



# **Universidad de Valladolid**

FACULTAD DE EDUCACIÓN DE SEGOVIA

**GRADO EN EDUCACIÓN EDUCACIÓN PRIMARIA**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

*MATERIAL MANIPULATIVO EN GEOMETRÍA*



**Autora: ANA LAURA MAHILLO TORREJÓN**

**Tutor académico: MATÍAS ARCE SÁNCHEZ**

## RESUMEN

En este trabajo, quiero resaltar la importancia del uso de material manipulativo en la enseñanza de geometría, haciendo una descripción del tipo de materiales que podemos usar para ello en la etapa de educación primaria, tanto material estructurado, como no estructurado. favoreciendo con ello un aprendizaje autónomo y el interés por la geometría. fomentando en todo momento el aprendizaje cooperativo y la inclusión de alumnos que presentan dificultades, adaptándonos a al ritmo de aprendizaje del alumno y despertando su interés a través de materiales que les resulten atractivos.

He querido destacar diferentes metodologías para llevar a cabo la aplicación práctica, destacando autores como M<sup>a</sup> Montessori, M<sup>a</sup> A. Canals y Loris Malaguzzi. y basándome en principios básicos para el aprendizaje de la geometría y las etapas para la organización del proceso de enseñanza, de Dienes, así como la evolución del pensamiento en dicho aprendizaje, según el modelo de Van Hiel.

**PALABRAS CLAVE:** metodología activa, material manipulativo, geometría.

# ÍNDICE

1. JUSTIFICACIÓN.....	1
2. OBJETIVOS.....	5
2.1. OBJETIVO GENERAL.....	5
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	5
3. MARCO TEÓRICO GENERAL.....	6
3.1. MARÍA MONTESSORI Y EL EMPLEO DE MATERIAL DIDÁCTICO.....	7
3.2. MARÍA ANTONIA CANALS Y LA GEOMETRÍA QUE NOS RODEA.....	8
3.3. LORIS MALAGUZZI Y EL AMBIENTE PREPARADO.....	10
4. MARCO TEÓRICO LIGADO AL APRENDIZAJE GEOMÉTRICO.....	11
5. METODOLOGÍA.....	18
6. MATERIAL NO ESTRUCTURADO.....	23
6.1. PAPEL.....	23
6.2. PALILLOS.....	29
6.3. PAJITAS.....	32
6.4. OTROS MATERIALES.....	36
7. MATERIAL ESTRUCTURADO.....	37
7.1. GEOPLANO.....	37
7.2. TANGRAM.....	42
7.3. MECANO.....	48
7.4. POLININÓS.....	51
7.5. GEOMAG.....	54
7.6. MATERIAL MONTESSORI.....	57
8. CONCLUSIÓN.....	60
9. BIBLIOGRAFÍA.....	61

# 1. JUSTIFICACIÓN

Con este trabajo quiero destacar la importancia del uso de materiales manipulativos. Este tipo de material favorece el ejercicio práctico, la experimentación, la motivación, la creatividad, el espíritu crítico y el aprendizaje cooperativo, con el fin de consolidar los conceptos geométricos trabajados. El permitir que cada alumno elija con qué material quiere trabajar partiendo de lo que más le motiva, favorece los distintos ritmos de aprendizaje, adaptándonos en cada momento a los alumnos y no ellos a nosotros. Esto va a facilitar en todo momento el principio de inclusión y de aceptación de las diferencias, nos va a permitir integrar en el aula de primaria a todo tipo de alumnos, ajustándonos a su ritmo y estilo de aprendizaje.

Como maestra de primaria y especializada en educación especial, me gustaría llevar a cabo este modelo integrador en el aula, trabajar directamente con todos mis alumnos de primaria, fomentando aprendizajes que valoren las diferentes capacidades de los alumnos, porque todos somos diferentes y todos nos podemos enriquecer con las distintas aportaciones y formas de pensar de nuestros compañeros.

El material manipulativo nos permite integrar a alumnos con diferentes discapacidades, alumnos con discapacidad auditiva; ofreciendo un estímulo visual diverso, alumnos con discapacidad motora; permitiéndoles una estimulación multisensorial, alumnos con discapacidad visual; trabajando el tacto con material manipulable el sistema háptico, etc.

“Bajo la palabra “material” se agrupan todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje.” (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988, p.13).

Según Gardenia (2009, p. 2):

- Proporcionan experiencias previas que muestran la necesidad de un determinado concepto.
- Clarifican o establecen un concepto.
- Ayudan a la adquisición de una determinada técnica matemática.

□ Proporcionan conceptos que conducen a la modificación de conocimientos anteriores

En mi trabajo quiero diferenciar entre dos tipos de materiales: material no estructurado y estructurado.

El material no estructurado es cualquier objeto tomado del entorno del niño/a como nos indica Cas callana (1991, p.30)

El primer material utilizado para la enseñanza es el que procede de sus propios juegos; los juguetes representativos como animales, muñecos, coches, a partir de ellos se puede establecer relaciones lógicas básicas, se pueden agrupar, clasificar, ordenar, seriar.

Es importante que todas las actividades se realicen con diversos materiales que favorezcan la generalización de un concepto.

Siguiendo con lo indicado por Cascallana (1991, p.31)

El material estructurado está diseñado para la adquisición conceptos concretos, aunque la mayoría los podemos usar para trabajar diferentes objetivos y distintos conceptos, siendo útil también para distintas edades, siempre que adaptemos su uso. Somos nosotros quien adaptamos la dificultad del material que empleamos, pasando de una actividad sencilla para niños de corta edad, a actividades complejas, para niños mayores.

Aunque un concepto se pueda adquirir, de forma habitual, con un material concreto, es importante que diversifiquemos, para trabajar un mismo objetivo, con el fin de que el niño generalice el aprendizaje y no lo asocie a un material determinado.

Para el uso de este material en la clase de matemáticas y más concretamente para la enseñanza de geometría, antes quiero destacar qué se entiende por geometría, por qué es importante enseñar geometría y cómo podemos emplear una metodología en la que prime el material manipulativo para ello y por qué.

**GEOMETRÍA** es ciencia, ya que todo lo que propone es demostrable matemáticamente. Estudia las representaciones espaciales, puntos, rectas, planos, polígonos, superficies... todo lo que da forma al espacio que vemos. La palabra es de origen griego. Geo: tierra y metría: medida.

Alsina (2004) indica que “educar geoméricamente es un objetivo docente clave, cuya finalidad debe ser facilitar el conocimiento del espacio tridimensional, desarrollando con ello la creatividad y los procesos de matematización” (p. 1)

Es importante reflexionar sobre las razones para enseñar Geometría. Si el maestro tiene claro el porqué, estará en condiciones de tomar decisiones más acertadas acerca de su enseñanza. Una primera razón para dar esta asignatura la encontramos en nuestro entorno inmediato, basta con mirarlo y descubrir que en él se encuentran muchas relaciones y conceptos geoméricos: la Geometría modela el espacio que percibimos, es decir, la Geometría es la Matemática del espacio. (Bishop (1983), citado por Bressan (2000), Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica)

Por ejemplo, nuestra clase: es muy probable que tenga forma rectangular donde podemos distinguir sus caras, vértices y aristas; las paredes y los techos generalmente son rectangulares; las paredes son perpendiculares al techo y éste es paralelo al suelo; las ventanas también son una figura geométrica con lados que son segmentos de recta; al abrir y cerrar la puerta se forman diferentes ángulos.

Así, el aprendizaje de la geometría es algo relevante para la ciudadanía por varios motivos (López y García, 2008, p. 30): la geometría se aplica en la realidad (en la vida cotidiana, la pintura, la escultura, la arquitectura, la carpintería, etcétera), la geometría se usa en el lenguaje cotidiano (por ejemplo, se dice: calles paralelas, la escalera en espiral, plaza circular, etcétera), la geometría sirve en el estudio de otras ramas de las Matemáticas (por ejemplo, un modelo geométrico de la multiplicación de números o expresiones algebraicas lo constituye el cálculo del área de rectángulos), la geometría permite desarrollar en los alumnos su percepción espacial, su capacidad de percepción visual, la abstracción, su habilidad para elaborar conjeturas acerca de las relaciones geométricas en una figura o entre varias y su habilidad para argumentar al tratar de validar las conjeturas que hace; y la geometría constituye el ejemplo clásico de ciencia organizada lógicamente y deductivamente (a partir de axiomas y postulados se deducen teoremas).

### ¿POR QUÉ ES IMPORTANTE ENSEÑAR GEOMETRÍA?

- Para conocer una rama de las Matemáticas más instructivas.
- Para cultivar la inteligencia.
- Para desarrollar estrategias de pensamiento.
- Para descubrir las propias habilidades creativas.
- Para valorar la utilidad de la materia.
- Para trabajar Matemáticas experimentalmente.
- Para agudizar la visión del mundo que nos rodea.
- Para disfrutar aprendiendo y enseñando.

(López y García, 2008, p 31)

### ¿QUÉ PAPEL TIENE EL MAESTRO EN ESTE PROCESO?

Nosotros vamos a ejercer de guías y mediadores en el aprendizaje. Preparando para ello, un ambiente que despierte el interés del niño. Favoreciendo así las fases de adquisición del conocimiento matemático: manipulativa, gráfica y simbólica.

Este trabajo, está diseñado con el fin de adquirir las competencias generales del Título de Grado, recogidas en la Memoria del Plan de Estudios del Título de grado Maestro/a en Educación Primaria por la Universidad de Valladolid.

- Adquirir la terminología educativa.
- Conocer las características psicológicas, sociológicas y pedagógicas del alumnado en sus distintas etapas del sistema educativo.
- Consecución de los objetivos, contenidos y criterios de evaluación que conforman el currículo de Primaria.
- Justificación de los principios y procedimientos empleados en la práctica educativa.
- Desarrollar la capacidad de iniciarse en la investigación, a través de la búsqueda de información sobre los diferentes tipos de materiales que podemos usar para enseñar geometría
- El fomento del espíritu de iniciativa y de una actitud de innovación y creatividad en el ejercicio de la profesión. Se aprecia el hecho de buscar materiales que ya utilizamos dándoles diferentes usos, con el fin de provocar el interés en nuestros alumnos.

## 2. OBJETIVOS

### 2.1. OBJETIVO GENERAL

Describir y analizar los diferentes tipos de materiales manipulativos, que podemos utilizar para la enseñanza de la geometría, que favorezcan un aprendizaje autónomo, que sea significativo y permita la integración, adaptándose en cada momento al ritmo de aprendizaje del alumno.

### 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar qué nos aporta la geometría en nuestras vidas.
- Diseñar actividades para trabajar la geometría a través de material manipulativo.
- Fomentar el interés por la geometría a través de actividades relacionadas con las propias vivencias de los alumnos.
- Analizar la importancia del uso de materiales manipulativos en la enseñanza de la geometría.
- Partir de los intereses del niño para desarrollar las actividades.
- Fomentar la participación y el interés por la geometría, partiendo de la iniciativa del niño en la resolución de problemas.
- Favorecer la integración de todos los alumnos a través del uso de materiales manipulativos.
- Crear ambientes que faciliten la interacción con los demás.
- Promover una actitud positiva hacia la geometría y sus aplicaciones en la vida real.

### 3. MARCO TEÓRICO GENERAL

A lo largo del siglo XX se ha ido extendiendo por todo Europa el concepto y uso de una metodología activa. Pensadores como Célestin Freinet, Ovide Decroly, María Montessori, las hermanas Agazzi...

Este cambio también ocurre en España con la Institución Libre de Enseñanza con Giner de los Ríos o la Escuela Moderna con Ferrer i Guardia, pero se detiene, con la llegada de la dictadura franquista. No es hasta los años 70, cuando se inicia de nuevo una verdadera renovación pedagógica, y es a partir de los años 80-90, con la reforma educativa y la LOGSE, cuando se fomenta la investigación, la formación del profesorado y se reflexiona sobre el proceso de enseñanza- aprendizaje, con referentes como las escuelas piagetianas, el pensamiento de Vigotsky, Bronfenbrenner, Ausubel, Bruner, Malaguzzi.

Es fundamental encontrar la relación que pueden tener las teorías constructivistas de Piaget, como con las corrientes sociohistóricas de Vigotsky, las corrientes ecológicas (Bronfenbrenner) y los modelos educativos de Reggio Emilia (Loris Magaluzzi).

No consiste sólo en ofrecer al niño diferentes materiales, sino de proporcionarle también, un ambiente que favorezca la interacción con los demás, y le permita despertar su interés por aprender. “Sentirse entero es para el niño (como para el hombre) una necesidad biológica y cultural: un estado vital de bienestar” (Malaguzzi, 1987)

Hay una lista extensa de autores que han influido en el uso de nuevas metodologías. María Montessori, con la utilización de materiales manipulables, Piaget con sus aportaciones en el modo de aprender matemáticas y actualmente no dejan de aparecer personas que están aportando grandes cambios en la forma de enseñar matemáticas. En nuestro país, destacan María Antonia Canals, Claudi Alsina, J. A. Fernández Bravo, Ángel Alsina y fuera de nuestras fronteras podríamos citar a Constance Kamii.

