



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID  
FACULTAD DE CIENCIAS

## TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Física

### Estudio de un Análogo Atómico de la Radiación de Hawking: Emisión Espontánea por un Átomo Acelerado

Autor:

Julio Sánchez Cánovas

---

Tutores:

Manuel Donaire del Yerro  
Luis Miguel Nieto Calzada



## **Agradecimientos**

El presente Trabajo de Fin de Grado ha sido realizado bajo la supervisión de Manuel Donaire del Yerro y Luis Miguel Nieto Calzada, a quienes me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento, por haber hecho posible la realización de este estudio. Además, agradecer la paciencia, tiempo y dedicación que tuvieron para que el trabajo saliera adelante.



# Índice

<b>1</b>	<b>Resumen/Abstract</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Introducción</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Teoría Cuántica de Campos</b>	<b>10</b>
3.1	Motivación . . . . .	10
3.2	Teoría Clásica de Campos. Enfoques Lagrangiano y Hamiltoniano . . . . .	11
3.3	Cuantización del Campo de Klein Gordon . . . . .	13
3.4	Espacio de Fock . . . . .	18
3.5	Concepto de Propagador . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempo curvos</b>	<b>24</b>
4.1	Influencia de la métrica en el cono de luz . . . . .	24
4.2	Funcional de la acción en acoplamiento mínimo . . . . .	25
4.3	Radiación de Hawking . . . . .	26
4.4	Sistemas de referencia con aceleración propia constante. Coordenadas de Rindler . . . . .	27
4.5	Transformaciones de Bogoliubov . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Efecto Unruh</b>	<b>36</b>
5.1	Número de partículas . . . . .	39
5.2	Relación entre los estados de vacío . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Desexcitación de un átomo acelerado</b>	<b>46</b>
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>56</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>
	<b>Lista de Figuras</b>	<b>60</b>



---

# 1 Resumen/Abstract

El efecto Hawking predice la creación de pares partícula-antipartícula en el horizonte de eventos de un agujero negro. Las partículas son emitidas al exterior mientras que las antipartículas son absorbidas por el propio agujero negro. A su vez, el efecto Unruh predice que un observador acelerado detecta un baño térmico isótropo de partículas cuya temperatura es proporcional a su aceleración. Ambos efectos son fenomenológicamente similares, y ambas situaciones son gravitacionalmente equivalentes. Mediante el presente trabajo pretendemos investigar la eventual asimetría que, de acuerdo con la interpretación mayoritaria en la literatura sobre la radiación de Hawking y el efecto Unruh, se encuentra en la emisión de partículas y antipartículas desde un átomo excitado acelerado. De dicha investigación se obtiene que, antes de alcanzar el equilibrio “pseudotérmico”, tanto la emisión de partículas como de antipartículas es direccional con respecto al sentido de la aceleración. Sin embargo, no se encuentra asimetría alguna entre la emisión de partículas y antipartículas.

Hawking Effect predicts the creation of particle-antiparticle pairs on the event horizon of a black hole. Particles are emitted outwards, whereas antiparticles are absorbed by the black hole itself. On the other hand, Unruh Effect predicts that an accelerated observer detects a thermal and isotropic bath of particles whose temperature is proportional to his acceleration. Both effects are phenomenologically similar, and both situations are gravitationally equivalent. In this work, we aim at investigating the eventual asymmetry between particle and antiparticle emission which, according to the commonly accepted interpretation of Hawking’s radiation and Unruh’s effect, is found in the radiation emitted by an accelerated excited atom. Our investigation reveals that, before pseudothermal equilibrium is achieved, directionality holds in the emission of particles and antiparticles. However, no signature of the particle-antiparticle asymmetry is found on the emission at any time.





---

## 2 Introducción

La aplicación de la teoría de campos cuánticos en sistemas no inerciales implica la creación de partículas de campo en el estado de vacío inercial, haciendo que distintos observadores puedan no estar de acuerdo en el número de partículas que observan. Estos fenómenos son debidos a la existencia de horizontes de eventos junto al hecho de que el concepto de partícula no es invariante, si no que depende del sistema de referencia en que se encuentra el observador.

En el horizonte de eventos de los agujeros negros se crean pares partícula-antipartícula. Las partículas del campo son emitidas fuera del agujero mientras que las antipartículas son absorbidas por el mismo [11]. Este fenómeno se conoce como Efecto Hawking. A su vez, un observador moviéndose con aceleración propia constante es capaz de detectar un baño térmico de partículas [11, 19], fenómeno conocido como Efecto Unruh. En virtud del principio de equivalencia, la detección de partículas por un observador acelerado y un observador en caída libre hacia un agujero negro se produce de forma análoga. Para profundizar en el análisis de la radiación de Hawking se ha estudiado la desexcitación de un átomo acelerado uniformemente en interacción con un campo escalar complejo. Las consecuencias de este estudio serían análogas en el caso de la caída libre del átomo en un agujero negro.

La metodología llevada a cabo en este trabajo se divide en cuatro partes fundamentales.

En la sección 3 se ha realizado un estudio del formalismo de la Teoría Cuántica de Campos enfocado al caso de un campo escalar complejo y se exponen las herramientas generales que se utilizarán a lo largo del trabajo.

En la sección 4 se ha contextualizado la formulación del campo escalar en espacio tiempos curvos, describiendo la influencia de la métrica en la definición de los campos y en la propagación de partículas.

En la sección 5 se ha particularizado el estudio del campo escalar complejo en sistemas a aceleración constante. Se hará un análisis de Efecto Unruh y sus implicaciones en la diferencia de partículas detectadas por un observador acelerado y otro inercial.

Finalmente en la sección 6 se ha realizado un estudio de la radiación emitida por un átomo acelerado y detectada por un observador inercial. El objetivo fundamental es estudiar las propiedades de emisión de las partículas según su naturaleza y la dirección de la aceleración.



---

## 3 Teoría Cuántica de Campos

### 3.1 Motivación

La Teoría Cuántica de Campos surge de la necesidad de hacer consistente la formulación de la Mecánica Cuántica con los principios de la Relatividad Especial. Una forma inmediata de abordar este problema es introduciendo la expresión de la energía de una partícula relativista en el Hamiltoniano de la ecuación de Schrödinger,

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4, \quad (3.1)$$

resultando,

$$[\square + \mu^2] \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mu = \frac{mc}{\hbar}, \quad (3.2)$$

conocida como ecuación de Klein-Gordon para la función de onda  $\Psi$ .

Con el propósito de dar una interpretación física a esta ecuación se definen, análogamente a la ecuación no relativista, una densidad de probabilidad  $\rho$  y una densidad de corriente de probabilidad  $\mathbf{J}$

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right), \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \end{aligned} \quad (3.3)$$

que satisfacen la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

Una característica de esta ecuación es que los autovalores de la energía pueden ser tanto positivos como negativos. En consecuencia, la densidad de probabilidad no es una función definida positiva y se desvirtúa la interpretación de Born que asocia la probabilidad de que una partícula se encuentre en cierta región e instante dados con el cuadrado del módulo de la función de onda. Este hecho se hace patente sustituyendo los autovalores de la energía en  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{E}{mc^2} \Psi^* \Psi. \quad (3.5)$$

### 3.2 Teoría Clásica de Campos. Enfoques Lagrangiano y Hamiltoniano

---

Si  $\frac{p^2}{2m} \ll mc^2$  la expresión se reduce al caso de la densidad de probabilidad en el caso no relativista, pero en general no toma valores estrictamente positivos.

Uno de los primeros intentos para abordar la problemática debida a las densidades de probabilidad negativas fue llevado a cabo por Dirac a partir de la construcción de un Hamiltoniano con derivadas espaciales y temporales de primer orden. Esto supuso un éxito en cuanto a la posibilidad de recuperar la interpretación de Born ya que la densidad de probabilidad volvía a ser una función definida positiva, y se dio pie a interpretar los estados de energía negativa. Para Dirac, el vacío estaba completamente ocupado por electrones de energía negativa impidiendo a los electrones de energía positiva caer a estados de energía negativa, por el principio de exclusión de Pauli. En el supuesto caso de que un electrón de energía negativa se excitase a estados de energía positiva, el estado vacante de energía negativa, llamado hueco, se comportaría a todos los efectos como una partícula de carga opuesta al electrón y de energía positiva. Esta interpretación, sin embargo, sigue siendo en algunos aspectos insatisfactoria. Por ejemplo, bajo este modelo, el vacío tiene una carga eléctrica infinita.

Con la intención de solventar estos problemas, entre otros, se formuló la “Segunda Cuantización”. En este formalismo, la función de onda  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  se transforma en un operador  $\phi(\mathbf{r}, t)$  de carácter local definido en una región del espacio. Este enfoque permite abordar el proceso de cuantización desde el punto de vista de la Teoría de Campos.

### 3.2 Teoría Clásica de Campos. Enfoques Lagrangiano y Hamiltoniano

Bajo un enfoque clásico, un campo es una distribución espacio temporal de una magnitud física. Desde un punto de vista variacional, la dinámica de los campos viene dada por la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Postularemos que  $\mathcal{L}$ , y por lo tanto la acción  $S$ , dependen de los valores del campo  $\phi(\mathbf{r})$  y sus derivadas de primer orden  $\partial_\nu \phi(\mathbf{r})$ .

Definimos, por lo tanto, el funcional de la acción  $S$

$$S[\phi] = \int L(\phi, \partial_\nu \phi) dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\nu \phi) d^4\mathbf{r}. \quad (3.6)$$

Como la evolución de los campos físicos, satisface el principio de mínima acción, llegamos a

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} = 0. \quad (3.7)$$

Las ecuaciones del campo viene dada por la ecuación de Euler-Lagrange anterior. En el caso de que la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  viniese dada por  $n$  campos independientes, cada campo satisfaría una ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi_\alpha)} = 0. \quad (3.8)$$

Para que nuestra formulación sea consistente con los principios de la Relatividad Especial las ecuaciones de los campos deben satisfacer las siguientes propiedades:

- Deben ser covariantes bajo el grupo de Poincaré

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \phi(\mathbf{r}) \rightarrow \phi'(\mathbf{r}', \mathbf{t}') = \phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.9)$$

La acción debe ser invariante bajo el grupo de Poincaré. Al ser  $d^4\mathbf{r}$  un invariante, la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  debe serlo también.

- Tener carácter local

Los valores que adquiere el campo en un punto del espacio dependen exclusivamente del entorno del punto en el que estamos evaluando. No existe una "acción a distancia" desde otro punto espacio. Por lo tanto, la densidad Lagrangiana depende de los valores del campo y de sus primeras derivadas en dicho punto, es decir, también tiene carácter local.

- Tener carácter causal

Esta propiedad está estrechamente ligada con la anterior de localidad. Dos sucesos pueden estar relacionados entre sí, o ser uno causa del otro, si el intervalo entre ambos es de tipo temporal  $\Delta s > 0$ . Asimismo, los puntos que formen un intervalo tipo espacial,  $\Delta s < 0$ , no podrán tener una relación causal entre sí. Esta propiedad de causalidad toma relevancia en la cuantización del campos con el concepto de propagador que discutiremos posteriormente.

En ciertos casos es más sencillo trabajar bajo el formalismo Hamiltoniano. Para ello definimos, análogamente a la mecánica clásica, la variable momento

### 3.3 Cuantización del Campo de Klein Gordon

---

$\Pi_\alpha(\mathbf{r}, t)$

$$\Pi_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_\alpha)} \quad (3.10)$$

y el Hamiltoniano resulta

$$H = \int \mathcal{H}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3 \mathbf{r} = \int \left[ \sum_\alpha \Pi_\alpha(\mathbf{r}, t) \partial_0 \phi_\alpha(\mathbf{r}, t) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right] d^3 \mathbf{r}. \quad (3.11)$$

Además, las ecuaciones de movimiento vienen dadas por las ecuaciones canónicas

$$\partial_0 \phi_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial H}{\partial \Pi_\alpha}, \quad \partial_0 \Pi_\alpha(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial H}{\partial \phi_\alpha}. \quad (3.12)$$

Por último, se puede demostrar que en mecánica clásica las variables canónicas  $\Pi_\alpha(\mathbf{r}, t)$  y  $\phi_\beta(\mathbf{r}, t)$  cumplen las reglas de conmutación según los corchetes de Poisson

$$\begin{aligned} \{\phi_\alpha(\mathbf{r}, t), \Pi_\beta(\mathbf{r}', t)\} &= \delta_\alpha^\beta \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \{\phi_\alpha(\mathbf{r}, t), \phi_\beta(\mathbf{r}', t)\} &= \{\Pi_\alpha(\mathbf{r}, t), \Pi_\beta(\mathbf{r}', t)\} = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La manera, por lo tanto, de cuantizar un campo será transformar los  $\Pi(\mathbf{r}, t)$  y  $\phi(\mathbf{r}, t)$  en operadores e imponer que cumplan unas determinadas reglas de conmutación, conocidas como reglas de conmutación canónicas, en el espacio de Hilbert.

