

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE ONDAS NO LINEALES: SOLITONES

Trabajo de Fin de Grado

Autor:

Gabriel García Jiménez

Julio de 2018



Universidad de Valladolid

Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica

Tutor:

Luis Miguel Nieto Calzada

Índice

Agradecimientos	v
Resumen	ix
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Metodología	2
2 Ecuaciones en derivadas parciales no lineales en física	3
2.1 La ecuación de Korteweg-De Vries en fluidos	3
2.1.1 Ondas de gravedad de pequeña amplitud	5
2.2 Oscilaciones mecánicas, la unión Josephson y QFT: La ecuación de Sine-Gordon	9
2.2.1 Oscilaciones mecánicas acopladas	9
2.2.2 La unión Josephson	11
2.2.3 La ecuación de Sine-Gordon en QFT	16
2.3 La ecuación no lineal de Schrödinger en fibras ópticas	18
2.4 Apéndice A: Derivación de las condiciones de contorno en la ecuación KdV	20
3 Resolución de las ecuaciones	23
3.1 La ecuación de Korteweg-De Vries	23
3.1.1 Caso 1: Soluciones solitónicas	24
3.1.2 Caso 2: Soluciones de tipo cnoidal	26
3.2 La ecuación de Sine-Gordon	31
3.2.1 Soluciones de tipo kink.	31
3.2.2 Soluciones 2-kinks	34
3.2.3 Soluciones de tipo breather.	35
3.3 La ecuación de Schrödinger no lineal	36
3.3.1 Primer caso: $\beta < 0$	37
3.3.2 Segundo caso: $\beta > 0$	39
3.4 Apéndice B: Integrales elípticas y funciones elípticas de Jacobi	41
3.4.1 Integrales elípticas	41
3.4.2 Funciones elípticas de Jacobi	43
4 Conclusiones	47

Índice de figuras

2.1	Disposición del fluido a estudiar	4
2.2	Péndulos oscilantes acoplados	9
2.3	Unión Josephson, donde $S1$ y $S2$ denotan a los superconductores 1 y 2, respectivamente, y d el espesor del aislante.	12
2.4	Pares de Cooper moviéndose en una red superconductora.	12
2.5	Acoplamiento de las funciones de onda	13
2.6	Circuito equivalente de una unión Josephson como línea de transmisión larga.	14
2.7	Fibra óptica y diversos modos de propagación.	18
2.8	Campo eléctrico: En azul el campo y en naranja la envolvente	19
3.1	Solución solitónica (3.11) para un valor de $c = 1$, $\eta_0 = 0$ y para un intervalo de tiempo $t \in [0, 20]$	25
3.2	Solución solitónica en función de x, t	25
3.3	Perfiles de onda para distintos valores de la velocidad c . En azul $c = 1$, en amarillo $c = 2$, en verde $c = 3$ y en rojo $c = 4$	26
3.4	Solución cnoidal para un valor de $c = 1/2$, $m = 0.99$ y un intervalo de tiempo $t \in [0, 20]$	28
3.5	Solución cnoidal para un valor variable del parámetro m de $m = 0.99$ a $m = 0.9999999$	29
3.6	Representación tridimensional de la solución cnoidal 3.24, con $m = 0.99$, $\eta_0 = 0$ y $c = 1$	29
3.7	Solución que representa una onda de depresión en el fluido, para un valor de $c = 1$ y $t \in [0, 20]$	30
3.8	Representación de un kink (elección del signo menos), $\eta_0 = 0$, un valor de $c = 1/2$ y un intervalo de tiempo $t \in [0, 20]$	32
3.9	Representación de un antikink (elección del signo más), $\eta_0 = 0$, un valor de $c = 1/2$ y un intervalo de tiempo $t \in [0, 20]$	33
3.10	Solución de tipo kink en 3.43 para distintos valores de la velocidad c	33
3.11	Colisión de dos kinks para un valor de $c = 0.5$	34
3.12	Colisión de un kink con un antikink para un valor de $c = 0.5$	35
3.13	Solución de tipo breather para un valor de $\omega = 0.2$ en (3.50).	36
3.14	Breather (3.50) con $\omega = 0.9$	36
3.15	Breather (3.50) con $\omega = 0.01$	36
3.16	Intensidad del pulso $ u(z, t) ^2$ hallado en 3.68.	39
3.17	Intensidad del pulso.	41

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría darle las gracias a mis padres y a mi hermana, por todo el apoyo recibido estos cuatro últimos años, sin el cual no hubiera podido terminar mis estudios con éxito, y por lo que les estoy muy agradecido.

También quisiera darle las gracias a mi tutor, Luis Miguel Nieto, por la dedicación y los consejos recibidos estos meses, que han permitido que este trabajo de fin de grado salga adelante, y que me han permitido empezar a ver las cosas desde el punto de vista de la investigación.

Por último, agradecer a mis compañeros tanto sus consejos y opiniones como los buenos ratos pasados estos cuatro años.

A la memoria de mi abuelo Lito.

Resumen

El estudio de sistemas físicos cuyo comportamiento sea modelado por ecuaciones no lineales es un importante campo de estudio hoy en día. En el presente trabajo se propone una introducción a la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales más representativas (Korteweg-De Vries, Schrödinger no lineal, Sine-Gordon) en Física, describiendo para ello los sistemas en los que surgen estas ecuaciones y hallando soluciones viajeras que permitirán el estudio de fenómenos tales como ondas de tipo solitónico, ondas cnoidales, kinks o breathers, con gran aplicación en la Física actual.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

En física, así como en otras áreas de la ciencia (matemáticas, química, biología, economía..) cuando se trata de hallar un modelo que explique la realidad, normalmente se parte de un modelo matemático sencillo, adecuado para empezar a entender el problema y valioso desde el punto de vista didáctico en el que las ecuaciones que describen los procesos a estudiar son lineales. Esto facilita enormemente los cálculos y veces un planteamiento lineal del problema es correcto, y entonces podemos conocer toda la información de manera exacta del problema. Otras veces, se simplifica el problema haciéndolo lineal, a costa de perder cierta información o de llegar a unos resultados aproximados o en ocasiones incluso incorrectos, pero útiles.

Pero a veces, al adentrarse más en el campo de estudio, empiezan a aparecer procesos que hacen que la no linealidad no pueda seguir siendo ignorada si uno quiere describir el fenómeno con vistas a obtener unos resultados al menos razonables. Esto no siempre es así, ya que algunas veces la no linealidad aparece casi de inmediato en cuanto se comienzan a estudiar ciertos temas, sin necesidad de entrar en asuntos demasiado profundos. Tanto es así que por ejemplo en óptica geométrica, base para entender el resto de la óptica, la ecuación básica es la ecuación *eikonal* que para un índice de refracción $n(\vec{r})$ representa la superficie de propagación del frente de ondas y que es claramente no lineal.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n^2(\vec{r}) \quad (1.1)$$

En estas ecuaciones, a menudo un balance entre efectos no lineales y dispersivos en el sistema a estudiar dará como resultado ecuaciones en las que el tipo de soluciones sean soluciones solitónicas. Como vamos a tratar con estos objetos a menudo, conviene dar una definición de que se entiende por solitón.

Siguiendo a Zabusky y Kruskal¹, un solitón es una onda solitaria estable, solución de una ecuación de ondas, cuya forma y velocidad no cambia con el tiempo ni tampoco

¹Norman Zabusky y Martin Kruskal, físicos estadounidenses pioneros en la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales no lineales.

se ve alterada por la colisión con otros objetos del mismo tipo (salvo un posible cambio de fase). Por esto los solitones a veces son tratados como si fueran partículas, pues tienen energía y momento bien localizados. Como ya se puede intuir, la presencia de soluciones de este tipo dota de un enorme interés a cualquier proceso regido por este tipo de ecuaciones, y como veremos más adelante, resulta en todo tipo de aplicaciones, muchas de ellas de actualidad (fibras ópticas, condensados de Bose-Einstein, teoría cuántica de campos, dinámica de fluidos..). A parte de este tipo de soluciones, en este trabajo también nos vamos a encontrar con otras soluciones igualmente interesantes como kinks, antikinks u ondas cnoidales que serán igualmente motivo de estudio.

1.2 Metodología

El interés “reciente” en este tipo de ecuaciones se debe sobre todo a la presencia de soluciones solitónicas, que reavivaron la búsqueda de métodos de resolución para este tipo de ecuaciones que a su vez han dado lugar a técnicas como el método de la transformada de scattering inverso o la transformación de Bäcklund. Como uno puede imaginarse, si ya la búsqueda de soluciones analíticas para una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal es complicada (a veces incluso imposible), éstos métodos de búsqueda de soluciones para ecuaciones en derivadas parciales no lineales (de ahora en adelante EDPNL) son de una dificultad bastante elevada. Hacer un desarrollo teórico estricto de estos métodos, y basar en ellos la búsqueda de soluciones de estas ecuaciones se sale completamente del objetivo de esta memoria, siendo temas propios de estudios de máster más avanzados y por ello en este trabajo se hará un enfoque más heurístico. En primer lugar, en el Capítulo 2 estudiaremos sistemas físicos cuyo comportamiento puede ser modelado por este tipo de ecuaciones, dando así un contexto que permita entender la riqueza de este tipo de ecuaciones, así como su transversalidad, pues los fenómenos que vamos a estudiar pertenecen a multitud de ramas distintas de la física. Posteriormente, en el Capítulo 3 hallaremos la solución a estas ecuaciones, proponiendo para ello soluciones viajeras que nos permitirán ver la riqueza en soluciones que poseen estas ecuaciones.

Capítulo 2

Ecuaciones en derivadas parciales no lineales en física

Presentar las ecuaciones que vamos a estudiar sin más, y pasar posteriormente a resolverlas, no diferenciaría mucho este trabajo de uno puramente matemático, así que parece conveniente estudiar algunos sistemas comunes en física, que como veremos, nos permitirán derivar algunas de las ecuaciones de ondas no lineales más representativas (ecuación de Korteweg-De Vries, ecuación de Schrödinger no lineal, y la ecuación de Sine Gordon) y darle a este estudio un marco teórico que nos hará ver la importancia de este tipo de ecuaciones en Física.

Como veremos, la aparición de la no linealidad, junto con efectos dispersivos, serán las condiciones necesarias para la aparición de soluciones solitónicas que hallaremos, junto con otros tipos de soluciones, en el Capítulo 3.

2.1 La ecuación de Korteweg-De Vries en fluidos

Comenzamos nuestro estudio por el que quizá sea el ejemplo más conocido en lo que se refiere a sistemas que presenten soluciones de tipo solitónico: la ecuación de Korteweg-De Vries en fluidos.

En efecto, fue John Scott Russell¹ en 1844 quien primero observó un fenómeno de este tipo. En palabras del propio Russell:

I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of

¹John Scott Russell, ingeniero civil y constructor de barcos, que estudiando canales de agua, observó lo que él llamó “Onda de traslación” y que dio pie al estudio de este tipo de fenómenos.

form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation.

Leyendo estas palabras, uno ya se puede hacer una idea del interés que despertó este extraño fenómeno en Russell. Una onda solitaria, que preserva su forma, y que parece no decaer ni aminorar su velocidad en su movimiento es, cuanto menos, contraintuitivo, y no es de extrañar que científicos de la época trataran de explicar el fenómeno. Sin embargo no fue hasta finales de siglo, en 1895, cuando Korteweg y Vries² modelaron el fenómeno observado por Russell y dando lugar a la ecuación que nos disponemos a derivar a continuación.

Con el fin de deducir la ecuación, vamos a considerar un fluido, como podría ser agua, por ejemplo, en el seno de un campo gravitatorio constante, que va a tender a mantener el fluido en su nivel más bajo, y que vamos a tratar como fuerza dominante. Dicho campo va a producir lo que llamaremos *ondas de gravedad*, en contraposición a las *ondas capilares*, producidas por la tensión superficial, cuyo efecto despreciaremos en nuestro estudio.

Sea entonces el campo en la dirección del eje z negativo, $\vec{g} = -g\vec{k}$, y $z = 0$ el nivel del fluido en reposo, como se muestra en la figura (2.1).

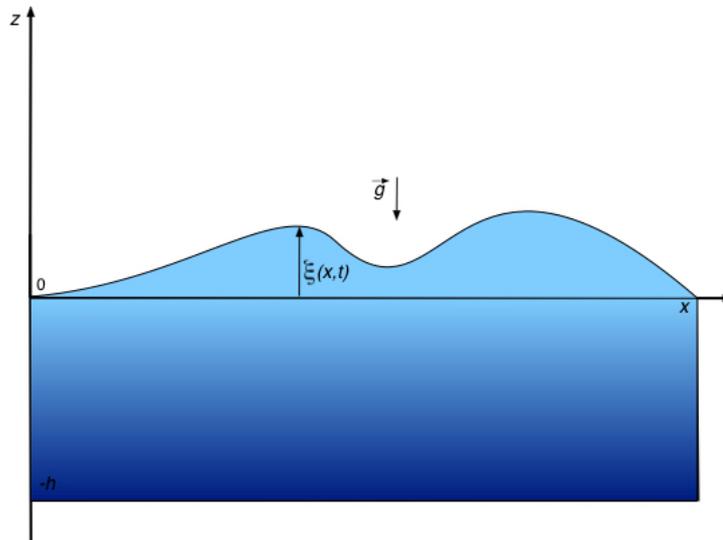


Figura 2.1: Disposición del fluido a estudiar

²Diederik Korteweg y Gustav de Vries, matemáticos holandeses que en 1895 publicaron el estudio *Bijdrage tot de kennis der lange golven* (Contribución al conocimiento de las grandes olas), tesis doctoral de De Vries dirigida por Korteweg, en la que se estudiaron este tipo de fenómenos.

Llamaremos $\xi(x, t)$ al desplazamiento respecto al equilibrio del nivel del fluido, es decir, en el equilibrio $\xi(x, t) = 0$. Esto quiere decir que consideramos un fluido en un canal bidimensional, de modo que las únicas coordenadas relevantes son las coordenadas x, z . Para simplificar el problema, vamos a asumir que nuestro fluido tiene las siguientes características:

- Vamos a suponer condiciones de estabilidad, de modo que el fluido sea irrotacional, es decir, $\nabla \times \vec{v} = 0$.
- Suponemos también que la viscosidad es despreciable, $\eta \approx 0$.
- Por último, vamos a tomar la densidad del fluido constante.