Por todo ello, yo quiero hacer referencia, por lo que a mí me aportan para llevar a cabo mi metodología de enseñanza, autores como: María Montessori, por el uso de una metodología basada en el respeto; Loris Malaguzzi, por el uso de ambientes preparados, materiales de la naturaleza, que favorecen la iniciativa del niño y respetan su ritmo de aprendizaje; María Antonia Canals, una muestra actual de cómo llevar a cabo la enseñanza de la geometría.

### 3.1. MARÍA MONTESSORI Y EL EMPLEO DE MATERIAL DIDÁCTICO

Entre los pedagogos que en el siglo XX se han preocupado por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, destaca María Montessori. Sus aportaciones no sólo han influido en la educación de su tiempo, han sido un referente para muchos otros autores y están volviendo a resurgir en la actualidad tanto en escuelas infantiles, como en colegios de Educación Primaria.

María Montessori nació en Italia en el año 1870. En esta época, aparecen diferentes ideologías y como consecuencia de ellas, nuevas metodologías que se aplican en educación.

Montessori comenzó su trabajo con niños/as con retraso mental usando metodologías sensoriales. Pero en 1907 decidió que esa metodología se podía llevar a cabo con todo tipo de niños y por ello creó la primera Casa de los Niños (Casa dei Bambini), en la que introdujo métodos que han llegado hasta nuestros días. En el método Montessori se trabaja “una educación no impartida por el maestro, sino que se trata de un proceso natural a través del cual el niño crece y se desarrolla experimentando de forma directa el mundo que le rodea” (Santerini, 2013). Se trata de un sistema por el cual el propio niño, mediante la autoeducación, consigue llegar a los conocimientos que le permiten avanzar, siendo el maestro/a por tanto un “administrador” de los estímulos y circunstancias que el niño/a se irá encontrando. Además, tal y como nos menciona Santerini (2013), los principales fundamentos del método Montessori son: un maestro/a con espíritu científico, un ambiente totalmente adaptado al niño/a y el uso de un material limitado y científico.

Con esta metodología se pretende que el niño desarrolle su espíritu crítico que, a través de sus intereses y su propia motivación, vaya adquiriendo conocimientos. Se trata de que sea él mismo el que busque respuestas a las preguntas que le plantea la actividad.

Montessori defendió siempre un desarrollo integral del niño, desde la más temprana edad, donde las matemáticas juegan un papel fundamental. Concibe la mente humana como una “mente matemática” en actividad continua. El ser humano emplea relaciones matemáticas en actos tan cotidianos como subir unas escaleras

De aquí la importancia que María Montessori da al desarrollo de materiales didácticos. A través de estos materiales se desarrollan las capacidades del niño, entre

ellas, las que se refieren a aprendizajes matemáticos. Pero la importancia de este material no radica en sí mismo, sino es cómo se emplea.

A través de la manipulación del material Montessori, el niño es capaz de descubrir las relaciones entre las figuras y deducir las reglas geométricas que se derivan.

María Montessori dice “Nos parece que el gozo que invade a un niño cada vez que mediante un trabajo inteligente alcanza un nuevo nivel mental, puede ser tan grande como el que invade a un licenciado al encontrar las bases para la solución de un caso”.

Derivado del origen de la palabra geometría, María Montessori tuvo clara la relación que existe entre la geometría, su material de aprendizaje y la realidad en la que vivimos. Esto supone una forma de experimentación que favorece al niño su creatividad.

Esta autora desarrolla una serie de materiales, de acuerdo con su filosofía docente, que detallo en el apartado de materiales estructurados, en concreto material Montessori.

### 3.2. MARÍA ANTONIA CANALS Y LA GEOMETRÍA QUE NOS RODEA

Según M.<sup>a</sup> Antonia Canals, la Geometría debe ser aprendida intuitivamente, a partir de la vida cotidiana, ya que la geometría surge de todo aquello que nos rodea, y esto es lo que debemos hacer ver a nuestros alumnos. “Desde la experimentación con objetos concretos, el niño descubre paulatinamente aspectos de la forma complejos para él” (Saá 2002, p.147). Como, por ejemplo, que la forma, no depende de la posición que tengan los objetos y que los objetos no varían sólo por su tamaño.

**La geometría se constituye a partir de tres aspectos inseparables, según M.<sup>a</sup> Antonia Canals (1997, p. 32):**

**- La posición:** Primeras relaciones espaciales para situarse uno mismo y situar los objetos entre sí; direccionalidad y relaciones basadas en criterios de medida (Ej.: determinar la posición por sistema de coordenadas).

**- Las formas:** Reconocimiento, definición y clasificación de figuras; construcción de las figuras y cuerpos conocidos, y observación y análisis de sus propiedades.

- **Los cambios de posición o de forma:** Reconocimiento en el entorno y en el arte de las diversas transformaciones; la observación y el estudio de sus leyes de funcionamiento y su relación con las distintas familias de figuras y cuerpos. A través de la geometría, no sólo podemos comprender estos aspectos, la geometría nos capacita para “poder incidir en el espacio, resolviendo todo tipo de situaciones” Canals (1997, p.33)

Para conseguir desarrollar en los alumnos un auténtico conocimiento geométrico, **son necesarios tres pasos**, de acuerdo con M.<sup>a</sup> Antonia Canals:

**El primero** sería explorar el espacio. Como ya se ha comentado con anterioridad, los niños necesitan de la experiencia para poder construir aprendizajes reales, no es suficiente con obtener información de fuera. Desde que nacen, los niños aprenden a través de la observación y experimentación del mundo que les rodea. De aquí la importancia de enseñar a través de materiales manipulables con los que puedan experimentar.

**El segundo** paso sería comparar los elementos observados. Es importante que el niño establezca relaciones entre unos elementos y otros, estableciendo relaciones, razonando, deduciendo, para finalmente llegar al conocimiento, en este caso, el conocimiento geométrico.

**El tercer** paso sería el de expresar verbalmente aquello que han observado y las acciones realizadas para poder interiorizar el conocimiento.

Alsina (2004, p.15), cita a M.<sup>a</sup> Antonia Canals diciendo:” si sabemos proponer la experimentación de forma adecuada a cada edad y a partir de aquí fomentar el diálogo y la interacción necesarias, el material, lejos de ser un obstáculo que nos haga perder el tiempo o dificulte el paso a la abstracción, la facilitará en manera, porque fomentará el descubrimiento y hará posible un aprendizaje sólido y significativo”.

### 3.3. LORIS MALAGUZZI Y EL AMBIENTE PREPARADO

Educador y pedagogo, fundador de la pedagogía Reggio Emilia. Esta pedagogía es reconocida como la mejor pedagogía preescolar del mundo por la UNESCO y recomendada por la Unión Europea y la Universidad de Harvard, es una de las pedagogías alternativas que está resurgiendo y extendiéndose cada vez más.

Su origen se remonta al año 1945, al terminar la segunda Guerra Mundial, en la ciudad italiana Reggio Emilia. Fruto de la iniciativa de la comunidad y promovido por Loris Malaguzzi: “los niños tienen 100 maneras de expresarse, pero les robamos 99”.

Se basa en el uso y cuidado de los 100 lenguajes, es decir, los diferentes códigos comunicativos y formas de comprensión y expresión de los niños.

Malaguzzi dice en “Los cien lenguajes de la infancia”, que “es un dato indudable el hecho de que la escuela tiene derecho a un ambiente propio” (Malaguzzi. 2005, p.40)

El educador adquiere un rol de guía o facilitador, donde su intervención se basa en la escucha y observación, dejando que sea el niño quien explore libremente según sus intereses.

El objetivo es crear una escuela amable, activa, inventiva, habitable y comunicable. Un lugar de investigación, aprendizaje y reflexión, donde se encuentran bien las familias, los niños y los educadores.

Las escuelas con enfoque Reggio Emilia están centradas en los proyectos. Algo tan de moda actualmente en las escuelas de primaria y secundaria, sale de esta pedagogía.

Reggio Emilia crea alumnos cooperativos y colaborativos, acostumbrados a trabajar en equipo y a encontrar soluciones, con buenas habilidades de análisis y síntesis.

Hoyuelos (2004:128): “Malaguzzi privilegia el aprendizaje sobre la enseñanza. Para este pedagogo, el objetivo de la enseñanza no es donar aprendizajes, sino ocasionar diversas condiciones de aprendizaje”.

El espacio también ocupa un lugar primordial en esta filosofía, pues actúa como tercer maestro, ya que entienden que el simple uso del espacio promueve relaciones, comunicaciones y encuentros. Por eso, en Reggio Emilia -como en Montessori- se cuida mucho el espacio, que esté bien decorado, sea acogedor y ofrezca distintas propuestas motivadoras.

## 4. MARCO TEÓRICO LIGADO AL APRENDIZAJE GEOMÉTRICO

Para describir las fases de la metodología activa quiero hacer referencia a Dienes (1977), el cuál plantea **cuatro principios básicos para el aprendizaje de la matemática**, que son los siguientes:

- **Principio dinámico.** El aprendizaje se consigue partiendo de la propia experiencia del niño hasta llegar a la categorización. Esto se da a través de ciclos que, a su vez, se dividen en tres etapas: una etapa del juego preliminar; una etapa más estructurada y constructiva; y, una etapa de anclaje, en la que, a partir de la experiencia del niño se consiguen formar conceptos matemáticos.
- **Principio de construcción.** Según el cual, la construcción se da antes del análisis del concepto. El niño tiene contacto por primera vez con las realidades matemáticas a través de la construcción, la manipulación y el juego.
- **El principio de variabilidad perceptiva.** Se comparan una serie de estructuras abstrayendo lo esencial de todas ellas para percibir sus propiedades puramente estructurales.
- **El principio de la variabilidad matemática.** Cada concepto matemático posee más de una variable, con lo cual, para formular el concepto comprobando lo que no varía, es necesario ir probando todas las variaciones que se puedan hacer previamente.
- **Principio de concretización múltiple o de Variabilidad perceptiva.** Un concepto se va a poder presentar de tantas formas, como individuos diferentes haya y su manera de formar conceptos, como de su capacidad de abstracción. Dienes (1970, p.31).

Dienes (1981, p.8) indica además que “existen diferentes etapas que, naturalmente, habrá que tener en cuenta en la organización del proceso de enseñanza de las matemáticas, si se pretende que todos los niños accedan a ella”

Y propone el autor **seis etapas para acceder:**

- **Primera Etapa:** Adaptación. A esta etapa corresponden los juegos libres o preliminares, como actividades “desordenadas”. Se deja que el niño juegue libremente, que interactúe con los objetos, los explore y la actividad sea algo atractivo para él, sirviendo así de adaptación para las siguientes etapas.
- **Segunda Etapa:** Estructuración. Se caracteriza por ofrecer una actividad estructurada, favoreciendo gran cantidad de experiencias que llevan todas al mismo concepto, permitiendo así introducir las reglas de juego (restricciones). Sin embargo, se caracteriza porque todavía no está claro lo que se busca.
- **Tercera Etapa:** Abstracción (Juego de Isomorfismo). En esta etapa los niños son capaces de deducir la estructura común de los juegos, sin tener en cuenta otros aspectos que carecen de interés. Aquí, se interioriza la operación en tanto relaciona aspectos de naturaleza abstracta, como la comparación entre dos objetos diferentes que comparten algunos aspectos, dando lugar a la toma de conciencia de la estructura de los juegos realizados. Consiste en hacer que el niño realice juegos que poseen la misma estructura pero que tiene una apariencia diferente.
- **Cuarta Etapa:** Representación Gráfica o Esquemática. Representación de la estructura común de manera gráfica o esquemática como forma de visualización o manifestación de la misma.
- **Quinta Etapa:** Descripción de las Representaciones. Es donde se nombran y se explican las propiedades de la representación, usando para ello el lenguaje técnico del procedimiento u operación e introduciendo el lenguaje simbólico de las matemáticas.
- **Sexta Etapa:** Formalización o Demostración. En este momento el niño es capaz de exponer lo aprendido de manera segura y explicando cada uno de los procesos anteriores.

Coincidimos con Goncalves (2006, p. 96) en su visión sobre la enseñanza de la geometría:

La enseñanza de la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas sobre el papel; en la mayoría de los casos, los alumnos no cuentan con objetos, formas, ejemplos reales que les permitan captar mejor los contenidos; las clases de geometría generalmente son dictadas de manera abstracta, razón por la cual, surge la necesidad de implementar nuevas estrategias al momento de enseñarla. En este sentido, el educador tiene la obligación de buscar y/o crear estrategias que permitan el desarrollo y razonamiento intelectual de los estudiantes. (p. 96)

Este autor destaca la importancia de conocer y aplicar el modelo Van Hiele para favorecer el desarrollo de pensamiento geométrico la enseñanza de la geometría y en los niveles propuestos por este modelo para el desarrollo del pensamiento geométrico.