### 3.3 Cuantización del Campo de Klein Gordon

#### Campo Escalar Real

Primero nos centraremos en cuantizar, bajo la imagen de Heisenberg, el campo escalar real másico de spin 0. La densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  del campo es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \partial^\nu \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\mu^2}{2} \phi^2(\mathbf{r}, t), \quad \mu = \frac{mc}{\hbar}. \quad (3.14)$$

### 3.3 Cuantización del Campo de Klein Gordon

---

El momento conjugado resulta

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi, \quad (3.15)$$

y el Hamiltoniano del campo

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \left( \partial_\nu \phi(\mathbf{r}, t) \partial_\nu \phi(\mathbf{r}, t) + \mu^2 \phi^2(\mathbf{r}, t) \right). \quad (3.16)$$

Imponiendo las condiciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{r}, t), \Pi(\mathbf{r}', t)] &= i\hbar \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ [\phi(\mathbf{r}, t), \phi(\mathbf{r}', t)] &= [\Pi(\mathbf{r}, t), \Pi(\mathbf{r}', t)] = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

y utilizando la imagen de Heisenberg

$$\begin{aligned} i\hbar c \partial_0 \phi &= [\phi, H] = \Pi(\mathbf{r}, t), \\ i\hbar c \partial_0 \Pi &= -\hbar^2 c^2 \partial_0^2 \phi = [\Pi, H] = (\nabla^2 - \mu^2) \phi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (3.18)$$

llegamos a la misma ecuación de Klein Gordon.

En este punto nos encontramos con el mismo problema inicial de dar una interpretación física a la ecuación, siendo  $\phi(\mathbf{r}, t)$  un campo. Realizando una transformada de Fourier en el número de onda se obtiene

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 \mathbf{k} C_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \phi(\mathbf{k}, t), \quad (3.19)$$

diendo  $C_k$  una constante de normalización.

Introduciendo esta expresión en la ecuación de Klein-Gordon

$$[\partial_\nu \partial^\nu + (\mathbf{k}^2 + \mu^2)] \phi(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (3.20)$$

resulta que el campo de escalar satisface una ecuación del tipo oscilar armónico de frecuencia  $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$ . La solución más general es

$$\phi(\mathbf{k}, t) = a_{\mathbf{k}}^1 e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + a_{\mathbf{k}}^2 e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \quad (3.21)$$

Además, al tratarse de un campo escalar real, es decir,  $\phi = \phi^\dagger$ , los operadores  $(a_{\mathbf{k}}^1)^\dagger = a_{\mathbf{k}}^2$ .

### 3.3 Cuantización del Campo de Klein Gordon

---

La solución general del campo resulta

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{k} C_k \left( a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right). \quad (3.22)$$

En consecuencia, el campo conjugado

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{k} C_k (-i\omega_{\mathbf{k}}) \left( a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right). \quad (3.23)$$

Imponiendo las reglas de conmutación (3.17) sobre los campos, resulta de los operadores  $a_{\mathbf{k}}$  de cada modo satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

propias de los operadores creación y aniquilación del oscilador armónico. La constante de normalización es  $C_k = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}$  y finalmente el campo resulta

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left( a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right). \quad (3.25)$$

La solución obtenida, al estar expresada en términos de los operadores de creación y destrucción, podemos interpretarla como un conjunto infinito de modos de vibración en cada punto del espacio, independientes entre sí, que tienen energía y momento definidos. Existen dos contribuciones: modos de vibración de energía positiva y negativa. Estos modos de vibración son las partículas que componen el campo y siguen la estadística pertinente a las reglas de conmutación, en este caso bosónica.

La interpretación de los modos de energía negativa en el caso del campo escalar real no es evidente. Para interpretar mejor este resultado analizaremos el caso del campo escalar complejo.



### 3.3 Cuantización del Campo de Klein Gordon

---

Sustituyendo las expresiones del campo obtenidas en la expresión del Hamiltoniano del sistema (3.16) se llega a expresar la energía del sistema en términos de los operadores creación y aniquilación:

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger \right) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\delta^3(0) \right) \quad (3.26)$$

Podemos observar que la densidad de energía del campo diverge. Con este resultado la existencia de infinitos osciladores por punto del espacio se hace patente. Independientemente del número de ocupación  $n_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$ , existe una energía mínima, divergente, conocida como energía de punto cero, que corresponde a la energía del campo en ausencia de partículas.

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \frac{1}{2}\delta^3(0) \rightarrow \infty \quad (3.27)$$

¿Cómo podemos evitar esta divergencia de energía? La forma más sencilla es renormalizar el Hamiltoniano, restando la energía de punto cero e introduciendo el orden normal en los operadores del campo. Esto implica que todos los operadores creación multiplican por la izquierda a los operadores destrucción. De esta manera el Hamiltoniano en orden normal,  $: H :$ , resulta

$$: H : = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \quad (3.28)$$

#### Campo Escalar Complejo

Siguiendo un procedimiento análogo a la sección anterior cuantizaremos el campo escalar generalizando al caso de que el campo no sea hermítico. Partiendo de la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger, \partial_\nu \phi^\dagger, \partial_\nu \phi) = \partial_\nu \phi^\dagger(\mathbf{r}, t) \partial^\nu \phi(\mathbf{r}, t) - \mu^2 \phi^\dagger(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t), \quad (3.29)$$

se llegan a las siguientes ecuaciones K-G

$$(\partial_\nu \partial^\nu + \mu^2)\phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\partial_\nu \partial^\nu + \mu^2)\phi^\dagger(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.30)$$

### 3.3 Cuantización del Campo de Klein Gordon

---

cuyos momento conjugados son, respectivamente,

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^\dagger, \quad \Pi^\dagger(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} = \partial_0 \phi, \quad (3.31)$$

y su Hamiltoniano

$$H = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} (\partial_\nu \phi^\dagger(\mathbf{r}, t) \partial_\nu \phi(\mathbf{r}, t) + \mu^2 \phi^\dagger(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t)). \quad (3.32)$$

Expandiendo los campos  $\phi(\mathbf{r}, t)$  y  $\phi^\dagger(\mathbf{r}, t)$  en función de los modos de vibración e imponiendo las reglas de conmutación análogamente al caso real

$$[\phi(\mathbf{r}, t), \Pi(\mathbf{r}', t)] = [\phi^\dagger(\mathbf{r}, t), \Pi^\dagger(\mathbf{r}', t)] = i\hbar \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.33)$$

los campos resultan ser,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left( a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right) \\ \phi^\dagger(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left( b_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

cumpliendo las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = [b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, \\ [a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] &= [a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ahora que el campo escalar no es Hermítico  $\phi \neq \phi^\dagger$ , los operadores creación y aniquilación correspondientes a los modos de energía negativa no pueden ponerse en función de los operadores de los modos de energía positiva. Esto implica que el campo complejo está compuesto por dos tipos diferentes de partículas.

El Hamiltoniano en orden normal es

$$: H := \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \right) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left( n_{\mathbf{k}}^a + n_{\mathbf{k}}^b \right). \quad (3.36)$$

Los resultados obtenidos son similares a los del campo escalar real pero con dos tipos distintos de partículas.

### 3.4 Espacio de Fock

---

Observando el lagrangiano  $\mathcal{L}$  del campo, puede comprobarse que es invariante bajo el grupo de transformaciones  $U(1)$

$$\phi' = \phi e^{i\alpha}, \quad \phi'^* = \phi^* e^{-i\alpha}. \quad (3.37)$$

Según el Teorema de Noether, transformaciones continuas de simetría implican que existen magnitudes físicas que se conservan. En este caso llamaremos a tal magnitud carga

$$Q = \int d^3\mathbf{r} j^0(\mathbf{r}) = i \int d^3\mathbf{r} \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi = i \int d^3\mathbf{r} (\Pi^\dagger \phi^\dagger - \Pi \phi) \quad (3.38)$$

Sustituyendo las expresiones del campo en el operador carga y adoptando el orden normal, llegamos a

$$Q = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} (n_{\mathbf{k}}^a - n_{\mathbf{k}}^b) \quad (3.39)$$

Además, la carga del campo es una constante del movimiento

$$i\hbar c \partial_0 Q = [Q, H] = 0. \quad (3.40)$$

Por lo tanto, el campo complejo está formado por dos tipos de partículas, el operador  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  crea partículas con un  $\mathbf{k}$  y  $E_{\mathbf{k}}$  definidos y carga positiva +1 mientras que el operador  $b_{\mathbf{k}}^\dagger$  crea las mismas partículas pero de signo contrario -1. Los modos de vibración negativos no son, por lo tanto, partículas de energía negativa sino que son partículas equivalentes a las de energía positiva con carga de signo contrario, llamadas antipartículas. Podemos ver que en general, el número de partículas no es una constante del movimiento, sin embargo, la carga del campo se mantiene constante. Esto quiere decir que cada vez que se crea una partícula de un signo se crea otra del contrario, al igual que cuando se destruyen. En el caso del campo escalar real, las antipartículas coinciden con las partículas del campo.

### 3.4 Espacio de Fock

La interpretación de un campo como un conjunto de partículas idénticas, motiva la definición de un espacio que permita la descripción de los estados en los que intervengan distintas colectividades de partículas idénticas y su

### 3.4 Espacio de Fock

---

eventual interacción con otros campos. Este espacio, conocido como espacio de Fock, se define como

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n} \quad (3.41)$$

Siendo  $H$  el espacio de Hilbert para una sola partícula.

El estado de un campo compuesto por  $n$  partículas idénticas de momento  $\mathbf{k}_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  es el producto tensorial de las partículas que lo componen

$$\bigotimes_{i=1}^n |\mathbf{k}_i\rangle = |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle \quad (3.42)$$

En particular, el estado del campo en ausencia de partículas, llamado estado de vacío, se denota por  $|0\rangle$ .

En el caso de partículas tengan carácter bosónico, se cumplen las condiciones de ortonormalización

$$\langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \dots, \mathbf{k}'_m | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n \rangle = \frac{1}{n!} \delta_{mn} \sum_P 2\omega_{\mathbf{k}_1} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) \dots 2\omega_{\mathbf{k}_n} \delta(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}'_n) \quad (3.43)$$

Siendo  $\sum_P$  la suma de todas las posibles permutaciones. Además, la relación de cierre resulta

$$I = |0\rangle \langle 0| + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{k}_1} \dots \int_{\mathbf{k}_i} \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{2\omega_{\mathbf{k}_1}} \dots \frac{d^3 \mathbf{k}_i}{2\omega_{\mathbf{k}_i}} |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_i\rangle \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_i| \quad (3.44)$$

Los estados del campo definidos en el espacio de Fock están íntimamente relacionados con los operadores creación y destrucción y las reglas de conmutación (3.24) que satisfacen. La aplicación de estos operadores, permite construir estados de forma general. Las operaciones fundamentales son

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{k}\rangle, \quad a_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}'\rangle = 2\omega_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') |0\rangle, \quad (3.45)$$

y en general

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger \dots a_{\mathbf{k}_n}^\dagger |0\rangle. \quad (3.46)$$

Además, el estado de vacío tiene la propiedad

$$a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0. \quad (3.47)$$

En el caso de trabajar con distintos tipos de partículas como puede ser el caso del campo escalar complejo, la generalización de las propiedades descritas anteriormente es trivial, haciendo uso de los operadores  $a_{\mathbf{k}}$  y  $b_{\mathbf{k}}$  que corresponden a las partículas y antipartículas, respectivamente.

## 3.5 Concepto de Propagador

### Propagador Causal

Para profundizar en la cuestión de causalidad y estudiar su consistencia con los principios de la relatividad, cabe preguntarnos en qué condiciones puede haber una relación causal entre dos sucesos del espacio tiempo.

Definimos el conmutador  $\Delta(x - y)$ , donde  $x$  e  $y$  son dos puntos espacio-temporales, como

$$\Delta(x - y) = [\phi(x), \phi^\dagger(y)] \quad (3.48)$$

Es lógico pensar que dos medidas realizadas en un intervalo de tipo espacial  $(x - y)^2 < 0$  no deben influirse mutuamente ya que la interacción no es capaz de propagarse a mayor velocidad que la de la luz. Sustituyendo en el conmutador  $\Delta$  las funciones de los campos, resulta

$$\Delta(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) \quad (3.49)$$

Por lo tanto,  $\Delta$  es invariante bajo el grupo de Poincaré ya que la medida de la integral y los campos lo son. No se anula para intervalos temporales y sí para los intervalos espaciales, lo que nos permite distinguir bajo qué condiciones se puede establecer una relación causal entre dos observables.

Por otro lado, nos podemos preguntar cual es la probabilidad de encontrar una partícula en el punto espacio temporal  $x$  si su posición espaciotemporal inicial es  $y$ . Consideremos el primer término del conmutador  $\Delta(x - y)$

$$\Delta^{(+)}(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle \quad (3.50)$$

conocido como propagador. Este término es proporcional a  $\langle x | y \rangle$  que es igual a la probabilidad de que la partícula se propague de  $y$  a  $x$ , resultando

$$\Delta^{(+)}(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik(x-y)}. \quad (3.51)$$

### 3.5 Concepto de Propagador

---

En general no se anula para intervalos de tipo espacial. Por lo tanto, ¿puede haber propagaciones que se produzcan a más velocidad que la de la luz en el vacío? Esto no es consistente con los postulados de la relatividad especial.