La primera de estas condiciones nos permite definir el campo de velocidades como el gradiente de cierta función escalar que llamaremos potencial velocidad, ϕ , de modo que $\vec{v} = \nabla\phi$. Si nos fijamos ahora en la ecuación de continuidad del fluido, y teniendo en cuenta que la densidad es constante, podemos deducir una de las ecuaciones de Euler para este fluido:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

y tenemos entonces que:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.2)$$

ecuación que resolveremos a continuación.

Antes de eso, conviene definir las condiciones de contorno que debe cumplir nuestra función potencial. De la mecánica de fluidos, se pueden deducir las siguientes expresiones (demostradas en el Apéndice A):

$$\begin{aligned} \phi_z &= \xi_x \phi_x + \xi_t & \text{en } z = \xi(x, t) \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\xi &= 0 & \text{en } z = \xi(x, t) \\ \phi_z &= 0 & \text{en } z = -h \end{aligned} \quad (2.3)$$

Con esto, ya podemos empezar a resolver el problema de la propagación de ondas en nuestro fluido.

2.1.1 Ondas de gravedad de pequeña amplitud

Para resolver el problema, podríamos resolver la ecuación (2.2) por algún método directo, por ejemplo por separación de variables, y aplicar después las condiciones de contorno. Sin embargo, experimentalmente sabemos que esta clase de ondas (las que se podrían producir en un estanque, por ejemplo) tienen una forma sinusoidal un tiempo después de que se produzca la perturbación del medio. Entonces parece razonable proponer una función para el potencial velocidad ϕ de la forma

$$\phi(x, z, t) = q(x, z) \text{sen}(kx - \omega t) \quad (2.4)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.2) obtenemos :

$$\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - k^2 q \right) \text{sen}(kx - \omega t) + 2k \frac{\partial q}{\partial x} \text{cos}(kx - \omega t) = 0 \quad (2.5)$$

Para que la ecuación se cumpla, los coeficientes del seno y coseno deben anularse:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - k^2 q = 0. \quad (2.6)$$

De la primera de las condiciones, podemos ver que q no depende de x , es decir, que no hay dispersión. Proponiendo una solución a la segunda ecuación de la forma $q(z) = e^{\lambda z}$, llegamos a la siguiente expresión para la función q :

$$q(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad (2.7)$$

Con A, B constantes que deberemos obtener a partir de las condiciones de contorno. Tenemos entonces una expresión para el potencial velocidad:

$$\phi(x, z, t) = (Ae^{kz} + Be^{-kz}) \text{sen}(kx - \omega t) \quad (2.8)$$

Si suponemos la perturbación suficientemente pequeña, entonces podemos aproximar tanto las derivadas del desplazamiento, ξ_t, ξ_x por cero, así como las velocidad del fluido en la dirección x . Con estas suposiciones, las condiciones de contorno anteriormente citadas se convierten en :

$$\begin{aligned} \phi_z - \xi_t &= 0 & \text{en } z = \xi(x, t) \\ \phi_t + g\xi &= 0 & \text{en } z = \xi(x, t) \\ \phi_z &= 0 & \text{en } z = -h \end{aligned}$$

Evaluando la última condición de contorno para el potencial que hemos hallado, tenemos que:

$$B = Ae^{-2kh}, \quad (2.9)$$

y sustituyendo en la expresión de ϕ :

$$\phi = (Ae^{kz} + Ae^{-2kh}e^{-kz}) \text{sen}(kx - \omega t) = Ae^{-kh}(e^{kh}e^{kz} + e^{-kh}e^{-kz}) \text{sen}(kx - \omega t), \quad (2.10)$$

que se puede poner como:

$$\phi = 2Ae^{-kh} \cosh[k(z + h)] \text{sen}(kx - \omega t) = A_m \cosh[k(z + h)] \text{sen}(kx - \omega t) \quad (2.11)$$

Por último, para hallar la relación de dispersión, debemos aplicar las dos condiciones de contorno restantes. Para simplificar los cálculos, y dado que estamos en la aproximación de pequeña amplitud, es equivalente evaluar dichas condiciones de contorno en $z = 0$ en vez de en $z = \xi(x, t)$, ya que $\xi \approx 0$.

Derivando respecto al tiempo en la segunda de ellas y sustituyendo en la primera, obtenemos la condición:

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0 \quad (2.12)$$

que, finalmente, nos da la relación de dispersión:

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)} = \sqrt{g \frac{2\pi}{\lambda} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \quad (2.13)$$

Para continuar nuestro estudio, es necesario estudiar los dos casos opuestos que se nos presentan: Ondas con una longitud de onda muy grande, de modo que $h/\lambda \ll 1$, llamadas *ondas superficiales*, y la situación contraria en el que $h/\lambda \gg 1$ en cuyo caso tendremos *ondas profundas*. Recordamos que estos dos tipos de ondas siguen siendo lineales, pues seguimos en la aproximación de pequeña amplitud.

En el caso de ondas con longitud de onda muy grande, podemos desarrollar la tangente hiperbólica en serie de Taylor en torno a k , ya que $kh \ll 1$. Tenemos pues:

$$\tanh(kh) = kh - \frac{(kh)^3}{3} + \dots \quad (2.14)$$

Sustituyendo en la relación de dispersión (2.13) antes hallada:

$$\omega \approx \sqrt{gk\left(kh - \frac{(kh)^3}{3}\right)} \approx c_0 k \left(1 - \frac{(kh)^2}{6}\right), \quad (2.15)$$

donde hemos definido c_0 como $c_0 = \sqrt{gh}$ que como se puede ver tiene unidades de velocidad. El punto clave de este desarrollo es que para ondas superficiales, la relación de dispersión se aleja del resultado de $\omega = c_0 k$ en un factor proporcional a k^2 , es decir, tenemos una ligera dispersión.

Pasemos ahora al caso de **ondas profundas**. Si $kh \gg 1$, entonces la tangente hiperbólica de (2.13) tiende asintóticamente a 1, y la relación de dispersión se escribe como

$$\omega = \sqrt{gk} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (2.16)$$

Esto significa que la velocidad de fase no depende de la longitud de onda linealmente, así pues volvemos a encontrarnos con un fenómeno dispersivo.

Hasta ahora hemos considerado que la amplitud de la onda era despreciable, lo cual nos ha permitido simplificar los cálculos. Ahora bien, cuando la amplitud crece, los efectos que ésta produce en el sistema que estamos estudiando no pueden ser omitidos. Volviendo al principio, veíamos que para un medio no dispersivo, la relación de dispersión venía dada por $\omega = k\sqrt{gh}$. Pues bien, mediante un argumento completamente heurístico, vamos a sustituir en la relación anterior h por $h + \xi$, con la idea de tener en cuenta los efectos de la amplitud del movimiento. Tenemos pues:

$$\omega = k\sqrt{g(h + \xi)} \approx kc_0 \left(1 + \frac{\xi}{2h}\right) \quad (2.17)$$

Donde hemos usado la aproximación $(1 + f(x))^{\frac{1}{n}} \approx 1 + f(x)/n$.

Combinando este resultado con el obtenido para la dispersión de una onda superficial, tenemos:

$$\omega = kc_0 \left(1 + \frac{\xi}{2h} - \frac{k^2 h^2}{6} \right). \quad (2.18)$$

El siguiente paso es realizar la transformada de Fourier dos veces a la función $\xi(x, t)$, pasando de $x \rightarrow k$ y de $t \rightarrow \omega$:

$$\mathcal{F} \{ \xi(x, t) \} = \tilde{\xi}(k, \omega). \quad (2.19)$$

Pasando todos los miembros a la izquierda en la ecuación (2.18) y multiplicando por $\tilde{\xi}(k, \omega)$ tenemos la siguiente expresión:

$$\omega \tilde{\xi}(k, \omega) - c_0 k \tilde{\xi}(k, \omega) - \frac{c_0 k}{2} \tilde{\xi}(k, \omega) \xi(x, t) + \frac{h^2 k^3 c_0}{6} \tilde{\xi}(k, \omega) = 0 \quad (2.20)$$

Realizando ahora la transformada inversa de Fourier, usando la propiedad

$$\mathcal{F} \{ x^n f(x) \} = i^n \frac{d^n \tilde{f}(k)}{dk^n} \quad (2.21)$$

y dividiendo por i , tenemos:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - c_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{c_0}{2} \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{h^2 c_0}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0. \quad (2.22)$$

Para hallar la ecuación KdV en su forma normal, sólo nos resta hacer el cambio de coordenadas

$$x' = x + c_0 t, \quad t' = t, \quad (2.23)$$

Con lo que debemos hallar las derivadas de ξ en función de las nuevas variables

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t'} + c_0 \frac{\partial \xi}{\partial x'} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x'^3} \quad (2.24)$$

Sustituyendo en (2.22), llamando α y β a las constantes y olvidándonos de las primas, obtenemos la ecuación de Korteweg-De Vries en su forma general:

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial t} + \alpha \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0} \quad (2.25)$$

Aquí se puede ver claramente la presencia de la no linealidad, en el segundo término, y la presencia de un término dispersivo en el último término, condiciones que nos permitirán hallar, entre otras, soluciones de tipo solitónico en capítulos posteriores.

2.2 Oscilaciones mecánicas, la unión Josephson y QFT: La ecuación de Sine-Gordon

Continuamos nuestro estudio de las ecuaciones de ondas no lineales con la ecuación de Sine-Gordon. Llamada así por su semejanza con la ecuación de Klein-Gordon³,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right] \phi = 0 \quad \text{en unidades tales que } \hbar = c = 1. \quad (2.26)$$

es la más transversal de las ecuaciones que vamos a estudiar, pues aparece en campos tan dispares como pueden ser el estudio de las superficies de curvatura constante negativa, dislocaciones de cristales, líneas de transmisión mecánicas, efectos de superconductividad en la unión Josephson o teoría cuántica de campos. En adelante, nos vamos a centrar en estudiar la aparición de esta ecuación de ondas en las tres últimas materias mencionadas.

2.2.1 Oscilaciones mecánicas acopladas

Sean una serie de péndulos de masa puntual m , unidos a un muelle por una barra de masa despreciable de manera que oscilan en un plano perpendicular al eje del muelle, de la manera en que se muestra en la figura siguiente:

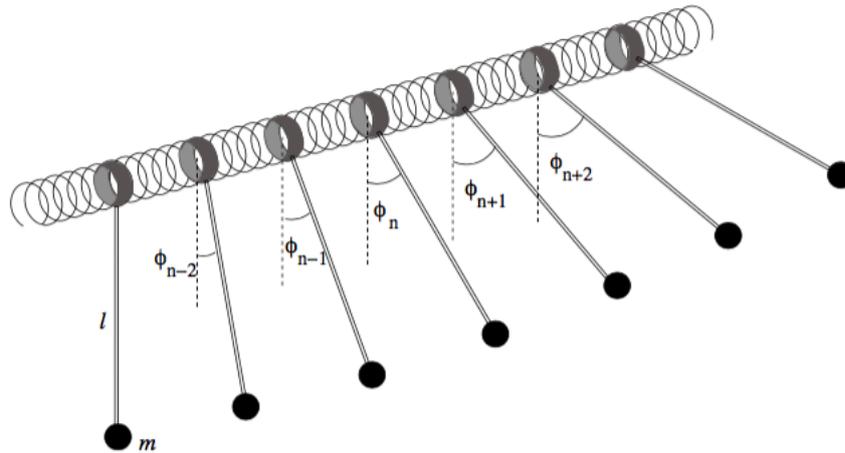


Figura 2.2: Péndulos oscilantes acoplados

En lo que sigue, vamos a usar un enfoque lagrangiano para hallar las ecuaciones del movimiento. El lagrangiano para el péndulo n -ésimo es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\phi}_n)^2 - \frac{1}{2}k(\phi_n - \phi_{n+1})^2 - \frac{1}{2}k(\phi_n - \phi_{n-1})^2 - mgl(1 - \cos\phi_n) \quad (2.27)$$

³Oskar Klein y Walter Gordon, físicos teóricos sueco y alemán, respectivamente, que en 1926 propusieron la ecuación que lleva su nombre como ecuación de ondas para el electrón relativista. En realidad esta ecuación fue propuesta por Schrödinger quien la descartó debido a problemas a la hora de definir las probabilidades

Donde el primer término corresponde a la energía cinética, los dos siguientes a la energía potencial elástica y el último a la energía potencial gravitatoria. Hemos supuesto que sólo hay interacción a primeros vecinos. Donde hemos definido k como la constante elástica y l la longitud del péndulo.

La ecuación de movimiento para el péndulo n -ésimo vendrá dada por la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_n} = 0 \quad (2.28)$$

que nos da

$$\ddot{\phi}_n + \frac{k}{ml^2}(2\phi_n - \phi_{n+1} - \phi_{n-1}) + \frac{g}{l} \text{sen} \phi_n = 0. \quad (2.29)$$

Este conjunto de n ecuaciones acopladas no es resoluble analíticamente, y se les suele llamar *ecuación de Sine-Gordon discreta*. Para pasar al continuo, vamos a operar de la siguiente manera:

- Primero, pasamos cada función ϕ_n a $\phi(x, t)$, y cada función $\phi_{n\pm 1}$ a $\phi(x \pm d)$, con d la distancia entre péndulos.

- Desarrollamos ahora el término $2\phi(x, t) - \phi(x + d, t) - \phi(x - d, t)$ en serie de Taylor en torno a x

$$\begin{aligned} 2\phi(x, t) - \phi(x + d, t) - \phi(x - d, t) &\approx \\ 2\phi(x, t) - (\phi + (x - (x - d)) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(x - (x - d))^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}) - & \\ (\phi + (x - (x + d)) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(x - (x + d))^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}) & \\ = \frac{-d^2 \partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} & \end{aligned} \quad (2.30)$$

Con lo que la ecuación (2.29) se convierte en

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{kd^2}{ml^2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \omega_0^2 \text{sen} \phi(x, t) = 0 \quad (2.31)$$

Aquí hemos definido $\omega_0^2 = g/l$ por similitud con la frecuencia de un péndulo clásico. El último paso es hacer tender la distancia entre péndulos d a cero. Si hacemos $d \rightarrow 0$ nos queda que

$$\frac{kd^2}{ml^2} \rightarrow c_0^2, \quad (2.32)$$

Siempre que supongamos que la masa de cada péndulo tiende a cero de forma adecuada, al igual que la constante elástica.

