Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Máster

Máster en Investigación en Matemáticas

Casianaliticidad de clases ultradiferenciables y ultraholomorfas de tipo Carleman-Roumieu

Autor: Ignacio Miguel Cantero

Tutor: Javier Sanz Gil

Casianaliticidad de clases ultradiferenciables y ultraholomorfas de tipo Carleman-Roumieu

Ignacio Miguel Cantero

20 de julio de 2018

D. JAVIER SANZ GIL, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que el presente trabajo, “Casianaliticidad de clases ultradiferenciables y ultraholomorfas de tipo Carleman-Roumieu”, ha sido realizado bajo su dirección en el Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, por Don Ignacio Miguel Cantero, y constituye su Trabajo Fin de Máster para optar al título de Máster en Investigación en Matemáticas.

Que le consta que el trabajo es original e inédito, y que autoriza su presentación.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a diecinueve de julio de dos mil dieciocho.

Fdo.: Javier Sanz Gil

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi tutor, el profesor Javier Sanz Gil, el haber aceptado la dirección de este trabajo, por darme la oportunidad de acercarme tanto a la variable compleja, por su apoyo, paciencia y palabras de ánimo a lo largo del curso, y su corrección intensa buscando que quedara un trabajo lo más pulido posible; sin él no habría sido posible.

Agradezco también a los profesores del área de Análisis Matemático, sus magníficas lecciones a lo largo del grado y del máster, sus recomendaciones y consejos, que me han hecho sentir predilección sobre esta rama de las matemáticas.

Igualmente quiero agradecer a los profesores Juan Carlos López Marcos y Luis Abia Llera sus lecciones durante la carrera y el máster, así como su dedicación y consejos para mi futuro.

Por otro lado, quiero dedicar unas palabras a mi tío Javier, con el que comparto no solo la familia, sino el gusto por las matemáticas, por sus ánimos durante mi carrera como matemático, por sus consejos y anécdotas. Para mi, es un referente como matemático.

Por último, aunque no menos importante, estas líneas van dedicadas a Lucía, quien siempre me ha ayudado en lo que he necesitado, y que es protagonista de mis buenos momentos.

Índice general

Introducción

Esta memoria tiene dos objetivos fundamentales: la caracterización de las clases ultradiferenciables casianalíticas en la recta real (en el sentido de Roumieu-Carleman), y el estudio de problemas de unicidad para clases de funciones holomorfas en una banda horizontal generalizada, sujetas a adecuadas condiciones de decrecimiento. De estos segundos resultados se pueden deducir a su vez nuevas caracterizaciones de la casianaliticidad, ahora para clases ultraholomorfas de funciones que admiten desarrollo asintótico uniforme en 0, punto frontera de su dominio de definición.

Las técnicas que utilizaremos a lo largo del trabajo son eminentemente de variable compleja, y los prerrequisitos se recogen en las asignaturas de Análisis Matemático impartidas durante el Grado en Matemáticas (Variable Compleja) y el Máster de Investigación en Matemáticas (Ampliación de Teoría de Funciones). Así, se necesitarán resultados elementales (desigualdades de Cauchy, elementos de transformada de Fourier, principio de identidad, principio del módulo máximo, etc.), y otros más avanzados (manejo de productos infinitos, fórmula de Jensen, familias normales, aplicaciones conformes, etc.) que corresponden a la asignatura del Máster.

Es bien conocido que una función holomorfa en un dominio (abierto conexo) del plano complejo queda determinada por la sucesión de sus derivadas, entendiendo a la propia función como su derivada de orden 0, en un punto arbitrario del dominio, y lo mismo se puede decir de una función analítica real en un intervalo de la recta. Esta propiedad deja de cumplirse para la clase de las funciones indefinidamente derivables en $\mathbb{R}$, pero tiene sentido su estudio en clases intermedias entre esta y la de las funciones analíticas, constituidas por funciones f cuyas derivadas sucesivas $f^{(n)}$ están sujetas a estimaciones que limitan su crecimiento en términos de una sucesión numérica $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ con propiedades adecuadas. Estas son las denominadas clases ultradiferenciables de Roumieu-Carleman, y se dice que una clase tal es casianalítica cuando uno cualquiera de sus elementos queda determinado por su sucesión de derivadas en un punto arbitrario. La caracterización de esta propiedad se obtuvo en los años 20 del siglo pasado, y se debe a Denjoy, que obtuvo algún resultado parcial, y a Carleman, que cerró el problema en 1923. La demostración que presentamos de este resultado se basa en técnicas de variable compleja, y requiere especialmente del teorema de Paley-Wiener que caracteriza las funciones enteras de tipo exponencial cuya restricción al eje real es de cuadrado integrable en términos de su transformada de Fourier. Tras exponer este resultado, se estudian a continuación las propiedades algebraicas de las clases ultradiferenciables, especialmente en el caso en que la sucesión que las define sea logarítmicamente convexa, lo que no supone pérdida de generalidad en el caso que nos ocupa. Cerramos el capítulo con el teorema de Denjoy-Carleman, que precisa varias condiciones sobre la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, o sobre funciones auxiliares asociadas a la misma, que equivalen a la casianaliticidad de la clase correspondiente. Los textos utilizados durante la elaboración de este capítulo son [1], [2], [17].

En el segundo capítulo, nos centraremos en problemas de unicidad para clases de funciones holomorfas en bandas horizontales generalizadas. Concretamente, se trabajará con la banda horizontal simétrica respecto del eje real y de anchura π, que denotamos por $\mathcal{D}_{\mathrm{z}} = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < \pi/2\}$, y con bandas simétricas respecto del eje real del tipo

$$\Delta_s = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \sigma_0,\ |\mathrm{Im}(s)| < G(\mathrm{Re}(s))\},$$

donde G es una función continua, positiva y de variación acotada en un intervalo (σ_0, ∞), y con límite positivo en infinito. La forma de proceder será similar en ambas situaciones, aunque la obtención de los resultados en el caso de las bandas generalizadas requerirá del estudio exhaustivo de las propiedades de la transformación conforme, normalizada adecuadamente, que permite transformar biyectiva y de manera biholomorfa la banda clásica $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$ en Δ_s. En primer lugar, se probará que la existencia de funciones holomorfas acotadas, no idénticamente nulas y continuas hasta la frontera en dichas bandas implica la convergencia de ciertas integrales que involucran al módulo de la función en cuestión. Mientras en el caso de la banda estándar este resultado (ver el teorema 2.1.2) se deduce a partir de la fórmula de Jensen, será necesaria toda la tercera sección del segundo capítulo para generalizarlo a la banda Δ_s.

El segundo resultado que se estudia es en cierto sentido un recíproco del anterior: se trata de construir funciones holomorfas acotadas, no idénticamente nulas y continuas hasta la frontera cuyo módulo pueda ser controlado por la exponencial negativa de una función N no decreciente. Mientras la construcción para la banda clásica se realiza en el teorema 2.1.7 mediante un método ingenioso pero no muy penoso, la extensión del resultado a bandas generalizadas, en el teorema 2.2.20, requerirá de un enorme esfuerzo. En particular, cabe destacar que ha sido necesaria la consideración de la medida armónica, herramienta introducida por R. Nevanlinna y que no se encuentra desarrollada frecuentemente en la literatura.

Por último, en la cuarta sección se establecen las condiciones de unicidad para funciones definidas en la banda generalizada, así como en el semiplano superior abierto, cuando se las somete a determinadas condiciones de decrecimiento exponencial. Este último resultado es de especial interés, pues permite dar condiciones de casianaliticidad en clases de funciones con desarrollo asintótico uniforme en un punto de la frontera del dominio de definición, situación especialmente interesante en el caso de sectores y sus vértices.

Las referencias que se han utilizado para este segundo capítulo son esencialmente [12] y [13].

El trabajo finaliza con un apéndice donde se recogen los resultados clásicos principales, necesarios para hacer el texto autocontenido. Para los resultados generales de variable compleja hemos consultado los textos [1], [2], [5], [6], [14], [16], [17] y [19]. Para los relativos a la integral de Riemann-Stieltjes se han seguido los textos [3],[7] y [18]. Por último, para la teoría general asociada a la medida armónica se recomiendan los textos [8], [10] y [15].

Notación

$D(z_0, r)$	Disco centrado en z_0 de radio r.
$\mathcal{H}(\Omega)$	Espacio de las funciones holomorfas en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$.
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$	Espacio de las funciones complejas indefinidamente derivables en $\mathbb{R}$.
$\mathcal{F}(f)$	Transformada de Fourier de la función f.
$\mathbb{N}$	Conjunto formado por los números naturales, $\{1, 2, \ldots\}$.
$\mathbb{N}_0$	Conjunto formado por los números naturales y el cero.
$\log$	Determinación principal del logaritmo complejo.
$\ln$	Logaritmo neperiano, función real de variable real.
$\int^\infty$	Integral extendida a un intervalo no acotado superiormente cuyo extremo inferior (finito) es irrelevante.
$\int_{-\infty}$	Integral extendida a un intervalo no acotado inferiormente cuyo extremo superior (finito) es irrelevante.
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Conjunto de los números reales mayores o iguales a cero.
$\mathcal{R}(\alpha)$	Conjunto de funciones integrables Stieltjes con respecto a α.
$\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$	Banda horizontal $\{z = x + iy\colon \lvert y\rvert < \frac{\pi}{2}\}$.
Δ_s	Banda horizontal generalizada $\{s = \sigma + it\colon \sigma > \sigma_0,\ \text{y}\ \lvert t\rvert < G(\sigma)\}$.
$\mathcal{J}_z$	Determinante jacobiano del difeomorfismo z.
$\sigma_0(x)$	Notación abreviada para $\sigma(x + i\frac{\pi}{2})$.
$x_0(\sigma)$	Notación abreviada para $x\big(\sigma + iG(\sigma)\big)$.
$\mathbb{H}$	Semiplano superior abierto.

Capítulo 1

Clases casianalíticas en $\mathbb{R}$

El objetivo de este capítulo es demostrar el teorema de Denjoy-Carleman. Se seguirá la prueba contenida en el texto de W. Rudin [17], que hace uso de técnicas de variable compleja, a diferencia de la demostración mediante técnicas exclusivamente de variable real debida a T. Bang (véase el libro de L. Hörmander [9]). Debido a nuestra elección, será necesario presentar en primer lugar el teorema de Paley-Wiener, así como describir las propiedades básicas que tienen las clases ultradiferenciables con las que trabajaremos.

1.1. Teorema de Paley-Wiener

En esta sección se expone un resultado fundamental en la demostración del teorema de Denjoy-Carleman, el teorema de Paley-Wiener. Dicho resultado caracteriza las funciones enteras de tipo exponencial (es decir, con crecimiento exponencial de orden 1 y tipo finito) que restringidas al eje real son de cuadrado integrable como aquellas cuya transformada de Fourier es una función de cuadrado integrable y soporte compacto.

Definición 1.1.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, denotamos por $\mathcal{F}(f)$ a la transformada de Fourier de f, es decir, a la función definida para cada $t \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}dx.$$

Teorema 1.1.2 (Teorema de Paley-Wiener)**.** Sea f una función entera, y supongamos que existen constantes positivas A y C tales que

$$|f(z)| \leq Ce^{A|z|} \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

y que además

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty. \tag{1.2}$$

Entonces existe una función $F \in L^2(-A, A)$ tal que

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)e^{itz} dt \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}. \tag{1.3}$$

Demostración. Consideremos, para $\epsilon > 0$, la función f_ϵ definida como $f_\epsilon(x) = f(x)e^{-\epsilon|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Nuestro objetivo es justificar que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)e^{-itx} dx = 0 \quad \text{para } t \text{ real y } |t| > A. \tag{1.4}$$

Veamos cómo deducir (1.3) a partir de (1.4). En primer lugar, observemos que para $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\|f_\epsilon - f\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-\epsilon|x|} - f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 |e^{-\epsilon|x|} - 1|^2 dx,$$

y en virtud del teorema de la convergencia dominada, cuando $\epsilon \to 0$ el término de la derecha tiende hacia 0. En efecto, consideremos una sucesión de números reales positivos $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, y consideremos la sucesión de funciones asociada $f_{\varepsilon_n}(x) = f^2(x)(e^{-\varepsilon_n|x|} - 1)^2$. Por un lado, se tiene que

$$|f_{\varepsilon_n}(x)| = |f^2(x)(e^{-\varepsilon_n|x|} - 1)^2| \leq 4|f(x)|^2,$$

y por otro, $f_{\varepsilon_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada, deducimos que $\int_{-\infty}^{\infty} |f_{\varepsilon_n}(x)| dx \to 0$, cuando $n \to \infty$. A continuación, aplicando el teorema de Plancherel, deducimos que

$$\|\mathcal{F}(f_\epsilon) - \mathcal{F}(f)\|_2 = \|\mathcal{F}(f_\epsilon - f)\|_2 = \|f_\epsilon - f\|_2,$$

donde en la primera igualdad se ha aplicado la linealidad de la transformada de Fourier. Se concluye que la transformada de Fourier de f_ϵ converge en $L^2(\mathbb{R})$ a la transformada de Fourier de f. Por otro lado, en virtud de (1.4), afirmamos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{F}(f_\epsilon)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)e^{-itx} dx = 0 \quad \text{para } t \text{ real y } |t| > A,$$

es decir, el límite puntual de la transformada de Fourier de f_ϵ cuando $\epsilon \to 0$ se anula para todo t con $|t| > A$. Dado que la convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ implica la existencia de una sucesión $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ de modo que $\{\mathcal{F}(f_{\epsilon_n})\}_n$ converge puntualmente casi siempre hacia $\mathcal{F}(f)$, se deduce que la transformada de Fourier de f, $\mathcal{F}(f)$, es igual a cero en casi todo punto de $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$, por lo que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ sin más que aplicar la desigualdad de Hölder A.3. Además, en virtud de (1.2), se tiene que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Estamos pues, en condiciones de aplicar el corolario A.2 para concluir que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(t) e^{ixt} dt,$$

en casi todo x real. Ahora bien, cada miembro de la igualdad anterior es una función entera, el primero por hipótesis y el segundo por aplicación del teorema de holomorfía bajo el signo integral A.4, y además coinciden en un conjunto con puntos de acumulación. Aplicando el principio de identidad A.5, concluimos que la última igualdad es de hecho cierta en todo el plano complejo como se quería ver. Tomando

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f)(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C},$$

se obtiene (1.3).
Probemos pues la expresión (1.4). Para ello, consideremos para cada α real, el camino Γ_α definido por

$$\Gamma_\alpha(s) = s e^{i\alpha}, \quad \text{para } 0 \leq s < \infty. \tag{1.5}$$

Y escojamos también para cada α el semiplano

$$\Pi_\alpha = \{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(w e^{i\alpha}) > A\}.$$

Finalmente, para cada $w \in \Pi_\alpha$, definamos la función

$$\Phi_\alpha(w) = \int_{\Gamma_\alpha} f(z) e^{-wz} dz = e^{i\alpha} \int_0^{\infty} f(s e^{i\alpha}) e^{-w s e^{i\alpha}} ds.$$

En virtud de (1.1) y (1.5), podemos asegurar que el valor absoluto del integrando es, a lo sumo,

$$|f(s e^{i\alpha}) e^{-w s e^{i\alpha}}| \leq C e^{A|s e^{i\alpha}|} e^{\operatorname{Re}(-w s e^{i\alpha})} \leq C e^{-(\operatorname{Re}(w e^{i\alpha}) - A)s}.$$

Con todo esto, afirmamos que la función Φ_α es holomorfa en Π_α, sin más que aplicar el teorema de holomorfía bajo el signo integral A.4.

Por otro lado, para $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$ podemos extender los dominios de definición de las funciones Φ_0 y Φ_π respectivamente, a los semiplanos $\{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(w) > 0\}$ y $\{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(w) < 0\}$ conservando la holomorfía de dichas funciones. Nuevamente, esto se deriva del teorema de holomorfía bajo el signo integral, donde la única condición que no es directa es la tercera. Realizamos los cálculos para Φ_0, el razonamiento para Φ_π es análogo.

Fijado un punto $w_0 \in \{w \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(w) > 0\}$, tomemos un entorno suficientemente pequeño, $D(w_0, r)$, que esté íntegramente contenido en el conjunto $\{w \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(w) > 0\}$. Definamos la constante $M = \mathrm{Re}(w_0) - r$, de tal manera que para todo $w \in D(w_0, r)$, se tiene que $\mathrm{Re}(w) > M$. A continuación, para cada $(w, x) \in D(w_0, r) \times [0, \infty)$, acotamos el integrando

$$|f(x)e^{-wx}| = |f(x)|e^{\mathrm{Re}(-wx)} = |f(x)|e^{-x\mathrm{Re}(w)} \leq |f(x)|e^{-xM}.$$

Consideremos la función $g\colon [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dada por $g(x) = |f(x)|e^{-xM}$, resta probar que dicha función es integrable en $[0, \infty)$. Esto se deriva de la desigualdad de Hölder A.3, y del hecho de que la función f restringida al eje real es de cuadrado integrable (ver (1.2)). En efecto,

$$\int_0^\infty |g(x)|dx = \int_0^\infty |f(x)|e^{-xM}dx \leq \int_0^\infty |f(x)|^2 dx \int_0^\infty e^{-2xM}dx < \infty.$$

Por tanto, tenemos garantizada la holomorfía de Φ_0 y Φ_π, explícitamente

$$\begin{aligned} \Phi_0(w) &= \int_0^\infty f(x)e^{-wx}dx, \qquad \mathrm{Re}(w) > 0, \\ \Phi_\pi(w) &= -\int_{-\infty}^0 f(x)e^{-wx}dx, \quad \mathrm{Re}(w) < 0. \end{aligned}$$

La relación existente entre las funciones Φ_α y la expresión (1.4), se pone de manifiesto a continuación, pues para cada t real, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f_\epsilon(x)e^{-itx}dx &= \int_{-\infty}^0 f_\epsilon(x)e^{-itx}dx + \int_0^\infty f_\epsilon(x)e^{-itx}dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x)e^{\epsilon x - itx}dx + \int_0^\infty f(x)e^{-\epsilon x - itx}dx \\ &= -\Big(-\int_{-\infty}^0 f(x)e^{-(-\epsilon+it)x}dx \Big) + \int_0^\infty f(x)e^{-(\epsilon+it)x}dx \\ &= -\Phi_\pi(-\epsilon + it) + \Phi_0(\epsilon + it). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Por tanto, para justificar (1.4), probaremos equivalentemente que para t real, tanto si $t > A$, como si $t < -A$, se tiene que

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\Phi_0(\epsilon + it) - \Phi_\pi(-\epsilon + it)) = 0.$$

Para verlo, probaremos que las funciones Φ_α son prolongaciones analíticas unas de otras, siempre que sus dominios tengan intersección no vacía. Para ello, sean α y β números reales, tales que $0 < \beta - \alpha < \pi$. Además, consideremos

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \text{y} \quad \eta = \cos(\frac{\beta - \alpha}{2}) > 0.$$

Si tomamos $w = |w|e^{-i\gamma}$, entonces

$$\mathrm{Re}(we^{i\alpha}) = \mathrm{Re}(|w|e^{i(\alpha-\gamma)}) = |w|\cos(\alpha - \gamma) = |w|\cos(\gamma - \alpha) = |w|\eta.$$

Análogamente, se obtiene que $\mathrm{Re}(we^{i\beta}) = |w|\eta$. Por tanto, $w \in \Pi_\alpha \cap \Pi_\beta$ si $|w| > \frac{A}{\eta}$. A continuación, veremos que $\Phi_\alpha(w) = \Phi_\beta(w)$, si $w = |w|e^{-i\gamma}$ y $|w| > \frac{A}{\eta}$, y entonces, en virtud del principio de identidad A.5, concluiremos que las funciones Φ_α y Φ_β coinciden en la intersección de los semiplanos en los que estaban definidas originalmente dichas funciones.

