,

si $d(u, v)^2 = d(l_1, l_2)^2$, entonces hay 1 solución, y

si $d(u, v)^2 > d(l_1, l_2)^2$, entonces hay 2 soluciones.

... Y si además $bv_2 - b + c = 0$, es decir, cuando además $c = b(1 - v_2)$; entonces¹⁶ $P_{l_2, v}$ es una traslación de $P_{l_1, u}$ y la ecuación 6.8 resulta:

$$(2bv_1)m + (-bv_2 + b(1 - v_2)) = 0 \implies v_1 m + (-v_2 + 1/2) = 0.$$

14 El discriminante de $Am^3 + Bm^2 + Cm + D = 0$ es

$$\Delta = 18ABCD - 4B^3D + B^2C^2 - 4AC^3 - 27A^2D^2.$$

Si $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, entonces si $\Delta > 0$ tendremos tres raíces reales, si $\Delta < 0$ una real y dos complejas conjugadas, y si $\Delta = 0$ sus raíces serán reales y habrá alguna múltiple (bien una triple, bien una doble y una simple).

15 Observemos primeramente que $d(u, v)^2 = (v_1 - 0)^2 + (v_2 - 1/2)^2 = v_1^2 + v_2^2 - v_2 + 1/4$ y $d(l_1, l_2)^2 = d((0, -1/2), l_2)^2 = \frac{(b(-1/2)+c)^2}{0+b^2} = \frac{1}{4} + \frac{c^2}{b^2} - \frac{c}{b}$. Ahora:

$$\begin{aligned} \Delta &= B^2 - 4AC = (2bv_1)^2 - 4(bv_2 - b + c)(-bv_2 + c) = 4b^2v_1^2 + 4b^2v_2^2 - 4b^2v_2 + 4bcv_2 + \\ &\quad - 4bcv_2 + 4bc - 4c^2 = 4b^2\left(v_1^2 + v_2^2 - v_2 + \frac{c}{b} - \frac{c^2}{b^2}\right) = 4b^2(d(u, v)^2 - d(l_1, l_2)^2). \end{aligned}$$

16 Recordemos que $u = (0, 1/2)$ y $l_1 = Y + 1/2$. Y en estas circunstancias, siendo $v = (v_1, v_2)$, tenemos l_2 definida implícitamente como $bY + b(1 - v_2) \equiv Y - (v_2 - 1)$. Esto es, el par (v, l_2) es (u, l_1) trasladado v_1 unidades "horizontalmente" y $v_2 - 1/2$ "verticalmente"; en particular, $l_2 \parallel l_1$ y $d(v, l_2) = d(u, l_1)$ (con ambos puntos en el respectivo semiplano positivo). En definitiva, $P_{l_2, v}$ es $P_{l_1, u}$ vía la traslación $T_{v \rightarrow u}$.

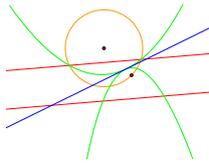
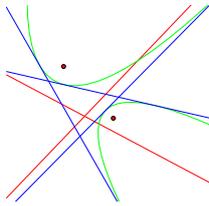


Figura 6.7: Algunos casos particulares de **O6**. Arriba, un ejemplo de situación $l_1 \nparallel l_2$ con 3 soluciones. Abajo, un caso con $l_1 \parallel l_2$ y $d(u, v) = d(l_1, l_2)$, luego con 1 solución

... Si $v_1 \neq 0$, entonces tenemos una ecuación lineal en m , y por tanto existe una única solución para la pendiente, luego asimismo un único pliegue solución de Ω_{06} .

... Por último, si es $v_1 = 0$; esto es, si la traslación se realiza sólo “verticalmente” y por tanto ambas parábolas comparten el mismo eje de simetría. En este caso no hay solución de m , salvo que ($v_2 = 1/2$) y cualquier pendiente sería válida. Pero tal caso ($v = u$ y $V(l_2) = V(l_1)$) ya ha quedado descartado por hipótesis dado que Ω_{06} no sería un conjunto minimal.

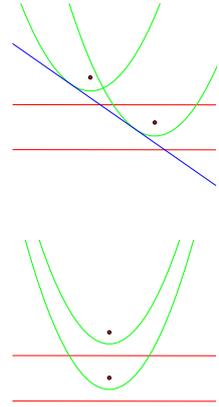


Figura 6.8: Algunos casos particulares de **O6**. Arriba, traslación con “parte horizontal” no nula, luego con 1 solución. Abajo, traslación vertical, sin soluciones

6.1.4.7 **O7** $\equiv \{I5, I6\}$

Sean $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{Q}(u_1, u_2)^2 \subset \mathbb{R}^2$ dos puntos, $l_1 = a_1X + b_1Y + c_1$, $l_2 = a_2X + b_2Y + c_2$, $\in \mathbb{Q}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)[X, Y] \subset \mathbb{R}[X, Y]$ una recta, y tales que $u \notin V(l_1)$.

$$\mathbf{O7} = \mathbf{PerpTangencial}(l_1, u, l_2) = \mathbf{A}_\Omega(l_1, u, l_2), \quad \text{siendo}$$

$$\Omega = \{I5, I6\} = \{I5(l_2), I6(l_1, u)\}$$

El conjunto de soluciones de $\Omega_{07} = \Omega$ es el de (1-uplas del conjunto de) los pliegues f que verifican $I6(l_1, u) = (l_1, u)_f$ e $I5(l_2) = (l_2, l_2)_f$ (de forma que l_2 no sea de puntos invariantes), es decir, de:

$$H_{l_2} \cap H_{l_1, u} = \{f / f \perp l_2\} \cap \{f / f \text{ tangente a } P_{l_1, u}\}.$$

Como otras veces, para determinar un pliegue solución nos basta con determinar un punto de tangencia $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in P_{l_1, u}$ adecuado; en este caso, verificando (de acuerdo con las igualdades 6.3 y 6.4):

$$P_{l_1, u}(\tau_1, \tau_2) = 0 \Leftrightarrow b_1^2\tau_1^2 + a_1^2\tau_2^2 - 2a_1b_1\tau_1\tau_2 - 2(a_1c_1 + u_1)\tau_1 - 2(b_1c_1 + u_2)\tau_2 + u_1^2 + u_2^2 - c_1^2 = 0, \quad (6.9)$$

$$t_{(\tau_1, \tau_2)} \perp l_2 \Leftrightarrow (b_1^2\tau_1 - a_1b_1\tau_2 - a_1c_1 - u_1)a_2 = -(a_1^2\tau_2 - a_1b_1\tau_1 - b_1c_1 - u_2)b_2, \quad (6.10)$$

supuesto que $a_1^2 + b_1^2 = 1$. Inspeccionando el aspecto de este sistema podemos ver que, como máximo, podremos obtener dos soluciones. Vamos a ver que, de hecho, hay como mucho una solución¹⁷.

Nosotros, por simplicidad, aquí trabajaremos (mediante el cambio de coordenadas adecuado¹⁰) con $\tilde{P}_{\tilde{l}_1, \tilde{u}} = \tilde{X}^2 - 2\tilde{Y}$. Así, (6.9) implica que $\tilde{\tau}$ es de la forma $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_1^2/2)$. Además $\tilde{t}_{(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_1^2/2)} = \tilde{\tau}_1\tilde{X} - \tilde{Y} - \tilde{\tau}_1^2/2$, y la condición de perpendicularidad 6.10 queda:

$$\tilde{\tau}_1 \tilde{a}_2 = \tilde{b}_2.$$

Si $\tilde{a}_2 \neq 0$, es decir, si \tilde{l}_2 no es paralela a \tilde{l}_1 , entonces tenemos definido de forma única $\tilde{\tau}_1 = \tilde{b}_2/\tilde{a}_2$ y en consecuencia (tras revertir el cambio de variable) un único pliegue solución $f = t_{(\tau_1, \tau_2)}$.

Si $\tilde{a}_2 = 0$, suponer la existencia de una solución $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ implica que también $\tilde{b}_2 = \tilde{\tau}_1\tilde{a}_2 = 0$, lo cual es imposible. Por tanto, si $l_2 \parallel l_1$ no hay ningún pliegue solución de Ω_{07} .

Despejando τ_2 (resp. τ_1 de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera: nos queda una ecuación cuadrática en τ_1 (resp. τ_2)

Siendo $\tilde{l}_2 = \tilde{a}_2\tilde{X} + \tilde{b}_2\tilde{Y} + \tilde{c}_2$ la recta l_2 en las nuevas coordenadas

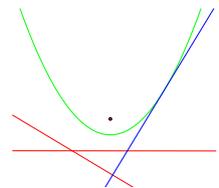


Figura 6.9: Ejemplo de **O7** con solución

¹⁷ En [GKK13] se prueba esto mediante computación simbólica, dado que (6.9) es la ecuación de una parábola. Nosotros, como hasta ahora, procederemos analizando equivalentemente una situación conocida vía una afinidad.

6.2 2P-ORIGAMI Y mP-ORIGAMI

6.2.1 Multiplegado y teoría de superposición

El origami multipliegue es la generalización obvia del proceso realizado en la sección anterior, permitiendo ahora definir más de un pliegue de forma simultánea. El proceso y la definición general son claros: debemos explorar las posibles condiciones de alineamiento relacionando los objetos intervinientes (puntos, rectas, dobleces y las imágenes dobladas de estos), y luego considerar todas las posibles combinaciones de incidencias de forma que queden determinadas m líneas de pliegue.

Dado $m \in \mathbb{N}$

Definición 6.13 Un *axioma de construcción con m pliegues*, o simplemente *axioma mP* , es un axioma de construcción \mathbf{A}_Ω definido a partir de un conjunto de incidencias por plegado Ω minimal en el sentido de que hay un número finito de m -uplas solución de Ω , siendo dichas m -uplas formadas por m líneas de pliegue.

Notación: Para diferencial cada una de las m líneas de pliegue que forman una m -upla solución utilizaremos un subíndice alfabético (a, b, c, \dots).

Mediante la relación natural entre el orden alfabético y la posición del pliegue en la m -upla

Observaciones:

1. Como ya comentamos en relación con la [definición 6.8](#), Ω es más propiamente una colección de incidencias, referidas cada una de ellas a unos puntos, rectas y dobleces específicos (y las denotaremos como función de estos: $\omega_{f_w}(A, B)$). Y si Ω es mP -minimal (minimal en el sentido de la definición de axioma mP), tenemos $\mathbf{A}_\Omega : D_\Omega \subset \mathcal{P} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que, dado $U \in D_\Omega$,

$f_w \in \mathbb{R}[X, Y]$, y $\deg(f_w) = 1$. Con $w \in \{a, b, \dots, m\}$, siendo $m = \alpha_{\text{alfabet}}(m)$

$$\mathbf{A}_\Omega(U) \subset \{(f_a, f_b, \dots, f_m) : f_w \text{ es una línea de pliegue}\},$$

y si $(f_a, f_b, \dots, f_m) \in \mathbf{A}_\Omega(U)$ entonces se verifica $\omega_{f_w}(A(U), B(U))$ para cada $\omega_{f_w}(A, B) \in \Omega$.

2. Por supuesto, los casos interesantes de axiomas mP serán aquellos donde los m pliegues sean distintos entre sí; no obstante, cualquier axioma nP con $0 < n < m$ “es”, de acuerdo con la definición, un axioma mP .

El número de alineamientos y combinaciones de incidencias posibles crece muy rápidamente al incrementar el número de pliegues simultáneamente creados. Puesto que nuestro estudio es combinatorio, las siguientes equivalencias nos ayudarán a reducir el número de combinaciones a considerar.

Estas definiciones amparan el proceso que realizamos en la [sección 6.1.2.4](#)

Definición 6.14 Diremos que dos conjuntos de incidencias Ω y Ω' son *equivalentes* si una m -upla de líneas de pliegue verifica Ω si, y sólo si, verifica Ω' . En particular, si Ω y Ω' son mP -minimales serán equivalentes si definen el mismo axioma asociado.

Definición 6.15 Diremos que dos axiomas \mathbf{A}_{Ω_1} y \mathbf{A}_{Ω_2} son *equivalentes por permutación* si son el mismo axioma bajo permutación de sus puntos, rectas

y dobleces; es decir, si existe una permutación σ definida sobre los puntos, rectas y dobleces intervinientes en uno de los axiomas de forma que, si $F^{(1)}$ es una m -upla solución de $\mathbf{A}_{\Omega_1}(U)$, entonces $F^{(2)} = \sigma(F^{(1)})$ es solución de $\mathbf{A}_{\Omega_2}(\sigma(U))$.

σ intercambia puntos con puntos, rectas con rectas y dobleces con dobleces

Diremos que dos axiomas son *distintos* si no son equivalentes por permutación. En particular, será útil para validar la equivalencia entre dos axiomas el siguiente criterio:

Lema 6.16 (Equivalencia por doblado) Sean Ω y Ω' dos conjuntos de incidencias mP -minimales. Si podemos obtener Ω' a partir de Ω mediante la aplicación de reflexiones por líneas de pliegue a los pares de objetos superpuestos por una incidencia, entonces \mathbf{A}_{Ω} y $\mathbf{A}_{\Omega'}$ son axiomas equivalentes.