Una manera de solventar este problema es afirmar que

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \Delta^{(+)}(x - y) - \Delta^{(-)}(y - x), \text{ si } (x - y)^2 < 0, \quad (3.52)$$

es decir, que hay dos procesos físicos: una propagación de  $y \rightarrow x$  y otra de  $x \rightarrow y$ . Desde el punto de vista del campo complejo, las partículas viajan en un sentido mientras que las antipartículas viajan en sentido contrario, cancelándose la contribución de la propagación mutuamente. De esta manera se mantiene el carácter local y causal de la formulación del campo K-G.

#### Propagador de Feynman

A la hora de describir la propagación de una partícula libre en el vacío entre intervalos temporales  $(x - y)^2 > 0$  mediante el propagador

$$\Delta^{(+)}(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle, \quad (3.53)$$

podemos ver que la expresión, donde  $\phi^\dagger(y)$  crea una partícula en  $y$  y  $\phi(x)$  la aniquila en  $x$ , sólo adquiere un sentido físico si  $x^0 > y^0$ . De forma similar ocurre cuando una antipartícula se propaga de  $x$  a  $y$

$$\Delta^{(-)}(x - y) = \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle, \quad (3.54)$$

donde la expresión adquiere sentido físico si  $y^0 > x^0$ .

Para solventar este problema, se define el propagador causal o de Feynman

$$\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle, \quad (3.55)$$

siendo  $T$  el operador time-ordering. Este operador se encarga de reordenar los operadores para que la propagación ocurra de un instante de tiempo menor a uno mayor.

Es pertinente destacar que el propagador de Feynman describe el movimiento de partículas en tiempo y espacio. Conociendo la relación de dispersión  $\omega(\mathbf{k})$  podemos separar la contribución espacial y temporal del propagador

$$\Delta_F(x - y) = \langle \mathbf{y} | U(t_x - t_y) | \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x} | U(t_y - t_x) | \mathbf{y} \rangle. \quad (3.56)$$

donde el operador  $U(t_x, t_y)$  es el operador de evolución temporal en tiempo ordenado.

### 3.5 Concepto de Propagador

---

Introduciendo la relación de cierre para una partícula tenemos

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d\omega}{2\omega} \langle 0 | [\phi_\omega(\mathbf{x})U(t_x - t_y)\phi_\omega^\dagger(\mathbf{y}) + \phi_\omega^\dagger(\mathbf{y})U(t_y - t_x)\phi_\omega(\mathbf{x})] | 0 \rangle \quad (3.57)$$

pudiendo obtener de forma separada la contribución espacial y temporal del propagador. Esta expresión se puede expresar de forma compacta como el producto de una función espacial de green  $G_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  y el operador evolución temporal  $U(t_x - t_y)$

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d\omega}{2\omega} G_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) U(t_x - t_y). \quad (3.58)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación de Klein Gordon se puede demostrar que satisface la relación

$$(\square^2 + \mu^2) \Delta_F(x - y) = -\delta(t_x - t_y)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\delta^4(x - y), \quad (3.59)$$

es decir, que el propagador de Feynman es la función de Green en tiempo y espacio de la ecuación del campo escalar.

#### Operador Evolución Temporal

A la hora de estudiar un sistema, en ocasiones sólo es necesario analizar la evolución temporal debido a que no hay un desplazamiento espacial. En estos el operador de Feynman al caso se reduce al el uso del operador de evolución temporal  $U(t - t_0)$ . Este operador se define como

$$U(t - t_0) = T e^{\int_{t_0}^t H(\tau) d\tau}, \quad (3.60)$$

siendo  $H$  el Hamiltoniano del sistema y  $T$  el operador de orden temporal.

En los casos en el que un sistema se vea influido por una perturbación  $W(t)$  y en consecuencia el nuevo hamiltoniano del sistema sea la suma del hamiltoniano libre más la interacción  $H(t) = H_0(t) + W(t)$ , el nuevo operador evolución temporal es

$$U(t - t_0) = T e^{\int_{t_0}^t (H_0 + W(\tau)) d\tau}. \quad (3.61)$$

### 3.5 Concepto de Propagador

---

Este operador puede expandirse en potencias de la perturbación  $W(\tau)$  [2, 3, 4], obteniendo

$$\begin{aligned} U(t - t_0) &= e^{-i\frac{H_0}{\hbar}(t-t_0)} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau U_0(t - \tau)W(\tau)U_0(\tau - t_0) \\ &+ \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' U_0(t - \tau)W(\tau)U_0(\tau - \tau')W(\tau')U_0(\tau' - t_0) + \dots \end{aligned} \quad (3.62)$$

En particular, utilizaremos la expansión a primer orden

$$U(t - t_0) = U_0(t - t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau U_0(t - \tau)W(\tau)U_0(\tau - t_0). \quad (3.63)$$

para el estudio de la desexcitación de un átomo acelerado.



---

## 4 Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempo curvos

La Teoría de la Relatividad General pretende generalizar las nociones de espacio y tiempo a contextos más generales que los de la Teoría de la Relatividad Especial como son los sistemas no inerciales o sistemas inmersos en campos gravitatorios, partiendo del supuesto de que es imposible hacer una distinción entre estos dos. Esta hipótesis se conoce como Principio de Equivalencia. Esto lleva a interpretar que la gravedad es de naturaleza puramente geométrica y viene determinada por la métrica del sistema físico.

### 4.1 Influencia de la métrica en el cono de luz

Para caracterizar el intervalo espacio temporal entre dos sucesos, suele ser de utilidad la representación del cono de luz. Los eventos espacios-temporales que forman con el origen intervalos nulos  $ds^2 = 0$  corresponden a las regiones espacio temporales recorridas por la luz. Estos puntos forman hipersuperficie con forma forma un cono.

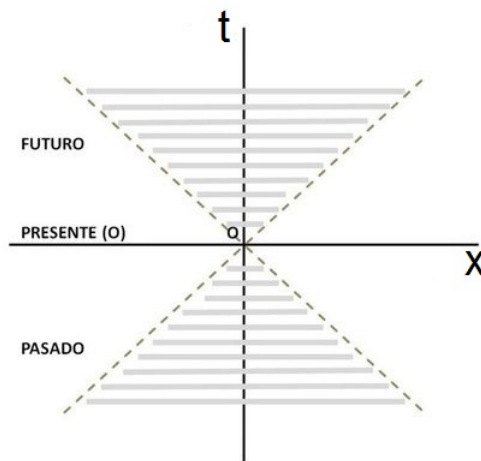


Figura 8

Figure 1: Cono de Luz en el espacio de Minkowski

Los puntos interiores del cono forman intervalos de tipo temporal  $ds^2 > 0$  mientras que los de fuera son tipo espacial  $ds^2 < 0$  respecto del origen.

## 4.2 Funcional de la acción en acoplamiento mínimo

---

En el caso del espacio de Minkowski, se tiene que la velocidad de la luz es constante en todo el espacio-tiempo

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{luz} = c. \quad (4.1)$$

Sin embargo, en situaciones más generales donde la métrica viene dada por un tensor diagonal  $g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = g_{00}dt^2 - g_{11}dx^2, \quad (4.2)$$

resulta que la velocidad de la luz

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{luz} = \sqrt{\frac{g_{00}}{g_{11}}} \leq c \quad (4.3)$$

no es constante si no que depende de la métrica del espacio. Esto tiene implicaciones importantes en cuestiones relacionadas con la causalidad, en particular con la propagación de las partículas de los campos cuánticos. La métrica puede deformar el cono reduciendo la región de intervalos de tipo temporal, haciendo que propagadores de los campos se anulen en el caso de que el intervalo entre dos sucesos pase a ser de tipo espacial  $ds^2 < 0$ .

## 4.2 Funcional de la acción en acoplamiento mínimo

Hasta ahora hemos contextualizado la cuantización del campo escalar en el espacio tiempo de Minkowski, comprobando que satisface los principios de localidad y causalidad. La generalización a otros espacios, donde la métrica está definida por un campo gravitatorio, hace necesaria la modificación de la acción para satisfacer el principio general de covariancia.

Debido a que la métrica pasa de ser  $\eta_{\mu\nu}$  a una métrica arbitraria  $g_{\mu\nu}$ , el invariante diferencial de volumen de la acción deja de ser la propia del espacio de Minkowski y pasa a ser  $d^4x\sqrt{|g|}$  donde  $g = \det(g_{\mu\nu})$  es el determinante del tensor métrico. Además, las derivadas parciales se transforman en derivadas covariantes.

Como resultado, tenemos que la acción pasa a ser

$$S[\phi] = \int d^4x\sqrt{|g|} [g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^\dagger - \mu^2\phi\phi^\dagger]. \quad (4.4)$$

### 4.3 Radiación de Hawking

---

Esta introducción de la métrica en el funcional de la acción del campo, conocida como acoplamiento mínimo, implica la mínima interacción entre el campo y la gravedad consistente con la Relatividad General.

A la hora de estudiar el campo en un espacio con métrica  $g_{\mu\nu}$  resulta útil comprobar si dicho espacio es similar a otros ya conocidos, como puede ser el espacio de Minkowski, porque las expresiones de los campos pueden tomar formas similares a su vez. En este trabajo haremos uso de métricas conformes, con las que el funcional de la acción adquiere la misma forma en ambas métricas. Dos métricas son conformes si

$$g_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

donde  $\Omega^2(x)$  es una función continua y distinta de cero para todo punto espacio temporal. Las transformaciones conformes tienen la propiedad de conservar ángulos.

### 4.3 Radiación de Hawking

En el contexto de un campo gravitatorio central, donde la métrica para (1+1) dimensiones resulta

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (4.6)$$

se establece que desde el horizonte de un agujero negro se crean partículas de campo a las que se le asocia una temperatura [13, 16]

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM k_B}. \quad (4.7)$$

Este fenómeno se conoce como Efecto Hawking.

En la literatura se afirma que en el horizonte de sucesos de un agujero negro, para un campo escalar real

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk (a_k u_k + a_k^\dagger u_k^*), \quad (4.8)$$

las partículas de energía negativa se introducen en el agujero mientras que las partículas de energía positiva son emitidas al exterior [16]. Debido a que la correspondencia de los modos de vibración del campo con las partículas y antipartículas del mismo es arbitraria, y que no se pone de manifiesto

#### 4.4 Sistemas de referencia con aceleración propia constante. Coordenadas de Rindler

---

una diferenciación entre partícula y antipartícula al tratarse de un campo escalar real, en este trabajo hemos centrado en el estudio de un campo escalar complejo. Para hacer un análisis más exhaustivo de la radiación de Hawking, vamos a estudiar la desexcitación de un átomo acelerado uniformemente. En virtud del principio de equivalencia, un átomo en caída libre respecto a un agujero negro se encuentra en la misma situación gravitacional que un átomo acelerado de forma constante. Además, ofrece un escenario más asequible para poder diseñar un montaje experimental en el que realizar medidas [22].

#### 4.4 Sistemas de referencia con aceleración propia constante. Coordenadas de Rindler

Supongamos que respecto a un sistema inercial de laboratorio  $K$ , se mueve un sistema inercial  $K'$  con velocidad  $v$  en la dirección  $x$ . En  $K'$  una partícula se mueve a velocidad  $\mathbf{u}'$  y aceleración  $\mathbf{a}'$ . ¿Qué aceleración mide un observador situado en  $K$ ?

Sabemos que la relación de coordenadas espacio temporales de ambos sistemas están relacionadas por las transformaciones de Lorentz,

$$x = \gamma(x' + vt), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(\tau - \frac{vx'}{c^2}\right) \quad (4.9)$$

Derivando respecto del tiempo  $t$  del sistema de referencia  $K$  y sabiendo que su relación con el tiempo propio  $\tau$  del sistema de referencia  $K'$  es

$$\tau = \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \quad (4.10)$$

llegamos a la relación de velocidades entre ambos sistemas,

$$u_x = \frac{v + u'_x}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}. \quad (4.11)$$

Derivando las componentes de la velocidad respecto del tiempo, análogamente al caso anterior, se obtiene que las componentes de la aceleración medidas desde el sistema de referencia  $K$

4.4 Sistemas de referencia con aceleración propia constante. Coordenadas de Rindler

---

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^2} \\
 a_y &= \frac{a'_y}{\gamma^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^2} - \frac{vu'_y a'_x}{\gamma^2 c^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^3} \\
 a_z &= \frac{a'_z}{\gamma^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^2} - \frac{vu'_z a'_x}{\gamma^2 c^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^3}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

En el caso particular de que  $K'$  sea un sistema de referencia comóvil a la partícula y en consecuencia  $\mathbf{u}' = 0$ , resulta

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}, \quad a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2}, \quad a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2} \tag{4.13}$$

A partir de las expresiones 4.13 podemos calcular, en el sistema de referencia inercial  $K$ , las ecuaciones de movimiento de un sistema de referencia coacelerado  $K'$  que experimenta una aceleración propia constante  $a$  en la dirección  $x$ . En particular, la aceleración con que el sistema  $K$  observa la aceleración de  $K'$  adquiere la forma

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{a}{\gamma^3(v)} \Rightarrow \int \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dv = \int a dt, \tag{4.14}$$

donde  $v$  es la velocidad de  $K'$  vista desde  $K$ .