Para ello, consideremos la integral

$$\int_\Gamma f(z)e^{-wz}dz, \tag{1.7}$$

donde Γ es el arco circular, parametrizado por

$$\Gamma(t) = re^{it}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Tomemos un punto del soporte de Γ, digamos $z = re^{it}$, entonces se tiene que

$$\mathrm{Re}(-wz) = \mathrm{Re}(-|w|e^{-i\gamma}re^{it}) = -|w|r\cos(t - \gamma) \leq -|w|r\eta,$$

y por tanto, el integrando de (1.7) se puede acotar como

$$|f(z)e^{-wz}| \leq Ce^{A|re^{it}|}e^{\mathrm{Re}(-wz)} \leq Ce^{r(A-|w|\eta)}.$$

Con todo esto, podemos acotar (1.7) de la forma

$$\left| \int_\Gamma f(z)e^{-wz}dz \right| \leq Ce^{r(A-|w|\eta)}r(\beta - \alpha).$$

Si $|w| > \frac{A}{\eta}$, se tiene que el exponente anterior es negativo, y por consiguiente, la integral (1.7) tiende hacia 0 cuando $r \to \infty$. Aplicando a continuación el Teorema de Cauchy, deducimos que

$$\int_{[0,re^{i\alpha}]} f(z)e^{-wz}dz + \int_\Gamma f(z)e^{-wz}dz - \int_{[0,re^{i\beta}]} f(z)e^{-wz}dz = 0.$$

Pasando al límite cuando $r \to \infty$, se concluye que

$$\int_{\Gamma_\alpha} f(z)e^{-wz}dz = \int_{\Gamma_\beta} f(z)e^{-wz}dz,$$

si $|w| > \frac{A}{\eta}$ y $w = |w|e^{-i\gamma}$, y por el principio de identidad Φ_α y Φ_β coinciden en la intersección de sus dominios de definición.

Para terminar, observemos por un lado que cuando $t < -A$, se tiene que $\epsilon + it, -\epsilon + it \in \Pi_{\frac{\pi}{2}}$, y podemos sustituir Φ_0 y Φ_π por $\Phi_{\frac{\pi}{2}}$ en (1.6). Obtenemos pues, la siguiente expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)e^{-itx}dx = \Phi_{\frac{\pi}{2}}(\epsilon + it) - \Phi_{\frac{\pi}{2}}(-\epsilon + it),$$

y haciendo tender $\epsilon \to 0$, se concluye, por continuidad, que la expresión anterior tiende hacia

$$\Phi_{\frac{\pi}{2}}(it) - \Phi_{\frac{\pi}{2}}(it) = 0.$$

Por otro lado, cuando $t > A$, se tiene que $\epsilon + it, -\epsilon + it \in \Pi_{-\frac{\pi}{2}}$, y podemos sustituir Φ_0 y Φ_π por $\Phi_{-\frac{\pi}{2}}$ en (1.6). Se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)e^{-itx}dx = \Phi_{-\frac{\pi}{2}}(\epsilon + it) - \Phi_{-\frac{\pi}{2}}(-\epsilon + it),$$

y de nuevo, pasando al límite cuando $\epsilon \to 0$, se concluye que la expresión previa tiende hacia

$$\Phi_{-\frac{\pi}{2}}(it) - \Phi_{-\frac{\pi}{2}}(it) = 0.$$

Por consiguiente, en ambos casos se obtiene que el límite (1.4) es nulo, por lo que se tiene probado el teorema. □

1.2. Clases ultradiferenciables

Dado un dominio Ω del plano, y dado un punto $z_0 \in \Omega$, sabemos que una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ queda determinada de forma única por los valores $f(z_0)$, $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, etc. Este hecho se deriva de que toda función holomorfa es analítica, es decir, se puede representar localmente mediante su serie de Taylor. En consecuencia, si una función holomorfa tiene todas sus derivadas nulas en un punto será la función idénticamente nula en un entorno suyo, y por el principio de identidad será nula en todo Ω.

Sin embargo, esta propiedad de las funciones holomorfas se pierde al considerar el espacio de las funciones complejas indefinidamente derivables en $\mathbb{R}$.

Por ejemplo, podemos considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

que resulta ser de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, con derivadas nulas en 0, sin ser la función idénticamente nula.
Sin embargo, teniendo presente que toda función de $\mathcal{H}(\Omega)$ satisface localmente estimaciones para sus derivadas en términos de la sucesión de factoriales (en virtud de las desigualdades de Cauchy A.6), cabe preguntarse si tenemos garantizada dicha propiedad de unicidad de las funciones holomorfas en subclases convenientes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, en las que el crecimiento de las derivadas esté sometido a restricciones adecuadas en términos de una sucesión general que juegue el papel desempeñado por los factoriales en el caso holomorfo. Esta pregunta motiva la definición que sigue.

Definición 1.2.1. Consideremos $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de números reales positivos. Diremos que una función f pertenece a la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$, si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y existen constantes positivas β_f y B_f (que dependen de f) tales que

$$\|D^n f\|_\infty \leq \beta_f B_f^n M_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

Diremos que $\mathcal{C}\{M_n\}$ es la clase ultradiferenciable asociada a la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^\infty$.

Observación 1.2.2. En la definición previa denotamos por $D^n f$ a la derivada n-ésima de la función f, y por $D^0 f$ a la propia función f. La norma ha de entenderse como la del supremo en $\mathbb{R}$. Las constantes β_f y B_f no dependen de n.

Una consecuencia directa de la definición es la siguiente proposición.

Proposición 1.2.3. Sea $\mathcal{C}\{M_n\}$ la clase ultradiferenciable asociada a la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ de números reales positivos. Si $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$ entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|D^n f\|_\infty}{M_n} \right)^{1/n} \leq B_f.$$

Demostración. Si $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$ entonces se satisface la desigualdad (1.8) y por tanto

$$\left(\frac{\|D^n f\|_\infty}{M_n} \right)^{1/n} \leq \beta_f^{1/n} B_f.$$

Ahora bien, como $\beta_f^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$, se sigue de lo anterior que

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|D^n f\|_\infty}{M_n} \right)^{1/n} \leq B_f.$$

□

Esta proposición pone de manifiesto la relevancia de B_f frente a β_f. Sin embargo, si omitiéramos la constante β_f de (1.8), en el caso $n = 0$ tendríamos que $\|f\|_\infty \leq M_0$, es decir, todas las funciones de la clase admitirían una misma cota global, lo que es una restricción severa y por lo tanto no deseable.

De hecho, como veremos a continuación, la inclusión de β_f permite justificar la estructura de espacio vectorial que presenta la clase ultradiferenciable $\mathcal{C}\{M_n\}$.

Proposición 1.2.4. Sea $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de números reales positivos. Entonces la clase ultradiferenciable $\mathcal{C}\{M_n\}$ tiene estructura de espacio vectorial complejo.

Demostración. Tenemos que probar que la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$ es cerrada para la suma de elementos de la clase, y para la multiplicación por escalares de $\mathbb{C}$. Consideremos dos funciones $f, g \in \mathcal{C}\{M_n\}$, y veamos que $f + g \in \mathcal{C}\{M_n\}$. Por definición, existen constantes positivas $\beta_f, \beta_g, B_f, B_g$, de modo que

$$\|D^n f\|_\infty \leq \beta_f B_f^n M_n, \qquad \|D^n g\|_\infty \leq \beta_g B_g^n M_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Por un lado, como f y g están en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, resulta claro que $f + g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$\|D^n(f+g)\|_\infty \leq \|D^n f\|_\infty + \|D^n g\|_\infty \leq \beta_f B_f^n M_n + \beta_g B_g^n M_n \leq \beta_{f+g} B_{f+g}^n M_n,$$

donde $\beta_{f+g} = 2\max\{\beta_f, \beta_g\}$, y $B_{f+g} = \max\{B_f, B_g\}$. Se concluye que $f+g \in \mathcal{C}\{M_n\}$.

A continuación, consideremos $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$, y veamos que el producto αf está en la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$. Por un lado, como f está en la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$, entonces existen constantes positivas β_f y B_f, de modo que se cumple (1.8). Por otro lado, resulta claro que la nueva función αf está en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, y además cumple que

$$\|D^n(\alpha f)\|_\infty = |\alpha| \|D^n f\|_\infty \leq |\alpha| \beta_f B_f^n M_n = \beta_{\alpha f} B_{\alpha f}^n M_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

donde $\beta_{\alpha f} = |\alpha|\beta_f$, y $B_{\alpha f} = B_f$. □

Por último, veamos que la clase ultradiferenciable es invariante con respecto a transformaciones afines, esto es, si $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$, entonces $f(ax+b) \in \mathcal{C}\{M_n\}$, donde a y b son números reales.

Proposición 1.2.5. Sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos. Entonces la clase ultradiferenciable $\mathcal{C}\{M_n\}$ es invariante por transformaciones afines.

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$, y tomemos dos números reales a y b. Consideremos la función g definida por $g(x) = f(ax+b)$, y veamos que $g \in \mathcal{C}\{M_n\}$. En primer lugar, notemos que para cada $x \in \mathbb{R}$, aplicando la regla de la cadena, se deduce que

$$D^n g(x) = D^n f(ax+b) = a^n D^n f(ax+b), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

En consecuencia, se tiene que

$$\|D^n g\|_\infty = |a|^n \|D^n f\|_\infty \leq |a|^n \beta_f B_f^n M_n = \beta_g B_g^n M_n,$$

donde $\beta_g = \beta_f$ y $B_g = |a| B_f$. Concluimos que $g \in \mathcal{C}\{M_n\}$. $\square$

Añadiendo más regularidad a la sucesión de números reales $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, es posible dotar a la clase ultradiferenciable $\mathcal{C}\{M_n\}$ de estructura de álgebra.

Definición 1.2.6. Diremos que una sucesión de números reales positivos $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ es logarítmicamente convexa si

$$M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1}, \qquad n \geq 1.$$

Observación 1.2.7. La definición anterior puede expresarse equivalentemente diciendo que la sucesión $\{\log(M_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es convexa, es decir, cumple que

$$\log(M_n) \leq \frac{1}{2}\big(\log(M_{n-1}) + \log(M_{n+1})\big), \quad n \geq 1.$$

Este hecho motiva el nombre dado.

Supondremos sin pérdida de generalidad que la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisface que $M_0 = 1$. De no ser así, basta considerar una nueva sucesión de números reales positivos, $\{M_n'\}_{n=0}^{\infty}$, definida por

$$M_n' = \frac{M_n}{M_0}, \qquad n \geq 1.$$

De hecho, las clases ultradiferenciables correspondientes $\mathcal{C}\{M_n\}$, $\mathcal{C}\{M_n'\}$ son iguales, pues basta considerar las relaciones $B_f' = B_f$, y $\beta_f' = \beta_f M_0$.

Observación 1.2.8. A partir de ahora en este capítulo, consideraremos la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números reales positivos, con $M_0 = 1$, siendo logarítmicamente convexa.

Aunque no lo incluiremos aqui, un resultado clásico de A. Gorny y H. Cartan (ver [12, capítulo 6]) prueba que para cualquier sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números reales positivos con

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty,$$

se tiene que $\mathcal{C}\{M_n\} = \mathcal{C}\{M_n^c\}$, donde $\{M_n^c\}_{n=0}^{\infty}$ es la regularizada logarítmicamente convexa de $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, esto es, la mayor de las sucesiones logarítmicamente convexas que están por debajo de ella (se puede ver algún detalle adicional en la Sección 2.4). Por lo tanto, esta restricción sobre $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ no supone pérdida de generalidad.

Conviene advertir que, si se desea trabajar con clases ultradiferenciables definidas en intervalos propios de la recta (distintos de $\mathbb{R}$), la igualdad de las dos clases anteriores puede no ser cierta, véase de nuevo el trabajo de S. Mandelbrojt [12, capítulo 6].

Con vistas a justificar la estructura de álgebra que poseen las clases ultradiferenciables, será necesario el siguiente lema.

Lema 1.2.9. Sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales logarítmicamente convexa y tal que $M_0 = 1$. Entonces, para cada $j, k \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$M_j M_k \leq M_{j+k}.$$

Demostración. Distingamos dos casos, según sea $0 \leq j \leq k$, o viceversa $0 \leq k \leq j$. El razonamiento es análogo en ambos casos, por lo que aquí desarrollaremos la primera situación. Podemos suponer que $1 \leq j \leq k$, pues para $j = 0$ el resultado es evidente. Aplicando la convexidad logarítmica se deduce que

$$\begin{aligned} M_j^2 &\leq M_{j-1} M_{j+1}, \\ M_{j+1}^2 &\leq M_j M_{j+2}, \\ &\vdots \\ M_{k-1}^2 &\leq M_{k-2} M_k, \\ M_k^2 &\leq M_{k-1} M_{k+1}. \end{aligned}$$

Multiplicando las desigualdades previas y simplificando, obtenemos que

$$M_j M_k \leq M_{j-1} M_{k+1}.$$

Ahora bien, si $j-1 \geq 1$ podemos iterar el proceso, para llegar a que

$$M_{j-1}M_{k+1} \leq M_{j-2}M_{k+2}.$$

De nuevo, iterando el proceso, se concluye que

$$M_jM_k \leq M_{j-1}M_{k+1} \leq \cdots \leq M_{j-j}M_{k+j} = M_0M_{k+j} = M_{k+j}.$$

□

Teorema 1.2.10. La clase ultradiferenciable $\mathcal{C}\{M_n\}$ tiene estructura de álgebra con respecto a la multiplicación puntual de funciones.

Demostración. Supongamos que $f, g \in \mathcal{C}\{M_n\}$, y que β_f, B_f, β_g y B_g son las constantes positivas correspondientes. Veamos que $fg \in \mathcal{C}\{M_n\}$.

Aplicando la regla de diferenciación del producto, se tiene, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, que

$$D^n(fg) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (D^j f)(D^{n-j} g).$$

Se sigue de lo anterior que

$$\begin{aligned} \|D^n(fg)\|_\infty &\leq \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \|D^j f\|_\infty \|D^{n-j} g\|_\infty \\ &\leq \beta_f \beta_g \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_f^j B_g^{n-j} M_j M_{n-j}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ahora bien, para cada j cumpliendo que $0 \leq j \leq n$, se tiene, en virtud del lema 1.2.9, que $M_jM_{n-j} \leq M_n$. Por tanto, deducimos de (1.9) y de la fórmula del binomio de Newton que

$$\|D^n(fg)\|_\infty \leq \beta_f\beta_g M_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_f^j B_g^{n-j} = \beta_f\beta_g(B_f + B_g)^n M_n. \tag{1.10}$$

Para concluir, basta tomar $\beta_{fg} = \beta_f\beta_g$, y $B_{fg} = B_f + B_g$, llegando con ello a la desigualdad buscada

$$\|D^n(fg)\|_\infty \leq \beta_{fg} B_{fg}^n M_n.$$

□

1.2.1. Clases casianalíticas

En esta sección introduciremos el concepto de clase casianalítica, que no es más que una clase ultradiferenciable cuyas funciones satisfacen una cierta propiedad de unicidad.

Culminaremos esta sección mostrando la casianaliticidad de la clase $\mathcal{C}\{n!\}$.

Definición 1.2.11. Se dice que una clase ultradiferenciable $\mathcal{C}\{M_n\}$ es casianalítica si para cada función $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$ verificando que

$$(D^n f)(0) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

se tiene que $f(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Observación 1.2.12. Como consecuencia de la proposición 1.2.5, tenemos que el contenido de la definición no cambia si se sustituye $(D^n f)(0)$ por $(D^n f)(x_0)$, donde x_0 es un punto cualquiera de $\mathbb{R}$.

A continuación, estudiaremos la íntima relación que existe entre la clase $\mathcal{C}\{n!\}$ y la de las funciones holomorfas en una banda horizontal que contenga al eje real.

Teorema 1.2.13. La clase ultradiferenciable $\mathcal{C}\{n!\}$ está formada por todas las funciones complejas de variable real, $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, a las que corresponde un $\delta > 0$ de modo que la función f puede extenderse a una función holomorfa acotada en la banda definida por $|\mathrm{Im}(z)| < \delta$.

Demostración. Razonaremos probando la contención en ambos sentidos. En primer lugar, consideremos el conjunto $\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C}\colon |\mathrm{Im}(z)| < \delta\}$, y tomemos una función $f \in \mathcal{H}(\Omega_\delta)$ acotada en Ω_δ, esto es, existe una constante positiva β de modo que $|f(z)| \leq \beta$ para cada $z \in \Omega_\delta$.

Tomemos $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, pero arbitrario, y tengamos presente que el disco centrado en x_0 de radio δ, denotado por $D(x_0, \delta)$, está íntegramente contenido en el dominio Ω_δ. Podemos pues aplicar las desigualdades de Cauchy para las derivadas, A.6, y deducir que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$|(D^n f)(x_0)| \leq \frac{n!\beta}{\delta^n} = \beta(\delta^{-1})^n n!.$$

Tomando $\beta_f = \beta$, y $B_f = \delta^{-1}$, concluimos de lo anterior que

$$\|D^n f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{|(D^n f)(x)|\} \leq \beta_f B_f^n n!, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

por lo que la restricción de f al eje real pertenece a $\mathcal{C}\{n!\}$.

Veamos la contención contraria, supongamos que f está definida en el eje real, y que $f \in \mathcal{C}\{n!\}$. Existen pues, dos constantes positivas β_f y B_f, tales que

$$\|D^n f\|_\infty \leq \beta_f B_f^n n!, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

En estas condiciones queremos garantizar que para un $\delta > 0$ adecuado, podemos extender la función f a una función holomorfa y acotada en la banda $|\mathrm{Im}(z)| < \delta$. Aplicando la fórmula de Taylor con resto integral, podemos escribir para cada $a, x \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$ que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(D^j f)(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}(D^n f)(t)dt. \tag{1.12}$$

Teniendo presente la desigualdad (1.11), podemos acotar el resto de (1.12). En efecto, podemos mayorar la expresión como sigue

$$\left|\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}(D^n f)(t)dt\right| \leq n\beta B^n \left|\int_a^x (x-t)^{n-1}dt\right| = \beta|B(x-a)|^n,$$

y concluir que esta tiende hacia 0 cuando $n \to \infty$, siempre que $|B(x-a)| < 1$, es decir, si $a - B^{-1} < x < a + B^{-1}$. Entonces, para tales x, podemos escribir a partir de (1.12) la siguiente expresión

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(D^j f)(a)}{j!}(x-a)^j. \tag{1.13}$$

Ahora bien, por la fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia, deducimos que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(D^n f)(a)}{n!}\right|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_f B^n} = B,$$

y por tanto, la serie (1.13), escrita ahora para variable compleja, define una función holomorfa F_a en $D(a, 1/B)$ que obviamente coincide con f en el intervalo $(a - 1/B, a + 1/B)$.

Por otro lado, tomemos $a, b \in \mathbb{R}$, tales que el conjunto $D = D(a, B^{-1}) \cap D(b, B^{-1})$ sea no vacío. Nos gustaría probar que F_a y F_b coinciden en D, y así concluir que son prolongación analítica la una de la otra. En efecto, sea $x \in \mathbb{R} \cap D$ arbitrario, resulta de la propia construcción de las funciones F_a y F_b que $F_a(x) = f(x) = F_b(x)$. Como el conjunto $\mathbb{R} \cap D$ es un intervalo, y por tanto posee puntos de acumulación, podemos aplicar el principio de identidad, para concluir que $F_a = F_b$ en D. Este hecho permite construir una extensión F de f,

$$F : \bigcup_{a\in\mathbb{R}} D(a, B^{-1}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

definida por

$$F(z) = F_a(z), \quad z \in D(a, B^{-1}),$$

y de modo que F es holomorfa en su dominio, la banda $|\mathrm{Im}(z)| < B^{-1}$.

Para concluir, tomemos δ real de forma que $0 < \delta < B^{-1}$, y veamos que la función F es acotada en la banda $\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C}\colon |\mathrm{Im}(z)| < \delta\}$. En efecto, sea $z = a+iy$, con $|y| < \delta$. Entonces, teniendo presente (1.11), y que $B\delta < 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} |F(z)| = |F_a(z)| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(D^j f)(a)}{j!}(iy)^j \right| &\leq \beta \sum_{j=0}^{\infty} B^j |iy|^j \\ &\leq \beta \sum_{j=0}^{\infty} (B\delta)^j = \frac{\beta}{1 - B\delta}. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Podemos entonces dar un primer ejemplo de clase casianalítica.

Corolario 1.2.14. La clase $\mathcal{C}\{n!\}$ es casianalítica.