En otras palabras, y justificando el lema, estamos diciendo que una condición de superposición $(A, B)_f$ es equivalente a $(R_{f_*}(A), R_{f_*}(B))_f$. La aplicación reiterada del lema establece la equivalencia entre axiomas relacionados por aplicación de posiblemente varias reflexiones por doblado y sobre posiblemente varias incidencias. La generalización a un criterio de equivalencia por permutación es también evidente.

Siendo f_* (como f) una de las líneas de pliegue que intervienen en el conjunto de condiciones al que pertenece la incidencia

Definición 6.17 Dado $m \in \mathbb{N}$, llamaremos *origami m -plegado* a la herramienta constituida el conjunto de todos¹⁸ los axiomas de construcción de tipo mP y el axioma de intersección entre rectas:

Abreviado *mP-origami*

$$\mathcal{O}_{mP} = \langle \{\text{axiomas } mP\}, \{\mathbf{RectaIntersec}\} \rangle.$$

Bajo el nombre de *origami multipliegue* consideramos a la familia de todas las herramientas \mathcal{O}_{mP} .

Abreviado *MP-origami*

Es claro al aumentar m el número de pliegues simultáneos admitidos obtenemos herramientas más y más potentes¹⁹. Así, por ejemplo, dos axiomas $1P$ considerados conjuntamente constituyen un axioma $2P$, y por tanto, es claro que

$$\mathcal{O} = \{0, 1\}^{\mathcal{O}_{1P}} \subseteq \{0, 1\}^{\mathcal{O}_{2P}} =: \mathcal{O}_{2P}.$$

Por extensión consideraremos el mapa canónico del origami mP definido a partir del conjunto $\{0, 1\}$, y lo denotaremos \mathcal{O}_{mP}

Por supuesto, al contrario no será cierto, en general los axiomas $2P$ no podrán descomponerse como dos axiomas $1P$. Es en este tipo de axiomas donde residirá el mayor potencial de la herramienta \mathcal{O}_{2P} , y, en general, el que permitirá extender el conjunto de puntos y curvas construibles por \mathcal{O}_{mP} frente a lo ya construible por una herramienta \mathcal{O}_{nP} con n menor.

Definición 6.18 Diremos que un axioma mP \mathbf{A}_{Ω} es *escindible* si Ω el conjunto de incidencias por plegado que lo define puede descomponerse como unión disjunta de subconjuntos m_jP -minimales; esto es, si

En [AL09] «separable»

$$\Omega = \bigcup_{j \in J} \Omega_j \quad \text{y, para cada } j \in J, \quad \mathbf{A}_{\Omega_j} \text{ es un axioma } m_jP.$$

Siendo $m_j \in \mathbb{N}$, $m_j < m$ para cada j , y tales que $\sum_{j \in J} m_j = m$

¹⁸ Pese a que el número de axiomas mP distintos se dispare rápidamente, dada la naturaleza combinatoria del problema es claro que habrá un número finito de ellos.

¹⁹ En el sentido de que si $n < m$ entonces \mathcal{O}_{mP} genera geoméricamente a \mathcal{O}_{nP} .

Definición 6.19 Diremos que un axioma mP \mathbf{A}_Ω es *reducible* si existe un subconjunto $\Omega' \subset \Omega$ del conjunto de incidencias tal que Ω' es $m'P$ -minimal para algún $m' < m$, es decir, que puede definir un axioma $m'P$. En tal caso, si U son los objetos de partida del axioma \mathbf{A}_Ω y F es una m' -upla solución de $\mathbf{A}_{\Omega'}$, existe un $(m-m')$ -axioma de forma que, a partir de $U \cap F$, sus $(m-m')$ -uplas solución combinadas con los pliegues F (en el orden adecuado) forman una m -upla solución de \mathbf{A}_Ω el axioma original.

Observación: La definición de axioma escindible es la más intuitiva, pero no es todo lo buena que podríamos esperar. Por ejemplo, es claro que el axioma $\mathbf{A}_\Omega(A, B)$ definido por $\Omega = (I1_{f_a}(A, B), I1_{f_b}(A, B))$ es escindible, sin embargo $\Omega' = (I1_{f_a}(A, B), I4_{f_b}(f_a))$ es un conjunto de incidencias equivalente que no puede descomponerse como dos axiomas separadamente.

En particular, cualquier axioma con dos líneas de pliegue iguales será reducible

Esto justifica la introducción la definición de axioma reducible. No obstante, ambas intentan recoger la misma idea, podemos pensar indistintamente tanto en una como en otra provistos de una consideración laxa de la minimalidad de los subconjuntos en la primera noción.

Observemos, por ejemplo, que cualquier colección Ω donde una de las incidencias especifique completamente una de las líneas de pliegue dará lugar a un axioma reducible.

Durante el estudio de O_{mP} centraremos nuestra atención, por tanto, en determinar y analizar el conjunto de axiomas mP distintos y no reducibles. Lo hasta aquí expuesto nos será útil para reducir la principal complicación teórica, el gran número de casos que a priori debemos tratar.

6.2.1.1 Comentarios adicionales

Desde el punto de vista práctico, la realización de estos axiomas multiplegue puede volverse muy dificultosa incluso ya desde el tipo 2P. La operatividad de los alineamientos presupone que podamos doblar y variar la localización de los dobleces en el papel de forma suave y fluida²⁰. Por ejemplo, entre dos pliegues simultáneos, salvo que éstos sean paralelos, su intersección eventualmente aparecerá dentro de la hoja de papel y en la práctica este punto impedirá variar de forma suave la posición y ángulo de los pliegues. Obviaremos este tipo de complicaciones presuponiendo un material ideal donde los dobleces no “se amarren” y que disponemos de las “suficientes manos” como para poder manejar todos los dobleces (para esto podrían ayudarnos más dobladores, o máquinas diseñadas para la realización de cada uno de los axiomas).

Otra segunda complicación práctica a la operatividad del origami multiplegue reside en los posibles cambios en el tipo de doblez (valle o montaña) de una determinada línea de pliegue²¹ durante la búsqueda de una dis-

20 La técnica para realizar un axioma mP doblando una hoja de papel en la práctica responde a la siguiente idea: definir pseudo-dobleces curvando el papel pero sin llegar a definir ningún pliegue y poder “deslizar” estos pseudo-dobleces hasta que se verifiquen las superposiciones buscadas, una vez encontrada esta situación favorable doblar “duramente” los pseudo-dobleces.

21 Cambiar el tipo de doblez corresponde con una reordenación entre las capas que queden superpuestas en la hoja de papel.

posición espacial verificando las superposiciones sin que se produzcan auto-intersecciones en la hoja de papel. En [CF09] se da una definición alternativa de multipliegue intentando recoger esta traba.

Para que no todo sea tan desalentador, no podemos dejar de comentar que en la práctica los dobleces simultáneos son utilizados por los origamistas para la realización de ciertas figuras²², y la técnica de deslizar un doblez (con práctica y manos diestras) puede llegar a revertir resultados muy precisos para los axiomas que el doblador consiga dominar. Además, habitualmente la elección de un “dominio de verificación” adecuado permite la ejecución de los pliegues sin autointersecciones ni puntos de amarre.

6.2.2 2P-origami

Vamos a tratar de ilustrar lo expuesto sobre teoría de superposición en el caso concreto de dos pliegues simultáneos. De igual manera que en el caso 1P, debemos empezar por considerar todas las posibles condiciones de superposición, y luego construir las distintas combinaciones que especifiquen (f_a, f_b) dos líneas de pliegue (i.e., que den lugar a conjuntos 2P-minimales).

6.2.2.1 Condiciones de superposición mediante dos pliegues

Vamos a listar las distintas incidencias por plegado que podemos utilizar para definir axiomas 2P no reducibles.

Ya vimos que, con la intervención de un solo doblez, hay seis superposiciones distintas posibles; a saber²³: $(u, v)_{f_\star}$, $(u, u)_{f_\star} \equiv (f_\star, v)_{f_\star}$, $(l_1, l_2)_{f_\star}$, $(f_\star, l)_{f_\star}$, $(l, l)_{f_\star}$ y $(l, u)_{f_\star}$. Como también vimos, I1, I3 e I4 definen por sí mismos el pliegue f_\star implicado en la superposición; consecuentemente darían lugar a axiomas 2P reducibles, por lo que no los tendremos en cuenta.

$$(u, u)_{f_\star} \equiv (f_\star, v)_{f_\star}, \quad (l, l)_{f_\star}, \quad (l, u)_{f_\star}$$

Pero ahora podemos considerar más pares de superposición posibles mediante alineamientos donde intervengan los dos pliegues. Podemos doblar de forma que queden superpuestos un punto o una recta con el otro pliegue; o el otro pliegue consigo mismo.

$$(f_\diamond, u)_{f_\star}, \quad (f_\diamond, l)_{f_\star}, \quad (f_\diamond, f_\diamond)_{f_\star} \equiv (f_\star, f_\star)_{f_\diamond}$$

También podemos doblar un punto sobre la imagen doblada (por el otro pliegue)²⁴ de un punto o una recta; y doblar una recta sobre la imagen doblada

- 22 El ejemplo más sencillo posible (y muy común) es el doblez tipo *oreja de conejo*; que, aunque reducible, es infinidad de veces realizado en un solo paso.
- 23 Las enumeramos de acuerdo al orden en el que las presentamos. Recordemos que con $(l, l)_{f_\star}$ sólo hacemos referencia al caso I5; al igual que con $(l, u)_{f_\star}$ sólo nos referimos al caso $u \notin l$; y con $(u, v)_{f_\star}$ y $(l_1, l_2)_{f_\star}$ a los casos $u \neq v$ y $l_1 \neq l_2$.
- 24 Imponer que se cumpla un par de superposición donde uno de los objetos implicados sea la imagen doblada por el pliegue que define la superposición no establece ninguna condición sobre el pliegue, si no que su cumplimiento sólo se deriva de una condición entre los objetos primitivos intervinientes:

$$(A, R_{f_\star}(B))_{f_\star} \Rightarrow \text{se verifica un alineamiento entre } A \text{ y } B.$$

Nosotros ignoraremos esta limitación

En inglés *rolling crease*, lit. “doblece rodante”

Esto es, realizar el doblece mediante una hoja de papel con una forma y disposición favorables

Aparecen representadas en la [figura 6.10](#)

(ver [sección 6.1.2](#))

$$f_\star \in \{f_a, f_b\}$$

$$\{f_\star, f_\diamond\} = \{f_a, f_b\}$$

Observemos que para determinar axiomas no reducibles tampoco tiene sentido considerar $(f_\star, f_\diamond)_{f_\star}$ dado que implicaría que ambos dobleces son el mismo

(por el otro pliegue) de una recta.

$$(R_{f_\circ}(v), u)_{f_\star} \equiv (R_{f_\star}(u), v)_{f_\circ}, \quad (R_{f_\circ}(l), u)_{f_\star} \equiv (l, R_{f_\star}(u))_{f_\circ},$$

$$(R_{f_\circ}(l_2), l_1)_{f_\star} \equiv (R_{f_\star}(l_1), l_2)_{f_\circ}$$

Advirtamos que los pares anteriores se refieren a los casos $u \neq v$, $l_1 \neq l_2$ y $u \notin V(l)$. Prescindimos de listar las potenciales incidencias resultantes de los casos degenerados dado que son equivalentes a conjuntos formados por superposiciones (más simples y) ya consideradas²⁵.

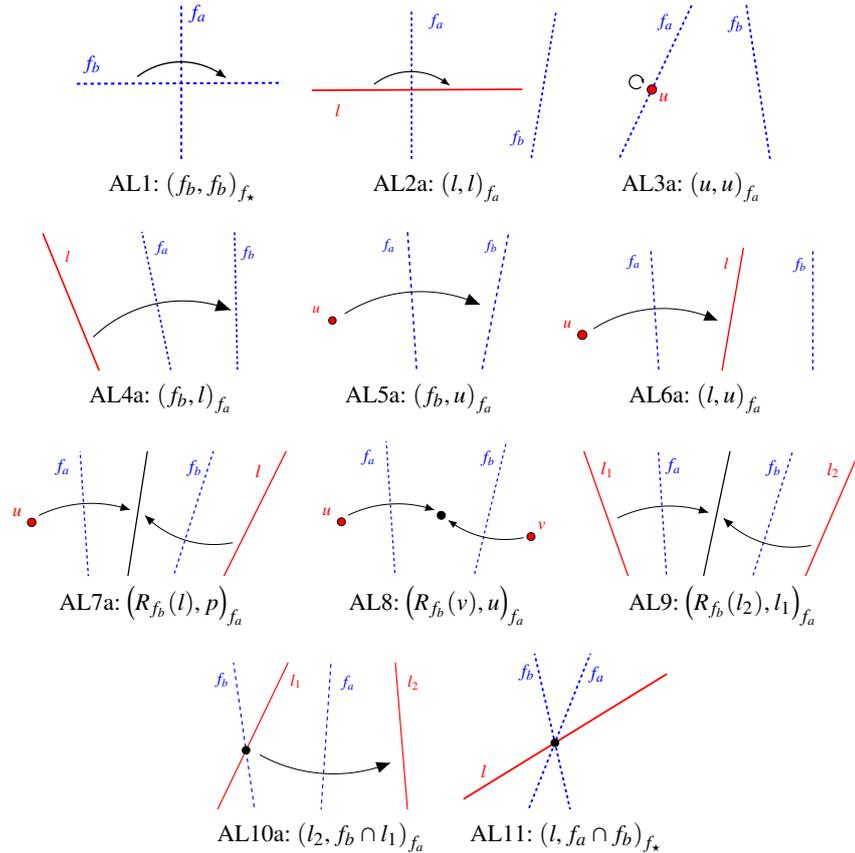


Figura 6.10: Los 11 tipos de condiciones de superposición por doble pliegado.