La solución de esta ecuación (4.14), imponiendo como condición inicial  $v(t=0) = 0$ , resulta

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 - \left(\frac{at}{c}\right)^2}} \tag{4.15}$$

Integrado de nuevo, podemos obtener la posición del sistema de referencia coacelerado  $K'$

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2}{a} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1 \right) \tag{4.16}$$

Para facilitar posteriores cálculos, fijamos  $x(t=0) = \frac{c^2}{a}$  obteniendo una expresión más sencilla

#### 4.4 Sistemas de referencia con aceleración propia constante. Coordenadas de Rindler

---

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} \quad (4.17)$$

En lo que sigue, nos restringiremos por simplicidad a espacio-tiempos de (1+1) dimensiones. Conocida la variación de la velocidad en función del tiempo  $t$  podemos hallar el tiempo propio a través de (4.10). Integrando y fijando  $\tau(t=0) = 0$ , resulta

$$\tau(t) = \frac{c}{a} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{at}{c} \right), \quad (4.18)$$

siendo la relación inversa

$$t(\tau) = \frac{c}{a} \sinh \left( \frac{a\tau}{c} \right), \quad (4.19)$$

y por lo tanto podemos expresar  $x$  de forma más compact

$$x(\tau) = \frac{c^2}{a} \cosh \left( \frac{a\tau}{c} \right). \quad (4.20)$$

En el caso de que se estudie la trayectoria de un punto  $\xi$  respecto del origen del sistema acelerado, sabiendo que se encuentra en un punto espacio temporal  $s = (\tau = 0, \xi)$ , la posición respecto a otro sistema de referencia inercial se obtiene mediante una transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} x_\xi &= \frac{\xi + v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \xi \cosh \left( \frac{a\tau}{c} \right) \\ t_\xi &= \frac{\tau - \frac{v}{c^2}\xi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\xi}{c} \sinh \left( \frac{a\tau}{c} \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Entonces las ecuaciones del movimiento de un punto arbitrario  $(\xi, \tau)$  del sistema de referencia uniformemente acelerado, vistas desde un sistema de referencia inercial son

$$\begin{aligned} x(\xi, \tau) &= \frac{c^2 + a\xi}{a} \cosh \left( \frac{a\tau}{c} \right), \quad x \in [0, \infty) \\ t(\xi, \tau) &= \frac{c^2 + a\xi}{ac} \sinh \left( \frac{a\tau}{c} \right), \quad t \in (-\infty, \infty) \end{aligned}, \quad (4.22)$$

#### 4.4 Sistemas de referencia con aceleración propia constante. Coordenadas de Rindler

---

y las relaciones inversas

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \sqrt{x^2 - c^2 t^2} - \frac{c^2}{a}, \quad \xi \in \left[-\frac{c^2}{a}, \infty\right) \\ \tau(x, t) &= \frac{c}{2a} \ln \left( \frac{x + ct}{x - ct} \right), \quad \tau \in (-\infty, \infty).\end{aligned}\tag{4.23}$$

Representando estas ecuaciones en el espacio de Minkowski podemos ver que la región espacio temporal accesible a un observador acelerado se restringen al cuadrante en el que  $x > c|t|$ .

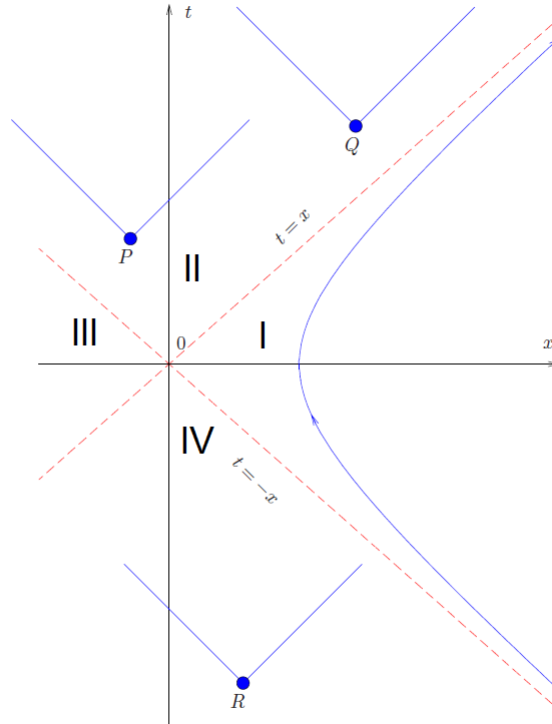


Figure 2: Observador a aceleración propia constante en el espacio de Minkowski [11]

Esto implica que un observador acelerado no puede medir distancias mayores a  $\frac{c^2}{a}$  en la dirección opuesta al movimiento, en particular, no es capaz de medir la distancia de los eventos  $P$  y  $Q$ . Además, el observador acelerado no puede recibir ninguna señal de estos eventos por lo que no es capaz de sincronizar su reloj con el de un observador en esos eventos. Esto hace que los sucesos de II y III sean desconexos con los de I y no pueda haber una

#### 4.4 Sistemas de referencia con aceleración propia constante. Coordenadas de Rindler

---

relación de causalidad entre ellos. Se dice entonces, que hay un horizonte de sucesos en  $\xi = -\frac{c^2}{a}$  y cualquier  $\tau > 0$ . Las propiedades de causalidad de los campos cuánticos definidos en un sistema acelerado se verán afectadas por la existencia de estos horizontes. Por otro lado, las señales del evento  $R$ , y en general las de los eventos de la zona IV, sí podrían ser recibidas y el observador acelerado las interpretaría como eventos que provienen de un tiempo propio  $\tau = -\infty$  y de un punto  $\xi = -\frac{c^2}{a}$ .

Las ecuaciones (4.23) que describen el movimiento de un sistema a aceleración constante se pueden utilizar para expresar la métrica del espacio de Minkowski en términos de las variables  $(\xi, \tau)$ , conocidas como coordenadas de Rindler. Calculando los diferenciales de  $t$  y  $x$  en función de las nuevas coordenadas

$$dt = \frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{c} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) d\xi + \left(\frac{c^2 + a\xi}{ac}\right) \frac{a}{c} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) d\tau$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau = \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) d\xi + \left(\frac{c^2 + a\xi}{a}\right) \frac{a}{c} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) d\tau,$$

la métrica resulta ser

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = \left(c + \frac{a\xi}{c}\right)^2 d\tau^2 - d\xi^2 \quad (4.24)$$

Para facilitar posteriores cálculos en las coordenadas de Rindler, nos interesa definir una métrica que sea conforme a la de Minkowski, de esta manera las soluciones de los campos tendrán la misma forma funcional. Para ello, realizaremos el siguiente cambio de variable

$$d\xi = \left(c + \frac{a\xi}{c}\right) d\zeta \Rightarrow \zeta = \frac{c}{a} \ln\left(c + \frac{a\xi}{c}\right), \quad \zeta \in (-\infty, \infty) \quad (4.25)$$

La métrica en las nuevas coordenadas  $(\zeta, \tau)$

$$ds^2 = \left(c + \frac{a\xi}{c}\right)^2 (d\tau^2 - d\zeta^2) = e^{\frac{2a\zeta}{c}} (d\tau^2 - d\zeta^2) \quad (4.26)$$

es claramente conforme a la métrica de Minkowski

$$g_R = e^{\frac{2a\zeta}{c}} g_M \quad (4.27)$$



#### 4.4 Sistemas de referencia con aceleración propia constante. Coordenadas de Rindler

---

y la relación entre las coordenadas de un observador inercial y las coordenadas conformes resulta

$$\begin{aligned} x(\zeta, \tau) &= \frac{c^2}{a} e^{\frac{2a\zeta}{c}} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right), \quad x \in [0, \infty) \\ t(\zeta, \tau) &= \frac{c}{a} e^{\frac{2a\zeta}{c}} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right), \quad t \in (-\infty, \infty) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Una vez definidas las coordenadas  $(\zeta, \tau)$  y su correspondiente métrica conforme a la de Minkowski, en  $(1 + 1)$  dimensiones, la acción de un campo escalar complejo sin masa toma la forma

$$S[\phi] = \int \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^\dagger \sqrt{|g|} d^2 r \quad (4.29)$$

En el caso de la la métrica de Minkowski

$$S[\phi] = \int [\partial_0 \phi \partial_0 \phi^\dagger - \partial_1 \phi \partial_1 \phi^\dagger] dx_0 dx_1, \quad (4.30)$$

y en la métrica de Rindler conforme

$$S[\phi] = \int [\partial_\tau \phi \partial_\tau \phi^\dagger - \partial_\zeta \phi \partial_\zeta \phi^\dagger] d\zeta d\tau. \quad (4.31)$$

La acción del campo en cada sistema de referencia tiene la misma forma. Siguiendo el procedimiento descrito en la sección de Teoría Cuántica de Campos e imponiendo las reglas canónicas de conmutación (3.17), se obtienen las expresiones de los campos expresadas en función de las coordenadas de cada sistema de referencia

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} \left( a_k e^{i(kx - \omega_k t)} + b_k^\dagger e^{-i(kx - \omega_k t)} \right) \\ \phi(\zeta, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} \left( c_k e^{i(k\zeta - \omega_k \tau)} + d_k^\dagger e^{-i(k\zeta - \omega_k \tau)} \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

con  $\omega_k = |k|$ .

Al expresar el campo en cada sistema de referencia como combinación lineal de los modos de vibración en función de las coordenadas del sistema, no podemos afirmar que, en general, los operadores del sistema inercial  $a_k$  y  $b_k^\dagger$  sean los mismos que los del sistema acelerado  $c_k$  y  $d_k^\dagger$ . En el próximo apartado describiremos como establecer una relación entre los operadores de cada sistema de referencia.

## 4.5 Transformaciones de Bogoliubov

---

Debido a que el campo escalar es el mismo en ambos sistemas de referencia y está expresado en términos de distintos operadores en cada uno de ellos, podemos pensar que los estados que se observan en cada sistema de referencia no coinciden. En particular, los estados de vacío  $|0_R\rangle$  y  $|0_M\rangle$ , que son los estados de mínima energía para el observador acelerado y el observador inercial respectivamente, son estados distintos del campo. Cabe preguntarse pues, qué ve cada observador en un sistema de referencia que no sea el propio.

### 4.5 Transformaciones de Bogoliubov

Para establecer una relación entre los operadores creación y aniquilación del campo Klein Gordon de los dos sistemas de referencia podemos hacer uso del producto interno

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int dr \phi_1^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_2, \quad (4.33)$$

donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son dos campos complejos genéricos e independientes.

Sabemos que los campos de ambos sistemas, representados en sus correspondientes coordenadas, son iguales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k u_k + b_k^\dagger u_k^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\Omega_k}} (c_k U_k + d_k^\dagger U_k^*). \quad (4.34)$$

Realizando el producto interno a ambos lados con un modo de vibración  $U_K$  del sistema acelerado obtenemos

$$c_K = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( \langle U_K, u_k \rangle a_k + \langle U_K, u_k^* \rangle b_k^\dagger \right). \quad (4.35)$$

Los coeficientes que multiplican a los operadores del campo en el sistema de Minkowski se conocen como coeficientes de Bogoliubov

$$\alpha_{kK} = \langle U_K, u_k \rangle, \quad \beta_{kK} = \langle U_K, u_k^* \rangle. \quad (4.36)$$

Sabiendo que los operadores del campo satisfacen las reglas de conmutación

$$[c_K, c_{K'}^\dagger] = \delta(K - K'), \quad [c_K, c_{K'}] = 0$$

## 4.5 Transformaciones de Bogoliubov

---

los coeficientes de Bogoliubov cumplen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk (\alpha_{kK} \alpha_{kK'}^* - \beta_{kK} \beta_{kK'}^*) &= \delta(K - K') \\ \int_{-\infty}^{\infty} dk (\alpha_{kK} \beta_{kK'} - \alpha_{kK'} \beta_{kK}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Las transformaciones de Bogoliubov permiten relacionar los operadores de un mismo campo definido en distintos sistemas de referencia. En este trabajo, no se hará un uso explícito del producto interno para el cálculo de los coeficientes de Bogoliubov sino a través de una transformada de Fourier debido a la conformidad entre las métricas del sistema inercial y el sistema acelerado. Este procedimiento no es tan general como el presentado en este apartado, sin embargo facilita considerablemente los cálculos.