Vamos a justificar este resultado. Si definimos una densidad lineal, nos queda que

$m = \lambda d$. Por otra parte, recordando un resultado de la asociación de muelles en serie

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (2.33)$$

Es decir, que la constante efectiva es menor que la suma de dos constantes en serie. Si pensamos en nuestro muelle como trozos infinitesimales del mismo, tenemos que

$$\frac{1}{dk_{Tot}} = \frac{1}{dk} + \frac{1}{dk} \Rightarrow dk_{Tot} = \frac{1}{2}dk \quad (2.34)$$

En resumen, la constante del muelle es más grande cuanto menor sea el trozo de muelle que cojamos. Eso nos hace pensar en una dependencia del tipo

$$k \propto \frac{1}{d} \quad (2.35)$$

Sustituyendo en la expresión anterior, se puede ver que, efectivamente, el cociente tiende a un valor constante cuando $d \rightarrow 0$:

$$\frac{\alpha d^2}{d\lambda dl^2} = c_0^2 \quad (2.36)$$

y ya tenemos la ecuación de Sine-Gordon:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \phi(x, t) = 0} \quad (2.37)$$

2.2.2 La unión Josephson

El siguiente sistema que vamos a estudiar es la unión Josephson⁴. Se trata de dos superconductores enfrentados separados por una capa delgada de material aislante, tal como se muestra en la Figura 2.3.

Donde $S1$ y $S2$ denotan a los superconductores 1 y 2, respectivamente, y d el espesor del aislante.

La teoría BCS (propuesta por Bardeen, Cooper y Schrieffer⁵) explica la superconductividad basándose en la idea de par de Cooper. A grandes rasgos, la teoría BCS viene a decir que los portadores de carga en un superconductor no son electrones, sino pares de electrones “ligados” que se denominan pares de Cooper. La idea es que a

⁴Brian David Josephson, físico galés galardonado con el premio nobel en 1973 por la predicción del efecto que lleva su nombre.

⁵John Bardeen, Leon Cooper y John R. Schrieffer, físicos estadounidenses que en 1957 propusieron la teoría BCS para intentar explicar la superconductividad en sólidos, y por la que ganaron el premio Nobel en 1972.

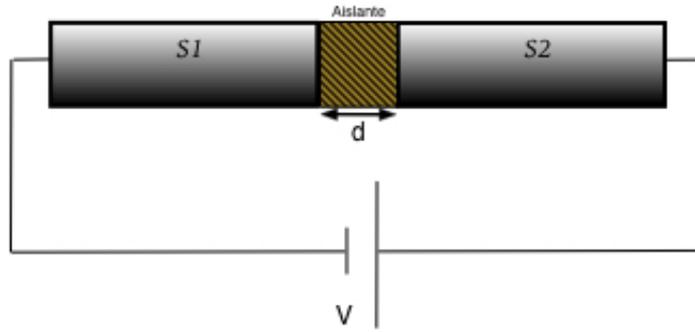


Figura 2.3: Unión Josephson, donde $S1$ y $S2$ denotan a los superconductores 1 y 2, respectivamente, y d el espesor del aislante.

su paso por el sólido, un electrón deformará la red debido a la atracción con los iones cargados positivamente, dejando a su paso una concentración de carga positiva que atraerá al electrón que venga detrás. El mecanismo se ilustra en la Figura 2.4 :

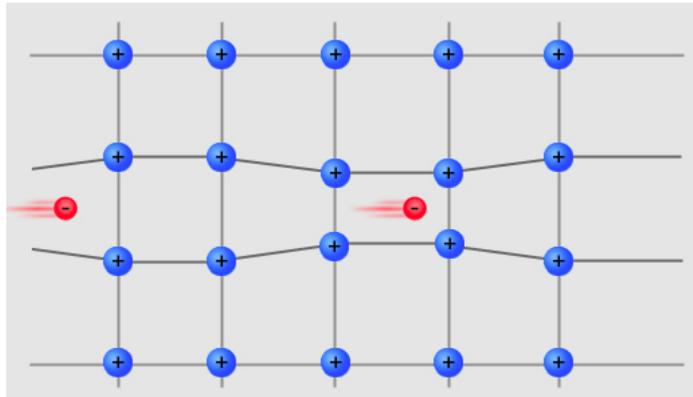


Figura 2.4: Pares de Cooper moviéndose en una red superconductora.

Estos pares, condensan en la misma fase, así que pueden ser descritos por una función de onda del tipo

$$\Psi = \sqrt{n}e^{i\theta}, \quad (2.38)$$

donde n representa la densidad de pares y θ la fase común de los pares de Cooper. Las funciones de onda de ambos superconductores deben satisfacer la ecuación de Schrödinger, y en la zona del aislante tenemos :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = E_1 \psi_1 + K \Psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = E_2 \psi_2 + K \Psi_1 \quad (2.39)$$

Donde K , con unidades de energía, representa la constante de acoplamiento entre ambas funciones de onda en la zona del aislante.

Suponemos que la distancia es lo suficientemente pequeña para que la constante de acoplamiento K sea en verdad una constante y no dependa de la coordenada x .

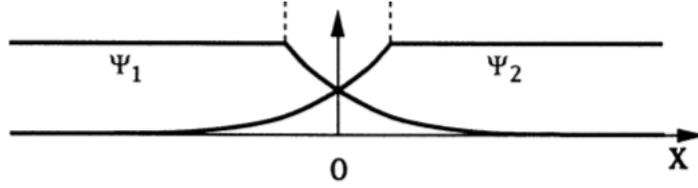


Figura 2.5: Acoplamiento de las funciones de onda

Si aplicamos una diferencia de potencial V a ambos lados de la unión, tomará ahora un valor $E_1 - E_2 = 2eV$. Desplazando el origen de energías de modo que $E_1 = eV$ y $E_2 = -eV$, y sustituyendo en las anteriores ecuaciones (2.39) la función de onda para cada superconductor, tenemos:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \left(\frac{1}{2\sqrt{n_1}} \frac{\partial n_1}{\partial t} + i\sqrt{n_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \right) &= eV\sqrt{n_1} + K\sqrt{n_2}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \\
 i\hbar \left(\frac{1}{2\sqrt{n_2}} \frac{\partial n_2}{\partial t} + i\sqrt{n_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \right) &= -eV\sqrt{n_2} + K\sqrt{n_1}(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta),
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

donde hemos simplificado las fases y hemos definido $\theta = \theta_2 - \theta_1$. A continuación haremos la siguiente suposición más que lógica: Si los dos superconductores son del mismo material, entonces $n_1 \approx n_2 \approx n$. Igualando ahora partes reales e imaginarias y restando y sumando ecuaciones, tenemos:

$$J = J_0 \operatorname{sen} \theta \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}. \tag{2.41}$$

En estas ecuaciones hemos definido $J_0 = 2nK/\hbar$, $\partial n/\partial t = J$ y reciben el nombre de ecuaciones de Josephson.

Notar que esta densidad de corriente J , así definida, tiene unidades de densidad de corriente por unidad de longitud. Es conveniente definirla así, pues posteriormente vamos a trabajar con la unión Josephson larga, y todas las magnitudes vendrán dadas por unidad de longitud. Si se define el flujo magnético como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = V, \tag{2.42}$$

de las ecuaciones anteriores podemos obtener

$$\theta = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}. \tag{2.43}$$

La constante $\Phi_0 = h/2e \approx 2,0678 \times 10^{-15} \text{Wb}$ se define como el *cuanto de flujo magnético*, y es independiente del tipo de superconductor. El inverso de esta constante se denomina constante de Josephson. Vamos a tratar ahora dos efectos sorprendentes de este sistema: Los efectos Josephson *AC* y *DC*.

- De la segunda de las ecuaciones de (2.41), podemos ver que si el potencial aplicado es $V = 0$, entonces θ es constante, pero no necesariamente cero. Sustituyendo en la otra ecuación, tenemos que

$$J = J_0 \text{sen}(cte), \quad (2.44)$$

lo que indica existe una densidad de corriente apreciable incluso si el potencial aplicado es cero. Este efecto se conoce como el efecto Josephson *DC*, y fue medido por vez primera en laboratorio por Anderson y Rowell en 1963.

- Si tomamos ahora una diferencia de potencial constante $V = V_0$, integrando en la ecuación para el flujo magnético, tenemos que:

$$\theta = \frac{V_0 2e}{\hbar} t + \theta_0, \quad (2.45)$$

que sustituido en la ecuación para la densidad de corriente, nos da

$$J = J_0 \text{sen}\left(\frac{V_0 2e}{\hbar} t + \theta_0\right), \quad (2.46)$$

con lo que se puede ver que una diferencia de potencial constante produce una corriente eléctrica variable en el tiempo, de frecuencia $f \approx 482 \text{ MHz}/\mu\text{V}$, efecto que se conoce como el efecto *AC* Josephson.

Proseguimos nuestro análisis pasando a estudiar la unión Josephson como una línea de transmisión de gran longitud, de modo que podemos asociarle una capacidad, debido al dieléctrico entre superconductores y una autoinductancia (ambas por unidad de longitud), además de la corriente debida al efecto Josephson. El circuito equivalente para un elemento diferencial dx se muestra en la Figura 2.6.

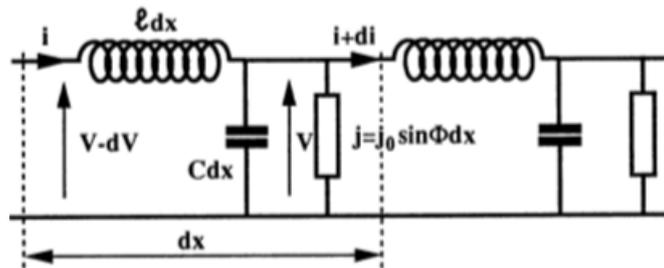


Figura 2.6: Circuito equivalente de una unión Josephson como línea de transmisión larga.

Aplicando las leyes de Kirchhoff a la malla delimitada por dx tenemos las siguientes ecuaciones para el potencial $V(x, t)$ y la intensidad $i(x, t)$:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} - J_0 \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right),$$

Donde L es la autoinductancia, C la capacidad de la unión y donde hemos usado que en un condensador

$$i(x, t) = C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \quad (2.48)$$

y en una autoinducción

$$V(x, t) = -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.49)$$

De la primera de las ecuaciones (2.47) , obtenemos que

$$i(x, t) = \frac{-1}{L} \int \frac{\partial V}{\partial x} dt. \quad (2.50)$$

Por otra parte, de la relación anterior para el flujo magnético, tenemos que

$$\Phi = \int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dt \Rightarrow \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = \frac{-1}{L} \int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dt = \frac{-1}{L} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \quad (2.51)$$

Si ahora nos vamos a la segunda de las ecuaciones de (2.47), nos queda :

$$CL \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{J_0 L 2\pi}{\Phi_0} \operatorname{sen}(\theta) = 0 \quad (2.52)$$

Definiendo la velocidad de Swihart como $c_J = (LC)^{-1/2}$ y la frecuencia de plasma de Josephson como $\omega_J = (2\pi J_0 / \Phi_0 C)^{1/2}$, llegamos a la ecuación de Sine-Gordon que describe este fenómeno:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} - c_J^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + \omega_J^2 \operatorname{sen} \theta(x, t) = 0} \quad (2.53)$$

Como veremos más adelante, esta ecuación, da lugar entre otros tipos de soluciones, a soluciones de tipo solitónicas, que en este caso, se denominan *fluxones* por su relación con el flujo magnético, que como recordamos viene dado por

$$\Phi = \frac{\theta \Phi_0}{2\pi}. \quad (2.54)$$

2.2.3 La ecuación de Sine-Gordon en QFT

Por último, vamos a hacer una breve incursión en la teoría cuántica de campos donde veremos como surge la ecuación de Sine-Gordon en determinados problemas. Con ánimo de dar un contexto a esto último, vamos a deducir primero algunos resultados básicos de esta teoría que nos permitirán entender mejor el problema.

Utilizaremos notación relativista en lo que sigue. Escribamos x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) para denominar al cuadrivector con componente temporal $x^0 = ct$ y las componentes espaciales x^j ($j = 1, 2, 3$) es decir, $x^\mu = (ct, \vec{x})$. Tomaremos la definición del tensor métrico como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea $\phi = \phi(\vec{x}, t)$ un campo escalar. Podemos definir entonces una densidad lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi),$$

De forma que el lagrangiano es

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.55)$$

y la acción es

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.56)$$

Por el principio de mínima acción de Hamilton, las soluciones de interés serán aquellas tales que

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = 0, \quad (2.57)$$

Que nos lleva a lo siguiente:

$$\delta S = \delta \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)) = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right) = 0. \quad (2.58)$$

Sumando y restando la cantidad

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi,$$

tenemos que

$$\int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = 0, \quad (2.59)$$

que se puede poner como

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = 0. \quad (2.60)$$

Si nos damos cuenta de que el integrando de la segunda integral es el producto de aplicar la regla de la cadena de las derivadas, tenemos que

$$\int \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) d^4x = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \right) \delta \phi = 0$$

Donde hemos transformado la integral de volumen en una de superficie, usando el teorema de la divergencia, y que es cero por definición, ya que $\delta \phi = 0$ en la superficie del volumen que estamos considerando .

Para que se anule la primera integral en (2.60), el integrando debe ser cero en todo el espacio, lo que nos da la ecuación correspondiente de Euler-Lagrange para el campo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (2.61)$$

La densidad lagrangiana para cualquier campo escalar tiene la forma general

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi). \quad (2.62)$$

Usando diferentes potenciales $V(\phi)$, obtenemos las diferentes teorías escalares que se podrían usar en teoría cuántica de campos. En nuestro caso vamos a considerar un potencial $U(\phi)$ con la siguiente forma:

$$U(\phi) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta \phi)), \quad (2.63)$$

potencial que presenta interés para aplicaciones tales como modelar sistemas que presenten un mínimo de energía potencial de forma periódica. De esta forma, nuestra densidad lagrangiana toma la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\alpha^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta \phi)) \quad (2.64)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange que dedujimos anteriormente, tenemos :

$$-\frac{\alpha^2}{\beta^2} (\sin(\beta \phi)) \beta - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha^2 \sin(\beta \phi) + \beta \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0. \quad (2.65)$$

Usando unidades tales que $2\alpha^2 = 1$ y tomando $\beta = 1$, tenemos la ecuación de Sine-Gordon:

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi + \sin \phi = 0} \quad (2.66)$$

2.3 La ecuación no lineal de Schrödinger en fibras ópticas

Terminamos nuestra presentación de algunas de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales más interesantes que aparecen en física presentando la ecuación de Schrödinger no lineal, llamada así debido a su semejanza con la ecuación de Schrödinger habitual,

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi + V(x)\Phi.$$

La ecuación de Schrödinger no lineal es utilizada en multitud de ámbitos, como por ejemplo en el estudio de ondas en fluidos (a parte de la ecuación de KdV), teorías de campos, física de plasmas, condensados de Bose-Einstein o fibras ópticas, que es el enfoque que le vamos a dar aquí.