Además podemos considerar alineamientos con el punto de intersección de un pliegue y una recta; quizá estas superposiciones puedan resultar más extrañas dado que uno de sus elementos es “virtual” (no es un punto preexistente). Podemos doblar de forma que la imagen de una recta se superponga sobre la intersección de otra²⁶ recta y el otro pliegue, i.e., $(f_\circ \cap l_1, l_2)_{f_\star}$. No tendremos en cuenta doblar la intersección de pliegue y recta sobre un punto,

²⁵ Por ejemplo: $(R_{f_\circ}(u), u)_{f_\star} \equiv \{(u, u)_{f_\star}, (u, u)_{f_\circ}\}$ y $(R_{f_\circ}(l), l)_{f_\star} \equiv \{(l, l)_{f_\star}, (l, l)_{f_\circ}\}$.

²⁶ El caso degenerado $(f_\circ \cap l, l)_{f_\star}$ se verifica siempre que $(l, l)_{f_\star}$ y exista la intersección $f_\circ \cap l$ (esto último no es per se una condición útil a imponer) o si la intersección de ambos pliegues está en l . En [AL09] se afirma erróneamente que $(f_\circ \cap l, l)_{f_\star}$ y $(l, f_\star \cap f_\circ)_{f_\star}$ son la misma condición; quizá por ello Alperin y Lang no conceden a la incidencia $(l, f_\star \cap f_\circ)_{f_\star}$ entidad propia en su trabajo (e implícitamente permiten la definición de $(f_\circ \cap l_1, l_2)_{f_\star}$ para $l_1 = l_2$).

$(f_\diamond \cap l, u)_{f_\star}$, dado que es equivalente a que se verifique $(f_\diamond, u)_{f_\star}$ y $(l, u)_{f_\star}$ ²⁷. Por último, podemos alinear la intersección de ambos pliegues con una recta; pero como antes alinearla sobre un punto será una condición reducible: $(f_\star \cap f_\diamond, u)_{f_\star} \equiv \{(u, u)_{f_\star}, (u, u)_{f_\diamond}\}$.

$$(f_\diamond \cap l_1, l_2)_{f_\star}, \quad (l, f_\star \cap f_\diamond)_{f_\star} \equiv (l, f_\star \cap f_\diamond)_{f_\diamond}$$

Vamos a nombrar a cada una de las distintas condiciones de superposición como AL1, AL2, ..., AL10, AL11; siguiendo la notación de [AL09]²⁸.

Observemos que en AL2, AL8, AL9 y AL11 el papel de los pliegues es simétrico. Por el contrario, en AL2-AL7 y AL10 el papel de los pliegues no es simétrico, es decir, concicionan de forma distinta a f_a y f_b . Al formar combinaciones de incidencias donde este tipo de superposición intervenga deberemos distinguir que papel desempeña cada pliegue; para ello apellidaremos ‘a’ o ‘b’ en función de con cuál de los pliegues se defina el par de superposición. Tenemos por tanto un total de 18 condiciones de superposición mediante dos pliegues distintas.

6.2.2.2 Axiomas 2P

Buscamos ahora determinar la lista de axiomas 2P distintos y no reducibles; para ello buscamos las combinaciones de las 18 condiciones de superposición anteriores que sean 2P-minimales, es decir, que definan adecuadamente dos líneas de pliegue. Cada una de dichas incidencias impone entre una y dos ecuaciones sobre los cuatro grados de libertad que tenemos para determinar f_a y f_b ; consecuentemente los conjuntos de incidencias válidos estarán formados por entre 2 y 4 de estas superposiciones. Más concretamente, coherentemente con [AL09]: AL4, AL8 y AL9 definen un espacio de soluciones de codimensión²⁹ 2, coloquialmente hablando “consumen” 2 grados de libertad; mientras que el resto de superposiciones son de codimensión 1 y “consumen” solamente 1 grado de libertad.

Con todo esto, tenemos $4^2 + 4 \cdot 14^2 + 14^4 = 39216$ potenciales combinaciones a considerar. Por supuesto no todas ellas definirán finalmente axiomas 2P; muchas estarán sobre- o sub-determinadas, y por tanto no constituirán conjuntos 2P-minimales. Además, entre las que sí definan axiomas, muchos serán equivalentes o equivalentes por permutación.

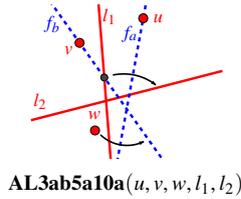
Identificaremos cada 2P-axioma nombrando las incidencias que intervienen en su definición; por ejemplo, AL6ab8 es el 2P-axioma definido por $\Omega = \{AL6a, AL6b, AL8\}$. En [AL09] se ayudan del programa *Mathematica*³⁰

- 27 $(l, u)_{f_\star}$ aquí entendido en el sentido más general (tanto si $u \notin V(l)$ como si sí).
- 28 Podemos pensar ‘AL’ como “Alineamiento” o como “Alperin-Lang”. Se nombran en arreglo al grado (en orden creciente) de las ecuaciones subyacentes a cada superposición.
- 29 En general, imponer una determinada condición de superposición define una variedad afín en el espacio de indeterminadas necesarias para definir f_a, f_b, \dots, f_m ; la codimensión de esta variedad es característica de la incidencia, y es, hablando más informalmente, el número de ecuaciones que impone, o el de grados de libertad que la superposición “consume”. En este caso: AL4, AL8 y AL9 definen variedades afines de dimensión 2 en un espacio 4-dimensional; luego son superposiciones con codimensión $4 - 2 = 2$.
- 30 *Mathematica* es lenguaje de programación desarrollado por Wolfram. Constituye una potente herramienta en álgebra computacional.

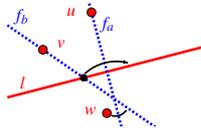
En orden numérico y sin repetir ‘AL’; si una incidencia aparece más de una vez se repite sólo el sufijo a/b

para construir un listado de axiomas 2P distintos³¹ mediante combinación de incidencias.

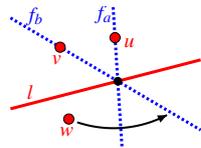
Sin incluir AL10 ni AL11, Alperin y Lang obtienen 203 conjuntos minimales válidos; incorporando AL10 proporcionan una lista de axiomas formada por 489 combinaciones distintas; debemos notar que en dicho trabajo no tuvieron en consideración AL11 como un caso de superposición diferenciada de AL10³². Cabe esperar que la lista crezca, pero no tanto como con la inclusión de AL10 (a/b).



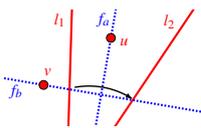
AL3ab5a10a(u, v, w, l_1, l_2)



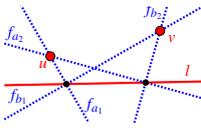
AL3ab5a10a*(u, v, w, l, l)



AL3ab5a11(u, v, w, l)



AL13ab10a(u, v, l_1, l_2)



AL13ab11(u, v, l)

Figura 6.11: Algunos ejemplos de axiomas 2P donde intervienen AL10 o AL11

- AL12a3b7a, AL12a3b7b, AL12a6b7a, AL12a6b7b, AL12a7aa, AL12a7ab, AL12a7bb, AL13ab7a, AL13a6b7a, AL13a6b7b, AL13a7aa, AL13a7ab, AL13a7bb, AL16ab7a, AL16a7aa, AL16a7ab, AL16a7bb, AL2ab5ab, AL2ab5a7a, AL2ab5a7b, AL2ab7aa, AL2ab7ab, AL2a3b8, AL2a3b9, AL2a3b4a, AL2a3b4b, AL2a3b5aa, AL2a3b5ab, AL2a3b5a7a, AL2a3b5a7b, AL2a3b5bb, AL2a3b5b7a, AL2a3b5b7b, AL2a3b7aa, AL2a3b7ab, AL2a3b7bb, AL2a4a5b, AL2a4a6b, AL2a4a7a, AL2a4a7b, AL2a4b5a, AL2a4b6b, AL2a4b7a, AL2a4b7b, AL2a5a8, AL2a5a9, AL2a5aab, AL2a5aa6b, AL2a5aa7a, AL2a5aa7b, AL2a5abb, AL2a5ab6b, AL2a5ab7a, AL2a5ab7b, AL2a5a6b7a, AL2a5a6b7b, AL2a5a7aa, AL2a5a7ab, AL2a5a7bb, AL2a5b8, AL2a5b9, AL2a5bb6b, AL2a5bb7a, AL2a5bb7b, AL2a5b6b7a, AL2a5b6b7b, AL2a5b7aa, AL2a5b7ab, AL2a5b7bb, AL2a6b8, AL2a6b9, AL2a6b7aa, AL2a6b7ab, AL2a6b7bb, AL2a7aaa, AL2a7aab, AL2a7abb, AL2a7bbb, AL3ab8, AL3ab9, AL3ab4a, AL3ab5aa, AL3ab5ab, AL3ab5a7a, AL3ab5a7b, AL3ab7aa, AL3ab7ab, AL3a4a5b, AL3a4a6b, AL3a4a7a, AL3a4a7b, AL3a4b5a, AL3a4b6b, AL3a4b7a, AL3a4b7b, AL3a5a8, AL3a5a9, AL3a5aab, AL3a5aa6b, AL3a5aa7a, AL3a5aa7b, AL3a5abb, AL3a5ab6b, AL3a5ab7a, AL3a5ab7b, AL3a5a6b7a, AL3a5a6b7b, AL3a5a7aa, AL3a5a7ab, AL3a5a7bb, AL3a5b8, AL3a5b9, AL3a5bb6b, AL3a5bb7a, AL3a5bb7b, AL3a5b6b7a, AL3a5b6b7b, AL3a5b7aa, AL3a5b7ab, AL3a5b7bb, AL3a6b8, AL3a6b9, AL3a6b7aa, AL3a6b7ab, AL3a6b7bb, AL3a7a8, AL3a7a9, AL3a7aaa, AL3a7aab, AL3a7abb, AL3a7b8, AL3a7b9, AL3a7bbb, AL4a8, AL4a9, AL4ab, AL4a5bb, AL4a5b6a, AL4a5b6b, AL4a5b7a, AL4a5b7b, AL4a6ab, AL4a6a7a, AL4a6a7b, AL4a6b7a, AL4a6b7b, AL4a7aa, AL4a7ab, AL4a7bb, AL5aa8, AL5aa9, AL5aabb, AL5aab6a, AL5aab6b, AL5aab7a, AL5aab7b, AL5aa6ab, AL5aa6a7a, AL5aa6a7b, AL5aa6b7a, AL5aa6b7b, AL5aa7aa, AL5aa7ab, AL5aa7bb, AL5ab8, AL5ab9, AL5ab6ab, AL5ab6a7a, AL5ab6a7b, AL5ab7aa, AL5ab7ab, AL5a6a8, AL5a6a9, AL5a6ab7a, AL5a6ab7b, AL5a6a7aa, AL5a6a7ab, AL5a6a7bb, AL5a6b8, AL5a6b9, AL5a6b7aa, AL5a6b7ab, AL5a6b7bb, AL5a7a8, AL5a7a9, AL5a7aaa, AL5a7aab, AL5a7abb, AL5a7b8, AL5a7b9, AL5a7bbb, AL6ab8, AL6ab9, AL6ab7aa, AL6ab7ab, AL6a7a8, AL6a7a9, AL6a7aaa, AL6a7aab, AL6a7abb, AL6a7b8, AL6a7b9, AL6a7bbb

Tabla 6.2: Listado de los 203 2P-axiomas combinación de AL1-AL9

Desistiremos de realizar una revisión detallada de cada uno de estos axiomas; en su lugar intentaremos dar una idea general de su potencial. Como ya

31 Distintos aquí es: no equivalentes para la rutina de construcción utilizada por Alperin y Lang.
 32 Por ejemplo (ver figura 6.11), AL3ab5a11 será un nuevo axioma a añadir a la lista. Continuando con lo comentado en la nota 26 a pie de página, observemos que, si permitimos AL3ab5a10a(u, v, w, l_1, l_2) definido para el caso degenerado de AL10 $l_1 = l_2$, las soluciones de este axioma en tal caso serían la unión de AL3ab5a11(u, v, w, l) y AL2a3ab5a(l, u, v, w) (advertamos que este último no aparece en la tabla 6.2 dado que se trata de un axioma reducible: $\{AL2a(l), AL3a(u)\} \equiv fa = \mathbf{O4}(l, u)$). En el caso de AL13ab10a, dado que debe ser $fb \perp fa$, en situación general las únicas soluciones serán las de AL13ab11 (pues en el caso $fa \perp l$, en general, $fb \cap l = \emptyset$).

vimos, en el axioma más complejo del origami clásico, el axioma **O6**, se imponía una ecuación cúbica sobre una parametrización de la línea de pliegue, y finalmente este axioma resultaba fundamental para resolver ecuaciones cúbicas generales mediante origami (clásico). De forma similar, un axioma 2P potencialmente podrá imponer condiciones en grados más altos sobre una parametrización de las líneas de pliegue, y consecuentemente, nos permitirá resolver ecuaciones de mayor grado y otros problemas relacionados.