---

## 5 Efecto Unruh

En este apartado vamos a establecer la relación existente entre los operadores creación y aniquilación de un sistema de referencia inercial y otro con aceleración propia constante para un campo escalar complejo sin masa. Finalmente, estudiaremos la relación entre los estados de vacío de ambos sistemas de referencia. Para facilitar los cálculos, fijaremos  $\hbar = c = 1$ .

Partiendo de las ecuaciones de los campos (4.32) de la sección anterior, realizaremos los siguientes cambios de coordenadas.

$$u = t - x, v = t + x; \tilde{u} = \tau - \zeta, \tilde{v} = \tau + \zeta \quad (5.1)$$

La relación entre las nuevas variables es

$$u = -\frac{1}{a}e^{-a\tilde{u}}, v = \frac{1}{a}e^{-a\tilde{v}} \quad (5.2)$$

y la nueva métrica, siendo aún conforme entre ambos sistemas de referencia, resulta

$$ds^2 = dudv = e^{a(\tilde{u}-\tilde{v})} d\tilde{u}d\tilde{v} \quad (5.3)$$

lo cual implica que los campos satisfacen las siguientes relaciones en función de las coordenadas en los sistemas inerciales y acelerados, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(u, v)}{\partial u \partial v} &\Rightarrow \phi(u, v) = A(u) + B(v) \\ \frac{\partial^2 \phi(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial \tilde{u} \partial \tilde{v}} &\Rightarrow \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = P(\tilde{u}) + Q(\tilde{v}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para introducir las nuevas coordenadas en las expresiones de los campos, separamos la contribución de los positivos y negativos respecto al sentido positivo del eje  $x$ . En particular, corresponde a separar los modos de momento paralelo y antiparalelo a la aceleración,

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left( a_k e^{i(kx-kt)} + b_k^\dagger e^{-i(kx-kt)} \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{dk}{\sqrt{-2k}} \left( a_k e^{i(kx+kt)} + b_k^\dagger e^{-i(kx+kt)} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

---

Invirtiendo la segunda integral, cambiando a la variable  $|k| = \omega$  e introduciendo las nuevas coordenadas, se obtiene

$$\phi(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} \left( a_\omega e^{-i\omega u} + b_\omega^\dagger e^{i\omega u} + a_\omega e^{-i\omega v} + b_\omega^\dagger e^{i\omega v} \right) \quad (5.6)$$

Procediendo de forma similar en el caso del sistema acelerado, y considerando  $\Omega$  como la frecuencia de los modos de vibración en el sistema acelerado, se obtiene

$$\phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\Omega}} \left( c_\Omega e^{-i\Omega \tilde{u}} + d_\Omega^\dagger e^{i\Omega \tilde{u}} + c_\Omega e^{-i\Omega \tilde{v}} + d_\Omega^\dagger e^{i\Omega \tilde{v}} \right) \quad (5.7)$$

Mediante estos cambios de coordenadas hemos conseguido expresar los modos con momento  $k$  positivo en función de  $u$  y  $\tilde{u}$  y los modos de momento  $k$  negativo en función de  $v$  y  $\tilde{v}$ . Además, la relación entre las nuevas coordenadas de ambos sistemas (5.2) implica

$$\phi(u, v) = \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \Rightarrow A(u) = P(\tilde{u}), \quad B(v) = Q(\tilde{v}), \quad (5.8)$$

es decir, que los modos de momento positivo y negativo de ambos sistemas no estén mezclados.

Centrándonos en el caso de los modos de momento positivo,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} \left( a_\omega e^{-i\omega u} + b_\omega^\dagger e^{i\omega u} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\Omega}} \left( c_\Omega e^{-i\Omega \tilde{u}} + d_\Omega^\dagger e^{i\Omega \tilde{u}} \right)$$

realizaremos una transformada de Fourier en  $\pm\Omega$ . Según el signo de la transformada, seleccionaremos uno de los dos operadores del sistema acelerado, anulando el modo de vibración asociado, y estudiaremos su dependencia con los operadores del sistema inercial. Al haber partido de métricas conformes podemos seguir este procedimiento.

En el caso de  $P(\tilde{u})$  se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\tilde{u} e^{\pm i\Omega \tilde{u}} \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{2\Omega'}} \left( c_{\Omega'} e^{-i\Omega' \tilde{u}} + d_{\Omega'}^\dagger e^{i\Omega' \tilde{u}} \right) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{2\Omega'}} \int_{-\infty}^\infty d\tilde{u} \left( c_{\Omega'} e^{i(\pm\Omega - \Omega')\tilde{u}} + d_{\Omega'}^\dagger e^{i(\pm\Omega + \Omega')\tilde{u}} \right) = \\ & = \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{2\Omega'}} \left( c_{\Omega'} \delta(\pm\Omega - \Omega') + d_{\Omega'}^\dagger \delta(\pm\Omega + \Omega') \right). \end{aligned}$$

---

Según el signo de la transformada obtenemos los siguientes resultados

$$\begin{aligned} Si + \Omega &\Rightarrow \mathcal{F}(P(\tilde{u})) = \frac{c_\Omega}{\sqrt{2\Omega}}, \\ Si - \Omega &\Rightarrow \mathcal{F}(P(\tilde{u})) = \frac{d_\Omega^\dagger}{\sqrt{2\Omega}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

En el caso de  $A(u)$  tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{u} e^{\pm i\Omega\tilde{u}} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} (a_\omega e^{-i\omega u} + b_\omega^\dagger e^{i\omega u}) = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{u} [a_\omega e^{\pm i\Omega\tilde{u} - i\omega u} + b_\omega^\dagger e^{\pm i\Omega\tilde{u} + i\omega u}] = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} [a_\omega F(\omega, \pm\Omega) + b_\omega^\dagger F(-\omega, \pm\Omega)], \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde hemos introducido la función auxiliar

$$F(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{u} e^{i\Omega\tilde{u} - i\omega u}, \quad (5.11)$$

que cumple la propiedad

$$F^*(\omega, \Omega) = F(-\omega, -\Omega). \quad (5.12)$$

En el caso de  $+\Omega$ , tenemos

$$c_\Omega = \int_0^{\infty} d\omega [\alpha_{\omega\Omega} a_\omega + \beta_{\omega\Omega} b_\omega^\dagger], \quad (5.13)$$

y en el caso de  $-\Omega$

$$d_\Omega^\dagger = \int_0^{\infty} d\omega [\beta_{\omega\Omega}^* a_\omega + \alpha_{\omega\Omega}^* b_\omega^\dagger]. \quad (5.14)$$

Por lo tanto, los coeficientes de Bogoliubov son

$$\alpha_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} F(\omega, \Omega), \quad \beta_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} F(-\omega, \Omega) \quad (5.15)$$

Para hallar los coeficientes desarrollaremos la expresión de la función auxiliar  $F(\omega, \Omega)$ . Reemplazando  $u$  por  $\tilde{u}$

$$F(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{u} \exp\left(i\Omega\tilde{u} + i\frac{\omega}{\alpha} e^{-\alpha\tilde{u}}\right) \quad (5.16)$$

## 5.1 Número de partículas

---

Mediante el cambio de variable  $y = e^{-a\tilde{u}}$  se llega a

$$F(\omega, \Omega) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty dy y^{-\frac{i\Omega}{a}-1} e^{\frac{i\omega}{a}y}. \quad (5.17)$$

Esta integral se puede expresar mediante la función Gamma de Euler

$$\int_0^\infty x^{s-1} e^{-bx} dx = e^{-s \ln b} \Gamma(s), \quad (5.18)$$

con  $b = -\frac{i\omega}{a}$  y  $s = -\frac{i\Omega}{a}$ . En consecuencia

$$F(\omega, \Omega) = \frac{1}{2\pi a} \exp\left(\frac{i\Omega}{a} \ln\left|\frac{\omega}{a}\right| + \frac{\pi\Omega}{2a} \text{sign}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right) \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{a}\right), \quad (5.19)$$

y además se cumple la relación

$$F(\omega, \Omega) = F(-\omega, \Omega) e^{\frac{\pi\Omega}{a}}. \quad (5.20)$$

Resulta útil para posteriores cálculos hallar las expresiones de los módulos de los coeficientes de Bogoliubov

$$|\alpha_{\omega\Omega}|^2 = \frac{1}{2\pi\omega a} \frac{e^{\frac{2\pi\Omega}{a}}}{e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1}, \quad |\beta_{\omega\Omega}|^2 = \frac{1}{2\pi\omega a} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1}. \quad (5.21)$$

## 5.1 Número de partículas

### Vacío de Minkowski

Una vez conocida la relación entre los operadores de ambos sistemas de referencia, vamos a calcular el número de partículas que ve un observador acelerado en un estado de vacío  $|0_M\rangle$  del sistema inercial.

$$\begin{aligned} \langle N_\Omega^p \rangle &= \langle 0_M | c_\Omega^\dagger c_\Omega | 0_M \rangle \\ &= \langle 0_M | \int_0^\infty d\omega [\alpha_{\omega\Omega}^* a_\omega^\dagger + \beta_{\omega\Omega}^* b_\omega] \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega'\Omega} a_{\omega'} + \beta_{\omega'\Omega} b_{\omega'}^\dagger] | 0_M \rangle \\ &= \int_0^\infty d\omega \beta_{\omega\Omega} \beta_{\omega'\Omega}^* \langle 0_M | b_\omega b_{\omega'}^\dagger | 0_M \rangle = \int_0^\infty d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$



## 5.1 Número de partículas

---

Haciendo uso de las propiedades (4.37) de la transformación de Bogoliubov

$$\begin{aligned}\delta(\Omega - \Omega') &= \int_0^\infty d\omega \frac{\sqrt{\Omega\Omega'}}{\omega} [F(\omega, \Omega)F^*(\omega, \Omega') - F(-\omega, \Omega)F^*(-\omega, \Omega')] = \\ &= \left(e^{\frac{\pi\Omega + \pi\Omega'}{a}} - 1\right) \int_0^\infty d\omega \frac{\sqrt{\Omega\Omega'}}{\omega} F(-\omega, \Omega)F^*(-\omega, \Omega')\end{aligned}\quad (5.23)$$

esto implica que

$$\int_0^\infty d\omega \beta_{\omega\Omega} \beta_{\omega\Omega'}^* = \left(e^{\frac{\pi\Omega + \pi\Omega'}{a}} - 1\right)^{-1} \delta(\Omega - \Omega') \quad (5.24)$$

Tomando el límite  $\Omega \rightarrow \Omega'$  se obtiene

$$\langle N_\Omega \rangle = \int_0^\infty d\omega \frac{\Omega}{\omega} |F(-\omega, \Omega)|^2 = \left(e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1\right)^{-1} \delta(0) \quad (5.25)$$

Obtenemos un factor  $\delta(0)$ , denominado volumen de cuantización, debido a que hemos descrito el campo en todo el espacio. Para evitar este factor hablaremos de densidad de partículas

$$n_\Omega^p = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1} \quad (5.26)$$

El resultado al que llegamos es que el observador acelerado detecta un baño de partículas que sigue la distribución de Bose. Para los modos de energía con momento antiparalelo a la aceleración se obtiene la misma distribución. En consecuencia, la distribución que siguen las partículas es independiente de la dirección del momento.

En el caso de las antipartículas, se procede de manera totalmente análoga

$$\begin{aligned}\langle N_\Omega^a \rangle &= \langle 0_M | d_\Omega^\dagger d_\Omega | 0_M \rangle \\ &= \langle 0_M | \int_0^\infty d\omega [\beta_{\omega\Omega}^* a_\omega + \alpha_{\omega\Omega}^* b_\omega^\dagger] \int_0^\infty d\omega' [\beta_{\omega'\Omega} a_{\omega'}^\dagger + \alpha_{\omega'\Omega} b_{\omega'}] | 0_M \rangle \\ &= \int_0^\infty d\omega \beta_{\omega\Omega} \beta_{\omega\Omega}^* \langle 0_M | a_\omega a_{\omega'}^\dagger | 0_M \rangle = \int_0^\infty d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2,\end{aligned}\quad (5.27)$$

llegando al mismo resultado

$$n_\Omega^{\bar{p}} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1} \quad (5.28)$$

## 5.1 Número de partículas

---

Un aspecto notable sobre las distribuciones observadas desde el sistema acelerado es que la noción de partícula y antipartícula está invertida respecto del sistema inercial. Las partículas del sistema inercial son interpretadas como antipartículas por el observador acelerado y viceversa.

$$\begin{aligned}n_{\Omega}^p &\propto \langle 0_M | b_{\omega} b_{\omega'}^{\dagger} | 0_M \rangle \\n_{\Omega}^{\bar{p}} &\propto \langle 0_M | a_{\omega} a_{\omega'}^{\dagger} | 0_M \rangle\end{aligned}\tag{5.29}$$

Por analogía a esta distribución

$$n_E = \frac{1}{e^{\frac{E}{T}} - 1},\tag{5.30}$$

se puede definir la temperatura del baño de partículas como

$$T = \frac{a}{2\pi} \equiv \frac{\hbar a}{2\pi c k_B}.\tag{5.31}$$

Resumiendo, un observador a aceleración propia constante detecta un baño de partículas y antipartículas cuya temperatura es proporcional a dicha aceleración propia e independiente de la dirección del momento de los modos de vibración del campo. Este fenómeno se conoce como efecto Unruh. Además, en el caso particular de un campo escalar complejo sin masa la noción de partícula y antipartícula del observador acelerado es inversa respecto al observador inercial en la observación de un baño térmico de partículas.