Demostración. El resultado es consecuencia directa del teorema previo, pues una función f de la clase es la restricción a $\mathbb{R}$ de otra holomorfa F en una banda horizontal. Si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(x_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces también $F^{(n)}(x_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, y por lo tanto F será idénticamente nula en la banda y, en particular, en $\mathbb{R}$, con lo que se concluye. □

1.3. Teorema de Denjoy-Carleman

Culminamos el capítulo con la prueba del teorema de Denjoy-Carleman, cuyo objetivo es dar una caracterización de las clases casianalíticas en términos de la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ que las define. Antes de probar el teorema, mostraremos algunos resultados auxiliares que serán de interés a lo largo de la prueba. Recordamos que la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ se está suponiendo normalizada, en el sentido de que es logarítmicamente convexa y $M_0 = 1$.

Teorema 1.3.1. La clase $\mathcal{C}\{M_n\}$ es casianalítica si, y solo si, $\mathcal{C}\{M_n\}$ no contiene funciones no triviales con soporte compacto.

Demostración. En primer lugar, probaremos la implicación a la derecha. Supongamos pues que la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$ es casianalítica, y tomemos una función $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$, que sea de soporte compacto. Entonces, existe un punto x_0 que no está en el soporte de f, de modo que f se anula idénticamente en un entorno suyo, con lo que también todas sus derivadas se anulan en dicho punto. Ahora bien, como la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$ es casianalítica, se deduce que la función f es idénticamente nula.

Probemos el recíproco, para ello, razonemos por reducción al absurdo, supongamos que la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$ no es casianalítica. Como la clase es cerrada para transformaciones afines, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe una función $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$ de modo que para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, se tiene que $(D^n f)(0) = 0$, y tal que existe un punto $x_0 > 0$ con $f(x_0) \neq 0$. Consideremos la función $g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

y veamos que $g \in \mathcal{C}\{M_n\}$. En efecto, en primer lugar, resulta claro que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, puesto que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y además, por hipótesis, cumple que sus derivadas evaluadas en 0 son nulas. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\|D^n g\|_\infty \leq \|D^n f\|_\infty \leq \beta_f B_f^n M_n,$$

por lo que $g \in \mathcal{C}\{M_n\}$.

A continuación, consideremos la función $h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(x) = g(x)g(2x_0 - x).$$

De nuevo, el hecho de que la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$ sea invariante por transformaciones afines y que posea estructura de álgebra para el producto puntual de funciones, garantiza que la función $h \in \mathcal{C}\{M_n\}$. Además, el soporte de la función h es compacto, pues la función se anula si $x \leq 0$, o $x \geq 2x_0$. Sin embargo, al evaluar en x_0, se tiene que $h(x_0) = f(x_0)^2 \neq 0$. Por tanto, h es una función no trivial de $\mathcal{C}\{M_n\}$ con soporte compacto. □

Lema 1.3.2. Si la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ es logarítmicamente convexa, entonces $\{M_n^{1/n}\}_{n=1}^\infty$ es monótona creciente.

Demostración. En primer lugar, denotemos por $a_n = M_n^{\frac{1}{n}}$, y veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_n \leq a_{n+1}$.

En efecto, razonemos por inducción. Si $n = 1$ el resultado es claro, pues $M_1^2 \leq M_0 M_2 = M_2$, y por tanto, $M_1 \leq M_2^{\frac{1}{2}}$. A continuación, supongamos que para un cierto $n \in \mathbb{N}$ la propiedad es cierta, es decir, $a_n \leq a_{n+1}$, y probémoslo para $n+1$, esto es, $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. Por un lado, teniendo presente que la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, es logarítmicamente convexa, se tiene que $M_{n+1}^2 \leq M_n M_{n+2}$. Ahora bien, tomando raíces n-ésimas en la expresión anterior, se tiene que

$$M_{n+1}^{\frac{2}{n}} \leq M_n^{\frac{1}{n}} M_{n+2}^{\frac{1}{n}} \leq M_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} M_{n+2}^{\frac{1}{n}},$$

donde en la última desigualdad se ha hecho uso de la hipótesis de inducción. Operando en la desigualdad previa, se tiene que

$$M_{n+1}^{\frac{n+2}{n(n+1)}} \leq M_{n+2}^{\frac{1}{n}},$$

concluyéndose finalmente que $a_{n+1} = M_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \leq M_{n+2}^{\frac{1}{n+2}} = a_{n+2}$. $\square$

Observación 1.3.3. Supongamos que existe una constante positiva A tal que

$$M_n^{1/n} \leq A, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_0.$$

Es inmediato comprobar que, entonces, $\mathcal{C}\{M_n\} \subset \mathcal{C}\{n!\}$, y se sigue del corolario 1.2.14 que la clase será casianalítica. Por lo tanto, para no tratar situaciones ya resueltas, de ahora en adelante se supondrá que $\{M_n^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$ es no acotada o, equivalentemente gracias al lema previo, que

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty.$$

Esto garantiza que las funciones $Q(x)$ y $q(x)$ definidas a continuación son finitas para todo $x \geq 0$.

Estamos preparados para establecer el teorema fundamental sobre clases casianalíticas.

Teorema 1.3.4 (de Denjoy-Carleman)**.** Sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión logarítmicamente convexa con $M_0 = 1$, y tal que $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty$. Consideremos las siguientes funciones definidas, para $x > 0$, por

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{M_n}, \qquad q(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{x^n}{M_n}.$$

Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1) $\mathcal{C}\{M_n\}$ no es casianalítica.
2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(Q(x))}{1+x^2}dx < \infty.$
3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(q(x))}{1+x^2}dx < \infty.$
4) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$
5) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty.$

Demostración. En primer lugar tengamos presente que para cada $x > 0$, se tiene que $Q(x) \geq 1$, y que $q(x) \geq 1$.
En efecto, por un lado, basta observar que en ambos casos los términos que conforman las expresiones son positivos, y por otro lado, su primer elemento (el correspondiente a $n = 0$) es 1. Este hecho garantiza que las expresiones que aparecen en 2) y en 3) tengan perfecto sentido, siendo los integrandos no negativos.

Con vistas a la justificación del teorema, realizaremos un razonamiento circular.

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $\mathcal{C}\{M_n\}$ no es casianalítica. Entonces, en virtud del teorema 1.3.1, debe existir una función $\phi \in \mathcal{C}\{M_n\}$ no trivial de soporte compacto, digamos $\mathrm{sop}(\phi) \subset [a,b]$. Existen pues constantes positivas β_ϕ y B_ϕ, de modo que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $\|D^n\phi\|_\infty \leq \beta_\phi B_\phi^n M_n$. Tomemos α y β dos números reales, con $\alpha > 0$, y consideremos, para cada $x \in \mathbb{R}$, la función

$$F(x) = \frac{1}{\beta_\phi}\phi(\alpha x + \beta).$$

Debido a que la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$ es invariante por transformaciones afines, se deduce que la función F está en $\mathcal{C}\{M_n\}$. Además, para cada $x \in \mathbb{R}$, fijado $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$|D^nF(x)| = |\frac{\alpha^n}{\beta_\phi}(D^n\phi)(\alpha x + \beta)| \leq \alpha^n B_\phi^n M_n = (\alpha B_\phi)^n M_n.$$

Entonces, tomando $\alpha = \frac{1}{2B_\phi}$, podemos concluir que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, se verifica que

$$\|D^nF\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n M_n. \tag{1.14}$$

Por otro lado, si tomamos $\beta = a$, se tiene que $a \leq \alpha x + \beta \leq b$ si, y solo si, $0 \leq x \leq A$, siendo $A := 2B_\phi(b-a)$. Por tanto, hemos definido una función $F \in \mathcal{C}\{M_n\}$, no trivial, con soporte compacto contenido en $[0, A]$. A continuación, consideremos para cada $z \in \mathbb{C}$ la función

$$f(z) = \int_0^A F(t)e^{itz}dt, \tag{1.15}$$

que resulta ser entera, pues basta observar que la función $\psi(z,t) = F(t)e^{itz}$ satisface cada una de las condiciones del teorema A.4. Definamos también la función $g\colon D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$g(w) = f\left(\frac{i - iw}{1+w}\right),$$

es decir, la función g es la composición de una transformación conforme (de hecho, una homografía) que lleva el disco unidad en el semiplano superior abierto $\mathbb{H}$, con la función f. Si tomamos $z \in \mathbb{C}$ tal que $y = \mathrm{Im}(z) > 0$, entonces $\mathrm{Re}(itz) = -ty < 0$, para cada $t \in [0, A]$. Por tanto, para cada z en el semiplano superior, se tiene que

$$|f(z)| = \left| \int_0^A F(t)e^{itz}dt \right| \leq \int_0^A |F(t)|dt.$$

Como la función F es continua y de soporte compacto, se tiene que $|F(t)|$ está acotada, por lo que f está acotada en el semiplano superior. Notemos que de la propia construcción de g, esta resulta estar acotada en el disco unidad abierto. Además, g es continua en el disco unidad cerrado, excepto en el punto $w = -1$. Por otro lado, como F no es nula, en virtud del teorema de unicidad para transformadas de Fourier, se tiene que f tampoco es nula, y por consiguiente, lo mismo ocurre con g.

Se deduce de lo anterior y del teorema A.10 que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(|g(e^{i\theta})|)d\theta > -\infty. \tag{1.16}$$

Realizando el cambio de variable

$$x = \frac{i - ie^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = \frac{ie^{i\theta/2}(-e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} = \frac{\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)} = \tan(\theta/2)$$

en la integral anterior, se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(|g(e^{i\theta})|)d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(|f(x)|)}{1+x^2}dx > -\infty. \tag{1.17}$$

Ahora bien, f es una función entera y acotada en $\mathbb{H}$, luego acotada en su frontera. Deducimos que entonces también

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\log(|f(x)|)}{1+x^2}dx > -\infty,$$

y por tanto

$$-\int_0^\infty \frac{\log(|f(x)|)}{1+x^2}dx < \infty. \tag{1.18}$$

Por otro lado, para cada $z \neq 0$, integrando por partes sucesivamente en (1.15), obtendremos que

$$f(z) = (iz)^{-n}\int_0^A (D^n F)(t)e^{itz}dt. \tag{1.19}$$

Esto se debe a que la función F y todas sus derivadas se anulan en 0 y en A. Deducimos de (1.14) y (1.19), que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, y $x \in \mathbb{R}$, podemos acotar de la siguiente manera

$$|x^n f(x)| \leq \left|\int_0^A (D^n F)(t)e^{itx}dt\right| \leq \int_0^A |(D^n F)(t)|dt \leq 2^{-n}AM_n.$$

En consecuencia, se tiene para cada $x \geq 0$ que

$$Q(x)|f(x)| = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n|f(x)|}{M_n} = \sum_{n=0}^\infty 2^{-n}A \leq 2A.$$

Tomando logaritmos en la expresión previa, se deduce que

$$\log(Q(x)|f(x)|) = \log(Q(x)) + \log(|f(x)|) \leq \log(2A), \qquad x \geq 0.$$

Para concluir, multipliquemos la expresión previa por $(1+x^2)^{-1}$, e integremos en la semirrecta real positiva,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\log(Q(x))}{1+x^2}dx &\leq \int_0^\infty \frac{\log(2A)}{1+x^2}dx - \int_0^\infty \frac{\log(|f(x)|)}{1+x^2}dx \\ &\leq \log(2A)\frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{\log(|f(x)|)}{1+x^2}dx < \infty,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se deduce de (1.18).

2) $\Rightarrow$ 3) Para probar esta implicación, basta justificar que para cada $x > 0$ se tiene que $q(x) \leq Q(x)$. En efecto, fijemos $x_0 > 0$, y tengamos en cuenta que $q(x_0)$ es de hecho un máximo, y como tal, su valor será uno de los

sumandos que aparece en $Q(x_0)$. Además, teniendo presente que la serie que aparece en $Q(x_0)$ es de términos positivos, se tiene la desigualdad buscada. Por otro lado, se sigue de la monotonía de la función logaritmo que

$$\log(q(x)) \leq \log(Q(x)), \qquad \text{para cada } x > 0.$$

Para concluir, basta dividir a ambos lados de la desigualdad anterior por $(1+x^2)^{-1}$, e integrar en la semirrecta real positiva, de donde, haciendo uso de la monotonía de la integral, se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{\log(q(x))}{1+x^2}dx \leq \int_0^\infty \frac{\log(Q(x))}{1+x^2}dx < \infty.$$

3) $\Rightarrow$ 4) Denotemos por $a_n = M_n^{\frac{1}{n}}$, entonces la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ es monótona creciente en virtud del lema 1.3.2.

Si suponemos que $x \geq ea_n$, entonces $x^n(M_n)^{-1} \geq e^n$, y teniendo presente la monotonía de la función logaritmo, podemos deducir que

$$\log(q(x)) \geq \log\left(\frac{x^n}{M_n}\right) \geq \log(e^n) = n.$$

En consecuencia, para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} e\int_{ea_1}^\infty \frac{\log(q(x))}{x^2}dx &= e\sum_{n=1}^N \int_{ea_n}^{ea_{n+1}} \frac{\log(q(x))}{x^2}dx + e\int_{ea_{N+1}}^\infty \frac{\log(q(x))}{x^2}dx \\ &\geq e\sum_{n=1}^N n\int_{ea_n}^{ea_{n+1}} \frac{1}{x^2}dx + e(N+1)\int_{ea_{N+1}}^\infty \frac{1}{x^2}dx \\ &= \sum_{n=1}^N n\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) + \frac{N+1}{a_{N+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{1}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Se sigue de la hipótesis 3) que la integral

$$\int_{ea_1}^\infty \frac{\log(q(x))}{1+x^2}dx$$

es convergente, por lo que aplicando el criterio de comparación para integrales impropias, se tiene que la integral

$$\int_{ea_1}^\infty \frac{\log(q(x))}{x^2}dx$$

converge. Con todo esto, (1.20) garantiza la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

4) $\Rightarrow$ 5) Consideremos la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$\lambda_n = \frac{M_{n-1}}{M_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.21}$$

Como la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ verifica que $M_n^2 = M_n M_n \leq M_{n-1}M_{n+1}$, entonces se obtiene que

$$\lambda_{n+1} = \frac{M_n}{M_{n+1}} \leq \frac{M_{n-1}}{M_n} = \lambda_n,$$

y por tanto, la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente. Ahora bien, si denotamos como antes $a_n = M_n^{\frac{1}{n}}$, tendremos que

$$(a_n\lambda_n)^n = M_n\lambda_n^n \leq M_n\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1 = M_n\frac{1}{M_n} = 1.$$

Deducimos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lambda_n \leq \frac{1}{a_n},$$

por lo que la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

implica la convergencia de la serie deseada.

5) $\Rightarrow$ 1) Supongamos ahora que $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$, donde la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ viene dada por (1.21). Definamos la función

$$f(z) = \left(\frac{\sin(z)}{z}\right)^2 \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z},$$

y veamos que es entera. Tomemos la función $g(z)$ definida por

$$g(z) = 1 - \frac{\sin(z)}{z}, \quad z \neq 0; \quad g(0) = 0.$$

Como g es entera y tiene un cero en el origen, existirá una función h entera de modo que $g(z) = zh(z)$. Como la función h es acotada en los discos cerrados, existirá una constante $B > 0$ tal que si $|z| \leq 1$, entonces $|h(z)| \leq B$. Se sigue de lo anterior que para cada $z \in \mathbb{C}$, con $|z| \leq 1$, se tiene que

$$|g(z)| = \left|1 - \frac{\sin(z)}{z}\right| = |h(z)||z| \leq B|z|.$$

En particular, si $\lambda_n|z| \leq 1$, se deduce que

$$\left|1 - \frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z}\right| \leq B|\lambda_n z| = B\lambda_n|z|. \tag{1.22}$$

Por tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1 - \frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z}\right| \tag{1.23}$$

converge uniformemente en los conjuntos compactos de $\mathbb{C}$. En efecto, sea K un conjunto compacto, de forma que existe $R > 0$ tal que $K \subseteq \overline{D}(0, R)$. Como por hipótesis la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ converge, su termino general verifica que $\lambda_n \to 0$, y por tanto $\lambda_n^{-1} \to \infty$, cuando $n \to \infty$. Existe pues $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ se tiene que $R \leq (\lambda_n)^{-1}$, luego $\lambda_n R \leq 1$. Entonces, teniendo presente (1.22), se deduce para cada $z \in K$ que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left|1 - \frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z}\right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} B\lambda_n|z| \leq BR\sum_{n=n_0}^{\infty}\lambda_n \leq BR\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty,$$

justificando con ello la convergencia normal, y por tanto uniforme, de la serie (1.23) en K. En virtud del teorema A.7, afirmamos que la función

$$\phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z}$$

es entera, y no idénticamente nula, puesto que el conjunto de sus ceros es la unión de los conjuntos de ceros de cada función $\sin(\lambda_n z)$ (excluyendo el 0), todos ellos sobre el eje real. Concluimos que la función f es entera, pues es producto de funciones enteras. Además, no es idénticamente nula puesto que ni la función $\sin(z)$ ni ϕ lo son. A continuación, probemos que f es una función de tipo exponencial. Para ello, tengamos presente la identidad

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itz}dt = \frac{1}{z}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{\sin(z)}{z}.$$

Escribiendo $z = x + iy$, y tomando módulos, la expresión anterior muestra que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin(z)}{z}\right| &\leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |e^{itz}|dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |e^{itx}||e^{-ty}|dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ty}dt = \frac{\sinh(y)}{y} \leq e^{|y|} \leq e^{|z|},\end{aligned}$$

por lo que

$$|f(z)| \leq \exp\left((2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n)|z|\right) ,$$

y f es de tipo exponencial. Por otra parte, sabemos que para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $|\sin(x)| \leq |x|$ y $|\sin(x)| \leq 1$. Por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ se verifica que

$$\begin{aligned}|x^k f(x)| &= |x^k|\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^2 \prod_{n=1}^{k}\left|\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n x}\right| \prod_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n x}\right| \\ &\leq |x^k|\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \prod_{n=1}^{k}\frac{|\sin(\lambda_n x)|}{\lambda_n |x|} \prod_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n x}{\lambda_n x}\right| \\ &\leq |x^k|\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{\lambda_1 \cdots \lambda_k |x|^k} = M_k\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Se sigue de lo anterior que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, teniendo presente la monotonía de la integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)|dx \leq M_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx = M_k \pi,$$

y por tanto,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)|dx \leq M_k. \tag{1.25}$$

Por otro lado, para $k = 0$ y $x \in \mathbb{R}$, se deduce de (1.24) que

$$|f(x)|^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4,$$

por lo que f restringida a $\mathbb{R}$ es de cuadrado integrable, en efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 dx = \frac{2\pi}{3} < \infty.$$

Hemos probado que f satisface las hipótesis del teorema de Paley-Wiener 1.1.2. En consecuencia, la transformada de Fourier de f, definida para t real,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx,$$

es una función de soporte compacto contenido en el intervalo $[-A, A]$, que no es idénticamente nula. Por otro lado, las desigualdades (1.25) muestran que F es una función indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$, en virtud del teorema de derivación de integrales paramétricas, cumpliendo que para cada $k \in \mathbb{N}_0$,

$$(D^k F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k f(x) e^{-itx} dx,$$

y por tanto,

$$|(D^k F)(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |(-ix)^k f(x) e^{-itx}| dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)| dx \leq M_k.$$

Se sigue de lo anterior que para cada $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\|D^k F\|_\infty \leq M_k,$$

por lo que $F \in \mathcal{C}\{M_n\}$. Finalmente, en virtud del teorema 1.3.1, la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$ no es casianalítica y la demostración queda completa. $\square$

Capítulo 2

Generalización del problema de Watson a una banda.

El concepto de desarrollo asintótico, introducido por H. Poincaré a finales del siglo XIX, pretende dar un significado analítico a las series de potencias divergentes (esto es, con radio de convergencia nulo) que aparecen como soluciones formales en muchos tipos de ecuaciones diferenciales, en diferencias o en q-diferencias, o en problemas de perturbación singular, en torno a singularidades de la ecuación. La idea fundamental es que dichas series serán representaciones o desarrollos asintóticos, en un sentido preciso, de verdaderas soluciones analíticas de la ecuación, definidas, si no en un entorno del punto singular z_0, sí al menos en un dominio que tenga a dicho punto en su frontera, por ejemplo un sector con vértice en el mismo.