En la línea de lo establecido anteriormente, el modelo Van Hiele (1986 p.168) establece las **etapas por las que pasa el niño en la evolución del pensamiento geométrico, hasta llegar al aprendizaje significativo del mismo:**

- **Nivel 0, visualización:** el niño reconoce figuras geométricas globalmente, por su forma, no diferencia las partes que componen la figura. Reconoce las figuras, pero no es capaz de describir sus propiedades. Hace descripciones visuales y las compara con elementos de su entorno que le resultan familiares. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.

Para Fouz tres son las características fundamentales de este nivel (Fouz, 2003, p. 69):

- 1) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.
- 2) Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una ventana, etc.). No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.

3) No reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo.

- **Nivel 1, análisis:** el niño reconoce las partes y propiedades de las figuras geométricas, pero no es capaz de relacionar unas con otras, ni tampoco asociar propiedades. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones de la geometría se establecen a partir de propiedades, no puede elaborar definiciones.

Para Fouz en este nivel (Fouz, 2003 p. 69):

1) Se perciben las componentes y propiedades de los objetos y figuras. Esto lo obtienen a través de la observación y la experimentación.

2) De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades, pero no de relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Como muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades, no pueden elaborar definiciones.

3) Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades.

4) Sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.

- **Nivel 2, deducción informal:** el niño comienza a relacionar las propiedades entre sí, saca conclusiones. Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado. Sin embargo, su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Sigue demostraciones, pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones.

En este nivel (Fouz; 2003, p. 69):

1) Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos.

2) Realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.

3) Siguen las demostraciones, pero en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que en su nivel de razonamiento lógico son capaces de seguir pasos individuales de un razonamiento, pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría

- **Nivel 3, deducción formal:** realizan razonamientos deductivos y son capaces de comprender y hacer demostraciones. Adquieren la capacidad de obtener una visión global.

El cuarto nivel para Fouz, (Fouz, 2003, p.70):

1) En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.

2) Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades, y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas.

3) Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostración para obtener el mismo resultado.

- **Rigor:** el niño es capaz de comparar los distintos sistemas axiomáticos. Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría. Capta la geometría en forma abstracta.

Fouz lo describe como el nivel en el que (Fouz, 2003, p.70):

- 1) Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.
- 2) Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

En el modelo de razonamiento de Van Hiele es posible observar la concordancia que poseen los diferentes niveles entre sí, además de recalcar el hecho de que un individuo no puede saltarse ningún nivel de razonamiento. (Van Hiele, 1986, p.16)

### **Características de los niveles:**

Con independencia del nivel de razonamiento que se trate, los niveles de Van Hiele, cumplen todos, las mismas cinco propiedades: secuencial, progresivo, intrínseco y extrínseco, lingüístico y desajuste. Sanz describe la caracterización de los niveles de la forma (Sanz, 2001, p.120):

**“Secuencial.** Los niveles se deben recorrer en orden. Para pasar a un nivel, previamente tiene que haber adquirido las estrategias del nivel anterior.

**Progresivo.** El progreso de un nivel a otro depende más del contenido y métodos de instrucción que de la edad.

**Intrínseco y extrínseco (explícito/implícito).** Los objetos inherentes (o implícitos) en un nivel pasan a ser objetos de estudio explícitos en el nivel siguiente.

**Lingüístico.** Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones entre símbolos.

**Desajuste.** Si el profesor, los materiales empleados, el contenido, el vocabulario, etc. están en un nivel superior al del estudiante, este no será capaz de comprender lo que se le presente y no progresará. “

Para completar la descripción del modelo de Van Hiele vamos a describir los **pasos** que, según él, debe seguir un profesor para ayudar a sus alumnos a subir al siguiente nivel de razonamiento.

**Fase 1. Indagación:** El maestro cuenta a los alumnos los objetos de la materia que se va a estudiar, qué tipos de problemas se van a plantear, qué materiales se van a usar y les pregunta qué entienden ellos, para partir así de sus conocimientos previos. Los alumnos aprenden a usar el material y adquieren unos conocimientos previos. En esta fase se prepara el terreno conceptual para el estudio posterior.

**Fase 2. Orientación dirigida:** El profesor organiza en forma secuencial las actividades de exploración de los alumnos, por medio de las cuales estos pueden tomar conciencia de los objetivos que se persiguen. El objetivo es que el alumno aprenda cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc. en el área de geometría que están estudiando. Van Hiel afirma, refiriéndose a esta fase, que “las actividades, si son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior” (Van Hiele, 1986 p. 97)

**Fase 3. Explicitación:** una de las finalidades de esta fase, es que los alumnos intercambien experiencias con sus compañeros, explicando cómo han resuelto las actividades y justificando de forma ordenada, a través del diálogo, su respuesta. Otro de los objetivos va a ser que consoliden el nuevo vocabulario. La intervención del maestro en esta fase debe restringirse a lo mínimo indispensable.

**Fase 4. Orientación libre:** Los alumnos en esta fase amplían vocabulario y conocimientos aplicándolos a otras investigaciones. Esto les permite adquirir experiencia en el hallazgo de su manera propia de resolver las tareas. Los alumnos, descubren relaciones entre los objetos de estudio, a través de su propia investigación. El profesor plantea problemas que se pueden resolver de diferentes formas, o que tienen más de una solución.

**Fase 5. Integración:** Los alumnos revisan en esta fase los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionándolos con otros que ya tenían y hacen una visión global, unificando los objetos y las relaciones. Es una combinación y comparación de cosas que ya conoce, sin introducir conceptos nuevos.

## 5. METODOLOGÍA

Estos son los principales referentes que he escogido para llevar a cabo mi propuesta de trabajo, para enseñar geometría con un material específico, muy manipulable y un ambiente preparado que permita hacer de la geometría una materia atractiva para los alumnos.

Alsina y Planas (2008, p.50) nos dicen: Para todos ellos, la manipulación es mucho más que una manera divertida de desarrollar aprendizajes. La manipulación de materiales es en ella misma una manera de aprender que ha de hacer más eficaz el proceso de aprendizaje sin hacerlo necesariamente más rápido. Por otra parte, el uso de materiales es una manera de promover la autonomía del aprendiz ya que se limita la participación de los otros, principalmente del adulto, en momentos cruciales del momento de aprendizaje.

Considero muy importante poner al niño en contacto directo con la realidad matemática de lo que va a aprender, experimentando, tocando. Este modo de enseñanza favorece la adquisición de conocimientos nuevos a todos nuestros alumnos, especialmente si presentan alguna dificultad de aprendizaje.

Codina, Enfedaque, Mumbrú y Segarra (1992, p.147): En la vida del niño, el aprendizaje de los aspectos matemáticos elementales empieza antes de ir a la escuela. Su primera aproximación a la Geometría, consiste en comprender el espacio donde vive al tener contacto con él. La Geometría empieza aquí y no con una definición o un teorema. Por ello conviene experimentar con distintos materiales, que permitan reflexionar sobre sus propias intuiciones y descubrir los conceptos y las propiedades geométricas.

Es importante llevar a cabo una metodología activa que pase por las siguientes fases: manipulación, gráfica, simbolización y automatización. Todo ello partiendo de los conocimientos previos del alumno para conseguir un aprendizaje significativo.

Para llevar a cabo este tipo de metodologías es fundamental comenzar preparando el ambiente, donde todo el material esté al alcance de los alumnos, un material atractivo y motivador para ellos. Puede ser un material reciclado, un material natural, algo elaborado por nosotros mismos o un material más estructurado que permita al niño manipularlo, investigar, experimentar. Sólo si pasa por la emoción, se produce el aprendizaje y esto ya lo decían los griegos. Estas metodologías fomentan las interacciones, el intercambio de opiniones, la cooperación.

Actualmente, estoy trabajando en un Equipo de orientación educativa, de atención temprana, en escuelas infantiles, donde se favorece en todo momento el uso de materiales manipulativos. Estos materiales se presentan al niño para que los manipule libremente, pero su presentación es totalmente estructurada y organizada. Cada vez más este tipo de metodologías se va extendiendo a niños de mayor edad, dada la gran eficacia en sus resultados. Hablamos de educación sensorial, tan importante en educación infantil, en educación especial y poco a poco en educación primaria.

Montessori parte de la educación sensorial como base de aprendizaje: Parte siempre de la actividad manipulativa y de la experimentación, ya que son actividades que permiten que el niño interiorice los aprendizajes de forma significativa. Pone a disposición del niño un material estructurado, que le permita descubrir, comparar y autocorregirse.

Para ello es imprescindible la interacción con otros niños, el comparar, el confrontar opiniones, aportar distintos puntos de vista y sentirnos parte de un grupo, fomentando así el aprendizaje cooperativo.

“El aprendizaje cooperativo, se refiere a una serie de estrategias instruccionales que incluyen a la interacción cooperativa de estudiante a estudiante, sobre algún tema, como una parte integral del proceso de aprendizaje” (Kagan, 1994, p. 2-10)

Cuando empleamos una estructura en el aula en la que se trabaja por aprendizaje cooperativo, se fomenta el trabajo en grupo, donde cada miembro del mismo tiene una función determinada y todos participan. Esto favorece que alumnos que muestren más dificultades, puedan participar en las actividades, estén motivados y mejor aceptados por sus compañeros.

Yo, como maestra prestaré atención a los intereses de los niños, ofreceré un contenido y entre todos buscaremos la asociación del mismo con la realidad que los niños conocen. A partir de su elección, de sus dudas, de sus preferencias, yo haré de guía para ir introduciendo contenidos nuevos de la materia, en este caso, geometría.

Beresaluce (2009, p. 28-29) afirma que “para poder planear y llevar a cabo su trabajo, los maestros escuchan y observan a los niños con mucha atención. Los maestros cuestionan, descubren las ideas, hipótesis y teorías de los niños, y preparan oportunidades para favorecer el aprendizaje. De hecho, los maestros se consideran compañeros de

aprendizaje de los niños/as (zona de desarrollo próximo) y disfrutan descubriendo con ellos”.

Mi trabajo está diseñado, para un centro de Educación Primaria, en la Comunidad de Madrid, que es donde resido y de donde tengo referencias por mi experiencia profesional. Por ello me baso en la LOMCE, Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa y la normativa aplicable a la Comunidad de Madrid que de ella se deriva.

La normativa por la que se rige el currículo de la Comunidad de Madrid se recoge en el *DECRETO 89/2014, de 24 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el Currículo de la Educación Primaria*

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE, en adelante), modifica en su artículo único la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE, en adelante) y entiende por currículo la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas. Según la nueva redacción del Capítulo III del Título Preliminar, Currículo y distribución de competencias, corresponde al Gobierno fijar el diseño del currículo básico con el fin de asegurar una formación común y el carácter oficial y la validez de las titulaciones otorgadas. En desarrollo de este imperativo legal, el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte ha publicado con fecha de 1 de marzo de 2014 en el Boletín Oficial del Estado, el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. La Comunidad de Madrid complementa los contenidos y los distribuye, junto con los estándares de aprendizaje evaluables, para cada uno de los seis cursos que conforman este nivel educativo. Yo no he elegido un curso en concreto, porque el material que propongo se puede utilizar en cualquiera de ellos adaptándolo a los contenidos que se trabajan y al grado de dificultad de la actividad.

Me voy a centrar en el área de matemáticas y más concretamente en los objetivos de geometría y en cómo favorecer el uso de material manipulativo para su consecución.

La práctica de las matemáticas desarrolla en el niño el gusto por la investigación, el razonamiento, el rigor y la precisión; desarrolla su imaginación y capacidad de abstracción; le enseña a razonar y a aplicar el razonamiento matemático a la resolución de problemas cotidianos.

La competencia matemática se adquiere mediante el dominio combinado del cálculo aritmético, de las formas geométricas, de las distintas formas de medida y del uso del razonamiento.

La manipulación de materiales debe ser una constante en la actividad matemática diaria.

Quiero destacar los contenidos más específicos, por cursos, que podemos trabajar con el material que he elegido, dentro del currículo de primaria:

Primer curso:

- Distinguir entre líneas rectas, curvas, abiertas y cerradas.
- Diferenciar entre circunferencia y círculo e identificar en su entorno.

Segundo curso:

- Clasificar líneas: rectas, curvas, mixtas y poligonales.
- Dibujar líneas paralelas y perpendiculares.
- Discriminar polígonos por su número de lados y discriminar sus vértices.
- Construir triángulos y rectángulos.

