



Universidad de Valladolid



PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL:

Sistemas lineales de EDOs con coeficientes meromorfos reales y complejos. Proceso de Turritin. Constructibilidad de la dicotomía enlazado/separado para sistemas bidimensionales reales

Presentada por Félix Álvaro Carnicero Martín para optar
al grado de
Doctor/a por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:
Fernando Sanz Sánchez

INTRODUCTION

These notes deal with the study of Linear Systems of Ordinary Differential Equations (ODEs) with formal meromorphic coefficients, both in the real or the complex context. More precisely, systems of the form

$$Y' = A(x)Y, \tag{1}$$

where $Y = (y_1, \dots, y_n)$ is a vector of n variables and $A(x)$ is a square $n \times n$ matrix whose entries are formal meromorphic power series in the variable x with coefficients in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} .

We assume that the system is *singular* at $x = 0$, i.e., that at least an entry of $A(x)$ has a pole at $x = 0$ and we write

$$A(x) = \frac{1}{x^{q+1}}(A_0 + xA_1 + \dots),$$

where A_j is a constant matrix, $A_0 \neq 0$ and $q \geq 0$, which is called the *Poincaré rank* of the system. It will be useful for us also to consider the *radiality index* which is the minimum between q and the first k such that every matrix A_0, A_1, \dots, A_{k-1} is a scalar multiple of the identity matrix.

We treat two topics, very different in nature but related.

First topic: *Turritin's Procedure*.- A classical result, stated in modern terms by Turritin in ([11], Theorem I in page 42). Established in the complex case, it asserts, in big lines, that the system can be reduced to a simpler canonical form (essentially that all matrices A_j for $0 \leq j < q$ above are diagonal, we call this form a *Ramis-Sibuya form* as we explain in chapter 3) by means of certain transformations, which do not modify the essential nature of solutions of the system (1). Such transformations consists in linear changes of the variable Y with polynomial coefficients in the x -variable, together with ramifications in the x -variable. Since these transformations only contribute to algebraic manipulations of the system, no convergence conditions for the entries of the matrix $A(x)$ are needed and the result can be formulated in the formal setting.

Turritin's Theorem has been revisited several times in the literature, for instance in Wasow [10], Balser [1] or Barkatou-Pflügen [2], which concerns also with effectiveness of the procedure.

A part of these notes is devoted to make a revision of Turrutin's result following mainly the procedure given by Wasow. There are several reasons to justify this revision and to put in value our contribution to this topic here:

- First, in Wasow's proof, the main final arguments concerning the induction on the dimension and the Poincaré rank is perhaps not sufficiently clarified: the Poincaré rank drops as long as we do not need to make a ramification of the x -variable, but it increases after ramifications. We clarify in chapter 3 all the details concerning this induction hypothesis.
- Concerning the effectiveness of the result: due to the algebraic nature of the transformations, it is natural to ask if the procedure to obtain a canonical form for the system (1) is *finitely determined*; i.e., if only finitely many matrix coefficients A_0, \dots, A_N are involved in the procedure. We prove that this is true, obtaining an explicit bound N which depends only on the dimension n and the Poincaré rank. In fact $N = nq - (n - 1)k$.
- A general real version of Turrutin's result has not been treated yet, as far as we know. We establish and we prove such a real version in Chapter 4. The procedure in the complex case does not restrict necessarily without modification to the case of real coefficients. The difficulty is the possible existence of complex non real eigenvalues of the first non-radial coefficient matrix A_k . We overcome this difficulty by using a result (Proposition 4.2.2.) that shows that, in this situation, a polynomial linear change of variables produces a new system where all coefficient matrices, up to the order as big as we need, are what we call \mathbb{C} -matrices: matrices written in 2×2 blocks of the form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

In this situation, a truncation of the original system (with real coefficients) can be associated to a system with complex coefficients (with half the dimension of the original one). The complex Turrutin's procedure of this last systems extends, in this case, to a real Turrutin's process of the original system.

- The transformations used in Wasow's proof, called *shearing transformations*, can be interpreted geometrically as blow-ups of the space of variables (x, Y) with smooth centers contained in the hyperplane $x = 0$. Combining this observation with the finite determinacy and effectiveness mentioned above, and using resolution of singularities, Turrutin's result appears as a relevant tool

for describing the dynamics of vector fields, or non-linear differential equations *along* an invariant formal curve C . An example of this relevancy can be seen in the paper [4], which contains a description of the relative behaviour of trajectories of real three dimensional vector fields (related to two-dimensional systems, i.e. $Y = (y_1, y_2)$).

At the present time, at least two papers (in progress), use Turritin's result (real or complex). The first one (authors: Cano, LeGal, Sanz) deals with the existence of trajectories which are asymptotic to a given invariant formal curve of a real vector field in any dimension. The second one (authors: López, Ribón, Sanz, Vivas) deals with existence of stable manifolds of a germ of holomorphic diffeomorphism at $0 \in \mathbb{C}^n$ composed of orbits asymptotic to a given formal invariant curve. We hope that the content of these notes may contribute to the complete achievement of those papers.

Second topic: *Constructibility of the dichotomy interlaced/separated for two-dimensional linear real systems of meromorphic ODEs.*- This second topic, treated in chapter 5, is the most original part of the thesis. The content of this chapter has been already published in [9], a collaboration of the author of these notes and the advisor of the thesis. Let us explain it here in big lines.

In the first topic, we do not enter in the study of the possible “solutions” of the system (1). Since all the transformation used produces algebraic manipulations of the matrix of the system, the formal setting, without any condition on the convergence of the entries of $A(x)$, was a genuine context. This second topic deals with the study of “geometric” solutions $x \mapsto Y(x)$ (so we assume that the entries of $A(x)$ are convergent meromorphic series) but restricted to the two-dimensional case $Y = (y_1, y_2)$ and with real coefficients (although we consider more generally the case of a linear non-autonomous system). More precisely, we deal with systems of the form

$$Y' = A(x)Y + B, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

where $A(x)$ is a 2×2 matrix and $B(x)$ is a 2-dimensional column vector, both with entries in the field $K = \mathbb{R}(\{x\})$ of real meromorphic (convergent) series.

In what follows, a *solution* of the system (5.1) will be a map $x \mapsto Y(x) \in \mathbb{R}^2$ defined and of class C^1 on a right neighborhood $(0, \varepsilon)$ of 0 that satisfies the equation; that is, so that $\frac{dY}{dx}(x) = A(x)Y(x) + B(x)$ for any $x \in (0, \varepsilon)$. (An analogous study can be made for solutions defined in a left neighborhood of 0). Assuming that $x = 0$

is a singular point of the system (i.e. some of the entries of A or B has a pole at $x = 0$), we are interested in the asymptotic behavior of solutions when x goes to 0.

More precisely, we are interested in the relative asymptotic behavior of two such solutions and, particularly, in the concepts of linking and separation of solutions which come from the concepts of “spiralement” and “enlacement” introduced in [3, 4] for trajectories of three-dimensional vector fields.

Roughly speaking, two different solutions $Y(x)$ and $Z(x)$ are said to be *asymptotically interlaced* (resp. *separated*) if the vector $Y(x) - Z(x)$ of \mathbb{R}^2 spirals around the origin (resp. it has a well defined limit direction) when x goes to 0. It is not hard to see (we recall below a proof) that, given a system (5.1), either any pair of solutions is asymptotically interlaced or any pair of solutions is separated, thus allowing to say, correspondingly, that the system is *interlaced* or *separated*. Another remark is that a system as in (5.1) is interlaced or separated iff it is so for its homogenized system (the system consisting on the same coefficient matrix A but with $B = 0$).

The question now is to determine criteria that permit to know if a given system is interlaced or separated. In the paper [6], this problem is treated in the more general setting where the entries of the coefficient matrix A and those of the vector B belong to a *Hardy field* H . By definition, a Hardy field is a subfield of the ring of germs at $x = 0$ of differentiable real functions on a right interval $(0, \varepsilon)$ which is closed by taking the derivative with respect to x . This concept captures some of the good finiteness properties that we have for real analytic functions: non-zero elements in H have finitely many zeros, they have a limit in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ when $x \rightarrow 0$, L'Hôpital's rule hold for elements of H , H is a totally ordered field by $f \leq g$ iff $f(x) \leq g(x)$ for any x in a right neighborhood of 0, etc. (see [5] for an extensive exposition of the theory of Hardy fields, or [7] for a recent summary). The main result in [6] is that a system as in (5.1) with matrix coefficient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in a Hardy field H is separated if and only if the associated *Riccati equation*

$$y' = cy^2 + (a - d)y - b \tag{3}$$

has a solution $x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$ defined for every x in a right neighborhood of $x = 0$. Moreover, in that case, the extension of the field H of coefficients by the family of all solutions of the system (their germs at $x = 0$) is again a Hardy field.

The result thus provides a criterium for a system to be interlaced or separated in terms of the Riccati equation of the system. However, this criterium, being completely general for any Hardy field, is far from being constructive. Restricting to our special case where the field of coefficients is $H = K = \mathbb{R}(\{x\})$, the general question now is:

Can we expect a constructive criterium for deciding the dichotomy interlaced/separated for linear ODEs with real meromorphic coefficients?

In chapter 5, we present just the first results obtained so far devoted to the task of finding what kind of “constructiveness” can we hope for such a criterium.

Before stating the results, let us fix some useful notation. First, as we have mentioned, for distinguishing between interlaced or separated systems we can restrict ourselves to homogenized ones. The whole family of such systems will be identified with K^4 by the natural identification

$$Y' = AY \iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^4.$$

Denote by \mathcal{S} (resp. \mathcal{I}) the family of separated (resp. interlaced) systems, so that we have the partition $K^4 = \mathcal{S} \cup \mathcal{I}$. For any $q \geq 0$, let \mathcal{F}^q be the family of systems with Poincaré rank not greater than q and denote by $\mathcal{F}^q = \mathcal{S}^q \cup \mathcal{I}^q$ the corresponding partition into separated and interlaced systems. An element $A \in \mathcal{F}^q$ will be written as

$$A = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j A_j$$

where each A_j is a matrix with real entries, denoted by $A_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$. Given an integer $m \geq 0$, we will speak of the m -truncation of the system A to refer to the vector

$$J_m(A) = (A_0, A_1, \dots, A_m) \equiv (a_0, b_0, \dots, c_m, d_m) \in \mathbb{R}^{4(m+1)}. \quad (4)$$

The first result about constructiveness of the criterium for the dichotomy interlacing/separation is developed in section 5.3. and can be stated as follows

Theorem 1 *For any $q \geq 0$, there exists a semi-algebraic set $\Sigma_q \subset \mathbb{R}^{4(2q+2)}$ such that a system $A \in \mathcal{F}^q$ belongs to \mathcal{S}^q if and only if $J_{2q+1}(A) \in \Sigma_q$.*

We recall that, by definition, a semi-algebraic set of \mathbb{R}^n is a finite union of sets of the form

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : P(\mathbf{x}) = 0, Q_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, Q_r(\mathbf{x}) > 0\}$$

where $P, Q_j \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ are real polynomials in n variables.

This result appears already in the cited reference [6]. It establishes constructiveness for deciding interlacing/separation for systems with bounded Poincaré rank

in terms of semi-algebraicity of a finite jet of the Taylor expansion of the entries of the coefficient matrix of the system. In other words, we can state: for any q there exists a finite algorithm, which uses only the operations of \mathbb{R} as an ordered field, whose input is a vector of real numbers corresponding to a finite Taylor expansion of a system A in \mathcal{F}^q and whose output is the answer to the question of whether the system is interlaced or separated.

Of course, the proof of Theorem 1 makes use of Turrutin's Theorem. The bound $2q + 1$ for the sufficient truncation of the system that determines the dichotomy interlaced/separated is related to the bound $(N(n, q, k) = nq - (n - 1)k)$ established in chapter 3 for the sufficient jet to achieve a Turrutin's procedure of the original system.

Our next objective is to look for such a constructive criterium or finite algorithm in terms of the entries of the matrix as elements of the Hardy field $K = \mathbb{R}(\{x\})$, instead of their Taylor expansions. In order to formulate more precisely this objective, let us say that a subset of K^n is *K-semialgebraic in K^n* if it is a finite union of sets of the form

$$\{\mathbf{x} \in K^n : P(\mathbf{x}) = 0, Q_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, Q_r(\mathbf{x}) > 0\}$$

where $P, Q_j \in K[X_1, \dots, X_n]$ (recall that we have defined the order in K as $a > 0$ iff $a(x) > 0$ for any x in a right neighborhood of 0).

In the section 5.4. we prove that there not exists any such constructive criterium. More precisely,

Theorem 2 *For any $q \geq 1$, neither $\mathcal{S}^q \subset K^4$ nor $\mathcal{I}^q \subset K^4$ is K -semialgebraic in K^4 .*

Using the fact that $\mathcal{F}^q \subset K^4$ is K -semialgebraic, we obtain

Corollary 3 *Neither the set \mathcal{S} of separated systems nor the set \mathcal{I} of interlaced ones is K -semialgebraic in K^4 .*

The above negative results motivate our third objective: the search of constructive criteria by using other operations of the Hardy field K besides the ones corresponding to an ordered field. The first natural such operation is the derivative. Accordingly to this, we will say that a subset $\Omega \subset K^n$ is *K-differentially-semialgebraic* (or *(K, d)-semialgebraic* for short) if it is a finite union of subsets of the form

$$\{\mathbf{x} \in K^n : P(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots) = 0, Q_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots) > 0, \dots, Q_r(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots) > 0\}$$

where $P, Q_j \in K \langle X \rangle = K[X, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots]$ are differential polynomials in n variables (i.e., any $X^{(i)}$ denotes a vector of n indeterminates) and $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$, etc. denotes the vector of successive derivatives of the components of \mathbf{x} .

In section 5.5, we prove that, if we allow to take derivatives, a constructive criterium for deciding the dichotomy interlacing/separation exists for systems with bounded Poincaré rank. More precisely,

Theorem 4 *For any $q \geq 0$, both \mathcal{S}^q and \mathcal{I}^q are (K, d) -semialgebraic subsets of K^4 .*

Finally, the next natural question is to know wether the use of the operation of taking derivatives suffices in order to obtain a constructive criterium for the whole family of systems, i.e. with no bound on the Poincaré rank. We claim that the answer to this question is negative, although at the present time, we have not a fully detailed proof of it. In more precise terms, we can announce

Claim. (Yet unproved) *Neither the set \mathcal{S} nor \mathcal{I} is a (K, d) -semialgebraic subset of K^4 .*

Índice general

1. Repaso de algunos resultados de Álgebra Lineal	10
1.1. Matrices de Jordan	10
1.2. Autovalores y polinomios característicos	11
1.3. Autovalores y formas de Jordan de matrices reales	14
1.4. Divisores elementales y factores invariantes	15
1.5. Matrices de polinomios y cálculo de factores invariantes	17
1.6. Algunos lemas técnicos	20
2. Sistemas meromorfos de ecuaciones diferenciales lineales	27
2.1. Definiciones básicas	27
2.1.1. Rango de Poincaré	29
2.1.2. Índice de radialidad	30
2.2. Equivalencias entre sistemas	31
2.2.1. Transformaciones de gauge	31
2.2.2. Ramificaciones	33
2.3. Transformaciones admisibles	33
2.3.1. Definición de transformaciones admisibles	34
2.3.2. Comportamiento de los jets por transformaciones admisibles	35
2.3.2.1. Transformación gauge regular	35
2.3.2.2. Transformación shearing	37
2.3.2.3. Ramificación	39
2.3.3. El semigrupo de transformaciones admisibles por composición	40
2.4. Un par de simplificaciones del sistema	41
2.4.1. Splitting Lemma	42
2.4.2. Obtención de matrices especiales	45

3. Forma de Ramis-Sibuya y proceso de Turrutin. Caso complejo	48
3.1. Reducción a forma de Ramis-Sibuya. Enunciado	48
3.1.1. Sistemas en forma de Ramis-Sibuya	48
3.1.2. Enunciado del Teorema de Turrutin	49
3.2. Algoritmo de Turrutin en el caso complejo. Demostración	51
3.2.1. Casos triviales	51
3.2.2. Caso de matriz A_k con varios autovalores. Reducción de la dimensión del sistema	51
3.2.3. Caso de matriz A_k con un único autovalor	54
3.2.3.1. Definición del invariante $I(A)$	55
3.2.3.2. Definición del exponente g_0	56
3.2.3.3. Caso g_0 natural	59
3.2.3.4. Caso de exponente g_0 racional no natural	60
3.2.3.5. Determinación del Jet suficiente	61
3.3. Resumen del algoritmo	63
3.4. Ejemplos	64
4. Forma de Ramis-Sibuya y proceso de Turrutin en el caso real	66
4.1. \mathbb{C} -matrices reales	68
4.2. Obtención de un sistema con coeficientes \mathbb{C} -matrices	69
4.3. Forma de Ramis-Sibuya y proceso de Turrutin en el caso real. Enunciado.	73
4.4. Proceso de Turrutin real. Demostración.	74
4.4.1. Casos triviales	74
4.4.2. Caso A_k tiene varios autovalores no conjugados	74
4.4.3. Caso A_k tiene un único par de autovalores complejos conjuga- dos no reales	75
4.4.4. Caso A_k tiene un único autovalor real	76
4.5. Ejemplos	77
4.6. Algoritmo de Turrutin real en dimensión dos	79
5. Caso particular de EDOs bidimensionales	81
5.1. Introducción	81
5.2. Dicotomía enlazado/separado	84
5.3. Criterio semi-algebraico en las entradas de los coeficientes	87
5.4. Carácter no K -semialgebraico de la dicotomía	94
5.5. Carácter (K, d) -semialgebraico de la dicotomía	102

Capítulo 1

Repaso de algunos resultados de Álgebra Lineal

En este apartado recordamos definiciones y resultados básicos de álgebra lineal como son los autovalores y autovectores así, las formas de Jordan o los divisores elementales de una matriz. También introduciremos notaciones que usaremos a lo largo de la memoria.

En la última sección recogemos unos resultados técnicos, menos conocidos, que nos serán útiles para el tratamiento de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales en los próximos capítulos.

1.1. Matrices de Jordan

Sea K un cuerpo. Denotamos por $M_{n,m}(K)$ el K -espacio vectorial de matrices de tamaño $n \times m$ con coeficientes en el cuerpo K . Cuando $n = m$ hablamos de matrices cuadradas de tamaño n y consideramos $M_{n,n}(K)$ como una K -álgebra con el producto usual de matrices. Denotamos por I_n la matriz identidad, elemento neutro de este álgebra.

Dados $n_1, n_2, \dots, n_r, \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ y dadas, para cada $(i, j) \in \{1, 2, \dots, r\}^2$, matrices $C_{ij} \in M_{n_i, n_j}(K)$, la matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, donde $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rr} \end{pmatrix}$$

diremos que es una matriz cuadrada **por bloques** (si es necesario diremos más precisamente **por bloques** (n_1, n_2, \dots, n_r)) y escribiremos

$$A = \text{Bloq}(C_{ij}).$$

Si $C_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$, se dirá que A es **diagonal por bloques**. En este caso denotaremos

$$A = C_{11} \oplus C_{22} \oplus \dots \oplus C_{rr} \text{ ó } A = \text{diag}(C_{11}, C_{22}, \dots, C_{rr}).$$

Si $C_{ij} = 0$ siempre que $i < j$ se dirá que A es **triangular inferior por bloques**.

Nótese que si tenemos dos matrices $A = \text{Bloq}(C_{ij}), B = \text{Bloq}(D_{ij})$ por bloques (n_1, \dots, n_r) , entonces $AB = \text{Bloq}(C_{ij}D_{ij})$. También, el producto de matrices diagonales por bloques (respectivamente triangular por bloques) es diagonal por bloques (respectivamente triangular por bloques).

Definición 1.1.1 Una matriz $J \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ es un **bloque de Jordan** (asociado al autovalor α y de tamaño n) si es de la forma

$$J = J(\alpha, n) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix} \in M_{n,n}(K).$$

Un bloque de Jordan asociado al autovalor $\alpha = 0$ se llama **matriz deslizante** (**shifting matrix** en inglés). Una **matriz de Jordan** es una matriz diagonal por bloques de la forma

$$J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_r$$

donde cada J_i es un bloque de Jordan.

1.2. Autovalores y polinomios característicos

Definición 1.2.1 Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ diremos que A y B son matrices **conjugadas** si y sólo si existe P matriz inversible tal que $A = PBP^{-1}$.

Definición 1.2.2 Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ no nula diremos que v , vector no nulo, es un **autovector** de A si existe $\alpha \in K$ tal que $Av = \alpha v$. Al valor α lo llamaremos **autovalor** de la matriz A .

Los autovalores de A son precisamente las raíces del polinomio

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \in K[\lambda],$$

llamado **polinomio característico** de la matriz A . Si A y B son matrices conjugadas, entonces $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.

Ejemplo 1.2.3

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

con al menos un a_i distinto de cero. Entonces A no es conjugada a B . El polinomio característico de A es $P_A(\lambda) = (-\lambda)^n$. Por otro lado, sea $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a_j \neq 0$ y tal que $a_1 = a_2 = \dots = a_{j-1} = 0$. Si $j = n$, entonces $P_B(\lambda) = (a_n - \lambda)(-\lambda)^{n-1}$. Si $j < n$ calculando el determinante por adjuntos de la columna n -ésima, obtenemos $P_B(\lambda) = (a_n - \lambda)(-\lambda)^{n-1} + \tilde{P}(\lambda)$, donde el orden de $\tilde{P}(\lambda) \leq n-1$, por lo tanto los polinomios característicos de A y de B no son iguales, entonces no son matrices conjugadas.

Teorema 1.2.4 (*Forma normal de Jordan*). *Supongamos que el polinomio característico de A descompone en factores lineales de la forma siguiente*

$$P_A(\lambda) = \prod_{j=1}^l (\alpha_j - \lambda)^{r_j}, \alpha_j \in K,$$

(por ejemplo si K es algebraicamente cerrado). Entonces por cada j existen matrices de Jordan $J_{j1}, J_{j2}, \dots, J_{jm_j}$ asociadas al autovalor α_j y de tamaños n_{j1}, \dots, n_{jm_j} respectivamente, con $n_{j1} + n_{j2} + \dots + n_{jm_j} = r_j$ tales que A es conjugada a la matriz de Jordan

$$J = J_{11} \oplus \dots \oplus J_{1m_1} \oplus J_{21} \oplus \dots \oplus J_{lm_l}. \quad (1.1)$$

La matriz (1.1) se llama la **forma normal de Jordan** de la matriz A .

En la situación anterior, si $\alpha_j \neq \alpha_{j'}$ cuando $j \neq j'$, r_j es la **multiplicidad** del autovalor α_j . Tanto las multiplicidades de autovalores, como los tamaños de las matrices de Jordan J_{jt} del teorema anterior son los mismos para matrices conjugadas, es decir, si A y B son dos matrices cuadradas conjugadas y la forma normal de

Jordan para cada una de ellas es $J_A = J_{11}^A \oplus \cdots \oplus J_{1m_1^A}^A \oplus J_{21}^A \oplus \cdots \oplus J_{lm_l^A}^A$ y $J_B = J_{11}^B \oplus \cdots \oplus J_{1m_1^B}^B \oplus J_{21}^B \oplus \cdots \oplus J_{lm_l^B}^B$ entonces para cada J_{ij}^A existen k, l tal que $J_{ij}^A = J_{kl}^B$ y para cada J_{kl}^B existen i, j tal que $J_{kl}^B = J_{ij}^A$.

De hecho, cuando K es algebraicamente cerrado, dos matrices cuadradas A, B son conjugadas si y sólo si tienen los mismos autovalores con las mismas multiplicidades y los mismos tamaños de las matrices J_{jt} (salvo reordenación). Es decir, la forma normal de Jordan de una matriz está bien definida, salvo reordenación de los bloques de Jordan.

Ejemplo 1.2.5

Sea $C = \text{Bloq}(C_{ij})$ una matriz triangular inferior por bloques, entonces C tiene los mismos autovalores con las mismas multiplicidades que la matriz

$$E = C_{11} \oplus C_{22} \oplus \cdots \oplus C_{ss}$$

ya que ambas tienen el mismo polinomio característico. Sin embargo, las formas de Jordan de C y E no tienen que ser necesariamente iguales (C, E no son necesariamente conjugadas). Por ejemplo,

$$C = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix} \text{ y } E = I_2 \oplus I_2$$

no son conjugadas y ambas tienen los mismos autovalores con las mismas multiplicidades.

Lemma 1.2.6 *Supongamos que K es un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ con un único autovalor $\alpha \in K$. Entonces el número de bloques en la forma normal de Jordan de A es igual a la dimensión del núcleo de la matriz $A - \alpha I_n$.*

Demostración .- Como K es un cuerpo algebraicamente cerrado por el Teorema 1.2.4 existe una matriz P inversible tal que $PAP^{-1} = J$ siendo J una matriz en forma normal de Jordan de A . Por otro lado

$$P(A - \alpha I_n)P^{-1} = PAP^{-1} - \alpha I_n = J - \alpha I_n$$

y como $A - \alpha I_n$ tiene el un único autovalor que es cero entonces tenemos que $P(A - \alpha I_n)P^{-1}$ es de la forma

$$P(A - \alpha I_n)P^{-1} = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_s$$

donde las H_i son matrices deslizantes. Si cada H_j tiene dimensión n_j , considerando el menor compuesto por las columnas que ocupan las posiciones

$$2, 3, \dots, n_1, n_1 + 2, n_1 + 3, \dots, n_1 + n_2, \dots, \sum_{i=1}^{s-1} n_i + 2, \sum_{i=1}^{s-1} n_i + 3, \dots, \sum_{i=1}^s n_i$$

y las filas que ocupan las posiciones

$$1, 2, \dots, n_1 - 1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2 - 1, \dots, \sum_{i=1}^{s-1} n_i, \sum_{i=1}^{s-1} n_i + 1, \dots, \sum_{i=1}^s n_i - 1$$

obtenemos la matriz identidad I_{n-s} , por lo que el rango de $A - \alpha I_n$ es al menos $n - s$. Por otro lado, como las s columnas que ocupan las posiciones

$$1, n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1, \dots, \sum_{i=1}^{s-1} n_i + 1$$

son nulas el núcleo tiene dimensión al menos s y, por lo tanto, exactamente s , que es igual al número de bloques de Jordan. \square

1.3. Autovalores y formas de Jordan de matrices reales

En este apartado recordamos cómo escribir la forma de Jordan de una matriz cuadrada con coeficientes reales, donde el polinomio característico, siendo todas las raíces complejas, puede no tener todas las raíces reales (puede no descomponer en $\mathbb{R}[\lambda]$ como producto de factores lineales).

Definición 1.3.1 Sea $J \in \mathcal{M}_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de tamaño $2n$ con coeficientes reales. Sea $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ un número complejo. y $\bar{\alpha} = a - ib$ su conjugado. Diremos que J es un **bloque de Jordan real** asociado al autovalor α (ó $\bar{\alpha}$), si J es diagonal por bloques $(2, 2, \dots, 2)$, $J = \text{Bloq}(J_{jk})$ donde, para $j = 1, \dots, n$, $J_{jj} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, para $j = 1, \dots, n - 1$, $J_{j,j+1} = I_2$ y $J_{j,k} = 0$ para todos j, k tales

que $k \neq j + 1$. Es decir, escrita en la forma

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc|ccc|cc} a & -b & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & -b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \dots & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & a \end{array} \right).$$

Proposición 1.3.2 Sea $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada con entradas en el cuerpo real. Sean $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \alpha_r, \bar{\alpha}_r, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ las distintas raíces del polinomio característico $P_M(\lambda)$ de M , donde cada α_j es un número complejo no real, $\bar{\alpha}_j$ es su conjugado y cada λ_j es un número real (cumpliendo $\alpha_j \neq \alpha_{j'}$, $\alpha_j \neq \bar{\alpha}_{j'}$, $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ para $j \neq j'$). Entonces M es conjugada a una matriz de la forma

$$J_{11} \oplus \dots \oplus J_{1m_1} \oplus J_{21} \oplus \dots \oplus J_{rm_r} \oplus Q_{11} \oplus \dots \oplus Q_{1t_1} \oplus Q_{21} \oplus \dots \oplus Q_{st_s},$$

donde, para cada pareja u, v de índices en tal escritura, J_{uv} es un bloque de Jordan real asociado al autovalor no real α_u , de tamaños $n_{u1}, n_{u2}, \dots, n_{um_u}$, con $n_{u1} + n_{u2} + \dots + n_{um_u}$ igual a la multiplicidad de α_u (ó de $\bar{\alpha}_u$ como raíz de $P_M(\lambda)$), y Q_{uv} es un bloque de Jordan asociado al autovalor real λ_u .

1.4. Divisores elementales y factores invariantes

Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$. Supongamos que el polinomio característico de A descompone en factores lineales. La forma de Jordan de A va a determinar unos polinomios en $K[\lambda]$, invariantes por conjugación, que tienen un gran interés: los *divisores elementales* y los *factores invariantes*.

Sabemos, por el Teorema 1.2.4, que A es conjugada a una matriz diagonal por bloques cuyos bloques son bloques de Jordan, como en (1.1), matriz de Jordan, y que dos de tales matrices de Jordan son conjugadas si y sólo si tienen los mismos bloques salvo ordenación. Sea J una tal forma de Jordan de A , escrita como

$$J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_s, \quad s \leq n$$

con

$$J_k = \alpha_k I_k + H_k$$

donde H_k es una shifting matriz. Si $P_A(\lambda)$ es el polinomio característico de A este también lo es de J , ya que los polinomios característicos son invariantes por conjugación.

El polinomio característico de la matriz J , al ser una matriz diagonal por bloques es igual al producto de los polinomios característicos de los bloques J_k de J , es decir,

$$P_A(\lambda) = \prod_{k=1}^s P_{J_k}(\lambda).$$

Por otro lado claramente tenemos que

$$P_{J_k}(\lambda) = (\alpha_k - \lambda)^{n_k}$$

donde n_k es el orden de J_k . Esto implica que los α_k son los autovalores de A . Nótese que los números n_k no tienen por que ser las multiplicidades de los autovalores α_k ya que el mismo autovalor puede aparecer en diferentes bloques J_k .

Definición 1.4.1 *Los polinomios $P_{J_k}(\lambda)$ son llamados los **divisores elementales** de A en el cuerpo K .*

Ahora vamos a introducir lo que llamaremos factores invariantes de la matriz A . Para cada autovalor α_j de A , elegimos un divisor elemental de mayor grado, $(\alpha_j - \lambda)^{r_j}$.

El producto de estos divisores elementales es el polinomio $\chi_1(\lambda)$, que llamaremos el **primer factor invariante** de A , con lo que el primer factor invariante será $(\alpha_1 - \lambda)^{r_1}(\alpha_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\alpha_s - \lambda)^{r_s}$.

Ahora eliminamos los factores $(\alpha_j - \lambda)^{r_j}$ para $j = 1, \dots, s$ de la lista de divisores elementales y repetimos el proceso con el resto de divisores elementales de A , de esta forma obtenemos el segundo factor invariante de A , $\chi_2(\lambda)$, etc (en el caso de que para algún autovalor no haya más divisores elementales correspondientes, pondremos 1 como factor). El número t de factores invariantes no constantes de A que así se obtienen es menor o igual al número s de bloques de Jordan, o el número de divisores elementales, con lo que completamos la lista con el polinomio constante 1 hasta n . Resumiendo:

Definición 1.4.2 *La secuencia de n polinomios*

$$\chi_1(\lambda), \chi_2(\lambda), \dots, \chi_t(\lambda), 1, 1, \dots, 1$$

*son llamados los **factores invariantes** de la matriz A .*

Nótese que cada polinomio en la secuencia es un factor del polinomio que le precede.

Definición 1.4.3 *El primer factor invariante $\chi_1(\lambda)$ es llamado el **polinomio mínimo** de A .*

La propiedad principal del polinomio mínimo, es que es el polinomio $Q(\lambda)$ de grado mínimo y mónico que anula a la matriz A , esto es, tal que $Q(A) = 0$.