Las funciones a considerar se definen de forma natural en dominios de la superficie de Riemann del logaritmo $\mathcal{R}$. Es habitual trabajar en sectores acotados

$$S(d,\gamma,r) := \{z \in \mathcal{R} : |\arg(z) - d| < \frac{\gamma\,\pi}{2},\ |z| < r\},$$

y en sectores no acotados

$$S(d,\gamma) := \{z \in \mathcal{R} : |\arg(z) - d| < \frac{\gamma\,\pi}{2}\},$$

bisecados por la dirección $d \in \mathbb{R}$, con apertura $\gamma\,\pi$ ($\gamma > 0$) y, en el primer caso, con radio $r \in (0,\infty)$. También se pueden considerar regiones sectoriales $G(d,\gamma)$, con dirección bisectriz $d \in \mathbb{R}$ y apertura $\gamma\,\pi$, que son aquellos dominios en $\mathcal{R}$ contenidos en el sector $S(d,\gamma)$, y tales que para cada $\beta \in (0,\gamma)$ existe $\rho = \rho(\beta) > 0$ de modo que $S(d,\beta,\rho) \subseteq G(d,\gamma)$. Sin pérdida de generalidad, podemos trabajar en torno al punto $z_0 = 0$. Denotemos entonces por $\mathbb{C}[[z]]$ el conjunto de las series de potencias formales en z con coeficientes complejos, y sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos.

Definición 2.0.5. Dada una región sectorial G, decimos que $f \in \mathcal{H}(G)$ admite $\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ como su $\{M_n\}$-desarrollo asintótico (uniforme) en G (de tipo $1/A$ para cierto $A > 0$) si existe $C > 0$ tal que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n \right| \leq C A^p M_p |z|^p, \qquad z \in G.$$

Se denotará por $f \sim^u_{\{M_n\}} \hat{f}$ en G, y $\tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(G)$ será el espacio de las funciones que admiten $\{M_n\}$-desarrollo asintótico uniforme en G (de algún tipo).

La existencia de desarrollo asintótico está íntimamente ligada a la acotación de las derivadas sucesivas de la función. Para expresar esta relación conviene introducir las siguientes clases.

Definición 2.0.6. Dados $A > 0$ y una región sectorial G, definimos

$$\mathcal{A}_{\{M_n\},A}(G) = \big\{ f \in \mathcal{H}(G) : \|f\|_{\{M_n\},A} := \sup_{z \in G, p \in \mathbb{N}_0} \frac{|f^{(p)}(z)|}{A^p M_p} < \infty \big\}.$$

Es sencillo probar que $(\mathcal{A}_{\{M_n\},A}(G), \| \ \|_{\{M_n\},A})$ es un espacio de Banach, y

$$\mathcal{A}_{\{M_n\}}(G) := \cup_{A>0} \mathcal{A}_{\{M_n\},A}(G)$$

se llama la clase ultraholomorfa de tipo Carleman-Roumieu en G definida por $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Obsérvese la analogía de estas clases con las clases $\mathcal{C}\{M_n\}$ introducidas y estudiadas en el primer capítulo. Las clases $\mathcal{A}_{\{M_n\}}(G)$ y $\tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(G)$ son espacios vectoriales complejos, y si $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ es logarítmicamente convexa, se prueba, de forma análoga al teorema 1.2.10, que son álgebras.

Para un sector S, acotado o no, dado que las derivadas de $f \in \mathcal{A}_{\{M_n\},A}(S)$ son lipschitzianas, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se puede definir

$$f^{(p)}(0) := \lim_{z \in S, z \to 0} f^{(p)}(z) \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Como consecuencia de la fórmula de Taylor y la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, se obtiene el siguiente resultado (ver [4, proposición 8] para una demostración que se puede adaptar fácilmente a nuestro caso).

Proposición 2.0.7. Sean $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión y S un sector. Entonces:

(i) Si $f \in \mathcal{A}_{\{n!M_n\},A}(S)$, entonces f admite $\hat{f} := \sum_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{p!} f^{(p)}(0) z^p$ como su $\{M_n\}$-desarrollo asintótico uniforme en S de tipo $1/A$, donde $(f^{(p)}(0))_{p\in\mathbb{N}_0}$ viene dada por (2.1). Por lo tanto,

$$\mathcal{A}_{\{n!M_n\}}(S) \subset \tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(S).$$

(ii) Dados un sector S y un subsector propio T de S (es decir, tal que la adherencia de T en $\mathcal{R}$ está contenida en S), existe una constante $c = c(T,S) > 0$ tal que la restricción a T, f_T, de una función f definida en S y que admite $\{M_n\}-$desarrollo asintótico uniforme en S de tipo $1/A > 0$, pertenece a $\mathcal{A}_{\{n!M_n\},cA}(T)$.

Este resultado justifica la posibilidad de sustituir, de forma razonable, el estudio de problemas de unicidad en las clases $\mathcal{A}_{\{n!M_n\},A}(S)$ (esto es, decidir si una función de la clase queda determinada por la sucesión definida en (2.1)) por los correspondientes problemas de unicidad del desarrollo asintótico en las clases $\tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(S)$, que pasamos a precisar.

Tiene sentido considerar la aplicación de Borel, denotada por $\widetilde{\mathcal{B}}$, que envía cada función con $\{M_n\}$-desarrollo asintótico uniforme en una región sectorial G en la serie de potencias correspondiente, que de acuerdo con la proposición 2.0.7 y la expresión (2.1), está unívocamente determinada y, además, pertenecerá a la clase de series de potencias formales

$$\mathbb{C}[[z]]_{\{M_n\}} = \Big\{\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]] \colon \text{existe } A > 0 \text{ tal que } \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{|a_p|}{A^p M_p} < \infty\Big\}.$$

Por lo tanto, la aplicación de Borel está bien definida de $\tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(G)$ en $\mathbb{C}[[z]]_{\{M_n\}}$, y es un homomorfismo de álgebras si la sucesión es logarítmicamente convexa.

Definición 2.0.8. Se dice que $f \in \tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(G)$ es plana si $f \sim^u_{\{M_n\}} \hat{0}$ en G (donde $\hat{0}$ es la serie de potencias con todos sus coeficientes nulos).

Se dice que la clase $\tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(G)$ es casianalítica si la aplicación de Borel en ella es inyectiva, es decir, si la única función plana en la clase es la idénticamente nula.

Uno de los primeros y fundamentales problemas de casianaliticidad resueltos se debe a G. N. Watson, que caracterizó las sucesiones para las que la clase $\tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(D(1,1))$ es casianalítica. Obsérvese que $D(1,1)$ es efectivamente una región sectorial bisecada por la dirección $d = 0$, de amplitud π y que tiene a 0 como punto frontera. El objetivo de este capítulo es presentar resultados de unicidad en clases de funciones holomorfas definidas en bandas horizontales "generalizadas" (en un sentido que se precisará) y sujetas a acotaciones adecuadas. Mediante la aplicación conforme $\exp(-s)$, dichas bandas se transforman en dominios de $\mathcal{R}$ con 0 en su frontera, y los resultados aquí obtenidos se pueden traducir fácilmente en otros de casianaliticidad para clases de funciones con desarrollo asintótico uniforme en 0, generalizando significativamente el resultado de Watson antes mencionado.

2.1. Crecimiento de una función holomorfa en un dominio elemental

El objetivo de esta sección es trasladar ciertos resultados conocidos para el disco unidad, o un semiplano, a funciones definidas en la banda de anchura π. La mayoría de los resultados aquí expuestos serán generalizados a lo largo de la memoria, y nos servirán para probar resultados de casianaliticidad sobre bandas generalizadas en un sentido que precisaremos más adelante.

Comenzamos enunciando un resultado equivalente al teorema A.10, y cuya prueba radica esencialmente en la transformación conforme que lleva el disco unidad $|z| < 1$, en el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Notación. Representamos por $\int^{\infty}$ (respectivamente, por $\int_{-\infty}$) a una integral extendida a un intervalo no acotado superiormente (resp. inferiormente) cuyo extremo inferior (resp. superior), finito, es irrelevante.

Teorema 2.1.1. Sea $f(z)$ una función no idénticamente nula, holomorfa y acotada en el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$, continua en el semiplano $\mathrm{Re}(z) \geq 0$. Entonces, se tiene que

$$\int^{\infty} \frac{\ln(|f(iy)|)}{y^2} dy > -\infty, \quad \text{y} \quad \int_{-\infty} \frac{\ln(|f(iy)|)}{y^2} dy > -\infty.$$

Demostración. Sea g una representación conforme del disco unidad $|z| < 1$ en el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$, es decir,

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

y consideremos la composición de funciones $h = f \circ g$. Es claro, por la propia construcción, que h es una función no idénticamente nula, holomorfa y acotada en el disco abierto $|z| < 1$, y es continua en el disco cerrado $|z| \leq 1$, salvo en el punto $z = 1$. Podemos aplicar el teorema A.10 para concluir que

$$-\infty < \int_0^{2\pi} \ln(|h(e^{i\theta})|)d\theta = \int_0^{2\pi} \ln(|f(g(e^{i\theta}))|)d\theta. \tag{2.2}$$

Por otro lado, se tiene que

$$g(e^{i\theta}) = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)-i\sin(\theta)} = \frac{2i\sin(\theta)}{2-2\cos(\theta)} = i\cot(\frac{\theta}{2}). \tag{2.3}$$

Sustituyendo (2.3) en (2.2), se deduce que

$$-\infty < \int_0^{2\pi} \ln(|f(i\cot(\frac{\theta}{2}))|)d\theta = \int_0^{\pi} \ln(|f(i\cot(\frac{\theta}{2}))|)d\theta \tag{2.4}$$

$$+ \int_{\pi}^{2\pi} \ln(|f(i\cot(\frac{\theta}{2}))|)d\theta. \tag{2.5}$$

Se sigue de lo anterior que ambos sumandos deben ser mayores estrictamente que $-\infty$, por lo que trabajando en primer lugar con (2.4), y realizando el cambio de variable $y = \cot(\theta/2)$, se tiene que

$$\begin{aligned}-\infty < \int_0^{\pi} \ln(|f(i\cot(\frac{\theta}{2}))|)d\theta &= -2\int_{\infty}^{0} \frac{\ln(|f(iy)|)}{1+y^2}dy \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{\ln(|f(iy)|)}{1+y^2}dy < 2\int_0^{\infty} \frac{\ln(|f(iy)|)}{y^2}dy.\end{aligned}$$

De lo anterior, se deduce que

$$-\infty < \int_0^{\infty} \frac{\ln(|f(iy)|)}{y^2}dy.$$

Por otro lado, trabajando ahora con (2.5), y realizando, de nuevo, el cambio de variable $y = \cot(\theta/2)$, se tiene ahora que

$$\begin{aligned}-\infty < \int_{\pi}^{2\pi} \ln(|f(i\cot(\frac{\theta}{2}))|)d\theta &= -2\int_0^{-\infty} \frac{\ln(|f(iy)|)}{1+y^2}dy \\ &= 2\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(|f(iy)|)}{1+y^2}dy < 2\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(|f(iy)|)}{y^2}dy,\end{aligned}$$

deduciéndose finalmente que

$$-\infty < \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(|f(iy)|)}{y^2}dy.$$

□

Tenemos presente ahora que la transformación dada por el logaritmo (tomando la rama principal) representa conformemente el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$ en la banda $|y| < \frac{\pi}{2}$. Notemos que la semirrecta correspondiente a los números reales negativos no corta al semiplano considerado. Podemos pues enunciar, de forma equivalente al teorema anterior, el siguiente resultado.

Notación. De ahora en adelante, escribiremos $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$ para referirnos al conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon |y| < \frac{\pi}{2}\}$. Entonces, su adherencia será el conjunto $\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{z}} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Teorema 2.1.2. Sea $f(z)$ una función no idénticamente nula, holomorfa y acotada en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, continua en la banda $\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{z}}$. Entonces, se tiene que

$$\int^{\infty} \ln\left(\left|f\left(x + i\frac{\pi}{2}\right)\right|\right) e^{-x} dx > -\infty,$$
$$\int^{\infty} \ln\left(\left|f\left(x - i\frac{\pi}{2}\right)\right|\right) e^{-x} dx > -\infty.$$

Demostración. A lo largo de la prueba, tomaremos el logaritmo en la rama principal. Consideremos a continuación, la función $g(z) = f(\log(z))$.

Es claro, por la propia construcción, que g es una función no idénticamente nula, holomorfa y acotada en el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$, y es continua en el semiplano $\mathrm{Re}(z) \geq 0$. Estamos pues, en condiciones de poder aplicar el teorema 2.1.1 para concluir que

$$\int^{\infty} \frac{\ln(|g(iy)|)}{y^2} dy > -\infty, \tag{2.6}$$
$$\int_{-\infty} \frac{\ln(|g(iy)|)}{y^2} dy > -\infty. \tag{2.7}$$

Ahora bien, trabajando en primer lugar con (2.6), y realizando el cambio de variable $x = \ln(|y|)$, se tiene que

$$\begin{aligned} -\infty < \int^{\infty} \frac{\ln(|g(iy)|)}{y^2} dy &= \int^{\infty} \frac{\ln(|f(\log(iy))|)}{y^2} dy \\ = \int^{\infty} \frac{\ln(|f(\ln(|y|) + i\frac{\pi}{2})|)}{y^2} dy &= \int^{\infty} \frac{\ln(|f(x + i\frac{\pi}{2})|)}{e^x} dx \\ = \int^{\infty} \ln(|f(x + i\tfrac{\pi}{2})|) e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, operando en (2.7), y realizando de nuevo el cambio de variable

$x = \ln(|y|)$, se concluye que

$$\begin{aligned} -\infty &< \int_{-\infty} \frac{\ln(|g(iy)|)}{y^2} dy = \int_{-\infty} \frac{\ln(|f(\log(iy))|)}{y^2} dy \\ &= \int_{-\infty} \frac{\ln(|f(\ln(|y|) - i\frac{\pi}{2})|)}{y^2} dy = \int_{-\infty} \ln(|f(x - i\tfrac{\pi}{2})|) e^{-x} dx. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.3. Sea $f(z)$ una función no idénticamente nula, holomorfa y acotada en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, continua en la banda $\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{z}}$. Si $N(x)$ es una función no decreciente tal que

$$\ln(|f(x+iy)|) \leq -N(x), \tag{2.8}$$

entonces

$$\int^{\infty} N(x) e^{-x} dx < \infty.$$

Demostración. En efecto, se sigue de la hipótesis (2.8) que

$$\ln(|f(x + i\tfrac{\pi}{2})|) \leq -N(x),$$

y multiplicando la expresión anterior por e^{-x} se obtiene que

$$\ln(|f(x + i\tfrac{\pi}{2})|) e^{-x} \leq -N(x) e^{-x}.$$

Aplicando ahora el teorema previo 2.1.2, se deduce que

$$-\infty < \int^{\infty} \ln\left(\left|f\left(x + i\frac{\pi}{2}\right)\right|\right) e^{-x} dx \leq \int^{\infty} -N(x) e^{-x} dx,$$

y por tanto, se concluye que

$$\int^{\infty} N(x) e^{-x} dx < \infty.$$

□

Para concluir esta sección nos centraremos en probar el recíproco del teorema 2.1.3, y para ello serán necesarios los siguientes resultados.

Lema 2.1.4. Sean t_0 un número real positivo, y $f\colon \mathcal{D}_{\mathrm{z}} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = 1 - e^{-e^{-t_0 + z}}$. Entonces, la función f admite un logaritmo analítico, que además toma valores reales para z real.

Demostración. Veamos en primer lugar que la función f nunca toma valores en el intervalo $(-\infty, 0]$. Para ello, observemos que si para ciertos t_0 y z se tiene que $e^{-e^{-t_0+z}}$ es real y

$$e^{-e^{-t_0+z}} \geq 1, \tag{2.9}$$

entonces

$$e^{-e^{-t_0+z}} = |e^{-e^{-t_0+z}}| = e^{-\mathrm{Re}(e^{-t_0+z})} \geq 1,$$

luego $-e^{-t_0+z}$ difiere de su parte real, que será no positiva, en un múltiplo entero de $2\pi i$. Existen entonces $h \geq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$ tales que

$$e^{-t_0+z} = -h + 2k\pi i.$$

Se deduce que

$$z = t_0 + \log(-h + 2k\pi i) = t_0 + \ln(|-h + 2k\pi i|) + i \arg(-h + 2k\pi i),$$

donde $\arg(-h + 2k\pi i)$ es uno de los argumentos de $-h + 2k\pi i$. Ahora bien, estos nunca pertenecen a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, y concluimos que no existe ningún z en $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$ que satisfaga (2.9).

Este hecho permite considerar la función $H = \log \circ F$, donde $F\colon [0, \infty) \times \mathcal{D}_{\mathrm{z}} \longrightarrow \mathbb{C}$ viene dada por $F(t, z) = 1 - e^{-e^{-t+z}}$ y log es la determinación principal del logaritmo. Es obvio que H es un logaritmo analítico de f, y es inmediato comprobar que H toma valores reales cuando z es real. □

Lema 2.1.5. Si z es un número complejo con parte real positiva, entonces

$$\left|\frac{1 - e^{-z}}{z}\right| < 1$$

Demostración. En efecto, tomemos z en las condiciones del enunciado, y escribamos

$$1 - e^{-z} = \int_0^z e^{-s} ds.$$

Tomando módulos, podemos acotar la integral anterior como sigue

$$|1 - e^{-z}| = |\int_0^z e^{-s} ds| \leq \sup\{|e^{-s}| \colon s \in [0, z]\} \cdot |z| \leq |z|.$$

□

Proposición 2.1.6. Sea $N_1(x)$ una función no decreciente definida para $x \geq 0$, tal que

$$N_1(0) = 0, \qquad \int_0^\infty e^{-x} dN_1(x) < \infty. \tag{2.10}$$

Entonces, la expresión

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \Big(\log(1 - e^{-e^{-t+z}}) + t - z\Big) dN_1(t) \tag{2.11}$$

representa una función holomorfa en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, tal que

$$\mathrm{Re}(\Phi(z)) \leq -\int_0^{x-1} N_1(t)dt \qquad \text{para todo } z \text{ con } \mathrm{Re}(z) = x \geq 1, \tag{2.12}$$

$$\mathrm{Re}(\Phi(z)) \leq 0 \qquad \text{para todo } z. \tag{2.13}$$

Demostración. Probaremos la holomorfía de la función Φ, para lo que será necesario apoyarnos en el teorema de holomorfía bajo el signo integral adaptado a la integral de Riemann-Stieltjes A.19. Las dos primeras hipótesis se derivan de la holomorfía del integrando. Nos centramos pues en detallar la tercera de las propiedades.

Podemos reescribir el integrando de (2.11) como sigue

$$\begin{aligned}
\log(1 - e^{-e^{-t+z}}) + t - z &= \log(1 - e^{-e^{-t+z}}) - \log(e^{-t+z}) \\
&= \log\Big(\frac{1 - e^{-e^{-t+z}}}{e^{-t+z}}\Big) \\
&= \log\left(\frac{e^{-t+z} - \frac{(e^{-t+z})^2}{2} + \frac{(e^{-t+z})^3}{6} - \cdots}{e^{-t+z}}\right) \\
&= \log\left(1 - \frac{e^{-t+z}}{2} + \frac{(e^{-t+z})^2}{6} - \cdots\right),
\end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad se ha utilizado el desarrollo de Taylor de la exponencial.