Tercer curso:

- Identificar los tipos de ángulos: agudo, llano, recto, obtuso y completo y relacionarlo con el giro. Inicio al uso del transportador.
- Distinguir las posiciones de la recta sobre el plano: paralelas y secantes.
- Reconocer figuras geométricas: cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio y triángulos equiláteros, rectángulo e isósceles.
- Calcular el perímetro en figuras sencillas.
- Calcular el área de figuras sencillas: triángulo, cuadrado y rectángulo.
- Reconocer la circunferencia y sus elementos.
- Diferenciar entre poliedros y cuerpos redondos.
- Nombrar cuerpos geométricos y sus partes: cubo, prisma, pirámide, esfera, cono y cilindro.
- Reconocer simetrías.

## Cuarto curso:

- Diferenciar entre recta, semirrecta y segmento.
- Identificar poliedros y sus partes.
- Diferenciar entre circunferencia y círculo y sus partes.
- Calcular área del triángulo, rectángulo, cuadrado, rombo y trapecio.

## Quinto curso:

- Clasificar triángulos y cuadriláteros.
- Tipos de ángulos y su representación: opuestos por el vértice, suplementarios
- Clasificar triángulos según sus lados y sus ángulos.
- Dibujar figuras simétricas según el eje.
- Representar posiciones de rectas con circunferencias.
- Conocer y nombrar cuerpos redondos y sus partes.
- Conocer y aplicar las fórmulas de áreas con medidas dadas.
- Perímetro de la circunferencia y área del círculo.

## Sexto curso:

- Establecer relaciones entre lados y ángulos de un triángulo.
- Dibujar figuras simétricas a otras dadas.
- Diferenciar prismas y pirámides y sus partes.
- Calcular el volumen de un ortoedro.
- Resolver problemas geométricos de la vida diaria, razonando y estructurando de forma ordenada su respuesta.

## 6. MATERIAL NO ESTRUCTURADO

### 6.1. PAPEL

#### ➤ DESCRIPCIÓN:

Para hablar de este material, no quiero dejar de citar a Stella Ricotti, profesora de matemática. Según palabras textuales suyas, su objetivo principal, a la hora de enseñar matemáticas es “transmitir felicidad”, enseñando geometría a través del origami, la técnica de arte japonés de plegado de papeles sin usar tijera ni pegamento.

Es la autora del libro “Origami y geometría”, editado por Homo Sapiens, donde nos explica cómo llevar esta técnica al aula para enseñar geometría.

La papiroflexia es un arte con papel, se puede considerar una ciencia. Cada trozo de papel contiene patrones geométricos, dónde podemos descubrir combinaciones de ángulos y rectas dando a nuestro papel diferentes formas. Además, al ser una actividad donde todos los alumnos pueden participar de alguna manera, se convierte en una oferta integradora.

Existen unas formas geométricas denominadas *bases*, que mediante su combinación podemos conseguir multitud de formas. Los modelos tradicionales derivan de cuatro bases, desarrolladas por los japoneses, conocidas como la de la *cometa*, la del *pez*, la del *pájaro* y la de la *rana*. En la Figura 1 pueden verse estas cuatro bases, de izquierda a derecha.

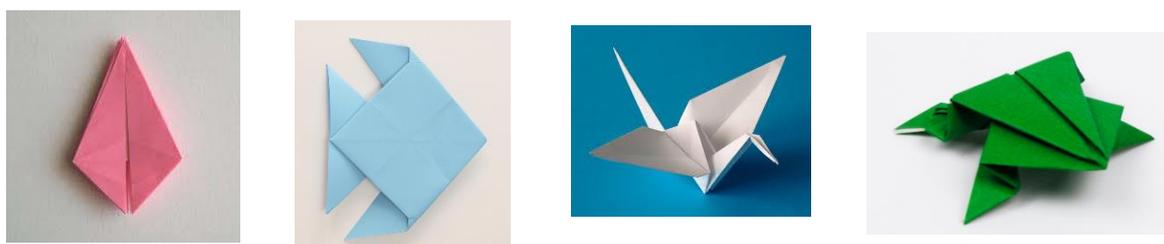


Figura 1. Las cuatro bases de la papiroflexia

Imagen extraída de la página:

<https://aprendiendomatematicas.com>

➤ **POTENCIALIDADES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN PRIMARIA (“Origami y geometría”), según Stella Ricotti;**

- Proporciona una herramienta pedagógica que permite desarrollar diferentes contenidos, no sólo conceptuales sino de procedimiento.
- Desarrolla la psicomotricidad y, fundamentalmente, la psicomotricidad fina, así como la percepción espacial.
- Desarrolla la destreza manual, la exactitud en la realización del trabajo y la precisión manual.
- Relaciona la disciplina de las matemáticas con otras ciencias, como las artes, por ejemplo.
- Motiva al niño a ser creativo, ya que puede desarrollar sus propios modelos. Además, puede investigar la conexión que tiene con la geometría no sólo plana, sino también espacial.

➤ **ACTIVIDADES:**

**ACTIVIDAD 1: Trazo de rectas a través del plegado.**

**Objetivos:**

- Reconocer y diferenciar rectas y segmentos realizando pliegues con papel.
- Diferenciar y trazar rectas paralelas y perpendiculares.
- Trazar la mediatriz y bisectriz de un segmento.
- Reconocer y nombrar triángulos y sus partes.

**Cursos:** segundo ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:**

Repartimos papel a los alumnos y dejamos que lo manipulen libremente, que nos digan qué elementos podemos trazar usando para ello el papel y nuestras manos.

La siguiente actividad consistirá en identificar entre sus creaciones, las rectas y colorearlas.

A continuación, la actividad será dirigida, planteando los siguientes retos:

- Si dibujamos un punto en una hoja y doblamos la misma, justo por ese punto, al abrir el papel obtenemos la recta que pasa por ese punto.
- Si marcamos dos puntos y doblamos la hoja justo por encima de esos puntos, al desdoblar obtenemos un segmento.
- Si doblamos el papel por una recta trazada y hacemos una segunda doblez, que haga coincidir dicha recta sobre sí misma, al desdoblar, obtenemos una recta perpendicular a otra.
- Si doblamos dos lados que concurren en una esquina uno sobre otro, estamos trazando la bisectriz.
- Si llevamos un punto del papel sobre otro y doblamos, estamos trazando la mediatriz del segmento que une esos dos puntos.
- Mediante pliegues podemos construir un triángulo equilátero, un rectángulo, un cuadrado...

Una vez realizada la actividad, podemos llevarla a cabo sobre papel, dibujando rectas, rectas paralelas, perpendiculares, segmentos...

## **ACTIVIDAD 2: Ángulos**

### **Objetivos:**

- Identificar los tipos de ángulos y relacionarlos con el giro.

**Cursos:** primer ciclo de Educación Primaria.

### **Desarrollo:**

Presentamos a los niños hojas de papel y cómo se pueden hacer figuras, como las que he mencionado anteriormente, pájaro, rana...

Podemos presentar un tutorial en papel como en la Figura 2 o un tutorial en la pizarra digital. <https://www.youtube.com/watch?v=xIHokrVFMAY>

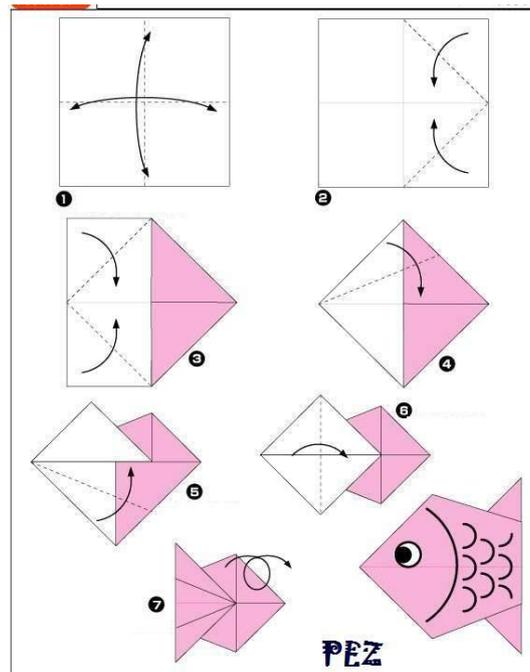


Figura 2. Tutorial Pez.

Figura extraída de la web:

<https://ayudaparamanualidades.com>

Una vez realizada esta actividad, les enseñamos a hacer abanicos de papel. Con estos abanicos, podemos trabajar los tipos de ángulos según la apertura cómo en la figura 3 y 4:

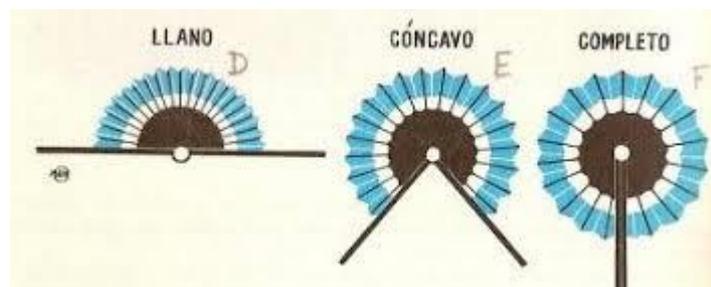


Figura 3: Modelo 1 de tipos de ángulos

Figura extraída del blog:

<http://elrepasodelaclase.blogspot.com>



. Figura 4: Modelo 2 de tipos de ángulos

### ACTIVIDAD 3: Polígonos

#### Objetivos:

- Discriminar polígonos por su número de lados y discriminar sus vértices.
- Construir rectángulo.
- Construir un triángulo equilátero.

**Cursos:** primer ciclo de Educación Primaria.

#### Desarrollo:

Esta actividad la podemos comenzar igual que las anteriores, viendo las posibilidades de creación que nos ofrece una hoja de papel y llevando esta utilidad, a la aplicación geométrica.

Podemos trabajar todos los polígonos con papiroflexia, de forma manipulativa. A continuación, pongo un ejemplo.

**Rectángulo:** Ahora vamos a hacer algunos polígonos doblando papel. Para empezar, necesitamos una hoja de papel de cualquier tamaño; Recuerda que los polígonos son figuras formadas por líneas. Para hacer nuestros polígonos, vamos a trazar líneas en la hoja. Primero doblamos el papel trazando una línea y después el punto b se dobla sobre la línea trazada. En la Figura 5 podemos ver todos los pasos representados.

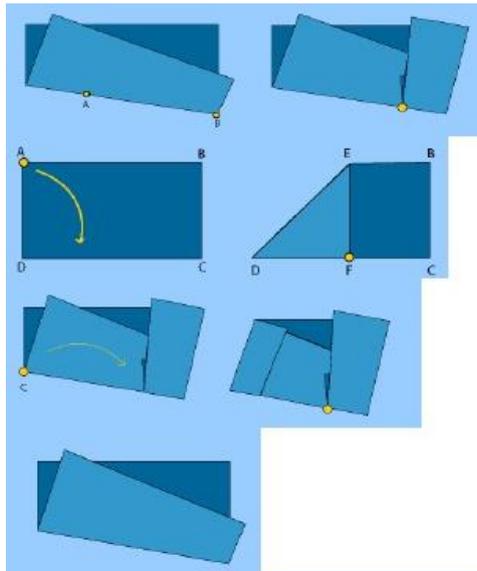


Figura 5: Pasos para la creación de un rectángulo.

TRIÁNGULO EQUILÁTERO A partir de un rectángulo también se puede trazar un triángulo equilátero. La base de nuestro triángulo será la línea DC. Para comenzar, primero dobla el rectángulo por la mitad, haciendo que los puntos A y D coincidan con los puntos B y C, respectivamente, Figura 6.

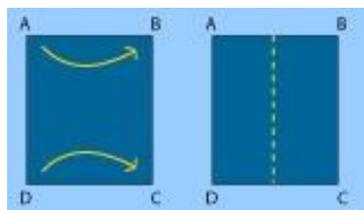


Figura 6: Pasos para la creación de un rectángulo.

Ahora dobla la esquina inferior derecha hacia arriba, de manera que el extremo C quede sobre el dobléz que acabamos de hacer. El punto donde se unen el vértice C y la línea central, es justamente el tercer vértice que necesitamos. Para completar el triángulo marca los lados OD y OC y recorta, Figura 7.

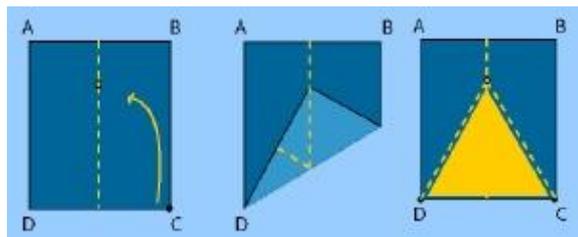


Figura 7: Triángulo equilátero

Esta actividad, se puede completar, para ampliar a cursos superiores y trabajar longitudes y áreas de figuras geométricas.

Con el triángulo, doblamos por la mitad la hoja y nos queda línea, que es su altura.

Podemos medir todos sus lados.

Teniendo estos datos ya podemos deducir la fórmula del área del triángulo y resolver.