### Espacio de Minkowski con una partícula

En el caso de que desde el sistema de referencia inercial, exista una partícula  $\gamma_M^+$  de carga positiva  $q_+$  de frecuencia  $\omega_M$ , el número de partículas detectadas por un observador acelerado resulta

## 5.2 Relación entre los estados de vacío

---

$$\begin{aligned}
\langle N_\Omega^p \rangle &= \langle \gamma_M^+ | c_\Omega^\dagger c_\Omega | \gamma_M^+ \rangle \\
&= \langle \gamma_M^+ | \int_0^\infty d\omega [\alpha_{\omega\Omega}^* a_\omega^\dagger + \beta_{\omega\Omega}^* b_\omega] \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega'\Omega} a_{\omega'} + \beta_{\omega'\Omega} b_{\omega'}^\dagger] | \gamma_M^+ \rangle \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \alpha_{\omega\Omega} \alpha_{\omega'\Omega}^* \langle 0_M | a_{\omega_M} a_\omega^\dagger a_{\omega'} a_{\omega_M}^\dagger | 0_M \rangle + \\
&+ \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \beta_{\omega\Omega} \beta_{\omega'\Omega}^* \langle 0_M | a_{\omega_M} b_\omega b_{\omega'}^\dagger a_{\omega_M}^\dagger | 0_M \rangle \\
&= |\alpha_{\omega_M\Omega}|^2 + n_\Omega^p \delta^2(0),
\end{aligned} \tag{5.32}$$

y en el caso de las antipartículas

$$\begin{aligned}
\langle N_\Omega^a \rangle &= \langle \gamma_M^+ | d_\Omega^\dagger d_\Omega | \gamma_M^+ \rangle \\
&= \langle \gamma_M^+ | \int_0^\infty d\omega [\beta_{\omega\Omega}^* a_\omega + \alpha_{\omega\Omega}^* b_\omega^\dagger] \int_0^\infty d\omega' [\beta_{\omega'\Omega} a_{\omega'}^\dagger + \alpha_{\omega'\Omega} b_{\omega'}] | \gamma_M^+ \rangle \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \beta_{\omega\Omega} \beta_{\omega'\Omega}^* \langle 0_M | a_{\omega_M} a_\omega a_{\omega'}^\dagger a_{\omega_M}^\dagger | 0_M \rangle = \\
&= |\beta_{\omega_M\Omega}|^2 + n_\Omega^a \delta^2(0).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

El número total de partículas de energía  $\Omega$  es la suma de la población de partículas y antipartículas térmicas inducidas a frecuencia  $\Omega$ , más la partícula existente en el vacío,

$$\langle N_\Omega \rangle = \frac{2n_\Omega + 1}{2\pi\omega_M a} + n_\Omega^p \delta^2(0) + n_\Omega^a \delta^2(0). \tag{5.34}$$

Si asociamos la carga  $q_+$  a las partículas y la  $q_-$  a las antipartículas, tal que  $q_+ = -q_-$ , resulta que la carga vista desde un observador acelerado es

$$\langle Q \rangle = \frac{q_+ n_\Omega + q_- n_\Omega + q_+}{2\pi\omega_M a} + q_+ n_\Omega^p \delta^2(0) + q_- n_\Omega^a \delta^2(0) = \frac{q_+}{2\pi\omega_M a}, \tag{5.35}$$

siendo  $\frac{1}{2\pi\omega_M a}$  un factor de normalización proveniente de los coeficientes de Bogoliubov. En definitiva, un observador acelerado vería la misma carga que el observador de Minkowski.

## 5.2 Relación entre los estados de vacío

La relación entre los estados de vacío del sistema inercial y el acelerado podemos deducirla de la siguiente manera. La transformación inversa de

## 5.2 Relación entre los estados de vacío

---

Bogoliubov para operadores del observador acelerado al inercial para un sólo modo de vibración es

$$\begin{pmatrix} a_\omega \\ b_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + n_\Omega)^{1/2} & -n_\Omega^{1/2} \\ -n_\Omega^{1/2} & (1 + n_\Omega)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\Omega \\ d_\Omega^\dagger \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Los operadores destrucción, del espacio de Minkoski satisfacen las relaciones

$$a_\omega |0_M\rangle = 0, \quad b_\omega |0_M\rangle = 0, \quad (5.37)$$

sustituyendo los operadores del sistema inercial por los del sistema acelerado obtenemos

$$\begin{aligned} c_\Omega - e^{-\frac{\pi\Omega}{a}} d_\Omega^\dagger |0_M\rangle &= 0 \\ d_\Omega - e^{-\frac{\pi\Omega}{a}} c_\Omega^\dagger |0_M\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Como sabemos que un observador acelerado detecta un baño térmico de partículas y antipartículas supondremos que para el el vacío del sistema inercial  $|0_M\rangle$  y el del sistema acelerado  $|0_R\rangle$  están relacionados entre sí, por una función que depende de los operadores creación del sistema acelerado

$$|0_M\rangle = V(c_\Omega^\dagger, d_\Omega^\dagger) |0_R\rangle. \quad (5.39)$$

Al estar trabajando con densidad de partículas los operadores satisfacen las reglas de conmutación

$$[c_\Omega, c_\Omega^\dagger] = [d_\Omega, d_\Omega^\dagger] = 1, \quad (5.40)$$

y en consecuencia podemos afirmar que

$$c_\Omega = \frac{\partial}{\partial c_\Omega^\dagger}, \quad d_\Omega = \frac{\partial}{\partial d_\Omega^\dagger}. \quad (5.41)$$

Por lo tanto, las ecuaciones que debe satisfacer la función  $V$  son

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial c_\Omega^\dagger} &= e^{-\frac{\pi\Omega}{a}} d_\Omega^\dagger V \\ \frac{\partial V}{\partial d_\Omega^\dagger} &= e^{-\frac{\pi\Omega}{a}} c_\Omega^\dagger V. \end{aligned} \quad (5.42)$$

## 5.2 Relación entre los estados de vacío

---

Una solución que satisface ambas ecuaciones es

$$V \propto e^{\left(e^{-\frac{\pi\Omega}{a}} c_{\Omega}^{\dagger} d_{\Omega}^{\dagger}\right)}. \quad (5.43)$$

Desarrollando  $V$  en serie, obtenemos un estado de  $m$  partículas y antipartículas en el sistema acelerado

$$e^{\left(e^{-\frac{\pi\Omega}{a}} c_{\Omega}^{\dagger} d_{\Omega}^{\dagger}\right)} |0_R\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m\pi\Omega}{a}}}{m!} c_{\Omega}^{\dagger m} d_{\Omega}^{\dagger m} |0_R\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m\pi\Omega}{a}} |m, m\rangle. \quad (5.44)$$

Es sabido que el estado de Minkowski está normalizado  $\langle 0_M | 0_M \rangle = 1$ . Esto implica

$$\langle 0_R | e^{\left(e^{-\frac{\pi\Omega}{a}} c_{\Omega} d_{\Omega}\right)} e^{\left(e^{-\frac{\pi\Omega}{a}} c_{\Omega}^{\dagger} d_{\Omega}^{\dagger}\right)} |0_R\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2m\pi\Omega}{a}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi\Omega}{a}}} \quad (5.45)$$

y en consecuencia, la relación entre los estados de vacío de ambos sistemas de referencia resulta

$$|0_M\rangle = \left(1 - e^{-\frac{2\pi\Omega}{a}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\left(e^{-\frac{\pi\Omega}{a}} c_{\Omega}^{\dagger} d_{\Omega}^{\dagger}\right)} |0_R\rangle \quad (5.46)$$



---

## 6 Desexcitación de un átomo acelerado

Basándonos en los resultados obtenidos hasta ahora, proponemos un cálculo en  $(1 + 1)$  que trata la interacción de un átomo acelerado y un campo escalar complejo con el objetivo de estudiar las propiedades de direccionalidad y anisotropía de la radiación detectada por un observador inercial. Las partículas del campo escalar complejo simulan fotones  $\gamma^+$  y antifotones  $\gamma^-$  con carga. Esta situación supone un contexto análogo a la detección de radiación proveniente de un agujero negro por un observador inercial. Trabajos precedentes han abordado cálculos similares de la excitación de un átomo por un campo escalar real a aceleración constante o en caída libre en un agujero negro [1, 23].

Supongamos que en un sistema con aceleración propia constante  $K'$  se encuentra un átomo que modelamos con un sistema de dos niveles energéticos  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$

$$H_{at} = \hbar\omega_A |A\rangle \langle A| + \hbar\omega_B |B\rangle \langle B|, \quad \Delta\omega = \omega_B - \omega_A > 0. \quad (6.1)$$

Consideraremos que el átomo está totalmente localizado, no está asociado a una función de onda, y que su centro de masas, en el sistema acelerado, se encuentra estático en la posición  $\xi = 0$ .

En el sistema de referencia inercial existe un campo escalar complejo, definido en la imagen de Schrödinger

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} \left( a_k e^{ikx} + b_k^\dagger e^{-ikx} \right) \quad (6.2)$$

cuyo hamiltoniano es

$$H_{KG} = \sum_k \hbar\omega_k \left( a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k \right). \quad (6.3)$$

La interacción entre el campo escalar complejo y el átomo perturba el sistema de manera que el nuevo hamiltoniano resulta

$$H(\tau) = H_0 + W(\tau) = H_{at} + H_{KG} + W e^{\epsilon\tau} \quad (6.4)$$

siendo  $W$  la interacción entre el campo escalar complejo y el átomo dada por

$$W = [\phi(x(\tau)) |A\rangle \langle B| \phi^\dagger(x(\tau)) + \phi^\dagger(x(\tau)) |B\rangle \langle A| \phi(x(\tau))], \quad (6.5)$$

donde  $d$  es el momento pseudo-momento dipolar de transición del átomo y  $x(\tau)$  la posición del átomo visto desde el sistema inercial. Nótese que el

campo ha sido transformado desde el sistema inercial al sistema acelerado mediante el uso de las coordenadas de Rindler para  $\xi = 0$ ,

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{1}{a} \cosh(a\tau) \\ t(\tau) &= \frac{1}{a} \sinh(a\tau), \end{aligned} \quad (6.6)$$

por lo que en última instancia tenemos que los campos, y por ende la perturbación, son función de  $\tau$ .

El factor atenuante  $e^{\epsilon\tau}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0^+$  implica que la interacción es adiabática, es decir, que la interacción entre el átomo y el campo aumenta lentamente. Físicamente la aproximación adiabática implica que el tiempo necesario para la excitación del átomo es mucho menor que  $\Delta\omega^{-1}$  [2]. Supongamos por tanto que el átomo está excitado en el estado  $B$  a tiempo  $\tau \rightarrow -\infty$ , y eventualmente se desexcita al estado  $A$  emitiendo dos fotones  $\gamma^+$  y  $\gamma^-$  en el espacio de Minkowski. Este enfoque del problema representado por los siguientes diagramas está basado en [2, 3, 4].

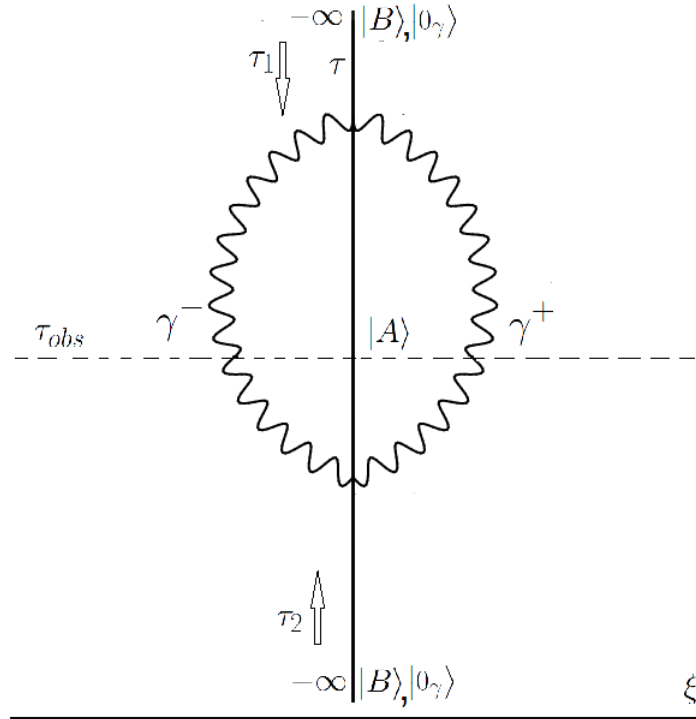


Figure 3: Desexcitación del átomo desde el Sistema Acelerado



En el eje vertical del diagrama se representa la coordenada temporal  $\tau$  yendo desde  $-\infty$  en los extremos hasta converger en el instante de tiempo de observación  $\tau_{obs}$ . El eje horizontal, situado en  $\tau_{obs}$ , representa la coordenada  $\xi$ . El diagrama describe la evolución temporal y espacial de la desexcitación del átomo, observado desde el sistema acelerado, que parte de un estado  $|B\rangle$  al estado fundamental  $|A\rangle$  con dos fotones de vacío en el espacio de Minkowski.