1.5. Matrices de polinomios y cálculo de factores invariantes

Una **matriz polinómica** es cualquier matriz $M(\lambda) \in \mathcal{M}_{n \times n}(K[\lambda])$ cuadrada de tamaño n cuyas entradas son polinomios en λ con coeficientes en un cuerpo K .

Definición 1.5.1 *Cada una de estas operaciones se dirá que son **transformaciones elementales** de $M(\lambda)$:*

1. *Multiplicar una fila o una columna por un elemento de K distinto de cero.*
2. *Reemplazar un vector $v(\lambda)$ fila (o columna) de $M(\lambda)$ por $v(\lambda) + b(\lambda)w(\lambda)$ donde $b(\lambda)$ es un polinomio en λ y $w(\lambda)$ es otro vector fila (o columna) de $M(\lambda)$.*
3. *Intercambiar dos filas (o dos columnas).*

Es fácil ver que la transformación inversa de una transformación elemental es también elemental.

Definición 1.5.2 *Dos matrices polinómicas se dice que son **equivalentes** si una se obtiene de la otra por medio de transformaciones elementales. Esta definición establece una relación de equivalencia entre matrices de polinomios.*

Un resultado importante que queremos destacar aquí es el siguiente

Teorema 1.5.3 *Toda matriz polinómica es equivalente a una matriz polinómica diagonal.*

Demostración .- Tenemos que transformar una matriz polinómica $M(\lambda) = (P_{ij}(\lambda))$, por medio de transformaciones elementales, en una matriz polinómica diagonal. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

Sean i_0, j_0 tal que $P_{i_0 j_0} \neq 0$ y el grado de $P_{i_0 j_0}$ es menor o igual que el grado P_{ij}

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ si $P_{ij} \neq 0$. Entonces hacemos las transformaciones elementales de intercambio de filas y columnas para colocar el polinomio $P_{i_0 j_0}$ en la primera fila y primera columna, es decir, intercambio de la primera fila por la fila i_0 y primera columna por la columna j_0 .

Posteriormente eliminamos la parte de grado mayor o igual de la columna 1 y las filas $2, 3, \dots, n$ por medio de la transformación de reemplazo y también eliminamos la parte de grado mayor o igual de la fila 1 y columnas $2, 3, \dots, n$ por medio de la transformación de reemplazo. Nótese que el elemento de menor grado distinto de cero ahora está, o bien, en la fila 1, o bien, en la columna 1 y además el grado es menor que el grado de $P_{i_0 j_0}$, por lo tanto podemos repetir este proceso hasta hacer ceros en la fila 1 y columnas $2, 3, \dots, n$ y en la columna 1 y filas $2, 3, \dots, n$.

Ahora consideramos la matriz cuadrada de orden $n - 1$ compuesta por las columnas $2, 3, \dots, n$ y filas $2, 3, \dots, n$ y repetimos el proceso anterior para hacer ceros en la primera fila y columnas $2, 3, \dots, n - 1$ y primera columna y filas $2, 3, \dots, n - 1$ de la nueva matriz. Nótese que estas transformaciones realizadas en la matriz original no modifican los elementos de la primera fila y primera columna.

Finalmente seguimos este procedimiento para las matrices de orden $n - 2, n - 3, \dots, 1$.
□

Dada una matriz polinómica $M(\lambda)$, sea $diag(Q_1(\lambda), \dots, Q_n(\lambda))$ una matriz polinómica diagonal equivalente a $M(\lambda)$. Entonces los polinomios $Q_j(\lambda)$ son únicos salvo reordenación y multiplicación por constantes.

Definición 1.5.4 Si los polinomios $Q_j(\lambda)$ son normalizados con el coeficiente principal a uno, diremos que esos polinomios son los **polinomios invariantes** de $M(\lambda)$.

Los factores invariantes de una matriz con coeficientes en un cuerpo K cuyo polinomio característico descompone en factores lineales pueden calcularse usando equivalencias entre matrices polinómicas a través del siguiente resultado:

Teorema 1.5.5 Los polinomios invariantes de $A - \lambda I$ son precisamente los factores invariantes de A .

Ejemplo 1.5.6

Sea $A = H$ una matriz deslizante de orden n . Queremos calcular los factores invariantes de H . Ponemos

$$H - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Comenzamos multiplicando la columna n -ésima por λ y sumádoselo a la columna $n - 1$, posteriormente multiplicamos la columna $n - 1$ por λ y lo sumamos a la columna $n - 2$ y continuamos este proceso hasta llegar a la primera columna. Al finalizar obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\lambda^n & -\lambda^{n-1} & -\lambda^{n-2} & \dots & -\lambda^2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Posteriormente multiplicamos cada fila j -ésima, $j = 1, 2, \dots, n - 1$ por λ^{n-j} y lo sumamos a la última fila y finalmente multiplicamos la primera columna por -1 y la colocamos en la última columna. Entonces obtenemos

$$\text{diag}(1, 1, \dots, 1, \lambda^n).$$

Entonces, los factores invariantes de H son los polinomios $\lambda^n, 1, \dots, 1$.

Proponemos a continuación otra forma de calcular los factores invariantes de una matriz, según establece el siguiente resultado (Ver [10] pag. 92).

Teorema 1.5.7 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ cuyo polinomio característico descompone en producto de factores lineales. Para cada $j = 1, 2, \dots, n$, Denotamos por $d_j(\lambda) = d_{j_A}(\lambda)$ el polinomio mónico que es máximo común divisor de todos los menores $j \times j$ de la matriz polinómica $A - \lambda I_n$. Sea también $d_0 \equiv 1$. Entonces los cocientes*

$$\frac{d_{n-j+1}(\lambda)}{d_{n-j}(\lambda)}, j = 1, 2, \dots, n - 1$$

son polinomios y son los factores invariantes de A .

Definición 1.5.8 *Sea A una matriz cuadrada de orden n con un único autovalor λ definimos $\gamma_j(A)$ como el grado del polinomio $d_j(\lambda)$.*

Como consecuencia del Teorema anterior, los grados de los polinomios $d_j(\lambda)$ en la definición anterior son invariantes por conjugación. Es decir, si P una matriz inversible de orden n entonces $\gamma_j(A) = \gamma_j(P^{-1}AP)$.

1.6. Algunos lemas técnicos

En este epígrafe vamos a enunciar y probar algunos lemas técnicos sobre matrices y ecuaciones matriciales que serán utilizados en los capítulos siguientes.

El primero es un lema sobre soluciones de una ecuación matricial que es la clave para hacer una separación de variables en un sistema lineal de EDOs cuando hay varios autovalores (“Splitting Lemma”, ver sección 2.4.1 más abajo).

Los siguientes resultados son más particulares de la demostración que en esta memoria proponemos sobre el proceso de Turtitin y que sigue las líneas de Wasow. En ellos se hace uso de matrices de una forma particular que definimos más abajo como “matriz especial”.

Lemma 1.6.1 *Sea K un cuerpo. Sean $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K), B \in \mathcal{M}_{m,m}(K)$ matrices cuadradas con coeficientes en K . Consideremos la ecuación matricial*

$$AX - XB = 0$$

en la incógnita $X \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$. Entonces:

- (i) Si A, B tienen algún autovalor común en K , existen soluciones $X \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ no nulas de la ecuación.
- (ii) Recíprocamente, si las matrices A, B no tienen autovalores en común en \bar{K} (clausura algebraica de K), entonces la única matriz $X \in \mathcal{M}_{n,m}(\bar{K})$ solución de la ecuación anterior es la matriz nula.

Demostración .- Supongamos que A y B tienen el autovalor λ_0 en común. Entonces la traspuesta B^T también tiene el autovalor λ_0 . Sean v, w autovectores de A, B^T , respectivamente, asociados al autovalor λ_0 . Si escribimos v, w como vectores columna, tenemos

$$Av = \lambda_0 v, B^T w = \lambda_0 w$$

La segunda ecuación implica que $w^T B = \lambda_0 w^T$. Se comprueba que la matriz $X = vw^T$ es no nula, de tamaño $n \times m$ y que satisface la ecuación.

Recíprocamente supongamos que A y B no tienen autovalores en común. Sea X una matriz $n \times m$ solución de la ecuación, veamos que $X = 0$. Sea w un autovector

de la matriz B correspondiente a un autovalor λ_0 . Multiplicando la ecuación a la derecha por w tenemos

$$AXw - \lambda_0 Xw = 0$$

Como λ_0 no es un autovalor de A tenemos que $Xw = 0$. Si B tiene m autovectores linealmente independientes, es decir si B es diagonalizable, entonces $X = 0$. En cualquier caso existe un conjunto de m autovectores generalizados linealmente independientes de B (por ejemplo las columnas de una matriz que conjuga B a su forma normal de Jordan).

Esto puede ser caracterizado por la propiedad de que si λ es un autovalor de B y w su correspondiente autovector generalizado entonces

$$(B - \lambda I)^p = 0$$

para algún entero positivo p .

Nótese que si X es una solución de $AX - XB = 0$, entonces, para cada $\lambda \in \overline{K}$ y cada $p > 0$ se tiene

$$(A - \lambda I_n)^p X = X(B - \lambda I_m)^p.$$

Si $\lambda \in \overline{K}$ es un autovalor de B y w es un autovector generalizado tal que $(B - \lambda I)^p w = 0$ para $p > 0$ (que dependerá de w), tenemos

$$(A - \lambda I_n)^p Xw = 0.$$

Como λ no es un autovalor de A , la matriz $(A - \lambda I_n)^p$ no es singular, por lo tanto Xw debe ser cero. Entonces la ecuación $Xz = 0$ para z es satisfecha por m autovectores generalizados linealmente independientes de B , lo cual sólo es posible si $X = 0$. \square

Definición 1.6.2 Sea $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ y elijamos r números naturales n_j con $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq n$. Diremos que es **especial** si las únicas entradas no nulas de A pueden estar únicamente en las filas que ocupan las posiciones n_1, \dots, n_r . Cuando $n = n_1$, hablaremos simplemente de matriz especial.

Lemma 1.6.3 Dadas H, T matrices deslizantes de tamaños h, t respectivamente y dada una matriz A de tamaño $h \times t$, existe una matriz X de tamaño $h \times t$ de modo que $HX - XT + A$ es especial (h -especial).

Demostración .- Para probar el lema, nos planteamos la ecuación

$$HX - XT = M,$$

donde M es una matriz de h filas y t columnas con las primeras $h - 1$ filas vectores constantes dados y la última fila son variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$. Veamos que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ pueden ser determinados únicamente de tal forma que la ecuación $HX - XT = M$ para la matriz X h -por- t tiene solución. Esto probará el lema. Sea $X = (x_{ij})$. Entonces

$$HX - XT = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2t} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3t} \\ & & \cdots & & \\ x_{h1} & x_{h2} & x_{h3} & \cdots & x_{ht} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1t-1} \\ 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2t-1} \\ & & \cdots & & \\ 0 & x_{h-11} & x_{h-12} & \cdots & x_{h-1t-1} \\ 0 & x_{h1} & x_{h2} & \cdots & x_{ht-1} \end{pmatrix}$$

Comenzamos resolviendo las ecuaciones escalares por la primera columna por sustitución. Si $M = (m_{ij})$ con $(i, j) \in \{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, t\}$ tenemos que $x_{j+1,1} = m_{j1}$ para $j = 1, 2, \dots, h - 1$ con lo que hemos elegimos de forma única $x_{21}, x_{31}, \dots, x_{h1}$ para que verifiquen las ecuaciones. Esto determina de forma única las $h - 1$ últimas entradas en la segunda columna de XT ya que son las variables que acabamos de calcular.

Continuamos con las entradas $x_{32}, x_{42}, \dots, x_{h2}$ en la segunda columna de HX , estas entradas son determinadas de forma única por $x_{j+12} = m_{j2} + x_{j1}$ para $j = 2, 3, \dots, h - 1$ ya que las variables x_{j1} se determinaron de forma única en el paso anterior.

Continuando con este procedimiento podemos resolver todas las entradas que están en la diagonal y debajo de ella, excepto para la última fila en la que hay valores numéricos que determinan los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$.

Continuamos eligiendo $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1t-1}$ arbitrariamente, determinando con ello el resto de valores de la primera fila de HX . Esto determina las entradas restantes de la segunda fila de XT , cuya información es utilizada para determinar las entradas de la segunda fila de HX . Podemos continuar con el proceso hasta determinar todas las variables. \square

Proponemos ahora un segundo lema técnico.

Lemma 1.6.4 *Sea A una matriz de orden n con un único autovalor α y tal que $A = \text{Bloq}(A_{ij})$ es una matriz triangular inferior por bloques (n_1, \dots, n_s) , tal que los*

bloques diagonales de $A - \alpha I_n$ son de la forma

$$A_{ii} - \alpha I_{n_i} = H_i + T_i,$$

con H_i matrices deslizantes y T_i matrices especiales cuadradas de tamaño n_i . Entonces $A - \alpha I_n$ es conjugada de una matriz Bloq(B_{ij}) triangular inferior por bloques (del mismo tamaño que A), con $B_{ii} = H_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, s$.

Demostración .- $A - \alpha I_n$ tiene un único autovalor y este es cero y como

$$\det(A - \alpha I_n - \lambda I_n) = \prod_{j=1}^s \det(A_{jj} - \alpha I_{n_j} - \lambda I_{n_j}) = \lambda^n$$

entonces $\det(A_{jj} - \alpha I_{n_j} - \lambda I_{n_j}) = (-1)^{n_j} \lambda^{n_j}$. Entonces $A_{jj} - \alpha I_{n_j}$ tiene un único autovalor y este es cero, por lo que $\det(A_{jj} - \alpha I_{n_j}) = 0$. Esto implica que $rg(A_{jj} - \alpha I_{n_j}) \leq n_j - 1$.

Por otro lado el menor de orden $n_j - 1$ formado por las $n_j - 1$ últimas columnas y las $n_j - 1$ primeras filas tiene determinante igual a 1, en particular $rg(A_{jj} - \alpha I_{n_j}) = n_j - 1$, entonces existe P_j inversible de orden n_j tal que $P_j(A_{jj} - \alpha I_{n_j})P_j^{-1} = H_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, s$. Entonces consideramos la matriz

$$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_s.$$

Al hacer $P(A - \alpha I_n)P^{-1}$ obtenemos la matriz deseada. □

Propondremos ahora un tercer lema técnico que aparece en el libro de Wasow (páginas 108 – 110). Hemos querido reproducirlo aquí por ser clave en la prueba del Teorema de Turrutin. Consideramos las matrices definidas por bloques:

$$H - \lambda I = \begin{pmatrix} H_1 - \lambda I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 - \lambda I & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_s - \lambda I \end{pmatrix}$$

y

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} H_1 - \lambda I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & H_2 - \lambda I & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & H_3 - \lambda I & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ A_{s1} & A_{s2} & A_{s3} & \dots & H_s - \lambda I \end{pmatrix}$$

donde H_i son matrices deslizantes de orden n_i y A_{ij} son matrices de orden $n_i \times n_j$ especiales. Vamos a comparar $d_{j_H} = d_{j_H}(\lambda)$ y $d_{j_A} = d_{j_A}(\lambda)$.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que el orden de estos bloques está en orden ascendente

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_s.$$

Lemma 1.6.5 *Sea $s > 1$ y sean $\gamma_j(H)$ y $\gamma_j(A)$ los grados de d_{j_H} y d_{j_A} respectivamente como han sido definidos en 1.5.8. Entonces*

$$\gamma_j(A) \leq \gamma_j(H), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Además, si alguno de los bloques A_{uv} de A con $u > v$ es no nulo, entonces existe al menos un $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\gamma_{j_0}(A) < \gamma_{j_0}(H)$.

Demostración. - Observemos primero que los polinomios d_{j_H} y d_{j_A} son invariantes bajo transformaciones elementales. Podemos aplicar transformaciones elementales a $H_j - \lambda I$ para obtener una matriz en forma diagonal (ver ejemplo 1.5.6):

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^{n_j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1.2)$$

y n_j es la dimensión de H_j . Por lo tanto podemos transformar $H - \lambda I$ en

$$\tilde{H}(\lambda) = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s). \quad (1.3)$$

Aplicando las mismas transformaciones a $A - \lambda I$ obtenemos la nueva matriz:

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \Lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \Lambda_3 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ \tilde{A}_{s1} & \tilde{A}_{s2} & \tilde{A}_{s3} & \dots & \Lambda_s \end{pmatrix}.$$

Todas las entradas \tilde{A}_{jk} son polinomios en λ . Podemos asumir que todas las entradas de \tilde{A}_{jk} son cero excepto la esquina del lado derecho debido a la forma de Λ_j , ya que mediante transformaciones elementales podemos conseguirlo. A esta entrada de \tilde{A}_{jk} , que puede ser no nula, la denotaremos por $\Phi_{jk}(\lambda)$. Además tenemos que al menos

un $\Phi_{jk}(\lambda)$ es no nulo, ya que $\Phi_{jk}(\lambda)$ sólo depende de las entradas de la última fila de \tilde{A}_{jk} y tenemos que $\Phi_{jk}(\lambda)$ es nulo si y sólo si \tilde{A}_{jk} es nula y esto no es cierto para todo j, k .

Realizando transformaciones elementales, si fuera necesario, podemos hacer que el grado de $\Phi_{jk}(\lambda)$ sea menor que n_k y por lo tanto menor que n_j , ya que $k < j$.

Para completar la prueba es suficiente con construir, para algún valor de j , un menor no nulo de $\tilde{A}(\lambda)$ cuyo grado sea menor que $\gamma_j(H)$. Para hacer esto sea l el menor entero tal que uno de los polinomios Φ_{kl} , $k = l + 1, l + 2, \dots, s$ es no nulo. Consideramos la submatriz:

$$\Gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{n_l} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_{l+1,l} & \lambda^{n_{l+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_{l+2,l} & \Phi_{l+2,l+1} & \lambda^{n_{l+2}} & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ \Phi_{s,l} & \Phi_{s,l+1} & \Phi_{s,l+2} & \cdots & \lambda^{n_s} \end{pmatrix}.$$

Está formada por filas y columnas de $\tilde{A}(\lambda)$ que no contienen ningún otro elemento distinto de cero. El mínimo grado de los menores de orden uno de $\Gamma(\lambda)$ tiene grado menor que n_l , porque todo $\Phi_{jk}(\lambda)$ en la primera columna de $\Gamma(\lambda)$ tiene grado menor que n_l . Entonces por el Teorema 1.5.7 tenemos que $\Gamma(\lambda)$ es equivalente a una matriz diagonal:

$$\tilde{\Gamma}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{p_l} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{p_{l+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{p_{l+2}} & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^{p_s} \end{pmatrix}$$

con $p_l \leq p_{l+1} \leq \cdots \leq p_s$ y $p_l < n_l$. Las transformaciones elementales que cambian $\Gamma(\lambda)$ en $\tilde{\Gamma}(\lambda)$, cuando se aplican a la matriz completa de $\tilde{A}(\lambda)$, no producen otros cambios sobre $\tilde{A}(\lambda)$ porque $\Gamma(\lambda)$ contiene todos los elementos no nulos de las filas y columnas correspondientes. Por lo tanto $\tilde{A}(\lambda)$ es equivalente a

$$\tilde{\tilde{A}}(\lambda) = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{l-1}, \tilde{\Lambda}_l, \tilde{\Lambda}_{l+1}, \dots, \tilde{\Lambda}_s)$$

donde

$$\tilde{\Lambda}_k = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \lambda^{p_k}), k = l, l + 1, \dots, s.$$

Ahora podemos ver fácilmente por las ecuaciones (1.2) y (1.3) que

$$d_{n-s+l,H}(\lambda) = \lambda^{n_1+n_2+\cdots+n_l}$$

i.e.

$$\gamma_{n-s+l}(H) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l.$$

El polinomio $d_{n-s+l,H}(\lambda)$ es, en si mismo, un menor de $\tilde{H}(\lambda)$, es el formado por el cruce de las $s - l$ filas y columnas que contienen a los elementos diagonales $\lambda^{n_{l+1}}, \lambda^{n_{l+2}}, \dots, \lambda^{n_s}$. El correspondiente menor de $\tilde{A}(\lambda)$ es $\lambda^{n_1+n_2+\cdots+p_l}$ que es de menor grado que $\gamma_{n-s-l}(H)$. \square

Capítulo 2

Sistemas meromorfos de ecuaciones diferenciales lineales

2.1. Definiciones básicas

Denotemos por \mathbb{K} o bien el cuerpo de los números complejos \mathbb{C} ó el cuerpo de números reales \mathbb{R} .

Sea $K = \mathbb{K}((x))$ el cuerpo de las series meromorfas en la variable x y con coeficientes en \mathbb{K} . Esto es, K es el cuerpo de cocientes del anillo $\mathbb{K}[[x]]$ de series formales en la variable x con coeficientes en \mathbb{K} .

Consideramos K como cuerpo valorado con la valoración estándar $\nu : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ que resulta de extender el orden usual de series formales. Concretamente sea $f(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ una serie formal no nula que podemos escribir de la forma

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j.$$

entonces el *orden* de $f(x)$ es el entero no negativo $m = \text{ord}(f(x)) \in \mathbb{N}$ más pequeño tal que $f_m \neq 0$.

Si $a(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \in K$, con $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ no nulas, la valoración ν está definida por

$$\nu(a(x)) = \text{ord}(f(x)) - \text{ord}(g(x)).$$

Por otro lado, consideramos K como cuerpo diferencial con la derivada usual $' = \frac{d}{dx}$. Dentro de K tenemos ciertos subcuerpos que se consideran habitualmente, que son subcuerpos valorados y diferenciales para las restricciones de ν y de $'$:

1. El cuerpo de *fracciones racionales* $\mathbb{K}(x)$, cuerpo de fracciones del anillo de polinomios $\mathbb{K}[x]$.
2. El cuerpo de *series meromorfas convergentes* $K_c = \mathbb{K}(\{x\})$, cuerpo de fracciones del anillo $\mathbb{K}\{x\}$ de series de potencias convergentes.

Nótese que $K = \mathbb{K}[[x]][x^{-1}]$ y que $K_c = \mathbb{K}\{x\}[x^{-1}]$, sin embargo, $\mathbb{K}[x][x^{-1}] \subset \mathbb{K}(x)$, pero la contención es estricta. El conjunto $\mathbb{K}[x][x^{-1}]$ es un subanillo diferencial de K , llamado el anillo de series *meromorfas polinómicas*, pero no es un subcuerpo.

Para cada número natural n no nulo, denotaremos por $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n(\mathbb{K})$ al conjunto de *sistemas lineales homogéneos de n ecuaciones diferenciales ordinarias meromorfas* (complejas o reales, dependiendo de si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Esto es, al conjunto de los sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$Y' = A(x)Y \tag{2.1}$$

donde Y es un vector columna $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^t$ de n variables y $A(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ es una matriz cuadrada $n \times n$ con coeficientes en el cuerpo de series meromorfas. De manera natural, identificamos \mathcal{F}_n con el K -espacio vectorial $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$. Así pues usaremos expresiones como “el sistema $A(x)$ cuando $A(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ”, o “el sistema de matriz $A(x)$ ”, etc.

Nota sobre la notación.- Cuando la carga de notación en una expresión así lo aconseje, usaremos simplemente A para denotar el sistema $A(x)$; esto es $A = A(x)$, queriendo indicar que A es una matriz de series meromorfas en la variable x aunque esta variable no esté totalmente explícita.

En lo que sigue, un elemento de \mathcal{F}_n se llamará un *sistema lineal de EDOs de tamaño o dimensión n* , ó simplemente un *sistema*.

Para cada sistema $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathcal{F}_n$ denotaremos por

$$\nu(A) = \min\{\nu(a_{ij}(x)) \in \mathbb{Z}, i, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Definición 2.1.1 *Llamaremos sistemas regulares (respectivamente singulares) a aquellos sistemas $A(x)$ de \mathcal{F}_n tal que $\nu(A) \geq 0$ (respectivamente $\nu(A) < 0$). Usaremos la notación \mathcal{F}_n^{reg} para denotar los sistemas regulares y \mathcal{F}_n^{sing} para los sistemas singulares.*

2.1.1. Rango de Poincaré

Definición 2.1.2 Dado un sistema $A(x) \in \mathcal{F}_n$ llamaremos rango de Poincaré del sistema $A(x)$ al número entero definido por

$$q = q(A(x)) = q(A) = -\nu(A) - 1.$$

Por otro lado, es claro que un sistema es singular si y sólo si su rango de Poincaré es no negativo. Conviene señalar que la noción de “rango de Poincaré” suele emplearse sólo referida a sistemas singulares, pues su valor absoluto es irrelevante cuando el sistema es regular. A veces se toma la determinación de poner $q = -1$ para sistemas regulares. Por comodidad para un tratamiento unificado de los resultados que describimos más abajo en los que pudieran aparecer sistemas, hemos preferido adoptar la definición anterior.

Finalmente, en lo que sigue, vamos a ver que hay una gran diferencia (tanto desde el punto de vista de las posibles soluciones, como desde el punto de vista de la manipulación puramente formal) entre los sistemas singulares con rango de Poincaré $q > 0$ y los sistemas singulares con rango de Poincaré $q = 0$ (véase por ejemplo [10, 1]). En algunos trabajos en la literatura, se acostumbra a llamar “singular irregular” a los primeros y “singular regular” a los segundos. Nosotros no usaremos aquí esta terminología, que puede llevarnos a confusión entre la distinción de sistema “singular” y “regular”.

Notación.- Dado un sistema singular de matriz $A(x)$ con rango de Poincaré q , usaremos la notación

$$A(x) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} x^j A_j}{x^{q+1}} \quad (2.2)$$

donde $A_j \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ es una matriz de constantes, de modo que $A_0 \neq 0$. A las matrices A_j les llamaremos *matrices coeficientes* del sistema (de grado j correspondiente). El uso de esta notación es meramente práctico y estético (no utilizar índices negativos para coeficientes de $A(x)$ que van a ser significativos en lo que sigue). Otra justificación viene del hecho de que frecuentemente se escribe (como lo haremos también aquí) el sistema (2.1) en la forma “equivalente”

$$x^{q+1}Y' = x^{q+1}A(x)$$

de modo que $x^{q+1}A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j A_j \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}[[x]])$ es una matriz de series formales (sin polo en $x = 0$).

Si bien esto responde a que ambos sistemas tienen las “mismas soluciones” fuera de $x = 0$, en este capítulo en el que no nos estamos ocupando de soluciones en el

sentido de funciones $Y(x)$ de la variable x , el hecho de escribir los sistemas de una u otra forma es una cuestión puramente de notación.

También, si $A(x) \in \mathcal{F}_n$ es singular y $N \in \mathbb{N}$, hablaremos de la *truncación N -ésima* de $A(x)$ o de N -jet de $A(x)$ para referirnos al sistema

$$J_N(A) = \frac{A_0 + xA_1 + \cdots + x^N A_N}{x^{q+1}} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}[x][x^{-1}]). \quad (2.3)$$

2.1.2. Índice de radialidad

En este apartado introducimos el concepto de índice de radialidad que utilizaremos posteriormente para la demostración del Teorema de Turritin.

Definición 2.1.3 Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ es radial si es múltiplo de la identidad.

Definición 2.1.4 Dado un sistema singular con matriz $A(x) = x^{-(q+1)} \sum_i x^i A_i$ y rango de Poincaré $q \geq 0$ definimos el **índice de radialidad** como el número entero no negativo definido por

$$k = k(A(x)) = k(A) = \min\{q, \max\{l : A_i \text{ es radial para todo } i < l\}\}.$$

Esta noción ha sido usada ya, con esta terminología, o una muy similar, por ejemplo en [4], para campos de vectores analíticos en dimensión tres que poseen una “parte principal” (un jet finito) que se corresponde con un sistema lineal bidimensional de EDOs.

Observación 2.1.5

Si escribimos el sistema con la siguiente notación

$$A(x) = \sum_{j \geq -(q+1)}^{\infty} x^j \tilde{A}_j$$

(que relaciona cada subíndice con el grado del coeficiente correspondiente), entonces tenemos que $k - q - 1$ es igual al mínimo entre -1 y el grado j del coeficiente \tilde{A}_j que verifica \tilde{A}_l es radial para todo $l < j$ y \tilde{A}_j no es radial.

2.2. Equivalencias entre sistemas

En esta subsección introducimos la noción de transformación de gauge que da lugar a equivalencias entre los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales meromorfos. Se trata de un cambio lineal de las variables Y en el sistema mediante una matriz con coeficientes series meromorfas formales en la variable independiente x . Dependiendo del tipo de problema que se quiera tratar y dependiendo de la naturaleza de las soluciones del sistema que se están buscando, se considerarán transformaciones donde los coeficientes de la matriz son series convergentes, racionales o simplemente polinomios. Las transformaciones de gauge asociadas reciben nombres especiales.

Introducimos también las ramificaciones, un tipo de transformaciones que no están incluidas entre las transformaciones de gauge pero que serán necesarias en lo que sigue para poder establecer el Teorema de Turritin más abajo.

Nuestro interés principal en este apartado es estudiar cómo se comportan los jets de orden finito de los sistemas que se obtienen al realizar algunas de estas transformaciones, las transformaciones que más tarde llamaremos admisibles.

2.2.1. Transformaciones de gauge

Sea $T = T(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ una matriz cuadrada con coeficientes en el cuerpo $K = \mathbb{K}[[x]][x^{-1}]$ de series meromorfas formales (reales o complejas) de modo que $T(x)$ sea inversible; esto es $\det(T(x))$ es un elemento no nulo de K .

Definición 2.2.1 *La aplicación $\psi_T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ definida por*

$$\psi_T(A(x)) = T(x)^{-1}A(x)T(x) - T(x)^{-1}T'(x), \quad (2.4)$$

donde $T'(x)$ denota la matriz de derivadas de las entradas de $T(x)$ para la derivación natural, se llama transformación de gauge asociada a la matriz $T(x)$.

La definición (2.4) viene justificada por lo siguiente: si escribimos un sistema $A(x) \in \mathcal{F}$ en la forma $Y' = A(x)Y$ y ponemos $Y = T(x)Z$, considerando tanto las variables Y como las variables Z como un vector columna de tamaño n , entonces obtendremos, al derivar, un nuevo sistema $Z' = \tilde{A}(x)Z$ donde $\tilde{A}(x) = \psi_T(A(x))$.

Nótese que una transformación de gauge es inversible y que

$$\psi_T^{-1} = \psi_{T^{-1}}.$$

En general, la transformación de gauge no preserva el orden, ni el rango de Poincaré, ni el carácter singular-regular.

Algunos casos especiales de transformaciones de gauge son los siguientes:

- Las entradas de la matriz $T(x)$ son series meromorfas convergentes; esto es $T(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}\{x\}[x^{-1}])$. En este caso hablaremos de *transformación de gauge convergente*.
- Las entradas de la matriz $T(x)$ son series formales (o convergentes) y $T(0) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ es inversible. En este caso hablaremos de *transformación de gauge regular formal* (o convergente).
- Las entradas de la matriz $T(x)$ son polinomios; esto es $T(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}[x])$. En este caso hablaremos de *transformación de gauge polinómica* (o simplemente *transformación polinómica*).

Conviene hacer notar que la inversa de una transformación de gauge convergente, regular formal o regular convergente es del mismo tipo convergente, regular formal o regular convergente, respectivamente. Sin embargo, la inversa de una transformación polinómica, incluso siendo polinómica regular, no es en general una transformación polinómica.

Un tipo particular de transformación polinómica que usaremos es el caso en que $T(x)$ es de la forma

$$T(x) = \begin{pmatrix} x^{k_1} & & & \\ & x^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x^{k_n} \end{pmatrix}$$

donde los k_j son números enteros no negativos. La transformación asociada ψ_T se llamará *diagonal monomial*.

Observación.- Geométricamente, una transformación diagonal monomial corresponde a una composición de explosiones locales con centros que son subvariedades lineales en el espacio ($x = 0$) de las variables Y y centradas en el punto infinitamente próximo marcado por el eje x .