Ahora bien, si z varía en un conjunto acotado de la banda y hacemos tender t hacia infinito, entonces el argumento del logaritmo tiende hacia 1 y es posible aplicar equivalencias, obteniendo que

$$\log\left(1 - \frac{e^{-t+z}}{2} + \frac{(e^{-t+z})^2}{6} - \cdots\right) \sim -\frac{e^{-t+z}}{2} + \frac{(e^{-t+z})^2}{6} - \cdots \qquad (t \to \infty). \tag{2.14}$$

De hecho, como z está acotada, se sigue de lo anterior que

$$-\frac{e^{-t+z}}{2} + \frac{(e^{-t+z})^2}{6} - \cdots = -\frac{e^{-t+z}}{2} + \mathrm{O}(e^{-2t}) \qquad (t \to \infty).$$

A continuación, tomemos z en un disco $\overline{D}(z_0, r)$ contenido en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$. Entonces, se sigue de (2.14) que existe un $t_0 > 0$, de modo que para cada

$t > t_0$ se tiene que

$$\left|\log\left(1 - \frac{e^{-t+z}}{2} + \frac{(e^{-t+z})^2}{6} - \cdots\right)\right| \leq 2\left| - \frac{e^{-t+z}}{2} + \frac{(e^{-t+z})^2}{6} - \cdots\right|. \tag{2.15}$$

Por otro lado, tomando $|e^{-t+z}| < 1/2$, lo que es posible eligiendo $t > \ln(2) + \mathrm{Re}(z_0) + r$, tendremos que

$$\begin{aligned}\left| - \frac{e^{-t+z}}{2} + \frac{(e^{-t+z})^2}{6} - \cdots\right| &= \frac{|e^{-t+z}|}{2}\left|1 - \frac{(e^{-t+z})}{3} + \frac{(e^{-t+z})^2}{12} - \cdots\right| \\ &\leq \frac{|e^{-t+z}|}{2}\left(1 + \frac{|e^{-t+z}|}{3} + \frac{|e^{-t+z}|^2}{12} + \cdots\right) \\ &\leq \frac{|e^{-t+z}|}{2}\left(\frac{1}{1-|e^{-t+z}|}\right) \leq |e^{-t+z}|. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Tomando $t_1 = \max\{t_0, \ln(2) + \mathrm{Re}(z_0) + r\}$, se deduce de (2.15) y (2.16) que

$$\left|\log\left(1 - \frac{e^{-t+z}}{2} + \frac{(e^{-t+z})^2}{6} - \cdots\right)\right| \leq 2|e^{-t+z}| = 2e^{-t+\mathrm{Re}(z)} \leq 2e^{-t+\mathrm{Re}(z_0)+r}. \tag{2.17}$$

Queda pues justificada la convergencia uniforme cuando z varía en $\overline{D}(z_0, r)$, ya que de la segunda ecuación en (2.10) y de (2.17) deducimos que la integral (2.11) converge. Concluimos del teorema de holomorfía bajo el signo integral que $\Phi(z)$ es una función holomorfa en esta banda. Por otro lado, se tiene que

$$\mathrm{Re}(\log(1 - e^{-e^{-t+z}}) + t - z) = \mathrm{Re}\big(\log\big(\frac{1 - e^{-e^{-t+z}}}{e^{-t+z}}\big)\big) = \ln\left(\left|\frac{1 - e^{-e^{-t+z}}}{e^{-t+z}}\right|\right). \tag{2.18}$$

Además, para cada $z = x + iy$ en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$ se tiene que la parte real de e^{-t+z} es positiva, puesto que $\mathrm{Re}(e^{-t+z}) = e^{x-t}\cos(y)$. Aplicando el lema 2.1.4 se tiene que

$$\left|\frac{1 - e^{-e^{-t+z}}}{e^{-t+z}}\right| < 1.$$

Por tanto, la expresión dada en (2.18) es negativa, y se concluye que

$$\mathrm{Re}(\Phi(z)) = \int_0^\infty \mathrm{Re}(\log(1 - e^{-e^{-t+z}}) + t - z)dN_1(t) \leq 0.$$

Por último, consideremos un valor A positivo, y tengamos presente (2.13), entonces podemos escribir

$$\mathrm{Re}(\Phi(z)) \leq \int_0^A \ln(|1 - e^{-e^{-t+z}}|)dN_1(t) + \int_0^A t dN_1(t) - x\int_0^A dN_1(t). \tag{2.19}$$

Ahora bien, como para cada z en la banda se tiene que $\mathrm{Re}(e^{-t+z}) > 0$, entonces
$$|e^{-e^{-t+z}}| = e^{-\mathrm{Re}(e^{-t+z})} < 1,$$
y por tanto
$$|1 - e^{-e^{-t+z}}| \leq 1 + |e^{-e^{-t+z}}| < 2.$$
Aplicando la monotonía del logaritmo neperiano, y teniendo en cuenta que $N_1(0) = 0$, se tiene que

$$\int_0^A \ln(|1 - e^{-e^{-t+z}}|)dN_1(t) \leq \int_0^A \ln(2)dN_1(t) = \ln(2)N_1(A). \tag{2.20}$$

A continuación, aplicaremos integración por partes, teorema A.20, al segundo sumando de (2.19), para obtener

$$\int_0^A tdN_1(t) = tN_1(t)\Big|_{t=0}^{t=A} - \int_0^A N_1(t)dt = AN_1(A) - \int_0^A N_1(t)dt. \tag{2.21}$$

Sustituyendo (2.20) y (2.21) en (2.19), se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\Phi(z)) &\leq \ln(2)N_1(A) + AN_1(A) - \int_0^A N_1(t)dt - xN_1(A) \\ &= (\ln(2) + A - x)N_1(A) - \int_0^A N_1(t)dt.\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos (2.12), tomando $A = x - \ln(2)$ para $x \geq 1$:

$$\mathrm{Re}(\Phi(z)) \leq -\int_0^{x-\ln(2)} N_1(t)dt \leq -\int_0^{x-1} N_1(t)dt.$$

□

Concluimos con un resultado que se puede entender como un reciproco del teorema 2.1.3.

Teorema 2.1.7. Sea $N(x)$ una función no decreciente definida para todo x real, y tal que
$$\int^{\infty} N(x)e^{-x}dx < \infty. \tag{2.22}$$
Entonces, existe una función $f(z)$ holomorfa en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$ y que no se anula en la banda, tal que para cada $z = x + iy$ en $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$ se tiene que

$$\ln(|f(x + iy)|) \leq -N(x).$$

Demostración. Se puede reducir el problema al caso en que $N(x) > 0$ para todo $x > 0$. En efecto, si este no fuera el caso, definamos la función $M(x) = N(x) - N(0) + 1$, que resulta ser no decreciente y tal que $M(x) > 0$ para $x \geq 0$. Además, se cumple que

$$\begin{aligned}\int^{\infty} M(x)e^{-x}dx &= \int^{\infty} \big(N(x) - N(0) + 1\big)e^{-x}dx \\ &= \int^{\infty} N(x)e^{-x}dx - N(0)\int^{\infty} e^{-x}dx + \int^{\infty} e^{-x}dx < \infty.\end{aligned}$$

Entonces, si admitimos que existe una función $f_M(z)$ holomorfa en la banda $\mathcal{D}_z$ y que no se anula en $\overline{\mathcal{D}}_z$, y tal que para cada $z = x + iy$ en $\mathcal{D}_z$ cumple que

$$\ln(|f_M(x+iy)|) \leq -M(x),$$

basta considerar la función $f_N(z) = f_M(z)e^{-N(0)+1}$. Es claro que f_N así definida conserva las mismas propiedades de holomorfía y no anulación de f_M, y además, para cada $z = x + iy$ en la banda $\mathcal{D}_z$, se cumple que

$$\ln(|f_N(x+iy)|) = \ln(|f_M(x+iy)e^{-N(0)+1}|) \leq -M(x) - N(0) = -N(x).$$

Resolvamos por lo tanto el caso en que $N(x) > 0$ si $x > 0$. Sea $N_1(x)$ la función dada por

$$N_1(x) = \int_0^x N(t)dt.$$

Resulta claro que $N_1(0) = 0$, y que $N_1(x)$ es una función no decreciente, por ser $N(x)$ no negativa. Por otra parte, se tiene que

$$N_1(x) = \int_0^x N(t)dt = \int_0^x N(t)e^{-t}e^t dt \leq e^x \int_0^x N(t)e^{-t}dt. \tag{2.23}$$

Ahora bien, integrando por partes, se tiene que

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dN_1(x) = e^{-x}N_1(x)\Big|_{x=0}^{x\to\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x}N_1(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-x}N_1(x)dx, \tag{2.24}$$

donde la convergencia del $\lim_{x\to\infty} N_1(x)/e^x$ es consecuencia de (2.22) y de (2.23). Por otro lado, aplicando el teorema de Fubini y la hipótesis (2.22), se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-x}N_1(x)dx &= \int_0^{\infty} e^{-x}\bigg(\int_0^x N(t)dt\bigg)dx \\ &= \int_0^{\infty} N(t)\bigg(\int_t^{\infty} e^{-x}dx\bigg)dt = \int_0^{\infty} N(t)e^{-t}dt < \infty.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Ahora bien, uniendo (2.24) y (2.25), deducimos que

$$\int_0^\infty e^{-x} dN_1(x) < \infty.$$

Podemos aplicar la proposición 2.1.6 para deducir que existe una función $\Phi(z)$, construida con la función $N_1(x)$, holomorfa en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, y tal que $\mathrm{Re}(\Phi(z)) < 0$ independientemente del valor de $\mathrm{Re}(z) = x$. Además, para cada $x > 3$, se tiene que

$$\mathrm{Re}(\Phi(z)) \leq -\int_0^{x-1} N_1(t)dt \leq -N_1(x-2) \leq -N(x-3), \tag{2.26}$$

donde en las dos últimas desigualdades se ha hecho uso del no decrecimiento de las funciones $N_1(x)$ y $N(x)$, respectivamente.

A continuación, veamos que la función

$$f(z) = e^{\Phi(z+3)-N(0)},$$

satisface las tesis del teorema.

En primer lugar, se sigue de la proposición 2.1.6 que la función f es holomorfa en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, pues es composición de funciones que lo son, y por tanto es continua en dicha banda.

Además, para cada $z = x + iy$ en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, se tiene que

$$\ln(|f(z)|) = \ln(e^{\mathrm{Re}(\Phi(z+3)-N(0))}) = \mathrm{Re}(\Phi(z+3)-N(0)) = \mathrm{Re}(\Phi(z+3))-N(0). \tag{2.27}$$

Queremos probar que $\ln(|f(z)|) \leq -N(x)$. Para ello, distingamos dos casos:

1. Supongamos en primer lugar que $\mathrm{Re}(z) = x > 0$. Se tiene entonces que $\mathrm{Re}(z+3) > 3$, y aplicando (2.26) deducimos que $\mathrm{Re}(\Phi(z+3)) < -N(x)$. Sustituyendo estos resultados en (2.27), deducimos que

$$\ln(|f(z)|) \leq -N(x) - N(0) \leq -N(x).$$

2. Supongamos ahora que $\mathrm{Re}(z) = x \leq 0$. Teniendo presente que para cualquier valor de x, $\mathrm{Re}(\Phi(z)) < 0$, deducimos que

$$\ln(|f(z)|) \leq -N(0) \leq -N(x).$$

□

2.2. Teoremas sobre las funciones holomorfas en una banda

El objetivo de esta sección es presentar diversos resultados con el fin de dar una generalización de los teoremas 2.1.3 y 2.1.7 a bandas en un sentido generalizado que precisaremos a continuación.

A lo largo de este sección, consideraremos una función $G(\sigma)$ positiva, y continua para cada $\sigma > \sigma_0$, siendo σ_0 un número real o $-\infty$. Supondremos además que la función G tiene límite en infinito, es decir,

$$\lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma) = G < \infty.$$

Comenzamos mostrando la "banda"generalizada sobre la que trabajaremos.

Definición 2.2.1. Denotamos por Δ_s al dominio del plano complejo, cuyos puntos $s = \sigma + it$, donde $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ y $t = \mathrm{Im}(s)$, satisfacen que $\sigma > \sigma_0$, y $|t| < G(\sigma)$. Concretamente,

$$\Delta_s := \{s = \sigma + it \colon \sigma > \sigma_0, \text{ y } |t| < G(\sigma)\}.$$

Por no recargar la terminología, en muchas situaciones haremos referencia a ella simplemente como una banda.

Notación. En lo que sigue, dado un conjunto del plano complejo, $\Omega \subset \mathbb{C}$, denotaremos por Ω^+ a la intersección de Ω con el semiplano superior abierto, esto es,

$$\Omega^+ = \{z \in \Omega \colon \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Del mismo modo, denotaremos por Ω^- a la intersección del conjunto Ω con el semiplano inferior abierto, esto es,

$$\Omega^- = \{z \in \Omega \colon \mathrm{Im}(z) < 0\}.$$

Lema 2.2.2. Sea Ω un abierto conexo y simplemente conexo, distinto de $\mathbb{C}$, y supongamos que para cada $z \in \Omega$, se tiene que $\bar{z} \in \Omega$. Sea $a \in \Omega \cap \mathbb{R}$, y supongamos que $f \colon \Omega \longrightarrow D(0,1)$ es una aplicación biholomorfa con $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$ y $f(\Omega) = D(0,1)$. Entonces, o bien $f(\Omega^+)$ está íntegramente contenido en el semiplano superior, o bien en el inferior. Además, se tiene que $f(\Omega \cap \mathbb{R}) = (-1,1)$.

Demostración. Sean $a \in \Omega \cap \mathbb{R}$, fijo pero arbitrario, y f como en el enunciado. Consideremos la función $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Debido a la simetría de Ω, g está definida en Ω, y cumple que $g(\Omega) = D(0,1)$, $g(a) = \overline{f(\bar{a})} = \overline{f(a)} = 0$ y

$g'(a) = \overline{f'(\bar{a})} = \overline{f'(a)} = f'(a) > 0$. En virtud del teorema de representación conforme de Riemann A.13, deducimos que ambas funciones f y g deben ser iguales, es decir, debe ocurrir que

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}. \tag{2.28}$$

Es claro entonces que $f(\Omega \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, y de hecho $f(\Omega \cap \mathbb{R}) = (-1, 1)$. En efecto, si existiera $z \in \Omega \setminus \mathbb{R}$ tal que $f(z) \in (-1, 1)$, entonces $z \neq \bar{z}$ y $f(z) = f(\bar{z})$, en contra de la biyectividad de f. Por otro lado, observemos que Ω es unión disjunta de los conexos (por ser en los tres casos intersecciones no vacías de conexos) Ω^+, $\Omega \cap \mathbb{R}$ y Ω^-. Entonces, siendo f biholomorfa, $D(0, 1)$ será unión disjunta de los conexos $f(\Omega^+)$, $(-1, 1)$ y $f(\Omega^-)$, concluyéndose lo deseado de forma inmediata. □

Proposición 2.2.3. Existe una única aplicación $z\colon \Delta_s \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, con $z(s) = x(s) + iy(s)$, que realiza la representación conforme de Δ_s, sobre la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, cumpliendo las siguientes propiedades:

1) El intervalo (σ_0, ∞) se transforma en el eje real $(-\infty, \infty)$ del plano $z = x + iy$.

2) Fijado un valor σ^* arbitrario, se tiene que $z(\sigma^*) = 0$.

3) Para cada $\sigma > \sigma_0$, se tiene que $z'(\sigma) = x'(\sigma) > 0$.

Demostración. Sea $\sigma^* \in \mathbb{R}$ fijo pero arbitrario. Entonces, debido a que ambas bandas Δ_s y $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$ son conjuntos conexos y simplemente conexos, está justificada la aplicación del teorema de representación conforme de Riemann A.13. Existen por tanto, dos aplicaciones biholomorfas, $f\colon \Delta_s \longrightarrow D(0, 1)$ y $g\colon \mathcal{D}_{\mathrm{z}} \longrightarrow D(0, 1)$ tales que $f(\sigma^*) = 0$, $f'(\sigma^*) > 0$, $g(0) = 0$ y $g'(0) > 0$. Definamos la aplicación $z = g^{-1} \circ f\colon \Delta_s \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, y veamos que cumple las propiedades enunciadas.

En primer lugar, resulta claro que z así definido es una aplicación conforme pues es composición de ellas. Además, se cumple la segunda propiedad, en efecto,

$$z(\sigma^*) = (g^{-1} \circ f)(\sigma^*) = g^{-1}(0) = 0.$$

A continuación, aplicando el lema 2.2.2 a la función f, deducimos que $f(\Delta_s \cap \mathbb{R}) = (-1, 1)$. Análogamente, aplicando dicho lema a la función g se sigue que $g(\mathcal{D}_{\mathrm{z}} \cap \mathbb{R}) = (-1, 1)$. Ahora bien, como $\Delta_s \cap \mathbb{R} = (\sigma_0, \infty)$ y $\mathcal{D}_{\mathrm{z}} \cap \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, se tiene que

$$z(\Delta_s \cap \mathbb{R}) = z\big((\sigma_0, \infty)\big) = (g^{-1} \circ f)\big((\sigma_0, \infty)\big) = g^{-1}\big((-1, 1)\big) = (-\infty, \infty),$$

es decir, z cumple la segunda propiedad.

Por último, se sigue de la regla de la cadena y del teorema de la aplicación inversa que

$$z'(s) = (g^{-1} \circ f)'(s) = \frac{1}{g'(z(s))} f'(s).$$

Y por tanto, evaluando en σ^* se tiene que

$$z'(\sigma^*) = \frac{1}{g'(z(\sigma^*))} f'(\sigma^*) = \frac{1}{g'(0)} f'(\sigma^*) > 0.$$

Ahora bien, como z es real sobre la semirrecta (σ_0, ∞), entonces necesariamente la derivada conserva signo, es decir, es positiva. En efecto, si escribimos z descompuesto en su parte real e imaginaria, $z = x + iy$, entonces $z'(s) = x'(s)$, para cada $s \in (\sigma_0, \infty)$. Por tanto, si existiera algún punto $\sigma^{**} > \sigma_0$ donde la derivada fuera negativa, entonces, en virtud del teorema de Bolzano, debería anularse para algún valor entre σ^* y σ^{**}. Sin embargo, esto último contradice el hecho de que z sea una aplicación conforme, pues su derivada no puede anularse en ningún punto. Tenemos probada la tercera de las condiciones del enunciado. $\square$

Observación 2.2.4. En lo que sigue denotaremos por $s(z) = \sigma(z) + it(z)$ a la inversa de la aplicación $z(s)$, es decir, $s \colon \mathcal{D}_z \longrightarrow \Delta_s$ realiza la representación conforme de $\mathcal{D}_z$, sobre la banda Δ_s.

Definición 2.2.5. Denotaremos por $\underline{x}(\sigma)$, $\overline{x}(\sigma)$, $\underline{\sigma}(x)$ y $\overline{\sigma}(x)$ a las cantidades

$$\begin{aligned} \underline{x}(\sigma) &= \min_{|t| \leq G(\sigma)} x(\sigma + it), & \overline{x}(\sigma) &= \max_{|t| \leq G(\sigma)} x(\sigma + it), \\ \underline{\sigma}(x) &= \min_{|y| \leq \frac{\pi}{2}} \sigma(x + iy), & \overline{\sigma}(x) &= \max_{|y| \leq \frac{\pi}{2}} \sigma(x + iy), \end{aligned}$$

que, en virtud del teorema de Carathéodory A.14 aplicado a subconjuntos acotados adecuados de las respectivas bandas, están bien definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $\sigma > \sigma_0$.