Por otro lado, la interacción entre el campo y el átomo en el sistema acelerado se visualizaría desde un sistema inercial

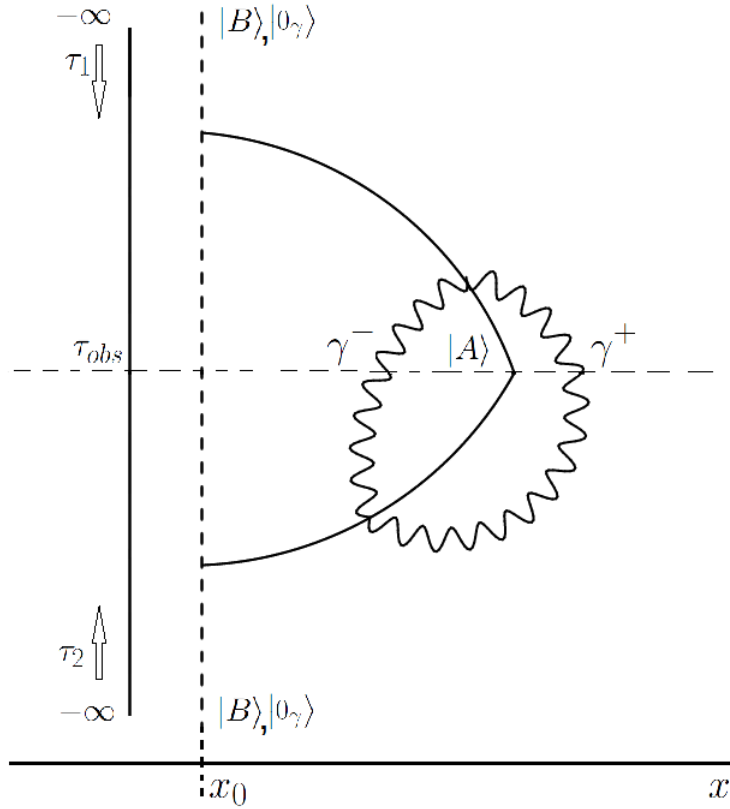


Figure 4: Desexcitación desde Sistema Inercial

El diagrama muestra la desexcitación del átomo siguiendo la trayectoria del sistema acelerado, partiendo de  $x_0 = \frac{1}{a}$ .

Al poder distinguir sin ambigüedad las partículas y antipartículas del campo, debido a que son partículas cargadas, estos procesos resultan ser análogos al estudio del decaimiento de leptones y variones acelerados [10, 21].

---

El caso de la figura 3 es análogo al del beta-decay de un neutrón en reposo, donde el fotón  $\gamma^+$  juega el papel de un protón, el  $\gamma^-$  el de un electrón, y el estado  $A$  del átomo el de un antineutrino [10].

Ahora estudiaremos qué campo escalar verá el observador acelerado y qué efecto en los fotones directará el observador inercial. Para ello, debemos estudiar la probabilidad de transición del estado excitado  $|B\rangle$  y  $|0_M\rangle$  al desexcitado  $|A\rangle$  y  $|\gamma^+, \gamma^-\rangle$ .

$$P_{B \rightarrow A} = |\langle A, \gamma^+, \gamma^- | U(\tau_{obs}) | B, 0_\gamma \rangle|^2, \quad (6.7)$$

Debido a que el átomo acelerado interactúa con el campo escalar, existe cierta probabilidad de que el átomo vuelva a excitarse al estado  $|B\rangle$ . La probabilidad de desexcitación  $P_{B \rightarrow A}$  depende de la probabilidad de excitación  $P_{A \rightarrow B}$  y del tiempo. Esta dependencia se puede expresar en términos de sus respectivas tasas de probabilidad  $\Gamma_{B \rightarrow A}$  y  $\Gamma_{A \rightarrow B}$

$$\begin{aligned} P_{B \rightarrow A}(\tau_{obs}) &= \frac{\Gamma_{B \rightarrow A} (1 - e^{-\tau_{obs}(\Gamma_{B \rightarrow A} + \Gamma_{A \rightarrow B})})}{\Gamma_{B \rightarrow A} + \Gamma_{A \rightarrow B}} \\ P_{A \rightarrow B}(\tau_{obs}) &= \frac{\Gamma_{A \rightarrow B} + \Gamma_{B \rightarrow A} e^{-\tau_{obs}(\Gamma_{B \rightarrow A} + \Gamma_{A \rightarrow B})}}{\Gamma_{B \rightarrow A} + \Gamma_{A \rightarrow B}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

En este caso, al realizar un cálculo perturbativo a primer orden, consideramos que  $\tau_{obs} \ll (\Gamma_{B \rightarrow A} + \Gamma_{A \rightarrow B})^{-1}$ , por la derivada de la probabilidad de desexcitación coincide con la tasa de desexcitación

$$\frac{dP_{B \rightarrow A}}{d\tau_{obs}} \simeq \Gamma_{B \rightarrow A} \quad (6.9)$$

Considerando el hamiltoniano del sistema, el operador de evolución temporal libre es

$$U_0(\tau) = U_{at}(\tau) U_{KG}(t(\tau)) \quad (6.10)$$

y el operador evolución del sistema perturbado  $U(\tau)$  con aproximación a primer orden es

$$U(\tau_{obs}) = U_0(\tau_{obs}) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau U_0(\tau_{obs} - \tau) W(\tau) U_0(\tau). \quad (6.11)$$

Introduciendo el operador evolución temporal obtenemos que

$$P_{B \rightarrow A} = \left| -\frac{i}{\hbar} \langle A, \gamma^+, \gamma^- | \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau U_0(\tau_{obs} - \tau) W(\tau) U_0(\tau) | B, 0_\gamma \rangle \right|^2. \quad (6.12)$$

---

Desarrollando la integral se obtiene

$$\begin{aligned}
& -i \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau \langle A, \gamma_{k_1}^+, \gamma_{k_2}^- | U_0(\tau_{obs} - \tau) W(\tau) U_0(\tau) | B, 0_\gamma \rangle = \\
& = -id \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau \langle \gamma_{k_1}^+, \gamma_{k_2}^- | e^{-i\omega_A(\tau_{obs} - \tau)} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t(\tau_{obs}) - t(\tau))} \\
& \times \phi(x(\tau)) \phi^\dagger(x(\tau)) e^{-i\omega_B \tau} | 0_\gamma \rangle
\end{aligned} \tag{6.13}$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son los momentos genéricos del fotón  $\gamma^+$  y antifotón  $\gamma^-$  respectivamente. Sacando fuera del braket las exponenciales y aplicando los operadores de campo se obtiene

$$\langle 0_\gamma | a_{k_1} b_{k_2} \phi(x(\tau)) \phi^\dagger(x(\tau)) | 0_\gamma \rangle = \frac{e^{-i(k_1 + k_2)x(\tau)}}{4\pi \sqrt{\omega_{k_1} \omega_{k_2}}} \tag{6.14}$$

siendo el resultado final

$$-\frac{id}{4\pi \sqrt{\omega_{k_1} \omega_{k_2}}} e^{-i\omega_A \tau_{obs}} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t(\tau_{obs})} \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau e^{(\epsilon - i\Delta\omega)\tau} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t(\tau)} e^{-i(k_1 + k_2)x(\tau)}. \tag{6.15}$$

Usando este resultado en la expresión de la probabilidad (6.7), e introduciendo la relación de cierre

$$P_{B \rightarrow A} = \int \int dk_1 dk_2 \langle B, 0_\gamma | U^\dagger(\tau_{obs}) | A, \gamma_{k_1}^+, \gamma_{k_2}^- \rangle \langle A, \gamma_{k_1}^+, \gamma_{k_2}^- | U(\tau_{obs}) | B, 0_\gamma \rangle, \tag{6.16}$$

Se obtiene que

$$\begin{aligned}
P_{B \rightarrow A} = \frac{d^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{\omega_{k_1}} \frac{dk_2}{\omega_{k_2}} \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau e^{(\epsilon + i\Delta\omega)\tau} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t(\tau)} e^{i(k_1 + k_2)x(\tau)} \times \\
\times \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau e^{(\epsilon - i\Delta\omega)\tau} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t(\tau)} e^{-i(k_1 + k_2)x(\tau)}.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

La integración en los momentos  $k_1$  y  $k_2$ , implica un cambio de signo en  $\omega_k = |k|$ . Desdoblaremos las integrales según el signo que adopte la variable de integración y analizaremos la forma que adoptan las integrales en  $\tau$ . Además, haremos que  $\epsilon = 0$ . Aparecen cuatro integrales

- Si  $k_1, k_2 > 0$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau e^{-i\Delta\omega\tau} e^{i(k_1+k_2)(t(\tau)-x(\tau))} \quad (6.18)$$

- Si  $k_1, k_2 < 0$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau e^{-i\Delta\omega\tau} e^{-i(k_1+k_2)(t(\tau)+x(\tau))} \quad (6.19)$$

- Si  $k_1 > 0, k_2 < 0$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau e^{-i\Delta\omega\tau} e^{i[k_1(t(\tau)-x(\tau))-k_2(t(\tau)+x(\tau))]} \quad (6.20)$$

- Si  $k_1 < 0, k_2 > 0$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\tau_{obs}} d\tau e^{-i\Delta\omega\tau} e^{i[-k_1(t(\tau)+x(\tau))+k_2(t(\tau)-x(\tau))]} \quad (6.21)$$

En primer lugar, las integrales  $I_3$  y  $I_4$  son simétricas bajo el cambio de partículas y antipartículas, lo que implica que no hay una anisotropía en la emisión de éstas. Además, la contribución de ambas en la probabilidad es invariante bajo cambios de signo en  $k_1$  y  $k_2$  por lo que estas integrales no aportan información sobre la anisotropía en la direccionalidad de la emisión. Por tanto, nos centraremos en el estudio de las dos primeras integrales  $I_1$  e  $I_2$ .

Mediante el cambio de variable  $y = e^{-a\tau}$  la integral  $I_1$  toma la forma

$$I_1 = \frac{1}{a} \int_{e^{-a\tau_{obs}}}^{\infty} dy y^{i\frac{\Delta\omega}{a}-1} e^{-i\frac{k_1+k_2}{a}y} \quad (6.22)$$

Podemos descomponer la integral obtenida en

$$\int_0^{\infty} dy y^{i\frac{\Delta\omega}{a}-1} e^{-i\frac{k_1+k_2}{a}y} - \int_0^{e^{-a\tau_{obs}}} dy y^{i\frac{\Delta\omega}{a}-1} e^{-i\frac{k_1+k_2}{a}y} \quad (6.23)$$

La primera integral es semejante a la función auxiliar utilizada en la sección 5, que llamaremos  $F$

$$F(k_1, k_2, \Delta\omega) = \exp\left[i\frac{\Delta\omega}{a} \text{Ln}\left(i\frac{k_1+k_2}{a}\right)\right] \Gamma\left(i\frac{\Delta\omega}{a}\right), \quad (6.24)$$

y desarrollando la segunda integral obtenemos la expresión que llamaremos  $G$

$$G = e^{-i\Delta\omega\tau} \left( \frac{ie^{-a\tau_{obs}}(k_1 + k_2)}{a} \right)^{-i\frac{\Delta\omega}{a}} \left( \Gamma \left( i\frac{\Delta\omega}{a} \right) - \int_{\frac{ie^{-a\tau_{obs}}(k_1+k_2)}{a}}^{\infty} dy y^{\frac{i\Delta\omega}{a}-1} e^{-y} \right). \quad (6.25)$$

Para tender a una situación en la que exista el que se ponga de manifiesto el Efecto Unruh y así poder estudiar la radiación de Hawking, aproximamos en serie la integral que aparece de  $G$  para  $a\tau_{obs} \gg 1$ . De esta manera obtenemos

$$G(k_1, k_2, \Delta\omega, \tau_{obs}) \simeq -e^{-i\Delta\omega\tau_{obs}} \exp \left[ -\frac{i}{a}(k_1 + k_2)e^{-a\tau_{obs}} \right]. \quad (6.26)$$

La contribución de  $I_1 = \frac{1}{a}(F + G)$  en la expresión de la probabilidad es

$$P_{B \rightarrow A}^1 = \frac{d^2}{4\pi a^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dk_1}{\omega_{k_1}} \frac{dk_2}{\omega_{k_2}} (|F|^2 + |G|^2 - F^*G - FG^*). \quad (6.27)$$

siendo

$$|F|^2 = \left( \frac{2\pi}{\Delta\omega} \right) \frac{e^{\frac{2\pi\Delta\omega}{a}}}{e^{\frac{2\pi\Delta\omega}{a}} - 1} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} (n_{\Delta\omega} + 1), \quad |G|^2 = 1 \quad (6.28)$$

Obtenemos que el integrando de la probabilidad de transmisión es proporcional a un baño térmico. Los dos términos cruzados  $F^*G$  y  $FG^*$  tienden a 1 según tomamos la aproximación  $a\tau_{obs} \gg 1$ . Esto implica que obtendremos un integrando igual a  $|F|^2$  independiente de  $k_1$  y  $k_2$ . En este límite se llega al régimen de Unruh en el que sólo se ve una contribución térmica homogénea e isotrópica.