## 6.2. PALILLOS

- **DESCRIPCIÓN:** podemos usar palillos, palos de helado, o cualquier cosa similar, que además fomenta el reciclado.
- **POTENCIALIDADES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN PRIMARIA**
  - Aprender los nombres y características de algunos polígonos, así como de sus elementos principales: lado, vértice, perímetro, ángulos interiores.
  - Conocer los nombres y características de algunos poliedros.
  - Aprender las diferencias entre prismas y pirámides.
  - Estudiar los elementos de los poliedros, como caras, aristas y vértices.

## ➤ ACTIVIDADES

### **ACTIVIDAD 1: Figuras geométricas.**

#### **Objetivos:**

- Reconocer figuras geométricas: cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio y triángulos.
- Nombrar cuerpos geométricos y sus partes: cubo, prisma, pirámides....
- Diferenciar entre prisma y pirámide y sus partes.

**Cursos:** segundo ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:** Repartimos palillos, o palitos comestibles y gominolas, e indicamos a nuestros alumnos que con ese material tienen que crear cuerpos geométricos: cubo, pirámide, prismas...

Primero dejamos que experimenten con el material libremente y vemos que figuras van haciendo. La actividad la realizan en grupos de cuatro, fomentando el aprendizaje cooperativo, donde cada alumno aporta su información, uno construye las caras, otro las bases, dependiendo de las figuras. Otro se encargará de anotar las observaciones que realicen y otro será el portavoz que cuente al resto de la clase el trabajo que han llevado a cabo en su grupo.

Cuando ya llevan un rato experimentando, les podemos dar un modelo:

Construye un cuadrado con cuatro palillos y cuatro gominolas, a continuación, coloca en vertical un palillo en cada gominola, coloca otro cuadrado encima, ¿qué poliedro has construido?, ¿Cuánto miden sus lados? ¿cuáles son sus vértices?

Finalmente repartiremos una hoja donde anotarán los nombres de las figuras construidas, los lados que tienen, los vértices, sus medidas, etc.

En la primera fase los niños actúan libremente, posteriormente se fomenta la reflexión sobre las propiedades de cada figura, pasando así al nivel 1 de razonamiento de Van Hiele donde también se incluye un análisis de las propiedades.

A continuación, presento un ejemplo de figuras que pueden realizar los alumnos.  
Figura 8.

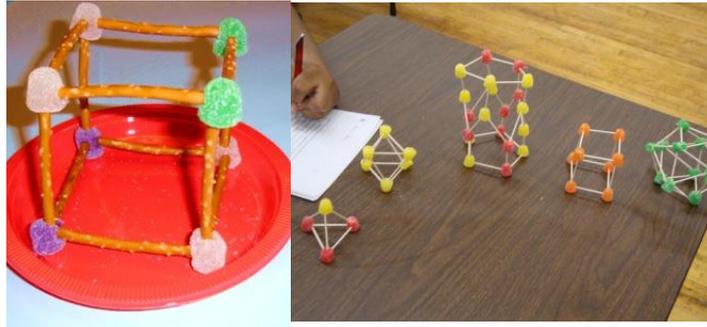


figura 8: Figuras con gominolas

Extraída de la página web:

<https://aprendiendomatematicas.com>

## ACTIVIDAD 2: Transformaciones geométricas

### Objetivos:

- Reconocer figuras geométricas: cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio y triángulos.
- Resolver problemas geométricos, razonando su respuesta.

**Cursos:** segundo ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:** primero repartimos el mismo número de palillos y del mismo tamaño a cada alumno y a continuación les dejamos que hagan figuras libremente, así podemos observar los conocimientos previos que ya poseen. A continuación, ofrecemos un modelo y ellos tendrán que crear uno igual, como aparece en la Figura 9.



Figura 9 Creación de figuras con modelo.

Extraída de la página web: [www.mumuchu.com](http://www.mumuchu.com)

Para trabajar el razonamiento, podemos realizar actividades como la que presento a continuación (Figura 10).

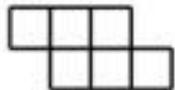
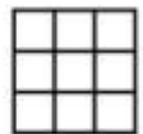
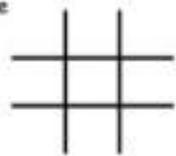
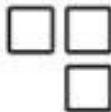
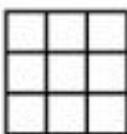
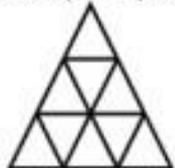
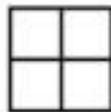
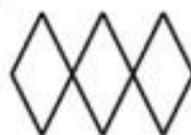
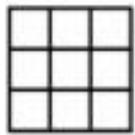
<p><b>1.</b> Retira 2 de los 18 palillos y haz que queden formados 4 cuadrados iguales.</p> 	<p><b>2.</b> Retira 3 de los 13 palillos y haz que queden formados solo 3 triángulos.</p> 	<p><b>3.</b> Retira 4 de los 24 palillos y haz que queden formados 5 cuadrados.</p> <p>Halla dos soluciones diferentes.</p> 
<p><b>4.</b> Cambia de lugar 3 de los 12 palillos y haz que queden formados 3 cuadrados iguales.</p> 	<p><b>5.</b> Cambia de lugar 3 de los 12 palillos y haz que queden formados 3 cuadrados iguales.</p> 	<p><b>6.</b> Cambia de lugar 4 de los 12 palillos y haz que queden formados 6 cuadrados.</p> 
<p><b>7.</b> Retira 4 de los 24 palillos y haz que queden formados 6 cuadrados.</p> 	<p><b>8.</b> Esta es una forma de construir 8 triángulos equiláteros usando 6 palillos.</p> <p>Halla otra forma.</p> 	<p><b>9.</b> Retira 6 de los 18 palillos y haz que queden formados 4 Triángulos.</p> 
<p><b>10.</b> Cambia de lugar 2 de los 12 palillos y haz que queden formados 7 cuadrados.</p> 	<p><b>11.</b> Cambia de lugar 4 de los 12 palillos y haz que queden formados 5 rombos.</p> 	<p><b>12.</b> Retira 6 de los 24 palillos y haz que queden formados 3 cuadrados.</p> 

Figura 10 Razonamiento geométrico con palillos

Extraída del blog de José Miguel de la Rosa Sánchez

<https://www.actiludis.com/2009/10/30/geometria-con-palillos/>

### 6.3. PAJITAS

- **DESCRIPCIÓN:** al igual que los palillos, las pajitas son un material reciclado que nos puede ser de utilidad para múltiples actividades, tanto como para representar figuras, como hemos hecho con los palillos, como para transformar figuras simples en otras más complicadas, debido a la

peculiaridad de las pajitas, que nos permiten meter una goma dentro y convertir la figura en un material flexible, que podemos cambiar de forma.

➤ **POTENCIALIDADES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN PRIMARIA**

- Conocer ángulos y sus tipos.
- Aprender los nombres y características de algunos polígonos, así como de sus elementos principales: lado, vértice, perímetro, ángulos interiores.
- Conocer los nombres y características de algunos poliedros.
- Apreciar las diferencias entre prismas y pirámides.
- Estudiar los elementos de los poliedros, como caras, aristas y vértices.
- Transformar figuras simples en otras más complejas.

➤ **ACTIVIDADES**

**ACTIVIDAD 1: Ángulos.**

**Objetivos:**

- Identificar los tipos de ángulos: agudo, llano, recto, obtuso y completo.
- Sumar y restar ángulos de forma manipulativa.

**Cursos:** segundo ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:** pedimos a nuestros alumnos, que con las pajitas formen los ángulos que ya conocen, luego los vamos mostrando y comparando con los que han hecho sus compañeros. Luego los dibujamos en un papel y escribimos sus nombres.

Una vez realizada esta actividad, les vamos a ir pidiendo que hagan ángulos dados, como por ejemplo: (esto mismo lo vemos en la Figura 11).

- Construye un ángulo agudo y ahora súmale otro ángulo para que entre los dos conformen un ángulo llano.
- Construye un ángulo agudo y súmale otro para que formen un ángulo recto.

- Construye un ángulo obtuso y comprueba qué ángulo habría que restar para obtener un ángulo recto.



Figura 11 Suma de ángulos

## ACTIVIDAD 2: Transformaciones geométricas

### Objetivos:

- Conocer y nombrar figuras geométricas.
- Diferenciar las partes.
- Descomponer y componer figuras partiendo de una sencilla a otra más compleja.

**Curso:** Segundo ciclo de Educación Primaria.

### Desarrollo:

Con 12 pajitas del mismo tamaño y una goma elástica construimos un cubo flexible y de fácil manipulación.

A partir de este cubo realizamos los siguientes polígonos

- Une dos vértices opuestos del cubo y consigues la primera figura, el hexágono.
- Dobla por la mitad el hexágono y obtendrás el trapecio que, a su vez, son tres triángulos.
- Al doblar uno de los triángulos, obtienes un rombo.
- Doblando por la mitad el rombo tendrás un triángulo equilátero.

A continuación podemos ver esta transformación de figuras con pajitas en la Figura 12.

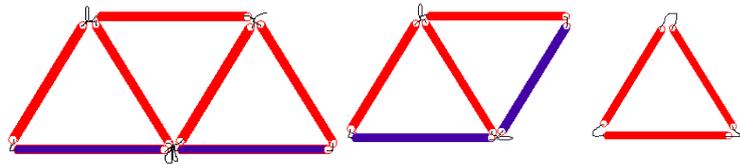


Figura 12 Figuras con pajitas.

Imagen extraída de la siguiente página web:

[http://www.sinewton.org/numeros/numeros/74/Experaula\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/74/Experaula_01.pdf)

- Partiendo del hexágono y estirándolo por dos lados opuestos, consigues un rectángulo.
- Si estiramos el rectángulo por dos de sus vértices opuestos, se forma un romboide, compuesto por dos rombos. ¿Cómo son los ángulos ahora?
- Dobla el romboide y aparece el rombo.
- Estira dos vértices opuestos del rombo y obtendrás un cuadrado.

Esto mismo lo podemos hacer con:

BaFi, que es un cubo hecho con bastoncillos e hilo elástico, diseñado para convertir el aprendizaje de la Geometría en un juego. Fomenta el interés y el conocimiento significativo de esta materia, desarrollando la imaginación y la creatividad (Figura 13)

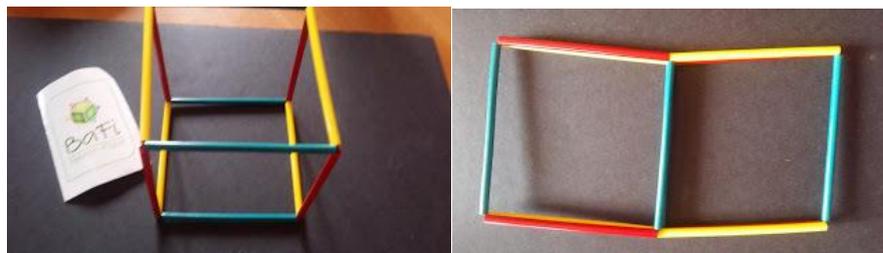


Figura 13 BaFi

Imagen sacada del siguiente blog

<http://lasmatesdemama.blogspot.com>

Es un cubo flexible de 10 cm de lado, que nos facilita por sus características pasar de 3 a dos dimensiones, conservando o no las formas.

## 6.4. OTROS MATERIALES

Para trabajar geometría con objetos reales, quiero destacar un blog [www.fotomat.es](http://www.fotomat.es). de Yair Rodríguez, profesor de matemáticas que utiliza fotomats en su clase de matemáticas con el fin de llegar a los conceptos por un camino distinto al razonamiento lineal. La importancia de estas fotografías, está en hacer entender a nuestros alumnos, que todo lo que nos rodea es geometría. Cuando los niños comprenden esto, son capaces de entender que lo que les enseñamos les va a ser de utilidad en su día a día, favoreciendo así que el aprendizaje se pueda generalizar del aula al contexto real y se complete como un aprendizaje significativo.



La **mesa de luz** está inspirada en el enfoque pedagógico de Reggio Emilia, es un excelente recurso para la exploración y el descubrimiento. Permite crear un espacio atractivo de aprendizaje donde se trabaja la integración sensorial y se favorece la observación y la atención.



Figura 14 Mesa de Luz

Imágenes sacadas del blog

[www.demicasaalmando.com](http://www.demicasaalmando.com)

Con la mesa de luz podemos trabajar objetivos tan básicos como el reconocimiento de figuras planas, la composición y descomposición combinando figuras. Áreas, volúmenes, tipos de rectas, ángulos, triángulos, etc. Es un material muy atractivo que nos permite superponer unas figuras con otras de forma muy visual.