Si $T(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ es una matriz diagonal por bloques de la forma $T(x) = T_1(x) \oplus T_2(x)$ con $T_i(x) \in \mathcal{M}_{n_i \times n_i}(K)$ y $n = n_1 + n_2$, entonces escribiremos

$$\psi_{T_1} \oplus \psi_{T_2} := \psi_{T_1 \oplus T_2}.$$

Nótese que si $A(x) = A_1(x) \oplus A_2(x)$ es un sistemas diagonal por bloques de tamaños n_1 y n_2 , entonces esta transformación de gauge simplemente actúa “por bloques”:

$$\psi_{T_1} \oplus \psi_{T_2}(A_1(x) \oplus A_2(x)) = \psi_{T_1}(A_1(x)) \oplus \psi_{T_2}(A_2(x)).$$

Sin embargo, hay que observar que $\psi_{T_1} \oplus \psi_{T_2}$ actúa sobre todos los sistemas n -dimensionales, sean éstos diagonales por bloques o no.

2.2.2. Ramificaciones

En lo que sigue, vamos a necesitar considerar transformaciones de los sistemas que no son gauge y que provienen de cambiar la variable independiente x en una potencia x^r con r un número natural no nulo. La nueva variable independiente se escribiría en términos de la antigua como una raíz entera, lo que nos llevaría a tener que extender el cuerpo de coeficientes del sistema de las series meromorfas K al cuerpo de series meromorfas de Puiseux. Este es el punto de vista tratado por ejemplo en Balser [1]. Aquí hemos preferido mantenernos en el contexto de sistemas meromorfos formales.

Definición 2.2.2 *Sea r un número natural con $r \geq 1$. Llamamos ramificación de orden r (sobre los sistemas lineales n -dimensionales) a la aplicación $R_r : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ definida por*

$$R_r(A(x)) = rx^{r-1}A(x^r). \quad (2.5)$$

Nótese que R_1 es la aplicación identidad.

Como hemos dicho, esta fórmula se obtiene al realizar el cambio de variable $x = w^r$ y reescribir el sistema $Y' = \frac{dy}{dx} = A(x)Y$ en la nueva variable w .

2.3. Transformaciones admisibles

En este apartado vamos a presentar la clase específica de transformaciones de sistemas que usaremos para el proceso de Turrutin, a las que llamaremos transformaciones admisibles. Son algunos tipos muy particulares de transformaciones de gauge polinómicas junto con las ramificaciones.

En un subapartado más abajo establecemos cotas precisas de los órdenes de truncaciones de un sistema original que intervienen en la obtención de un jet determinado del sistema resultante al aplicar estas transformaciones. Posteriormente analizamos algunos resultados relativos a la composición de varias transformaciones admisibles.

2.3.1. Definición de transformaciones admisibles

Fijemos n la dimensión y sea $a \in \mathbb{N}$ un número natural, posiblemente nulo. La *transformación shearing de exponente a* (ó simplemente (n, a) -*shearing* es la transformación de gauge polinómica ψ_{S_a} de \mathcal{F}_n donde $S_a(x)$ es la matriz monomial diagonal:

$$S_a = \text{diag}(1, x^a, x^{2a}, \dots, x^{(n-1)a}). \quad (2.6)$$

Obsérvese que S_a es la identidad cuando $a = 0$.

Veamos el efecto que tiene la transformación ψ_{S_a} sobre un sistema cualquiera de dimensión n . Explícitamente, si la matriz $A(x)$ del sistema se escribe como

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ & & \cdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

entonces

$$\psi_{S_a}(A(x)) = C(x) - x^{-1} \text{diag}(0, a, 2a, \dots, (n-1)a)$$

con

$$C(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & x^a a_{12}(x) & x^{2a} a_{13}(x) & \cdots & x^{(n-1)a} a_{1n}(x) \\ x^{-a} a_{21}(x) & a_{22}(x) & x^a a_{23}(x) & \cdots & x^{(n-2)a} a_{2n}(x) \\ & & \cdots & & \\ x^{-(n-1)a} a_{n1}(x) & x^{-(n-2)a} a_{n2}(x) & x^{-(n-3)a} a_{n3}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Esta transformación deja invariantes los elementos de la diagonal de todas las matrices coeficientes del sistema excepto en el orden -1 y desplaza hacia la izquierda las entradas de las matrices por debajo de la diagonal y hacia la derecha las entradas de las matrices por encima de la diagonal.

También, dados números naturales no nulos n_1, \dots, n_s y dados $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{N}$, la *transformación poly-shearing de tamaño (n_1, \dots, n_s) y exponentes (a_1, \dots, a_s)* es la transformación de gauge polinómica ψ_S en \mathcal{F}_n con $S = S_{a_1}^{n_1} \oplus S_{a_2}^{n_2} \oplus \cdots \oplus S_{a_s}^{n_s}$ con $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$, es decir, $S(x)$ es la matriz diagonal monomial:

$$\begin{pmatrix} S_{a_1}^{n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{a_2}^{n_2} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & S_{a_s}^{n_s} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

donde cada $S_{a_i}^{n_i} = \text{diag}(1, x^{a_i}, x^{2a_i}, \dots, x^{(n_i-1)a_i})$. Ahora definimos

Definición 2.3.1 Una aplicación $\psi : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ decimos que es una transformación admisible (en n variables) si es de alguno de los siguientes tipos:

1. O bien ψ es una transformación de gauge polinómica regular, esto es, $\psi = \psi_P$ con $P = P(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}[x])$ y $\det(P(0)) \neq 0$.
2. O bien ψ es una transformación poly-shearing, esto es $\psi = S$ con tamaños $(n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^s$, y exponentes $(a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N}^s$ con $n = n_1 + \dots + n_s$.
3. O bien ψ es una ramificación, esto es $\psi = R_r$ para algún $r \geq 1$.

2.3.2. Comportamiento de los jets por transformaciones admisibles

En este apartado vamos a analizar el efecto que tienen las transformaciones admisibles sobre truncaciones finitas de las matrices de los sistemas. Más precisamente, estamos interesados en establecer, para cada una de las transformaciones admisibles, cuál es el orden de un jet suficiente de un sistema inicial para obtener un determinado jet del sistema transformado.

Para ello, vamos a ver las truncaciones de un sistema (singular) dentro de un espacio euclídeo de dimensión finita de la siguiente forma.

Sea $A(x) \in \mathcal{F}_n$ un sistema singular con rango de Poincaré $q \geq 0$. Escribimos, como en (2.2)

$$A(x) = \frac{1}{x^{q+1}}(A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \dots), \quad A_i \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}).$$

Escribimos también para cada l , $A_l = (a_{ij}^l)_{1 \leq i, j \leq n}$ donde $a_{ij}^l \in \mathbb{K}$ es la entrada de la matriz A_l que ocupa la fila i -ésima y la columna j -ésima. Con estas notaciones, dado un número natural mayor o igual a 0, consideraremos la truncación $J_N(A(x))$ definida en (2.3) como un punto de $\mathbb{K}^{n^2(N+1)}$ mediante la identificación

$$J_N(A(x)) \leftrightarrow ((a_{ij}^0), (a_{ij}^1), \dots, (a_{ij}^N)).$$

2.3.2.1. Transformación gauge regular

Sea $P(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}[[x]])$ una matriz de series formales tal que $\det(P(0)) \neq 0$ y sea $\psi_P : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ la transformación de gauge regular correspondiente, definida en la sección 2.2.1. Como caso particular, están las transformaciones admisibles del tipo polinómico regular, cuando $P(x)$ es una matriz de polinomios. El comportamiento

de ψ_P en relación con las truncaciones finitas de los sistemas se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2 *Se verifica lo siguiente*

1. La transformación ψ_P preserva el rango de Poincaré, esto es $q(\psi_P(A)) = q(A)$ (en particular preserva el carácter singular/regular de los sistemas)
2. La transformación ψ_P preserva el índice de radialidad, esto es, si $A(x)$ es singular, entonces $k(\psi_P(A)) = k(A)$.
3. Para cada $N \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, existe una aplicación polinómica $\Delta_P^N : \mathbb{R}^{n^2(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2(N+1)}$ de modo que

$$\Delta_{P(x)}^N(J_N(A)) = J_N(\psi_P(A)).$$

Demostración .- Escribimos el sistema $A(x)$ como en (2.2). Sea $P(x) = \sum_{i=0}^r x^i P_i$ una matriz de polinomios con P_0 inversible. Dada una matriz $A(x)$ con rango de Poincaré q tenemos que $q(P(x)A(x)) = q(A) = q$. Esto es cierto ya que

$$P(x)A(x) = x^{-(q+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\{(i,j):i+j=s\}} A_i P_j x^s$$

y como P_0 es inversible $A_0 P_0$ no es nulo y por lo tanto el rango de Poincaré es q . Por otro lado sea $B(x) = \psi_P(A(x)) = P^{-1}(x)A(x)P(x) - P^{-1}(x)P'(x)$ entonces $P(x)B(x) = A(x)P(x) - P'(x)$ y $q(B(x)) = q(P(x)B(x))$, por lo que hemos visto anteriormente, entonces $q(B(x)) = q(A(x)P(x) - P'(x))$. Desarrollamos $A(x)P(x) - P'(x)$ de la forma:

$$A(x)P(x) - P'(x) = x^{-(q+1)} \sum_{s=0}^{\infty} x^s \left(\sum_{\{(i,j):i+j=s\}} A_i P_j - (s-q)P_{s-q} \right)$$

donde el segundo miembro será cero para todo $s < q + 1$ ó $s > r + q$. Como P_0 es inversible tenemos que $A_0 P_0$ no se anula, por lo tanto, el rango de Poincaré de $A(x)P(x) - P'(x)$ es q , entonces $q = q(P(x)B(x)) = q(B(x))$. Esto prueba el punto 1.

Para realizar la prueba del punto 2 como sabemos que el rango de Poincaré no varía, a partir de la ecuación $P(x)B(x) = A(x)P(x) - P'(x)$ podemos igualar coeficientes:

$$\sum_{\{(i,j):i+j=s\}} P_i B_j = \sum_{\{(i,j):i+j=s\}} A_j P_i, \text{ con } s < q + 1.$$

Como A_0, A_1, \dots, A_{k-1} son matrices radiales entonces $A_j = \lambda_j I_n$ para $j = 0, 1, \dots, k-1$. Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que

$$\sum_{\{(i,j):i+j=l\}} P_i B_j = \sum_{\{(i,j):i+j=l\}} P_i \lambda_j I_n, \text{ para todo } l < k.$$

entonces $P_0 B_0 = P_0 \lambda_0 I_n$, como P_0 es inversible, tenemos que $B_0 = \lambda_0 I_n$. Podemos ver que $P_0 B_j = P_0 \lambda_j I_n$ para $j = 1, 2, \dots, k-1$, ya que el resto de elementos son los mismos en los dos miembros de la ecuación por lo que desaparecen y como P_0 es inversible obtenemos que $B_j = \lambda_j I_n$ para $j = 1, 2, \dots, k-1$. La ecuación para B_k queda de la forma:

$$P_0 B_k = A_k P_0$$

como P_0 es inversible tenemos que $B_k = P_0^{-1} A_k P_0$ que no es radial (ya que si fuera radial A_k sería radial).

Para el punto 3 sea $Q(x) = P^{-1}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} x^s Q_s$ definimos la aplicación $\Delta_{P(x)}^N : \mathbb{R}^{n^2(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2(N+1)}$ de la siguiente forma

$$\Delta_{P(x)}^N(A_0, A_1, \dots, A_N) = \left(\sum_{\{(i,j,l):i+j+l=s\}} Q_i A_j P_l - \sum_{t=0}^{s-q-1} (t+1) Q_{s-t-q-1} P_{t+1} \right)_s$$

para $s = 0, 1, \dots, N$ y tal que el segundo miembro se anula para todo $s < q+1$. Obtenemos así el punto 3. \square

2.3.2.2. Transformación shearing

Dado un sistema $A(x) \in \mathcal{F}_n$ escribimos $A(x) = (a_{ij}(x))$ sus entradas. Escribimos también $A(x) = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j A_j$, donde $q = q(A)$ es el rango de Poincaré de $A(x)$. Denotemos por $M_a \subset \mathcal{F}_n$ el subconjunto de sistemas singulares que verifican, para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i > j$,

$$\nu(a_{ij}) \geq -(q+1) + (i-j)a.$$

Proposición 2.3.3 *Sea $\psi_{S_a} : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ la transformación shearing de exponente $a \geq 1$. Se tiene:*

1. *Para cualquier $A(x) \in \mathcal{F}_n^{\text{sing}}$, si $q = q(A)$, entonces $q(\psi_{S_a}(A)) \leq q + (n-1)a$.*

2. Si $A(x) \in M_a$, entonces $q(\psi_{S_a}(A)) \leq q$, Además, si $k(A) > 0$ o si $k(A) = 0$ y A_0 no es nilpotente, entonces $q(\psi_{S_a}(A)) = q$.
3. Para cada $N \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, existe una aplicación polinómica $\Delta^N : \mathbb{R}^{n^2(N+a(n-1)+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2(N+1)}$ tal que, si $A(x) \in M_a$, $q = q(A)$ y $q' = q(\psi_{S_a}(A))$ entonces

$$\Delta^N(J_{N+a(n-1)+1}(A)) = (0, n^{2(q-q')}, 0, J_{N-(q-q')}(\psi_{S_a}(A))).$$

4. Sea $A(x) \in M_a$ y sean $q = q(A)$, $k = k(A)$. Supongamos que se verifica para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i > j$, lo siguiente

$$\nu(a_{ij}) \geq -(q+1) + (i-j+1)a + k.$$

Entonces, denotando $\psi_{S_a}(A) = x^{-(q+1)}(C_0 + xC_1 + \dots)$ se tiene que para $0 \leq j \leq \min\{q, k+a-1\}$, la matriz C_j es diagonal.

Demostración .- Sea $B(x) = \psi_{S_a}(A(x))$, escribimos $B(x) = (b_{ij}(x))$. Vamos a demostrar los diferentes puntos.

Punto 1: Tenemos $\nu(b_{ij}) = \nu(x^{(j-i)a}a_{ij}) = (j-i)a + \nu(a_{ij})$ cuando $i \neq j$. También $b_{jj} = a_{jj} - x^{-1}a(j-1)$, entonces $\nu(b_{ij}) \geq -(n-1)a + \nu(a_{ij})$. Por otro lado, como $q(A) = q$, entonces $\nu(a_{ij}) \geq -(q+1)$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, por lo tanto $\nu(b_{ij}) \geq -(n-1)a - q - 1$ para todo i, j . Esto implica que $q(B) \leq q + (n-1)a$.

Punto 2: Como $A(x) \in M_a$ tenemos que $\nu(a_{ij}) \geq -(q+1) + (i-j)a$ para $i > j$. Igual que antes tenemos que $\nu(b_{ij}) = (j-i)a + \nu(a_{ij})$, entonces $\nu(b_{ij}) \geq (j-i)a - (q+1) + (i-j)a = -(q+1)$ si $i > j$. Es claro que la igualdad también se da si $i \leq j$ pues en tal caso $\nu(b_{ij}) \geq \nu(a_{ij}) \geq -(q+1)$, por lo tanto $q(B) \leq q$. Si $k(A) > 0$ (y por tanto $q > 0$) entonces $A_0 = \lambda_0 I_n$ con $\lambda_0 \neq 0$ y, por tanto, $\nu(a_{jj}) = -(q+1)$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces $\nu(b_{jj}) = \nu(a_{jj}) = -(q+1)$ y $q(B) = q$. Para el caso $k(A) = 0$ y $q > 0$, como A_0 no es nilpotente y como $A(x) \in M_a$, entonces A_0 es triangular superior con elementos no nulos en la diagonal, por lo tanto, existe $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\nu(a_{j_0 j_0}) = -(q+1)$. Obtenemos entonces $\nu(b_{j_0 j_0}) = \nu(a_{j_0 j_0}) = -(q+1)$, por lo tanto $q(B) = q$.

Punto 3: Basta con definir la aplicación $\Delta_{S_a}^N : \mathbb{R}^{n^2(N+a(n-1)+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2(N+1)}$ que envía el vector (a_{ij}^s) , con $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ y $s = 0, 1, \dots, N+a(n-1)$ en el vector b_{uv}^t con $(u, v) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ y $t = 0, 1, \dots, N$, tal que $b_{uv}^t = a_{uv}^{t-(u-v)a} - \varepsilon(u-1)a$, si $t - (v-u)a \geq 0$ y $b_{uv}^t = 0$ en otro caso, donde $\varepsilon = 1$ si $t = q$ y $u = v$ y cero en otro caso.

Punto 4: Tenemos que demostrar que las entradas $c_{ij}(x)$ de la matriz $C(x)$ tienen orden mayor o igual a $k+a-(q+1)$, para todo $j \neq i$.

Si $i < j$, tenemos $\nu(c_{ij}) = \nu(x^{(j-i)a}a_{ij}) = (j-i)a + \nu(a_{ij}) \geq \nu(a_{ij}) + a \geq k + a - (q+1)$. Para el caso $i > j$ tenemos $\nu(c_{ij}) = \nu(x^{(j-i)a}a_{ij}) = (j-i)a + \nu(a_{ij})$ y como $\nu(a_{ij}) \geq -(q+1) + (i-j+1)a + k$ para todo $i > j$ entonces $(j-i)a + \nu(a_{ij}) \geq (j-i)a - (q+1) + (i-j+1)a + k = -(q+1) + k + a$ para todo $i > j$. Por lo tanto el punto 4 queda probado. \square

2.3.2.3. Ramificación

Sea $\psi = R_r$ una transformación de tipo ramificación de orden r . El comportamiento de ψ en relación con las truncaciones finitas de los sistemas se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.4 *Se verifica lo siguiente*

1. $q(R_r(A)) = rq(A)$ (en particular preserva el carácter singular/regular de los sistemas).
2. Si $A(x)$ es singular, entonces $k(R_r(A)) = rk(A)$.
3. Para cada $N \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, existe una aplicación polinómica $\Delta_r^N : \mathbb{R}^{n^2(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2(rN+1)}$ de modo que

$$\Delta_r^N(J_N(A)) = J_{rN}(\psi(A)).$$

Demostración .- Por la ecuación (2.5), se cumple que $R_r(A(x)) = rx^{r-1}A(x^r)$. Por la definición 2.1.2, sabemos que $q(R_r(A(x))) = -\nu(rx^{r-1}A(x^r)) - 1$. Entonces operando

$$q(R_r(A(x))) = -\nu(rx^{r-1}A(x^r)) - 1 = -(r-1 + r\nu(A(x))) - 1 = r(-\nu(A(x)) - 1) = rq.$$

Esto prueba el punto 1.

Para probar el punto 2 veamos como es la matriz $B(x) = R_r(A(x))$ resultante de la transformación. Si $B(x) = x^{-(rq+1)} \sum_{i=0}^{\infty} x^i B_i$ y $A(x) = x^{-(q+1)} \sum_{i=0}^{\infty} x^i A_i$, tenemos que $B_i = rA_{\frac{i}{r}}$, si r divide a i y la matriz nula en otro caso. Por lo tanto la primera matriz no radial de $B(x)$ es $B_{rk} = rA_k$. Entonces $k(R_r(A(x))) = rk(A(x))$.

Para ver el punto 3 basta con considerar la aplicación $\Delta_r^N : \mathbb{R}^{n^2(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2(rN+1)}$ tal que

$$\Delta_r^N(A_0, A_1, \dots, A_N) = (A_0, 0, \dots, \overset{r-1 \text{ veces}}{\dots}, 0, A_1, 0, \dots, \overset{r-1 \text{ veces}}{\dots}, 0, \dots, A_N)$$

\square

2.3.3. El semigrupo de transformaciones admisibles por composición

En el próximo capítulo vamos a necesitar considerar los sistemas que se obtienen tras realizar varias transformaciones admisibles repetidas veces. Podemos hablar entonces del semigrupo de transformaciones generado por las transformaciones admisibles.

Conviene observar que las transformaciones admisibles de tipo polinómico regular o de tipo poly-shearing son inversibles como transformaciones de gauge, pero sus inversas no son en general transformaciones admisibles, ni siquiera una composición de transformaciones admisibles. No obstante, no necesitaremos en esta memoria considerar tales inversas. Por otro lado, las ramificaciones no son biyectivas. Así pues, no podemos hablar del grupo de transformaciones generado por transformaciones admisibles.

En este apartado, vamos a analizar algunos resultados relativos a la composición de varias transformaciones admisibles (es decir, a la estructura del semigrupo) que nos serán útiles más adelante.

La primera observación trivial es que la composición de transformaciones de tipo polinómico regular es de nuevo una transformación de tipo polinómica regular. Más precisamente, si $P(x), Q(x) \in \mathcal{M}_{n \times n} \mathbb{K}[x]$ son tales que $\det(P(0)) \neq 0 \neq \det(Q(x))$, entonces

$$\psi_P \circ \psi_Q = \psi_{PQ}.$$

Lemma 2.3.5 *Sean ψ_P una transformación admisible polinómica y R_b una transformación admisible de tipo ramificación entonces existe una transformación polinómica admisible $\psi_{\tilde{P}}$ tal que $R_b \circ \psi_P = \psi_{\tilde{P}} \circ R_b$.*

Demostración .- Tenemos que probar que para cualquier sistema con matriz $A(x)$ se cumple $R_b \circ \psi_P(A(x)) = \psi_{\tilde{P}} \circ R_b(A(x))$. Por la definición de ψ_P se cumple que para cada sistema con matriz $A(x)$, $\psi_P(A(x)) = P^{-1}(x)A(x)P(x) - P^{-1}(x)P'(x)$, aplicando la ramificación tenemos

$$R_b \circ \psi_P(A(x)) = P^{-1}(x^b)bA(x^b)x^{b-1}P(x^b) - bP^{-1}(x^b)P'(x^b)x^{b-1}.$$

Definimos ahora $\tilde{P} = P(x^b)$ (como $P(0) \neq 0$ entonces $\tilde{P}(0) \neq 0$) por lo que se verifica que

$$\psi_{\tilde{P}} \circ R_b(A(x)) = \psi_{\tilde{P}}(bA(x^b)x^{b-1})$$

Entonces por la definición de $\psi_{\tilde{P}}$

$$\psi_{\tilde{P}} \circ R_b(A(x)) = \tilde{P}^{-1}(x)bA(x^b)x^{b-1}\tilde{P}(x) - \tilde{P}^{-1}(x)\tilde{P}'(x)$$

y como $\tilde{P}(x) = P(x^b)$ obtenemos

$$\psi_{\tilde{P}} \circ R_b(A(x)) = P^{-1}(x^b)bA(x^b)x^{b-1}P(x^b) - bP^{-1}(x^b)P'(x^b)x^{b-1}.$$

□

Lemma 2.3.6 *Sean a entero no negativo, ψ_{S_a} una transformación admisible de tipo shearing y R_b una transformación admisible de tipo ramificación entonces $R_b \circ \psi_{S_a} = \psi_{S_{ab}} \circ R_b$.*

Demostración .- Tenemos que probar que para cualquier sistema con matriz $A(x)$ se cumple $R_b \circ \psi_{S_a}(A(x)) = \psi_{S_{ab}} \circ R_b(A(x))$. Por la definición de ψ_{S_a} se cumple que para cada sistema con matriz $A(x)$, $\psi_{S_a}(A(x)) = (S_a)^{-1}(x)A(x)S_a(x) - (S_a)^{-1}(x)(S_a)'(x)$ aplicando la ramificación obtenemos

$$R_b \circ \psi_{S_a}(A(x)) = (S_a)^{-1}(x^b)bA(x^b)x^{b-1}S_a(x^b) - b(S_a)^{-1}(x^b)(S_a)'(x^b)x^{b-1}.$$

Por otro lado, como $S_a(x) = \text{diag}(1, x^a, x^{2a}, \dots, x^{(n-1)a})$ entonces

$$S_a(x^b) = \text{diag}(1, x^{ab}, x^{2ab}, \dots, x^{(n-1)ab}) = S_{ab}(x) = \psi_{S_{ab}}$$

.

Ahora veamos el valor de $\psi_{S_{ab}} \circ R_b(A(x))$:

$$\psi_{S_{ab}} \circ R_b(A(x)) = \psi_{S_{ab}}(bA(x^b)x^{b-1}) = (S_{ab})^{-1}(x)bA(x^b)x^{b-1}S_{ab}(x) - (S_{ab})^{-1}(x)(S_{ab})'(x)$$

y como $S_a(x^b) = S_{ab}(x)$ obtenemos

$$\psi_{S_{ab}} \circ R_b(A(x)) = (S_a)^{-1}(x^b)bA(x^b)x^{b-1}S_a(x^b) - b(S_a)^{-1}(x^b)(S_a)'(x^b)x^{b-1}$$

□

2.4. Un par de simplificaciones del sistema

En esta sección recogemos dos resultados relacionados. El primero de ellos es bastante clásico y se conoce con el nombre de Splitting Lemma (ver [10, 1]). Básicamente establece que si la matriz inicial A_0 de un sistema meromorfo formal con

rengo de Poincaré al menos 1 puede separarse en dos bloques diagonales con espectros disjuntos, entonces el sistema puede descomponerse en dos subsistemas de dimensiones más pequeñas (correspondientes a las dimensiones de los mencionados bloques de A_0) a través de una transformación de gauge formal.

El segundo resultado es más específico, usado en la particular versión del algoritmo de Turrutin del libro de Wasow [10] y que nosotros usamos en la próxima sección. Esta vez, partiendo del caso contrario al anterior en el que la matriz inicial A_0 es una matriz con un único autovalor pero no diagonalizable, establece que, tras una transformación de gauge formal regular, el sistema se convierte en uno para el cual todas las matrices coeficientes son “especiales” respecto de la estructura de los bloques de Jordan de A_0 , según la definición 1.1.1.

Hemos querido recoger las pruebas completas aquí para hacer una memoria autocontenida por una parte y, por otra, porque estamos interesados en dos aspectos que generalizan estos resultados en una pequeña medida, pero muy importante para nuestros propósitos. Por un lado, la matriz inicial A_0 pasa a ser la matriz A_k donde k es el índice de radialidad del sistema, es decir, A_k es la primera matriz no radial (en las versiones de Wasow, Balser, etc. sobre el proceso de Turrutin, la parte radial se descarta mediante un “shifting” exponencial que nosotros no hacemos). Por otro lado, estamos interesados en especificar versiones de estos resultados con “truncaciones finitas”; esto es, en obtener subsistemas en bloques o sistemas con matrices especiales sólo hasta un determinado jet finito, pero usando sólo transformaciones polinómicas regulares (un tipo de transformación admisible).

2.4.1. Splitting Lemma

Sea $A(x) \in \mathcal{F}^n(\mathbb{K})$ un sistema lineal formal de EDOs meromorfo, donde \mathbb{K} es o bien el cuerpo de los reales \mathbb{R} o bien el cuerpo de los complejos \mathbb{C} . Supongamos que $A(x)$ tiene rango de Poincaré $q \geq 1$ y escribamos

$$A(x) = \frac{1}{x^{q+1}} \sum_{j=0}^{\infty} x^j A_j$$

donde $A_j \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ como en (2.2). Sea $k = k(A)$ el índice de radialidad del sistema.

Teorema 2.4.1 (*Splitting Lemma*)

Supongamos que $k < q$ y que

$$A_k = \text{diag}(A_k^1, A_k^2)$$

donde A_k^1, A_k^2 son matrices cuadradas de órdenes n_1, n_2 respectivamente y de modo que A_k^1, A_k^2 no tienen autovalores en común. Entonces

1. Existe una transformación de gauge formal regular ψ_T de matriz $T(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}[[x]])$ con $T(0) = I_n$ tal que si ponemos $B(x) = \psi_T(A(x))$ y escribimos $B(x) = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j B_j$ entonces se tiene $B_j = A_j$ para $j = 0, 1, \dots, k$ (en particular el rango y el índice de radialidad del sistema $B(x)$ coinciden con los de $A(x)$) y

$$B_j = \text{diag}(B_j^1, B_j^2), \quad \forall j > k,$$

donde B_j^1, B_j^2 son matrices cuadradas con entradas en \mathbb{K} de dimensiones n_1, n_2 respectivamente.

2. (Determinación finita del Splitting Lemma). Para cada $N \geq k$, la truncación $J_N(B(x))$ sólo depende de $J_{N-k}(T(x))$ y $J_N(A(x))$. Más precisamente, si ponemos $T^{N-k}(x) = J_{N-k}(T(x)) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}[x])$ y si $\tilde{A}(x) \in \mathcal{F}_n$, con rango de Poincaré q es tal que $J_N(\tilde{A}(x)) = J_N(A(x))$ entonces, para $\tilde{B}(x) = \psi_{T^{N-k}}(\tilde{A}(x))$ se tiene

$$J_N(\tilde{B}(x)) = J_N(B(x)).$$

Demostración .- Consideremos una transformación de gauge formal regular general ψ_T de matriz

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j T_j, \quad T_0 = I_n$$

y escribamos el sistema transformado $B(x) = \psi_T(A(x))$ como

$$B(x) = \frac{1}{x^{q+1}} \sum_{j=0}^{\infty} x^j B_j$$

Entonces, a partir de la fórmula (2.4), obtenemos por un lado que las partes radiales de $A(x)$ y $B(x)$ coinciden, esto es

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^j A_j = \sum_{j=0}^{k-1} x^j B_j,$$

ya que dichas partes radiales conmutan con cualquier matriz de series formales y por ser $k < q$. Por otro lado, identificando coeficientes tenemos

$$A_k I_n - I_n B_k = 0 \quad (2.10)$$

$$A_k T_r - T_r B_k = \sum_{s=0}^{r-1} (T_s B_{r+k-s} - A_{r+k-s} T_s) + (r+k-q) T_{r+k-q}, \text{ para } r > 1 \quad (2.11)$$

donde en el segundo sumando de la segunda ecuación los términos para los cuales $r+k-q < 0$ no aparecerán.

A partir de estas ecuaciones vamos a ir construyendo recursivamente las matrices T_j para $j > 0$ y las matrices B_j para $j \geq k$. que cumplan lo requerido en la parte 1 del enunciado. De la ecuación (2.10) obtenemos que $B_k = A_k$. La ecuación (2.11) quedará, para $r > 1$, de la forma

$$A_k T_r - T_r A_k = B_{r+k} + H_r \quad (2.12)$$

donde H_r sólo depende de las matrices T_i, A_{j+k}, B_{j+k} con $i < r$ y $j \leq r$. Elegimos para $r \geq 1$ B_{r+k} de la forma

$$B_{r+k} = \begin{pmatrix} B_{r+k}^{11} & 0 \\ 0 & B_{r+k}^{22} \end{pmatrix}$$

donde B_{r+k}^{11} es una matriz cuadrada de dimensión n_1 y B_{r+k}^{22} es una matriz cuadrada de dimensión n_2 y T_r de la forma

$$T_r = \begin{pmatrix} 0 & T_r^{12} \\ T_r^{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces si escribimos la matriz H_r en bloques de los mismos tamaños que la matriz A_k como

$$H_r = \begin{pmatrix} H_r^{11} & H_r^{12} \\ H_r^{21} & H_r^{22} \end{pmatrix}$$

de la ecuación (2.12) y obtenemos las siguientes ecuaciones matriciales

$$\begin{aligned} 0 &= B_{r+k}^{11} + H_r^{11} \\ 0 &= B_{r+k}^{22} + H_r^{22} \\ A_k^{11} T_r^{12} - T_r^{12} A_k^{22} &= H_r^{12} \\ A_k^{22} T_r^{21} - T_r^{21} A_k^{11} &= H_r^{21} \end{aligned}$$

Si conocemos la matriz H_r , entonces por recurrencia, podemos obtener las matrices B_{r+k} y T_r por bloques en la forma expresada anteriormente diagonal por bloques como sigue. Usando las dos primeras ecuaciones, definimos

$$B_{r+k}^{11} = -H_r^{11}$$

$$B_{r+k}^{22} = -H_r^{22}$$

Para encontrar las matrices T_r^{12}, T_r^{21} aplicamos el lema 1.6.1 usando la hipótesis de que A_k^{11} y A_k^{22} no tienen autovalores en común. Esto proporciona las matrices formales $T(x)$ y $B(x)$ y prueba la parte 1 del teorema 2.4.1.