Pongamos en lo que sigue que f_a y f_b quedan determinados por los pares de parámetros (M_a, N_a) y (M_b, N_b) , respectivamente. Sea \mathbf{A}_Ω un axioma 2P, U el conjunto de puntos y rectas genéricas que intervienen en las incidencias de Ω , y definamos C como el conjunto de variables genéricas que definen estos puntos y rectas de partida. Asociado al axioma tenemos cuatro ecuaciones p, q, r, s en las variables M_a, N_a, M_b, N_b , cada una de ellas con coeficientes en $\mathbb{Q}(C)$; es decir, siendo estos coeficientes funciones racionales de C . Tenemos por tanto un ideal

$$I_\Omega = \langle p(M_a, N_a, M_b, N_b), q(M_a, N_a, M_b, N_b), r(M_a, N_a, M_b, N_b), s(M_a, N_a, M_b, N_b) \rangle$$

en el anillo de polinomios $\mathbb{Q}(C)[M_a, N_a, M_b, N_b]$; y asociado a este ideal la variedad algebraica definida por los ceros comunes a todos los elementos del ideal, describiendo las soluciones del axioma³³.

Mediante el método de las bases de Gröbner³⁴ podemos conseguir un conjunto alternativo de generadores del ideal I_Ω de la forma

$$\langle g_0(M_a), N_a - g_1(M_a), M_b - g_2(M_a), N_b - g_3(M_a) \rangle = I_\Omega$$

tal que los grados de g_1, g_2 y g_3 son menores que el de g_0 .

Siguiendo la terminología de [AL09], llamaremos *complejidad del axioma* \mathbf{A}_Ω al grado del polinomio g_0 . Por supuesto, tanto esta definición como el procedimiento aquí descrito puede generalizarse para axiomas mP³⁵. Observemos que, en general, la complejidad de un axioma mP será indicador del número máximo de m -uplas solución de dicho axioma; puesto que el resto de parámetros que definen los pliegues quedan determinados en función de cada solución de $g_0(M_a)$. Por ejemplo, **O6** es un axioma de complejidad 3.

6.2.2.3 Constructibilidad mediante 2P-origami

Vamos a intentar hacernos una idea de hasta que punto esta herramienta puede permitir nuevas construcciones.

De acuerdo con [AL09] cada una de las incidencias que forman los axiomas son ecuaciones de cuarto grado a lo sumo. De hecho, en los primeros

Recordemos (ver sección 6.1.4.6) que f quedaba parametrizado en función de su pendiente, m , y debía verificarse la ecuación 6.8 de tercer grado en m

Esto es, C contiene las partes real e imaginaria de los puntos en U y los coeficientes de las rectas en U

Y lo denotaremos $cx(\mathbf{A}_\Omega)$

33 Habrá un número finito de estas soluciones por tratarse de un 2P-axioma; es decir, debe tratarse de una variedad de dimensión 0. Esto queda garantizado como consecuencia de la no singularidad del jacobiano asociado a p, q, r y s , es decir, como consecuencia de que dicho jacobiano tenga 4 valores singulares (lo cual Alperin y Lang comprueban con *Mathematica* durante la rutina de construcción de los axiomas para eliminar los casos inconsistentes: sobre- o sub-determinados).

34 Nombrado así por Bruno Buchberger en honor a Wolfgang Gröbner. Realizar una introducción sobre bases de Gröbner se escapa de lo factible en una nota a pie de página; amén de estar fuera de los objetivos de este trabajo. Remitimos al lector a la consulta de [CLO97].

35 En este sentido, Tramuns introduce de forma general la noción de *grado* para cualquier axioma, siendo de especial notoriedad en el caso de «axiomas algebraicos irreducibles» (cfr. [Tra12]).

Hasta AL3a7bbb

113 axiomas de nuestra lista (ver [tabla 6.2](#)) hay al menos una ecuación de grado 1 en dos variables; en consecuencia podemos despejar una de ellas y simplificar el problema al de resolver un sistema de tres ecuaciones de grado menor o igual a 4 en tres variables. A su vez, en 29 de estos sistemas tenemos dos ecuaciones de grado 1, por lo que podemos de nuevo simplificar el problema al de resolver un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas. De acuerdo con el teorema de Bezout³⁶, por tanto, estos 29 casos deben ser axiomas de complejidad a lo sumo 16.

$cx \leq 4^4$, aunque es una cota muy poco ajustada (de hecho no hay ningún axioma donde las cuatro ecuaciones sean cuárticas)

Generalizando al resto de axiomas, el teorema de Bezout nos da una cota superior del grado de complejidad de los axiomas 2P. En la realidad, el número de 2-uplas solución de los axiomas es mucho menor que esta cota teórica; mediante el cálculo de las bases de Gröbner comprueban que para el axioma más complejo de los 489 considerados en [AL09] el polinomio subyacente (g_0) “sólo” tiene 21 soluciones³⁷

Intuitivamente hablando, permitirá resolver aquellas ecuaciones de grado n “del mismo tipo” que g_0

Como vemos la existencia de un axioma de complejidad $cx = n$ es “equivalente” a resolver una ecuación polinomial de grado n . Pero debemos advertir que no es garantía de que dicho axioma permita resolver cualquier ecuación de dicho grado.

Volveremos a abordar la resolubilidad de ecuaciones polinomiales de grado n mediante 2P-origami en la siguiente sección, dentro de un marco más general. Antes veamos algunos ejemplos concretos de axiomas de 2P-origami.

Ante el posiblemente alto número de puntos o rectas de partidas interviniendo en los axiomas, hasta el final del capítulo nos referiremos a ellos mediante p (para puntos) ó l (para rectas) y un subíndice adecuado

Ejemplo 6.20 (AL4ab) Es el ejemplo de multiplegado al que hemos recurrido hasta ahora en nuestro trabajo: el doblez “de tríptico”, resultado de superponer doblemente una de las rectas dadas y un doblez:

$$\Omega_{AL4ab} = \{(f_b, l_1)_{f_a}, (f_a, l_2)_{f_b}\}.$$

Si $l_1 \parallel l_2$ hay una única solución (dividiendo en tres partes iguales cualquier segmento entre l_1 y l_2), en general **AL4ab** (l_1, l_2) permite la trisección del ángulo formado entre ambas rectas; si $l_1 \perp l_2$, además (l_2, l_1) es también solución. Como vemos, AL4ab debe ser un axioma de complejidad 3 (el número máximo de soluciones).

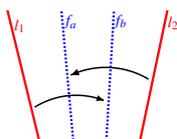


Figura 6.12: **AL4ab** (l_1, l_2)

No es aplicable en el caso degenerado $l_1 = l_2$; en tal caso tendríamos infinitos pares solución: (f_a, f_b) trisecando el ángulo llano formado en cualquier punto de la recta por las semirrectas a izquierda y derecha de dicho punto. Sería necesario determinar un punto por el que deba pasar uno de los dobleces para que haya un número finito de pares verificando $\{(f_b, l)_{f_a}, (f_a, l)_{f_b}\}$. Observemos que tal situación

$$\{(f_b, l)_{f_a}, (f_a, l)_{f_b}\} \cup \{(p, p)_{f_a}\} \equiv \{(p, p)_{f_a}, (l, p)_{f_b}, (f_b, l)_{f_a}\}$$

sería un caso particular de AL3a4a6b.

§

³⁶ El teorema de Bezout (en honor a Étienne Bézout) establece que en general dos ecuaciones polinomiales de grados n_1 y n_2 en dos variables tienen a lo sumo $n_1 \cdot n_2$ soluciones comunes (salvo que las curvas algebraicas definidas tengan una componente común). De forma similar es válido para N ecuaciones polinomiales en N indeterminadas. Cfr. [Coo59] y [Kir92].

³⁷ Sobre decir que la complejidad, i.e., estas 21 soluciones diferentes, corresponden al caso general. Para situaciones particulares de los puntos y rectas de partida obtendremos distintos polinomios g_0 asociados, posiblemente de menor grado o con soluciones múltiples.

Ejemplo 6.21 (AL3ab9) Queda definido por

$$\Omega_{AL3ab9} = \{(p_1, p_1)_{f_a}, (p_2, p_2)_{f_b}, (R_{f_b}(l_2), l_1)_{f_a}\},$$

y es un ejemplo de axioma de complejidad 4.

Como podemos ver, las condiciones impuestas vinculan a cada línea de pliegue un punto y una recta de los dados³⁸. Si consideramos para cada uno de estos pares la circunferencia de centro el punto y radio la distancia entre punto y recta, cada una de las rectas dadas se convierte en una tangente de su circunferencia asociada, y las líneas de pliegue son “diametros” de forma que reflejan simultáneamente dichas rectas tangentes sobre una tangente común a ambas circunferencias.

En general hay 4 rectas tangentes comunes a dos circunferencias, luego en general el axioma tiene 4 soluciones. No es aplicable en el caso degenerado $(p_1, l_2) = (p_2, l_2)$. §

Ejemplo 6.22 (AL3a4a6b) Está determinado por

$$\Omega_{AL3a4a6b} = \{(p_1, p_1)_{f_a}, (f_b, l_1)_{f_a}, (l_2, p_2)_{f_b}\},$$

y de nuevo es un axioma de complejidad 4.

En general, podemos considerar f_b como una recta tangente a la parábola \mathcal{P}_{l_2, p_2} de foco p_2 y directriz l_2 . Y como antes f_a como el diámetro de la circunferencia C_{l_1, p_1} de centro p_1 y radio $d(l_1, p_1)$. Consecuentemente, l_1 y $R_{f_a}(l_1)$ son tangentes a C_{l_1, p_1} , y, por tanto, f_b es simultáneamente tangente a \mathcal{P}_{l_2, p_2} y C_{l_1, p_1} . Hallada una tangente común tal, f_a está definido como la bisectriz entre l_1 y dicha tangente pasando por p_1 .

En general hay 4 tangentes comunes entre una parábola y una circunferencia, luego el axioma tiene 4 soluciones en general. No es aplicable para $p_2 \in l_2$. §

Como ejemplos de complejidad superior, comentaremos dos axiomas que han resultado posteriormente de relevancia.

Ejemplo 6.23 (AL4a6ab) AL4a6ab es un axioma de complejidad $cx = 5$ definido a partir de

$$\Omega_{AL4a6ab} = \{(f_b, l)_{f_a}, (p_1, l_1)_{f_a}, (p_2, l_2)_{f_b}\}.$$

Ya sabemos que AL6a(l_1, p_1) fuerza a que f_a sea tangente a P_{l_1, p_1} ; además, AL4a impone que $f_b = R_{f_a}(l)$. Consecuentemente, AL4a6ab puede resolverse como la intersección de l_2 con F el lugar geométrico definido como

$$F = \{R_{R_{f_a}(l)}(p_2) / f_a \text{ es tangente a } P_{l_1, p_1}\}$$

(figura 6.15, abajo, en naranja)³⁹. §

- 38 El punto de aplicación de AL3 y la recta sobre la que se aplica su imagen doblada (p_1 y l_1 con f_a , p_2 y l_2 con f_b).
- 39 Esto es, para cada punto en $l_2 \cap F$ tenemos que la imagen de p_2 por $R_{f_a}(l) = f_b$ está en l_2 ; es decir, se verifican todas las incidencias. Por tanto, si $s \in l_2 \cap F$ es un punto de la intersección y f_a es una tangente de P_{l_1, p_1} tal que $R_{R_{f_a}(l)}(p_2) = s$, entonces tomamos $f_b = R_{f_a}(l)$ y el par (f_a, f_b) es solución de AL4a6ab.

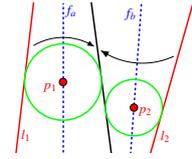


Figura 6.13:
AL3ab9(p_1, p_2, l_1, l_2)

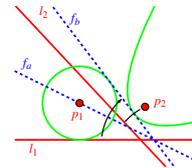


Figura 6.14:
AL3a4a6b(p_1, l_1, l_2, p_2)

$f_b = R_{f_a}(l_1)$ por AL4a

(Véanse los teoremas 6.29 y 6.30)

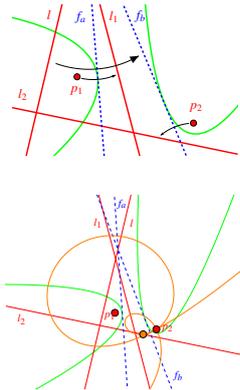


Figura 6.15:
AL4a6ab(l, l_1, p_1, l_2, p_2)

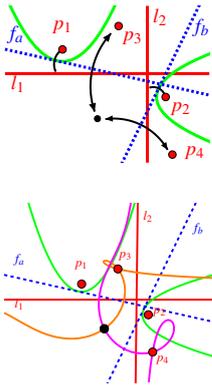


Figura 6.16:
AL6ab8($l_1, p_1, l_2, p_2,$
 p_3, p_4)

Ejemplo 6.24 (AL6ab8) AL6ab8 es el axioma asociado al conjunto de incidencias

$$\Omega_{\text{AL6ab8}} = \{(l_1, p_1)_{f_a}, (l_2, p_2)_{f_b}, (R_{f_b}(p_4), p_3)_{f_a}\},$$

y tiene complejidad $cx = 7$. En [AL09] se propone un método de quintisección mediante este axioma.