## 7. MATERIALES ESTRUCTURADOS

### 7.1. EL GEOPLANO

#### ➤ DESCRIPCIÓN:

El geoplano es un recurso didáctico muy interesante para trabajar la geometría, pues nos sirve para introducir los conceptos geométricos de forma manipulativa. Permite a los niños una mejor comprensión de términos abstractos, que muchas veces o no entienden o se han formado ideas erróneas en torno a ellos. Con él no sólo podemos construir formas geométricas, sino descubrir las propiedades de los polígonos o incluso resolver problemas matemáticos, aprender sobre áreas, perímetros... es en definitiva un recurso imprescindible para aprender matemáticas.

El geoplano fue creado por el matemático egipcio Caleb Gattegno sobre 1960, quien buscaba un método para enseñar la geometría de una forma más didáctica. Aunque hoy en día la mayoría son de plástico, el original consistía en un tablero cuadrado de madera con clavos formando una trama, de tal manera que estos sobresalían y se podían enganchar las gomas elásticas que van a servir para representar las diferentes figuras geométricas.

Consiste en un tablero cuadrado, generalmente de madera, el cual se ha cuadriculado y se ha introducido un clavo en cada vértice de tal manera que éstos sobresalen de la superficie de madera unos 2 cm. El tamaño del tablero es variable y está determinado por un número de cuadrículas; éstas pueden variar desde 25 (5x5) hasta 100 (10x10). Sobre esta base se colocan gomas elásticas de colores que se sujetan en los clavos formando las formas geométricas que se deseen.

“Es de fácil manejo para cualquier niño y permite el paso rápido de una a otra actividad, lo que mantiene a los alumnos continuamente activos en la realización de ejercicios variados” (Cascallana, 1996, p. 144).

#### TIPOS DE GEOPLANO

1. **El ortométrico:** De trama cuadrículada, los más frecuentes son los de 25 puntos.

2. **El circular:** Es una colección de puntos de una circunferencia que están espaciados a la misma distancia. Permite construir polígonos regulares de 3,4,5,6,8,12 y 24 lados. Sirve también para estudiar las propiedades de los elementos de la circunferencia y de las figuras inscritas en ella. Los más frecuentes son los de 24 puntos.

3. **El isométrico:** De trama triangular. Los puntos están situados en los vértices de triángulos equiláteros.

Podemos encontrar también los geoplanos en diferentes formatos diferentes del físico, como el digital. Un ejemplo, para trabajar los geoplanos en la pizarra digital, lo encontramos en <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>.

#### ➤ POTENCIALIDADES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Este tipo de geoplano, tal y como recogen Nortes y Nortes (2012, p. 227), es válido para alcanzar una serie de objetivos como son:

- Reconocer las formas geométricas planas.
- Adquirir la noción de ángulo, vértice y lado.
- Construir figuras variando sus dimensiones.
- Componer y descomponer figuras mediante la superposición de polígonos.
- Introducir los movimientos en el plano.
- Determinar perímetros y áreas de polígonos.
- Simetrías, traslaciones y giros

Otras aplicaciones geométricas son:

- Representación de puntos: Ejes de coordenadas, abscisas, ordenadas, representación de un punto a partir de pares de números ordenados, externos o internos a una figura...
- Representación de líneas: Rectas, semirrectas, segmentos, curvas, paralelas, tangentes, secantes a una figura, poligonales, abiertas, cerradas...
- Representación de figuras: Con líneas rectas o curvas, perímetros, áreas, vértices.
- Representación de polígonos: regulares, irregulares.
- Representación de ángulos: internos y externos.

A continuación, muestro un ejemplo de geoplano Figura 15:

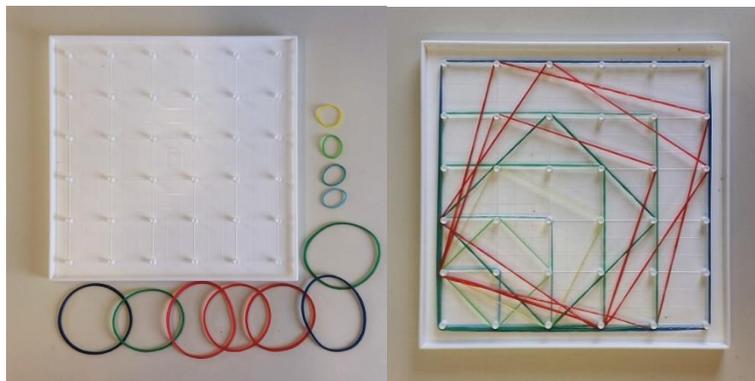


Figura 15 Geoplano

Extraída de la página web:

<http://www.tocamates.com>

### ➤ ACTIVIDADES

#### ACTIVIDAD 1: Geoplano y sus aplicaciones

##### Objetivos:

- Trazar segmentos y rectas y diferenciar sus tipos.
- Discriminar los tipos de ángulos.
- Reconocer y nombrar triángulos y sus tipos.
- Crear polígonos y discriminar sus partes.
- Calcular el área de polígonos.

- Conocer la circunferencia y sus elementos.

**Cursos:** segundo ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:** presentaremos el geoplano, sus elementos y cómo se puede trabajar con él. Incluso una actividad previa puede ser la construcción de un geoplano. Este nos da multitud de posibilidades para trabajar geometría:

- Trazar segmentos con gomas de varios colores. El segmento es una recta delimitada por dos puntos.
- Formar líneas poligonales abiertas uniendo varios segmentos.
- Trazar segmentos paralelos a otro dado.
- Representar segmentos secantes y observar que sus ángulos son iguales dos a dos.
- A partir del ángulo recto hacer ángulos agudos y obtusos.
- Realizar varios polígonos observando sus lados, ángulos, vértices.
- Tomando la distancia entre dos pivotes consecutivos como unidad, calcular el perímetro de distintos polígonos

Construye tantos triángulos como puedas, de diferentes formas y tamaños, usando para ello una sola goma. Cuando ya los tengan, tendrán que explicar a sus compañeros en qué se parecen y en qué se diferencian. Los alumnos pueden copiar sus triángulos sobre papel y recortarlos, así los pueden superponer entre sí, para comprobar que algunos son iguales al girarlos, son semejantes o simétricos.

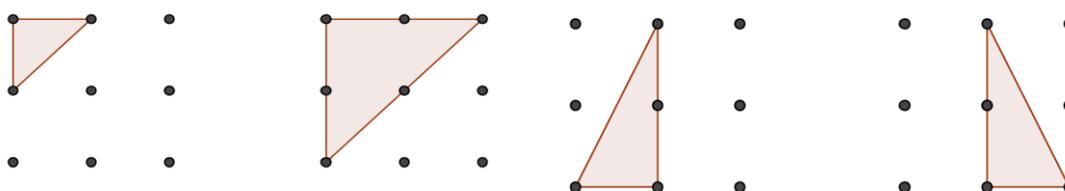


Figura 16: Triángulos.

Geoplano Circular (Figura 17):

- Rodear con hilo o lana las puntas del geoplano circular.
- Representar los diámetros posibles y observar que son ejes de simetría.
- Representar radios.
- Uniendo el centro con las puntas de la circunferencia, trazar diferentes ángulos: agudo, rectos y obtusos.
- Trazar diferentes cuerdas y arcos de circunferencia.

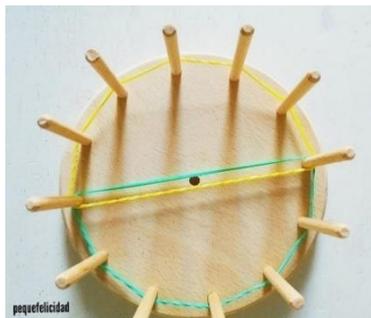


Figura 17 Geoplano circular

Imagen extraída de la web:

<http://www.pequefelicidad.com>

Lo podemos hacer de cualquier otro material, como con LEGO (Figura 18) o en mesa de luz (Figura 19):

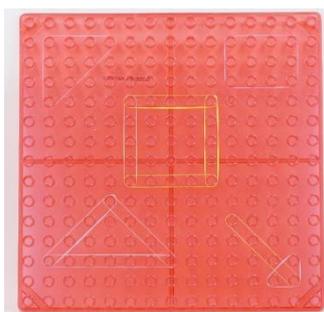


Figura 18 Geoplano con LEGO

Imagen extraída de:

<https://aprendiendomatematicas.com>



Figura 19 Geoplano con mesa de luz

Imagen sacada de:

<https://www.pictasite.com>

## 7.2. EL TANGRAM

### ➤ DESCRIPCIÓN:

El Tangram es un juego de origen chino que representa un excelente recurso para la enseñanza de la geometría. Este juego favorece la creatividad de los niños por las múltiples posibilidades que ofrecen las combinaciones de las piezas.

Existe una gran variedad de tangram como el chino, ovotangram, pitagórico, etc., pero los dos más usados en la escuela son el chino y el circular

Tangram chino Tangram circular Es un juego de origen chino del cual se desconoce cuándo y quién lo inventó, llamado “Chi Chiao Pan” que significa juego de los siete elementos o tabla de la sabiduría o de la sagacidad, haciendo referencia a las muchas cualidades del juego. Existen diferentes versiones sobre el origen del término “tangram”. Una de las más aceptadas es que la palabra proviene de la unión del vocablo cantonés “tang”, que significa “chino” (aunque en la wikipedia puede leerse que quizás haga referencia a la dinastía china Tang), y el vocablo latino “gram” que significa escrito o gráfico. Según otra versión, el término “tangram” se relaciona con la gente que vivía a orillas del río Tanka, en China, los cuales eran grandes comerciantes y además estaban relacionados con el comercio del opio. Y los navegantes occidentales habrían conocido el juego al llegar a sus puertos.

Este puzzle está formado por 7 piezas, llamadas tans, con las que se puede formar un cuadrado, que suele ser la configuración inicial. Las piezas son las siguientes (Figura 20):

5 triángulos de diferentes tamaños (dos grandes, uno mediano y dos pequeños)

1 cuadrado

1 paralelogramo romboide



Figura 20 Piezas tangram clásico

<https://culturacientifica.com>

Estas figuras se caracterizan porque tienen las siguientes propiedades: cada triángulo se caracteriza porque su área es el doble del que le sigue en tamaño. Otra característica es que el cateto del triángulo grande es igual a la hipotenusa del triángulo mediano y el cateto del triángulo mediano es igual a la hipotenusa del triángulo pequeño. La diagonal del cuadrado es igual al lado mayor del paralelogramo, y el cateto del triángulo pequeño es igual al lado del cuadrado y al lado menor del paralelogramo. También se caracteriza porque los ángulos de las figuras son de  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  o  $135^\circ$  ( $90+45$ ).

El Tangram es un juego planimétrico, es decir, todas las figuras deben estar contenidas en un mismo plano. Tiene unas reglas básicas que son: utilizar en cada figura todas las piezas y no superponerlas.

### TIPOS DE TANGRAM

Existen multitud de juegos basados en los mismos principios, pero con distintas piezas. A casi todos estos rompecabezas se les conoce con el nombre de tangram, unos obtenidos a partir de cuadrados, otros de rectángulos, hexágonos, ovoides...

A continuación, muestro en la Figura 21, distintos tipos de tangram que podemos encontrar:

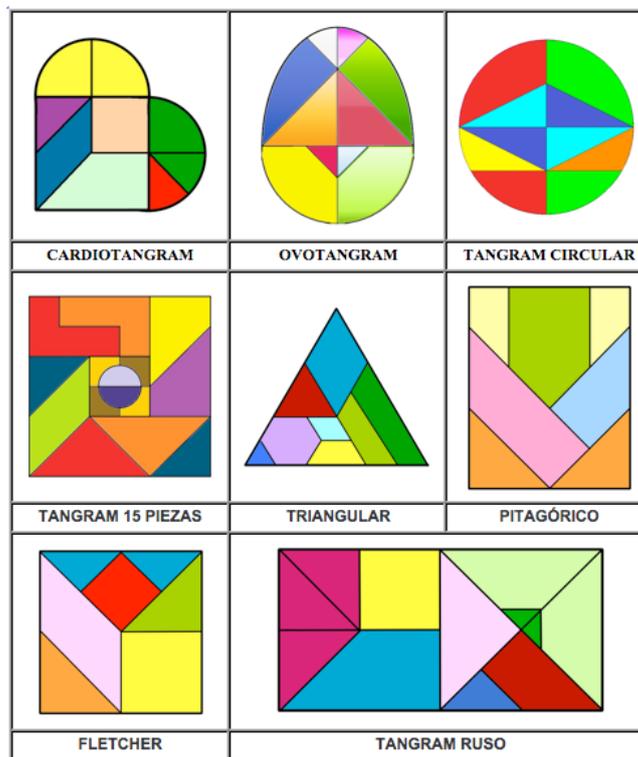


Figura 21 Tipos de tangram

Foto extraída de: <http://revistamatajove.wixsite.com>

➤ **POTENCIALIDADES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN PRIMARIA:**

- Clasificación de polígonos. Lados y vértices.
- Construcción de figuras geométricas planas a partir de datos y cuerpos geométricos a partir de un desarrollo.
- Reproducir y crear figuras y representaciones planas de cuerpos geométricos.
- Tipologías de líneas.
- Medición, descripción y clasificación de ángulos.
- Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.
- Simetrías.
- Descubrimiento de perímetro y área de polígonos.