Consideraremos una fibra óptica dispuesta en el modo que se muestra en la Figura 2.7 :

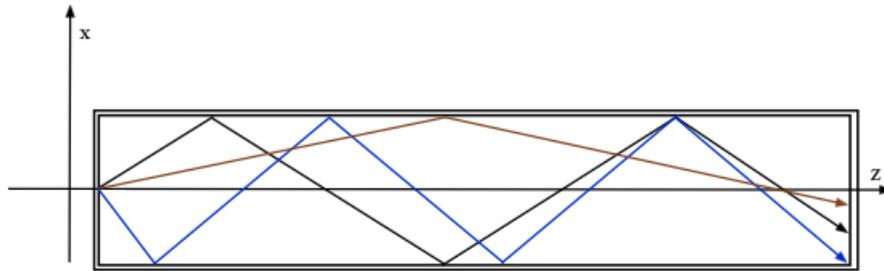


Figura 2.7: Fibra óptica y diversos modos de propagación.

En dicha fibra vamos a considerar tanto dispersión, como la existencia del denominado *efecto Kerr*.

El efecto Kerr⁶ se produce cuando un campo eléctrico variable (i.e la luz) se propaga a través de un medio dieléctrico, resultando en una corrección al índice de refracción que depende de la amplitud del campo incidente, es decir :

$$n = n_0 + n_k|E|^2. \quad (2.67)$$

El coeficiente n_k se denomina coeficiente Kerr, y toma unos valores típicos en torno a $n_k \approx 10^{-22}(m/V)^2$.

En resumen:

$$\text{Efecto Kerr + Dispersión} \quad \Rightarrow \quad k = k(\omega, |E|^2) \quad (2.68)$$

⁶John Kerr, físico escocés que en 1875, estudiando el efecto de campos eléctricos en las propiedades ópticas de los dieléctricos, propuso el efecto que lleva su nombre.

Vamos a considerar ahora la representación escalar del campo eléctrico, que se propaga en la fibra, de la forma

$$E(z, t) = u(z, t)e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.69)$$

donde la exponencial corresponde a la parte oscilante y la función $u(z, t)$ a la envolvente, tal como se muestra en la Figura 2.8.

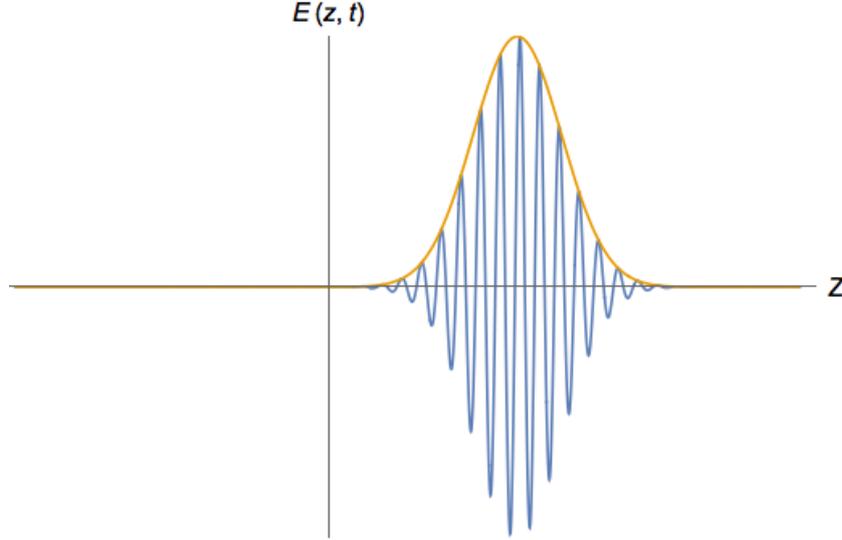


Figura 2.8: Campo eléctrico: En azul el campo y en naranja la envolvente

Para la dependencia del vector de onda k con la frecuencia y el efecto Kerr, vamos a tomar la siguiente forma:

$$k = k_d + k_{Kerr}, \quad (2.70)$$

donde k_d denota la parte dispersiva y k_{Kerr} la parte que da cuenta del efecto Kerr. Desarrollando en serie de Taylor hasta segundo orden la parte dispersiva en torno a una frecuencia central, ω_0 :

$$k = k_0 + \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega - \omega_0)^2 + \beta |E|^2. \quad (2.71)$$

A continuación, realizamos la transformada de Fourier de la función $u(z, t)$ de $z \rightarrow k - k_0$ y de $t \rightarrow \omega - \omega_0$:

$$\mathcal{F} \{u(z, t)\} = \tilde{u}(k - k_0, \omega - \omega_0). \quad (2.72)$$

Pasando todos los miembros a la izquierda en la expresión (2.71) para k , y multiplicando por la transformada de Fourier del envoltorio:

$$(k - k_0)\tilde{u} - a(\omega - \omega_0)\tilde{u} - b(\omega - \omega_0)^2\tilde{u} - \beta |u(z, t)|^2 \tilde{u} = 0 \quad (2.73)$$

Donde hemos definido las derivadas de k respecto de ω evaluadas en ω_0 como a y b .

Realizando la transformada de Fourier inversa de vuelta a las variables z, t , y teniendo en cuenta la propiedad de las transformadas de Fourier usada en el caso anterior de la ecuación KdV, obtenemos:

$$i \left(\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} - a \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \right) + b \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} - \beta |u(z, t)|^2 u(z, t) = 0. \quad (2.74)$$

Realizando el cambio de variable :

$$t' = t + az \quad z' = z. \quad (2.75)$$

Operando de forma similar que en la ecuación de Korteweg-De Vries, y olvidándonos de las primas, tenemos finalmente:

$$\boxed{i \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} + b \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} - \beta |u(z, t)|^2 u(z, t) = 0} \quad (2.76)$$

Que es la ecuación no lineal de Schrödinger. Notar que el papel de las variables t y z está cambiado respecto a la ecuación usual de Schrödinger, aunque se denomina así por su parecido con ésta.

2.4 Apéndice A: Derivación de las condiciones de contorno en la ecuación KdV

A continuación se demuestran las condiciones de contorno (2.3) usadas en la parte que concierne a la ecuación de Korteweg-De Vries. La primera de todas ellas sale de considerar el fluido en $z = \xi(x, t)$. Derivando a ambos lados respecto del tiempo:

$$z = \xi(x, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (2.77)$$

Escribiendo las velocidades en las direcciones x y z como las derivadas de la función potencial velocidad, tenemos :

$$\phi_z = \xi_x \phi_x + \xi_t \quad \text{en } z = \xi(x, t) \quad (2.78)$$

Para demostrar la segunda de las condiciones de contorno de (2.3), escribimos la fuerza que actúa sobre una superficie cerrada de fluido como

$$\vec{F} = - \int_S p \cdot d\vec{S} = - \int_V (\nabla p) dV \quad (2.79)$$

donde p es la presión que ejerce el fluido sobre las “paredes”. Esto nos indica que la fuerza sobre un elemento dV es :

$$d\vec{F} = -\nabla p dV \quad (2.80)$$

Si ahora recurrimos a la segunda ley de Newton :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p \quad (2.81)$$

donde ρ denota al cociente dm/dV . Si además consideramos el fluido inmerso en un campo gravitatorio

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \vec{g}. \quad (2.82)$$

Por otra parte, tenemos para la diferencial de v :

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \vec{v} \quad (2.83)$$

dividiendo todo por dt , y sustituyendo $d\vec{v}/dt$ en (2.82):

$$\frac{-1}{\rho} \nabla p - \vec{g} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad (2.84)$$

Recurriendo ahora a una identidad conocida del cálculo vectorial:

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad (2.85)$$

y sustituyendo las velocidades en términos del potencial velocidad:

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + p/\rho + gz \right) = 0 \quad (2.86)$$

para que se cumpla la última para todas las situaciones, es necesario que la cantidad dentro del paréntesis se anule. Reescalando el potencial velocidad de la forma $\phi \rightarrow \phi - pt/\rho$ (notar que esto no altera las velocidades, ya que el gradiente del último término es cero) obtenemos, particularizando para $z = \xi(x, t)$:

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\xi = 0 \quad \text{en } z = \xi(x, t) \quad (2.87)$$

Finalmente, la última de las condiciones de contorno se deduce de que si el fluido no atraviesa el fondo ($z = -h$), entonces la velocidad normal a esa superficie es cero, es decir:

$$\phi_z = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (2.88)$$

Capítulo 3

Resolución de las ecuaciones

El siguiente paso en este estudio es resolver las ecuaciones que hemos hallado, olvidándonos para ello de herramientas más sofisticadas, tales como la transformación de Bäcklund, o el método de scattering inverso, y proponiendo soluciones viajeras. Este enfoque nos permitirá derivar las soluciones más representativas de estas ecuaciones, a saber, las soluciones de tipo solitónico y de tipo cnoidal, así como diversos casos límite que analizaremos en este capítulo.

3.1 La ecuación de Korteweg-De Vries

Vamos a partir de la ecuación de Korteweg-De Vries en su forma clásica, tomando $\alpha = -6$ y $\beta = 1$ en la ecuación (2.25)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.1)$$

Aquí hemos renombrado a la función $\xi(x, t)$ como $u(x, t)$ y hemos introducido la notación con subíndices (que iremos alternando con la notación explícita) para denotar a las derivadas, con el objetivo de usar una notación más compacta.

Ya que nos interesan únicamente las soluciones que se propagan en el tiempo como una onda viajera, empezamos proponiendo una solución del tipo $u(\eta)$ con $\eta = x - ct$, siendo c la velocidad de la onda. Aplicando la regla de la cadena, nos queda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\eta \Rightarrow u_{xxx} = u_{\eta\eta\eta}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -cu_\eta.$$

Como la función u sólo depende ahora de la variable η , renombramos la función $u(x, t) = u(x - ct)$ como $u(x - ct) \equiv f(\eta)$, y llamamos a las derivadas de la función respecto de esa variable $f', f'' \dots$. Nos queda entonces la ecuación diferencial ordinaria

$$-cf' - 6ff' + f''' = 0, \quad (3.3)$$

que procedemos a resolver. Esta ecuación diferencial ordinaria admite una primera integración trivial

$$-cf - 3f^2 + f'' = A. \quad (3.4)$$

Si a continuación multiplicamos por f' e integramos una segunda vez:

$$-cff' - 3f^2f' + f''f' = Af' \Rightarrow \frac{-c}{2}f^2 - f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 = Af + B. \quad (3.5)$$

Reordenando términos, nos queda una ecuación para f' :

$$(f')^2 = 2f^3 + cf^2 + 2Af + 2B \quad (3.6)$$

que como vemos se hallar mediante una cuadratura:

$$\int \frac{df}{\sqrt{2f^3 + cf^2 + 2Af + 2B}} = \pm \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta. \quad (3.7)$$

Nos damos cuenta enseguida de que el resultado de la integral dependerá tanto del tipo de raíces y multiplicidad del polinomio de grado 3 en f como del valor de las constantes A y B , que analizaremos en lo que sigue.

3.1.1 Caso 1: Soluciones solitónicas

Comenzamos suponiendo que tanto la función f como su primera y segunda derivadas, f' , f'' tienden a cero cuando $\eta \rightarrow \pm\infty$. Físicamente, esto equivale a considerar que en una zona muy alejada de la perturbación original tanto la función como las derivadas de ésta se anulan. Esto implica que las constantes A, B , producto de las dos integraciones anteriores se anulan. Nos queda entonces en la integral (3.7):

$$\int \frac{df}{f\sqrt{2f+c}} = \pm(\eta - \eta_0), \quad (3.8)$$

donde η_0 se refiere a las condiciones iniciales del fluido. Consultando en cualquier tabla de integrales o en el software *Mathematica*, tenemos que el valor de la integral es:

$$\int \frac{df}{f\sqrt{2f+c}} = \frac{-2}{\sqrt{c}} \operatorname{arctanh} \left[\sqrt{1 + \frac{2f}{c}} \right]. \quad (3.9)$$

Despejando f en función de $\eta - \eta_0$, nos queda:

$$f(\eta) = \frac{c}{2} \left(-1 + \tanh^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\eta - \eta_0) \right] \right) = \frac{-c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\eta - \eta_0) \right] \quad (3.10)$$

El signo menos que precede a la función se debe a la elección del signo menos en el valor de $\alpha = -6$, en la ecuación (2.25). Tomado así, representaría una onda de depresión en el fluido, o como se denomina en la literatura, un *dark soliton*.

Si se desea describir el comportamiento del fenómeno observado por Russell, debemos o bien tomar $\alpha = 6$, o bien ignorar el signo menos que hemos obtenido en la función f , que es lo que haremos aquí a continuación.

Reescribiendo en (3.10) η, η_0 en términos de x, t , y con la elección de signo mencionada anteriormente, la función $u(x, t)$ queda

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - \eta_0) \right], \quad (3.11)$$

que he procedido a representar en una animación en la Figura 3.1.

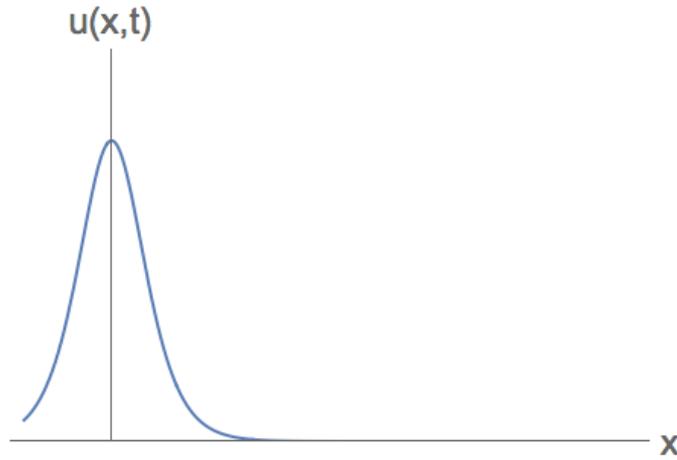


Figura 3.1: Solución solitónica (3.11) para un valor de $c = 1$, $\eta_0 = 0$ y para un intervalo de tiempo $t \in [0, 20]$.