Resolver AL6ab8 será equivalente a determinar la intersección de las dos curvas ori cúbicas (ver definición 6.12) $PO_{\mathcal{P}_{l_1, p_1, p_3}}$ y $PO_{\mathcal{P}_{l_2, p_2, p_4}}$ (figura 6.16, abajo, en naranja y rosa, respectivamente). §

Podemos encontrar la descripción de otros axiomas adicionales en [AL09].

6.2.3 Resolución de polinomios de grado n mediante origami multipliegue

Vamos a ver que las raíces de cualquier ecuación polinomial con coeficientes construibles mediante origami multipliegue son construibles con origami multipliegue. Para ello nos basaremos en el método gráfico de resolución de ecuaciones de Lill.

Dicho método fue ideado por Eduard Lill en [Lil67] para raíces reales, y posteriormente adaptado para raíces complejas en [Lil68]. Para una descripción detallada de éste recomendamos consultar [Ria62]; en el contexto del origami pueden consultarse [Hul11; Hul13].

6.2.3.1 Método de Lill

Consideremos el polinomio $g = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$; y supongamos que buscamos localizar una raíz real suya (suponiendo que exista).

Primeramente codificaremos el polinomio como un camino en el plano (basándonos en sus coeficientes). Esta codificación es como sigue: partiendo de un punto $A_{n+1} = O$ origen, avanzaremos a_n unidades hasta un punto A_n y giraremos 90° en sentido antihorario; en esta dirección avanzaremos a_{n-1} unidades hasta un punto A_{n-1} y giraremos 90° en sentido antihorario de nuevo; repitiendo este proceso descendiendo por los coeficientes hasta el punto terminal $A_0 = T$. Debemos advertir que en el proceso se determina un sentido positivo en cada una de las direcciones (el definido al girar 90° antihorariamente un vector positivo de la dirección anterior); y en función del signo del coeficiente el sentido del avance. Obtenemos así un camino formado por $n + 1$ segmentos representando el polinomio g .

Supongamos ahora que tenemos un camino formado por n segmentos con las siguientes características: el primer segmento parte de $B_n = O$ y termina en un punto $B_{n-1} \in \overline{A_n A_{n-1}}$ ⁴⁰; el siguiente segmento partirá de B_{n-1} , siendo perpendicular al primero y terminando en un punto $B_{n-2} \in \overline{A_{n-1} A_{n-2}}$; el resto

El caso de coeficientes nulos no tiene ninguna particularidad: se avanza 0 unidades y se gira 90° levógiros

40 Estamos denotando, para cada j , como $\overline{A_j A_{j-1}}$ a la recta conteniendo al segmento correspondiente del camino que codifica a g . Estas rectas están siempre bien definidas por el proceso descrito; la notación tiene por tanto siempre sentido simbólico, aunque su descripción como recta pasando por A_j y A_{j-1} pueda no estar nbiie determinada.

de segmentos intermedios perpendiculares al anterior, partiendo de su punto final (pongamos B_j) y terminando en un punto $B_{j-1} \in \overline{A_j A_{j-1}}$; hasta el último (n -ésimo) segmento, que debe verificar además que su punto final es $B_0 = T$ el punto terminal del camino original.

Sea $\theta = \angle(A_n, O, B_{n-1}) \in (-\pi/2, \pi/2)$ el ángulo formado entre el primer segmento del camino original y el primer segmento del nuevo camino de n segmentos.

Supuesto que éste exista

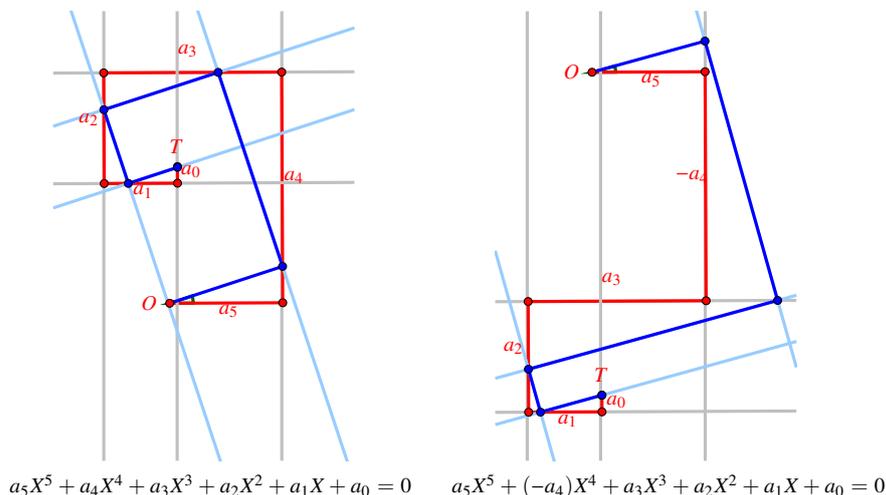


Figura 6.17: Ejemplos de solución geométrica de ecuaciones polinomiales mediante el método de Lill. Todos los a_j son positivos.

Proposición 6.25 (de Lill) Si θ es como el arriba descrito, entonces $x = -\tan(\theta)$ es una raíz de g .

$$x = -\tan(\theta) \in \mathbb{R}$$

Demostración: Observemos que los caminos generan una secuencia de n triángulos rectángulos similares; Podemos verificar que $g(x) = 0$ a partir de la escritura de g como

n triángulos, contando como tales también los posibles casos de triángulos degenerados a un punto

$$g(X) = X(X(\cdots(X(Xa_n + a_{n-1}) + a_{n-2})\cdots) + a_1) + a_0,$$

mediante el cálculo de la longitud de los lados opuestos al ángulo θ en esta secuencia de triángulos.

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= \tan(\theta) a_n = -x a_n, \\ y_{n-2} &= \tan(\theta) (a_{n-1} - y_{n-1}) = -x (a_{n-1} + x a_n), \\ &\vdots \\ y_0 &= \tan(\theta) (a_1 - y_1) = -x (a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + x a_n) \cdots)). \end{aligned}$$

y_j denota la longitud (signada) del lado opuesto al ángulo de magnitud θ en el triángulo de vértices B_j, A_{j+1} y B_{j+1}

Puesto que este último segmento es por construcción de longitud $y_0 = a_0$, se concluye que x es una raíz de g . □

Observaciones:

1. A cualquier camino como el descrito lo llamaremos *solución de Lill* de g . Observemos que existirán tantos caminos de orden n (i.e., formados por n segmentos) como raíces reales distintas tenga el polinomio g ;

luego si no podemos encontrar ningún camino tal (o equivalentemente, ningún ángulo θ tal) entonces podemos asegurar que g no tiene raíces reales.

2. Un camino de orden n solución de Lill puede verse como la codificación de Lill de un polinomio de grado $n - 1$; en concreto, es la codificación de $g_1 = g(X)/(X - x)$ el resultante al extraer la raíz $x = -\tan(\theta)$ del polinomio original. Podemos aplicar así el método de Lill respecto a este nuevo camino, y continuar sobre los sucesivos caminos solución reduciendo el orden del problema hasta que todas las raíces reales hayan sido determinadas. Con esta concepción, el método de Lill es equiparable a la factorización algebraica usual de polinomios.

6.2.3.2 Método de Lill (versión con MP-origami)

Supongamos que todos los coeficientes de $g = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ son origami-construibles. Entonces, es claro que podemos construir mediante origami el camino de Lill asociado a g . Podemos construir, además, dos rectas auxiliares l_O y l_T como

$$l_O = \text{Perpendicular}(\overline{OA_n}, R_{A_n}(O)) \quad \text{y} \quad l_T = \text{Perpendicular}(\overline{A_1 T}, R_{A_1}(T)).$$

Vamos a ver que podemos construir una solución de Lill de g mediante $(n - 2)$ P-origami. Consideremos superponer mediante el doblado de f_a el punto O sobre la recta l_O , y mediante el doblado de f_m superponer T sobre l_T . Además imponemos que cualquier par de líneas de pliegue consecutivas sean perpendiculares y que su intersección pertenezca a la correspondiente recta dirección del diagrama de g ; es decir, estamos imponiendo

$$\Omega_{Lill} = \{(l_O, O)_{f_a}, (l_T, T)_{f_m}, (f_a, f_a)_{f_b}, (f_a \cap f_b, \overline{A_{n-1}A_{n-2}})_{f_b}, \dots, (f_{m-1}, f_{m-1})_{f_m}, (f_{m-1} \cap f_m, \overline{A_3 A_2})_{f_m}\}.$$

En definitiva, estamos imponiendo 2 condiciones para cada una de las $n - 3$ intersecciones intermedias, que, junto con las 2 condiciones AL6 empleadas para los pliegues inicial (f_a) y final (f_m), resultan en un total de $2(n - 2)$ ecuaciones; las necesarias para definir $n - 2$ pliegues.

Basta observar que, por AL6 y la definición de l_O , el punto medio de O y $R_{f_a}(O)$ está en $f_a \cap A_n A_{n-1}$; de igual forma con T , l_T y f_m . Esto es, si (f_a, f_b, \dots, f_m) es solución del axioma $\mathbf{A}_{\Omega_{Lill}}$, el camino

$$O, \frac{O + R_{f_a}(O)}{2}, f_a \cap f_b, \dots, f_{m-1} \cap f_m, \frac{T + R_{f_m}(T)}{2}, T$$

es una solución de Lill de g . En definitiva, hemos demostrado:

Teorema 6.26 Las raíces reales de cualquier ecuación polinomial de grado n (con coeficientes origami-construibles) son construibles mediante $(n - 2)$ P-origami.

Observación: Más específicamente, mediante Ω_{Lill} , para cada $n \geq 3$ tenemos definido $\mathbf{Lill}_{O_{MP}}^n$ un $(n - 2)$ P-axioma de complejidad n .

Esto es, los coeficientes son construibles para alguna concepción suficiente de origami multipliegue (clásico, 2P, 3P, ...)

f_m el último pliegue componente de la $(n - 2)$ -upla

Las dos primeras son incidencias del tipo AL6, el resto son pares de incidencias AL1 y AL11

Dado que a partir de un camino solución de Lill, $\tan(\theta)$ es origami-construible como el cociente de la longitud de los catetos de cualquiera de los triángulos asociados a tal solución

6.2.4 Observaciones finales

Observemos que el [teorema 6.26](#) acota superiormente del número de pliegues necesarios para resolver una ecuación polinomial tal; es decir, es un resultado de suficiencia. Por ejemplo, como ya hemos visto, el origami clásico es capaz de construir las raíces de cualquier polinomio cúbico y cuártico, mejorando así los $4-2 = 2$ pliegues necesarios para resolver cuárticas mediante el método de Lill con origami. En este sentido van los siguientes resultados:

Es decir, basta con 2P-origami para resolver quinticas (mejorando el 3P-origami). Respectivamente, con sépticas (y mejorando el 5P-origami)

- Teorema 6.29 (de Nishimura) La ecuación general de grado 5 puede resolverse con AL4a6ab.
- Teorema 6.30 (de König-Nedrenco) La ecuación general de grado 7 puede resolverse mediante AL6ab8.

Remitimos a la consulta de [\[Nis15\]](#) y [\[KN16\]](#), respectivamente, para su discusión y demostración. Consecuentemente, podemos aseverar descripciones similares a las dados en el caso del origami clásico para un subconjunto de los números 2P-origami-construibles; por ejemplo:

Corolario 6.31 Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, si α es algebraico y existe una 2,3,5,7-torre de cuerpos extensión de \mathbb{Q} conteniendo a α , entonces es 2P-origami-construible, es decir: $\alpha \in \mathcal{C}_{2P}$.

Demostración: Como en otras ocasiones, por inducción finita sobre el índice del subcuerpo de la torre $\mathbb{Q} \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$. Dado que para cualquier $\beta \in F_j$ el grado de $m_{\text{Re}(\beta), F_{j-1}}$ (resp. $m_{\text{Im}(\beta), F_{j-1}}$) será divisor de $[F_j : F_{j-1}] \in \{2, 3, 5, 7\}$, y podemos construir mediante 2P-origami las raíces reales de $m_{\text{Re}(\beta), F_{j-1}}$ (resp. $m_{\text{Im}(\beta), F_{j-1}}$). \square

De igual forma, dado que podemos quintisecar y septisecar ángulos cualesquiera, podemos caracterizar en base a estos resultados un subconjunto de los polígonos 2P-origami-construibles.

En la práctica, la realización de estos axiomas será cuanto menos complicada. En [\[CF09\]](#) se comenta un método alternativo para resolver ecuaciones polinomiales de grado arbitrario mediante multiplegado⁴²; uniendo a la discusión la posibilidad práctica de su realización. Su método es equiparable a evaluar $g(x)$ mediante un artefacto articulado⁴³.

Por último, cabe preguntarnos hasta dónde es razonable esperar poder construir mediante origami-multiplegado. Puesto que todas nuestras familias de axiomas han sido especificadas mediante condiciones algebraicas es intuitivo

42 Aunque en dicho artículo se propone una concepción alternativa de multiplegado, aparentemente nuestro multiplegado resulta equivalente a su *multiplegado por 1 parámetro*.