Los dos términos cruzados  $F^*G$  y  $FG^*$  son los únicos que dependen de  $\tau_{obs}$ , para separarlos de la contribución continua, calcularemos la tasa de decaimiento hallando la derivada,

$$\Gamma_{B \rightarrow A}^1 = \frac{d^2}{4\pi a^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dk_1}{\omega_{k_1}} \frac{dk_2}{\omega_{k_2}} \text{Im} (F^* e^{-i\theta}) ((k_1 + k_2)e^{-a\tau_{obs}} - \Delta\omega), \quad (6.29)$$

donde

$$\theta = \Delta\omega\tau_{obs} + \frac{k_1 + k_2}{a} e^{-a\tau_{obs}}. \quad (6.30)$$

En el caso de  $I_2$  obtenemos, mediante un cambio de variable  $y = e^{-a\tau_{obs}}$  y procediendo de forma similar que

$$I_2 = \frac{1}{a} \int_0^{e^{a\tau_{obs}}} dy y^{-i\frac{\Delta\omega}{a}-1} e^{-i\frac{k_1+k_2}{a}y}. \quad (6.31)$$

Realizando la misma aproximación  $a\tau_{obs} \gg 1$  obtenemos que en  $I_2$  se diferencian dos contribuciones

$$I_2 = \frac{1}{a} (F + H(\tau_{obs})), \quad (6.32)$$

siendo la función  $H$

$$H(k_1, k_2, \Delta\omega, \tau_{obs}) \simeq e^{-i\Delta\omega\tau_{obs}} \exp \left[ -i \frac{k_1 + k_2}{a} e^{a\tau_{obs}} \right]. \quad (6.33)$$

Calculando el integrando de la probabilidad obtenemos el mismo resultado que en el caso de  $I_1$

$$P_{B \rightarrow A}^2 = \frac{d^2}{4\pi a^2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{dk_1}{\omega_{k_1}} \frac{dk_2}{\omega_{k_2}} (|F|^2 + |H|^2 - F^*H - FH^*). \quad (6.34)$$

donde

$$|F|^2 = \left( \frac{2\pi}{\Delta\omega} \right) \frac{e^{\frac{2\pi\Delta\omega}{a}}}{e^{\frac{2\pi\Delta\omega}{a}} - 1} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} (n_{\Delta\omega} + 1), \quad |H|^2 = 1 \quad (6.35)$$

En el límite  $a\tau_{obs} \gg 1$  obtenemos un régimen térmico isótropo e independiente de  $k_1$  y  $k_2$ , al igual que en el caso de  $I_1$ .

Sumando las contribuciones en el límite isótropo obtenemos

$$P_{B \rightarrow A}^{1,2} \propto (n_{\Delta\omega} + 1) \Gamma_0 \quad (6.36)$$

Donde el factor  $\Gamma_0$  es el la tasa de decaimiento del átomo del estado  $|B\rangle$  en un sistema inercial. El diagrama de esta desexcitación es equivalente al de la figura 3 donde  $(\xi, \tau)$  pasan a ser  $(x, t)$ . Como resultado se obtiene que la tasa  $\Gamma_0$  es

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{d^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{\omega_{k_1}} \frac{dk_2}{\omega_{k_2}} e^{(\epsilon+i\Delta\omega)t} e^{-i(\omega_{k_1}+\omega_{k_2})t} e^{i(k_1+k_2)(x-x')} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{t_{obs}} dt e^{(\epsilon-i\Delta\omega)t} e^{i(\omega_{k_1}+\omega_{k_2})t} = \frac{d^2}{2\Delta\omega} \end{aligned} \quad (6.37)$$

El valor obtenido de la probabilidad es mayor que uno porque no está normalizada. El factor de normalización es  $[(2n_{\Delta\omega} + 1) \Gamma_0]^{-1}$ .

Si comparamos este resultado con el obtenido en la sección (5.1.2), donde calculábamos el número de partículas que detectaba un observador acelerado con una partícula de vacío en el sistema inercial, obtenemos un resultado

---

consistente para el caso en el que haya una partícula y una antipartícula en el sistema inercial. En consecuencia, un observador en el sistema de referencia acelerado vería un baño térmico isótropo con una partícula y una antipartícula correspondientes a los fotones en Minkowski  $\gamma^+$  y  $\gamma^-$ .

La tasa de decaimiento  $\Gamma_{B \rightarrow A}^2$  resulta

$$\Gamma_{B \rightarrow A}^2 = \frac{d^2}{4\pi a^2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{dk_1}{\omega_{k_1}} \frac{dk_2}{\omega_{k_2}} \operatorname{Im} \left( \Gamma \left( i \frac{\Delta\omega}{a} \right) e^{-i\varphi} \right) ((k_1 + k_2)e^{a\tau_{obs}} + \Delta\omega). \quad (6.38)$$

con

$$\varphi = \Delta\tau_{obs} + \frac{k_1 + k_2}{a} e^{a\tau_{obs}} \quad (6.39)$$

Comparando las tasas de decaimiento puede observarse que los modos propagantes en la dirección de la aceleración están atenuados por  $e^{-a\tau_{obs}}$  y existe mayor propagación de modos en el sentido antiparalelo a la aceleración.

Estos resultados ponen de manifiesto tres aspectos fundamentales de la emisión de partículas desde sistemas a aceleración constante detectadas por un observador inercial:

i) Todas las direcciones son equivalentes para la emisión de partículas y antipartículas, no existiendo asimetría entre ellas.

ii) En el límite de Unruh  $a\tau_{obs} \gg 1$  se observa anisotropía en la emisión tanto de partículas como de antipartículas. En particular, la propagación en el sentido de la aceleración se ve atenuada por un factor  $e^{-a\tau_{obs}}$ . En este límite, por tanto, la emisión es preferentemente contraria al sentido de la aceleración.

iii) Puesto que en el límite de Unruh se tiene que el número de ocupación de partículas emitidas en ambos sentidos es el mismo, deducimos que el sentido de la anisotropía es el contrario en el límite opuesto,  $a\tau_{obs} \ll 1$ .

Finalmente, en el límite de Unruh, para el observador inercial los fotones emitidos aparecen *red-shifted* a la velocidad de la luz. Ello implica que la frecuencia de dichos fotones tiende a cero para dicho observador. Por lo tanto, podemos afirmar que el observador inercial no sería capaz de detectar fotones en dicho límite. Esto es una consecuencia directa de la formación de un horizonte de sucesos para el observador coacelerado. Dicho fenómeno es análogo al que se produce en el horizonte de sucesos de un agujero negro, desde el cual un observador en caída libre no puede comunicarse con el observador inercial situado lejos del agujero.





---

## 7 Conclusiones

En este trabajo se ha aplicado la formulación de la Teoría Cuántica de Campos a espacio-tiempos curvos. En particular, hemos estudiado el comportamiento de un campo escalar complejo sin masa desde un sistema de referencia uniformemente acelerado, concluyendo que estos observadores detectan un baño térmico de partículas a su alrededor, fenómeno conocido como efecto Unruh. Con ayuda de estos resultados y sabiendo que un átomo en caída libre a un agujero negro es una situación gravitacionalmente equivalente a la de un átomo acelerado uniformemente, hemos realizado un estudio de la radiación Hawking a través del análisis de la radiación de un átomo excitado a aceleración constante.

Del análisis de un átomo excitado uniformemente acelerado deducimos que existe una direccionalidad en la emisión de radiación con respecto al sentido de la aceleración del átomo. Dicha direccionalidad varía en el tiempo. Se puede apreciar que, en situaciones que tienden asintóticamente al régimen de Unruh, la emisión paralela a la aceleración está atenuada, mientras que en el sentido antiparalelo es amplificada. Sin embargo, no hay distinción entre la emisión de partículas y antipartículas. Estos resultados vienen a contradecir la interpretación que comúnmente se encuentra en la literatura acerca de la radiación de Hawking. Según dicha interpretación la direccionalidad estaría determinada por la distinción entre partícula y antipartícula pero no por el sentido de la aceleración. Finalmente, en el límite de Unruh, para el observador inercial los fotones emitidos aparecen *red-shifted* a la velocidad de la luz. Ello implica que la frecuencia de dichos fotones tiende a cero para dicho observador. Por lo tanto, podemos afirmar que el observador inercial no sería capaz de detectar fotones en dicho límite. Esto es una consecuencia directa de la formación de un horizonte de sucesos para el observador coacelerado. Dicho fenómeno es análogo al que se produce en el horizonte de sucesos de un agujero negro, desde el cual un observador en caída libre no puede comunicarse con el observador inercial situado lejos del agujero.

Por último, aunque la situación planteada del átomo acelerado ha arrojado algunas claves sobre la direccionalidad de la radiación Hawking, el uso de un modelo muy sencillo del átomo como un sistema de dos niveles o la asunción de que el mismo no está des-localizado, hace que el modelo sea demasiado simple. Esto invita a realizar un estudio más riguroso, mediante el planteamiento de condiciones más realistas que incluyan la dinámica de los grados de libertad del centro de masas del átomo, con el objetivo de analizar las propiedades de la radiación emitida por átomos acelerados.



## Bibliografía

- [1] J. Audretsch and R. Müller. Spontaneous excitation of an accelerated atom: The contributions of vacuum fluctuations and radiation reaction. *Physical Review*, A50(1755), 1994.
- [2] M. Donaire. Two-atom interaction energies with one atom in an excited state: van der waals potentials vs. level shifts. *Physical Review*, A93(052706), 2016.
- [3] M. Donaire, R. Guérout, and A. Lambrecht. Quasi-resonant van der waals interaction between non-identical atoms. *Physical Review Letters*, 115(033201), 2015.
- [4] M. Donaire and A. Lambrecht. Velocity-dependent dipole forces on an excited atom. *Physical Review*, A93(022701), 2016.
- [5] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer-Verlag, 1996.
- [6] K. Huang. *Quantum Field Theory: From Operators to Path INtegrals*. John Wiley & Sons, first edition edition, 1998.
- [7] C. Itzykson and J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, 1980.
- [8] L. D. Landau. *Teoría Clásica de los Campos*. Editorial Reverté, 2008.
- [9] M. Lattuca, J. Marino, A. Noto, R. Passante, L. Rizzuto, S. Spagnolo, and W. Zhou. Van der waals and resonance interactions between accelerated atoms in vacuum and the unruh effect. *arXiv:1703.02880*, 2017.
- [10] R. Müller. Decay of accelerated particles. *Physical Review*, D56(953), 1007.
- [11] V. F. Mukhanov and S. Winitzki. *Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds*. Ludwig-Maximilians University, Munich, Germany, 2005.
- [12] K. Ohnishi and S. Takagi. Rindler noise in the flat spacetime with a boundary. i. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 88(5):895–909, 1992.
- [13] D. N. Page. Hawking radiation and black hole thermodynamics. *New Journal of Physics*, 7(203), 2005.
- [14] W. Pauli. *Theory of Relativity*. Dover Books, 1981.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [15] M. E. Perskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, 1995.
- [16] S. J. Robertson. The theory of hawking radiation in laboratory analogues. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 45(16):163001, 2012.
- [17] L. I. Schiff. *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 1968.
- [18] S. S. Schweber. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. Harper & Row, 1964.
- [19] S. Takagi. Vacuum noise and stress induced by uniform acceleration. hawking-unruh effect in rindler manifold of arbitrary dimension. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, (No. 88), 1986.
- [20] D. Tong. *Quantum Field Theory*. Cambridge University, 2007.
- [21] D. A. T. Vanzella and G. E. A. Matsas. Decay of accelerated protons and the existence of the fulling-davies-unruh effect. *Physical Review Letters*, 87(151301), 2001.
- [22] W. Zhou, R. Passante, and L. Rizzuto. Resonance interaction energy between two accelerated identical atoms in a coaccelerated frame and the unruh effect. *Journal of Physics Conference Series*, 880(1), 2016.
- [23] Z. Zhu and H. Yu. Thermal nature of de sitter spacetime and spontaneous excitation of atoms. *Physics Letters*, B 645(459), 2007.

## Lista de Figuras

1	Cono de Luz en el espacio de Minkowski . . . . .	24
2	Observador a aceleración propia constante en el espacio de Minkowski [11] . . . . .	30
3	Desexcitación del átomo desde el Sistema Acelerado . . . . .	47
4	Desexcitación desde Sistema Inercial . . . . .	48