También podemos representar la misma solución en un gráfico tridimensional, siendo uno de los ejes la coordenada x y el otro la coordenada t , que es lo que se muestra en la Figura 3.2.

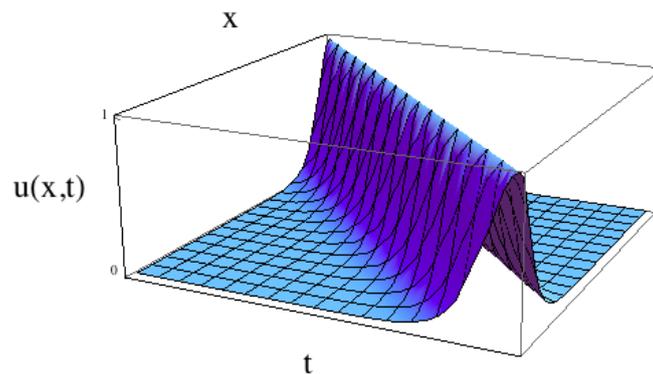


Figura 3.2: Solución solitónica en función de x, t .

En las gráficas 3.1 y 3.2 ya podemos observar el tipo de onda que estábamos buscando: una onda que preserva la forma, no decae y que se mueve a velocidad constante.

La amplitud de la onda es proporcional a c , mientras que la anchura va como $\Gamma \propto 1/\sqrt{c}$. Por último, se muestran a continuación los perfiles de onda para distintos valores de c :

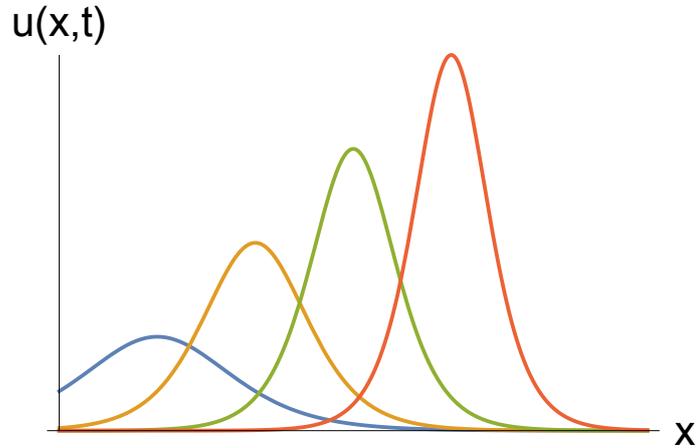


Figura 3.3: Perfiles de onda para distintos valores de la velocidad c . En azul $c = 1$, en amarillo $c = 2$, en verde $c = 3$ y en rojo $c = 4$.

Vamos a analizar ahora el caso de que tanto la función $f(\eta)$ hallada anteriormente como sus derivadas no se anulen en $\eta \rightarrow \pm\infty$.

3.1.2 Caso 2: Soluciones de tipo cnoidal

Si ni la función $f(\eta)$ ni sus derivadas se anulan en $\eta \rightarrow \pm\infty$, las constantes A, B no tienen porqué anularse y por tanto recuperamos en su generalidad la integral que nos quedaba en (3.7):

$$\int \frac{df}{\sqrt{2f^3 + cf^2 + 2Af + 2B}} = \pm \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta. \quad (3.12)$$

Para resolverla, vamos a analizar el polinomio de grado 3 que queda en el denominador. Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que el polinomio tiene tres raíces. Si tenemos un polinomio de grado 3 de la forma

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \quad (3.13)$$

el número y tipo de soluciones vendrá dado por el discriminante, análogo al caso conocido de un polinomio de grado dos. Para el caso de grado tres, este discriminante tiene la forma

$$\Delta = 18\alpha\beta\delta\gamma - 4\beta^3\delta + \beta^2\gamma^2 - 4\alpha\gamma^3 - 27\alpha^2\delta^2. \quad (3.14)$$

La multiplicidad de las raíces dependen del valor del discriminante de la siguiente manera:

- Si $\Delta > 0$, el polinomio tiene tres raíces reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, el polinomio tiene una raíz repetida y todas son reales.

- Si $\Delta < 0$, el polinomio tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas.

El discriminante en nuestro caso queda:

$$\Delta = 144cAB - 8c^3B + 4c^2A^2 - 64A^3 - 432B^2. \quad (3.15)$$

El siguiente paso es ver que condiciones tienen que darse entre las constantes A, B para ver que tipo de soluciones tenemos. No vamos a hallar la solución exacta, pues determinar con exactitud las raíces del polinomio haría falta considerar un problema con unas condiciones de contorno concretas para hallar los valores de A y B .

Si $\Delta > 0$:

En este caso tenemos tres raíces reales y distintas, por lo que podemos escribir el polinomio en f como:

$$F(f) \equiv 2f^3 + cf^2 + 2Af + 2B = 2(f - f_1)(f - f_2)(f - f_3) \quad (3.16)$$

donde hemos denotado con f_1, f_2, f_3 a las tres raíces del polinomio. Sustituyendo en la ecuación (3.7) tenemos:

$$\int \frac{df}{\sqrt{2(f - f_1)(f - f_2)(f - f_3)}} = \pm(\eta - \eta_0) \quad (3.17)$$

Realizando el cambio de variable $f = f_3 + (f_2 - f_3) \text{sen}^2 \theta$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^\phi \frac{(f_2 - f_3)2 \text{sen} \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{2(f_3 - f_1 + (f_2 - f_3) \text{sen}^2 \theta)(f_3 - f_2 + (f_2 - f_3) \text{sen}^2 \theta)((f_2 - f_3) \text{sen}^2 \theta)}} = \\ & = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{f_2 - f_3}} \frac{2d\theta \cos \theta}{\sqrt{2(\lambda - \text{sen}^2 \theta)(\cos^2 \theta)}} = \sqrt{\frac{2}{f_3 - f_1}} \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \text{sen}^2 \theta}} = \pm(\eta - \eta_0). \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde hemos definido $\lambda = (f_1 - f_3)/(f_3 - f_2)$, $m = 1/\lambda$ y ϕ como un ángulo tal que se cumpla $f = f_2 - (f_2 - f_3) \cos^2 \phi$. La integral que nos encontramos no es más que la inversa de la función elíptica de Jacobi $cn(u)$ (Ver apéndice.). En efecto, si definimos u como la integral elíptica de primera especie,

$$z = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \text{sen}^2 \theta}}, \quad (3.19)$$

entonces se define la función elíptica de Jacobi $cn(u)$ como:

$$cn(z) = \cos \phi. \quad (3.20)$$

Con lo que tenemos que :

$$z = cn^{-1}(\cos \phi). \quad (3.21)$$

Aplicado a nuestro caso, obtenemos que

$$\cos \phi = cn \left[(\eta - \eta_0) \sqrt{\frac{f_3 - f_1}{2}}, m \right]. \quad (3.22)$$

Despejando $\cos \phi$ en función de f y simplificando, obtenemos finalmente:

$$f(\eta) = f_2 + (f_3 - f_2) cn^2 \left[(\eta - \eta_0) \sqrt{\frac{f_3 - f_1}{2}}, m \right] \quad (3.23)$$

Hemos obviado el signo de $\pm(\eta - \eta_0)$, pues la función $cn^2(u)$ es par. Volviendo a las variables x, t , podemos representar en la Figura 3.4 nuestra solución analítica:

$$u(x, t) = f_2 + (f_3 - f_2) cn^2 \left[(x - ct - \eta_0) \sqrt{\frac{f_3 - f_1}{2}}, m \right] \quad (3.24)$$

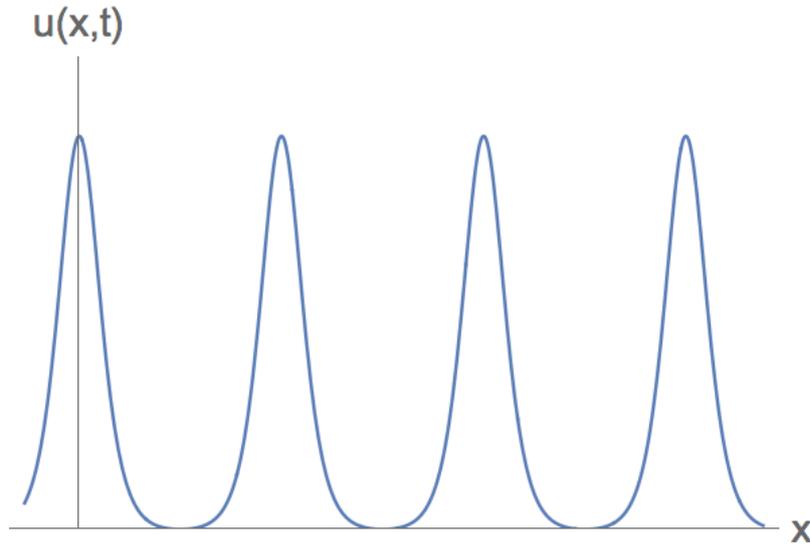


Figura 3.4: Solución cnoidal para un valor de $c = 1/2$, $m = 0.99$ y un intervalo de tiempo $t \in [0, 20]$.

Si representamos las soluciones para varios m distintos, podemos ver que al acercarse el valor de m a la unidad, la separación entre sucesivas “ondulaciones” va aumentando, hasta llegar al valor límite de $m = 1$:

$$\lim_{m \rightarrow 1} cn(z, m) = \operatorname{sech} z, \quad (3.25)$$

en el que la separación entre ondulaciones es infinita, y por tanto recuperamos la solución del apartado anterior. Este hecho se puede observar en la Figura 3.5.

También podemos representar la solución en un gráfico tridimensional, siendo los ejes referidos a las variables x, t , lo que se muestra en la Figura 3.6:

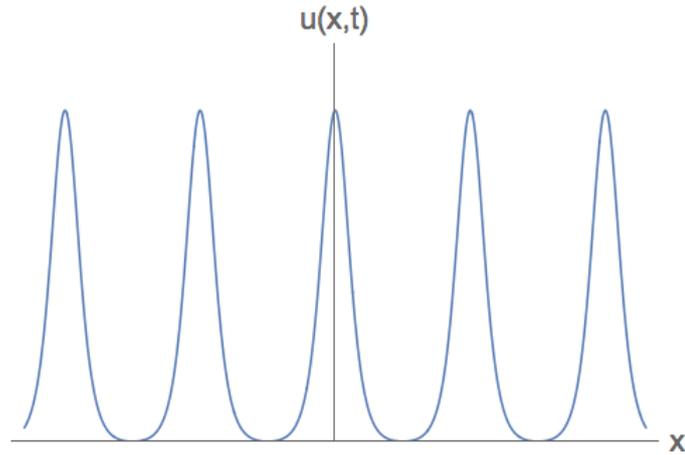


Figura 3.5: Solución cnoidal para un valor variable del parámetro m de $m = 0.99$ a $m = 0.9999999$

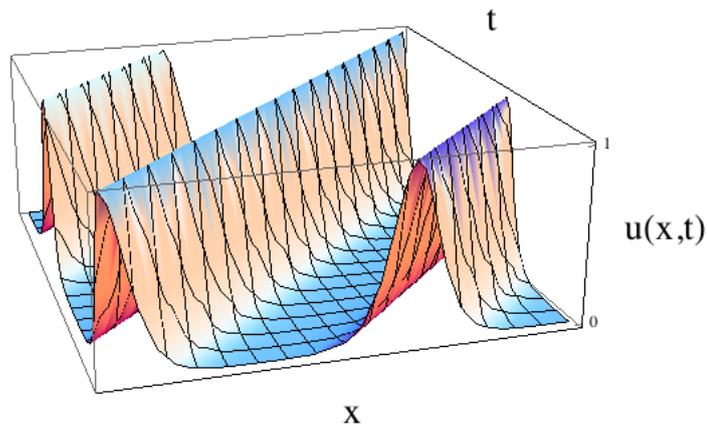


Figura 3.6: Representación tridimensional de la solución cnoidal 3.24, con $m = 0.99$, $\eta_0 = 0$ y $c = 1$.

Si $\Delta = 0$:

Si el discriminante es igual a cero, entonces tenemos que el polinomio tiene una raíz repetida. En ese caso vamos a distinguir dos posibilidades, la primera es que tenga una raíz doble, y la segunda que las tres raíces sean iguales.

Raíz doble. Entonces el polinomio en f se puede escribir de la siguiente manera:

$$F(f) = 2(f - g_1)(f - g_2)^2, \quad (3.26)$$

por tanto, la integral en (3.12) se puede escribir como

$$\int \frac{df}{(f - g_2)\sqrt{2(f - g_1)}} = \pm(\eta - \eta_0). \quad (3.27)$$

La integral anterior se puede calcular con algún programa como *Mathematica*, con lo que tenemos

$$-\frac{\sqrt{2} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{f-b}{g_2-g_1}}}{\sqrt{g_2-g_1}} = \pm(\eta - \eta_0). \quad (3.28)$$

Despejando f y reescribiendo la expresión en términos de x, t , nos queda:

$$\begin{aligned} f &= g_1 + (g_2 - g_1) \tanh^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{g_2 - g_1} (x - ct - \eta_0) \right) \\ &= g_2 + (g_1 - g_2) \operatorname{sech}^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{g_2 - g_1} (x - ct - \eta_0) \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Como el argumento de la tangente hiperbólica debe ser real, entonces $g_2 > g_1$, y nos encontramos con que nuestra solución es una depresión en el fluido. Esto recibe el nombre de *dark soliton*, y será discutido con más detalle en el último apartado de este capítulo. La forma de esta solución se muestra en la figura 3.7.