43 La presentación de Chow y Fan es muy cercana al concepto de “linkages” propuesto en [\[DO07\]](#). De hecho, aunque sin proporcionar ninguna descripción del método práctico de resolución, en virtud del teorema de Kempe, Demaine y O’Rourke ya adelantan la viabilidad teórica de resolver ecuaciones polinomiales de grado arbitrario mediante la simulación de un sistema articulado con origami.

pensar que la construcción de cualquier número trascendente quede fuera de su alcance. Explícitamente: para cualquier axioma de origami multipliegue $V = \mathbf{A}(U)$, si $C_U = \{A_1, \dots, A_s\}$ es el conjunto de los coeficientes de U los puntos y rectas de partida, y $C_V = \{B_1, \dots, B_t\}$ son los coeficientes de V el conjunto de rectas construidas con el axioma \mathbf{A} a partir de U ; entonces, tenemos que para cada $B_j \in C_V$ existe un polinomio $h_j \in \mathbb{Q}(C_U)[W_1, \dots, W_t]$ tal que $h_j(B_1, \dots, B_t) = 0$. Así, $\mathbb{Q}(C_U)(B_1, \dots, B_t)$ es una extensión finita de $\mathbb{Q}(C_U)$, luego algebraica, y por tanto, la intersección de cualquier par de rectas con coeficientes en $\mathbb{Q}(C_U)(C_V)$ será un número algebraico.

En definitiva, tenemos que la contención del [corolario 6.28](#) es, de hecho, una igualdad con el conjunto de puntos MP-construibles:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{O}_{mP}.$$

Para construir números trascendentes mediante plegado será necesario extender radicalmente el conjunto de axiomas de construcción permitidos; por ejemplo, en [\[Hul07\]](#) se propone una construcción de π supuesto que permitimos realizar pliegues curvados⁴⁴.

Y de acuerdo con lo expuesto en la [sección 6.2.2.2](#)



Figura 6.19: David Huffman con un modelo de origami curvado.

Imagen extraída de www.maa.org

⁴⁴ El concepto de pliegues curvados se encuentra aún lejos de estar bien definido dentro de la comunidad de origamistas, luego estamos lejos también de poder adoptar una formalización matemática para estos; no obstante la idea subyacente le resultará intuitiva a cualquier lector. Proponemos consultar [\[DD+15; FT99; DO07\]](#) a quien interese.

BIBLIOGRAFÍA

- [Abe80] Hisashi Abe. «Possibility of trisection of arbitrary angle by paper folding». In: *Sugaku Seminar* (1980) (cit. on pp. 25, 39).
- [Abe29] Niels Henrik Abel. «Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement.» In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)* (Jan. 1829), pp. 131–156. DOI: [10.1515/crll.1829.4.131](https://doi.org/10.1515/crll.1829.4.131) (cit. on p. 14).
- [AZ14] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer Berlin Heidelberg, 2014. URL: <http://www.springer.com/br/book/9783662442043> (cit. on p. 65).
- [Alp00] Roger C. Alperin. «A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers». In: *New York Journal of Mathematics* 6 (July 2000), pp. 119–133. ISSN: 1076-9803/00. URL: <http://www.emis.ams.org/journals/NYJM/j/2000/6-8p.pdf> (cit. on pp. 25, 53, 58).
- [Alp04] Roger C. Alperin. «A Grand Tour of Pedals of Conics». In: *Rofum Geometricorum* 4 (Oct. 2004), pp. 143–151. URL: https://www.researchgate.net/publication/265366093_A_grand_tour_of_pedals_of_conics (cit. on p. 93).
- [AL09] Roger C. Alperin and Robert J. Lang. «One-, Two- and Multi-Fold Origami Axioms». In: *Origami*⁴. 2009 (cit. on pp. 26, 27, 40, 79, 88, 93, 97, 100, 101, 103, 104, 106).
- [Bar02] Arthur Baragar. «Constructions using a compass and twice-notched straightedge». In: *The American Mathematical Monthly* 109.2 (2002), pp. 151–14. DOI: [10.2307/2695327](https://doi.org/10.2307/2695327). URL: <http://www.jstor.org/stable/2695327> (cit. on p. 60).
- [BH96] Marshall Bern and Barry Hayes. «The complexity of flat origami». In: *Proceedings of the 7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. 1996. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.28.1892> (cit. on p. 4).
- [Bew06] Jörg Bewersdorff. *Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective*. Vol. 35. Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2006. ISBN: 978-0-8218-3817-4. URL: <https://www.ams.org/bookpages/stml-35> (cit. on pp. 3, 44, 58, 59).
- [Bri84] David Brill. «Justin's origami trisection». In: *British origami* 107.14 (1984) (cit. on p. 40).

- [Bru61] James K. Brunton. «Polygonal Knots». In: *The Mathematical Gazette* 45.354 (Dec. 1961), pp. 299–302. doi: [10.2307/3614092](https://doi.org/10.2307/3614092). URL: <http://www.jstor.org/stable/3614092> (cit. on pp. 3, 71, 75).
- [Bur04] William Burnside. «On Groups of Order $p^a q^b$ ». In: *Proceedings of the London Mathematical Society* s2-1.1 (Jan. 1904), pp. 388–392. doi: [10.1112/plms/s2-1.1.388](https://doi.org/10.1112/plms/s2-1.1.388) (cit. on p. 13).
- [Bur11] William Burnside. *Theory of groups of finite order*. Second edition. Cambridge University Press, 1911. URL: <https://hdl.handle.net/2027/uc1.b4062919> (cit. on p. 13).
- [Cal17] Chris Caldwell. *The Prime Database: Database Search Query*. The Prime Pages. 2017. URL: <http://primes.utm.edu/primes/search.php> (cit. on p. 56).
- [CL05] Antoine Chambert-Loir. *A Field Guide to Algebra*. Springer New York, 2005 (cit. on p. 15).
- [Che42] Claude Chevalley. «On the composition of fields». In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 48.6 (June 1942), pp. 482–487. doi: [10.1090/s0002-9904-1942-07713-5](https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1942-07713-5). URL: <http://www.ams.org/journals/bull/1942-48-06/S0002-9904-1942-07713-5/> (cit. on p. 15).
- [CF09] Timothy Y. Chow and C. Kenneth Fan. «The Power of Multifolds: Folding the Algebraic Closure of the Rational Numbers». In: *Origami*⁴. 2009, pp. 395–404 (cit. on pp. 99, 110).
- [Coo40] Julian Lowell Coolidge. *A History of Geometrical Methods*. Oxford University Press, 1940 (cit. on p. 3).
- [Coo59] Julian Lowell Coolidge. *A Treatise on Algebraic Plane Curves*. Dover Publications, 1959 (Reimpreso en 2004) (cit. on p. 104).
- [Cox12] David A. Cox. *Galois Theory*. Second edition. John Wiley & Sons Inc, Mar. 2012. 602 pp. ISBN: 1118072057. doi: [10.1002/9781118218457](https://doi.org/10.1002/9781118218457). URL: <http://onlinelibrary.wiley.com/book/10.1002/9781118218457> (cit. on pp. 5–15, 22, 23, 25, 43, 44, 50, 53, 69, 70, 109).
- [CLO97] David Cox, John Little, and Donal O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer Berlin Heidelberg, 1997. doi: [10.1007/978-3-662-41154-4](https://doi.org/10.1007/978-3-662-41154-4) (cit. on p. 103).
- [DFX99] Félix Delgado, Concha Fuertes, and Sebastián Xambó. *Introducción al Álgebra II. Anillos, Factorización y Teoría de Cuerpos*. Publicaciones Universidad de Valladolid, 1999 (cit. on p. 5).
- [DD02] Erik D. Demaine and Martin L. Demaine. «Recent Results in Computational Origami». In: *Origami*³. 2002, pp. 3–16. URL: <http://erikdemaine.org/papers/OSME2001/paper.pdf> (cit. on p. 4).

- [DD+15] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, David A. Huffman, Duks Koschitz, and Tomohiro Tachi. «Characterization of Curved Creases and Rulings: design and analysis of lens tessellations». In: *Origami*⁶. American Mathematical Society (AMS), 2015, pp. 209–230. URL: http://erikdemaine.org/papers/HuffmanLens_Origami6/paper.pdf (cit. on p. 111).
- [DO07] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007. 488 pp. ISBN: 0521857570 (cit. on pp. 1–4, 39, 40, 59, 110, 111).
- [ES01] B. Carter Edwards and Jerry Shurman. «Folding Quartic Roots». In: *Mathematics Magazine* 74.1 (Feb. 2001), pp. 19–25. DOI: 10.2307/2691149. URL: <http://www.jstor.org/stable/2691149> (cit. on p. 59).
- [EMN94] John W. Emert, Kay I. Meeks, and Roger B. Nelson. «Reflections on a Mira». In: *The American Mathematical Monthly* 101.6 (July 1994), pp. 544–549. DOI: 10.2307/2975320. URL: <http://www.jstor.org/stable/2975320> (cit. on p. 53).
- [Spr] *Encyclopedia of Mathematics*. Entradas consultadas: [cyclotomic extension](https://www.encyclopediaofmath.org), [dihedral angle](https://www.encyclopediaofmath.org). Springer, in cooperation with the European Mathematical Society. URL: <https://www.encyclopediaofmath.org> (cit. on pp. 12, 62).
- [Eng94] Peter Engel. *Origami from Angelfish to Zen*. Dover Publications, 1994. 256 pp. ISBN: 0486281388. URL: <https://books.google.es/books?id=2l6Zd8r9TkoC> (cit. on p. 1).
- [Fri15] Michael Friedman. «Two beginnings of geometry and folding: Hermann Wiener and Sundara Row». In: *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics* 31.1 (June 2015), pp. 52–68. DOI: 10.1080/17498430.2015.1045700. URL: <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17498430.2015.1045700> (cit. on p. 2).
- [Fuc11] Clemens Fuchs. «Angle trisection with Origami and related topics». In: *Elemente der Mathematik* (2011), pp. 121–131. DOI: 10.4171/em/179. URL: http://www.ems-ph.org/journals/show_pdf.php?issn=0013-6018&vol=66&iss=3&rank=4 (cit. on p. 39).
- [FT99] Dmitry Fuchs and Serge Tabachnikov. «More on Paperfolding». In: *The American Mathematical Monthly* 106.1 (1999), pp. 27–35. DOI: 10.2307/2589583. URL: <http://www.jstor.org/stable/2589583> (cit. on p. 111).
- [Gau01] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*. Leipzig, 1801 (republicado en 1863). URL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235993352> (cit. on p. 55).

- [Ger95] Robert Geretschläger. «Euclidean Constructions and the Geometry of Origami». In: *Mathematics Magazine* 68.5 (Dec. 1995), p. 357. DOI: [10.2307/2690924](https://doi.org/10.2307/2690924). URL: <http://www.jstor.org/stable/2690924> (cit. on pp. 40, 58).
- [GKK13] Fadoua Ghourabi, Asem Kasem, and Cezary Kaliszzyk. «Algebraic Analysis of Huzita's Origami Operations and Their Extensions». In: *Automated Deduction in Geometry*. Springer Nature, 2013, pp. 143–160. DOI: [10.1007/978-3-642-40672-0_10](https://doi.org/10.1007/978-3-642-40672-0_10). URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Algebraic-Analysis-of-Huzita-s-Origami-Operations-Ghourabi-Kasem/607b6c7f835356cda5d27598aae524106e9eb37f> (cit. on pp. 27, 28, 79, 95).
- [GS09] Aliska Gibbins and Lawrence Smolinsky. «Geometric Constructions with Ellipses». In: *The Mathematical Intelligencer* 31.1 (Jan. 2009). DOI: [10.1007/s00283-008-9000-3](https://doi.org/10.1007/s00283-008-9000-3). URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00283-008-9000-3> (cit. on p. 53).
- [Gle88] Andrew M. Gleason. «Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon». In: *The American Mathematical Monthly* 95.3 (Mar. 1988), pp. 185–194. DOI: [10.2307/2323624](https://doi.org/10.2307/2323624). URL: <http://www.jstor.org/stable/2323624> (cit. on pp. 56, 60).
- [GT15] Jordi Guàrdia and Eulàlia Tramuns. «Geometric and arithmetic relations concerning origami». In: *Origami*⁶. American Mathematical Society (AMS), 2015, pp. 35–43. DOI: [10.1090/mbk/095.1/04](https://doi.org/10.1090/mbk/095.1/04). URL: https://www.researchgate.net/publication/265787983_Geometric_and_arithmetic_relations_concerning_origami (cit. on p. 17).
- [Hat] Koshiro Hatori. *History of Origami*. URL: <http://origami.ousaan.com/library/historye.html> (cit. on pp. 1, 2).
- [Hat01] Koshiro Hatori. *Origami Construction*. 2001. URL: <http://origami.ousaan.com/library/conste.html> (cit. on pp. 25, 28).
- [Hat11] Koshiro Hatori. «History of Origami in the East and the West before Interfusion». In: *Origami*⁵. 3-11. 2011 (cit. on pp. 1, 2).
- [Hul07] Thomas C. Hull. *Constructing π Via Origami*. May 2007. URL: https://www.researchgate.net/publication/267306036_Constructing_p_Via_Origami (cit. on p. 111).
- [Hul11] Thomas C. Hull. «Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill». In: *The American Mathematical Monthly* 118.4 (2011), p. 307. DOI: [10.4169/amer.math.monthly.118.04.307](https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.04.307). URL: <http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.118.04.307> (cit. on pp. 1, 3, 59, 106).