Para probar el punto 2 del teorema 2.4.1 basta con ver que para cada $N \geq k$ y para cada $j \leq N$, B_j sólo depende de T_h con $h \leq N - k - 1$ y A_l con $l \leq N$. Si nos fijamos en la fórmula (2.12) para cada j con $k \leq j \leq N$ tenemos que $A_k T_{j-k} - T_{j-k} A_k = B_j + H_{j-k}$. Además H_{j-k} sólo depende de T_h , A_{h+k} y B_{h+k} con $h < j - k \leq N - k$. Por otro lado, como hemos visto, $j < k$ se cumple $B_j = A_j$. Esto demuestra que para cada $j \leq N$, B_j sólo depende de T_h con $h \leq N - k - 1$ y A_l donde $l \leq N$, lo que prueba la parte 2 del teorema 2.4.1. \square

2.4.2. Obtención de matrices especiales

Sea $A(x) \in \mathcal{F}^n(\mathbb{K})$ un sistema formal meromorfo, donde \mathbb{K} es o bien el cuerpo de los reales \mathbb{R} o bien el cuerpo de los complejos \mathbb{C} . Sea $q = q(A(x))$ el rango de Poincaré de $A(x)$ y escribamos

$$A(x) = \frac{1}{x^{q+1}} \sum_{j=0}^{\infty} x^j A_j$$

donde $A_j \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Sea $k = k(A(x))$ el índice de radialidad del sistema.

Lemma 2.4.2 *Sea $m \in \mathbb{N}_{>0}$ y suponemos que $k < q$ y que A_k tiene un único autovalor λ_0 y que está en forma de Jordan, entonces existe una transformación polinomial con matriz $P^{(m)} = \sum_{j=0}^m x^j P_j$ tal que el cambio $Y = P^{(m)}(x)Z$ transforma el sistema en*

$$x^{q+1} Z' = B^{(m)}(x)Z$$

con $B^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j B_j$ cumpliendo las siguientes propiedades:

1. $B_j = A_j$ para todo $j < k$.

2. $B_k = (D_1 + H_1) \oplus (D_2 + H_2) \oplus \cdots \oplus (D_s + H_s)$ donde $D_j = \lambda_0 I_{n_j}$ y H_j es una matriz deslizante para todo $j \leq s$.
3. Las únicas entradas no nulas de B_j , $k < j \leq m$ se encuentran en la última fila correspondientes a la última fila de los bloques H_j , $j = 1, 2, \dots, s$. Es decir, cada B_j es una matriz $(n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + n_2 + \cdots + n_{s-1}, n)$ -especial (según la Definición en 1.6.2).

Demostración .- Si $m \leq k$ tomamos $P^{(m)}(x) = I_n$ con lo que habríamos terminado. Veamos el caso en que $m > k$.

Realizando de nuevo la transformación del teorema 2.4.1 a la partir de la matriz A_k y escribiendo la ecuación recursiva (2.11) en la forma de la ecuación (2.12) tenemos

$$B_k = A_k, P_0 = I$$

y

$$A_k P_r - P_r A_k = B_{r+k} - K_r$$

donde $K_r \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Escribimos las matrices B_j y P_j en bloques (n_1, \dots, n_s) de la forma $B_j = \text{Bloq}(B_j^{uv})_{1 \leq u, v \leq s}$ y $P_j = \text{Bloq}(P_j^{uv})_{1 \leq u, v \leq s}$. Como A_k es suma directa de s matrices obtenemos las s^2 ecuaciones

$$(D_u + H_u)P_r^{uv} - P_r^{uv}(D_v + H_v) = B_{r+k}^{uv} - K_r^{uv}$$

con $u, v = 1, 2, \dots, s$ y $0 \leq r \leq m$.

Aplicamos ahora el lema 1.6.3 eligiendo todas las entradas de cada B_r^{uv} iguales a cero excepto las de la última fila.

Sólo nos falta ver que se cumple que $B_j = A_j$ para todo $j \leq k$. Procederemos de igual forma que hicimos en la demostración del splitting lema 2.4.1. Como $P^{(m)}(x)B(x) = A(x)P^{(m)}(x) - (P^{(m)})'(x)$ y por la Proposición 2.3.2 sabemos que el rango de Poincaré no varía. A partir de la ecuación anterior podemos igualar coeficientes:

$$\sum_{\{(i,j):i+j=s\}} P_i B_j = \sum_{\{(i,j):i+j=s\}} A_j P_i, \text{ con } s < q + 1.$$

Como A_0, A_1, \dots, A_{k-1} son matrices radiales entonces $A_j = \lambda_j I_n$ para $j = 0, 1, \dots, k-1$. Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que

$$\sum_{\{(i,j):i+j=l\}} P_i B_j = \sum_{\{(i,j):i+j=l\}} P_i \lambda_j I_n, \text{ para todo } l < k.$$

entonces $P_0 B_0 = P_0 \lambda_0 I_n$, como P_0 es inversible, tenemos que $B_0 = \lambda_0 I_n$. Podemos ver que $P_0 B_j = P_0 \lambda_j I_n$ para $j = 1, 2, \dots, k-1$, ya que el resto de elementos son los mismos en los dos miembros de la ecuación por lo que desaparecen y como P_0 es inversible obtenemos que $B_j = \lambda_j I_n$ para $j = 1, 2, \dots, k-1$. \square

Capítulo 3

Forma de Ramis-Sibuya y proceso de Turritin. Caso complejo

3.1. Reducción a forma de Ramis-Sibuya. Enunciado

3.1.1. Sistemas en forma de Ramis-Sibuya

Definición 3.1.1 Sea $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ un sistema lineal de EDO sobre el cuerpo de los números complejos con rango de Poincaré igual a q . Diremos que $A(x)$ que está en **forma de Ramis-Sibuya** si:

1. O bien $q \leq 0$.
2. O bien $q > 0$ y

$$A(x) = x^{-(q+1)} \left(D(x) + \sum_{i=q}^{\infty} x^i A_i \right) \quad (3.1)$$

donde $D(x) = \text{diag}(d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x))$ con cada $d_i \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado a lo sumo $q - 1$, tal que $D(0) \neq 0$.

En la definición anterior, el nombre “Ramis-Sibuya” está justificado por el trabajo [8] de ambos autores sobre la *multisumabilidad* de las soluciones formales de sistemas meromorfos (no necesariamente lineal) de ecuaciones diferenciales ordinarias. En dicho trabajo, consideran de partida un sistema del tipo

$$Y' = x^{-(q+1)} F(x, Y)$$

donde $Y = (y_1, \dots, y_n)$ y F es analítica en todas las variables, para el cual la parte lineal en Y , $A(x) = x^{-(q+1)} \frac{\partial F}{\partial Y}(x, 0)$ se escribe como en la ecuación (3.1).

Vamos a enunciar ahora el resultado principal que presentamos en este capítulo. Se trata, en pocas palabras, de probar que un sistema lineal de EDOs con coeficientes formales meromorfs complejos puede transformarse en un sistema en la forma de Ramis-Sibuya a través de un número finito de transformaciones admisibles.

El resultado se debe originalmente a Turrutin, enunciado en [11]. Aquí recogemos la demostración que aparece en el libro de Wasow [10], añadiendo algunos detalles y clarificando algunos de los argumentos de la inducción que allí se apuntan y que, a nuestro parecer, no están suficientemente explicitados en tal referencia.

Asimismo, como aportación propia al resultado, probamos que el proceso de obtención de la forma Ramis-Sibuya está finitamente determinado en términos de truncaciones finitas del sistema original y explicitamos la cota del orden de la truncación suficiente para poder llevar a cabo la reducción. Lo más significativo es que la cota sólo depende de la dimensión del sistema y del rango de Poincaré q , pero no de la forma inicial del sistema considerado.

3.1.2. Enunciado del Teorema de Turrutin

Teorema 3.1.2 *Sea $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ un sistema lineal singular de EDOs sobre el cuerpo de los números complejos. Denotemos por $q = q(A)$ su rango de Poincaré y por $k = k(A)$ su índice de radialidad. Se tiene:*

1. *Existe un número finito de transformaciones admisibles $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s$ tal que si $\psi = \psi_s \circ \psi_{s-1} \circ \dots \circ \psi_1$, el sistema transformado*

$$B(x) = \psi(A(x))$$

por ψ está en forma de Ramis-Sibuya.

2. *Las transformaciones ψ_1, \dots, ψ_s en el apartado anterior pueden elegirse además verificando lo siguiente. Sea*

$$N = N(n, q, k) = nq - (n - 1)k \tag{3.2}$$

Entonces, si $\tilde{A}(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ es otro sistema con $q(\tilde{A}) = q$, $k(\tilde{A}) = k$ y $J_N(\tilde{A}) = J_N(A)$, entonces, el sistema $\tilde{B}(x) = \psi(\tilde{A}(x))$ verifica

$$q' = q(\tilde{B}) = q(B), \quad J_{q'}(\tilde{B}(x)) = J_{q'}(B(x)).$$

(En particular, $\tilde{B}(x)$ también es un sistema en forma de Ramis-Sibuya).

Una composición ψ como en 1) se dirá que es un *proceso de Turrutin* para el sistema $A(x)$. Cuando ψ verifica además la propiedad enunciada en la parte 2 del enunciado anterior, diremos que ψ es un *buen proceso de Turrutin* para el sistema $A(x)$. Ser un buen proceso de Turrutin se interpreta entonces diciendo que la construcción de un proceso de Turrutin para $A(x)$ sólo depende del jet de orden N de $A(x)$ y que existe un tal proceso de Turrutin que es también un proceso de Turrutin para cualquier sistema que comparta el mismo jet de orden N con $A(x)$.

Obsérvese que la cota N en (4.2) verifica $N \leq nq$ y que, por tanto, existe una cota para el orden de un jet suficiente para la construcción de un proceso de Turrutin que depende sólomente de la dimensión n y del rango de Poincaré q , pero no del sistema original.

Observación 3.1.3

Sea $A(x) \in \mathcal{F}_n$ un sistema singular con coeficientes complejos y sea ψ_P una transformación admisible de tipo polinómico regular. Se tiene:

1. Dada una composición ψ de transformaciones admisibles, ψ es un buen proceso para el sistema transformado $\psi_P(A)$ (esto es, verifica además la propiedad enunciada en la parte 2 del Teorema 3.1.2) si y sólo si $\psi \circ \psi_P$ un buen proceso de Turrutin para $A(x)$. La prueba de esta afirmación es inmediata a partir de la definición y de la Proposición 2.3.2.
2. Si ψ es un buen proceso de Turrutin para $A(x)$, entonces, para cualquier ramificación R_r , la composición $R_r \circ \psi$ es también un buen proceso de Turrutin para $A(x)$.

Para probar esta afirmación, nótese primero que si $B(x)$ es un sistema en forma de Ramis-Sibuya, entonces $R_r(B)$ también está en forma Ramis-Sibuya. Esto prueba que $R_r \circ \psi$ es un proceso de Turrutin para $A(x)$. Por otro lado, sea $q = q(A)$ y $k = k(A)$ el rango de Poincaré y el índice de radialidad del sistema $A(x)$, respectivamente y sea $N = nq - (n-1)k$. Si $\tilde{A}(x)$ es otro sistema tal que $J_N(\tilde{A}) = J_N(A)$, entonces tendremos, por ser ψ un buen proceso para $A(x)$, que $J_{q'}(\psi(A)) = J_{q'}(\psi(\tilde{A}))$, donde $q' = q(\psi(A))$. Pero entonces también ocurre que $J_{rq'}(R_r \circ \psi(A)) = J_{rq'}(R_r \circ \psi(\tilde{A}))$ gracias a la Proposición 2.3.4, lo que muestra la composición $R_r \circ \psi$ es un buen proceso de Turrutin para $A(x)$.

3.2. Algoritmo de Turrutin en el caso complejo. Demostración

3.2.1. Casos triviales

Vamos a tratar primero algunos casos sencillos del Teorema de Turrutin 3.1.2

Caso $n = 1$:

En este caso, todos los coeficientes A_j del sistema son matrices de orden uno, es decir, diagonales y por lo tanto el sistema está ya en forma de Ramis-Sibuya. La identidad es un proceso de Turrutin en este caso, lo que prueba el apartado 1 del Teorema 3.1.2. Por otro lado, nótese que en este caso el índice de radialidad de cualquier sistema singular es igual a su rango de Poincaré, por definición. Esto es, $N(1, q, k) = q$ y el apartado 2 se cumple trivialmente cuando tomamos la identidad como proceso de Turrutin.

Caso $q = 0$:

Si $q = 0$ el sistema $A(x)$ está ya en forma Ramis-Sibuya por definición. Por otro lado, en este caso, necesariamente $k = q = 0$ y se tiene $N(n, q, k) = 0$. El Teorema 3.1.2 se cumple trivialmente tomando $\psi = id$ como proceso de Turrutin.

Caso $k = q$:

Supongamos que el sistema con matriz $A(x)$ verifica $k = k(A(x)) = q(A(x))$. Esto significa que todos los coeficientes A_0, A_1, \dots, A_{q-1} son matrices radiales. Así pues, $A(x)$ ya es un sistema en la forma de Ramis-Sibuya. También se tiene en este caso $N(n, q, k) = q$ y, por lo tanto, el Teorema 3.1.2 se cumple tomando $\psi = id$ como proceso de Turrutin para $A(x)$.

3.2.2. Caso de matriz A_k con varios autovalores. Reducción de la dimensión del sistema

El Teorema 3.1.2 lo vamos a probar por inducción sobre n , la dimensión del sistema. Ya hemos visto en el apartado anterior que para el caso $n = 1$ de sistemas unidimensionales, el resultado es cierto, por lo que ya tenemos el primer paso de la inducción.

En este apartado estudiamos el caso en el que podemos reducir directamente el problema a sistemas con menor dimensión usando el Splitting Lemma (Teorema 2.4.1). Se trata del caso en el que la primera matriz no radial A_k tiene al menos dos autovalores distintos. El caso contrario, A_k tiene un único autovalor, pero no es diagonalizable, requiere más tiempo y será tratado en la sección siguiente.

Sea entonces $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ un sistema lineal singular de EDOs sobre el cuerpo de los números complejos con rango de Poincaré $q = q(A)$ e índice de radialidad $k = k(A)$ de modo que el coeficiente A_k tiene más de un autovalor (y, por tanto, $n > 1$). Suponemos además, teniendo en cuenta los casos triviales que hemos tratado en el apartado anterior, que $0 \leq k < q$.

Debido a que A_k tiene al menos dos autovalores distintos, podemos encontrar una matriz $P_0 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ inversible tal que

$$P_0 A_k P_0^{-1} = \text{diag}(A^{11}, A^{22})$$

donde A^{jj} es una matriz cuadrada de tamaño $n_j < n$ para $j = 1, 2$ y A^{11}, A^{22} no tienen autovalores en común. Considerando la transformación admisible ψ_{P_0} asociada a la matriz P_0 (transformación polinómica regular que deja invariante la parte radial $x^{-(q+1)}(A_0 + xA_1 + \dots + x^{k-1}A_{k-1})$ del sistema), podemos suponer desde el principio que nuestro sistema inicial $A(x)$ cumple que la primera matriz no radial A_k es una matriz diagonal por bloques $\text{diag}(A^{11}, A^{22})$ con las propiedades anteriores. Obsérvese que, usando la Proposición 2.3.2, se tiene que ψ es un proceso de Turrutin para $\psi_{P_0}(A(x))$ verificando las condiciones del Teorema 3.1.2 si y sólo si $\psi \circ \psi_{P_0}$ lo es para el sistema $A(x)$.

Estamos por tanto en las condiciones de poder aplicar el Splitting Lemma, Teorema 2.4.1. Sea $N = N(n, q, k) = nq - (n - 1)k$ como en (4.2). Por el apartado 2 del Teorema 2.4.1, existe una transformación polinómica regular ψ_P de matriz $P = I + \sum_{j=1}^N x^j P_j$ tal que transforma el sistema $A(x)$ en otro sistema con matriz $B(x) = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j B_j$ tal que

$$B_r = B_r^{11} \oplus B_r^{22}$$

donde B_r^{jj} es una matriz cuadrada de orden n_j para $j = 1, 2$ y para todo $r \leq N$. Además se cumple que $q(B) = q$, $k(B) = k$ y $A_j = B_j$ para todo $j < k$.

Si truncamos el sistema con matriz $B(x)$ hasta el orden N obtenemos dos sistemas separados con matrices $\overline{B}^{11} = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^N x^j B_j^{11}$ y $\overline{B}^{22} = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^N x^j B_j^{22}$ con orden n_1 y n_2 , siendo ambas dimensiones n_1 y n_2 estrictamente más pequeñas que n . Aplicamos la hipótesis de inducción a cada uno de estos sistemas. Encontramos entonces sendos procesos de Turrutin para \overline{B}^{11} y \overline{B}^{22} . Es decir, composiciones finitas de transformaciones admisibles $\psi^{11} = \psi_{s_1}^{11} \circ \dots \circ \psi_1^{11}$ y $\psi^{22} = \psi_{s_2}^{22} \circ \dots \circ \psi_1^{22}$ en n_1 y n_2 variables respectivamente tal que transforman los sistemas con matrices \overline{B}^{11} y \overline{B}^{22} en sistemas $\widehat{B}^{11} = \psi^{11}(\overline{B}^{11})$ y $\widehat{B}^{22} = \psi^{22}(\overline{B}^{22})$, respectivamente, que están en forma de Ramis-Sibuya. Además, elegimos los procesos de Turrutin ψ^{11}, ψ^{22} de

$\overline{B^{11}}$ y $\overline{B^{22}}$ respectivos cumpliendo la propiedad adicional enunciada en el apartado 2 del enunciado del Teorema 3.1.2 (es decir, que ψ^{11} y ψ^{22} son buenos procesos de Turrutin para los correspondientes sistemas).

Vamos ahora a construir a partir de ψ^{11} y ψ^{22} un proceso de Turrutin para el sistema original de la siguiente manera. Sean $a_1, a_2, \dots, a_{t_1} \in \mathbb{N}_{>0}$ los órdenes de las ramificaciones distintas de la identidad que aparecen (por ese orden) en la descripción de ψ^{11} como composición de transformaciones admisibles. Sean también b_1, b_2, \dots, b_{t_2} los correspondientes órdenes de las ramificaciones que aparecen en ψ^{22} .

Aplicando los lemas 2.3.5 y 2.3.6 podemos escribir

$$\psi^{11} = \tilde{\psi}^{11} \circ R_{a_{t_1}} \circ R_{a_{t_1-1}} \circ \dots \circ R_{a_1}$$

$$\psi^{22} = \tilde{\psi}^{22} \circ R_{b_{t_2}} \circ R_{b_{t_2-1}} \circ \dots \circ R_{b_1}$$

donde, para $j = 1, 2$, $\tilde{\psi}^{jj} : \mathcal{F}_{n_j} \rightarrow \mathcal{F}_{n_j}$ es una composición de transformaciones admisibles en n_j variables, o bien del tipo polinómicas regulares o del tipo poly-shearing (es decir, sin ramificaciones). Sea $R_1 = R_{a_{t_1}} \circ R_{a_{t_1-1}} \circ \dots \circ R_{a_1} = R_{a_1 \dots a_{t_1}} : \mathcal{F}_{n_1} \rightarrow \mathcal{F}_{n_1}$ y $R_2 = R_{b_{t_2}} \circ R_{b_{t_2-1}} \circ \dots \circ R_{b_1} = R_{b_1 \dots b_{t_2}} : \mathcal{F}_{n_2} \rightarrow \mathcal{F}_{n_2}$ ramificaciones en n_1 y en n_2 variables, respectivamente.

Considerando los sistemas $\tilde{B}^{ii}(x) = R_i(B(x))$ para $i = 1, 2$ la composición $\tilde{\psi}^{ii}$ transforma el sistema $\tilde{B}^{ii}(x)$ en uno en forma de Ramis-Sibuya.

Nótese que si aplicamos una ramificación a un sistema en forma de Ramis-Sibuya este sigue estando en forma de Ramis-Sibuya, por lo que $R_2(\tilde{\psi}^{11}(\tilde{B}^{11}(x)))$ y $R_1(\tilde{\psi}^{22}(\tilde{B}^{22}(x)))$ son sistemas en forma de Ramis-Sibuya.

Aplicando de nuevo los lemas 2.3.5 y 2.3.6 y teniendo en cuenta que en los factores de las composiciones $\tilde{\psi}^{ii}$ no hay ramificaciones, para $i = 1, 2$, existen nuevas composiciones de transformaciones admisibles, ninguna de ellas ramificaciones, Ψ^{ii} , para $i = 1, 2$, de forma que

$$R_j \circ \tilde{\psi}^{ii} = \Psi^{ii} \circ R_j$$

con $i \neq j$ para $i, j = 1, 2$.

Considerando R_1 y R_2 como ramificaciones también en sistemas en n variables (es decir, como aplicaciones de \mathcal{F}_n en sí mismo), definimos finalmente la transformación

$$\Psi = (\Psi_1 \oplus \Psi_2) \circ R_1 \circ R_2 \circ \psi_P : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$$

que es una composición de transformaciones admisibles y que transforma el sistema con matriz $A(x)$ en otro en forma de Ramis-Sibuya.

Por hipótesis de inducción, para $i = 1, 2$, la transformación ψ^{ii} es un buen proceso de Turritin para el sistema \overline{B}^{ii} (verifica la propiedad enunciada en la parte 2 del Teorema de Turritin 3.1.2). Por la Observación 3.1.3, $R_j \circ \psi^{ii}$, con $j \neq i$, también es un buen proceso de Turritin para \overline{B}^{ii} . Por construcción,

$$R_2 \circ \psi^{11} = \Psi^{11} \circ R_2 \circ R_1, \quad R_1 \circ \psi^{22} = \Psi^{22} \circ R_1 \circ R_2$$

y podemos entonces escribir la transformación Ψ también como

$$\Psi = (R_2 \circ \psi^{11}) \oplus (R_1 \circ \psi^{22}) \circ \psi_P.$$

De nuevo por la Observación 3.1.3, Ψ es un buen proceso de Turritin para el sistema original $A(x)$ si y sólo si $(R_2 \circ \psi^{11}) \oplus (R_1 \circ \psi^{22})$ es un buen proceso de Turritin para $\psi_P(A)$ o, lo que es lo mismo, para su truncación $J_N(\psi_P(A)) = \overline{B}^{11} \oplus \overline{B}^{22}$. Ahora bien, teniendo en cuenta que tanto la transformación $(R_2 \circ \psi^{11}) \oplus (R_1 \circ \psi^{22})$ como el sistema $\overline{B}^{11} \oplus \overline{B}^{22}$ son diagonales por bloques de tamaños n_1 y n_2 , para concluir basta probar que se tiene, para $i = 1, 2$ la desigualdad

$$N(n, q, k) \geq N(n_i, q_i, k_i),$$

donde q_i es el rango de Poincaré de B^{ii} y k_i es el índice de radialidad de B^{ii} . Por un lado tenemos que $n_i < n$ y que $q_i \leq q$. Por otro lado, usando la Observación 2.1.5, podemos ver que

$$q_i - k_i \leq q - k.$$

Esto es suficiente para probar que $N(n_i, q_i, k_i) \leq N(n, q, k)$ cuando $k_i \leq k$, sin más que tener en cuenta la definición de $N(n, q, k)$. Supongamos, por el contrario, que, por ejemplo, $k_1 > k$ y que $N(n_1, q_1, k_1) = n_1(q_1 - k_1) + k_1 > N(n, q, k) = n(q - k) + k$. Entonces, se tendrá

$$k_1 - k > n(q - k) - n_1(q_1 - k_1) \geq n(q - k) - n(q_1 - k_1) = n(q - q_1) + n(k_1 - k),$$

lo que obliga, teniendo en cuenta que $q - q_1 \geq 0$, a que $k_1 - k > n(k_1 - k)$, lo cual es imposible.

3.2.3. Caso de matriz A_k con un único autovalor

En el apartado anterior hemos visto que si el primer coeficiente no radial A_k de un sistema tiene al menos dos autovalores, entonces la prueba del Teorema de Turritin 3.1.2 queda reducida a probarlo para sistemas de dimensión más pequeña.

En este apartado examinamos el caso complementario, esto es cuando la matriz A_k tiene un único autovalor, pero no es diagonalizable (no es radial). En el caso de coeficientes complejos en el que estamos, A_k es conjugada a una matriz diagonal por bloques donde los bloques son matrices de Jordan, todos con el mismo autovalor y al menos un bloque de dimensión mayor que 1 (véase el capítulo 1 en el que hemos repasado estos conceptos de Álgebra Lineal).

El objetivo consiste en probar que existe una composición finita de transformaciones admisibles que transforma el sistema original $A(x)$ en otro que está o bien en la situación de alguno de los casos triviales del apartado 3.2.1, o bien en la situación del apartado 3.2.2 (primera matriz no radial con varios autovalores). Para ello, siempre que la matriz A_k tenga un único autovalor, asociaremos un invariante al sistema que toma valores en \mathbb{N}^{n+1} y mostramos que podemos elegir una transformación admisible tal que el sistema transformado, si sigue estando en la situación de este apartado (A_k con un único autovalor), entonces su invariante es menor que el del sistema original para el orden lexicográfico. Esto permitirá probar con toda generalidad la parte 1 del Teorema de Turrutin 3.1.2. La parte 2 la mostramos teniendo en cuenta las estimaciones realizadas en el apartado 2.3.2 sobre el comportamiento de las truncaciones de los sistemas al aplicar las distintas transformaciones admisibles.

3.2.3.1. Definición del invariante $I(A)$

Dado un sistema singular $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ con rango de Poincaré $q = q(A)$ e índice de radialidad $k = k(A)$, escribimos

$$A(x) = x^{-(q+1)}(A_0 + xA_1 + \dots)$$

como en (2.2). Siempre que tengamos $k < q$ (por tanto $q > 0$) y que la primera matriz no radial A_k del sistema tenga un único autovalor, definimos el *invariante* $I(A) \in \mathbb{N}^{n+1}$ como:

$$I(A) = (\gamma_1(A_k), \gamma_2(A_k), \dots, \gamma_n(A_k), q - k),$$

donde para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $\gamma_i(A_k)$ es, como en el apartado 1.6, el grado en la variable λ del máximo común divisor de los menores de orden $i \times i$ de la matriz $A_k - \lambda I_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}[\lambda])$.

3.2.3.2. Definición del exponente g_0

Sea $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ un sistema formal meromorfo en el cuerpo de los complejos \mathbb{C} . Sea $q = q(A(x))$ el rango de Poincaré de $A(x)$ y escribamos

$$A(x) = \frac{1}{x^{q+1}} \sum_{j=0}^{\infty} x^j A_j$$

donde $A_j \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Sea $k = k(A(x))$ el índice de radialidad del sistema con $k < q$ y sea $N = nq - (n-1)k$. Además suponemos que A_k tiene un único autovalor λ_k y que está en forma de Jordan. Suponemos además que todas las matrices A_j son matrices especiales según la estructura de bloques de J , para todo $j > k$ (sus entradas no nulas están sólo en la última fila de los bloques de J). Denotemos también $A(x) = (a_{ij}(x))$.

Consideramos el sistema con matriz

$$\bar{A}(x) = A(x) - x^{-(q+1)}(\lambda_0 - x\lambda_1 - \dots - x^{k-1}\lambda_{k-1} - x^k\lambda_k A_k)I_n = x^{-(q-k+1)} \sum_j x^j \bar{A}_j$$

donde $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ son los autovalores de las $k+1$ matrices A_0, A_1, \dots, A_k .

Como también hemos abstraído el autovalor λ_k de la matriz A_k , para este sistema $\bar{A}_0 = J$ es una matriz nilpotente en forma de Jordan. Escribimos $x^{-(q-k+1)}\bar{A}(x) = (t_{ij}(x))$ y definimos $\alpha_{ij} = \nu(t_{ij})$. Entonces consideramos, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, las rectas (grafos de función lineal en la variable g)

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} + (j-i)g.$$

Estas rectas tienen pendiente entera negativa, nula o positiva según $i > j$ (debajo de la diagonal), $i = j$ (en la diagonal), $i < j$ (encima de la diagonal), respectivamente. El corte de β_{ij} con el eje de ordenadas es el punto $(\alpha_{ij}, 0)$, con ordenada no negativa. Además la bisectriz del primer cuadrante es una de estas rectas $\beta_{i,i+1}$ para algún i (índice de la fila que contiene un elemento no nulo de la matriz J).

Definimos entonces g_0 como el mínimo entre $q-k$ y el valor mínimo de la abscisa de un punto de corte de la bisectriz con una de las rectas β_{ij} de pendiente negativa (en Wasow [10] se toman puntos de corte de la bisectriz con rectas β_{ij} de pendiente no positiva, pero en nuestro planteamiento, las rectas horizontales no juegan papel). Gráficamente quedaría como muestra la figura 3.1.

El exponente g_0 es racional positivo (si $q > k$) y, escribiendo $g_0 = a_0/b_0$ como fracción irreducible, realizaremos la composición “shearing” $\psi_{S_{g_0}} = \psi_{S_{a_0}} \circ R_{b_0}$ de transformaciones admisibles y comprobaremos que $\psi_{S_{g_0}}(A(x))$ está

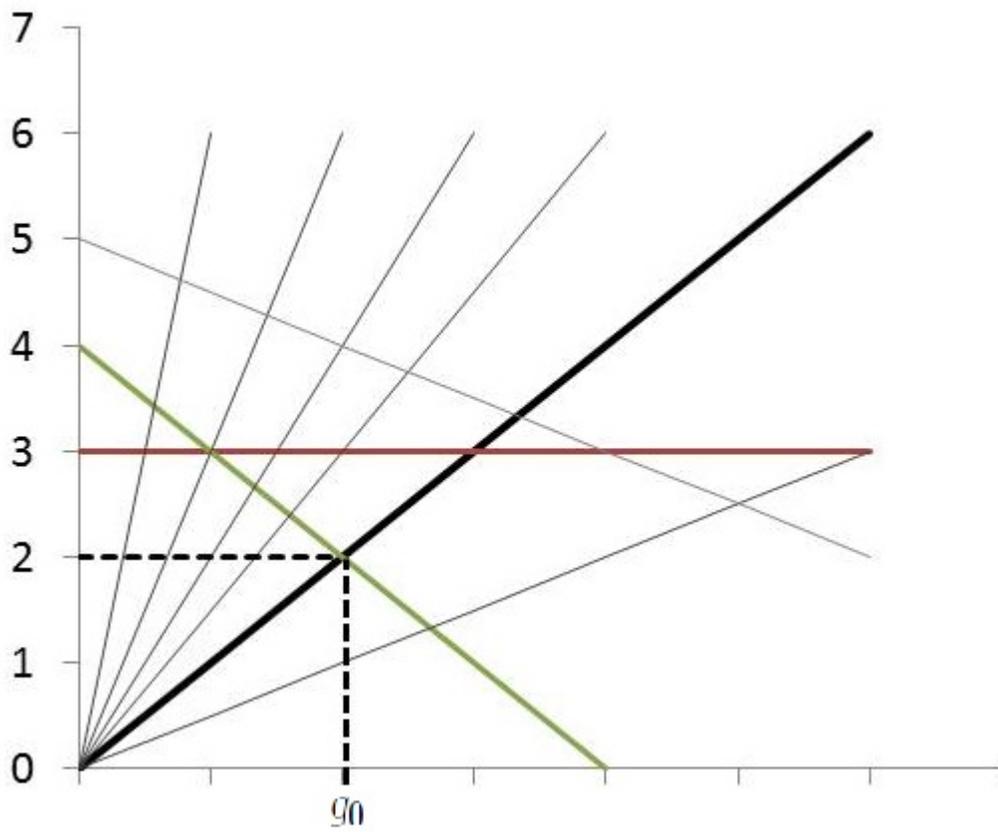


Figura 3.1: Representación de rectas $g \rightarrow \beta_{jk}(g)$

- O bien en uno de los casos triviales 3.2.1,
- O bien en el caso 3.2.2 (primera matriz no radial con varios autovalores),
- O bien con primer coeficiente no radial con un único autovalor y tal que $I(\psi_{S_{g_0}}(A(x))) < I(A(x))$.