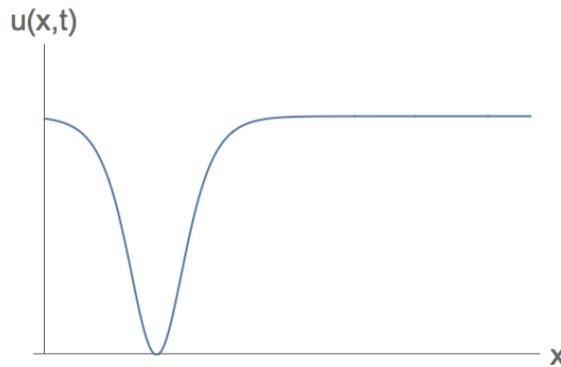


Figura 3.7: Solución que representa una onda de depresión en el fluido, para un valor de $c = 1$ y $t \in [0, 20]$

Raíz triple. Si la raíz es triple, el polinomio en f se puede escribir:

$$F(f) = 2(f - h_1)^3. \quad (3.30)$$

si sustituimos en la expresión (3.12)

$$\int \frac{df}{(2(f - h_1))^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2(f - h_1)}} = \pm(\eta - \eta_0) \quad (3.31)$$

y despejando en función de f :

$$f = \frac{1}{2(x - ct - \eta_0)^2} + h_1. \quad (3.32)$$

Solución que no es aceptable físicamente, pues presenta divergencias para los valores de x, t que anulen el denominador.

Si $\Delta < 0$:

En este caso el polinomio en f tiene dos raíces complejas conjugadas y una raíz real:

$$F(f) = 2(f - f_1)(f - \bar{f}_1)(f - f_2). \quad (3.33)$$

Si las raíces complejas son de la forma $f_1 = a + ib$ y $\bar{f}_1 = a - ib$,

$$F(f) = ((f - a)^2 + b^2)(f - f_2). \quad (3.34)$$

y la integral en (3.12) queda

$$\int \frac{df}{\sqrt{2((f - a)^2 + b^2)(f - f_2)}} = \pm(\eta - \eta_0). \quad (3.35)$$

El resultado de esta integral es una expresión muy complicada, proporcional a la función elíptica de Jacobi, con argumentos $F(f, n)$, con n una constante. Para hallar f , se invierte la función, de modo que

$$f = am(x, n) \quad (3.36)$$

donde $am(x, n)$ denota la amplitud de Jacobi. Una vez más ocurre que esta función no es una solución válida, pues diverge para valores de $\eta \rightarrow \pm\infty$.

3.2 La ecuación de Sine-Gordon

A continuación vamos a resolver la ecuación de Sine-Gordon, que nos permitirá el estudio de un tipo nuevo de soluciones, los *kinks*, los *antikinks* y las soluciones de tipo *breather*. Para las soluciones 2-solitónicas, nos vamos a limitar a proponer la forma de la solución, pues hallar de manera analítica este tipo de soluciones requiere unos métodos que no vamos a considerar en el presente trabajo.

3.2.1 Soluciones de tipo kink.

Partimos de la ecuación de Sine-Gordon en su forma general

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \sin u = 0, \quad (3.37)$$

y la escribimos en forma normal, tomando para ello los valores $\alpha = \beta = 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0. \quad (3.38)$$

Como es habitual, vamos a proponer una solución de tipo viajero, $u(x, t) = u(\eta)$, con $\eta = x - ct$. Aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\eta \Rightarrow u_{xx} = u_{\eta\eta}, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -cu_\eta \Rightarrow u_{tt} = c^2 u_{\eta\eta}.$$

Reescribiendo entonces la ecuación (3.38) en términos de esta nueva variable η , definiendo $u(x, t) = u(\eta) \equiv f(\eta)$ y denotando a las derivadas sucesivas de $u(\eta)$ como f', f'' .. tenemos

$$(c^2 - 1) f'' + \sin f = 0. \quad (3.40)$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por f' , entonces podemos integrar una primera vez:

$$-\cos f + A = \frac{1}{2} (f')^2 (1 - c^2). \quad (3.41)$$

Ya que estamos buscando soluciones tales que $f, f' \rightarrow 0$ cuando $\eta \rightarrow \pm\infty$, podemos deducir de la ecuación anterior que la constante A debe tomar el valor 1. Reorganizando términos en (3.41), podemos integrar la ecuación:

$$\int \frac{df}{\sin(f/2)} = 2 \ln \left(\tan(f/4) \right) = \frac{\pm 2}{\sqrt{1-c^2}} \int d\eta. \quad (3.42)$$

Despejando f de la anterior expresión, llegamos a

$$f(\eta) = 4 \arctan \exp \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{1-c^2}} (x - ct - \eta_0) \right) = u(x, t), \quad (3.43)$$

donde ya hemos escrito la solución en términos de las variables x, t .

A diferencia de los resultados obtenidos para la ecuación KdV , los signos \pm que aparecen en la exponencial no se pueden ignorar, ya que la función f no es par ni impar. Las soluciones tomadas con el signo menos se denominan *kinks*, y las soluciones con el signo más, *antikinks*. Podemos ahora representar estas dos soluciones en las Figuras 3.8 y 3.9.

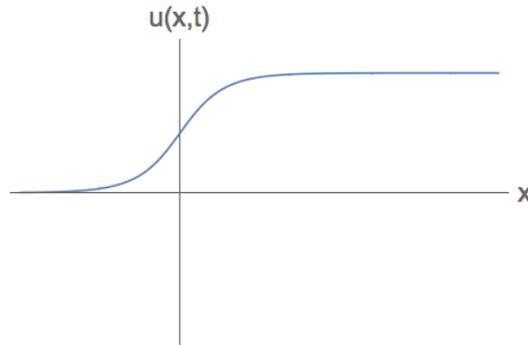


Figura 3.8: Representación de un kink (elección del signo menos), $\eta_0 = 0$, un valor de $c = 1/2$ y un intervalo de tiempo $t \in [0, 20]$.

Hay que tener cuidado al interpretar este tipo de soluciones pues parece que, a diferencia de las soluciones solitónicas halladas en la ecuación KdV, las soluciones de tipo kink y antikink no parecen a primera vista una perturbación localizada. Sin embargo, debemos recordar que, por ejemplo, tanto para el caso de las oscilaciones mecánicas

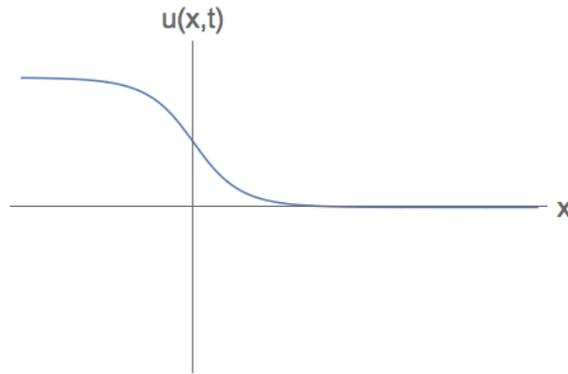


Figura 3.9: Representación de un antikink (elección del signo más), $\eta_0 = 0$, un valor de $c = 1/2$ y un intervalo de tiempo $t \in [0, 20]$.

acopladas como en el caso de la unión Josephson, la función que aquí hemos denominado $u(x, t)$ representa el ángulo entre un péndulo y la vertical en el primer caso o la fase entre dos pares de Cooper en el segundo. En estos casos, la función de onda representa un cambio en una característica local del sistema a estudiar, que se propaga a lo largo del mismo.

En la figura 3.10 representamos este tipo de soluciones para distintos valores de la velocidad c :

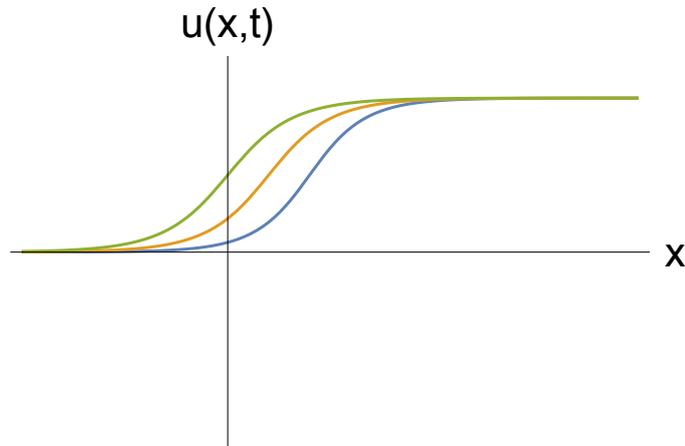


Figura 3.10: Solución de tipo kink en 3.43 para distintos valores de la velocidad c .

donde nos damos cuenta de que la variación en la velocidad no cambia demasiado la forma de la función solución. Esto ocurre porque los valores de c no pueden variar mucho al estar acotados entre 0 y 1 (recordar el término en la exponencial $1/\sqrt{1-c^2}$).

3.2.2 Soluciones 2-kinks

Para la ecuación de Sine-Gordon (3.37) se puede demostrar que existen soluciones de la forma

$$u(x, t) = 4 \arctan \left(\frac{f(x)}{g(t)} \right) \quad (3.44)$$

donde $f(x)$ y $g(t)$ son dos funciones arbitrarias, lo que se puede interpretar como un encuentro entre dos kinks diferentes. En el estudio de las colisiones, se suele distinguir entre colisiones kink-kink y kink-antikink, situaciones en las que es necesario definir las funciones $f(x)$ y $g(x)$ de una manera concreta.

Colisiones kink-kink.

La solución de la ecuación para la que tenemos colisiones kink-kink pasa por elegir las funciones $f(x)$ y $g(t)$ como

$$f(x) = c \sinh \left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}} \right), \quad g(t) = \cosh \left(\frac{ct}{\sqrt{1-c^2}} \right) \quad (3.45)$$

de modo que

$$u_{k-k}(x, t) = 4 \arctan \left(\frac{c \sinh \left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}} \right)}{\cosh \left(\frac{ct}{\sqrt{1-c^2}} \right)} \right). \quad (3.46)$$

Para interpretar esta solución vamos a representarla primero en la Figura 3.11 :

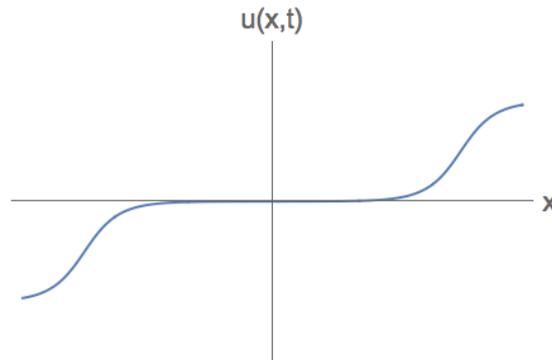


Figura 3.11: Colisión de dos kinks para un valor de $c = 0.5$.

La interpretación es la siguiente: a tiempo $t = -\infty$, los dos kinks se aproximan al origen de coordenadas con velocidades $c = 0.5$ y $c = -0.5$, respectivamente. En el momento de la colisión, en $t = 0$, ambos kinks cambian de signo, y siguen su camino conforme en tiempo va aumentando ($t = \infty$).

Colisiones kink-antikink.

En este caso elegimos las funciones $f(x)$ y $g(t)$ como

$$f(x) = \frac{1}{c \cosh\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right)} \quad g(t) = \frac{1}{\sinh\left(\frac{ct}{\sqrt{1-c^2}}\right)} \quad (3.47)$$

Así tenemos que

$$u_{k-a}(x, t) = 4 \arctan\left(\frac{\sinh\left(\frac{ct}{\sqrt{1-c^2}}\right)}{c \cosh\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right)}\right). \quad (3.48)$$

Al igual que en el caso anterior, antes de interpretarla, vamos a representar la solución primero en la Figura 3.12:

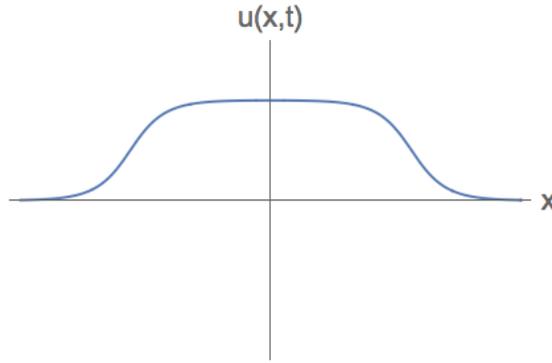


Figura 3.12: Colisión de un kink con un antikink para un valor de $c = 0.5$.

En este caso la solución representa la colisión entre un kink aproximándose al origen con velocidad $c = 0.5$ y un antikink con velocidad negativa $c = -0.5$. Después de la colisión, tanto el kink como el antikink cambian de signo, antes de proseguir cada uno su camino.

3.2.3 Soluciones de tipo breather.

Se define “breather” como una onda no lineal localizada en el espacio cuya envolvente oscila a una frecuencia ω . Debido a esta oscilación, parece que el pulso “respira”, de ahí el nombre *breather*, aunque a veces también se les llama *oscilones*. También existen breathers viajeros en los que además de oscilar se desplazan a lo largo de una dirección.

Para poder hallar este tipo de solución, hay que elegir las funciones $f(x)$ y $g(t)$ en 3.44 como:

$$f(x) = \frac{1}{\omega \cosh\left(\sqrt{1-\omega^2}x\right)} \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2} \sin(\omega t)} \quad (3.49)$$

por lo que la función $u(x, t)$ es

$$u(x, t)_B = 4 \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - \omega^2} \sin(\omega t)}{\omega \cosh(\sqrt{1 - \omega^2} x)} \right), \quad (3.50)$$

cuya representación gráfica animada se muestra en la Figura 3.13.

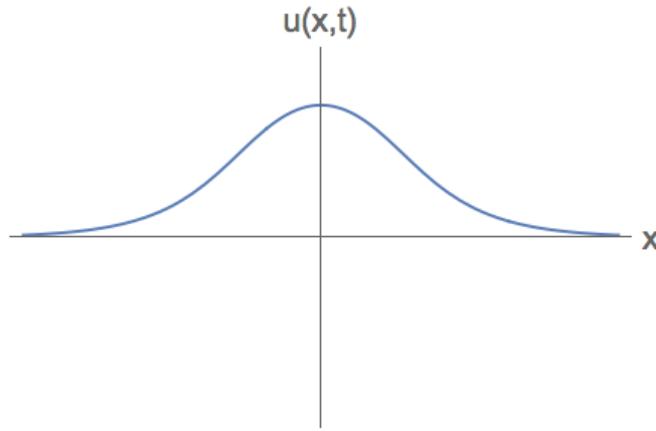


Figura 3.13: Solución de tipo breather para un valor de $\omega = 0.2$ en (3.50).

Observemos que la elección de la frecuencia ω es crucial, pues modifica tanto la amplitud como la anchura del pulso oscilante, como se muestra en las Figuras 3.14 y 3.15.