Proposición 2.2.6. Sean σ_1, y σ_2 dos números reales, con $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$, y tales que

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} > 4, \tag{2.29}$$

entonces, se tiene que

$$\underline{x}(\sigma_2) - \overline{x}(\sigma_1) \geq \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - 4\pi. \tag{2.30}$$

Demostración. Sea $\omega(\sigma)$ la diferencia entre los valores $\overline{x}(\sigma)$ y $\underline{x}(\sigma)$, es decir, para cada $\sigma > \sigma_0$,

$$\omega(\sigma) = \overline{x}(\sigma) - \underline{x}(\sigma).$$

A continuación, para cada $\sigma > \sigma_0$, denotemos por S_σ el segmento en la banda Δ_s, de abscisa σ. Concretamente,

$$S_\sigma = \{s = \sigma + it\colon |t| < G(\sigma)\}.$$

Entonces, la imagen por la aplicación conforme z de dicho segmento, $z(S_\sigma)$, tiene longitud mayor o igual que $(\omega^2(\sigma) + \pi^2)^{\frac{1}{2}}$, en virtud del teorema de Pitágoras. Por tanto, expresando dicha longitud en forma de integral curvilínea, obtenemos la desigualdad siguiente

$$(\omega^2(\sigma) + \pi^2)^{\frac{1}{2}} \leq \int_{-G(\sigma)}^{G(\sigma)} |z'(\sigma + it)|dt. \tag{2.31}$$

Se sigue, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}\int_{-G(\sigma)}^{G(\sigma)} |z'(\sigma + it)|dt &\leq \left(\int_{-G(\sigma)}^{G(\sigma)} 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-G(\sigma)}^{G(\sigma)} |z'(\sigma + it)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \big(2G(\sigma)\big)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-G(\sigma)}^{G(\sigma)} |z'(\sigma + it)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Por tanto, sustituyendo (2.32) en (2.31) y operando, se obtiene que

$$\omega^2(\sigma) + \pi^2 \leq 2G(\sigma) \int_{-G(\sigma)}^{G(\sigma)} |z'(\sigma + it)|^2 dt.$$

Teniendo presente que para cada $\sigma > \sigma_0$, $G(\sigma)$ toma valores positivos, podemos reescribir lo anterior como sigue

$$\frac{\omega^2(\sigma)}{2G(\sigma)} + \frac{\pi^2}{2G(\sigma)} \leq \int_{-G(\sigma)}^{G(\sigma)} |z'(\sigma + it)|^2 dt.$$

Integrando entre σ_1, y σ_2, obtenemos que

$$\pi^2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{2G(\sigma)} + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\omega^2(\sigma)}{2G(\sigma)} d\sigma \leq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\int_{-G(\sigma)}^{G(\sigma)} |z'(\sigma + it)|^2 dt\right) d\sigma. \tag{2.33}$$

Por otro lado, tengamos presente que la integral doble que aparece en el lado derecho de la desigualdad, corresponde al área de la transformación por z, del dominio de la banda Δ_s comprendida entre las abscisas σ_1 y σ_2. En efecto, denotemos por $\Delta_{1,2}$ al conjunto $\{s \in \Delta_s \colon \sigma_1 < \sigma < \sigma_2\}$, por lo que, realizando el cambio de variable $z = z(s)$, el área de dicho conjunto se puede calcular como sigue

$$\text{Área}(z(\Delta_{1,2})) = \iint_{z(\Delta_{1,2})} 1 dxdy = \iint_{\Delta_{1,2}} \mathcal{J}_z d\sigma dt. \tag{2.34}$$

A continuación, calculemos el determinante jacobiano de la transformación $z(\sigma + it) = x(\sigma + it) + iy(\sigma + it)$,

$$\mathcal{J}_z = \begin{vmatrix} x_\sigma & x_t \\ y_\sigma & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_\sigma & -y_\sigma \\ y_\sigma & x_\sigma \end{vmatrix} = x_\sigma^2 + y_\sigma^2 = |x_\sigma + iy_\sigma|^2 = |z'(s)|^2 = |z'(\sigma + it)|^2, \tag{2.35}$$

donde en la segunda igualdad se ha hecho uso de las condiciones de Cauchy-Riemann. Sustituyendo (2.35) en (2.34) se obtiene lo deseado,

$$\text{Área}(z(\Delta_{1,2})) = \iint_{\Delta_{1,2}} |z'(\sigma + it)|^2 d\sigma dt.$$

Teniendo presente que la anchura de la banda $\mathcal{D}_z$ es π, y que el dominio $z(\Delta_{1,2})$ está contenido en el rectángulo de anchura $\overline{x}(\sigma_2) - \underline{x}(\sigma_1)$, es posible acotar dicha área, como sigue,

$$\iint_{\Delta_{1,2}} |z'(\sigma+it)|^2 d\sigma dt \leq \pi\Big(\overline{x}(\sigma_2) - \underline{x}(\sigma_1)\Big) = \pi\Big(\underline{x}(\sigma_2) - \overline{x}(\sigma_1) + \omega(\sigma_2) + \omega(\sigma_1)\Big). \tag{2.36}$$

Juntando (2.33) y (2.36), podemos escribir

$$\pi^2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{2G(\sigma)} + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\omega^2(\sigma)}{2G(\sigma)} d\sigma \leq \pi\Big(\underline{x}(\sigma_2) - \overline{x}(\sigma_1) + \omega(\sigma_2) + \omega(\sigma_1)\Big).$$

Operando en la expresión anterior, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\underline{x}(\sigma_2) - \overline{x}(\sigma_1) \geq \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\omega^2(\sigma)}{G(\sigma)} d\sigma - \omega(\sigma_2) - \omega(\sigma_1). \tag{2.37}$$

Se deduce de la hipótesis (2.29) y del teorema fundamental del cálculo integral que existen dos puntos σ_1' y σ_2' tales que $\sigma_1 < \sigma_1' < \sigma_2' < \sigma_2$, cumpliendo que

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} = \int_{\sigma_2'}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} = 2. \tag{2.38}$$

A continuación, consideremos

$$h(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{\sigma_1'} \frac{\omega^2(\tau)}{G(\tau)} d\tau - \omega(\sigma), \quad \text{y} \quad k(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_2'}^{\sigma} \frac{\omega^2(\tau)}{G(\tau)} d\tau - \omega(\sigma).$$

Entonces, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\omega^2(\sigma)}{G(\sigma)} d\sigma &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} \frac{\omega^2(\sigma)}{G(\sigma)} d\sigma + \int_{\sigma_1'}^{\sigma_2'} \frac{\omega^2(\sigma)}{G(\sigma)} d\sigma + \int_{\sigma_2'}^{\sigma_2} \frac{\omega^2(\sigma)}{G(\sigma)} d\sigma \\ &\geq \int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} \frac{\omega^2(\sigma)}{G(\sigma)} d\sigma + \int_{\sigma_2'}^{\sigma_2} \frac{\omega^2(\sigma)}{G(\sigma)} d\sigma,\end{aligned}$$

donde el segundo sumando, corresponde a la integral de una función positiva en un intervalo, y por tanto es estrictamente positiva, podremos reescribir la desigualdad (2.37) como sigue:

$$\underline{x}(\sigma_2) - \overline{x}(\sigma_1) \geq \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} + h(\sigma_1) + k(\sigma_2). \tag{2.39}$$

Afirmamos que existe un punto $\overline{\sigma}_1$, con $\sigma_1 < \overline{\sigma}_1 < \sigma_1'$, tal que

$$h(\overline{\sigma}_1) \geq -\pi. \tag{2.40}$$

Para ello, razonemos por reducción al absurdo, supongamos que lo contrario es cierto, es decir, que para cada $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_1')$ se tiene que $h(\sigma) < -\pi$, o equivalentemente, que $h(\sigma) + \pi < 0$. Se sigue de lo anterior que para $\sigma_1 < \sigma < \sigma_1'$, se cumple que

$$h(\sigma) + \pi + \omega(\sigma) = \pi + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{\sigma_1'} \frac{\omega^2(\tau)}{G(\tau)} d\tau < \omega(\sigma). \tag{2.41}$$

Denotando por $\phi(\sigma) = h(\sigma) + \pi + \omega(\sigma)$, se tiene que si σ es tal que $\sigma_1 < \sigma < \sigma_1'$, entonces

$$\phi^2(\sigma) < \omega^2(\sigma) = -2\pi\phi'(\sigma)G(\sigma).$$

En efecto, se sigue de (2.41) que $\phi(\sigma) < \omega(\sigma)$, y dado que ambas son cantidades positivas, se tiene que $\phi^2(\sigma) < \omega^2(\sigma)$ para $\sigma_1 < \sigma < \sigma_1'$. Por otro lado, del teorema fundamental del cálculo integral, se tiene que

$$\phi'(\sigma) = h'(\sigma) + \omega'(\sigma) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{\sigma_1'} \frac{\omega^2(\tau)}{G(\tau)} d\tau \right)' = -\frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2(\sigma)}{G(\sigma)},$$

de donde se deduce que

$$-2\pi\phi'(\sigma)G(\sigma) = \omega^2(\sigma) > \phi^2(\sigma).$$

Ahora bien, obtenemos de la desigualdad anterior que para $\sigma_1 < \sigma < \sigma_1'$,

$$\frac{1}{2} \frac{1}{G(\sigma)} < -\pi \frac{\phi'(\sigma)}{\phi^2(\sigma)}.$$

Integrando la expresión anterior entre σ_1 y σ_1', y teniendo presente que $\phi(\sigma_1') = \pi$, y que $\phi(\sigma_1) > 0$, se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} < -\pi \int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} \frac{\phi'(\sigma)}{\phi^2(\sigma)} d\sigma = \pi\left(\frac{1}{\phi(\sigma_1')} - \frac{1}{\phi(\sigma_1)}\right) = 1 - \frac{\pi}{\phi(\sigma_1)} < 1,$$

la cual contradice directamente (2.38), y por tanto queda justificado (2.40). Análogamente, se prueba que existe un punto $\overline{\sigma}_2$, con $\sigma_2' < \overline{\sigma}_2 < \sigma_2$, tal que

$$k(\overline{\sigma}_2) \geq -\pi. \tag{2.42}$$

Reemplazando en (2.39), σ_1 y σ_2 respectivamente por $\overline{\sigma}_1$ y $\overline{\sigma}_2$, se tiene que

$$\underline{x}(\overline{\sigma}_2) - \overline{x}(\overline{\sigma}_1) \geq \frac{\pi}{2}\int_{\overline{\sigma}_1}^{\overline{\sigma}_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} + h(\overline{\sigma}_1) + k(\overline{\sigma}_2) \geq \frac{\pi}{2}\int_{\overline{\sigma}_1}^{\overline{\sigma}_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - 2\pi, \tag{2.43}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de (2.40) y de (2.42). Además, teniendo presente que la aplicación z restringida al eje real es creciente, pues verifica que $z'(\sigma) = x'(\sigma) > 0$ para $\sigma > \sigma_0$, deducimos que $x(\sigma_1) < x(\overline{\sigma}_1)$, y que $x(\overline{\sigma}_2) < x(\sigma_2)$. Por tanto, podemos acotar (2.43) de la siguiente manera

$$\underline{x}(\sigma_2) - \overline{x}(\sigma_1) \geq \underline{x}(\sigma_2) - \overline{x}(\overline{\sigma}_1) \geq \underline{x}(\overline{\sigma}_2) - \overline{x}(\overline{\sigma}_1) \geq \frac{\pi}{2}\int_{\overline{\sigma}_1}^{\overline{\sigma}_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - 2\pi. \tag{2.44}$$

Por otro lado, como $\sigma_1 < \overline{\sigma}_1 < \sigma_1'$ y $\sigma_2' < \overline{\sigma}_2 < \sigma_2$, se sigue de (2.38) que

$$2 = \int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} \geq \int_{\sigma_1}^{\overline{\sigma}_1} \frac{d\sigma}{G(\sigma)}, \tag{2.45}$$

$$2 = \int_{\sigma_2'}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} \geq \int_{\overline{\sigma}_2}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)}. \tag{2.46}$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}\int_{\overline{\sigma}_1}^{\overline{\sigma}_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - 2\pi &= \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\overline{\sigma}_1} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - \frac{\pi}{2}\int_{\overline{\sigma}_2}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - 2\pi \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - \frac{\pi}{2}\left(\int_{\sigma_1}^{\overline{\sigma}_1} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} + \int_{\overline{\sigma}_2}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} + 4\right) \\
&\geq \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - 4\pi, \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de (2.45) y (2.46). Para concluir, basta agrupar (2.44) y (2.47), para obtener lo deseado

$$\underline{x}(\sigma_2) - \overline{x}(\sigma_1) \geq \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - 4\pi.$$

□

Se deduce en particular de la proposición anterior 2.2.6, el siguiente corolario.

Corolario 2.2.7. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{\underline{\sigma}(x)}^{\overline{\sigma}(x)} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} \leq 8. \tag{2.48}$$

Demostración. En efecto, fijemos $x_0 \in \mathbb{R}$ y distingamos dos situaciones:

1) Si

$$\int_{\underline{\sigma}(x_0)}^{\overline{\sigma}(x_0)} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} \leq 4,$$

entonces se sigue inmediatamente el resultado.

2) Si

$$\int_{\underline{\sigma}(x_0)}^{\overline{\sigma}(x_0)} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} > 4,$$

entonces, aplicando la proposición 2.2.6, tenemos que

$$\underline{x}\big(\overline{\sigma}(x_0)\big) - \overline{x}\big(\underline{\sigma}(x_0)\big) \geq \frac{\pi}{2} \int_{\underline{\sigma}(x_0)}^{\overline{\sigma}(x_0)} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} - 4\pi. \tag{2.49}$$

Ahora bien, a la hora de considerar la imagen de la transformación por x del segmento, situado dentro de la banda generalizada Δ_s y de abscisa $\overline{\sigma}(x_0)$, tengamos presente que esta corta al segmento dentro de la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$ con abscisa x_0. Por tanto, podemos establecer la desigualdad $\underline{x}\big(\overline{\sigma}(x_0)\big) \leq x_0$.

Un razonamiento similar muestra que se puede establecer la siguiente cota $\overline{x}\big(\underline{\sigma}(x_0)\big) \geq x_0$. Se sigue de lo anterior que

$$\underline{x}\big(\overline{\sigma}(x_0)\big) - \overline{x}\big(\underline{\sigma}(x_0)\big) \leq x_0 - x_0 = 0,$$

por lo que de (2.49) concluimos lo deseado,

$$\int_{\underline{\sigma}(x_0)}^{\overline{\sigma}(x_0)} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} \leq 4\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 8.$$

□

Observación 2.2.8. Como la función $G(\sigma)$ tiende hacia G cuando $\sigma \to \infty$, entonces, se sigue del corolario 2.2.7 que

$$\overline{\sigma}(x) - \underline{\sigma}(x) \leq 8G + \varepsilon(x), \qquad x \to \infty, \tag{2.50}$$

donde $\varepsilon(x)$ es una función tal que $\varepsilon(x) = o(1)$ cuando $x \to \infty$. Además, tomando $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios con $|y| \leq \frac{\pi}{2}$, podemos acotar $\overline{\sigma}(x) \geq \sigma(x)$ y $\underline{\sigma}(x) \leq \sigma(x+iy)$, o $\overline{\sigma}(x) \geq \sigma(x+iy)$ y $\underline{\sigma}(x) \leq \sigma(x)$. En particular, se deduce de (2.50) que

$$|\sigma(x) - \sigma(x+iy)| \leq 8G + \varepsilon(x), \qquad \varepsilon(x) = o(1),\, x \to \infty, \tag{2.51}$$

uniformemente para y con $|y| \leq \frac{\pi}{2}$.

Proposición 2.2.9. Si suponemos además que $G(\sigma)$ es de variación total acotada, y que existe $\delta > 0$ tal que $G(\sigma) \geq \delta > 0$ para $\sigma \geq \sigma_0$ (si $\sigma_0 = -\infty$, tomaríamos $G(\sigma)$ de variación acotada y $G(\sigma) \geq \delta$ sobre todo el eje real), entonces existe una constante C tal que para todos $\sigma_1, \sigma_2 > \sigma_0$ se tiene que

$$\overline{x}(\sigma_2) - \underline{x}(\sigma_1) \leq \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} + C. \tag{2.52}$$

Demostración. Por un lado, como la función $G(\sigma)$ es acotada por hipótesis, existirá una constante L tal que $|G(\sigma)| \leq L < \infty$.
Además, para cada $\sigma > \sigma_0$, denotemos por $V(\sigma)$ la variación total de $G(\sigma)$ entre σ_0 y σ, asimismo, como G es de variación total acotada, existirá una constante $V > 0$ de modo que $V(\sigma) \leq V < \infty$.
Por otro lado, para cada $x \in \mathbb{R}$ denotemos por Γ_x la imagen en la banda Δ_s del segmento de abscisa x de la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$. Análogamente, para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ con $\sigma > \sigma_0$, denotemos por Γ'_σ la imagen en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$ del segmento de abscisa σ de la banda Δ_s.
A continuación, fijemos una constante $a > \sigma_0$, y representemos por $A(\sigma)$ el área del recinto de Δ_s comprendido entre los segmentos de abscisas a y σ, que se puede calcular como

$$A(\sigma) = 2 \int_a^\sigma G(u)du.$$

Además, al ser la función G continua por hipótesis, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo integral y deducir que $A(\sigma)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y

$$A'(\sigma) = 2G(\sigma), \quad \sigma > \sigma_0. \tag{2.53}$$

Por ser G positiva, $A(\sigma)$ es estrictamente creciente, y su inversa será de clase $\mathcal{C}^1$ en su intervalo de definición. Denotemos por $\alpha(x)$ el punto del eje real de

Δ_s situado entre a y $\sigma(x)$, tal que el área comprendida entre a y $\alpha(x)$, esto es, $A(\alpha(x))$, es igual al área entre a y Γ_x.
Por último, representemos por $m(\sigma)$ al inferior de las longitudes de las curvas rectificables que unen un punto $p_1+iG(p_1)$, en la parte superior de la frontera de Δ_s, con otro $p_2 - iG(p_2)$, en la parte inferior de la frontera, y que corta al segmento vertical con abscisa σ.

Teniendo presente que para cada $x \in \mathbb{R}$, la curva Γ_x une dos puntos situados sobre la frontera de Δ_s, uno en la parte superior y otro en la inferior, y que además corta al segmento de abscisa $\alpha(x)$, podemos establecer la desigualdad,

$$m\big(\alpha(x)\big) \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |s'(x+iy)|dy,$$

pues la integral de la derecha es la longitud de Γ_x si se la parametriza mediante $y \mapsto s(x+iy)$ con $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce de lo anterior que

$$m^2\big(\alpha(x)\big) \leq \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |s'(x+iy)|^2 dy. \tag{2.54}$$

Por un lado, podemos escribir el área (en Δ_s) de la región comprendida entre el segmento de abscisa a y la curva Γ_x, como

$$\int_{z(a)}^{x} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |s'(u+iv)|^2 dv \right) du =: H(x),$$

donde hemos seguido un razonamiento similar al expuesto en la proposición 2.2.6. Una aplicación directa del teorema de continuidad bajo el signo integral garantiza que la función definida para cada u entre $z(a)$ y x, como

$$F(u) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |s'(u+iv)|^2 dv,$$

es continua. Y por tanto, aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, deducimos que $H(x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y

$$H'(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |s'(x+iy)|^2 dy.$$

Por otro lado, sabemos que, por definición de $\alpha(x)$,

$$A\big(\alpha(x)\big) = H(x). \tag{2.55}$$

Por lo tanto, podemos escribir $\alpha(x) = A^{-1} \circ H(x)$, que será también de clase $\mathcal{C}^1$. Se sigue de (2.54) y de lo anterior que

$$m^2\big(\alpha(x)\big) \leq \pi H'(x) = \pi \frac{d}{dx} A\big(\alpha(x)\big) = \pi A'\big(\alpha(x)\big)\alpha'(x), \tag{2.56}$$

donde la última igualdad proviene de la aplicación de la regla de la cadena. Este hecho, junto con (2.53), permite reescribir (2.56) de la siguiente manera:

$$m^2\big(\alpha(x)\big) \leq 2\pi G\big(\alpha(x)\big)\alpha'(x).$$

Como el término de la izquierda no se anula, escribamos equivalentemente

$$1 \leq 2\pi \frac{G\big(\alpha(x)\big)}{m^2\big(\alpha(x)\big)} \alpha'(x),$$

donde integrando para x_1 y x_2 números reales arbitrarios, con $x_1 < x_2$, y teniendo presente la monotonía de la integral, se obtiene que

$$x_2 - x_1 \leq 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{G\big(\alpha(x)\big)}{m^2\big(\alpha(x)\big)} \alpha'(x) dx = 2\pi \int_{\alpha(x_1)}^{\alpha(x_2)} \frac{G(\alpha)}{m^2(\alpha)} d\alpha, \tag{2.57}$$

siendo la última igualdad consecuencia del teorema de cambio de variable, tomando $\alpha = \alpha(x)$.
A continuación, tomemos $\sigma_2 \in \mathbb{R}$, con $\sigma_2 > \sigma_0$. Entonces, en virtud del corolario 2.2.7, se tiene que

$$\int_{\underline{\sigma}(\overline{x}(\sigma_2))}^{\overline{\sigma}(\overline{x}(\sigma_2))} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} \leq 8.$$

A continuación, teniendo presente que $|G(\sigma)| \leq L$ para cada $\sigma > \sigma_0$, podemos deducir que

$$\overline{\sigma}\big(\overline{x}(\sigma_2)\big) - \underline{\sigma}\big(\overline{x}(\sigma_2)\big) \leq 8L. \tag{2.58}$$

Ahora bien, como por un lado, el segmento de abscisa $\overline{x}(\sigma_2)$ tiene intersección no vacía con la curva Γ'_{σ_2}, se tendrá pues que la curva $\Gamma_{\overline{x}(\sigma_2)}$ tiene intersección no vacía con el segmento de abscisa σ_2, y por tanto los puntos que se sitúen en dicha intersección tienen como parte real a σ_2. Se concluye que

$$\sigma_2 \in \big[\underline{\sigma}\big(\overline{x}(\sigma_2)\big), \overline{\sigma}\big(\overline{x}(\sigma_2)\big)\big]. \tag{2.59}$$