Observación 3.2.1

Por la elección hecha, nótese que para cada $i > j$, el punto de corte de la recta β_{ij} con la recta vertical $g = g_0$ tiene una ordenada mayor o igual que g_0 . Por lo tanto, tenemos

$$\alpha_{ij} \geq g_0 + (i - j)g_0.$$

De este modo, tenemos

$$\nu(a_{ij}) = -(q + 1) + \alpha_{ij} + k \geq -(q + 1) + (i - j + 1)g_0 + k.$$

A continuación, vamos a analizar el sistema que resulta al aplicarle al sistema $A(x)$ la composición $\psi_{S_{g_0}} = \psi_{S_{a_0}} \circ R_{b_0}$. En nuestro análisis, distinguimos los casos $g_0 = a_0$ natural y g_0 racional no natural (esto es, $b_0 > 1$), tratados en los siguientes dos párrafos. En el primer caso, dicha composición es simplemente una transformación shearing de exponente a_0 . En el segundo caso, la composición propuesta substituye lo que en Wasow viene a llamarse “shearing con exponente racional” (de ahí la notación usada $\psi_{S_{g_0}}$. Denotemos entonces $B(x) = \psi_{S_{a_0}} \circ R_{b_0}(A(x))$ y sean $q' = q(B(x))$, $k' = k(B(x))$ su rango de Poincaré y su índice de radialidad, respectivamente. Escribimos

$$B(x) = x^{-(q'+1)}(B_0 + xB_1 + \dots).$$

Sea $g_0 = \frac{a_0}{b_0}$ calculado de la forma descrita anteriormente, de modo que a_0, b_0 son enteros positivos sin factor común y tal que $b_0 > 1$ (esto es, g_0 es racional no entero). Sea $B(x) = x^{-(q_0+1)} \sum_{i=0}^{\infty} x^i B_i$ el sistema transformado al aplicar las transformaciones admisibles $S_{a_0} \circ R_{b_0}$ a $A(x)$, es decir, $B(x) = S_{a_0} \circ R_{b_0}(A(x))$, donde q_0 es el nuevo rango de Poincaré. Sea k_0 el índice de radialidad de $B(x)$. Escribimos $B_{k_0} = (B_{ij}^{k_0})$ en bloques de la misma manera que A_k (ver ecuación (1.1)).

Lemma 3.2.2 *Si B_{k_0} tiene un único autovalor λ_{k_0} entonces o bien B_{k_0} es nilpotente y $B_{jj}^{k_0} = H_j$ o bien g_0 es entero.*

Demostración .- Veamos que en el caso de que $g_0 = \frac{a_0}{b_0}$ no es entero, se cumple que las entradas de la diagonal de B_{k_0} son nulas. Sea $\tilde{A}(x) = R_{b_0}(A(x)) = (\tilde{a}_{ij})$, por la Proposición 2.3.4 $q(\tilde{A}) = b_0q$ y $k(\tilde{A}) = b_0k$. Se verifica también, para $i > j$,

$$\nu \tilde{a}_{ij} = -(b_0q + 1) + b_0\alpha_{ij} + b_0k \geq -(b_0q + 1) + (i - j + 1)a_0 + b_0k.$$

Por el punto 4 de la Proposición 2.3.3 al sistema \tilde{A} al aplicarle la transformación $\psi_{S_{a_0}}$ obtenemos que B_j es diagonal, para todo $j < b_0k + a_0$. Como por hipótesis B_{k_0} tiene un único autovalor no puede ser que $k_0 < b_0k + a_0$ ya que de lo contrario una matriz diagonal no radial tendría un único autovalor. Por lo tanto $k_0 \geq b_0k + a_0$. Como la matriz B_{k_0} tiene al menos una entrada no nula por encima de la diagonal entonces $k_0 = b_0k + a_0$.

Por otro lado la transformación shearing $\psi_{S_{a_0}}$ deja invariantes los elementos de la diagonal de las diferentes matrices (salvo quizá la de grado exactamente -1). Sea $\tilde{A}(x) = x^{-(b_0q+1)} \sum_j x^j \tilde{A}_j$. Las únicas matrices A_j que no son nulas son aquellas tal que b_0 divide a j . En particular \tilde{A}_{k_0} es nula ya que b_0 no divide a a_0 . Entonces como $\psi_{S_{a_0}}$ deja invariantes los elementos de la diagonal tenemos que la diagonal de B_{k_0} está compuesta por ceros.

Entonces B_{k_0} tiene traza nula y como tiene un único autovalor, entonces este es cero y por lo tanto la matriz B_{k_0} es nilpotente. Al igual que en el ejemplo 1.2.5, se comprueba que los autovalores de $B_{jj}^{k_0}$ son autovalores de B_{k_0} entonces todos los $B_{jj}^{k_0}$ son nilpotentes. Por otro lado, las entradas no nulas por debajo de la diagonal de $B_{jj}^{k_0}$ deben estar en la última fila, debido a la transformación del lema 2.4.2. Esto es imposible, si $B_{jj}^{k_0}$ es nilpotente (ver Ejemplo 1.2.3). Por lo tanto $B_{jj}^{k_0} = H_j$. \square

3.2.3.3. Caso g_0 natural

Usando las notaciones anteriores, supongamos en este apartado que $g_0 = a_0$ es un número natural. Con la elección hecha de g_0 , podemos probar:

Proposición 3.2.3 *Siendo q', k' el rango de Poincaré y el índice de radialidad del sistema transformado $B(x) = \psi_{S_{a_0}}(A(x))$, se tiene:*

1. $q' \leq q$ y B_j es diagonal para $j \leq k + a_0$.
2. Si $B_{k'}$ tiene un único autovalor $\lambda_{k'}$, entonces la matriz $B_{k'} - \lambda_{k'} I_n$ es conjugada a una matriz triangular inferior por bloques $\text{Bloq}(C_{ij})$ tal que $C_{ii} = H_i$, donde H_i denota una shifting matrix.

Demostración .- Por la observación 3.2.1 $\nu(a_{ij}) \geq a_0(i - j + 1) - (q + 1) + k$ por lo tanto aplicando el punto 4 de la Proposición 2.3.3 tenemos que B_j es diagonal para $j \leq k + a_0$ y como $a_0(i - j + 1) - (q + 1) + k \geq (i - j)a_0 - (q + 1)$ aplicando el punto 2 de la Proposición 2.3.3 tenemos que $q' \leq q$.

Para el punto 2, como $B(x)$ es el resultado de una transformación shearing $\psi_{S_{a_0}}$ que produce una matriz con ecuación (2.8) y como las matrices A_{k+1}, \dots, A_N son especiales, se puede ver que $B_{k'} - \lambda_{k'} I_n$ es triangular inferior por bloques donde la diagonal está compuesta por bloques:

$$D_{k'} = (H_1 + T_1) \oplus (H_2 + T_2) \oplus \dots \oplus (H_s + T_s)$$

donde T_i son matrices especiales de orden n_i y s el número de bloques de $B_{k'}$. Por hipótesis $B_{k'}$ tiene un único autovalor $\lambda_{k'}$, entonces por la Proposición 1.6.4 la matriz $B_{k'} - \lambda_{k'} I_n$ es conjugada de una matriz triangular inferior por bloques $Bloq(C_{ij})$ tal que $C_{ii} = H_i$, donde H_i denota una shifting matriz. \square

Si existe $j_0 \in \{0, \dots, k + a_0 - 1\}$ tal que B_{j_0} no es radial, entonces, como es diagonal, tiene más de un autovalor por lo tanto nos encontramos en el caso 3.2.2). Si B_j tiene un único autovalor para $j < k + a_0$, entonces $k' = k(B) \geq k + a_0$. Por lo tanto el nuevo sistema $B(x)$, o bien se encuentra en alguno de los casos triviales del apartado 3.2.1, o bien la primera matriz no radial $B_{k'}$ tiene más de un autovalor (y está en el caso del apartado 3.2.2), o bien $B_{k'}$ tiene un único autovalor, pero, debido a la Proposición 3.2.3, tenemos que $B_{k'} - \lambda_{k'} I_n$ es conjugada de una matriz triangular inferior por bloques $Bloq(C_{ij})$ tal que $C_{ii} = H_i$, donde H_i denota una shifting matriz. Por lo tanto el número de bloques de $B_{k'}$ es igual al número de bloques que A_k y además $\gamma_i(B_{k'}) \leq \gamma_i(A_k)$ para todo i y por la Proposición 3.2.3 $q' \leq q$ y $k' \geq k + a_0$ (de lo contrario $B_{k'}$ tendría varios autovalores por lo comentado anteriormente). Por lo tanto $q' - k' < q - k$, entonces

$$(\gamma_1(B_{k'}), \gamma_2(B_{k'}), \dots, \gamma_n(B_{k'}), q' - k') < (\gamma_1(A_k), \gamma_2(A_k), \dots, \gamma_n(A_k), q - k)$$

para el orden lexicográfico.

3.2.3.4. Caso de exponente g_0 racional no natural

Sea $g_0 = \frac{a_0}{b_0}$ calculado en el apartado 3.2.3.2 de modo que a_0, b_0 son enteros positivos sin factor común y tal que $b_0 > 1$ (esto es, g_0 es racional no entero). Sea $B(x) = x^{-(g_0+1)} \sum_{i=0}^{\infty} x^i B_i$ el sistema transformado al aplicar las transformaciones admisibles $S_{a_0} \circ R_{b_0}$ a $A(x)$, es decir, $B(x) = S_{a_0} \circ R_{b_0}(A(x))$, donde g_0 es el nuevo

rango de Poincaré. Sea k_0 el índice de radialidad de $B(x)$. Escribimos $B_{k_0} = (B_{ij}^{k_0})$ en bloques de la misma manera que A_k (ver ecuación (1.1)).

En el caso de que B_{k_0} tenga más de un autovalor estaremos en el caso 3.2.2 y si B_{k_0} tiene un único autovalor, entonces por el lema 3.2.2 tenemos que B_{k_0} es nilpotente y además $B_{ii}^{k_0} = H_i$ para todo i .

El caso en que el número de bloques s sea uno, tendríamos que A_k sólo tendría un bloque y por lo tanto al hacer la transformación de tipo S_g obtendríamos un sistema con primera matriz no radial B_{k_0} una shifting matriz, pero al tener elementos no nulos debajo de la diagonal no es nilpotente (ver Ejemplo 1.2.3).

En el caso de que $s > 1$, aplicando el Lema 1.6.5 a la matriz B_{k_0} , tenemos que $\gamma_i(C(x)) \leq \gamma_i(A(x))$ para todo i y además existe i_0 tal que $\gamma_{i_0}(C(x)) < \gamma_{i_0}(A(x))$. Entonces obtenemos que

$$(\gamma_1(C_{k_0}), \gamma_2(C_{k_0}), \dots, \gamma_n(C_{k_0}), q_0 - k_0) < (\gamma_1(A_k), \gamma_2(A_k), \dots, \gamma_n(A_k), q - k)$$

para el orden lexicográfico (Aunque $q_0 - k_0 > q - k$).

3.2.3.5. Determinación del Jet suficiente

Sea $A(x) = x^{-(q+1)} \sum_{i=0}^{\infty} x^i A_i$ la matriz de un sistema con rango de Poincaré $q = q(A(x))$ e índice de radialidad $k = k(A(x))$. Se ha visto, en el apartado 3.2.1, que si estamos en uno de los casos triviales la cota $N = nq - (n-1)k$ se cumple. En el caso de que A_k tenga más de un autovalor se ha visto en el apartado 3.2.2 que también se cumple la cota $N = nq - (n-1)k$. Nos falta ver que se cumple la cota $N = nq - (n-1)k$ en el caso en el que A_k tiene un único autovalor. Por los apartados 3.2.3.3 y 3.2.3.4, siempre hacemos una transformación de la forma $S_a \circ R_b \circ \psi_P$. La transformación ψ_P es la composición de las siguientes transformaciones admisibles polinómicas:

Transformación ψ_{Q_0} con $Q_0 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ tal que $C(x) = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j C_j$ con C_k siendo una matriz de Jordan de A_k .

Transformación $\psi_{P(N)}$ dada por el lema 2.4.2 aplicado al sistema con matriz $C(x)$. Esto es $\psi_P = \psi_{P(N)} \circ \psi_{Q_0} = \psi_{P(N)Q_0}$, de modo que los coeficientes de $\psi_P(A(x)) = \tilde{B}(x) = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j \tilde{B}_j$ para $0 \leq j \leq N$ son matrices especiales relativas a la estructura de bloques de la matriz de Jordan C_k . Nótese que si $b = 1$ entonces R_1 es la transformación identidad. Basta con probar que la cota se cumple al hacer una transformación de este tipo con $g = \frac{a}{b}$ con $b \in \mathbb{N}_{>0}$ (Nótese que puede ser $b = 1$).

Lemma 3.2.4 *Suponemos que A_k tiene un único autovalor λ_k y que $g_0 = \frac{a}{b}$ calculado en el apartado 3.2.3.2. Sean $N(n, q, k) = nq - (n-1)k$, $B(x) = S_a \circ R_b \circ \psi_P(A(x))$*

y sean q' y k' el nuevo rango de Poincaré e índice de radialidad de $B(x)$, respectivamente. Entonces $N(n, q', k') \leq N(n, q, k)$

Demostración .- Sea $\tilde{B}(x) = \psi_P(A(x))$. Por la Proposición 2.3.2, tenemos que el nuevo rango de Poincaré $q(\tilde{B})(x)$ e índice de radialidad $k(\tilde{B})(x)$ son $q = q(\tilde{B})(x)$, $k = k(\tilde{B})(x)$ y además existe una aplicación polinómica $\Delta_{P(x)}^N : \mathbb{R}^{n^2(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2(N+1)}$ de modo que

$$\Delta_{P(x)}^N(J_N(A(x))) = J_N(\psi_P(A(x))).$$

Entonces tenemos que la cota se cumple para la transformación ψ_P .

Al aplicar las transformaciones $S_a \circ R_b$ al sistema con matriz $\tilde{B}(x)$, obtenemos el sistema con matriz $B(x)$. Por las Proposiciones 2.3.4 y 2.3.3, tenemos que para el r -jet de $B(x)$ necesitamos el $m(r)$ -jet de $A(x)$ con

$$m(r) = [r/b + (n-1)g_0].$$

Por la Proposición 2.3.4 tenemos $q' = bq$ y por la Proposición 2.3.3 toda matriz B_j con $j \leq \min\{q, k+a-1\}$ es diagonal. Si existe $j_0 \leq \min\{q, k+a-1\}$ tal que B_{j_0} no es radial, entonces $k' < kb+a$ y en el caso de que B_j sea radial, para todo $j < kb+a$, como la matriz B_{kb+a} tiene al menos una entrada no nula por encima de la diagonal entonces $k' = bk+a$. Por lo tanto se cumple que $k' \leq bk+a$.

Por otro lado,

$$m(N(n, q', k')) = [nq'/b - (n-1)k' + (n-1)g_0]$$

pero

$$[nq'/b - (n-1)k'/b + (n-1)g_0] \leq [nq - (n-1)k - (n-1)a/b + (n-1)g_0]$$

y como

$$[nq - (n-1)k - (n-1)a/b + (n-1)g_0] = [nq - (n-1)k] = N(n, q, k)$$

entonces $m(N(n, q', k')) \leq N(n, q, k)$. \square

Hemos probado que en cualquiera de las situaciones en la que nos encontremos, sólo necesitamos $N = N(n, q, k) = nq - (n-1)k$ matrices del sistema para calcular la siguiente transformación y el siguiente sistema resultante. Entonces, las diferentes transformaciones $\psi = \psi_t \circ \psi_{t-1} \circ \dots \circ \psi_1$ se calculan a partir de las primeras N matrices del sistema $A(x)$. Por lo tanto, si tenemos otro sistema con matriz $C(x)$ tal que $q = q(C(x))$, $k = k(A(x))$ y $J_N(C(x)) = J_N(A(x))$ y sea $\tilde{q} = q(\psi(A(x)))$, entonces se verifica que $\tilde{q} = q(\psi(C(x)))$ y que $J_{\tilde{q}}(\psi(A(x))) = J_{\tilde{q}}(\psi(B(x)))$. Por lo que si el sistema $\psi(A(x))$ está en forma de Ramis-Sibuya, entonces $\psi(C(x))$ también lo está.

3.3. Resumen del algoritmo

Sea S un sistema tal que $(S) \in \mathcal{F}_n^{sing}$ con rango de Poincaré q y con matriz

$$A(x) = x^{-q-1}A_0 + x^{-q}A_1 + x^{-q+1}A_2 + \dots$$

Sea k el índice de radialidad de $A(x)$ entonces A_0, A_1, \dots, A_{k-1} son radiales y A_k no es radial.

Diferenciaremos dos casos uno en el que A_k tiene más de un autovalor y otro en el que A_k tiene un único autovalor. El caso de que A_k tenga más de un autovalor ya le hemos estudiado anteriormente que se resuelve aplicando el splitting lema y la hipótesis de inducción.

Por lo que estudiaremos el caso en el que durante todo el proceso la primera matriz no radial siempre tenga un único autovalor ya que de lo contrario aplicaremos el splitting lema y la hipótesis de inducción sobre la dimensión del sistema.

Consideramos el invariante

$$(\gamma_1(A_k), \gamma_2(A_k), \dots, \gamma_n(A_k), q - k)$$

Aplicamos el lema 2.4.2 con $m = nq$ entonces hemos transformado el sistema en otro con matriz $B(x)$ de la forma:

1. $B_j = A_j$ para todo $j < k$.
2. $B_k = (D_1 + H_1) \oplus (D_2 + H_2) \oplus \dots \oplus (D_s + H_s)$ donde $D_j = \lambda I_{m_j}$ y H_j es una shifting matriz.
3. Las únicas entradas no nulas de B_r , $0 < r \leq m$ se encuentran en la última fila correspondientes a la última fila de los bloques H_k , $k = 1, 2, \dots, s$ y sólo en las columnas correspondientes a los bloques.

Ya podemos calcular g_0 en este punto diferenciaremos dos casos el primero en el que g_0 es entero positivo y el segundo en el que g_0 es racional, es decir, $g_0 = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$.

Supongamos que g_0 es entero positivo entonces bajamos $q - k$. En el caso de que g_0 sea racional con $g_0 \notin \mathbb{N}$ tenemos que o bien la primera matriz no radial del sistema tiene más de un autovalor o ha bajado alguno de los γ_i de forma estricta.

Con lo que al final siempre acabamos el proceso.

3.4. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos del proceso de Turritin.

Ejemplo 3.4.1

Sea $a \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ y sean

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

una shifting matriz de orden 3 y

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sean $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ y $A_0 = H_3 + \lambda_0 I_3$. Consideramos el sistema $A(x) \in \mathcal{F}^3(\mathbb{C})$

$$A(x) = x^{-2}(A_0 + x^3 a T).$$

Este sistema tiene rango de Poincaré $q = 1$ e índice de radialidad $k = 0$.

Comenzamos el proceso de Turritin. Como la primera matriz no radial ya está en forma de Jordan y el resto, hasta la de orden $N = nq - (n-1)k = 3$ son especiales, no tenemos que realizar ninguna transformación para calcular g_0 . Realizando los cálculos de g_0 , obtenemos que $g_0 = 1$ (ya que $\alpha_{31} = 3$, por lo que tenemos la ecuación $g = 3 - 2g$. Entonces $g = 1$). Por lo tanto la transformación admisible, que tenemos que hacer es de tipo shearing S_1 . Realizando la transformación obtenemos un nuevo sistema de la forma:

$$B(x) = x^{-2}(\lambda_0 I_3 + x(aT + H_3))$$

que está en forma de Ramis-Sibuya.

Nótese que si consideramos dos sistemas de la forma $A(x) = x^{-2}(A_0 + x^3 a T)$ y $C(x) = x^{-2}(A_0 + x^3 b T)$ con $a \neq b$ y a, b distintos de cero la transformación a realizar es la misma pero el sistema transformado es diferente, es decir, $J_N(\psi_{S_1}(A(x))) \neq J_N(\psi_{S_1}(C(x)))$. Entonces la cota $N = nq - (n-1)k$ es óptima ya que simplemente modificando la matriz N -ésima el resultado ha cambiado.

Ejemplo 3.4.2

Sea $q > 1$. Consideramos el sistema $A(x) \in \mathcal{F}^3(\mathbb{C})$, con $A(x) = x^{-(q+1)} \sum_{i=0}^{q+2} x^i A_i$, donde A_0, A_1, \dots, A_{q-2} son matrices radiales, $A_{q-1} = H_3 + \lambda_0 I_3$, con H_3 una shifting matriz de orden 3, $A_q = A_{q+1} = 0$ y $A_{q+2} = T$, donde T es de la misma forma que en el ejemplo anterior.

En este caso el sistema tiene rango de Poincaré q e índice de radialidad $k = q - 1$ por lo tanto $N = nq - (n - 1)k = 3q - 2(q - 1) = q + 2$.

Comenzamos el proceso de Turritin. Como la primera matriz no radial ya está en forma de Jordan y el resto, hasta la de orden $q + 2$ son especiales, no tenemos que realizar ninguna transformación para calcular g_0 . Realizando los cálculos de g_0 , obtenemos que $g_0 = 1$ (ya que $\alpha_{31} = 3$, por lo que tenemos la ecuación $g = 3 - 2g$. Entonces $g = 1$). Por lo tanto la transformación admisible, que tenemos que hacer es de tipo shearing S_1 . Realizando la transformación obtenemos un nuevo sistema de la forma:

$$B(x) = x^{-(q+1)} \left(\sum_{i=0}^{q-2} x^i A_i + x^{q-1} \lambda_0 I_3 + x^q (T + H_3) \right)$$

que está en forma de Ramis-Sibuya.

Capítulo 4

Forma de Ramis-Sibuya y proceso de Turritin en el caso real

En este capítulo vamos a enunciar y demostrar una versión del Teorema de Turritin 3.1.2 para sistemas lineales de EDOs meromorfas sobre el cuerpo real. En pocas palabras, establecemos que todo sistema lineal de EDOs meromorfas formales con coeficientes reales $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{R})$ puede reducirse a un sistema escrito en la forma especial de *Ramis-Sibuya real* a través de un número finito de transformaciones admisibles donde tanto el sistema resultante, como las transformaciones utilizadas tienen coeficientes reales, es decir, respetan el cuerpo base real. Un sistema $A(x)$ estará en la forma de Ramis-Sibuya real si todos los coeficientes A_j del sistema de grado j con $j = 0, \dots, q - 1$, siendo q el rango de Poincaré, son diagonales, con posibles bloques 2×2 correspondientes a autovalores complejos conjugados (ver la Definición 4.3.1 más abajo).

Repasando la demostración que hemos hecho en el capítulo precedente del Teorema de Turritin en el caso complejo, observamos que ciertas transformaciones admisibles realizadas pueden hacer aparecer sistemas intermedios con coeficientes complejos aunque el sistema original tenga exponentes reales. Esta eventualidad ocurre básicamente cuando la primera matriz coeficiente del sistema que no es radial, la que hemos llamado A_k , tiene autovalores complejos y, por tanto, no es conjugada a su forma de Jordan compleja a través de una matriz conjugante con entradas reales. Se hace necesario, por tanto, realizar una transformación que la convierta en su forma de Jordan real, con bloques diagonales 2×2 que representan los autovalores complejos, agrupados en pares de autovalores conjugados.

A partir de aquí, deberíamos adaptar las transformaciones de tipo shearing que realizamos posteriormente. Sorteando la dificultad de encontrarse autovalores no

reales de esta manera, cada vez que esto ocurre, es posible repetir la demostración del apartado 3.2 para el caso de sistemas con coeficientes reales. Nuestra argumentación en este capítulo es ligeramente distinta, de manera que hemos preferido realizar la prueba sirviéndonos directamente del caso complejo sin necesidad de tener que entrar en los pormenores de la prueba para adaptarlos al caso real.

La clave está en la Proposición 4.2.2 que probamos más abajo. El resultado establece que si $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{R})$ es tal que la primera matriz coeficiente que no es radial A_k tiene una única pareja de autovalores que son complejos conjugados y no reales y si $A_k = J$ es un bloque de Jordan real (por tanto de dimensión par $n = 2n_1$), entonces, tras una transformación formal regular con coeficientes reales, podemos suponer que todos los coeficientes A_j con $j > k$ son matrices por bloques $(2, 2, \dots, 2)$ (con n_1^2 bloques), donde todos los bloques son matrices de la forma

$$\Lambda_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Además, si fijamos un orden de truncación arbitrario, esta escritura podemos conseguirla para todos los coeficientes de tal truncación a través de una transformación admisible del tipo polinómico regular, con coeficientes reales.

Haciendo corresponder cada una de estas matrices al número complejo $a + ib$, el sistema original queda asociado a un sistema complejo $\bar{A}(x) \in \mathcal{F}_{n_1}(\mathbb{C})$ de dimensión la mitad que el sistema original. Una vez que conseguimos un proceso de Turrutin (complejo) ψ para el sistema $\bar{A}(x)$, las transformaciones de gauge que intervienen en ψ (en n_1 variables con coeficientes complejos) se asocian a transformaciones de gauge en $n = 2n_1$ variables con coeficientes reales a partir de la correspondencia anterior entre números complejos y bloques 2×2 de matrices reales. Conservando las ramificaciones tal y como intervengan en ψ , establecemos de este modo un proceso de Turrutin real para el sistema original $A(x)$.

El caso general de sistema real $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{R})$ para el cual el primer coeficiente no radial puede tener varios autovalores reales o complejos se reduce al caso mencionado anterior reduciendo la dimensión del sistema a través del Splitting Lemma 2.4.1, que es válido tanto para el cuerpo base real como complejo, toda vez que A_k es conjugada, por una matriz inversible real, a una matriz diagonal por bloques que contienen los diferentes autovalores reales o las diferentes parejas de autovalores conjugados.

En todo este capítulo $i = \sqrt{-1}$, la unidad imaginaria.

4.1. \mathbb{C} -matrices reales

Empezamos recordando la correspondencia entre números complejos y ciertas matrices cuadradas 2×2 con entradas reales:

Sea $\Lambda_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Definimos la aplicación $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ como

$$\Phi(a + bi) = \Lambda_{a,b}.$$

La aplicación Φ es un morfismo inyectivo de \mathbb{R} -álgebras, por lo que establece un isomorfismo de anillos entre \mathbb{C} y $\Phi(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ que es un isomorfismo de \mathbb{R} -espacios vectoriales.

Esto nos permite extender Φ al \mathbb{R} -álgebra $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ de matrices cuadradas complejas de dimensión arbitraria n , que denotaremos por la misma letra si no hay lugar a confusión: Definimos la aplicación $\Phi : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ definida por

$$\Phi((a_{uv} + ib_{uv}))_{1 \leq u,v \leq n} = \text{Bloq}(\Lambda_{a_{uv}, b_{u,v}})_{1 \leq u,v \leq n}.$$

Esta aplicación define un isomorfismo de \mathbb{R} -álgebras entre $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ y $\Phi(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}))$.

Definición 4.1.1 Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ es una **\mathbb{C} -matriz** si $A = \Phi(C)$ con $C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$.

Ejemplo 4.1.2

Sea $J \in \mathcal{M}_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ tal que

$$J = \begin{pmatrix} \Lambda_{a,b} & I_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Lambda_{a,b} & I_2 & 0 & \dots \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_{a,b} & I_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Lambda_{a,b} \end{pmatrix}$$

un bloque de Jordan real asociado al autovalor complejo $\alpha = a + ib$, entonces J es una \mathbb{C} -matriz. De hecho, $J = \Phi(M)$ donde

$$M = \begin{pmatrix} a + bi & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a + bi & 1 & 0 & \dots \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a + bi & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a + bi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}).$$

4.2. Obtención de un sistema con coeficientes \mathbb{C} -matrices

En esta sección vamos a probar el resultado anunciado en la introducción de este capítulo sobre la posibilidad de reducir un sistema real a otro en el que las matrices coeficientes son \mathbb{C} -matrices, cuando la primera matriz no radial tiene una única pareja de autovalores complejos conjugados.

Necesitamos primero el siguiente lema:

Lemma 4.2.1 *Sea b un número real distinto de cero y sea $Q \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ cualquiera. Entonces existe una matriz real $X \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que*

$$X\Lambda_{a,b} - \Lambda_{a,b}X + Q$$

es una \mathbb{C} -matriz real (es decir, de la forma $\Lambda_{a',b'}$).

Demostración .- Consideramos la ecuación $\Lambda_{a',b'} = \Lambda_{a,b}X - X\Lambda_{a,b} + Q$ donde las incógnitas son los valores a', b' y la matrix $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Escribiendo $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} bx_{12} + bx_{21} + q_{11} &= a' \\ -bx_{11} + bx_{22} + q_{12} &= -b' \\ bx_{22} - bx_{11} + q_{21} &= b' \\ -bx_{21} - bx_{12} + q_{22} &= a' \end{aligned}$$

Poniendo $u = b(x_{12} + x_{21}), v = b(x_{22} - x_{11})$ reescribimos las ecuaciones como:

$$\begin{aligned} u + q_{11} &= a' \\ v + q_{12} &= -b' \\ v + q_{21} &= b' \\ -u + q_{22} &= a' \end{aligned}$$

que admite las soluciones

$$u = \frac{-q_{11} + q_{22}}{2}, a' = \frac{q_{11} + q_{22}}{2}$$

$$v = -\frac{q_{12} + q_{21}}{2}, b' = \frac{q_{21} - q_{12}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $b \neq 0$ y cómo están definidos los valores u, v , obtenemos que existe una matriz solución X de la ecuación con los valores de a', b' calculados. Esto prueba el lema. \square

Sea $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{R})$ un sistema lineal de EDOs sobre el cuerpo de los números reales. Denotemos por $q = q(A)$ su rango de Poincaré y por $k = k(A)$ su índice de radialidad. Escribimos $A(x) = x^{-(q+1)}(A_0 + xA_1 + \dots)$ con $A_j \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ como en (2.2).

Proposición 4.2.2 *Supongamos que $k < q$ y que la matriz A_k tiene como únicos autovalores una pareja de números complejos conjugados no reales (por lo tanto $n = 2m$ es par). Entonces existe una transformación de gauge meromorfa regular*

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j T_j,$$

con $T_j \in \mathcal{M}_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ para todo j y T_0 inversible tal que el sistema transformado $B(x) = \psi_T(A(x))$ cumple lo siguiente:

1. $q(B) = q$ y $k(B) = k$
2. Si $B(x) = x^{-(q+1)} \sum_{i=0}^{\infty} x^i B_i$, entonces $B_0 = A_0, B_1 = A_1, \dots, B_{k-1} = A_{k-1}$ y B_{k+1}, \dots, B_N son \mathbb{C} -matrices.

Además, esta transformación de gauge $T(x)$ está finitamente determinada en el siguiente sentido Para cada $N \geq k$, la truncación $J_N(B(x))$ sólo depende de $J_{N-k}(T(x))$ y $J_N(A(x))$. Más precisamente, si ponemos $T^{N-k}(x) = J_{N-k}(T(x)) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}[x])$ y si $\tilde{A}(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{R})$, con rango de Poincaré igual a q , es tal que $J_N(\tilde{A}(x)) = J_N(A(x))$ entonces, para $\tilde{B}(x) = \psi_{T^{N-k}}(\tilde{A}(x))$ se tiene

$$J_N(\tilde{B}(x)) = J_N(B(x)).$$

Demostración .- Sean $\lambda_k = a + ib, \bar{\lambda}_k = a - ib$ los autovalores complejos conjugados de la matriz A_k . Por la Proposición 1.3.2, existe una matriz inversible $T_0 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ al que $\tilde{A}_k = T_0^{-1} A_k T_0$ es una \mathbb{C} -matriz de Jordan, esto es, de la forma

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} \Lambda_{a,b} & \varepsilon_1 I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Lambda_{a,b} & \varepsilon_2 I & 0 & \dots \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_{a,b} & \varepsilon_{n-1} I \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Lambda_{a,b} \end{pmatrix} = \Lambda + H$$

donde

$$\Lambda_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \text{diag}(\Lambda_{a,b}, \dots, \Lambda_{a,b})$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon_j = 0$ ó 1 para $j = 0, 1, \dots, n-1$. Sea $\tilde{A}(x) = \psi_{T_0}(A(x)) = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j \tilde{A}_j$ el sistema transformado, donde $\tilde{A}_j = T_0^{-1} A_j T_0$ para cada j .