- Desarrollar la percepción mediante la copia de figuras.
- Diferenciar paralelismo y perpendicularidad.

Además, favorece:

- Orientación espacial.
- Coordinación visomanual.
- Atención
- Razonamiento
- Memoria visual.
- Percepción figura-fondo.

#### ➤ **ACTIVIDADES:**

##### **ACTIVIDAD 1: Tangram clásico**

###### **Objetivos:**

- Reconocer y diferenciar las distintas figuras geométricas que componen el tangram.
- Clasificar los triángulos según sus lados o sus ángulos.
- Aplicar rotaciones y simetrías.

**Curso:** primer ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:** lo primero que haremos es familiarizar al niño con las piezas que componen el tangram. Podemos crear nuestro propio tangram con cartulina, como actividad previa. Es importante que identifiquen todas las piezas que lo componen.

Colocar las piezas sobre las plantillas de diseño opaco (color gris). Se trata de colocar cada pieza en la silueta que se corresponda con su forma, hasta formar la figura representada. Por ejemplo: un barco.

- Entregamos al niño la imagen de una figura, que servirá de modelo para que él la realice con las siete piezas de tangram.

- Le enseñamos la figura en gris y él la tiene que realizar con las piezas del tangram.
- Podemos usarlo para favorecer su imaginación, creando figuras propias o inventadas.

Un aspecto importante en el aprendizaje de la geometría en los primeros cursos, es la descripción de figuras planas y ver los cambios que se producen al aplicar rotaciones y simetrías. Para ello podemos continuar la actividad anterior con:

- Utilizando las 7 piezas construye:
  - Un triángulo rectángulo e isósceles.
  - Un rectángulo.
  - Un paralelogramo no rectángulo.
  - Un trapecio isósceles.
  - Un trapecio rectángulo.
  - Un hexágono.
- Elige uno de los triángulos pequeños y clasifícalo.
- Combina los dos triángulos pequeños y forma diferentes figuras geométricas.
- Las figuras formadas, ¿se parecen a alguna otra pieza del Tangram?
- ¿Qué podemos concluir acerca de sus áreas? Se pueden establecer igualdades en términos de áreas, como se muestra en la Figura 22.

Estas igualdades, las trabajaremos realizando las figuras en cartulina, lo que nos permitirá girar, superponer y pegar sobre papel.

IGUALDADES EN TERMINOS DE AREAS

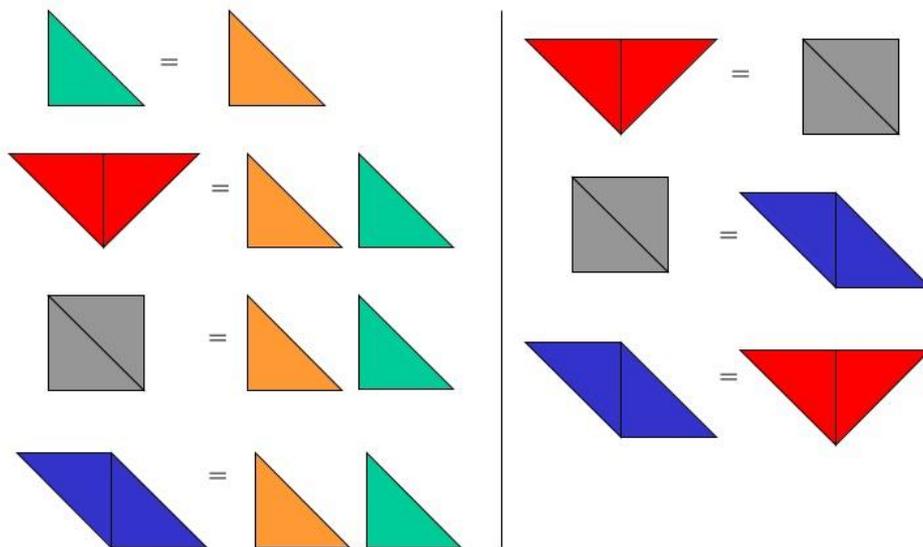


Figura 22 Áreas

**ACTIVIDAD 2: Tangram ruso**

**Objetivos:**

- Reconocer y diferenciar las distintas figuras geométricas que componen el tangram.
- Clasificar los triángulos por tamaño.

**Curso:** primer ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:** lo primero que haremos es familiarizar al niño con las piezas que componen el tangram ruso y luego podemos proponer preguntas, o motivar a los niños, por grupos, a que ellos mismos se planteen esas preguntas.

- Los triángulos, ¿cuántos son iguales?, ¿cuántos son simétricos?
- ¿Qué figuras podemos construir combinando otras más sencillas?
- ¿Cuántos cuadrados puedes componer?
- ¿Cuántos rectángulos?
- ¿cuántos triángulos puedes construir?

### 7.3. EL MECANO

#### ➤ DESCRIPCIÓN:

El mecano es un juego formado por unas tiras alargadas, con agujeros equidistantes, normalmente de diferentes colores.

Según Bas y Brihuega (1987, p. 26) el mecano se define como “un material que consta de múltiples varillas agujereadas de distintas longitudes”. Las piezas poseen una serie de agujeros cada dos centímetros, aproximadamente, que permiten unificarlas utilizando tornillos de tuerca o piezas similares que permiten el movimiento entre las varillas.

Los más comunes son metálicos, pero también los hay de otros materiales. Las tiras son de diferentes tamaños y se pueden unir entre ellas con tuercas y tornillos, permitiendo así alargar su longitud y formar líneas abiertas, cerradas... Con él podemos trabajar conceptos de geometría como las líneas abiertas y cerradas, polígonos, perímetros, ángulos y diagonales, además de trabajar la motricidad fina y la creatividad.

En la figura 23 podemos ver un ejemplo de construcción hecho con mecano.

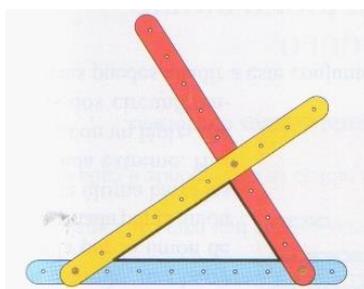


Figura 23 Mecano

#### ➤ POTENCIALIDADES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN PRIMARIA:

- Reconocer líneas abiertas y cerradas.
- Construir formas geométricas.
- Reconocer polígonos, sus partes y clasificación.
- Transformación de unos polígonos en otros mediante la movilidad de sus lados.

- Reconocer y nombrar ángulos y sus tipos.
- Composición y descomposición de figuras.
- Movimientos de las figuras geométricas en el espacio.
- Simetría

### ➤ ACTIVIDADES

#### **ACTIVIDAD 1: Figuras geométricas planas.**

##### **Objetivos:**

- Reconocer figuras geométricas.
- Hacer clasificaciones atendiendo a diferentes características.
- Identificar poliedros y sus partes.
- Transformar polígonos moviendo sus lados.

**Cursos:** primer ciclo de Educación Primaria.

##### **Desarrollo:**

Repartimos el mismo número de varillas por grupos de 4 alumnos y proponemos las siguientes actividades:

- Formar una figura geométrica utilizando únicamente tres palos.
- Formar una figura geométrica utilizando únicamente cuatro palos.
- Formar una figura geométrica utilizando únicamente cinco palos.
- Formar una figura geométrica utilizando únicamente seis palos
- Formar una figura cualquiera.
- Formar una circunferencia.
- Formar un triángulo de lados 5 puntos, 7 puntos y 8 puntos.
- Un triángulo de lado 6, lado 6, lado 6
- Un triángulo de lado 12, lado 8 y lado 8.

- ¿qué diferencias aprecias entre ellos?, ¿Cómo son sus lados?, ¿cómo son sus ángulos?
- ¿podrías clasificarlos?, ¿en base a qué?

Cada figura que representen, la dibujarán en cartulina y harán una clasificación que, al terminar la actividad, un representante de cada grupo la expondrá al resto de la clase.

### **ACTIVIDAD 2: Cálculo de áreas**

#### **Objetivos:**

- Reconocer figuras geométricas.
- Identificar poliedros y sus partes.
- Conocer y aplicar las fórmulas de áreas.

**Cursos:** segundo ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:** empezaremos la actividad repartiendo piezas de diferentes tamaños y dejando que las manipulen de forma libre, por grupos. Que expliquen qué diferencias aprecian y qué figuras pueden representar con ellas.

Una vez creadas, escogen una de las figuras y calculan su perímetro y su área. Utilizando las medidas reales.

Cada figura la copian sobre papel con la misma medida.

## 7.4. POLIMINÓS

### ➤ DESCRIPCIÓN:

El matemático norteamericano Solomon W. Golomb, quien definió los poliminós como las configuraciones que recubren cuadros adyacentes de un tablero de ajedrez. Podemos definirlo también como un grupo de cuadrados unidos por los lados, de tal forma que cada dos de ellos tiene al menos un lado común.

Se clasifican según el número de cuadrados que lo componen:

- Monominó: formado por un solo cuadrado.
- Dominós: formado por dos cuadrados (ficha del dominó).
- Triminós: por tres cuadrados. Hay dos.
- Tetraminós: por cuatro cuadrados. Son cinco (Tetris).
- Pentominós: por cinco cuadrados. Son doce.
- Hexaminós: por seis cuadrados. Son treinta y cinco.

Los pentominós son todas las figuras planas que se pueden formar uniendo cinco cuadrados iguales que tengan al menos un lado en común. Existen doce modos diferentes de unirlos, si consideramos idénticas las rotaciones y simetrías. Golomb buscó un nombre para identificar las piezas, nombrándolas por la letra a la que se parecen. Para recordarlas usaremos las consonantes y una I de la palabra FILiPiNo, junto con las últimas siete letras del abecedario (TUVWXYZ).

En la siguiente imagen podemos ver las 12 piezas, formando un rectángulo de área 12x5 y su asignación con letras (Figura 24):

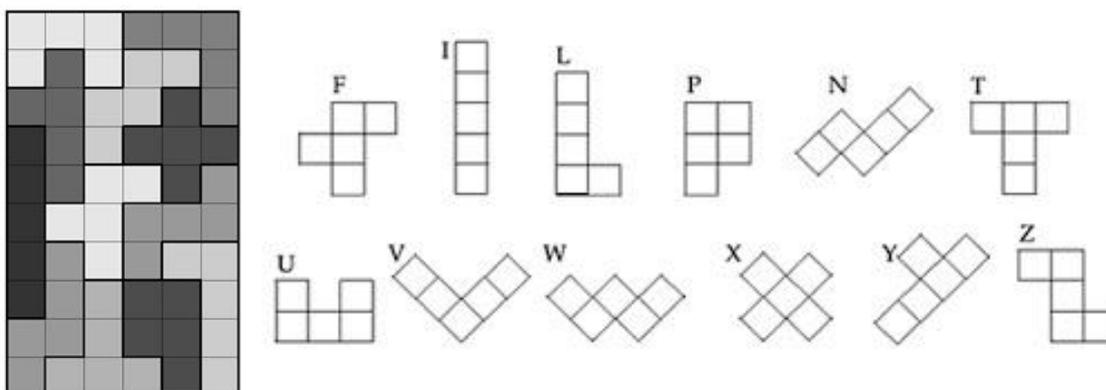


Figura 24 Pentominó

Extraído del blog: <http://elprofeeduardo.blogspot.com>

Este material no solamente trabaja la geometría plana, ya que si usamos los policubos podemos usar la idea de los poliminós en la geometría espacial, tal y como se puede observar en la imagen de la Figura 25:



Figura 25 Policubos

Imagen extraída de:

<http://reseteomatematico.com>

➤ **POTENCIALIDADES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN PRIMARIA:**

- Desarrollar la percepción, estructuración y orientación espacial.
- Desarrollar la creatividad del alumnado con la creación libre.
- Comprender que las figuras 2d forman parte de las 3d (las caras de los policubos son cuadrados).
- Encontrar los ejes de simetría de los cuerpos geométricos.
- Componer, descomponer y reconocer figuras geométricas.
- Rellenar siluetas planas y espaciales con la correcta colocación (orientación espacial).

➤ **ACTIVIDADES**

**ACTIVIDAD 1: Figuras geométricas planas**

**Objetivos:**

- Reconocer figuras geométricas.
- Hacer clasificaciones de polígonos, atendiendo a diferentes características.

- Identificar poliedros y sus partes.
- Dibujar figuras simétricas a otras dadas.
- Calcular el número de caras y sus áreas.
- Calcular el volumen de la figura.

**Cursos:** segundo ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:** empezaremos por experimentar libremente con el material, ofreciendo diferentes piezas de policubos a cada uno, que los alumnos creen sus propias figuras desarrollando su imaginación.