Por otro lado, por definición de $\alpha\big(\overline{x}(\sigma_2)\big)$, si este valor estuviera por encima de $\overline{\sigma}\big(\overline{x}(\sigma_2)\big)$(resp. por debajo de $\overline{\sigma}(\underline{x}(\sigma_2))$), entonces el área entre a y $\Gamma_{\overline{x}(\sigma_2)}$

sería estrictamente más grande (resp. estrictamente más pequeña) que el área entre a y $\alpha\big(\overline{x}(\sigma_2)\big)$, por lo que ha de ser

$$\alpha\big(\overline{x}(\sigma_2)\big) \in \big[\underline{\sigma}\big(\overline{x}(\sigma_2)\big), \overline{\sigma}\big(\overline{x}(\sigma_2)\big)\big]. \tag{2.60}$$

Se deduce de (2.58), (2.59) y (2.60) la desigualdad

$$\alpha\big(\overline{x}(\sigma_2)\big) - \sigma_2 \leq \overline{\sigma}\big(\overline{x}(\sigma_2)\big) - \underline{\sigma}\big(\overline{x}(\sigma_2) \leq 8L. \tag{2.61}$$

Sea $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, con $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_0$. Un razonamiento similar al anterior permite obtener la desigualdad

$$\sigma_1 - \alpha\big(\underline{x}(\sigma_1)\big) \leq \overline{\sigma}\big(\underline{x}(\sigma_1)\big) - \underline{\sigma}\big(\underline{x}(\sigma_1) \leq 8L. \tag{2.62}$$

Teniendo presente (2.57),(2.61) y (2.62) podemos escribir la siguiente cadena de desigualdades

$$\overline{x}(\sigma_2) - \underline{x}(\sigma_1) \leq 2\pi \int_{\alpha(\underline{x}(\sigma_1))}^{\alpha(\overline{x}(\sigma_2))} \frac{G(\alpha)}{m^2(\alpha)} d\alpha \leq 2\pi \int_{\sigma_1 - 8L}^{\sigma_2 + 8L} \frac{G(\alpha)}{m^2(\alpha)} d\alpha. \tag{2.63}$$

Por otro lado, como $G(\sigma) \geq \delta$ para cada $\sigma \geq \sigma_0$, se tiene que $m(\alpha) \geq 2\delta$, y por tanto, es posible establecer la acotación

$$\frac{G(\alpha)}{m^2(\alpha)} \leq \frac{L}{4\delta^2}.$$

Se sigue de (2.63) y de lo anterior que

$$\begin{aligned}
\overline{x}(\sigma_2) - \underline{x}(\sigma_1) &\leq 2\pi \int_{\sigma_1 - 8L}^{\sigma_2 + 8L} \frac{G(\alpha)}{m^2(\alpha)} d\alpha \\
&= 2\pi \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{G(\alpha)}{m^2(\alpha)} d\alpha \\
&\quad + 2\pi \bigg(\int_{\sigma_1 - 8L}^{\sigma_1} \frac{G(\alpha)}{m^2(\alpha)} d\alpha + \int_{\sigma_2}^{\sigma_2 + 8L} \frac{G(\alpha)}{m^2(\alpha)} d\alpha \bigg) \\
&\leq \pi \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{2G(\alpha)}{m^2(\alpha)} d\alpha + \frac{8\pi L^2}{\delta^2}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{2G(\alpha)}{m^2(\alpha)} d\alpha &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\alpha}{2G(\alpha)} + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{4G^2(\alpha) - m^2(\alpha)}{2G(\alpha) m^2(\alpha)} d\alpha \\
&= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\alpha}{2G(\alpha)} + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{2G(\alpha) + m(\alpha)}{2G(\alpha) m^2(\alpha)} \big(2G(\alpha) - m(\alpha)\big) d\alpha \\
&\leq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\alpha}{2G(\alpha)} + \frac{L}{2\delta^3} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \big(2G(\alpha) - m(\alpha)\big) d\alpha,
\end{aligned} \tag{2.65}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de las siguientes acotaciones

$$\frac{2G(\alpha)+m(\alpha)}{2G(\alpha)m^2(\alpha)} \leq \frac{2G(\alpha)+2G(\alpha)}{2G(\alpha)m^2(\alpha)} \leq \frac{4L}{(2\delta)(4\delta^2)} = \frac{L}{2\delta^3}\,.$$

Por definición de $m(\alpha)$ se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe una curva γ que une $m_1 - iG(m_1)$ con $m_2 + iG(m_2)$ cortando al segmento vertical de abscisa α, para ciertos $m_1, m_2 > \sigma_0$, de modo que $\operatorname{long}(\gamma) < m(\alpha)+\varepsilon$. Obsérvese que los puntos m_1 y m_2 han de pertenecer al intervalo $[\alpha-L, \alpha+L]$, pues de otro modo el segmento que une α con $\alpha + iG(\alpha)$, o el que une α con $\alpha - iG(\alpha)$, ambos de longitud menor o igual que L, permitirían reducir el valor de $m(\alpha)$. Sea ahora m_3 el punto de corte de γ^* y $\mathbb{R}$. Se tiene que

$$\operatorname{long}(\gamma) \geq |m_1 - iG(m_1) - m_3| + |m_2 + iG(m_2) - m_3| \geq G(m_1) + G(m_2).$$

Se sigue de lo anterior que

$$\begin{aligned}
2G(\alpha) - m(\alpha) &\leq 2G(\alpha) - (G(m_1) + G(m_2)) + \varepsilon \\
&\leq |G(\alpha) - G(m_1)| + |G(\alpha) - G(m_2)| + \varepsilon \\
&\leq \big(V(\alpha+L) - V(\alpha-L)\big) + \big(V(\alpha+L) - V(\alpha-L)\big) + \varepsilon \\
&= 2\big(V(\alpha+L) - V(\alpha-L)\big) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como la desigualdad previa es válida para cada $\varepsilon > 0$, deducimos que

$$2G(\alpha) - m(\alpha) \leq 2\big(V(\alpha+L) - V(\alpha-L)\big).$$

Teniendo presente la desigualdad anterior, es posible acotar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \big(2G(\alpha) - m(\alpha)\big) d\alpha &\leq 2\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \big(V(\alpha+L) - V(\alpha-L)\big)\, d\alpha \\
&= 2\int_{\sigma_1+L}^{\sigma_2+L} V(t)dt - 2\int_{\sigma_1-L}^{\sigma_2-L} V(t)dt \\
&= 2\int_{\sigma_2-L}^{\sigma_2+L} V(t)dt - 2\int_{\sigma_1-L}^{\sigma_1+L} V(t)dt \\
&\leq 2(2LV) + 0 = 4LV, \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

realizado en la primera igualdad los cambios de variable $t = \alpha+L$ y $t = \alpha-L$, respectivamente, en la primera y segunda integral, y teniendo presente en la último desigualdad que $V(\sigma)$ es un función positiva. Por último, se concluye de (2.64), (2.65) y (2.66) que

$$\begin{aligned}\overline{x}(\sigma_2) - \underline{x}(\sigma_1) &\leq \pi \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{2G(\alpha)}{m^2(\alpha)} d\alpha + \frac{8\pi L^2}{\delta^2} \\ &\leq \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\alpha}{G(\alpha)} + \frac{8\pi L^2}{\delta^2} + \frac{\pi L}{2\delta^3} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \big(2G(\alpha) - m(\alpha)\big) d\alpha \\ &\leq \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\alpha}{G(\alpha)} + \frac{8\pi L^2}{\delta^2} + \frac{\pi L}{2\delta^3}(4LV) = \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\alpha}{G(\alpha)} + C,\end{aligned}$$

donde la constante C viene dada por

$$C = \frac{8\pi L^2 \delta + 2\pi L^2 V}{\delta^3}.$$

□

Observación 2.2.10. Tomando $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ en las condiciones del lema 2.2.9, deducimos que existe una constante C tal que

$$\overline{x}(\sigma) - \underline{x}(\sigma) \leq \frac{\pi}{2} \int_{\sigma}^{\sigma} \frac{d\tau}{G(\tau)} + C = C. \tag{2.67}$$

Además, tomando $\sigma, t \in \mathbb{R}$ arbitrarios, con $\sigma > \sigma_0$, y $|t| \leq G(\sigma)$, entonces, podemos acotar $\overline{x}(\sigma) \geq x(\sigma)$ y $\underline{x}(\sigma) \leq x(\sigma + it)$, o $\overline{x}(\sigma) \geq x(\sigma + it)$ y $\underline{x}(\sigma) \leq x(\sigma)$. En particular, se deduce de (2.67) que

$$|x(\sigma) - x(\sigma + it)| \leq O(1), \quad \sigma \to \infty.$$

Por otro lado, del hecho de que $G(\sigma) \geq \delta > 0$, se deduce para cualesquiera $\sigma_1, \sigma_2 > \sigma_0$ que

$$\left| \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} \right| \leq \frac{\pi}{2\delta} |\sigma_2 - \sigma_1|,$$

y por tanto, se tiene que

$$|\overline{x}(\sigma_2) - \underline{x}(\sigma_1)| = O(|\sigma_2 - \sigma_1|) + O(1), \quad \sigma_1, \sigma_2 \to \infty.$$

En adelante, supondremos de nuevo que $G(\sigma)$ es continua en (σ_0, ∞), verificando además que $0 < \delta \leq G(\sigma) \leq L$ para $\sigma > \sigma_0$. Supondremos también que G es de variación acotada sobre la semirrecta $[\sigma_0, \infty)$, teniendo presente que si $\sigma_0 = -\infty$ entonces G es de variación acotada sobre toda la recta real. Por último, consideremos una constante c, con $c > \sigma_0$.

Definición 2.2.11. En las condiciones anteriores, definamos la función S por

$$S(\sigma) = \frac{\pi}{2} \int_{c}^{\sigma} \frac{du}{G(u)}, \quad \sigma > \sigma_0. \tag{2.68}$$

El papel que juega la función S será notorio conforme avancemos en la memoria, sirviendo para resolver los problemas de casianaliticidad sobre la banda Δ_s.

Proposición 2.2.12. Suponiendo que G cumple las condiciones impuestas anteriormente, se tiene que

$$x(\sigma) = S(\sigma) + O(1), \quad \sigma \to \infty. \tag{2.69}$$

Demostración. En primer lugar, tomando σ suficientemente grande, digamos $\sigma > 4L + c$, es posible garantizar que

$$\int_c^\sigma \frac{du}{G(u)} \geq \int_c^\sigma \frac{du}{L} = \frac{\sigma - c}{L} > 4.$$

Por lo que, tomando $\sigma_1 = c$ y $\sigma_2 = \sigma$, es posible aplicar la proposición 2.2.6, deduciéndose que

$$\underline{x}(\sigma) - \overline{x}(c) \geq \frac{\pi}{2} \int_c^\sigma \frac{du}{G(u)} - 4\pi = S(\sigma) - 4\pi.$$

Ahora bien, como $\underline{x}(\sigma) \leq x(\sigma)$, se sigue de lo anterior que

$$x(\sigma) \geq S(\sigma) + \big(\overline{x}(c) - 4\pi\big). \tag{2.70}$$

Por otro lado, aplicando la proposición 2.2.9, se deduce que existe una constante C de modo que

$$\overline{x}(\sigma) - \underline{x}(c) \leq \frac{\pi}{2} \int_c^\sigma \frac{du}{G(u)} + C = S(\sigma) + C.$$

De nuevo, como $\overline{x}(\sigma) \geq x(\sigma)$, se sigue de lo anterior que

$$x(\sigma) \leq S(\sigma) + \big(\underline{x}(c) + C\big). \tag{2.71}$$

Concluimos de (2.70) y (2.71) que

$$x(\sigma) = S(\sigma) + O(1) \quad (\sigma \to \infty).$$

□

Proposición 2.2.13. Consideremos un número real ε con $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, entonces si $|y| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, se tiene que

$$\lim_{x \to \infty} s'(z) = \frac{2G}{\pi},$$

uniformemente con respecto a y, y donde G es el límite de $G(\sigma)$ cuando $\sigma \to \infty$.

Demostración. Como la función s es holomorfa en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, entonces su parte imaginaria, $t(z)$, es una función armónica en dicha banda, que además cumple que

$$\lim_{x\to\infty} t(x+iy) = \frac{2Gy}{\pi} \qquad \text{si } |y| < \frac{\pi}{2}. \tag{2.72}$$

En efecto, la función armónica $\tau(x+iy) := t(x+iy) - \frac{2Gy}{\pi}$ es armónica en $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, continua en $\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{z}}$ (por ser resta de continuas), y acotada sobre la frontera de $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, puesto que su imagen por t se corresponde con la frontera de la banda Δ_s y la función se anula en el punto del infinito (visto en la esfera de Riemann) ya que

$$\tau(x \pm i\frac{\pi}{2}) = t(x \pm i\frac{\pi}{2}) \mp G \longrightarrow 0, \qquad x \to \infty.$$

Debido a la continuidad de la función τ en $\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{z}} \cup \{\infty\}$, se deduce que τ tiende a 0 cuando $x \to \infty$, uniformemente en y, con $|y| \leq \pi/2$. A continuación, consideremos un número real positivo x_0, y designemos por R_0 el rectángulo definido como

$$R_0 = \{(x,y)\colon |x| < x_0 < \infty,\ |y| < \frac{\pi}{2}\}.$$

Sea h un número real positivo, y tomemos la función f_h definida por

$$f_h(z) = s(z+h) - s(h).$$

Se sigue de (2.72) que

$$\lim_{h\to\infty} \mathrm{Im}(f_h(z)) = \lim_{h\to\infty} t\big((x+h)+iy\big) = \frac{2Gy}{\pi},$$

uniformemente en R_0, puesto que $|y| < \frac{\pi}{2}$. Además, como $f_h(0) = 0$ para todo $h \geq 0$, aplicando el teorema A.16 deducimos que la familia $f_h(z)$ para $h \geq 0$ es normal en R_0, obteniendo de hecho que

$$\lim_{h\to\infty} f_h(z) = \frac{2Gz}{\pi},$$

donde la convergencia es uniforme en cada dominio cerrado contenido en R_0. Aplicando el teorema de Weierstrass A.15, deducimos que para ese mismo dominio se tiene que

$$\lim_{h\to\infty} f_h'(z) = \frac{2G}{\pi}.$$

Concluimos de lo anterior lo deseado, puesto que

$$\lim_{h\to\infty} f_h'(z) = \lim_{h\to\infty} s'(z+h) = \lim_{x\to\infty} s'(z) = \frac{2G}{\pi}.$$

□

Un corolario que será de gran utilidad es el que sigue.

Corolario 2.2.14. Se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \sigma'(x) = \frac{2G}{\pi},$$

donde G es el límite de $G(\sigma)$ cuando $\sigma \to \infty$.

Demostración. Basta recordar que $s'(z) = \sigma'(x)$, con $x = \mathrm{Re}(z)$.

□

Definición 2.2.15. Dada una función $F(\sigma)$ denotaremos por $[F(\sigma)]^+$ a la función que es igual que $F(\sigma)$ en los puntos en los que dicha función está definida y es positiva, y toma el valor cero para el resto de valores de σ. A dicha función la llamaremos parte positiva de F.

Observación 2.2.16. La función $F(\sigma)$ podría estar definida en un subconjunto E de la recta real, o incluso podría tomar los valores $\pm\infty$ en dicho conjunto E. Sin embargo, la función parte positiva de F, $[F(\sigma)]^+$, está definida en toda la recta real, tomando el valor 0 cuando $\sigma \notin E$. Además, si existe $\sigma_1 \in E$ tal que $F(\sigma_1) = +\infty$ (resp. $F(\sigma_1) = -\infty$), entonces $[F(\sigma_1)]^+ = +\infty$ (resp. $[F(\sigma_1)]^+ = 0$).

Denotando por $\sigma_0(x) = \sigma(x + i\frac{\pi}{2})$, y teniendo presente la función $S(\sigma)$ introducida en (2.68), se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2.17. Sean $N(\sigma)$ y $M(\sigma)$ dos funciones no decrecientes definidas para valores de σ grandes. Sea $\gamma > 16G > 0$, donde $G(\sigma)$ está definida como en la proposición 2.2.9, y $G = \lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma)$.
Entonces, la relación

$$1) \qquad \int^{\infty} \Big[N(\sigma) - M(\sigma - \gamma)\Big]^+ e^{-S(\sigma)} d\sigma < \infty$$

implica que

$$2) \qquad \int^{\infty} \Big[N\big(\sigma_0(x)\big) - M\big(\sigma_0(x)\big)\Big]^+ e^{-x} dx < \infty,$$

y esta a su vez implica que

$$3) \qquad \int^{\infty} \Big[N(\sigma) - M(\sigma + \gamma)\Big]^+ e^{-S(\sigma)} d\sigma < \infty.$$

Nota. Podría ocurrir que alguna de las funciones $N(\sigma)$ o $M(\sigma)$ sea igual a $+\infty$ para un valor de σ suficientemente grande. Del mismo modo, si ocurriera que para $\sigma > \sigma_0$ se tiene que $N(\sigma) = M(\sigma) = +\infty$, entonces de la definición de función parte positiva, se deduce que $[N(\sigma) - M(\sigma - \gamma)]^+ = 0$ para $\sigma > \sigma_0 + \gamma$, y $[N(\sigma) - M(\sigma + \gamma)]^+ = 0$ para $\sigma > \sigma_0$, es decir, no se genera ningún tipo de indeterminación y las integrales están bien definidas.

Demostración. Aplicando, para x suficientemente grande, la desigualdad (2.51) se tiene que

$$|\sigma(x) - \sigma_0(x)| = |\sigma(x) - \sigma(x + i\frac{\pi}{2})| \leq 8G + \varepsilon(x) < \frac{\gamma}{2},$$

puesto que $\varepsilon(x) = o(1)$, y por hipótesis se tiene que $\gamma > 16G$. Deducimos de lo anterior que

$$\sigma(x) - \frac{\gamma}{2} \leq \sigma_0(x) \leq \sigma(x) + \frac{\gamma}{2}. \tag{2.73}$$

Por otro lado, en virtud de la proposición 2.2.12, existirá una constante α tal que, para x suficientemente grande, se tiene que

$$S\big(\sigma(x)\big) - \alpha \leq x \leq S\big(\sigma(x)\big) + \alpha. \tag{2.74}$$

Finalmente, para cada $\beta > 0$ se tiene, en virtud del teorema de los incrementos finitos de Lagrange, que existe una constante $k \in (\sigma, \sigma + \beta)$ tal que

$$S(\sigma + \beta) - S(\sigma) = S'(k)\beta = \frac{\pi\beta}{2G(k)} \leq \frac{\pi\beta}{2\delta}, \tag{2.75}$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de la aplicación del teorema fundamental del cálculo, válido por ser la función $G(\sigma)$ continua por hipótesis, y la desigualdad es consecuencia de la acotación $G(\sigma) \geq \delta$, para cada $\sigma > \sigma_0$.