Proponemos ahora una transformación regular formal con primera matriz la identidad

$$\bar{T}(x) = I + \sum_{j=1}^m x^j \bar{T}_j$$

y ponemos

$$B(x) = \psi_{\bar{T}}(\tilde{A}(x)) = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j B_j.$$

Esta transformación admisible, por la Proposición 2.3.2, deja invariante la parte radial, esto es, $B_0 = \tilde{A}_0, B_1 = \tilde{A}_1, \dots, B_{k-1} = \tilde{A}_{k-1}$.

Igualando términos tenemos, de la misma forma que hicimos en la demostración del Splitting Lemma 2.4.1, $B_k = \tilde{A}_k$ y, para cada $j > k$,

$$B_j = \bar{T}_{j-k} \tilde{A}_k - \tilde{A}_k \bar{T}_{j-k} + Q_j \quad (4.1)$$

donde Q_j es una matriz que sólo depende (de manera algebraica) de $B_s, \tilde{A}_j, \bar{T}_s$ con $0 \leq s < j$.

Veamos que para cada $j > k$ podemos elegir \bar{T}_{j-k} de manera que B_j es una \mathbb{C} -matriz.

Para $j = k+1$, teniendo en cuenta que $\tilde{A}_k = \Lambda + H$, tenemos

$$B_{k+1} = \bar{T}_1 \Lambda - \Lambda \bar{T}_1 + \bar{T}_1 H - H \bar{T}_1 + Q_{k+1}$$

De $\bar{T}_1 \Lambda - \Lambda \bar{T}_1$ obtenemos

$$\bar{T}_1 \Lambda - \Lambda \bar{T}_1 = \text{Bloq}(\bar{T}_{uv}^1 \Lambda_{a,b} - \Lambda_{a,b} \bar{T}_{uv}^1)_{1 \leq u, v \leq m}.$$

Por otro lado, tenemos también

$$\bar{T}_1 H - H \bar{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \bar{T}_{11}^1 & \varepsilon_2 \bar{T}_{12}^1 & \cdots & \varepsilon_{m-1} \bar{T}_{1m-1}^1 \\ 0 & \varepsilon_1 \bar{T}_{21}^1 & \varepsilon_2 \bar{T}_{22}^1 & \cdots & \varepsilon_{m-1} \bar{T}_{2m-1}^1 \\ & & \cdots & & \\ 0 & \varepsilon_1 \bar{T}_{m1}^1 & \varepsilon_2 \bar{T}_{m2}^1 & \cdots & \varepsilon_{m-1} \bar{T}_{mm-1}^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \bar{T}_{21}^1 & \varepsilon_1 \bar{T}_{22}^1 & \cdots & \varepsilon_1 \bar{T}_{2m}^1 \\ \varepsilon_2 \bar{T}_{31}^1 & \varepsilon_2 \bar{T}_{32}^1 & \cdots & \varepsilon_2 \bar{T}_{3m}^1 \\ & & \cdots & \\ \varepsilon_{m-1} \bar{T}_{m1}^1 & \varepsilon_{m-1} \bar{T}_{m2}^1 & \cdots & \varepsilon_{m-1} \bar{T}_{mm}^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Escribimos las matrices $B_{k+1} = \text{Bloq}(B_{k+1}^{uv})_{1 \leq u, v \leq m}$ y $Q_{k+1} = \text{Bloq}(Q_{k+1}^{uv})_{1 \leq u, v \leq m}$ también en bloques 2×2 y tratamos de resolver la ecuación

$$B_{k+1} = \bar{T}_1 \Lambda - \Lambda \bar{T}_1 + \bar{T}_1 H - H \bar{T}_1 + Q_{k+1}$$

por bloques, en la incógnita \bar{T}_1 , de modo que todos los bloques B_{k+1}^{uv} sean \mathbb{C} -matrices.

Por las ecuaciones anteriores, si nos fijamos en el bloque $(u, v) = (m, 1)$ obtenemos

$$B_{k+1}^{m1} = \bar{T}_1^{m1} \Lambda_{ab} - \Lambda_{ab} \bar{T}_1^{m1} + Q_1^{m1},$$

de modo que, aplicando el Lema 4.2.1, encontramos un bloque \bar{T}_1^{m1} para que B_{k+1}^{m1} sea una \mathbb{C} -matriz. Con esta solución, la ecuación anterior para el bloque $(m-1, 1)$ queda

$$B_{k+1}^{m-1,1} = \bar{T}_1^{m-1,1} \Lambda_{ab} - \Lambda_{ab} \bar{T}_1^{m-1,1} - \varepsilon_{m-1} \bar{T}_1^{m,1} + Q_1^{m-1,1}.$$

Aplicando de nuevo el Lema 4.2.1, obtenemos un bloque $\bar{T}_1^{m-1,1}$ válido para conseguir una \mathbb{C} -matriz $B_{k+1}^{m-1,1}$. Usando esta recurrencia, obtenemos todos los bloques \bar{T}_1^{j1} de la primera columna de \bar{T}_1 . A continuación, el mismo procedimiento nos permite obtener todos los bloques \bar{T}_1^{j2} de la segunda columna, empezando por \bar{T}_1^{m2} , después $\bar{T}_1^{m-1,2}$, etc. Y repitiendo el mismo procedimiento para todas las columnas, obtenemos una solución \bar{T}_1 de la ecuación anterior para la cual B_{k+1} es una \mathbb{C} -matriz.

Una vez hemos construido la matriz coeficiente \bar{T}_1 de grado 1 de \bar{T} , vamos obteniendo de manera recursiva los coeficientes $\bar{T}_2, \bar{T}_3, \dots$ usando la ecuación (4.1) para $j = k+2, k+3, \dots$, teniendo en cuenta que esta ecuación es análoga a la que ya hemos tratado para $j = k+1$ y a partir del hecho de que Q_j sólo depende de las incógnitas \bar{T}_s para $s < j - k$, ya calculadas.

Esto demuestra la existencia de la transformación de gauge requerida en la Proposición. La afirmación sobre la dependencia de los jets al final del enunciado de la Proposición es también consecuencia inmediata de las ecuaciones de recurrencia (4.1) y de cómo se han ido construyendo los coeficientes de la transformación de gauge. Los detalles de esta argumentación son como en el caso del Splitting Lemma 2.4.1. \square

4.3. Forma de Ramis-Sibuya y proceso de Turritin en el caso real. Enunciado.

En la siguiente definición introducimos la versión real del concepto de sistema complejo en forma de Ramis-Sibuya que hemos definido en el párrafo 3.1.1.

Definición 4.3.1 Sea $A(x) \in \mathcal{F}^n(\mathbb{R})$ un sistema lineal de EDOs sobre el cuerpo de los números reales con rango de Poincaré q . Diremos que $A(x)$ está en **forma de Ramis-Sibuya real** si:

1. O bien $q \leq 0$.
2. O bien $q > 0$ existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ con $n = 2n_1 + n_2$ de modo que si escribimos

$$A(x) = x^{-(q+1)} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i A_i \right), \text{ con } A_0 \neq 0$$

entonces, para $j = 0, 1, \dots, q-1$, existe una matriz compleja $C_j \in \mathcal{M}_{n_1 \times n_1}(\mathbb{C})$ diagonal de dimensión n_1 y una matriz real $D_j \in \mathcal{M}_{n_2 \times n_2}(\mathbb{R})$ también diagonal de dimensión n_2 tal que

$$A_j = \Phi(C_j) \oplus D_j.$$

Además $A_q = \text{diag}(A_q^1, A_q^2)$ es diagonal por bloques ($2n_1, n_2 >$) de modo que A_q^1 conmuta con $\Phi(C_0) + x\Phi(C_1) + \dots + x^{q-1}\Phi(C_{q-1})$ y A_q^2 conmuta con $D_0 + xD_1 + \dots + x^{q-1}D_{q-1}$.

El resultado principal de este capítulo es la versión para sistemas reales del Teorema de Turritin 3.1.2 que pasamos a enunciar a continuación.

Teorema 4.3.2 Sea $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{R})$ un sistema lineal singular de EDOs sobre el cuerpo de los números reales. Denotemos por $q = q(A) \geq 0$ su rango de Poincaré y por $k = k(A)$ su índice de radialidad. Se tiene:

1. Existe un número finito de transformaciones admisibles $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s : \mathcal{F}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R})$ tal que si $\psi = \psi_s \circ \psi_{s-1} \circ \dots \circ \psi_1$, el sistema transformado

$$B(x) = \psi(A(x))$$

por ψ está en forma de Ramis-Sibuya real.

2. Las transformaciones ψ_1, \dots, ψ_s en el apartado anterior pueden elegirse además verificando lo siguiente. Sea

$$N = N(n, q, k) = nq - (n - 1)k \quad (4.2)$$

Entonces, si $\tilde{A}(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{R})$ es otro sistema con $q(\tilde{A}) = q$, $k(\tilde{A}) = k$ y $J_N(\tilde{A}) = J_N(A)$, entonces, el sistema $\tilde{B}(x) = \psi(\tilde{A}(x))$ verifica

$$q' = q(\tilde{B}) = q(B), \quad J_{q'}(\tilde{B}(x)) = J_{q'}(B(x)).$$

(En particular, $\tilde{B}(x)$ también es un sistema en forma de Ramis-Sibuya real).

4.4. Proceso de Turrutin real. Demostración.

En este apartado vamos a hacer la demostración del Teorema 4.3.2. Partiendo del sistema $A(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{R})$ con rango de Poincaré q e índice de radialidad k , escribimos, como es habitual

$$A(x) = \frac{1}{x^{q+1}}(A_0 + xA_1 + \dots), \quad A_i \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

La demostración usa lo más posible la demostración ya realizada en el caso complejo (Teorema 3.1.2).

4.4.1. Casos triviales

Los casos triviales del Teorema 4.3.2, $n = 1$, $q = 0$, $k = q$ se demuestran exactamente igual que como hemos hecho en la demostración del Teorema de Turrutin para el caso complejo (apartado 3.2.1).

4.4.2. Caso A_k tiene varios autovalores no conjugados

Supongamos que $0 \leq k < q$ y tratemos primero el caso en el que la primera matriz no radial A_k del sistema tiene dos autovalores no conjugados entre sí. Esto es, o bien dos autovalores reales distintos, o bien un autovalor real y otro autovalor complejo, o bien dos parejas distintas de autovalores complejos conjugados.

En este caso, por la Proposición 1.3.2, sabemos que existe una matriz inversible (con entradas reales), P_0 , de modo que

$$P_0^{-1}A_kP_0 = A_k^{11} \oplus A_k^{22}$$

donde las matrices A_k^{jj} son de tamaño n_j con $n_j < n$. Considerando una primera transformación admisible ψ_{P_0} , podemos de hecho suponer que partimos de un sistema para el cual la matriz A_k se escribe en la forma diagonal anterior.

Entonces estamos en las condiciones de aplicar el Splitting Lemma al sistema $A(x)$. Razonamos entonces como en el apartado 3.2.2 donde, en todo caso, se sustituye “coeficientes complejos” por “coeficientes reales” y concluimos el Teorema 4.3.2 en este caso por inducción sobre la dimensión del sistema n .

4.4.3. Caso A_k tiene un único par de autovalores complejos conjugados no reales

Sea $A(x) \in \mathcal{F}_{2n}(\mathbb{R})$ un sistema real de orden $2n$, con rango de Poincaré q e índice de radialidad k , tal que A_k tiene dos autovalores complejos conjugados $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$.

Por la Proposición 1.3.2, A_k es conjugada a una matriz de Jordan real J . Entonces existe $P \in \mathcal{M}_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$, tal que $PA_kP^{-1} = J$. Sea $\tilde{A}(x) = PA(x)P^{-1}$. Por el lema 4.2.2, para $m = N(n, q, k) = nq - (n-1)k$, existe $T(x)$ cambio polinómico real que transforma el sistema $\tilde{A}(x)$ en $B(x) = \psi_T(\tilde{A}(x))$, con el mismo rango de Poincaré $q = q(\tilde{A}(x))$ e índice de radialidad $k = k(\tilde{A}(x))$ y tal que, si $B(x) = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j B_j$, entonces B_0, B_1, \dots, B_N son \mathbb{C} -matrices.

Aplicamos el isomorfismo Φ de anillos a los bloques 2×2 de las matrices B_i entonces transformamos cada matriz B_i en:

$$C_j = \Phi^{-1}(B_j) = \Phi^{-1} \left(\begin{pmatrix} a_{11}^j & -b_{11}^j & a_{12}^j & -b_{12}^j & \dots & a_{1n}^j & -b_{1n}^j \\ b_{11}^j & a_{11}^j & b_{12}^j & a_{12}^j & \dots & b_{1n}^j & a_{1n}^j \\ a_{21}^j & -b_{21}^j & a_{22}^j & -b_{22}^j & \dots & a_{2n}^j & -b_{2n}^j \\ b_{21}^j & a_{21}^j & b_{22}^j & a_{22}^j & \dots & b_{2n}^j & a_{2n}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^j & -b_{n1}^j & a_{n2}^j & -b_{n2}^j & \dots & a_{nn}^j & -b_{nn}^j \\ b_{n1}^j & a_{n1}^j & b_{n2}^j & a_{n2}^j & \dots & b_{nn}^j & a_{nn}^j \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^j + ib_{11}^j & a_{12}^j + ib_{12}^j & \dots & a_{1n}^j + ib_{1n}^j \\ a_{21}^j + ib_{21}^j & a_{22}^j + ib_{22}^j & \dots & a_{2n}^j + ib_{2n}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^j + ib_{n1}^j & a_{n2}^j + ib_{n2}^j & \dots & a_{nn}^j + ib_{nn}^j \end{pmatrix}$$

Con lo que obtenemos un sistema con matriz $C(x) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ de dimensión n con coeficientes en el cuerpo de los complejos. Ahora aplicamos el teorema de Turritin complejo 3.1.2. Entonces existen un número finito de transformaciones admisibles

$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_t$, tal que si $\psi = \psi_s \circ \psi_{s-1} \circ \dots \circ \psi_1$, el sistema transformado

$$G(x) = \psi(A(x))$$

está en forma de Ramis-Sibuya. Ahora aplicamos Φ a cada uno de los coeficientes de la matriz $G(x)$ y obtenemos:

$$F(x) = \Phi(G(x)).$$

Por definición, $F(x)$ está en forma de Ramis-Sibuya real.

Por otro lado, cada una de las transformaciones admisibles $\psi_j : \mathcal{F}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ anteriores induce una transformación admisible $\Phi(\psi_j) : \mathcal{F}_{2n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_{2n}(\mathbb{R})$ sobre sistemas reales del siguiente modo:

1. Si $\psi_j = \psi_{S_a}$ entonces $\Phi(\psi_j)$ es la transformación de gauge asociada a la matriz

$$\Phi(S_a) = \text{diag}(1, 1, x^a, x^a, x^{2a}, x^{2a}, \dots, x^{(n-1)a}, x^{(n-1)a}).$$

Ya que esta matriz resulta de reordenar los elementos de la diagonal de la matriz diagonal $S_a \oplus S_a$, $\Phi(\psi_j) = \psi_{\Phi(S_a)}$ es la composición de una transformación poly-shearing con una transformación polinómica regular (con matriz constante).

2. Si $\psi_j = R_b$ es una ramificación, entonces $\Phi(\psi_j)$ es la misma ramificación del mismo orden b , pero en $2n$ variables y para sistemas reales.

3. Si $\psi_j = \psi_P$ es una transformación polinómica regular y escribimos $P(x) = \sum_{l=0}^N x^l P_l$ con $P_l \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, denotamos $\Phi(P(x)) = \sum_{j=0}^N x^j \Phi(P_j)$.

Basta definir $\Psi = \Phi(\psi_1) \circ \Phi(\psi_2) \circ \dots \circ \Phi(\psi_t)$ y comprobar que $\Psi(A(x)) = F(x) = \Phi(G(x))$, que ya hemos dicho que está en forma de Ramis-Sibuya real.

La comprobación de la parte 2 del Teorema 3.1.2 también es inmediata en este caso, pues Φ , actuando sobre sistemas, actúa coeficiente a coeficiente, preservando los grados.

4.4.4. Caso A_k tiene un único autovalor real

En este caso aplicaremos las transformaciones correspondientes como si se tratara del caso complejo.

Sea $A(x) \in \mathcal{F}^n(\mathbb{R})$ un sistema real de orden n , con rango de Poincaré q e índice de radialidad k ($k < q$), además suponemos que A_k tiene un único autovalor λ_0 (real). Realizamos los pasos igual que en el caso complejo.

Teniendo en cuenta el invariante $I(A)$ definido en el apartado 3.2.3.1

$$(\gamma_1(A_k), \gamma_2(A_k), \dots, \gamma_n(A_k), q - k).$$

Calculamos g_0 como en el apartado 3.2.3.2. En el caso de que g_0 sea entero positivo al aplicar la transformación S_{g_0} al sistema obtenemos un nuevo sistema $B(x) = S_{g_0}(A(x))$ con rango de Poincaré $q' \leq q$ e índice de radialidad $k' \geq k$. Por lo tanto $q' - k' < q - k$, entonces

$$(\gamma_1(B_{k'}), \gamma_2(B_{k'}), \dots, \gamma_n(B_{k'}), q' - k') < (\gamma_1(A_k), \gamma_2(A_k), \dots, \gamma_n(A_k), q - k)$$

para el orden lexicográfico.

En el caso en que $g_0 = \frac{a_0}{b_0}$ aplicamos las transformaciones R_b y S_a de la misma forma que en proceso de Turrutin para el caso complejo. Entonces obtenemos un nuevo sistema $C(x) = x^{-(q_0+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j C_j$, con rango de Poincaré q_0 e índice de radialidad k_0 . Este nuevo sistema, o bien está en alguno de los casos triviales del apartado 4.4.1, o bien su primera matriz no radial tiene sólo dos autovalores complejos conjugados, caso que ya ha sido estudiado en el apartado 4.4.3; o bien tiene varios autovalores no conjugados, caso que ya ha sido estudiado en el apartado 4.4.2, o bien sólo tiene un autovalor real. En este último caso, este caso al igual que en el proceso de Turrutin complejo, tendremos

$$(\gamma_1(C_{k_0}), \gamma_2(C_{k_0}), \dots, \gamma_n(C_{k_0}), q_0 - k_0) < (\gamma_1(A_k), \gamma_2(A_k), \dots, \gamma_n(A_k), q - k)$$

para el orden lexicográfico (Aunque $q_0 - k_0 > q - k$). Esto termina la construcción de un proceso de Turrutin real para el sistema $A(x)$.

La parte 2 del Teorema 4.3.2 se realiza de nuevo como en el caso del Teorema de Turrutin complejo 3.1.2.

4.5. Ejemplos

Veamos unos ejemplos del proceso de Turrutin real.

Ejemplo 4.5.1

Sean

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

una shifting matriz de orden 6 y

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideramos el sistema $A(x) \in \mathcal{F}^6(\mathbb{R})$

$$A(x) = x^{-2}(A_0 + x^3T).$$

Este sistema tiene rango de Poincaré $q = 1$ e índice de radialidad $k = 0$. Además los autovalores de A_0 son $a + bi$ y $a - bi$, es decir, tiene dos autovalores no reales conjugados.

Todas las matrices del sistema hasta la de orden $N = nq - (n - 1)k = 6$ son \mathbb{C} -matrices. Por lo tanto podemos aplicar la inversa del isomorfismo Φ a $A(x)$. Sea $\tilde{A}(x) = \Phi^{-1}(A(x))$ con $\tilde{A}(x) = x^{-2}(\tilde{A}_0 + x^3\tilde{T})$, donde

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} a + bi & 1 & 0 \\ 0 & a + bi & 1 \\ 0 & 0 & a + bi \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos ahora el proceso de Turrutin complejo. Como la primera matriz no radial ya está en forma de Jordan y el resto, hasta la de orden 3 son especiales, no tenemos que realizar ninguna transformación para calcular g_0 . Realizando los cálculos de g_0 , obtenemos que $g_0 = 1$ (ya que $\alpha_{31} = 3$, por lo que tenemos la ecuación $g = 3 - 2g$. Entonces $g = 1$). Por lo tanto la transformación admisible, que tenemos que hacer es de tipo shearing S_1 . Realizando la transformación obtenemos un nuevo sistema de la forma:

$$\tilde{B}(x) = x^{-2}((a + bi)I_3 + x(\tilde{T} + H_3)),$$

donde $H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que está en forma de Ramis-Sibuya.

Aplicamos el isomorfismo Φ a $\tilde{B}(x)$ con lo que obtenemos el sistema real

$$B(x) = x^{-2} \left(\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

que está en forma de Ramis-Sibuya real.

Ejemplo 4.5.2

El ejemplo 3.4.1 del caso complejo también lo es del caso real, por lo tanto la cota también es óptima en este caso.

4.6. Algoritmo de Turritin real en dimensión dos

En este apartado veremos como aplica el algoritmo de Turritin real en dimensión dos.

Sea $A(x) \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})$ un sistema real de orden dos, con rango de Poincaré q e índice de radialidad k . Escribimos $A(x) = x^{-(q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j A_j$, donde $A_j \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Aplicamos el algoritmo de Turritin real a este sistema.

Si A_k tiene varios autovalores reales podemos aplicar el Splitting Lema 2.4.1 por lo que reducimos el sistema de orden dos a dos sistemas de orden uno que ya están en forma de Ramis-Sibuya real.

Si A_k tiene dos autovalores complejos conjugados por la Proposición 4.2.2 podemos transformar todas las matrices A_j para $j \leq N = 2q - k$ en \mathbb{C} -matrices. Por lo tanto ya está en forma de Ramis-Sibuya real.

Si A_k tiene un único autovalor real, calculamos g_0 de la misma forma que en el apartado 3.2.3.2. Nótese que el único caso en el que g_0 es racional es cuando $g_0 = \frac{\alpha_{uv}}{u-v+1}$ para algún $1 \leq v < u \leq 2$, por lo tanto $u = 2$ y $v = 1$ entonces $g_0 = \frac{\alpha_{21}}{2}$. Entonces las únicas ramificaciones que se harán serán de orden 2. Si g_0 es entero aplicando la Proposición 2.3.3 tenemos que el nuevo $q' \leq q$ y que el nuevo $k' > k$. Sea $B_{k'}$ la nueva primera matriz no radial del sistema transformado, en este caso volvemos a tener las opciones anteriores. Sólo nos falta estudiar el caso en el que g_0 es racional. Como $n = 2$ tenemos que $j - i = -1$ para $i > j$ por lo tanto la ecuación para el cálculo de g_0 es de la forma $g = \alpha_{21} - g$, por lo tanto

$$g = \frac{\alpha_{21}}{2}.$$

Al aplicar la transformación de ramificación R_2 obtenemos un nuevo sistema $B(x) = x^{-(2q+1)} \sum_{j=0}^{\infty} x^j B_j$ con $B_j = A_{j/2}$ si j es par y B_j la matriz nula si j es impar. Posteriormente al aplicar la transformación shearing obtenemos un nuevo sistema en el que la primera matriz no radial C_{k_0} es de la forma

$$C_{k_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

con $b \in \mathbb{R}$, distinto de cero. Entonces esta nueva matriz tiene, o bien dos autovalores reales distintos, o bien dos autovalores complejos conjugados. Estos casos los hemos estudiado anteriormente.

Capítulo 5

Caso particular de EDOs bidimensionales

5.1. Introducción

En los capítulos precedentes, hemos hecho manipulaciones algebraicas sobre los sistemas meromorfos y, por tanto, estos podían ser formales. Es decir, las series meromorfas en los coeficientes no necesitaban converger.

En este capítulo estamos interesados en estudiar las soluciones de los sistemas cuando estas series coeficientes convergen. Es decir, las entradas de la matriz $A(x)$ son funciones analíticas definidas en un entorno del origen $x = 0$.

Más particularmente, estudiamos sistemas lineales meromorfos de EDOs bidimensionales con coeficientes reales, esto es, sistemas de la forma:

$$Y' = AY + B, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

donde A es una matriz 2×2 y B es un vector columna de 2 dimensiones, ambos con entradas en el cuerpo $\mathbb{R}(\{x\})$ de series meromorfas. Si bien no corresponde exactamente con las notaciones introducidas en el capítulo 2, por comodidad, a lo largo de todo este capítulo denotaremos

$$K = \mathbb{R}(\{x\}).$$

Clásicamente el estudio de sistemas lineales meromorfos de EDOs (en cualquier dimensión) se trata con el caso complejo; i.e., las entradas son series meromorfas con coeficientes complejos. Estos estudios buscan sistemas fundamentales de soluciones

en términos de funciones exponenciales polinomiales y series potencias formales, procesos de sumación de la parte formal de la solución en sectores en $0 \in \mathbb{C}$, fenómeno de Stokes y otros temas relacionados (ver [10, 1]).

Aquí, nos centraremos en el caso real y no trataremos o usaremos este tipo de resultados en el caso complejo. En lo que sigue, una *solución* de el sistema (5.1) será un mapa $x \mapsto Y(x) \in \mathbb{R}^2$ definido y de clase C^1 a la derecha de un entorno $(0, \varepsilon)$ de 0 que satisfaga la ecuación; esto es, de modo que $\frac{dY}{dx}(x) = A(x)Y(x) + B(x)$ para algún $x \in (0, \varepsilon)$. (Un estudio análogo se puede hacer para soluciones definidas en un entorno a la izquierda de 0). Asumiendo que $x = 0$ es un punto singular de el sistema (i.e. alguna de las entradas de A ó B tiene un polo en $x = 0$), estamos interesados en el comportamiento asintótico de las soluciones cuando x tiende a 0.

Más precisamente, estamos interesados en el comportamiento asintótico relativo de soluciones cualesquiera. Particularmente, en los conceptos de enlazamiento y separación de soluciones que provienen de los conceptos de “espiral” y “enlazamiento” introducidos en [3, 4] para trayectorias de campos de vectores tridimensionales.

A grosso modo (ver Definición 5.2.1 abajo), dos soluciones diferentes $Y(x)$ y $Z(x)$ se dice que son *asintóticamente enlazadas* (resp. *separadas*) si el vector $Y(x) - Z(x)$ de \mathbb{R}^2 gira alrededor del origen (resp. si tiene una dirección límite bien definida) cuando x tiende a 0. No es difícil de ver (haremos a continuación la demostración) que, dado un sistema (5.1), o bien cualquier par de soluciones son asintóticamente elazadas o cualquier par de soluciones son separadas, entonces podemos decir que el sistema es *enlazado* ó *separado* respectivamente. Otra nota a tener en cuenta es que un sistema de la forma (5.1) es enlazado o separado si y sólo si lo es el sistema homogeneizado (este es aquel que tiene la misma matriz coeficiente A pero con $B = 0$).

La pregunta ahora es determinar un criterio que permita conocer si dado un sistema este es enlazado o separado. En [6] este problema es tratado en un caso más general donde las entradas de los coeficientes de la matriz A y del vector B pertenecen a un *Cuerpo de Hardy* H . Por definición un Cuerpo de Hardy es un subcuerpo del anillo de gérmenes en $x = 0$ de funciones diferenciables reales en un intervalo a la derecha de 0 $(0, \varepsilon)$ el cual es cerrado por la operación de derivación respecto a x . Este concepto captura algunas de las buenas propiedades infinitesimales que tenemos para funciones analíticas reales: Elementos distintos de cero en H tienen un número finito de ceros, tienen un límite en $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ cuando $x \rightarrow 0$, la regla de L'Hôpital se mantiene para elementos de H , H es un cuerpo totalmente ordenado por $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para algún x en un entorno a la derecha de de 0, etc. (ver [5] para una amplia exposición de la teoría de cuerpos de Hardy, o [7] para una reciente recopilación). El principal resultado en [6] es que un sistema

de la forma (5.1) con los coeficientes de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en un cuerpo de Hardy H es separado si y sólo si la *ecuación de Riccati* asociada

$$y' = cy^2 + (a - d)y - b \quad (5.2)$$

tiene una solución $x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$ definida para todo x en un entorno a la derecha de $x = 0$. Además, en este caso, la extensión del cuerpo H de coeficientes por la familia de todas las soluciones de el sistema (sus gérmenes en $x = 0$) es a su vez un cuerpo de Hardy.

Este resultado proporciona un criterio para saber si un sistema es enlazado o separado en términos de la ecuación de Riccati del sistema. Sin embargo, este criterio, siendo completamente general para un cuerpo de Hardy, está lejos de ser constructivo. Restringiéndonos a nuestro caso especial donde el cuerpo de coeficientes es $H = K = \mathbb{R}(\{x\})$, la pregunta general que hacemos ahora es:

Podemos esperar un criterio constructivo para decidir la dicotomía enlazado/separado para sistemas lineales de EDOs con coeficientes meromorfos reales?

Las secciones 5.3, 5.4 y 5.5 están dedicadas a responder parcialmente dicha pregunta.

En la sección 5.3 se establece que el caracter enlazado/separado se puede establecer en el lenguaje de la geometría semialgebraica (esto es con ecuaciones e inecuaciones polinómicas) en una truncación de la matriz del sistema de orden $2q + 1$ donde q es el rango de Poincaré (cota que tiene que ver con el número $N(n, q, k)$, establecida en el Teorema de Turrutin real 4.3.2] sobre el jet suficiente para conseguir un proceso de Turrutin. Este resultado está ya contenido en el artículo [6].

En la sección 5.4 probamos que el caracter enlazado/separado no puede establecerse en términos del lenguaje de la geometría semialgebraica aplicada al propio cuerpo de series meromorfas reales convergentes (que es un cuerpo ordenado).

En la sección 5.5, probamos que el caracter enlazado/separado para sistemas que tienen un rango de Poincaré acotado, puede establecerse a partir del lenguaje de la geometría semi-algebraica aplicada al cuerpo de series meromorfas, pero como cuerpo ordenado diferencial. Es decir, si añadimos la derivada de las series meromorfas convergentes en los coeficientes.

5.2. Dicotomía enlazado/separado

Consideramos un sistema (5.1) de EDOs lineales meromorfas como anteriormente. Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, podemos asumir que cualquier entrada de las matrices A y B está bien definida y es una función analítica real en el intervalo $(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. Como la aplicación $(x, Y) \mapsto A(x)Y + B(x)$ es Lipschitz con respecto a las variables $Y = (Y_1, Y_2)$, dada una condición inicial $(x_0, Y_0) \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^2$, existe una única solución de el sistema $x \mapsto Y(x) \in \mathbb{R}^2$ definida para todo $x \in (0, \varepsilon)$ y tal que $Y(x_0) = Y_0$.

Sean Y, Z dos soluciones diferentes, con $Y(x) \neq Z(x)$ para todo $x \in (0, \varepsilon)$. Identificando \mathbb{R}^2 con el plano complejo por $(y_1, y_2) \equiv y_1 + iy_2$ como es usual, podemos escribir

$$Y(x) - Z(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$$

donde $\rho(x) = \|Y(x) - Z(x)\|$ y $\theta_{Y,Z} : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua (de hecho analítica). La función $\theta_{Y,Z}$ está sólo bien definida módulo la translación dada por $2\pi\mathbb{Z}$ (y módulo la translación dada por $\pi\mathbb{Z}$ si intercambiamos Y, Z); cualquier elección será llamada en lo que sigue una *función ángulo* entre Y y Z .