- [Hul94] Thomas Hull. «On the mathematics of flat origamis». In: *Congressus Numerantium* 100 (1994), pp. 215–224. URL: <http://www.organicorigami.com/thrackle/class/hon394/papers/HullOldFlatFoldabilityPaper.pdf> (cit. on p. 4).
- [Hul96] Thomas Hull. «A Note on “Impossible” Paper Folding». In: *The American Mathematical Monthly* 103.3 (Mar. 1996). DOI: 10.2307/2975374. URL: <http://www.jstor.org/stable/2975374> (cit. on p. 39).
- [Hul02] Thomas Hull, ed. *Origami*³. Proceedings of the Third International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education. A K Peters, 2002 (cit. on p. 4).
- [Hul13] Thomas Hull. *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. Second edition. Taylor & Francis Ltd., 2013 (cit. on pp. 2, 39, 59, 71, 73, 75, 106).
- [Hus80] Koji Hushimi. «Trisection of angle by H. Abe». In: *Origami no kagaku* 8 (Oct. 1980). como suplemento de la revista Saiensu (cit. on p. 39).
- [Huz89a] Humiaki Huzita. «Axiomatic development of origami geometry». In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology (IOST)*. 1989 (cit. on pp. 3, 25).
- [Huz89b] Humiaki Huzita, ed. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. 1989 (cit. on p. 25).
- [Huz92] Humiaki Huzita. «Understanding geometry through origami axioms». In: *Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91)*. 1992 (cit. on p. 25).
- [Ida14] Tetsuo Ida. *Collections of pentagonal knot fold: constructions and proofs*. Notebook con construcciones mediante Eos utilizadas en el artículo *Formalizing Polygonal Knot Origami*. Eos Project. 2014. URL: <http://www.i-eos.org:8080/ieos/files-pages/ida/research-material/formalizing-polygonal-knot-origami/pentagonal-knot-fold/view> (cit. on p. 74).
- [IB03] Tetsuo Ida and Bruno Buchberger. «Proving and Solving in Computational Origami». In: *Analele Universitatii din Timisoara, Seria Matematica - Informatica* XLI (2003). Special issue on Computer Science - Proceedings of SYNASC’03, pp. 247–263. URL: http://www.risc.jku.at/publications/download/risc_2251/2003-10-00-B.pdf (cit. on p. 39).
- [IGT15] Tetsuo Ida, Fadoua Ghourabi, and Kazuko Takahashi. «Formalizing polygonal knot origami». In: *Journal of Symbolic Computation* 69 (July 2015), pp. 93–108. DOI: 10.1016/j.jsc.2014.09.031. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2014.09.031> (cit. on p. 73).

- [IK+11] Tetsuo Ida, Asem Kasem, Fadoua Ghourabi, and Hidekazu Takahashi. «Morley's theorem revisited: Origami construction and automated proof». In: *Journal of Symbolic Computation* 46.5 (May 2011), pp. 571–583. DOI: [10.1016/j.jsc.2010.10.007](https://doi.org/10.1016/j.jsc.2010.10.007). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717110001768> (cit. on p. 39).
- [IT+09] Tetsuo Ida, Hidekazu Takahashi, Mircea Kasem, and Fadoua Ghourabi. «Computational Origami System Eos». In: *Origami⁴*. 2009, pp. 285–293. DOI: [10.1201/b10653-29](https://doi.org/10.1201/b10653-29) (cit. on pp. 73, 88).
- [Jac85] Nathan Jacobson. *Basic Algebra I*. W. H. Freeman & Co., 1985. ISBN: 0716714809 (cit. on p. 8).
- [JJ98] Gareth A. Jones and Josephine M. Jones. *Elementary Number Theory*. Springer, 1998. 316 pp. ISBN: 3540761977. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-1-4471-0613-5> (cit. on p. 12).
- [JDD63] R. C. Jurgensen, A. J. Donnelly, and M. P. Dolciani. *Modern Geometry: Structure and Method*. Houghton Mifflin, 1963. Chap. 9, Th. 42, p. 328. URL: https://openlibrary.org/books/OL5873477M/Modern_geometry (cit. on p. 37).
- [Jus86] Jacques Justin. «Resolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques». In: *L'Overt* 42 (Mar. 1986). URL: <https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/ouvert/> (cit. on pp. 25, 26, 40, 58).
- [Jus89] Jacques Justin. «Resolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques». In: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology (IOST)*. 1989 (cit. on pp. 3, 25).
- [KGI11] Asem Kasem, Fadoua Ghourabi, and Tetsuo Ida. «Origami axioms and circle extension». In: *Proceedings of the 2011 ACM Symposium on Applied Computing - SAC '11*. Association for Computing Machinery (ACM), Mar. 2011, pp. 1106–1111. DOI: [10.1145/1982185.1982429](https://doi.org/10.1145/1982185.1982429). URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1982429> (cit. on p. 59).
- [Kir92] Frances Kirwan. *Complex Algebraic Curves*. Cambridge University Press, 1992. 276 pp. ISBN: 0521423538 (cit. on p. 104).
- [Kle97] Felix Klein. *Famous Problems of Elementary Geometry*. Ginn & Company, 1897. URL: <https://archive.org/details/famousproblemse00kleigoog> (cit. on p. 3).
- [Kos86] Czes Kosniowski. *Topología Algebraica*. Reverté S.A., 1986 (cit. on pp. 73, 74).

- [KN16] Joachim König and Dmitri Nedrenco. «Septic Equations are Solvable by 2-fold Origami». In: *Forum Geometricorum* 16 (May 2016). ISSN: 1534-1178. arXiv: [1504.07090v1](https://arxiv.org/abs/1504.07090v1) [math.AG]. URL: <http://forumgeom.fau.edu/FG2016volume16/FG201625.pdf> (cit. on p. 110).
- [Lana] Robert J. Lang. *Origami Conferences*. URL: <http://www.langorigami.com/article/origami-conferences> (cit. on p. 3).
- [Lanb] Robert J. Lang. *TreeMaker*. URL: <http://www.langorigami.com/article/treemaker> (cit. on p. 3).
- [Lan96] Robert J. Lang. «A computational algorithm for origami design». In: *Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*. 1996, pp. 98–105. URL: https://courses.csail.mit.edu/6.885/fall04/erik_notes/anydpi/L18_paper.pdf (cit. on p. 4).
- [Lan04] Robert J. Lang. «Origami Approximate Geometric Constructions». In: *Tribute to a Mathematician*. A K Peters, 2004, pp. 223–239. URL: <https://www.crcpress.com/Tribute-to-a-Mathematician/Cipra-Demaine-Demaine-Rodgers/p/book/9781568812045> (cit. on p. 27).
- [Lan09] Robert J. Lang, ed. *Origami⁴*. Proceedings of the Fourth International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education. A K Peters, 2009 (cit. on pp. 3, 4).
- [Lan11] Robert J. Lang. *Origami Design Secrets*. CRC Press, 2011. 770 pp. (cit. on p. 3).
- [Lan15] Robert J. Lang. *Origami and Geometric Constructions*. 2015. URL: http://www.langorigami.com/files/articles/origami_constructions.pdf (cit. on pp. 27, 40).
- [Lar40] Dionysius Lardner. *A Treatise on Geometry and Its Application in the Arts*. London, 1840. URL: <https://archive.org/details/atreatiseongeom00lardgoog> (cit. on p. 2).
- [Lil67] Eduard Lill. «Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but». In: *Nouvelles Annales de Mathématiques* ser. 2.6 (1867), pp. 359–362. URL: http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__359_0 (cit. on pp. 59, 106).
- [Lil68] Eduard Lill. «Résolution graphique des équations algébriques qui ont des racines imaginaires». In: *Nouvelles Annales de Mathématiques* ser. 2.7 (1868), pp. 359–362. URL: http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__363_1 (cit. on pp. 59, 106).

- [Loc61] E. H. Lockwood. *A Book of Curves*. Cambridge University Press, 1961. URL: <http://www.aproged.pt/biblioteca/ABookofCurvesLockwood.pdf> (cit. on p. 93).
- [Lor08] Elisa Velasco Lorenzo. «Teoría de Galois y papiroflexia». Memoria de Licenciatura dirigida por Philippe T. Gimenez. Disponible en la biblioteca universitaria de la Universidad de Valladolid (signatura: C/Bc T-003571). 2008 (cit. on pp. 25, 27, 36, 43, 93).
- [Lot07] Alfred J. Lotka. «Construction of Conic Sections by Paper-Folding». In: *School Science and Mathematics* 7.7 (Oct. 1907), pp. 595–597. DOI: [10.1111/j.1949-8594.1907.tb01084.x](https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1907.tb01084.x) (cit. on pp. 3, 53).
- [Luc16] Jorge C. Lucero. «On the elementary single-fold operations of origami». In: *arXiv e-print* (2016). URL: <https://arxiv.org/abs/1610.09923> (cit. on pp. 27, 79, 88).
- [Mae11] Jun Maekawa. «Introduction to the Study of Tape Knots». In: *Origami*⁵. 2011 (cit. on pp. 71, 73–75).
- [Mar98] George E. Martin. *Geometric Constructions*. Springer, 1998 (cit. on pp. 18, 22, 25, 28, 37, 40, 53).
- [Mes86] Peter Messer. «Problem 1054». In: *Crux Mathematicorum* 12.10 (1986), pp. 284–285 (cit. on p. 25).
- [Miu09] Koryo Miura. «The Science of Miura-Ori: A Review». In: *Origami*⁴. 2009. DOI: [10.1201/b10653-12](https://doi.org/10.1201/b10653-12) (cit. on p. 3).
- [MK+15] Koryo Miura, Toshikazu Kawasaki, Tomohiro Tachi, et al., eds. *Origami*⁶. Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education. American Mathematical Society (AMS), 2015. DOI: [10.1090/mbk/095.1](https://doi.org/10.1090/mbk/095.1) (cit. on pp. 3, 4).
- [Mor24] F. V. Morley. «A Note on Knots». In: *The American Mathematical Monthly* 31.5 (May 1924). Discussions, pp. 237–239. URL: <http://www.jstor.org/stable/2299247> (cit. on pp. 3, 71, 75).
- [Mur96] Kunio Murasugi. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhäuser, 1996. ISBN: 0-8176-3817-2. URL: <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/murasug3.pdf> (cit. on p. 74).
- [NY15] Anastassiya Neznanova and Shenglan Yuan. «From Ancient Greece to Beloch’s Crease: The Delian Problem and Origami». In: *International Journal of Undergraduate Research and Creative Activities* 7.3 (2015). DOI: [10.7710/2168-0620.1042](https://doi.org/10.7710/2168-0620.1042). URL: <http://commons.pacificu.edu/ijurca/vol7/iss1/3/> (cit. on p. 1).

- [Nis15] Yasuzo Nishimura. «Solving quintic equations by two-fold origami». In: *Forum Mathematicum* 27.3 (Jan. 2015), pp. 1379–1387. DOI: [10.1515/forum-2012-0123](https://doi.org/10.1515/forum-2012-0123). URL: <https://www.deepdyve.com/lp/de-gruyter/solving-quintic-equations-by-two-fold-origami-VGnQHlUrD3> (cit. on p. 110).
- [Pia36] Margherita Beloch Piazzolla. «Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici». In: *Periodico di Matematiche Ser. 4, 16* (1936), pp. 104–108 (cit. on pp. 3, 25, 58, 59).
- [Pie95] James Pierpont. «On an Undemonstrated Theorem of the Disquisitiones Arithmeticae». In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 2 (1895). URL: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1895-00317-1> (cit. on p. 55).
- [Pos62] Mikhail Mikhailovich Postnikov. *Foundations of Galois Theory*. Dover Publications, 1962 (republished in 2004) (cit. on p. 7).
- [Pra04] Victor V. Prasolov. *Polynomials*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. ISBN: 3642039790. DOI: [10.1007/978-3-642-03980-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-03980-5). URL: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-642-03980-5> (cit. on p. 14).
- [Pri02] José Ignacio Royo Prieto. «Matemáticas y papiroflexia». In: *SIGMA revista de matemáticas* (2002), pp. 175–192. URL: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=803877> (cit. on p. 1).
- [PT15] José Ignacio Royo Prieto and Eulàlia Tramuns. «Abelian and non-Abelian numbers via 3D Origami». In: *Origami*⁶. American Mathematical Society (AMS), 2015, pp. 45–54. URL: <http://arxiv.org/pdf/1408.0880v1> (cit. on pp. 61, 62, 69, 70, 77, 78).
- [Rao93] Tandalam Sundara Rao. *Geometric Exercises in Paper Folding*. Madras. Printed by Addison & Co., 1893. URL: <https://archive.org/details/geometricexerci00raogoog> (cit. on p. 2).
- [Ria62] M. Riaz. «Geometric Solutions of Algebraic Equations». In: *The American Mathematical Monthly* 69.7 (Aug. 1962), pp. 654–658. DOI: [10.2307/2310843](https://doi.org/10.2307/2310843). URL: <http://www.jstor.org/stable/2310843> (cit. on pp. 59, 106).
- [Rot95] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer New York, 1995. DOI: [10.1007/978-1-4612-4176-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4176-8). URL: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-1-4612-4176-8> (cit. on p. 5).