A continuación, por parejas, un alumno realizará un dibujo y su compañero lo construirá con policubos.

También trabajaremos simetría, un alumno construye una figura y el compañero construye la figura simétrica.

Después presentaremos modelos en 3D de figuras que ellos tendrán que copiar.

También podemos presentar una imagen de la planta, el alzado y el perfil de una figura y que ellos la construyan. O el caso inverso, presentamos la figura y ellos dibujan el papel cómo sería la planta, el alzado y el perfil.

## **ACTIVIDAD 2: Pentaminós**

### **Objetivos:**

- Reconocer figuras geométricas.
- Hacer clasificaciones de polígonos, atendiendo a diferentes características.
- Calcular el área y perímetro de figuras dadas.
- Representar figuras a partir de las características dadas.

**Cursos:** segundo ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:**

- Construcción de figuras geométricas: damos los pentaminós a los alumnos y con ellos tendrán que construir todas las figuras geométricas posibles. Lo haremos con diferentes cantidades de piezas, de 3 a 12.
- Simetrías: ¿qué piezas tienen ejes de simetría?: I, T, U, V, W, X.
- Área y perímetro: Si tomamos el cuadrado que compone al pentominó como unidad de medida de superficie, ¿cuál es el área de cada pieza y cuál su perímetro?
- Crear un cuerpo geométrico a partir de la vista de perfil, planta y alzado (poliminós 3d).
- Formar un polígono a partir de la descripción de este.
- Estudio de los polígonos y sus propiedades: con este tipo de actividades estudiamos e identificamos conceptos como vértice, lado, ángulo, figura regular, irregular, convexa, cóncava, simetría, etc.

**7.5. GEOMAG****➤ DESCRIPCIÓN:**

Juego compuesto por barras de acero de 27mm. recubiertas de plástico de diferentes colores que tienen un imán en cada extremo y por esferas de 12,7mm. también de acero imantadas para poder unir las piezas entre sí.

Con Geomag es posible construir modelos de los cinco poliedros regulares. Estos poliedros se caracterizan por ser poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices se unen el mismo número de caras. También reciben el nombre de sólidos platónicos, en honor al filósofo griego Platón, a quien se atribuye haberlos estudiado por vez primera.

Los poliedros regulares son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro Figura 26:

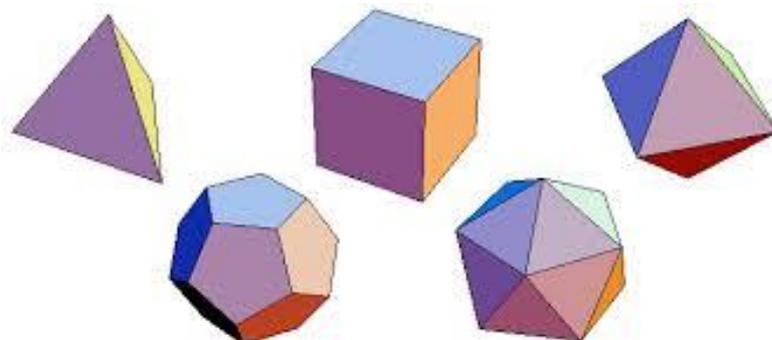


Figura 26 Poliedros regulares

Imagen extraída de la web:

<https://matematicaenprimaria.com>

A continuación, en la figura 27, podemos ver la representación de poliedros regulares hechos con GEOMAG



Figura 27 Poliedros regulares con GEOMAG

Imagen extraída de la web:

<https://matematicaenprimaria.com>

➤ **POTENCIALIDADES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN PRIMARIA:**

- Desarrollar la percepción, estructuración y orientación espacial.
- Identificar la simetría de las figuras y cuerpos geométricos.
- Reconocer la posición de los objetos en el espacio.

- Crear, analizar y clasificar distintos polígonos y cuerpos geométricos atendiendo a un criterio preestablecido.
- Descomponer figuras planas y cuerpos geométricos a partir de figuras más simples y viceversa.
- Representar de forma gráfica el alzado, la planta y los perfiles de los cuerpos geométricos.

### ➤ ACTIVIDADES

#### **ACTIVIDAD 1: Figuras geométricas planas**

##### **Objetivos:**

- Identificar la simetría de las figuras y cuerpos geométricos.
- Crear, analizar y clasificar distintos polígonos y cuerpos geométricos atendiendo a un criterio preestablecido.
- Resolver problemas geométricos de la vida diaria.
- Descomponer figuras planas y cuerpos geométricos a partir de figuras más simples y viceversa.

**Curso:** segundo ciclo de Educación Primaria.

**Desarrollo:** comenzaremos entregando el material y dejando a los alumnos que experimenten para que se familiaricen con el mismo. Podrán hacer creaciones libres. Posteriormente les enseñaremos fotos y vídeos de ejemplos de creaciones con este material.

- Daremos a cada niño 33 palitos imantados y 32 bolitas, con los que deberán formar todos los polígonos posibles: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono....
- Estudiar figuras planas, cuerpos geométricos y sus propiedades. Por grupos, analizarán las figuras que han construido, viendo el número de lados que tienen, de vértices, etc. Reconocer que las figuras planas, forman parte de las 3d.

- Resolver problemas: por ejemplo, crea 5 triángulos a partir de 9 barras (utilizando las esferas que se desee), luego mueve dos barras para perder un triángulo y formar un paralelogramo.

## 7.6. MATERIAL MONTESSORI

El material Montessori se caracteriza principalmente por ser un material sensorial. Trabajando con este material, el niño puede llegar a descubrir las relaciones entre las figuras y también deducir las reglas geométricas.

Voy a destacar varios ejemplos, que nos pueden ser de utilidad en Educación Primaria.

**Sólidos geométricos Montessori**, son cuerpos geométricos de madera, que podemos manipular, agrupar, unir los que son iguales, trabajar la identificación a través del tacto. Se presentan en dos bolsas opacas y se repiten por parejas. Figura 28.



Figura 28 Sólidos geométricos

Una vez que los hemos trabajado, podemos hacer asociaciones con objetos reales, como en la ficha que presento a continuación en la figura 29:

Laguntza gela

CUERPOS GEOMÉTRICOS



Figura 29 Asociación cuerpo geométrico a objeto real

Imagen extraída de la página web:

<http://www.creciendoconmontessori.com/>

Este es otro material Montessori (Figura 30), con el que podemos trabajar los diferentes tipos de ángulos, sumar y restar, trabajar ángulos complementarios, suplementarios y hacernos fichas autocorrectivas, en un lado de la ficha ponemos la suma de ángulos que hay que realizar y en la parte posterior, la solución.



Figura 30 Ángulos Montessori

<http://www.creciendoconmontessori.com>

Los materiales autocorrectivos son materiales que permiten al niño corregirse a sí mismo sin la necesidad de recurrir al adulto, ganando así autonomía y siendo más consciente de su propio aprendizaje.

### **Montessori geometry stick**

Este material se utiliza para el estudio de líneas, ángulos y formas geométricas planas. Podemos representar líneas paralelas, figuras geométricas, ángulos. Figura 31.



Figuar 31 Geometry stick

Imagen extraida de:

<http://www.pinayhomeschooler.com>

Está compuesto por:

10 juegos de palos de colores que varían en tamaños

1 juego de palos en color madera natural

Algunos palos dentro del conjunto tienen agujeros en ambos extremos y algunos palos y dos o tres palos dentro de cada conjunto tienen agujeros a lo largo del palo.

clavos, tachuelas

ángulos de medición

plásticos semicirculares

## CONCLUSIÓN

Con este trabajo, quiero destacar la importancia del uso de material manipulable previo a la adquisición del conocimiento que estamos trabajando. En este caso concreto, en el área de matemáticas, más concretamente en la rama de geometría.

Mi experiencia con este tipo de material es principalmente en escuelas infantiles y en Educación Especial, pero por su eficacia en alumnos pequeños y en alumnos con dificultades de aprendizaje, me parece fundamental extenderlo a todos los alumnos de Educación Primaria, porque no todos los alumnos tienen las mismas estrategias de aprendizaje, ni los mismos intereses. Y creo fundamental partir de los intereses del propio alumno, para motivarles y favorecer un aprendizaje significativo.

Y no sólo este motivo, me parece muy importante crear un ambiente motivador tanto para el alumno como para el educador, que no debe ser un mero instructor, sino un guía en el aprendizaje de sus alumnos.

Debemos favorecer un aprendizaje cooperativo, donde todos nuestros alumnos tengan cabida, donde todos aporten experiencias, intereses y habilidades, porque todos somos diferentes, pero de todos podemos aprender. Esto va a favorecer la inclusión de niños que presentan dificultades de aprendizaje o alguna discapacidad, que les puede suponer una dificultad en la adquisición del aprendizaje, pero no un impedimento.

La organización de la clase ha de favorecer el intercambio de ideas entre el profesor y los estudiantes y entre los mismos estudiantes que han de exponer argumentos para explicar sus ideas, convencer a otros, confrontar opiniones y atender a perspectivas distintas a la propia

El material manipulativo, favorece la experimentación táctil, la exploración, el contacto directo con aquello que queremos enseñar y esto, para alumnos con trastornos o problemas de aprendizaje va a suponer una gran ayuda.

A través de este trabajo y las actividades propuestas quiero fomentar el interés por la geometría, partiendo de la experiencia directa con el material manipulativo, tal y como me he planteado en los objetivos específicos.

Todo ello me ha servido para analizar la importancia que tiene el uso de materiales manipulativos en la enseñanza de geometría, extendiendo así una propuesta de metodologías que favorecen la manipulación, a la etapa de Educación Primaria.

## BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M<sup>a</sup>. (1988) *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdicomanejativos para niños y niñas de 6 a 12 años*. Madrid: Narcea

Alsina, A. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Madrid: Narcea.

Bas, M.; Brihuega, J. (1987). *Geoplanos y meccanos*. Madrid: Ministerio de Educación y ciencia. Dirección general de renovación pedagógica. Subdirección general de formación del profesorado

Beresaluce, R. (2009). *Las escuelas reggianas como modelo de calidad en la etapa de Educación Infantil*. *Aula abierta*, 37(2), 123-130.

Bressan, A., B. Bogisic, K. Crego (2000), *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar...* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas

Biniés, P. (2008). *Conversaciones matemáticas con Maria Antònia Canals: O cómo hacer de las matemáticas un aprendizaje apasionante*. Barcelona: GRAÓ.

Canals, M. A. (1997). *La geometría en las primeras edades escolares*, *Suna* 25, pp. 31-44.

Cascallana, M<sup>a</sup>.T. (1988) *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Aula XXI/Santillana.

Cascallana, M.T. (1996). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid, Santillana.

Decroly, O. (1965) *Iniciación general al método Decroly y ensayo de aplicación a la escuela primaria*. Buenos Aires: Losada.

Dienes, Z.P. (1970) *La construcción de las matemáticas*. Barcelona: Vicens-Vives.

Dienes. Z.P. (1986). *Las seis etapas del aprendizaje en Matemáticas*. Barcelona. Teide.

Fouz, F., 2003, *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría*, Berritzegune de Donosti, Ataritzar Bidea, 16, 2013 Donostia.

García, S. y López O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Mexico D.F.

Hoyuelos, A. (2009). *Ir y descender a y desde Reggio Emilia. Una mirada a la Educación Infantil*. *Revista Participación Educativa*. 12, 171-181.

Kagan, S. (1994). *Cooperative Learning*. San Juan Capistrano, California. Kagan Cooperative Learning.

Malaguzzi, L. (2005) *Los cien lenguajes de la infancia*. Barcelona. Ed Rosa Sentat.

Nortes Checa, A. y Nortes Martínez-Artero, R. (2012). *La resolución de problemas de geometría*. Madrid: CCS

Saá, M. D. (2002). *Las matemáticas de los cuentos y las canciones*. Madrid: EOS

Sanz, I. (2001). *Matemáticas y su Didáctica II. Geometría y medida*. Serv. Ed. Universidad del País Vasco. 117 – 128.

Van Hiele, P. M., (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education. Developmental Psychology Series*. Academic Press, Inc., Orlando, (1986).

#### PÁGINAS WEB UTILIZADAS:

<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/testuakonline>

[http://aprendiendomatematicas.com/didactica/10-razones-para-usar-juegos-y-materiales-manipulativos-en-secundaria\\_](http://aprendiendomatematicas.com/didactica/10-razones-para-usar-juegos-y-materiales-manipulativos-en-secundaria_) de Martín M.

<https://aprendiendomatematicas.com/> de Malena Martín

<http://blog.montessori-palau.net>

Mora, J.A. (1995). Los Recursos Didácticos en el aprendizaje de la Geometría.

<http://jmora7.com/miWeb8/Archiv/95recunog.pdf>

Teixidor, E. (2010). Pajifiguri: un material manipulativo y cuento interactivo.

[http://www.sinewton.org/numeros/numeros/74/Experaula\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/74/Experaula_01.pdf)