Definición 5.2.1 *Las soluciones Y, Z son llamadas enlazadas si la función ángulo $\theta_{Y,Z}(x)$ diverge o bien a $+\infty$ o bien a $-\infty$ cuando x tiende a 0. Diremos que son separadas si $\theta_{Y,Z}(x)$ tiene un límite finito real cuando x tiende a 0.*

El nombre “separado” hace referencia a lo siguiente: Si Y, Z son separadas y $\lim_{x \rightarrow 0} \theta_{Y,Z}(x) = \theta_0$, para cualquier plano L en coordenadas (z, y_1, y_2) que contiene el eje x y es transversal a la dirección donde $y_2/y_1 = \tan \theta_0$, las proyecciones ortogonales lineales de los grafos de Y, Z sobre L no se cortan para x suficientemente pequeño. Por contrario, si Y, Z son enlazadas, para cualquier plano L , sus proyecciones se cortan infinitas veces cuando x tiende a 0.

Dos soluciones diferentes sólo pueden tener uno de los comportamientos enlazado/separado. Además, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.2.2 (Dicotomía para sistemas) *Consideramos un sistema $Y' = AY + B$ de EDOs lineales con coeficientes meromorfos. Entonces dos soluciones distintas cualesquiera son enlazadas o dos soluciones distintas cualesquiera son separadas. El sistema es llamado enlazado o separado respectivamente.*

Demostración .- Una prueba de este resultado (en un caso más general) puede encontrarse en [6]. Veamos aquí los principales argumentos para una prueba alternativa

de nuestro caso particular.

Sean $Y(x), Z(x)$ dos soluciones diferentes y sea $\theta(x) = \theta_{Y,Z}(x)$ la función ángulo. Sea q el rango de Poincaré de el sistema y escribimos $A = x^{-(q+1)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ donde los a_{ij} son funciones reales analíticas en $x = 0$. Entonces $\theta(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$x^{q+1}\theta' = -a_{12} \operatorname{sen}^2\theta + (a_{22} - a_{11}) \operatorname{sen}\theta\cos\theta + a_{21} \cos^2\theta. \quad (5.3)$$

Notar que esta ecuación es independiente de la elección de las soluciones Y, Z de el sistema. Por lo tanto, basta probar que cualquier solución $\theta(x)$ de (5.3), definida para x en un entorno a la derecha de 0, tiene límite finito cuando x tiende a 0 o cualquier solución $\theta(x)$ diverge a $+\infty$ ó $-\infty$ cuando x tiende a 0. Por otro lado, nótese que, como dos soluciones de (5.3) diferentes y la ecuación es 2π periódica en la variable θ tienen diferentes valores para cualquier x positivo donde estén definidas, basta probar que una solución $\theta(x)$ tiene uno de estos dos tipos de comportamiento. El segundo miembro de la ecuación (5.3) es una función analítica sobre la banda $(x, \theta) \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{R}$, periódica en la segunda variable θ . Sea k el mínimo de los órdenes de las funciones a_{ij} en $x = 0$. Si $k \geq q + 1$ entonces podemos dividir ambos lados de la ecuación (5.3) por x^{q+1} de modo que la función $\theta(x)$ satisface $\theta'(x) = R(x, \theta(x))$ donde R es analítica en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$. En este caso, por integración, existe un límite de $\theta(x)$ cuando x tiende a 0. Asumimos que $k < q + 1$ y escribimos la ecuación (5.3) como

$$x^{q-k+1}\theta' = R(x, \theta) \quad (5.4)$$

donde R es analítica en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$, periódica en θ y tal que $R(0, \theta) \not\equiv 0$. Es suficiente probar que si $\Lambda \subset \mathbb{R}$ es el conjunto de valores acumulados de una solución $\theta(x)$ de (5.4) cuando x tiende a 0 entonces Λ está contenido en el conjunto de ceros de la función $\theta \mapsto R(0, \theta)$. Ahora, sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $R(0, \theta_0) \neq 0$ y asumimos que $R(0, \theta_0) > 0$. Usando que $q - k + 1 > 0$, podemos ver que existe una caja $C = (0, \delta) \times [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ tal que si φ es una solución de la ecuación (5.4) con condición inicial sobre C , entonces la intersección de el grafo de φ con C es el grafo de una restricción de φ a un subintervalo cerrado $[a, b] \subset (0, \delta)$ y tal que $\varphi(a) \in \{\theta_0 - \delta\}$ y $\varphi(b) \in \{\theta_0 + \delta\}$. Esta propiedad evita que el valor θ_0 sea un valor de acumulación de la solución $\theta(x)$ (una función continua en un entorno a la derecha de $x = 0$). \square

Observación 5.2.3 Como la diferencia de dos soluciones de un sistema de la forma $Y' = AY + B$ es una solución del sistema homogeneizado $Y' = AY$, ambos sistemas

son separados o enlazados. Entonces, desde ahora, consideraremos sólo sistemas homogéneos $Y' = AY$, cada uno de ellos identificado con los coeficientes de la matriz $A \in K^4$ donde $K = \mathbb{R}(\{x\})$ es el cuerpo de series meromorfas reales en una variable.

Mirando con más detenimiento la prueba anterior, tenemos la siguiente proposición en la que describimos una familia de sistemas para los cuales es fácil decidir cuando son separados o enlazados. Esta familia será utilizada varias veces después por lo que daremos una definición.

Definición 5.2.4 *Consideramos un sistema $A \in K^4$ con rango de Poincaré no mayor que $q \geq 0$ y escribimos $A = \sum_{j=-(q+1)}^{\infty} x^j A_{j+q+1}$, donde cada A_j es una matriz con entradas reales. Sea $k = k(A)$ el índice de radialidad de A . Diremos que el sistema está en forma final si o bien $k > q$ o $k \leq q$ y $\Delta(A_k) \neq 0$ donde Δ es el discriminante (Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $\Delta(M) = (a - d)^2 - 4bc$).*

Proposición 5.2.5 *Con las mismas notaciones anteriores y suponiendo que el sistema $A \in K^4$ está en forma final, entonces el sistema es enlazado si y sólo si $k \leq q$ y $\Delta(A_k) < 0$.*

Demostración .- Usando las mismas notaciones de la prueba del Teorema 5.2.2, si $k > q$, hemos visto que la función ángulo $\theta(x)$ entre dos soluciones de el sistema tiene límite cuando x tiende a 0, con lo que el sistema es separado.

Si $k \leq q$ y $\Delta(A_k) < 0$ entonces en la ecuación (5.4) tenemos que $\theta \mapsto R(0, \theta)$ nunca se anula. Por la prueba del Teorema 5.2.2, obtenemos entonces que $\theta(x)$ no puede tener un valor de acumulación finito y esto hace que diverja a $+\infty$ ó $-\infty$, demostrando que el sistema es enlazado.

Finalmente, si $k \leq q$ y $\Delta(A_k) > 0$ entonces $\theta \mapsto R(0, \theta)$ cambia de signo y sus ceros pueden ser valores de acumulación de la función ángulo $\theta(x)$. La prueba del Teorema 5.2.2 también muestra que las soluciones de (5.4) cerca de un punto θ_0 donde $R(0, \theta_0) \neq 0$ son monótonas sobre x , creciendo si $R(0, \theta_0) > 0$ y decreciendo si $R(0, \theta_0) < 0$. Esta propiedad hace que la función ángulo $\theta(x)$ no diverja y entonces tiene un límite cuando x tiende a 0, demostrando que el sistema es separado. \square

5.3. Criterio semi-algebraico en las entradas de los coeficientes

En este apartado vamos a ver el carácter semi-algebraico en términos de los coeficientes de las diferentes matrices que forman el sistema.

Recuérdese que \mathcal{S}^q denota los sistemas con rango de Poincaré menor o igual que q y que además son separados.

Para ello probaremos el siguiente teorema.

Teorema 5.3.1 *Para todo $q \geq 0$, existe un conjunto semi-algebraico $\Sigma_q \subset \mathbb{R}^{4(2q+2)}$ tal que un sistema $A \in \mathcal{F}^q$ pertenece a \mathcal{S}^q si y sólo si $J_{2q+1}(A) \in \Sigma_q$.*

Este teorema aparece por primera vez en la siguiente referencia [6].

Una primera observación es que el Teorema 5.3.1 es cierto para la familia de sistemas en forma final (ver Definición 5.2.4). Más precisamente, y con los mismos términos y notación que en el enunciado del Teorema 5.3.1, podemos enunciar el siguiente resultado que es una consecuencia de la definición y de la Proposición 5.2.5.

Lemma 5.3.2 *Para cualquier $q \geq 0$, existe un conjunto semi-algebraico Σ'_q en $\mathbb{R}^{4(q+1)}$ tal que, dado $A \in \mathcal{F}^q$, el sistema A está en forma final y es separado si y sólo si*

$$J_q(A) \in \Sigma'_q.$$

La prueba del Teorema 5.3.1 en el caso general es una consecuencia de la existencia de un proceso que convierte un sistema dado en forma final y que sólo involucra una truncación finita del sistema, el número de términos en esta truncación depende del rango de Poincaré del sistema inicial. Este proceso es un avatar del algoritmo de Turrutin para el caso real visto en el capítulo anterior. Podemos encontrar una prueba de este caso especial en [4].

Consideramos las siguientes transformaciones admisibles en \mathbb{R}^3 :

1. Transformación de gauge regular ψ_P con $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con $\det P \neq 0$.
2. Transformación shearing con $g = 1$ ($\psi_S = \psi_{S_1^2} = \text{diag}(1, x^1)$).
3. Ramificación $\psi_R = R_2$ (cambio de variable $x = w^2$).

La primera propiedad interesante de estas transformaciones admisibles es que preservan el carácter enlazado/separado de los sistemas. Esta propiedad se enuncia en la siguiente proposición:

Proposición 5.3.3 *Un sistema $A(x)$ con $A(x) \in K^4$ es enlazado si y sólo si lo es el sistema $\tilde{A}(x)$ donde el sistema $\tilde{A}(x)$ es el resultante de realizar alguna de las transformaciones de tipo ψ_P , ψ_S o ψ_R .*

Demostración .- El resultado es claro para las transformaciones de tipo ψ_P . Sean u, v dos soluciones distintas de $A(x)$ definidas en $z \in (0, \varepsilon)$. Sea $\sigma : z \mapsto u(z) - v(z) = (\alpha(z), \beta(z)) \in \mathbb{R}^2$, curva parametrizada diferenciable plana tal que $\sigma(z) \neq (0, 0)$ para cada z y $\lim_{z \rightarrow 0} \sigma(z) = (0, 0)$. Escribamos en coordenadas polares

$$\sigma(z) = (r(z) \sin(\theta(z)), r(z) \cos(\theta(z))).$$

Supongamos primero que la transformación realizada es la explosión ψ_S , entonces ψ_S transforma la curva σ en $\tilde{\sigma}(z) = (\alpha(z), z\beta(z))$ que se escribe en coordenadas polares como

$$\sigma(z) = (s(z) \cos(\Psi(z)), s(z) \sin(\Psi(z))),$$

que es la diferencia de dos soluciones del sistema transformado $\tilde{A}(x)$. Basta ver que la función $\theta(z)$ diverge a $+\infty$ o $-\infty$ cuando $z \rightarrow 0$ si y sólo si lo mismo pasa con la función $\Psi(z)$.

Realizamos la demostración para la transformación $(x, y, z) \rightarrow (x, zy, z)$. Geométricamente la prueba de abajo no es más que notar que los ejes coordenados son invariantes por una transformación de shearing. El enlazamiento/separación son preservados porque pueden expresarse en función de como las soluciones intersectan los ejes.

Al realizar la transformación tenemos que:

$$(r(z) \cos(\theta(z)), zr(z) \sin(\theta(z))) = (s(z) \cos(\Psi(z)), s(z) \sin(\Psi(z)))$$

Entonces tenemos que:

$$r^2 \cos^2(\theta) + z^2 r^2 \sin^2(\theta) = s^2$$

$$\cos(\theta) = (\sqrt{\cos^2(\theta) + z^2 \sin^2(\theta)}) \cos(\Psi)$$

Supongamos $\theta(z)$ tiende a $+\infty$ (de manera similar se realizaría si tendiera a $-\infty$) tenemos que $\cos(\theta(z))$ toma el valor 0 para una sucesión de puntos $\{z_i\}$ que converge a $z = 0$. Ahora bien como $\sqrt{\cos^2(\theta) + z^2 \sin^2(\theta)} > 0$ para todo $z > 0$ tenemos que $\cos(\Psi(z))$ se anula en los mismos puntos z_i .

Definimos la función $T_\theta : \{z_i\}_{i=0}^\infty \rightarrow \{0, 1, -1\}$ como:
 $T_\theta(z_i) = 0$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\cos(\theta(z)) > 0$ o $\cos(\theta(z)) < 0$ para todo $z \in$

$(z_i - \varepsilon, z_i + \varepsilon) \setminus \{z_i\}$

$T_\theta(z_i) = 1$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\cos(\theta(z)) < 0$ para todo $z \in (z_i - \varepsilon, z_i)$ y $\cos(\theta(z)) > 0$ para todo $z \in (z_i, z_i + \varepsilon)$

$T_\theta(z_i) = -1$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\cos(\theta(z)) > 0$ para todo $z \in (z_i - \varepsilon, z_i)$ y $\cos(\theta(z)) < 0$ para todo $z \in (z_i, z_i + \varepsilon)$

Definimos igualmente la función $T_\Psi : \{z_i\} \rightarrow \{0, 1, -1\}$ de la misma manera que T_θ pero usando la función $\Psi(z)$ en lugar de $\theta(z)$. Se tiene por la fórmula anterior que $T_\theta = T_\Psi$.

Como $\theta(z)$ tiende a $+\infty$ tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} T_\theta(z_i) = \infty$$

y por lo tanto también la suma de $T_\Psi(z_i)$ diverge. Esto muestra que $\Psi(z)$ tiende a $+\infty$. La recíproca se prueba análogamente.

Consideremos ahora la transformación $\psi_R : (x(z), y(z), z) \rightarrow (x(z^2), y(z^2), z^2)$:

Suponemos primero que S es enlazado y vamos a probar que $\tilde{A}(x)$ también lo es. Basta ver que las curvas transformadas \tilde{u}, \tilde{v} de u, v por ψ_R , respectivamente, se enlazan. Se tiene $\tilde{u}(z) = u(\sqrt{z})$, $\tilde{v}(z) = v(\sqrt{z})$, con lo que, si

$$\tilde{u}(z) - \tilde{v}(z) = s(z)e^{i\Psi(z)},$$

entonces $s(z) = r(\sqrt{z})$ y $\Psi(z) = \theta(\sqrt{z})$. Claramente la función $\Psi(z)$ tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ cuando z tiende a cero si y sólo si así lo hace la función $\theta(z)$. \square

Utilizaremos la notación $\tilde{A}(x) = \psi_* A(x)$.

Desde un punto de vista computacional, el sistema transformado $\tilde{A}(x)$ puede obtenerse a partir del sistema $A(x)$ a través de las siguientes reglas: si escribimos

$$\begin{aligned} A(x) &= x^{-(q+1)} \sum_{i=0}^{\infty} x^i A_i, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \\ \tilde{A}(x) &= x^{-(\tilde{q}+1)} \sum_{i=0}^{\infty} x^i \tilde{A}_i, \quad \tilde{A}_i = \begin{pmatrix} \tilde{a}_i & \tilde{b}_i \\ \tilde{c}_i & \tilde{d}_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces

- En el caso de una transformación de gauge regular ψ_P , tenemos

$$\tilde{q} = q \text{ and } \tilde{A}_j = P^{-1} A_j P, \forall j. \quad (5.5)$$

- En el caso de una transformación de tipo shearing ψ_S y si $c_0 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= q, & \tilde{a}_j &= a_j, \tilde{b}_j = b_{j-1}, \tilde{c}_j = c_{j+1} \forall j \\ \tilde{d}_j &= d_j \text{ for } j \neq q \text{ and } \tilde{d}_q = d_q - 1.\end{aligned}\tag{5.6}$$

- En el caso de una transformación de tipo ramificación, tenemos

$$\tilde{q} = 2q \text{ and } \tilde{A}_{2j} = 2A_j, \tilde{A}_{2j+1} = 0, \forall j \geq 0.\tag{5.7}$$

Estas transformaciones admisibles permiten transformar cualquier sistema en un sistema en forma final. Más precisamente tenemos el siguiente resultado que establece que el proceso de transformación de un sistema a su forma final sólo depende de una truncación finita del sistema original.

Proposición 5.3.4 *Sea $A(x) \in \mathcal{F}^q$ un sistema con rango de Poincaré no mayor que q . Entonces existe una composición $\phi_A = \psi^n \circ \psi^{n-1} \circ \dots \circ \psi^1$ finita de transformaciones admisibles tal que*

$$(\phi_A)_* A(x) = \psi_*^n(\psi_*^{n-1}(\dots(\psi_*^1 A(x))\dots))$$

está en forma final. Además, la colección de ϕ_A para $A \in \mathcal{F}^q$ se puede construir con las siguientes propiedades:

(i) *Si $A(x), A'(x) \in \mathcal{F}^q$ son tal que $J_{2q+2}(A(x)) = J_{2q+2}(A'(x))$ entonces $\phi_A = \phi_{A'}$.*

(ii) *Hay un conjunto semialgebraico $\Omega = \Omega(q) \subset \mathbb{R}^{4(2q+2)}$ tal que, si denotamos $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = \mathbb{R}^{4(2q+2)} \setminus \Omega$ y $q_1 = q$, $q_2 = 2q$ entonces, para $i = 1, 2$, tenemos*

(ii1) *$J_{2q+2}(A(x)) \in \Omega_i \Rightarrow (\phi_A)_* A(x) \in \mathcal{F}^{q_i}$.*

(ii2) *La truncación $J_{q_i}((\phi_A)_* A(x))$ sólo depende de $J_{2q+2}(A(x))$.*

(ii3) *La aplicación $h_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^{4(q_i+1)}$ definida por*

$$h_i : J_{2q+2}(A(x)) \mapsto J_{q_i}((\phi_A)_* A(x))$$

es semialgebraica (esto es su grafo es un conjunto semialgebraico de $\mathbb{R}^{4(2q+2+q_i+1)}$).

La proposición 5.3.4, junto con el Lema 5.3.2 y las propiedades básicas de la geometría semialgebraica (en particular tanto la imagen directa, como la imagen inversa de un conjunto semialgebraico por una aplicación semialgebraica, son semialgebraicos) provee una prueba para el Teorema 5.3.1.

Demostración .- El conjunto $\Omega = \Omega(q)$ será contruido de la siguiente forma. describimos dos familias de subconjuntos semialgebraicos $\{E^i\}_{i=1}^r, \{\Omega^i\}_{i=1}^r$ de $\mathbb{R}^{4(2q+2)}$ con

$$\mathbb{R}^{4(2q+2)} = E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^r, \quad E^i \cap E^j = \emptyset \text{ para } i \neq j \text{ y } \Omega^i \subset E^i \quad (5.8)$$

tal que, para $i = 1, 2, \dots, r$, tenemos

- (i') La afirmación (i) se cumple con $J_{2q+2}^{-1}(E^i)$ en lugar de \mathcal{F}^q .
- (ii') La afirmación (ii) se cumple con E^i y Ω^i en lugar de $\mathbb{R}^{4(2q+2)}$ y Ω , respectivamente.

Después de esto, el conjunto requerido $\Omega = \Omega(q)$ en (ii) será entonces la unión de los Ω^i y habremos terminado la prueba de la Proposición 5.3.4.

Denotamos por Σ_Δ el conjunto semialgebraico de \mathbb{R}^4 de matrices $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con $\Delta(P) = 0$, donde identificamos $\mathbb{R}^4 \equiv \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Procederemos por inducción sobre q .

Consideramos el caso $q = 0$. Para cualquier $A(x) \in \mathcal{F}^0$ escribimos $A(x) = x^{-1}(A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \dots)$ y $(A_0, A_1) \equiv J_1(A(x))$. Si $\Delta(A_0) \neq 0$ entonces $A(x)$ está en forma final y por lo tanto tendremos $\phi_A = id$ (i.e., no utilizamos ninguna transformación admisible) para este sistema. Entonces, nuestro primer conjunto en la partición (5.8) es $E^1 = (\mathbb{R}^4 \setminus \Sigma_\Delta) \times \mathbb{R}^4$ por lo que ponemos $\Omega^1 = E^1$ (las afirmaciones (i') e (ii') se cumplen para E^1, Ω^1). Buscamos otros miembros de la partición dentro de $\Sigma_\Delta \times \mathbb{R}^4$. Para un sistema $A(x)$ tal que $\Delta(A_0) = 0$, existe una matriz no singular $P = P(A_0)$, cuyas entradas son polinomios en las entradas de A_0 , y tal que $P^{-1}A_0P$ es triangular superior. Para tal sistema $A(x)$, consideramos la transformación admisible $\psi^1 = \psi_{P(A_0)}$ (sólo depende de $J_1(A(x))$), más concretamente sólo depende de $J_0(A(x)) = A_0$, ponemos $A^{(1)}(x) = \psi_*^1 A(x)$ y usamos la notación

$$J_1(A^{(1)}(x)) = (A_0^{(1)}, A_1^{(1)}) \text{ con } A_j^{(1)} = \begin{pmatrix} a_j^{(1)} & b_j^{(1)} \\ c_j^{(1)} & d_j^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Notar que cada entrada de $A_j^{(1)}$ para $j = 0, 1$ es una función semialgebraica a partir de las entradas de A_0 y A_1 (usando la regla (5.5) para ψ^1). La ecuación $\{c_1^{(1)} = 0\}$ define un subconjunto semialgebraico $E^2 \subset \Sigma_\Delta \times \mathbb{R}^4$. Poniendo también $E^3 = \Sigma_\Delta \times \mathbb{R}^4 \setminus E^2$ y $\Omega^i = E^i$ para $i = 2, 3$. Afirmamos que (i') e (ii') se verifican para los dos pares de conjuntos semialgebraicos E^2, Ω^2 y E^3, Ω^3 , dando la partición deseada (5.8) para $q = 0$. Para probar esta afirmación, si $A(x) \in \mathcal{F}^0$ es tal que

$J_1(A(x)) \in E^2$ entonces consideramos $\phi_A = \psi^2 \circ \psi^1$ donde ψ^2 es una transformación admisible de tipo shearing y $\psi^1 = \psi_{P(A_0)}$. Ponemos $A^{(2)} = (\phi_A)_* A(x) = \psi_*^2 A^{(1)}(x)$ donde $A^{(1)}(x) = \psi_*^1 A(x)$ y escribimos $J_1(A^{(2)}) = (A_0^{(2)}, A_1^{(2)})$. La regla (5.6) para ψ^2 muestra que $\Delta(A_0^{(2)}) \neq 0$ y entonces $A^{(2)}$ está en forma final. Esto demuestra (i') e (ii') para E^2 y Ω^2 . Por otro lado, si $A \in E^3$ entonces ponemos $\phi_A = \psi^3 \circ \psi^2 \circ \psi^1$ donde $\psi^1 = \psi_{P(A_0)}$, ψ^2 es la ramificación ψ_R y ψ^3 es la transformación de tipo shearing ψ_S . Aplicando las reglas (5.7) y (5.6) vemos que en este caso $\tilde{A}(x) = (\phi_A)_* A(x) \in \mathcal{F}^0$ (esto es, $q_2 = 2q = 0$ como es requerido en (ii1)) y, si escribimos $\tilde{A} = x^{-1}(\tilde{A}_0 + x\tilde{A}_1 + x^2\tilde{A}_2 + \dots)$, entonces $\tilde{A}_0 = a_0^{(1)} I_2$ donde I_2 es la matriz identidad. Esto prueba que \tilde{A} está en forma final y podemos concluir las propiedades (i') e (ii') para E^3, Ω^3 .

Suponemos ahora que $q \geq 1$. Dado $A(x) \in \mathcal{F}^q$ escribimos $A(x) = x^{-(q+1)}(A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \dots)$. Análogamente al caso anterior, ponemos $E^1 = (\mathbb{R}^4 \setminus \Sigma_\Delta) \times \mathbb{R}^{4(2q+1)}$ y $\Omega^1 = E^1$ como el primer elemento en la partición (5.8). Ahora, para un sistema $A(x)$ con $\Delta(A_0) = 0$, existe una matriz no singular $P = P(A_0)$, cuyas entradas son polinomios en las entradas de A_0 , y tal que $P^{-1}A_0P$ es triangular superior. Para este sistema $A(x)$ consideramos $\psi^1 = \psi_{P(A_0)}$ y $A^{(1)}(x) = \psi_*^1 A(x)$, escrito como $A^{(1)}(x) = x^{-(q+1)}(A_0^{(1)} + xA_1^{(1)} + x^2A_2^{(1)} + \dots)$. Las truncaciones $J_{2q+2}(A(x))$ de estos sistemas $A(x)$ para los cuales $A_0^{(1)}$ es diagonal (y entonces un múltiplo de la identidad) forman un conjunto semialgebraico $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^{4(2q+1)}$ en $\mathbb{R}^{4(2q+2)}$. Usando la hipótesis de inducción, existe un conjunto semialgebraico $\Omega(q-1) \subset \mathbb{R}^{4(2(q-1)+2)}$ satisfaciendo la propiedad (ii) para $q-1$. Además, si ponemos

$$E^2 = \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{4(2q+1)}, \quad \Omega^2 = \mathcal{D} \times \Omega(q-1) \times \mathbb{R}^4 \subset E^2,$$

tenemos un segundo elemento de la partición (5.8) tal que (i') e (ii') se cumplan para E^2, Ω^2 . Nos queda por describir los otros miembros de la partición de $(\mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{D}) \times \mathbb{R}^{4(2q+1)}$. Con las notaciones anteriores, suponemos que $A_0^{(1)}$ es triangular superior pero no diagonal y escribimos $A_j^{(1)} = \begin{pmatrix} a_j^{(1)} & b_j^{(1)} \\ c_j^{(1)} & d_j^{(1)} \end{pmatrix}$. La ecuación $\{c_1^{(1)} = 0\}$

define un conjunto semialgebraico E^3 en $(\mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{D}) \times \mathbb{R}^{4(2q+1)}$. Para un sistema $A(x)$ con truncación en E^3 ponemos ψ^2 igual a la transformación admisible shearing ψ_S y $A^{(2)} = (\psi^2 \circ \psi^1)_* A(x) \in \mathcal{F}^q$. El primer coeficiente $A_0^{(2)}$ es un múltiplo de la diagonal. Además, por la regla (5.6), para cualquier $l \geq 0$, la truncación $J_l(A^{(2)}(x))$ es la imagen de $J_{l+1}(A^{(1)}(x))$ (y entonces de $J_{l+1}(A(x))$) por una aplicación semialgebraica. Por lo tanto, si ponemos

$$\Omega^3 = E^3 \cap \mathbb{R}^4 \times \Omega(q-1) \times \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^{4(2q+2)},$$

obtenemos un tercer miembro de la partición requerida (5.8) así que (i') e (ii') se cumplen para E^3, Ω^3 . Finalmente, ponemos $E^4 = (\mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{D}) \times \mathbb{R}^{4(2q+1)} \setminus E^3$ y $\Omega^4 = \emptyset$. Para terminar, demostraremos las propiedades (i') e (ii') para el par $E^4, \Omega^4 = \emptyset$. Si un sistema $A(x)$ es tal que $J_{2q+2}(A(x)) \in E^4$ entonces $c_1^{(1)} \neq 0$ con las notaciones anteriores. Consideramos las transformaciones admisibles $\psi^2 = \psi_R, \psi^3 = \psi_S$ y la composición $\phi_A = \psi^3 \circ \psi^2 \circ \psi^1$ la cual no depende del $A(x)$ elegido para que $J_{2q+2}(A(x)) \in E^4$. Ponemos $\tilde{A}(x) = (\phi_A)_* A(x)$. Usando las reglas (5.7) y (5.6) podemos ver que $\tilde{A}(x) \in \mathcal{F}^{2q}$ y, si escribimos $\tilde{A}(x) = x^{-(2q+1)}(\tilde{A}_0 + x\tilde{A}_1 + x^2\tilde{A}_2 \cdots)$, entonces \tilde{A}_0 es un múltiplo de la matriz identidad y

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_0^{(1)} \\ c_1^{(1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto prueba que $\tilde{A}(x)$ está en forma final. Por otro lado, $J_{4q+1}(\psi_*^2 A^{(1)}(x))$ es la imagen de $J_{2q+2}(A^{(1)}(x))$ por una aplicación semialgebraica y $\Pi_{4q}(\tilde{A}(x))$ es la imagen de $J_{4q+1}(\psi_*^2 A^{(1)}(x))$ por una aplicación semialgebraica. Esto demuestra las propiedades (i') e (ii') para el par $E^4, \Omega^4 = \emptyset$ con lo que hemos terminado. \square

Observación 5.3.5 Si miramos con más detenimiento la demostración de la Proposición 5.3.4, podemos darnos cuenta de que en el Teorema 5.3.1 podemos poner $\Sigma_q \subset \mathbb{R}^{4(2q+1)}$ y $A(x) \in \mathcal{F}^q$ separado si y sólo si $J_{2q+1}(A(x)) \in \Sigma_q$.

Ejemplos 5.3.6 Este ejemplo es para mostrar que hay un algoritmo para obtener el conjunto semialgebraico Σ_q del Teorema 5.3.1 (esto es, una colección finita de polinomios con igualdades o desigualdades describiendo el conjunto). Este algoritmo no se realiza de forma explícita en la prueba que hemos realizado. Sin embargo, como ilustración, y para un uso posterior en el siguiente párrafo, daremos aquí una descripción parcial de el conjunto Σ_q (contenido en $\mathbb{R}^{4(2q+1)}$ conforme a la nota anterior) en los casos $q = 0$ y $q = 1$.

Usamos en ambos casos la notación, para $A(x) \in \mathcal{F}^q$,

$$A = x^{-(q+1)}(A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \cdots), \quad A_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}.$$

Denotamos también por $\Delta(L)$ el discriminante de una matriz (cuadrada, bidimensional) L .

(i) Para $q = 0$ el sistema tiene matriz $A(x) = x^{-1}(A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \dots)$ y tenemos

$$A \text{ separado} \Leftrightarrow \Delta(A_0) = (a_0 - d_0)^2 + 4b_0c_0 \geq 0,$$

que da una descripción completa de $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^4$ (dependiendo sólo de $A_0 \in \mathbb{R}^4$).

(ii) Para $q = 1$ el sistema tiene matriz $A(x) = x^{-2}(A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \dots)$. La descripción completa de $\Sigma_1 \subset \mathbb{R}^{12}$ requiere más pasos. Tenemos que Σ_1 está contenido en el conjunto $\{\Delta(A_0) \geq 0\} \times \mathbb{R}^8$ y contiene su interior $\{\Delta(A_0) > 0\} \times \mathbb{R}^8$, pero no contiene toda la frontera $\{\Delta(A_0) = 0\} \times \mathbb{R}^8$. Un subconjunto semialgebraico explícito de Σ_1 en el que estamos interesados es el siguiente. Dada una matriz A_0 con $c_0 \neq 0$, consideramos el polinomio lineal real en cuatro variables

$$H_{A_0}(Z) = -\frac{1}{2}(d_0 - a_0)Z_1 + c_0Z_2 - \frac{1}{4c_0}(d_0 - a_0)^2Z_3 + \frac{1}{2}(d_0 - a_0)Z_4. \quad (5.9)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \{(A_0, A_1) \in \mathbb{R}^8 : \Delta(A_0) = 0, c_0 \neq 0, H_{A_0}(A_1) > 0\} \times \mathbb{R}^4 &\subset \Sigma_1 \\ \{(A_0, A_1) \in \mathbb{R}^8 : \Delta(A_0) = 0, c_0 \neq 0, H_{A_0}(A_1) < 0\} \times \mathbb{R}^4 &\subset \mathbb{R}^{12} \setminus \Sigma_1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

(Donde usamos la notación obvia $H_{A_0}(A_1) = H_{A_0}(a_1, b_1, c_1, d_1)$). La prueba de (5.10) se consigue a partir de la prueba de la Proposición 5.3.4: Si $\Delta(A_0) = 0$ y $c_0 \neq 0$, la matriz $Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2c_0 & d_0 - a_0 \end{pmatrix}$ es inversible y QA_0Q^{-1} es triangular superior con elementos iguales en la diagonal y una entrada igual a 1 encima de la diagonal. La transformación lineal (admisibles) $\psi_{Q^{-1}}$ da un nuevo sistema con los nuevos coeficientes, QA_1Q^{-1} , de grado -1 tiene una entrada igual a $H_{A_0}(A_1)$ debajo de la diagonal. Después de una ramificación seguida de una transformación shearing, tendremos un nuevo sistema en \mathcal{F}^2 con el primer término un múltiplo de la matriz identidad y el segundo término igual a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ H_{A_0}(A_1) & 0 \end{pmatrix}$. El signo de $H_{A_0}(A_1)$ es el signo del discriminante de este segundo término y entonces tenemos (5.10), usando la Proposición 5.2.5.