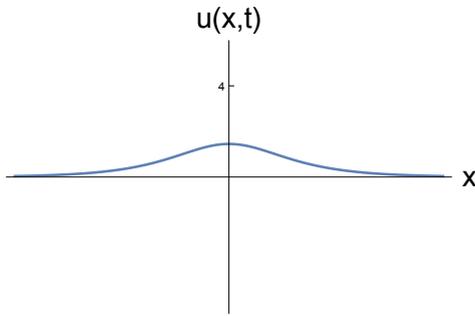


Figura 3.14: Breather (3.50) con $\omega = 0.9$

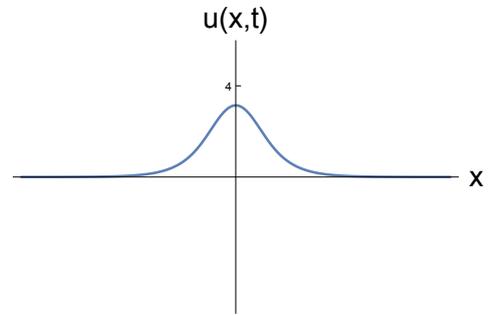


Figura 3.15: Breather (3.50) con $\omega = 0.01$

3.3 La ecuación de Schrödinger no lineal

Por último, vamos a hallar las soluciones a la ecuación de Schrödinger no lineal, para lo que vamos a seguir un procedimiento muy parecido al que hemos utilizado en las ecuaciones anteriores. La elección de la constante β en la ecuación va a ser crucial, pues dependiendo de si β es mayor o menor que cero tendremos soluciones de tipo

dark solitons o *bright solitons*, cuyo significado explicaré más adelante. Quiero señalar que de entrada voy a descartar aquellas soluciones para las que las constantes de integración no se anulen, pues en este caso estoy interesado solamente en soluciones de tipo solitónico.

3.3.1 Primer caso: $\beta < 0$.

Por sencillez vamos a tomar $\beta = -1$, y sin pérdida de generalidad tomamos también $b = 1$, con lo que la ecuación (2.76) toma la forma:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u|u|^2 = 0. \quad (3.51)$$

Debido a la presencia del término $|u|^2$, vamos a proponer una solución del tipo

$$u = g(z, t) e^{i\theta(z, t) + \phi z} \quad (3.52)$$

con $g(z, t)$ y $\theta(z, t)$ dos funciones reales de las variables z y t , y ϕ una constante real. Derivando respecto a ambas variables y sustituyendo en la ecuación (3.51) tenemos que

$$i (g_z + ig(\theta_z + \phi)) + g_{tt} + 2ig_t\theta_t + gi\theta_{tt} - g\theta_t^2 + g^3 = 0, \quad (3.53)$$

donde hemos denotado con los subíndices z, t a las derivadas de las funciones respecto de esas variables. De la ecuación (3.53) debemos separar la parte real e imaginaria

$$-g(\theta_z + \phi) + g_{tt} - g\theta_t^2 + g^3 = 0 \quad g_z + 2g_t\theta_t + g\theta_{tt} = 0 \quad (3.54)$$

e imponer que las funciones $g(z, t)$ y $\theta(z, t)$ sean de la forma $g(z, t) \equiv g(\eta) = g(x - ct)$ y $\theta(z, t) \equiv \theta(\eta) = \theta(x - ct)$, es decir, soluciones viajeras con $\eta = x - ct$. Como en apartados anteriores, aplicando la regla de la cadena podemos hallar las derivadas de ambas funciones respecto a esta nueva variable. Como ejemplo se muestra el proceso para la función $g(z, t)$:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = g_\eta \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -cg_\eta \Rightarrow g_{tt} = c^2 g_{\eta\eta} \quad (3.55)$$

El procedimiento es idéntico para la función $\theta(\eta)$. Sustituyendo en las ecuaciones (3.54)

$$-g(\theta_\eta + \phi) + c^2 g_{\eta\eta} - gc^2 \theta_\eta^2 + g^3 = 0 \quad (3.56)$$

$$g_\eta + 2c^2 g_\eta \theta_\eta + c^2 g \theta_{\eta\eta} = 0.$$

Trabajando a partir de la segunda ecuación, si multiplicamos por $g(\eta)$

$$gg_\eta + 2c^2 \theta_\eta g_\eta g + g^2 c^2 \theta_{\eta\eta} = 0 \quad (3.57)$$

que se puede escribir como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (g^2) + c^2 \frac{\partial}{\partial \eta} (g^2 \theta_\eta) = 0. \quad (3.58)$$

Integrando respecto a la variable η :

$$g^2 + 2c^2 g^2 \theta_\eta = A \Rightarrow \theta_\eta = \frac{A - g^2}{2c^2 g^2}, \quad (3.59)$$

resultado que podemos utilizar para resolver la primera de las ecuaciones de (3.56). Antes de eso, como se comentaba anteriormente, sólo vamos a centrarnos en soluciones en las que tanto ellas mismas como sus derivadas se anulen para $\eta \rightarrow \pm\infty$, lo que implica que la constante de integración A debe ser igual a cero. Esto nos permite inmediatamente conocer la forma explícita de la función θ de (3.59):

$$\theta_\eta = \frac{-1}{2c^2} \Rightarrow \theta = \frac{-1}{2c^2} \eta \quad (3.60)$$

donde hemos obviado la constante de integración por dar lugar a una fase que deja invariante la ecuación final.

Sustituyendo el valor hallado para θ_η en la primera de las ecuaciones de (3.56) obtenemos

$$-g \left(\frac{-1}{2c^2} + \phi \right) + c^2 g_{\eta\eta} + g c^2 \frac{1}{4c^4} + g^3 = 0, \quad (3.61)$$

que multiplicando por g_η e integrando nos lleva a

$$\frac{-1}{2} g^2 \left(\phi - \frac{1}{2c^2} \right) + \frac{1}{2} c^2 (g_\eta)^2 + g^2 \frac{1}{8c^2} + \frac{1}{4} g^4 = 0. \quad (3.62)$$

Multiplicando por último esta ecuación por $4g^2$ y definiendo $g^2 \equiv f$ tenemos:

$$f^3 + \frac{1}{2c^2} f^2 + 2c^2 (f_\eta)^2 - 2f^2 \left(\phi - \frac{1}{2c^2} \right) = 0. \quad (3.63)$$

Reordenando términos

$$f_\eta = \frac{1}{\sqrt{2c}} \sqrt{-f^3 + f^2 \left(2\phi - \frac{3}{2c^2} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2c}} \sqrt{-f^3 + \alpha f^2}, \quad (3.64)$$

donde hemos definido la constante α como

$$\alpha = \left(2\phi - \frac{3}{2c^2} \right). \quad (3.65)$$

La expresión (3.64) se puede integrar

$$\sqrt{2c} \int \frac{df}{f \sqrt{-f + \alpha}} = -2c \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\alpha - f}{\alpha}} \right) = \pm(\eta - \eta_0) \quad (3.66)$$

y despejando en función de f :

$$f(\eta) = \alpha \operatorname{sech}^2 \left(\frac{-1}{2c} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} (\eta - \eta_0) \right). \quad (3.67)$$

Deshaciendo el cambio anterior definido como $f \equiv g^2$ y escribiendo los términos en η como $\eta = z - ct$, obtenemos por fin nuestra función $u(z, t)$

$$u(z, t) = \sqrt{\alpha} \operatorname{sech} \left(\frac{-1}{2^{3/2}c} \sqrt{\alpha}(z - ct - \eta_0) \right) e^{i(\phi z - (z-ct)/2c^2)} \quad (3.68)$$

Para representar la intensidad del pulso de luz que hemos hallado tras este largo cálculo, debemos representar el módulo al cuadrado del campo eléctrico, o lo que es lo mismo, el módulo de la función $u(z, t)$ al cuadrado, que es lo que se hace en la Figura 3.16.

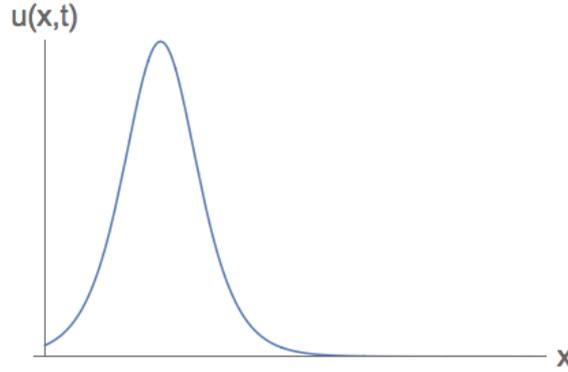


Figura 3.16: Intensidad del pulso $|u(z, t)|^2$ hallado en 3.68.

Como se puede observar en la Figura 3.16, la elección de la constante $\beta = -1$ en la ecuación ha dado lugar a una onda de tipo solitónica positiva, lo que se conoce como *bright soliton*. Como veremos en el siguiente apartado, la elección de la constante $\beta = 1$ desembocará en lo que se conoce como *dark soliton*.

Por otro lado, la elección de la constante ϕ es indiferente, pues para hallar la intensidad del pulso se toma el módulo al cuadrado de la función $u(z, t)$, por lo que el término que contiene a ϕ desaparece.

3.3.2 Segundo caso: $\beta > 0$.

Por sencillez vamos a tomar el valor $\beta = 1$, por lo que la ecuación de Schrödinger no lineal es

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u|u|^2 = 0. \quad (3.69)$$

Al igual que antes, se propone una solución con la forma

$$u = g(z, t) e^{i\theta(z,t) + \phi z} \quad (3.70)$$

que sustituida en la ecuación (3.69) y separada en parte real e imaginaria nos queda:

$$-g(\theta_z + \phi) + g_{tt} - g\theta_t^2 - g^3 = 0 \quad g_z + 2g_t\theta_t + g\theta_{tt} = 0 \quad (3.71)$$

resultado idéntico al del apartado anterior salvo por el signo menos en el término g^3 de la parte real. Ahora proponemos que las funciones $g(z, t)$ y $\theta(z, t)$ sean del tipo

$g(z, t) \equiv g(\eta) = g(x - ct)$ y $\theta(z, t) \equiv \theta(\eta) = \theta(x - ct)$ (soluciones viajeras de nuevo). Hallando las derivadas respecto de esta nueva variable, como en (3.55) y sustituyendo en las partes real e imaginaria llegamos a:

$$-g(\theta_\eta + \phi) + c^2 g_{\eta\eta} - g c^2 \theta_\eta^2 - g^3 = 0 \quad g_\eta + 2c^2 g_\eta \theta_\eta + c^2 g \theta_{\eta\eta} = 0 \quad (3.72)$$

De la segunda ecuación, al igual que antes podemos obtener el valor de $\theta_{\eta\eta}$

$$g^2 + 2c^2 g^2 \theta_\eta = A \Rightarrow \theta_\eta = \frac{A - g^2}{2c^2 g^2} \quad (3.73)$$

pero con una salvedad: dado que estamos buscando una perturbación que se mueva dentro de una función constante (ver animación posterior), ni la función ni las derivadas deben anularse por lo que ni la constante A ni ninguna constante producto de una integración deben anularse. Sustituyendo el anterior resultado (3.73), en la primera de las ecuaciones (3.72) tenemos:

$$g \left(\frac{1}{4c^2} - \phi \right) + c^2 g_{\eta\eta} - \frac{A^2}{4c^2 g^3} - g^3 = 0. \quad (3.74)$$

Multiplicando por g_η e integrando obtenemos

$$\frac{g^2}{2} \left(\frac{1}{4c^2} - \phi \right) + c^2 (g_\eta)^2 - \frac{A^2}{8c^2 g^2} - \frac{1}{4} g^4 = B, \quad (3.75)$$

con B una constante de integración. Al igual que antes, multiplicando por g^2 y por $8c^2$, y definiendo $g^2 \equiv f$ tenemos:

$$c^2 f_\eta = \sqrt{f^2(4c^2\phi - 1) + A^2 + 2c^2 f^3 + B} \quad (3.76)$$

ecuación diferencial en variables separables que se puede integrar

$$\int \frac{c^2 df}{\sqrt{f^2 D + 2c^2 f^3 + C}} = \pm(\eta - \eta_0) \quad (3.77)$$

donde hemos definido $A^2 + B \equiv C$ y $4c^2\phi - 1 \equiv D$.

No vamos a entrar en la discusión de la multiplicidad de raíces ni en las condiciones para ello, ya que a diferencia de la ecuación KdV, sólo nos interesan las soluciones en las que el polinomio tenga una raíz doble:

$$\int \frac{c^2 df}{\sqrt{2c^2(f - f_1)^2(f - f_2)}} = \pm(\eta - \eta_0). \quad (3.78)$$

Esta integral arroja como resultado

$$\int \frac{c^2 df}{\sqrt{2c^2(f - f_1)^2(f - f_2)}} = c \sqrt{\frac{2}{f_1 - f_2}} \operatorname{arcsech} \left(\frac{\sqrt{f_1 - f}}{f_1 - f_2} \right) = \pm(\eta - \eta_0). \quad (3.79)$$

Despejando la función $f(\eta)$ tenemos

$$f(\eta) = f_1 \left(1 - m \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} m \sqrt{f_1} (z - ct - \eta_0) \right] \right), \quad (3.80)$$

donde ya hemos escrito la solución deshaciendo el cambio $\eta = z - ct$, y donde hemos definido $m \equiv (f_1 - f_2)/f_1$.

La función $u(z, t)$ en (3.70) es entonces

$$u(z, t) = \sqrt{f(\eta)} e^{i \left(\frac{A-f}{2c^2 f} (z-ct) + \phi z \right)}, \quad (3.81)$$

con $f(\eta)$ la solución presentada anteriormente en (3.80).

Como puede verse, esta solución es mucho más complicada que en el apartado anterior. Sin embargo, si se desea representar el módulo al cuadrado (la intensidad del pulso), entonces la exponencial se simplifica y podemos representar el pulso fácilmente, lo que se hace en la Figura 3.17.

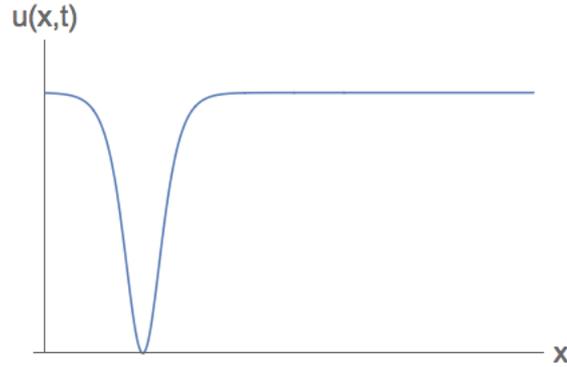


Figura 3.17: Intensidad del pulso.