- [Rup24] C. A. Rupp. «On a Transformation by Paper Folding». In: *The American Mathematical Monthly* 31.9 (Nov. 1924), p. 432. DOI: [10.2307/2298143](https://doi.org/10.2307/2298143). URL: <http://www.jstor.org/stable/2298143> (cit. on p. 3).
- [Sab02] Idzhad Khakovich Sabitov. «Algorithmic solution of the problem of isometric realization for two-dimensional polyhedral metrics». In: *Izvestiya: Mathematics* 66.2 (2002), pp. 377–391. DOI: [10.1070/im2002v066n02abeh000382](https://doi.org/10.1070/im2002v066n02abeh000382). URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1070/IM2002v066n02ABEH000382> (cit. on p. 78).
- [Sha16] John Sharp. «Folding the regular pentagon». In: *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics* 31.3 (May 2016), pp. 179–188. DOI: [10.1080/17498430.2016.1162402](https://doi.org/10.1080/17498430.2016.1162402). URL: <http://dx.doi.org/10.1080/17498430.2016.1162402> (cit. on p. 71).
- [Slo17] Neil James Alexander Sloane. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. The OEIS Foundation. 2017. URL: <https://oeis.org/> (cit. on p. 56).
- [Smi05] John Smith. *Notes on the history of Origami*. 2005. URL: www.bitsofsmith.co.uk (cit. on p. 1).
- [SGV05] Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil, and Luis Alberto Tristán Vega. *Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables*. Ediciones Paraninfo S.A., 2005 (cit. on p. 85).
- [Tac10] Tomohiro Tachi. «Origamizing Polyhedral Surfaces». In: *IEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 16.2 (2010), pp. 298–311. URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1729609> (cit. on p. 4).
- [Tra11] Eulàlia Tramuns. «The speed of origami constructions versus other constructions tools». In: *Origami⁵*. 2011 (cit. on p. 17).
- [Tra12] Eulàlia Tramuns. «Una formalització de les construccions geomètriques». PhD thesis. Universitat Politècnica de Catalunya, July 2012. URL: <http://hdl.handle.net/10803/101399> (cit. on pp. 17, 23, 24, 28, 40, 53, 103).
- [TGS15] Nicholas Turner, Bill Goodwine, and Mihir Sen. «A review of origami applications in mechanical engineering». In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. Vol. 230. 2015. DOI: [10.1177/0954406215597713](https://doi.org/10.1177/0954406215597713) (cit. on p. 3).
- [Una02] Miguel de Unamuno. *Amor y pedagogía*. Apuntes para un Tratado de Cocotología. Henrich Barcelona, 1902, pp. 235–267. URL: <https://archive.org/details/amorypedagogia00unam> (cit. on p. 1).

- [Vac30] Giovanni Vacca. «Della Piegatura della Carta Applicata alla Geometria». In: *Periodico di Matematiche* Ser. IV, Vol. X.1 (Mar. 1930), pp. 43–50 (cit. on p. 3).
- [Vid97] Carlos R. Videla. «On points constructible from conics». In: *The Mathematical Intelligencer* 19.2 (Mar. 1997), pp. 53–57. DOI: [10.1007/BF03024434](https://doi.org/10.1007/BF03024434). URL: <https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF03024434> (cit. on p. 53).
- [WILY11] Patsy Wang-Iverson, Robert J. Lang, and Mark Yim, eds. *Origami*⁵. Proceedings of the Fifth International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education. A K Peters, 2011 (cit. on pp. 3, 4).
- [Wan37] Pierre Laurent Wantzel. «Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas». In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 1.2 (1837), pp. 366–372. URL: <http://visualiseur.bnf.fr/ConsulterElementNum?O=NUMM-16381&Deb=374&Fin=380&E=PDF> (cit. on p. 40).
- [Wei02] Eric W. Weisstein. *The CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. Second edition. Entradas consultadas: Abelian. CRC Press, 2002 (cit. on p. 13).
- [XDF93] Sebastián Xambó, Félix Delgado, and Concha Fuertes. *Introducción al Álgebra I*. Vol. 1. Editorial Complutense, 1993 (cit. on pp. 5, 70).
- [Yat41] Robert C. Yates. «Tools: a mathematical sketch and model book». PhD thesis. Louisiana State University, June 1941. URL: <https://archive.org/details/YatesToolsMathematicalSketchModel1941> (cit. on p. 3).
- [Yos54] Akira Yoshizawa. *Atarashii Origami Geijutsu*. (trad. New Origami Art) [in Japanese]. Origami Geijutsu-Sha, 1954 (cit. on p. 2).
- [d'A90] Urbano d'Aviso. *Sfera Astronomica del Padre Bonaventura Cavalieri*. Publicado en Roma como segunda impresión de *Trattato della sfera e pratiche per uso di essa col modo di fare la figura celeste*. A spese di Antonio Manari libraro, 1690. URL: <https://archive.org/details/sferaastronomic00avisgoog> (cit. on p. 71).

ÍNDICE ALFABÉTICO DE TÉRMINOS

Ángulo

- construible, 40
- diedral, 62
- orientado, 28

Alineamiento, 79, 80

Anillo, 5

Axioma, 18

- axioma mP , 96
 - complejidad, 103
 - reducible, 98
- axioma mP
 - equivalente por permutación, 96
- axioma 1P, 86
- axioma 2P, 99
- axiomas Huzita-Justin, 3, 25, 31
 - completitud, 27, 28, 88
 - descripción algebraica, 28, 89, 90, 92, 95
- de construcción, 18
- de intersección, 18
- grado, 103
- nudoGon, 72
- regularGon, 61, 62

Axiomas

- axiomas 2P, 101
- axiomas Huzita-Justin, 87

Bases de Gröbner, 39, 103, 104

Beloch Piazzolla, Margherita, 3, 25, 57

Bisección, 28

Cierre

- de Galois, 10

Cierre algebraico, 109, 111

Circuncentro, 63

Circunferencia circunscrita, 63

Circunradio, 63

Cocotología, 1

Composición

- de cuerpos, 14
- de torres de cuerpos, 15

Cono piramidal, 63

Construcción, 20

O -construcción

Duplicar $_O$, 34

Im $_O$, 33

Paralela $_O$, 32

ProductoCR $_O$, 35

ProductoRR $_O$, 35

Re $_O$, 33

SumaR $_O$, 33

Suma $_O$, 34

iProducto $_O$, 35

AbeTrisec $_O$, 38

RRaízCúbica $_O$, 41

RRaízCuadrada $_O$, 37

RaízCúbica $_O$, 42

RaízCuadrada $_O$, 38

Reflexión $_O$, 33

SimetríaCentral $_O$, 33

\mathcal{T} -construible, 20

de puntos con puntos, 24

equivalentemente

\mathcal{T} -construible, 23

geométrica plana, 17

procedimiento de

construcción, 20

Construibilidad

- de puntos, 66

Constructibilidad, 18, 20, 21

- conjunto \mathcal{T} -construible, 20

- conjunto M -construible, 21

- de polígonos regulares, 61

Cuadratura del círculo, 53

Cuerpo, 5, 36

- algebraicamente cerrado, 5

- característica de un cuerpo, 8

- composición de cuerpos, 14

- conjugado, 11
- de descomposición, 7
- fijo, 10
- intermedio, 11
- Curva, 17
 - algebraica afín, 17, 18
 - ori cúbica, 93
- Duplicación del cubo, 53
- Ecuación
 - abeliana, 14
 - cúbica, 58
 - cuártica, 58
 - resoluble, 58
- Elemento
 - algebraico, 6
 - trascendente, 6
- Euclides, 55
- Extensión
 - algebraicamente finitamente generada, 7
 - abeliana, 69
 - abeliana maximal, 69
 - algebraica, 7
 - ciclotómica, 12
 - de cuerpos, 5
 - de Galois, 10
 - finita, 6
 - finitamente generada, 6
 - grado de una extensión, 6
 - normal, 7
 - radical, 13, 15
 - resoluble, 13
 - separable, 8
 - simple, 8
- Extension
 - resoluble, 16
- Familia de rectas
 - pasando por un punto, 81
 - perpendiculares a una recta, 82
 - tangentes a una parábola, 85
- Función
 - ϕ de Euler, 12, 72
- Gauss, Carl Friedrich, 55
- Grupo, 5
 - índice de un subgrupo, 5
 - abeliano, 13, 14
 - de Galois, 9
 - orden de un grupo, 5
 - soluble, 13
- Hatori, Koshiro, 25
- Herramienta, 17, 19
 - aritméticamente equivalente, 24
 - cónicas, 52
 - compás, 24
 - geométricamente equivalente, 23
 - herramienta generalizada, 20
 - mapa canónico asociado, 22
 - Mira, 52
 - origami, 26
 - origami y compás, 59
 - regla, 19
 - regla marcada, 52
 - regla marcada y compás, 60
 - regla y compás, 19, 23, 24
 - regla y compás fijo, 24
 - regla y elipses, 52
 - regla, compás y origami, 43, 52
 - regla, compás y trisector, 60
 - subherramienta, 23
 - subherramienta minimal, 23
 - virtualmente equivalente, 24
- Herramientas
 - regla y compás euclídeo, 23
- Huzita, Humiaki, 3, 25
- Ida, Tetsuo, 39
- Imagen doblada, 80
- Incidencia, 81, 82, 85, 86
 - codimensión de una incidencia, 86, 101
 - conjunto de incidencias minimal, 86, 96
 - conjuntos de incidencias equivalentes, 96
- Incidencia por doblado, 74
- Invariante por reflexión, 80

- Inverso aditivo, 34
 Inverso multiplicativo, 36
- Justin, Jacques, 3, 25
- Lang, Robert J., 3
- Lill
 método de Lill, 106, 108
 solución de Lill, 107
- Lill, Eduard, 59, 106
- Linkage, 110
- Método de Lill, 59
- Maekawa, Jun, 71
- Mapa, 17, 21
 canónico, 22
 conjunto construible
 asociado, 21
 equivalente, 24
 sucesión de capas asociada,
 21
- Meguro, Toshiyuki, 3
- Morfismo, 5
- Número
 abeliano, 69
- Nudo
 dócil, 74
 diagrama asociado, 74
 número de writhe, 74
 patrón de doblado, 74
 pentagonal, 71, 73, 74
 poligonal, 71
 topológico, 73
- Origami, 1, 61
 2P-origami, 96, 99
 m-plegado, 97
 anudado, 71, 75, 76
 axioma regularGon, 62
 axiomas 2P, 102, 104
 axiomas Huzita-Justin, 25, 31
 axiomas nudoGon, 72
 caracterización descriptiva,
 48
 caracterización-Galois, 49
 cíclicGon, 77
 clásico, 65, 87
 constructibilidad, 31, 32, 65,
 103, 111
 de números algebraicos,
 109, 111
 de números trascendentes,
 111
 de polígonos regulares, 56,
 57, 62
 de puntos, 43, 48, 49, 52
 de rectas, 54
 raíces de la unidad, 66
 curvado, 111
 herramienta O , 26
 herramienta O_{KG_n} , 76
 herramienta O_{mP} , 97
 herramienta O_{RG} , 61
 mapa canónico \mathcal{C} , 32
 mapa canónico \mathcal{C}_{KG_n} , 76
 mapa canónico \mathcal{C}_{mP} , 97
 mapa canónico \mathcal{C}_{RG} , 65
 multiplegado, 96
 multipliegue, 74, 79, 97, 98,
 108, 110
 poliédrico, 78
 regularGon, 61, 62, 65
 caracterización principal,
 66
 resolubilidad
 de ecuaciones, 58, 104,
 108–110
 de problemas clásicos, 53
 subherramientas minimales,
 28
 teorema principal del
 origami, 43
- OSME, 3
- Papel, 1
 hoja de papel, 25
- Papiroflexia, 1
- Par de superposición, 74, 80, 81,
 83, 99–101
- Parábola, 83
- Parte imaginaria, 33
- Parte real, 33
- Pierpont, James, 55, 56
- Pirámide

- cono piramidal, 63
 - regular, 62
- Podaria, 93
- Polígono
 - cíclico, 63
 - construido, 61
 - regular, 62
- Poligonal, 63
- Polígono
 - estrellado regular, 72
- Polinomio
 - anillo de polinomios, 5
 - ciclotómico, 12
 - mínimo, 6
 - resoluble, 14, 58
 - separable, 8
- Primo
 - de Fermat, 55
 - de Pierpont, 56, 62
- Problemas clásicos, 53
- Producto, 36
- Punto, 17
- Raíz
 - n -ésima primitiva, 11
 - cúbica, 42
 - cuadrada, 38
 - expresable por radicales, 14
- Reflexión, véase simetría axial, 85
- Regla y compás
 - constructibilidad, 22
 - de polígonos regulares, 55, 57
 - herramienta \mathcal{RC} , 19
 - mapa canónico \mathcal{RC} , 22
 - resolubilidad de problemas clásicos, 22
- Resolubilidad
 - de polinomios, 14
- Simetría axial, 33, 40, 80
- Simetría central, 33
- Suma, 34
- Sundara Row, Tandalam, 2
- Superposición, 99
- Teoría de superposición, 27, 96
 - superposición, véase par de superposición
- Teorema
 - de Bezout, 104
 - de Burnside, 13
 - de Pierpont, 56
 - del elemento primitivo, 8
 - fundamental de la teoría de Galois, 11
 - Kronecker-Weber, 69
 - principal del origami, 43
- Torre de cuerpos
 - 2,3,c-torre, 67
 - 2,3-torre, 44
- Tríptico, 104
- Trisección, 40
 - trisección de Abe, 38
- Trisección del ángulo, 53
- Tupla, 18
- Wiener, Hermann, 2
- Yoshizawa, Akira, 2