5.4. Carácter no K -semialgebraico de la dicotomía

En esta sección veremos la negación de la existencia de un criterio constructivo en términos de las series meromorfas que forman las entradas de la matriz del sistema. Para ello enunciaremos el siguiente teorema.

Teorema 5.4.1 Para cada $q \geq 1$, ni $\mathcal{S}^q \subset K^4$ ni $\mathcal{I}^q \subset K^4$ es K -semialgebraico en K^4 .

Usando que $\mathcal{F}^q \subset K^4$ es K -semialgebraico (ver Ejemplo 5.4.3,(ii) abajo), obtenemos

Corolario 5.4.2 Ni el conjunto \mathcal{S} de sistemas separados ni el conjunto \mathcal{I} de sistemas enlazados es K -semialgebraico en K^4 .

Notar que el orden (total) estandar en el cuerpo $K = \mathbb{R}(\{x\})$ de funciones meromorfas reales (gérmenes en $x = 0$):

$$a \in K, a > 0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, a(x) > 0 \forall x \in (0, \varepsilon).$$

También recordar que en terminología estandar: un subconjunto Ω de K^n es llamado un *conjunto K -semialgebraico básico* si es de la forma

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in K^n : P(\mathbf{x}) = 0, Q_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, Q_r(\mathbf{x}) > 0\} \subset K^n \quad (5.11)$$

donde $P, Q_j \in K[X_1, \dots, X_n]$. El conjunto Ω diremos que es un (*conjunto K -semialgebraico básico*) *abierto* si no tiene ecuación de la forma $P(\mathbf{x}) = 0$ en su descripción (o que P es el polinomio nulo). Un subconjunto de K^n se llamará *K -semialgebraico* si es la unión finita de conjuntos K -semialgebraicos básicos de K^n . Las uniones e intersecciones finitas de conjuntos K -semialgebraicos de K^n son también K -semialgebraicos, así como sus complementarios en K^n . Notar que la intersección de dos conjuntos K -semialgebraicos básicos (resp. conjuntos K -semialgebraicos básicos abiertos) es un conjunto K -semialgebraico básico (resp. conjunto K -semialgebraico básico abierto), pero no necesariamente su unión.

Ejemplos 5.4.3 Los siguientes ejemplos de conjuntos K -semialgebraicos serán usados en lo que sigue.

- (i) Para cada $r \in \mathbb{Z}$, el conjunto $\mathcal{L}^r = \{a \in K : -a^2 + x^{2r-1} > 0\}$ es K -semialgebraico en K y consiste exactamente en el conjunto de las series meromorfas con orden mayor o igual a r . También, el conjunto de series con orden exactamente r , el cual es $\mathcal{L}^r \setminus \mathcal{L}^{r+1}$, es K -semialgebraico en K .
- (ii) Como una consecuencia de el ejemplo anterior, para cada $q \geq 0$, el subconjunto $\mathcal{F}^q = (\mathcal{L}^{-(q+1)})^4$ de sistemas con rango de Poincaré no mayor que q es K -semialgebraico en K^4 .

- (iii) El subconjunto $\mathcal{S}^0 \subset K^4$ de sistemas separados con rango de Poincaré no mayor que 0 es K -semialgebraico: Usando las notaciones del Ejemplo 5.3.6,(i), un sistema $A(x) \in \mathcal{F}^0$ es separado si y sólo si $(a_0 - d_0)^2 + 4b_0c_0 \geq 0$ que es equivalente a decir que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ está en \mathcal{F}^0 y, o bien $(a - d)^2 + 4bc$ tiene orden mayor o igual a -1 ó $(a - d)^2 + 4bc$ tiene orden -2 y $(a - d)^2 + 4bc > 0$.

Recordar la notación \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}^q) para el subconjunto de sistemas separados (resp. sistemas separados en \mathcal{F}^q). El Ejemplo 5.4.3,(iii) muestra que el Teorema 5.4.1 no puede extenderse al caso $q = 0$. Por otro lado, usando el Ejemplo 5.4.3,(ii) y teniendo en cuenta que $\mathcal{S}^1 = \mathcal{F}^1 \cap \mathcal{S}^q$, para todo $q \geq 1$, y además que $\mathcal{S}^1 = \mathcal{F}^1 \cap \mathcal{S}$ y que $\mathcal{I} = K^4 \setminus \mathcal{S}$, para probar el Teorema 5.4.1 y el Corolario 5.4.2, es suficiente probar el caso particular $q = 1$:

Teorema 5.4.4 *El conjunto \mathcal{S}^1 no es K -semialgebraico en K^4 .*

A partir de ahora nos centraremos en la demostración del Teorema 5.4.4.

Comenzaremos introduciendo algunas notaciones. Si $A(x) = x^{-2}(A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \dots) \in \mathcal{F}^1$, pondremos para $j \geq 0$

$$\Pi_j : \mathcal{F}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4, \Pi_j(A) := A_j \equiv (a_j, b_j, c_j, d_j).$$

Por otro lado, dado $P \in K[\underline{X}]$ con $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, escribimos

$$P = \sum_{I \in \mathbb{N}^4} P_I \underline{X}^I \text{ with } P_I(x) = \sum_{k=\nu_I}^{\infty} P_{I,k} x^k \in K, P_{I,k} \in \mathbb{R} \text{ and } \nu_I \in \mathbb{Z}.$$

Donde usaremos la notación usual $\underline{X}^I = X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} X_4^{i_4}$ y $|I| = i_1 + i_2 + i_3 + i_4$ if $I = (i_1, i_2, i_3, i_4)$. Consideramos la *aplicación peso*

$$\rho : \mathbb{N}^4 \times \mathbb{Z}, \rho(I, k) = k - 2|I|$$

y definimos

$$\beta = \beta(P) = \min\{\rho(I, k) / P_{I,k} \neq 0\}$$

la cual está bien definida y es el número entero asociado al polinomio P si $P \neq 0$, llamado el ρ -orden de P . Entonces escribimos el polinomio en serie de potencias

$$P(\underline{X}) = P^{(\beta)}(\underline{X}) + P^{(\beta+1)}(\underline{X}) + \dots \quad (5.12)$$

donde

$$P^{(j)}(\underline{X}) = \sum_{(I,k) \in \mathbb{N}^4 \times \mathbb{Z} : \rho(I,k)=j} P_{I,k} x^k \underline{X}^I \in K[\underline{X}] \text{ para } j \geq \beta$$

es llamada la ρ -componente homogénea de P de grado j . Por otro lado, para un sistema $A(x) \in \mathcal{F}^1$, usaremos la siguiente notación para la extensión de series de Laurent $P(A) \in \mathbb{R}(\{x\})$:

$$P(A) = C_\beta(P, A)x^\beta + C_{\beta+1}(P, A)x^{\beta+1} + \dots, C_j(P, A) \in \mathbb{R}.$$

A pesar de la notación, cada coeficiente $C_j(P, A)$ depende sólo de una truncación finita de el sistema A . Es posible dar explícitamente las formulas de los valores de $C_j(P, A)$ en términos de los ρ -componentes homogéneos de P . Sin embargo, sólo describiremos estas fórmulas para la familia de sistemas que vamos a utilizar en lo que sigue.

Consideramos el subconjunto T de sistemas en \mathcal{F}^1 dado por

$$T = \{A = x^{-2}A_0 + x^{-1}A_1 : \Delta(A_0) = 0\}. \quad (5.13)$$

Recordar que Δ denota el discriminante. Denotamos por $\Sigma_\Delta = (\Delta = 0)$ el subconjunto semialgebraico de \mathbb{R}^4 de aquellas matrices con discriminante cero y, para cada $L \in \mathbb{R}^4$, denotamos por $D_L \Delta$ la diferencial del discriminante en L (considerado como una función diferencial $\Delta : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$).

Lemma 5.4.5 *Sea $P \in K[\underline{X}]$ un polinomio no nulo y denotamos por $\beta \in \mathbb{Z}$ su ρ -orden. Entonces existe un número natural $t = t(P) \geq 0$ y un número finito de polinomios reales*

$$R_0, R_1, \dots, R_n \in \mathbb{R}[\underline{X}],$$

ninguno de los cuales es divisible por Δ , tal que para cada $A \in T$

$$\begin{aligned} C_\beta(P, A) &= 0, C_{\beta+1}(P, A) = 0, \dots, C_{\beta+t-1}(P, A) = 0, \\ C_{\beta+t}(P, A) &= \sum_{i=0}^n R_i(A_0) (D_{A_0} \Delta(A_1))^i \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde $A_j = \Pi_j(A)$, $j = 0, 1$.

Demostración .- Consideramos la descomposición (5.12) de P en ρ -componentes homogéneos y ponemos para cada $j \geq \beta$,

$$\bar{P}^{(j)} = \sum_{(I,k) \in \mathbb{N}^4 \times \mathbb{Z} : \rho(I,k)=j} P_{I,k} \underline{X}^I \in \mathbb{R}[\underline{X}].$$

Entonces tenemos, para cada número natural $s \geq 0$ y $A \in T$,

$$P^{(\beta+s)}(A) = x^{\beta+s} \overline{P}^{(\beta+s)}(A_0 + xA_1).$$

Usando la fórmula de Taylor para funciones en varias variables, obtenemos, para $s \geq 0$,

$$C_{\beta+s}(P, A) = \sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} D_{A_0}^i \overline{P}^{(\beta+s-i)}(A_1, \dots, A_1), \quad (5.15)$$

donde, si f es una función de clase C^∞ en un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$ entonces $D_a^i f$ denota la i -ésima derivada iterada de f en a , una forma multilineal sobre \mathbb{R}^n de grado i (ver [5]).

Ahora, para $s \geq 0$, sea k_s igual a ∞ si $\overline{P}^{(\beta+s)} = 0$ o el máximo entero no negativo k tal que Δ^k divide el polinomio $\overline{P}^{(\beta+s)}$. De otra manera, si $k_s \neq \infty$ podemos escribir

$$\overline{P}^{(\beta+s)} = \Delta^{k_s} R^{(s)},$$

donde $R^{(s)} \in \mathbb{R}[X]$ no es divisible por Δ . En este caso, una iteración de la fórmula de Leibnitz para la derivada del producto da, para cada $A(x) = x^{-2}A_0 + x^{-1}A_1 \in T$,

$$\begin{aligned} D_{A_0}^i \overline{P}^{(\beta+s)}(A_1, \dots, A_1) &= 0 \text{ si } i < k_s \text{ y} \\ D_{A_0}^{k_s} \overline{P}^{(\beta+s)}(A_1, \dots, A_1) &= k_s! (D_{A_0} \Delta(A_1))^{k_s} R^{(s)}(A_0) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Veamos que el número natural

$$t = t(P) = \min\{k_i + i : i \geq 0\}$$

tiene las propiedades requeridas. Por un lado, si $0 \leq s < t$ entonces $k_{s-i} > i$ para $i = 0, 1, \dots, s$. Tendremos en este caso, por (5.15) y (5.16), que $C_{\beta+s}(P, A) = 0$ para cada $A \in T$. Por otro lado, notar que $k_{t-i} \geq i$ para $i = 0, 1, \dots, t$ y entonces, para cada i , otra vez usando (5.15) y (5.16), tenemos

$$D_{A_0}^i \overline{P}^{(\beta+t-i)}(A_1, \dots, A_1) = \begin{cases} 0, & \text{si } k_{t-i} > i; \\ i! (D_{A_0} \Delta(A_1))^i R^{(\beta+t-i)}(A_0), & \text{si } k_{t-i} = i. \end{cases}$$

Finalmente $n = \#\{i \in \{0, \dots, t\} : k_{t-i} = i\}$ y renombramos los polinomios $R^{(\beta+t-i)}$ en la ecuación anterior para la cual $k_{t-i} = i$ para tener (5.14). \square

El siguiente lema establece que un polinomio no nulo puede anularse sólo en T en un “pequeño” subconjunto (donde T está definido en (5.13)). Para un espacio topológico X y un subconjunto $Y \subset X$ usamos la notación $Int^X(Y)$ para el interior de Y en X .

Lemma 5.4.6 Sea $P \in K[X]$ con $P \neq 0$ y sea $E = T \cap \{P = 0\}$ el subconjunto de sistemas A en T para el cual $P(A) = 0$. Entonces el conjunto

$$\mathcal{D}_P = \{A_0 \in \Sigma_\Delta : \text{Int}^{\mathbb{R}^4}(\Pi_1((\Pi_0)^{-1}(A_0) \cap E)) \neq \emptyset\} \quad (5.17)$$

tiene interior vacío dentro de Σ_Δ .

Demostración .- Sean t, n y R_0, R_1, \dots, R_n como en el Lema 5.4.5 satisfaciendo (5.14) y sea

$$\Gamma = \Sigma_\Delta \cap \{L \in \mathbb{R}^4 : R_0(L) = 0\}.$$

Es un subconjunto semialgebraico con interior vacío dentro de Σ_Δ (desde que Δ no divide a R_0). Consideramos para cada $A_0 \in \Sigma_\Delta$ el polinomio

$$F_{A_0}(Z) = \sum_{l=0}^n (D_{A_0} \Delta(Z))^l R_l(A_0) \in \mathbb{R}[Z].$$

Por construcción, F_{A_0} es un polinomio con término constante no nulo si $A_0 \notin \Gamma$ (notar que $D_L \Delta(Z)$ es un polinomio homogéneo de grado 1 para cada L). En particular, para $A_0 \notin \Gamma$, F_{A_0} no es divisible por Δ y $\{F_{A_0} = 0\} \cap \Sigma_\Delta$ tiene interior vacío en Σ_Δ . Por otro lado, si $A \in E$ entonces $C_j(P, A) = 0$ para cada $j \geq \beta = \beta(P)$ con la notación introducida antes del Lema 5.4.5. Usando (5.14), $C_{\beta+t}(P, A) = F_{A_0}(A_1) = 0$ para cada $A \in E$. Esto es,

$$\Pi_1((\Pi_0)^{-1}(A_0) \cap E) \subset \{F_{A_0} = 0\}.$$

Concluimos que si $A_0 \notin \Gamma$ entonces $A_0 \notin \mathcal{D}_P$ y hemos terminado. \square

Necesitamos un tercer lema antes de poder hacer la demostración del Teorema 5.4.4. Para eso, usaremos las notaciones del Ejemplo 5.3.6, (ii). En particular, hacemos uso del polinomio homogéneo $H_{A_0} \in \mathbb{R}[Z]$ de grado 1 definido en (5.9). Recordar que H_{A_0} está definido para todo $A_0 \in \Sigma_\Delta$ excepto para un subconjunto semialgebraico $\Gamma_1 \subset \Sigma_\Delta$ para el cual se satisface $\text{Int}^{\Sigma_\Delta}(\Gamma_1) = \emptyset$ (Γ_1 definido por $\{c_0 = 0\}$ con la notación del ejemplo mencionado). Además, es fácil ver que existe un conjunto semialgebraico $\Gamma \subset \Sigma_\Delta$ con $\Gamma_1 \subset \Gamma$ e $\text{Int}^{\Sigma_\Delta}(\Gamma) = \emptyset$ tal que H_{A_0} y $D_{A_0} \Delta$ son linealmente independientes sobre \mathbb{R} si $A_0 \in \Sigma_\Delta \setminus \Gamma$. Para $A_0 \in \Sigma_\Delta \setminus \Gamma$ y $\varepsilon > 0$ consideramos el *cuadrante relativo a A_0 ε -positivo* como el conjunto $\mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon$ de sistema A en I definido por las ecuaciones

$$\Pi_0(A) = A_0, D_{A_0} \Delta(\Pi_1(A)) > \varepsilon \|\Pi_1(A)\|, H_{A_0}(\Pi_1(A)) > 0.$$

Por (5.10), los sistemas en el cuadrante ε -positivo son separados, esto es:

$$A_0 \in \Sigma_\Delta \setminus \Gamma \Rightarrow \mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon \subset T \cap \mathcal{S}^1 \quad (5.18)$$

Lemma 5.4.7 *Suponemos que podemos escribir $\mathcal{S}^1 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_r$ donde cada Ω_i es un conjunto básico K -semialgebraico en K^4 . Entonces existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, r\}$ tal que Ω_{i_0} satisface:*

- (i) Ω_{i_0} es un conjunto K -semialgebraico abierto.
- (ii) $\text{Int}^{\Sigma_\Delta}(\Pi_0(T \cap \Omega_{i_0})) \neq \emptyset$.
- (iii) Para cada $i = 1, \dots, r$, consideramos el conjunto $B(\Omega_i) \subset \Sigma_\Delta$ de matrices $A_0 \notin \Gamma$ para las cuales existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Pi_1(\mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon \cap \Omega_i)$ no es vacío y no acotado. Entonces

$$\text{Int}^{\Sigma_\Delta}(\Pi_0(T \cap \Omega_{i_0}) \cap B(\Omega_{i_0})) \neq \emptyset. \quad (5.19)$$

Demostración .- Definimos la partición $\{1, 2, \dots, r\} = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ donde

$$\begin{aligned} J_1 &= \{i : \Omega_i \text{ no es básico abierto} \}, \\ J_2 &= \{i : \Omega_i \text{ es básico abierto y } \text{Int}^{\Sigma_\Delta}(\Pi_0(T \cap \Omega_j)) = \emptyset\}, \\ J_3 &= \{i : \Omega_i \text{ es básico abierto y } \text{Int}^{\Sigma_\Delta}(\Pi_0(T \cap \Omega_j)) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Para $i \in J_1$, por definición de un conjunto básico abierto, existe una ecuación polinómica $\{P_i = 0\}$ en la descripción de Ω_i , donde $P_i \in K[\underline{X}]$ no es nulo. Consideramos para tal P_i el conjunto \mathcal{D}_{P_i} dado en el Lema 5.4.6, un subconjunto con interior vacío en Σ_Δ . Si el Lema 5.4.7 no es cierto entonces el siguiente conjunto tiene interior vacío en Σ_Δ :

$$M = \bigcup_{i \in J_1} \mathcal{D}_{P_i} \cup \bigcup_{i \in J_2} \Pi_0(T \cap \Omega_i) \cup \bigcup_{i \in J_3} \Pi_0(T \cap \Omega_i) \cap B(\Omega_i).$$

Fijando una matriz $A_0 \in \Sigma_\Delta \setminus \Gamma$ que no esté en M . Fijando $\varepsilon > 0$. Por (5.18), tenemos

$$\mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon = \mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon \cap \mathcal{S}^1 = \mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon \cap \bigcup_{i=1}^r \Omega_i$$

y por lo tanto

$$\Pi_1(\mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^r \Pi_1(\mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon \cap \Omega_i).$$

Si $i \in J_2$ entonces $\mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon \cap \Omega_i = \emptyset$ ya que $A_0 \notin \Pi_0(T \cap \Omega_i)$; si $i \in J_1$ entonces $\Pi_1(\mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon \cap \Omega_i)$ tiene interior vacío en \mathbb{R}^4 ya que $A_0 \notin \mathcal{D}_{P_i}$; si $i \in J_3$ entonces $\Pi_1(\mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon \cap \Omega_i)$ está acotado ya que $A_0 \notin B(\Omega_i)$. Hemos encontrado la contradicción deseada con la hipótesis $\Pi_1(\mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon)$ es abierto y no acotado en \mathbb{R}^4 . \square

Demostración del Teorema 5.4.4.- Suponemos que \mathcal{S}^1 es un conjunto K -semialgebraico veamos que llegamos a una contradicción. Por definición, \mathcal{S}^1 es la unión finita de conjuntos K -semialgebraicos $\mathcal{S}^1 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_r$.

Por el Lema 5.4.7, uno de estos conjuntos básicos tiene las propiedades (i-iii) de este lema, que denotaremos aquí simplemente por Ω . Escribimos

$$\Omega = \{A \in K^4 : Q_1(A) > 0, \dots, Q_l(A) > 0\}$$

donde cada $Q_j \in K[\underline{X}]$ es un polinomio no nulo. Aplicamos el Lema 5.4.5 a Q_j con lo que tenemos $t_j = t(Q_j) \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ y polinomios reales $R_{j,1}, \dots, R_{j,n_j} \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, ninguno de ellos divisible por Δ , tal que, para cada $A \in T$,

$$C_{\beta(Q_j)+s}(Q_j, A) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq s < t_j; \\ \sum_{i=1}^{n_j} R_{j,i}(\Pi_0(A)) (D_{\Pi_0(A)}\Delta(\Pi_1(A)))^i, & \text{si } s = t_j. \end{cases} \quad (5.20)$$

Usando (5.19) en el Lema 5.4.7,(iii), existe una matriz $A_0 \in \Sigma_\Delta$ la cual está en $B(\Omega)$ y tal que $R_{j,n_j}(A_0) \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, l$. Por definición de $B(\Omega)$, esto significa que $\Pi_1(\mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon \cap \Omega)$ es no acotado. Por definición de el cuadrante ε -positivo, $D_{\Pi_0(A)}\Delta(\Pi_1(A)) > \varepsilon \|\Pi_1(A)\|$ para cada $A \in \mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon$. Por lo tanto, escogiendo $A \in \mathcal{Q}_{A_0}^\varepsilon \cap \Omega$ con $\|\Pi_1(A)\|$ suficientemente grande, $C_{\beta(Q_j)+n_j}(Q_j, A)$ en (5.20) será distinto de cero y su signo será el de $R_{j,n_j}(A_0)$, para cada j . Como $A \in \Omega$ y $C_{\beta(Q_j)+n_j}(Q_j, A)$ es el primer coeficiente no nulo de la serie $Q_j(A)$, debemos tener

$$R_{j,n_j}(A_0) > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, l. \quad (5.21)$$

Ahora recordar que $A_0 \in B(\Omega)$ significa en particular que $A_0 \notin \Gamma$ y entonces los dos polinomios lineales $D_{A_0}\Delta, H_{A_0} \in \mathbb{R}[\underline{Z}]$ no son proporcionales. Entonces, el conjunto $N = \{A_1 \in \mathbb{R}^4 : D_{A_0}\Delta(A_1) > 0, H_{A_0} < 0\}$ no es vacío y no acotado. Si $A_1 \in N$ tiene una norma suficientemente grande y $A \in T$ satisface $\Pi_0(A) = A_0$ y $\Pi_1(A) = A_1$ entonces (5.20) y (5.21) implican que $Q_j(A) > 0$ para cada $j = 1, 2, \dots, l$ y entonces $A \in \Omega$. Pero esto es una contradicción ya que el sistema A es enlazado por (5.10), ya que $H_{A_0} < 0$.

Esto finaliza la prueba del Teorema 5.4.4. \square

5.5. Carácter (K, d) -semialgebraico de la dicotomía

El resultado negativo de la sección anterior motiva la búsqueda de criterios constructivos usando otras operaciones del cuerpo de Hardy K además de los correspondientes a un cuerpo ordenado. La primera operación natural es la derivada. En consecuencia a esto, diremos que un subconjunto $\Omega \subset K^n$ es K -diferencialmente-semialgebraico (o simplemente (K, d) -semialgebraico) si es la unión finita de subconjuntos de la forma

$$\{\mathbf{x} \in K^n : P(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots) = 0, Q_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots) > 0, \dots, Q_r(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots) > 0\}$$

donde $P, Q_j \in K \langle X \rangle = K[X, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots]$ son polinomios diferenciales en n variables (i.e., cada $X^{(i)}$ denota un vector de n indeterminadas) y $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$, etc. denota el vector de las sucesivas derivadas de los componentes de \mathbf{x} .

El siguiente resultado complementa el resultado de la sección anterior del Teorema 5.4.1. Afirma que si permitimos tomar derivadas, existe un criterio constructivo para decidir la dicotomía enlazado/separado para sistema con rango de Poincaré acotado.

Teorema 5.5.1 *Para cada $q \geq 0$, tanto \mathcal{S}^q como \mathcal{I}^q son subconjuntos (K, d) -semialgebraicos de K^4 .*

Para probar el Teorema 5.5.1 tenemos que probar que, para cada $q \geq 0$, el conjunto $\mathcal{S}^q \subset K^4$ de sistemas separados en \mathcal{F}^q es la unión finita de conjuntos de la forma

$$\{A \in K^4 : P(A) = 0, Q_1(A) > 0, \dots, Q_r(A) > 0\}$$

donde P y los Q_j son polinomios K -diferenciales en cuatro variables.

Recordar que un polinomio K -diferencial en n variables es un elemento

$$P(\underline{Z}, \underline{Z}^{(1)}, \dots, \underline{Z}^{(m)}) \in K \langle \underline{Z} \rangle = K[\underline{Z}, \underline{Z}^{(1)}, \dots, \underline{Z}^{(m)}, \dots]$$

donde $\underline{Z}^{(j)} = (Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)})$ (con $\underline{Z}^{(0)} = \underline{Z}$) y todo $Z_i^{(j)}$ son variables independientes. También, para $n = 4$, si $A \in K^4$ está escrito como una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces por definición ponemos

$$P(A) := P((a, b, c, d), (a', b', c', d'), (a'', b'', c'', d''), \dots, (a^{(m)}, b^{(m)}, c^{(m)}, d^{(m)})),$$

donde $a', a'', \dots, a^{(m)}$, etc. denotan las sucesivas derivadas de la serie $a \in \mathbb{R}(\{x\})$ con respecto a x .

El Teorema 5.5.1 será fácil de demostrar por el Teorema 5.3.1 una vez que observemos varias propiedades de los polinomios K -diferenciales en una variable ($n = 1$), recogidas en el siguiente lema.

Lemma 5.5.2 *Sea $Z = Z_1$ una única variable. Fijamos $r \in \mathbb{Z}$. Definimos recursivamente para cada número natural $s \geq 0$ los polinomios K -diferenciales*

$$\begin{aligned} R_{r,0} &= xZ^{(1)} - rZ \in K[Z, Z^{(1)}] \subset K\langle Z \rangle \\ R_{r,s} &= R_{r+s-1,0}(R_{r,s-1}) \in K[Z, Z^{(1)}, \dots, Z^{(s)}] \subset K\langle Z \rangle \quad \text{si } s \geq 1, \\ \tilde{R}_{r,s} &= \frac{R_{r,s}}{s!x^{r+s}} \in K\langle Z \rangle. \end{aligned}$$

Entonces, si $a = \sum_{i \geq r} a_i x^i$ es una serie con orden no menor que r ($a \in \mathcal{L}^r$ en la notación del Ejemplo 5.4.3,(i)), entonces tenemos que para cada $s \geq 0$ $\tilde{R}_{r,s}(a)$ es una serie de orden al menos 0 y $\tilde{R}_{r,s}(a)(0) = a_{r+s}$.

La prueba es un simple cálculo de algebra diferencial. Recordemos la composición de dos polinomios diferenciales en una variable está definida en el camino estandar extendiendo por linealidad la regla de composición de los monomios

$$\begin{aligned} Z^{(1)}(bZ^{l_0}(Z^{(1)})^{l_1} \dots (Z^{(m)})^{l_m}) &= b'Z^{l_0}(Z^{(1)})^{l_1} \dots (Z^{(m)})^{l_m} \\ + b \sum_{i=0}^m l_i Z^{l_0}(Z^{(1)})^{l_1} \dots (Z^{(i+1)})^{l_{i+1}} \dots (Z^{(m)})^{l_m}, & \quad b \in K. \end{aligned}$$

Este lema permite probar el Teorema 5.5.1 desde el Teorema 5.3.1 de la siguiente forma. Sean $Q_1, Q_2, \dots, Q_l \in \mathbb{R}[X]$ polinomios reales (en $4(2q+2)$ variables) que aparecen en la descripción de el conjunto semialgebraico $\Sigma_q \subset \mathbb{R}^{4(2q+2)}$ dado por el Teorema 5.3.1. Usando la notación

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a = x^{-(q+1)}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots), \text{ etc.},$$

el Lema 5.5.2 permite mostrar, para cada $j = 1, \dots, l$,

(i) $Q_j(a_0, \dots, d_0, \dots, a_{2q+2}, \dots, d_{2q+2}) > 0$ si y sólo si las series

$$Q_j(\tilde{R}_{0,(q+1)}(a), \dots, \tilde{R}_{0,(q+1)}(d), \dots, \tilde{R}_{0,3q+3}(a), \dots, \tilde{R}_{0,3q+3}(d))$$

son positivas y tienen orden 0.

(ii) $Q_j(a_0, \dots, d_0, \dots, a_{2q+2}, \dots, d_{2q+2}) = 0$ si y sólo si las series

$$Q_j(\tilde{R}_{0,q+1}(a), \dots, \tilde{R}_{0,q+1}(d), \dots, \tilde{R}_{0,3q+3}(a), \dots, \tilde{R}_{0,3q+3}(d))$$

pertenecen a \mathcal{L}^1 .

Sustituimos cualquiera de las desigualdades $Q_j > 0$ o ecuaciones $Q_j = 0$ en la descripción de Σ_q por su correspondiente condición sobre polinomios K -diferenciales de acuerdo a (i) y (ii) anteriores. Concluimos por el Teorema 5.3.1 que \mathcal{S}^q es (K, d) -semialgebraico (teniendo en cuenta el Ejemplo 5.4.3,(i)), entonces hemos probado el Teorema 5.5.1.

Bibliografía

- [1] BALSER, W. *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*. Universitext (2000), Springer-Verlag, New York.
- [2] BARKATOU, M.A.; PFLÜGEL, E. *On the Moser and super-reduction algorithms of systems of linear differential equations and their complexity*. Journal of Symbolic Computation 44 (2009), 1017-1036.
- [3] CANO, F.; MOUSSU, R.; SANZ, F. *Oscillation, spiralement, tourbillonnement*. Comm. Math. Helv., 75 (2000), 284-318.
- [4] CANO, F.; MOUSSU, R.; SANZ, F. *Pinceaux de courbes intégrales d'un champ de vecteurs analytique*. Astérisque, 297 (2004), 1-34.
- [5] DIEUDONNÉ, J. *Analyse Infinitésimal*. Hermann, 1997.
- [6] LEGAL, O.; SANZ, F.; SPEISSEGGGER, P. *Non-interlaced solutions of 2-dimensional systems of Linear Ordinary Differential Equations*. Proc. AMS, 141, 2429-2438 (2013)..
- [7] MILLER, C. *Course on Hardy Fields*. Communications of the Fields Institute of Mathematics, Toronto (Canada).
- [8] RAMIS, J.P.; SIBUYA, Y. *A new proof of multisummability of formal solutions of non linear meromorphic differential equations*. Ann. Inst. Fourier, 33 (1994), 811848..
- [9] SANZ, F.; CARNICERO, F.A. *Interlacing and Separation of Solutions of Linear Meromorphic ODEs*. Progress and Challenges in Dynamical Systems (2013), 161181..
- [10] WASOW, W. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. Interscience, New York, 1965 (re-edited Dover Publications Inc. 1987).

- [11] TURRITIN, H.L. *Convergent solutions of ordinary homogeneous differential equations in the neighborhood of a singular point.* *Ata Mathematica*, 93 (1955), 27-66.