Puede observarse, que se trata de un solitón en el sentido de que se propaga sin cambio en la forma, pero no es un pulso corriente: debe interpretarse como una falta de energía (o un “hueco”) en la señal continua del sistema. La intensidad es constante, pero durante un breve periodo de tiempo se produce una caída a cero que se interpreta como una ausencia de señal, es decir, un *dark soliton*.

3.4 Apéndice B: Integrales elípticas y funciones elípticas de Jacobi

Como complemento a la resolución de las ecuaciones en este capítulo, se presentan unas breves nociones sobre integrales elípticas y funciones elípticas.

3.4.1 Integrales elípticas

Las integrales elípticas surgen de manera natural al intentar analizar integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}},$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado cuatro. Cuando el grado del polinomio es 2, la integral puede evaluarse usando funciones trigonométricas. Cuando el grado del polinomio es 3 ó 4, Legendre demostró que las correspondientes integrales se pueden poner como combinación lineal de las tres integrales elípticas canónicas, que se definen a continuación. Antes de eso vamos a definir los siguientes argumentos que aparecerán en las integrales elípticas (la notación puede variar según la fuente)

- α , llamado el “ángulo modular”.
- $k = \text{sen } \alpha$, que se denomina “excentricidad” ó “módulo elíptico”, $0 \leq k \leq 1$.
- $m = k^2 = \text{sen}^2 \alpha$, el “parámetro” de la integral elíptica; obviamente $0 \leq m \leq 1$.

Estas tres cantidades se pueden utilizar de manera intercambiable, puesto que el conocimiento de una de ellas implica el de las otras dos (puesto que todas ellas se suponen positivas). En la notación de las integrales elípticas también aparecerá la variable de la que dependen, que se puede denotar como φ , llamada la “amplitud”, o como $x = \text{sen } \varphi$.

Definición B.1.1 Se denomina *integral elíptica incompleta de primera especie* a

$$F(x; k) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}. \quad (3.82)$$

Haciendo los cambios $t = \text{sen } \theta$, $m = \text{sen}^2 \alpha$, $x = \text{sen } \varphi$, se llega a una expresión equivalente

$$F(x; k) = F(\text{sen } \varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\theta}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha \text{sen}^2\theta}}, \quad (3.83)$$

que según el caso puede denotarse de cualquiera de estas maneras:

$$F(x; k) = F(\text{sen } \varphi; k) = F(\varphi, k) \equiv F(\varphi|m) \equiv \text{EllipticF}[\varphi, m], \quad (3.84)$$

donde la última expresión en color azul es la usada en el programa *Mathematica* (criterio de color que seguiremos en lo sucesivo).

Definición B.1.2 Cuando $\varphi = \pi/2$ ó $x = 1$ tenemos la *integral elíptica completa de primera especie*:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\text{sen}^2\theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \equiv \text{EllipticK}[m]. \quad (3.85)$$

Definición B.1.3 Se define la *integral elíptica incompleta de segunda especie* como

$$E(x; k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt. \quad (3.86)$$

Efectuando los mismos cambios que en el caso anterior ($t = \text{sen } \theta$, $m = \text{sen}^2 \alpha$, $x = \text{sen } \varphi$), se llega a la expresión equivalente

$$E(x; k) = E(\text{sen } \varphi; k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \theta} d\theta, \quad (3.87)$$

que según el caso puede denotarse de cualquiera de estas maneras:

$$E(x; k) = E(\text{sen } \varphi; k) = E(\varphi, k) \equiv E(\varphi|m) \equiv \text{EllipticE}[\varphi, m], \quad (3.88)$$

Definición B.1.4 Para $\varphi = \pi/2$ ó $x = 1$ tenemos la *integral elíptica completa de segunda especie*:

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \text{sen}^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - m t^2}{1 - t^2}} dt \equiv \text{EllipticE}[m]. \quad (3.89)$$

Las integrales elípticas de tercera especie son aún más complicadas, pues dependen de un tercer parámetro llamado la “característica”, que puede tomar cualquier valor. A continuación se definen solamente por completitud.

Definición B.1.5 La *integral elíptica incompleta de tercera especie* es

$$\begin{aligned} \Pi(n; \varphi|m) &= \int_0^{\text{sen } \varphi} \frac{1}{1 - n t^2} \frac{dt}{\sqrt{(1 - m t^2)(1 - t^2)}} \\ &= \int_0^\varphi \frac{1}{1 - n \text{sen}^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \theta}} := \Pi(n; \varphi|\alpha) \equiv \text{EllipticPi}[n, \varphi, m]. \end{aligned}$$

Definición B.1.6 Cuando $\varphi = \pi/2$ ó $x = 1$ tenemos la *integral elíptica completa de tercera especie*:

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - n \text{sen}^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \theta}} \equiv \text{EllipticPi}[n, m].$$

3.4.2 Funciones elípticas de Jacobi

Las funciones elípticas pueden ser consideradas como una generalización de las funciones trigonométricas o de las hiperbólicas, e históricamente, fueron descubiertas por Abel como las funciones inversas de las integrales elípticas. Hay dos familias de funciones elípticas, las de Jacobi y las de Weierstrass. Aunque las de Jacobi históricamente aparecieron primero y son las que suelen surgir directamente en las aplicaciones, las de Weierstrass son más sencillas y son tales que cualquier función elíptica puede expresarse en términos de ellas, aunque en este apéndice solo hablaremos de las de Jacobi, pues son las que hemos utilizado en el trabajo.

Para introducir las funciones elípticas de Jacobi, conviene recordar la expresión de la integral que nos proporciona la función inversa del seno

$$z(w) = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsen w. \quad (3.90)$$

Para Abel la anterior expresión nos permite definir la función seno invirtiendo la integral, es decir,

$$w = \text{sen } z.$$

Pues bien, las funciones elípticas de Jacobi se introducen de manera análoga, sólo que invirtiendo la integral elíptica incompleta de primera especie en lugar de la integral . De forma más explícita, consideremos de nuevo la integral elíptica incompleta de primera especie $F(x; k)$ que fue definida en anteriormente, y denominemosla

$$F(w; k) = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\text{sen } \varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \equiv z(w) \equiv z(\varphi; k), \quad (3.91)$$

donde recordemos que φ es la *amplitud*.

Definición B.2.1 Se define la función “seno elíptico” como la inversa de la anterior integral:

$$w = \text{sn}(z, k) \equiv \text{sen } \varphi. \quad (3.92)$$

Definición B.2.2 La función “coseno elíptico” se define como

$$w = \text{cn}(z, k) = \cos \varphi \implies \text{sn}^2(z, k) + \text{cn}^2(z, k) = 1. \quad (3.93)$$

También juega un papel destacado la función elíptica que se suele llamar “amplitud delta”

$$w = \text{dn}(z, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 z} \implies \text{dn}^2(z, k) + k^2 \text{sn}^2(z, k) = 1.$$

Proposición B.2.1 Las tres funciones elípticas de Jacobi pueden expresarse a partir de las integrales elípticas como

$$z = \int_0^{\text{sn } z} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (3.94)$$

$$z = \int_{\text{cn } z}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2+k^2t^2)}}. \quad (3.95)$$

$$z = \int_{\text{dn } z}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-1+k^2)}}. \quad (3.96)$$

Notemos que estas funciones elípticas dependen de la variable z pero también del módulo k , o si se prefiere del parámetro m . De hecho pueden estudiarse como funciones de dos variables complejas, z y k .

La notación en *Mathematica* para estas tres funciones es la siguiente ($m = k^2$):

$$\text{sn}(z, k) = \text{JacobiSN}[z, m], \quad \text{cn}(z, k) = \text{JacobiCN}[z, m], \quad \text{dn}(z, k) = \text{JacobiDN}[z, m].$$

Proposición B.2.2 Se puede demostrar que las tres funciones elípticas anteriormente definidas son analíticas con respecto a la variable k y son tales que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{sn}(z, k) = \operatorname{sen} z, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{cn}(z, k) = \operatorname{cos} z, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{dn}(z, k) = 1. \quad (3.97)$$

$$\lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{sn}(z, k) = \operatorname{tanh} z, \quad \lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{cn}(z, k) = \operatorname{sech} z, \quad \lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{dn}(z, k) = \operatorname{sech} z. \quad (3.98)$$

Por otro lado, de la definición, en principio la variable $z \in R$ pero, al igual que el argumento de la función $\operatorname{sen} z$, es posible extender el significado de estas funciones para $z \in C$.

Proposición B.2.3 Las derivadas de las tres funciones elípticas de Jacobi que estamos considerando verifican las siguientes relaciones:

$$\frac{d \operatorname{sn}(z, k)}{dz} = \operatorname{cn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k)$$

$$\frac{d \operatorname{cn}(z, k)}{dz} = -\operatorname{sn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k) \quad (3.99)$$

$$\frac{d \operatorname{dn}(z, k)}{dz} = -k^2 \operatorname{sn}(z, k) \operatorname{cn}(z, k).$$

Proposición B.2.4 Las funciones elípticas de Jacobi satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden

$$w = \operatorname{sn}(z, k) \implies \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = (1 - w^2)(1 - k^2 w^2), \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 1 \quad (3.100)$$

$$w = \operatorname{cn}(z, k) \implies \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = (1 - w^2)(1 - k^2 + k^2 w^2). \quad (3.101)$$

$$w = \operatorname{dn}(z, k) \implies \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = (w^2 - 1)(1 - k^2 - w^2). \quad (3.102)$$

Proposición B.2.5 Las funciones elípticas de Jacobi también son solución de las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden

$$w = \operatorname{sn}(z, k) \implies \frac{d^2 w}{dz^2} + (1 + k^2)w - 2k^2 w^3 = 0. \quad (3.103)$$

$$w = \operatorname{cn}(z, k) \implies \frac{d^2 w}{dz^2} + (1 - 2k^2)w + 2k^2 w^3 = 0. \quad (3.104)$$

$$w = \operatorname{dn}(z, k) \implies \frac{d^2 w}{dz^2} - (2 - k^2)w + 2w^3 = 0. \quad (3.105)$$

Proposición B.2.6 Las funciones elípticas admiten los siguientes desarrollos en serie de potencias alrededor del origen, $z = 0$:

$$w = \operatorname{sn}(z, k) = z - \frac{1}{6}(1 + k^2)z^3 + \frac{1}{120}(1 + 14k^2 + k^4)z^5 + \dots$$

$$w = \operatorname{cn}(z, k) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}(1 + 4k^2)z^4 - \frac{1}{720}(1 + 44k^2 + 16k^4)z^6 + \dots$$

$$w = \operatorname{dn}(z, k) = 1 - \frac{1}{2}k^2z^2 + \frac{1}{24}(4k^2 + k^4)z^4 - \frac{1}{720}(16k^2 + 44k^4 + k^6)z^6 + \dots$$

Capítulo 4

Conclusiones

La realización de este trabajo me ha permitido poner de manifiesto la importancia de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales, como continuación natural de la asignatura de Métodos Matemáticos IV, donde se aprendió a resolver las EDP lineales y de donde se han sacado buena parte de los conocimientos necesarios para poder abordar este TFG. Por otra parte, el haber aprendido a utilizar el software *Mathematica* en las asignaturas de Métodos Matemáticos ha sido fundamental para realizar tanto las representaciones y animaciones como algunas de las integrales, permitiendo así una fácil visualización de las soluciones halladas. Este estudio me ha servido también para aprender aspectos muy interesantes sobre sistemas físicos donde aparecen los fenómenos de no linealidad y dispersión, y aportando por tanto unos conocimientos que no estaban presentes en los objetivos del grado, completando por tanto la formación académica recibida.

La búsqueda de soluciones me ha permitido entender la complejidad de estos sistemas y de sus soluciones, aprendiendo sobre solitones, kinks breathers y ondas de tipo cnoidal y a su vez dotarme de herramientas para el estudio de otros sistemas que no han sido estudiados aquí, pudiendo aplicar métodos similares.

Por tanto, con la realización de este estudio hemos establecido un punto de partida tanto para continuar con el estudio de estos sistemas desde un punto de vista de los métodos de resolución modernos (transformada de scattering inverso, la transformación de Bäcklund...) en cursos más avanzados de Máster, y que podrían desembocar todo tipo de estudios relacionados con estos temas (especialmente la rama de Física Matemática) como para continuar estudiando determinados sistemas que presenten este tipo de comportamiento, y utilizar los métodos empleados en este trabajo para su estudio, dado las numerosas aplicaciones actuales de este tipo de ondas.

Bibliografía

- [1] Waves called Solitons, M.Remoissenet, Springer (1994).
- [2] Solitons: An introduction, P.G Drazin, Cambridge texts in applied mathematics (1989).
- [3] Solitons, Nonlinear evolution equations and Inverse Scattering, M.Ablowitz, Cambridge university press (1991).
- [4] Advanced Methods of Mathematical Physics, R.S Kaushal, D. Parashar, Alpha science (2008).
- [5] Introduction to Mathematical Physics, C.W Wong, Oxford (1991).
- [6] Métodos Matemáticos Avanzados para Ciencias e Ingenierías, M. Gadella, L.M Nieto, Secretariado de publicaciones Universidad de Valladolid (2000).
- [7] Course of Theoretical Physics: Fluid Mechanics, L.Landau, E.M Lifshitz , Pergamon Press (1987).
- [8] Classical Electrodynamics, J.D Jackson, Wiley (1998).
- [9] Principles of Optics, M.Born, E.Wolf, Pergamon Press (1980).
- [10] Solid State Physics, J.R. Hook, H.E.Hall, Wiley (1990).
- [11] Modern Quantum Mechanics, J.J Sakurai, Pearson (2017).
- [12] Quantum Field Theory, F.Mandl, G.Shaw, Wiley (2010).
- [13] Travelling wave solutions of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation. P.Estévez, S.Kuru, J. Negro, L.M. Nieto, Chaos, Solitons and Fractals **40** 2031-2040 (2007).
- [14] The Korteweg-de Vries Equation: History, exact Solutions, and graphical Representation. K.Brauer (2000). (sin publicar).
- [15] Shallow Water Waves and Solitary Waves. arXiv: 1308.5383v1 [nlin.SI] W.Hereman (2009)