A continuación, razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que 3) no fuera cierto, esto es,

$$\int^{\infty} \Big[N(\sigma) - M(\sigma + \gamma)\Big]^+ e^{-S(\sigma)} d\sigma = \infty.$$

Aplicando el cambio de variable $\sigma = \tau - \frac{\gamma}{2}$, obtenemos que

$$\int^{\infty} \Big[N(\sigma - \frac{\gamma}{2}) - M(\sigma + \frac{\gamma}{2})\Big]^+ e^{-S(\sigma - \frac{\gamma}{2})} d\sigma = \infty, \tag{2.76}$$

donde se ha reescrito la integral en términos de la variable σ por comodidad. También, se tiene que

$$\int^{\infty} \Big[N(\sigma - \frac{\gamma}{2}) - M(\sigma + \frac{\gamma}{2})\Big]^+ e^{-S(\sigma)} d\sigma = \infty, \tag{2.77}$$

puesto que , al ser $S(\sigma)$ creciente y por (2.75),

$$1 \leq \frac{e^{-S(\sigma-\gamma/2)}}{e^{-S(\sigma)}} = e^{S(\sigma-\gamma/2+\gamma/2)-S(\sigma-\gamma/2)} \leq e^{\pi\gamma/(4\delta)}. \tag{2.78}$$

Ahora bien, considerando (2.77) como una integral de Riemann-Stieltjes,

$$\int^{\infty} \Big[N\big(\sigma(x)-\frac{\gamma}{2}\big) - M\big(\sigma(x)+\frac{\gamma}{2}\big)\Big]^{+} e^{-S(\sigma(x))} d\sigma(x) = \infty,$$

y teniendo presente que el integrador $\sigma(x)$ es una función armónica, por lo que su derivada es continua, y por tanto integrable en el sentido de Riemann, es posible reducir la integral de Riemann-Stieltjes a una integral de Riemann, adoptando la expresión

$$\int^{\infty} \Big[N\big(\sigma(x)-\frac{\gamma}{2}\big) - M\big(\sigma(x)+\frac{\gamma}{2}\big)\Big]^{+} e^{-S(\sigma(x))} \sigma'(x) dx = \infty. \tag{2.79}$$

Ahora bien, como tanto $N(\sigma)$ como $M(\sigma)$ son no decrecientes, se sigue de las desigualdades (2.73) que

$$N\big(\sigma(x)-\frac{\gamma}{2}\big) \leq N\big(\sigma_0(x)\big), \quad \text{y} \quad M\big(\sigma(x)+\frac{\gamma}{2}\big) \geq M\big(\sigma_0(x)\big).$$

Y por tanto, se tiene que

$$N\big(\sigma(x)-\frac{\gamma}{2}\big) - M\big(\sigma(x)+\frac{\gamma}{2}\big) \leq N\big(\sigma_0(x)\big) - M\big(\sigma_0(x)\big).$$

Por otro lado, de la desigualdad (2.74) se sigue que $e^{-S(\sigma(x))} \leq e^{\alpha}e^{-x}$. Con todo esto, deducimos de la igualdad (2.79) que

$$\int^{\infty} \Big[N\big(\sigma_0(x)\big) - M\big(\sigma_0(x)\big)\Big]^{+} e^{-x} \sigma'(x) dx = \infty.$$

A continuación, deducimos del corolario 2.2.14 que la integral anterior tiene el mismo carácter que 2), puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \sigma'(x) = \frac{2G}{\pi},$$

es decir, 2) debería ser divergente.

De nuevo, razonemos por reducción al absurdo, supongamos ahora que 2) no fuera cierto, es decir,

$$\int^{\infty} \Big[N\big(\sigma_0(x)\big) - M\big(\sigma_0(x)\big)\Big]^{+} e^{-x} dx = \infty. \tag{2.80}$$

Se sigue de las desigualdades (2.73) que

$$N\big(\sigma_0(x)\big) \leq N\big(\sigma(x) + \frac{\gamma}{2}\big), \quad \text{y} \quad M\big(\sigma_0(x)\big) \geq M\big(\sigma(x) - \frac{\gamma}{2}\big).$$

Y por tanto, se tiene que

$$N\big(\sigma_0(x)\big) - M\big(\sigma_0(x)\big) \leq N\big(\sigma(x) + \frac{\gamma}{2}\big) - M\big(\sigma(x) - \frac{\gamma}{2}\big).$$

Además, de la desigualdad (2.74) se sigue que $e^{-x} \leq e^{-S(\sigma(x))}e^{\alpha}$. Con todo esto, deducimos de la igualdad (2.80) que

$$\int^{\infty} \Big[N\big(\sigma(x) + \frac{\gamma}{2}\big) - M\big(\sigma(x) - \frac{\gamma}{2}\big)\Big]^{+} e^{-S(\sigma(x))}dx = \infty. \tag{2.81}$$

Dado que $\lim_{x\to\infty} \sigma'(x) = 2G/\pi$, también será divergente la integral

$$\int^{\infty} \Big[N\big(\sigma(x) + \frac{\gamma}{2}\big) - M\big(\sigma(x) - \frac{\gamma}{2}\big)\Big]^{+} e^{-S(\sigma(x))}\sigma'(x)dx, \tag{2.82}$$

que escribimos como

$$\int^{\infty} \Big[N(\sigma + \frac{\gamma}{2}) - M(\sigma - \frac{\gamma}{2})\Big]^{+} e^{-S(\sigma)}d\sigma = \infty.$$

Aplicando el cambio de variable $\sigma = \tau - \frac{\gamma}{2}$, obtenemos que

$$\int^{\infty} \Big[N(\sigma) - M(\sigma - \gamma)\Big]^{+} e^{-S(\sigma - \frac{\gamma}{2})}d\sigma = \infty, \tag{2.83}$$

donde se ha reescrito la integral en términos de la variable σ por comodidad. Por último, aplicando las estimaciones de (2.78), se deduce que las integrales en 1) y (2.83) tienen el mismo carácter, es decir, ambas divergen. □

Un corolario inmediato de la proposición previa es el siguiente

Corolario 2.2.18. Con la notación de la proposición anterior, sea $N(\sigma)$ una función no decreciente y positiva, entonces son equivalentes

$$1) \int^{\infty} N(\sigma)e^{-S(\sigma)}d\sigma < \infty,$$

$$2) \int^{\infty} N\big(\sigma_0(x)\big)e^{-x}dx < \infty.$$

Demostración. Teniendo presente que la función $N(\sigma)$ es positiva, basta aplicar la proposición anterior a la funciones $N = N(\sigma)$, y $M \equiv 0$. □

Estamos en condiciones de poder generalizar el resultado expuesto en el teorema 2.1.3.

Teorema 2.2.19. Sea $F(s)$ una función holomorfa, no idénticamente nula y acotada en la banda Δ_s, definida para $\sigma > \sigma_0$, con $|t| < G(\sigma)$ (donde $G(\sigma)$ está definido como en la proposición 2.2.9), y continua sobre $\overline{\Delta}_s$. Sean $N(\sigma)$ y $M(\sigma)$ dos funciones no decrecientes, tales que para cada $\sigma \in \Delta_s$ se tiene que

$$\ln\left(\left|F\big(\sigma + iG(\sigma)\big)\right|\right) \leq M(\sigma) - N(\sigma). \tag{2.84}$$

Entonces, para $\gamma > 16G$, donde $G = \lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma)$, se tiene que

$$\int^{\infty} \Big[N(\sigma) - M(\sigma + \gamma)\Big]^{+} e^{-S(\sigma)} d\sigma < \infty. \tag{2.85}$$

Demostración. Consideremos la función $\Phi(z) = F\big(s(z)\big)$, donde $s(z)$ es la función definida en la observación 2.2.4. Entonces, escribiendo como antes $\sigma_0(x) = \sigma(x + i\frac{\pi}{2})$, deducimos que

$$s\big(x+i\frac{\pi}{2}\big) = \sigma\big(x+i\frac{\pi}{2}\big)+it\big(x+i\frac{\pi}{2}\big) = \sigma_0(x)+iG\big(\sigma(x+i\frac{\pi}{2})\big) = \sigma_0(x)+iG\big(\sigma_0(x)\big),$$

y se sigue de (2.84) que

$$\begin{aligned}\ln\left(\left|\Phi\big(x + i\frac{\pi}{2}\big)\right|\right) = \ln\left(\left|F\big(s(x + i\frac{\pi}{2})\big)\right|\right) &= \ln\left(\left|F\big(\sigma_0(x) + iG(\sigma_0(x))\big)\right|\right)\\ &\leq M(\sigma_0(x)) - N(\sigma_0(x)). \end{aligned}\tag{2.86}$$

En particular, se deduce de lo anterior que

$$N(\sigma_0(x)) - M(\sigma_0(x)) \leq -\ln\left(\left|\Phi\big(x + i\frac{\pi}{2}\big)\right|\right). \tag{2.87}$$

Ahora bien, como F es acotada por hipótesis en la banda Δ_s, existirá una constante $m > 0$ tal que

$$\ln\left(\left|\Phi\big(x + i\frac{\pi}{2}\big)\right|\right) < m. \tag{2.88}$$

A continuación denotemos por E al conjunto de los x positivos tales que $N(\sigma_0(x)) - M(\sigma_0(x)) > 0$. Entonces, teniendo presente (2.87) y (2.88), se deduce que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \Big[N\big(\sigma_0(x)\big) - M\big(\sigma_0(x)\big)\Big]^+ e^{-x}dx &= \int_E N\big(\sigma_0(x)\big) - M\big(\sigma_0(x)\big)e^{-x}dx \\
&\leq -\int_E \ln\big(\big|\Phi\big(x+i\frac{\pi}{2}\big)\big|\big)e^{-x}dx \\
&\leq -\int_E \big[\ln\big(\big|\Phi\big(x+i\frac{\pi}{2}\big)\big|\big) - m\big]e^{-x}dx \\
&\leq -\int_0^\infty \big(\ln\big(\big|\Phi\big(x+i\frac{\pi}{2}\big)\big|\big) - m\big)e^{-x}dx.
\end{aligned}
\tag{2.89}
$$

Consideremos ahora la función $\Psi(z) = e^{-m}\Phi(z) = e^{-m}F\big(s(z)\big)$, que es holomorfa, no idénticamente nula y acotada en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, y es continua en la banda $\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{z}}$, puesto que F es continua en la banda $\overline{\Delta}_s$. Por tanto, aplicando el teorema 2.1.2 a la función Ψ, se deduce que

$$
\begin{aligned}
\infty > \int_0^\infty -\ln\big(\big|\Psi\big(x+i\frac{\pi}{2}\big)\big|\big)e^{-x}dx &= \int_0^\infty -\ln\big(\big|e^{-m}\Phi\big(x+i\frac{\pi}{2}\big)\big|\big)e^{-x}dx \\
&= \int_0^\infty -\ln\big(\big|\Phi\big(x+i\frac{\pi}{2}\big)\big|\big) - m\big)e^{-x}dx.
\end{aligned}
$$

Para concluir, se sigue de (2.89) y de lo anterior que

$$\int_0^\infty \Big[N\big(\sigma_0(x)\big) - M\big(\sigma_0(x)\big)\Big]^+ e^{-x}dx < \infty,$$

por lo que, aplicando la proposición 2.2.17, deducimos que la convergencia de la integral anterior, implica la convergencia de la integral (2.85).

□

Del mismo modo, podemos generalizar el teorema 2.1.7 como sigue.

Teorema 2.2.20. Consideremos la banda Δ_s definida como en el teorema anterior, y sea $N(\sigma)$ una función no decreciente tal que

$$\int^\infty N(\sigma)e^{-S(\sigma)}d\sigma < \infty. \tag{2.90}$$

Entonces, existe una función $F(s)$ holomorfa y no nula sobre la banda $\overline{\Delta}_s$, tal que para cada $s \in \overline{\Delta}_s$ se tiene que

$$\ln\big|F(\sigma+it)\big| \leq -N(\sigma). \tag{2.91}$$

Demostración. Se puede reducir el problema al caso en que $N(\sigma) > 0$ para todo $\sigma > \sigma_0$. Si no fuera así, esto es, si $N(\sigma)$ tomara valores negativos, siguiendo un esquema similar al expuesto en el teorema 2.1.7, basta considerar la función $M(\sigma) = N(\sigma) - N(\sigma_0) + 1$, y esta es tal que $M(\sigma) > 0$, para todo $\sigma > \sigma_0$. Aplicando el teorema a M, obtenemos una función F, y tomando $F^*(s) = F(s)e^{-(N(\sigma_0)-1)s}$ probaríamos el teorema para $N(\sigma)$.

A continuación, escribamos $\sigma_1 = \max\{\sigma_0, 0\}$, y denotemos por Δ^* el dominio definido para $\sigma > \sigma_0 - 1$, y $|t| < G^*(\sigma)$, donde

$$G^*(\sigma) = \begin{cases} G(\sigma) + e^{-\sigma} & \text{si } \sigma > \sigma_1 \\ G(\sigma) + 1 & \text{si } \sigma_0 < 0, \text{ y } \sigma_0 < \sigma \leq \sigma_1 \\ G(\sigma_0) + 1 & \text{si } \sigma_0 > -\infty, \text{ y } \sigma_0 - 1 < \sigma \leq \sigma_0. \end{cases}$$

En particular, notemos que la función es continua para $\sigma > \sigma_0$, es de variación acotada, y cumple que $G^*(\sigma) \to G$ cuando $\sigma \to \infty$. Además, denotemos por

$$S^*(\sigma) = \int_c^\sigma \frac{du}{G^*(u)},$$

donde $c > \sigma_0$ es la constante fijada en la definición de $S(\sigma)$, y definamos las funciones $z^*(s)$, $x^*(s)$, $\sigma^*(x)$, y $\overline{\sigma}^*(x)$ como en la proposición 2.2.3, y siguientes, donde el papel que jugaba la banda Δ_s, es sustituido por Δ^* (así por ejemplo, $z^*(s) = x^*(s) + iy^*(s)$, realiza la representación conforme de Δ^* sobre $\mathcal{D}_z$, siendo esta representación normalizada como lo hemos hecho anteriormente). Del mismo modo, escribiremos $\sigma_0^*(x)$ para denotar la cantidad $\sigma^*(x + i\frac{\pi}{2})$.

En primer lugar, resulta claro que

$$\int^\infty N(\sigma)e^{-S^*(\sigma)} d\sigma < \infty, \tag{2.92}$$

pues basta aplicar el criterio de comparación por cociente para concluir que la integral anterior y (2.90) tienen el mismo carácter. En efecto, teniendo presente que

$$\int_{\sigma_1}^\infty \Big(\frac{1}{G(u)} - \frac{1}{G^*(u)}\Big) du = \int_{\sigma_1}^\infty \frac{G^*(u) - G(u)}{G(u)G^*(u)} du = \int_{\sigma_1}^\infty \frac{e^{-\sigma}}{G^2(u) + G(u)e^{-\sigma}} du$$
$$\leq \frac{1}{\delta^2} \int_{\sigma_1}^\infty e^{-\sigma} du < \infty,$$

afirmamos que

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{N(\sigma)e^{-S^*(\sigma)}}{N(\sigma)e^{-S(\sigma)}} = \lim_{\sigma\to\infty} e^{S(\sigma)-S^*(\sigma)} = e^{\lim_{\sigma\to\infty}(S(\sigma)-S^*(\sigma))} < \infty.$$

Ahora bien, como $N(\sigma)$ es positiva, y se satisfacen las hipótesis del corolario 2.2.18, deducimos de (2.92) que

$$\int^{\infty} N(\sigma_0^*(x))e^{-x}dx < \infty.$$

Entonces, para cada $r > 0$, realizando el cambio de variable $x = t + r$, se sigue de lo anterior que

$$\int^{\infty} N(\sigma_0^*(x+r))e^{-x}dx < \infty,$$

donde hemos reescrito la integral en términos de la variable x por simplificar. Por otro lado, como la función $\sigma_0^*(x)$ es creciente (pues $\sigma^*(x)$ lo es), y N es no decreciente, deducimos que la función $N(\sigma_0^*(x+r))$ es no decreciente para cada x, y por tanto del teorema 2.1.7, se sigue que existe una función $\Phi(z)$ (que dependerá del parámetro r), holomorfa y no nula en la banda $\mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, de modo que para cada $z \in \mathcal{D}_{\mathrm{z}}$, se satisface la desigualdad

$$\ln\big(|\Phi(x+iy)|\big) \leq -N\big(\sigma_0^*(x+r)\big).$$

A continuación, consideremos la función $F_1(s) = \Phi(z^*(s))$, entonces, se sigue de lo anterior que

$$\ln\big(|F_1(\sigma+it)|\big) \leq -N\big(\sigma_0^*\big(x^*(s)+r\big)\big). \tag{2.93}$$

En virtud de (2.51), si r es suficientemente grande, existe un número $p_1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \geq 0$, se tiene que

$$\sigma^*(x+r) - \sigma^*(x+r+i\frac{\pi}{2}) = \sigma^*(x+r) - \sigma_0^*(x+r) \leq p_1,$$

y por otro lado, existe un número $p_2 \in \mathbb{R}$, tal que para todo $x \geq 0$,

$$\overline{\sigma}^*(x) - \sigma^*(x) = \max_{|y|\leq\pi/2} \sigma^*(x+iy) - \sigma^*(x) \leq \max_{|y|\leq\pi/2} |\sigma^*(x+iy) - \sigma^*(x)| \leq p_2.$$

Tomando $p = \max\{p_1, p_2\}$, se deduce de lo anterior que

$$\sigma_0^*(x+r) \geq \sigma^*(x+r) - p, \qquad \text{y} \qquad \overline{\sigma}^*(x) \leq \sigma^*(x) + p, \tag{2.94}$$

para $x \geq 0$, independientemente de r, siempre y cuando este último sea suficientemente grande. Por otro lado, se sigue del corolario 2.2.14 y del teorema de los incrementos finitos que es posible determinar r de suerte que para x suficientemente grande se satisfaga

$$\sigma^*(x+r) \geq \sigma(x) + 2p. \tag{2.95}$$

A continuación, teniendo presente que $\sigma(x)$ es creciente, se deduce de (2.94) y (2.95), para σ suficientemente grande, que

$$\begin{aligned}\sigma_0^*\big(x(s)+r\big) \geq \sigma^*\big(x(s)+r\big) - p \geq \sigma^*\big(x(s)\big) + 2p - p \\ = \sigma^*\big(x(s)\big) + p \geq \overline{\sigma}^*\big(x(s)\big) \geq \sigma, \quad (2.96)\end{aligned}$$

y por tanto, (2.93) y (2.96), permiten escribir, para σ suficientemente grande y $s \in \Delta^*$, que

$$\ln\big(|F_1(\sigma+it)|\big) \leq -N(\sigma). \tag{2.97}$$

Ahora bien, como $F_1(s)$ es una función acotada en Δ^*, es suficiente tomar $F(s) = mF_1(s)$, siendo m una constante positiva suficientemente pequeña para que (2.91) se satisfaga en todo Δ^*. Finalmente, como $\overline{\Delta}_s \subset \Delta^*$, el teorema queda probado. □

Observación 2.2.21. Los resultados previos pueden extenderse al caso en el que Δ_s no es simétrica respecto al eje real. Esta generalización fue señalada por Lelong-Ferrand en [11]. A lo largo de la memoria nos centramos en el caso en el que el dominio Δ_s es simétrico, pues permite una escritura más cómoda, y es suficiente para los resultados expuestos.

2.3. Generalización del teorema 2.1.2

A lo largo de la sección, conviene tener presente las propiedades impuestas a la función $G(\sigma)$, que define la frontera de la banda generalizada Δ_s, tratadas en la sección previa. Con vistas a la generalización del teorema 2.1.2, será necesario el siguiente lema, donde impondremos nuevas restricciones a la función $G(\sigma)$.

De nuevo, por simplificar la notación, denotaremos por $x_0(\sigma) = x\big(\sigma + iG(\sigma)\big)$.

Lema 2.3.1. Supongamos que para $\sigma \geq \sigma_0$, la derivada $G'(\sigma)$ existe y para cada $h > 0$, satisface las condiciones

$$|G'(\sigma)| < A, \qquad \text{y} \qquad G'(\sigma+h) - G'(\sigma) > -Ah, \tag{2.98}$$

donde A es una constante positiva. Entonces, existe una constante $\eta > 0$ tal que para cada σ_1, σ_2, con $\sigma_1 > \sigma_0$ y $0 < \sigma_2 - \sigma_1 < 1$, se tiene que

$$x_0(\sigma_2) - x_0(\sigma_1) > \eta(\sigma_2 - \sigma_1). \tag{2.99}$$

Demostración. En primer lugar, tomemos σ_1 y σ_2 como en el enunciado, y fijemos $\mu \geq 1$. Denotemos por $E = E(\mu, \sigma_1, \sigma_2)$ al interior de la elipse γ_E del plano s, cuyo eje menor, de longitud $2b$, se sitúa sobre el eje real, su eje mayor tiene una longitud de $2\mu b$ y además pasa por los puntos $\sigma_1 + iG(\sigma_1)$ y $\sigma_2 + iG(\sigma_2)$. Obsérvese que, habiendo fijado μ, el valor de b depende de él y de los puntos σ_1 y σ_2 para los que se construya la elipse correspondiente. Entonces la elipse anterior posee las siguientes propiedades:

1) Existe una constante $B < \infty$ de modo que $b \leq B$ para todos $\mu \geq 1$, y σ_1 y σ_2 con $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_1 + 1$.

2) Si escogemos μ suficientemente grande, los dos arcos simétricos α y α' de γ_E, que cortan a la banda Δ_s para $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, se sitúan en el exterior de dicha banda, y los dos arcos complementarios se sitúan en el interior de Δ_s.

En efecto, si denotamos por σ_3 el centro de la elipse γ_E, la ecuación de γ_E adoptaría la siguiente forma

$$(\sigma - \sigma_3)^2 + \frac{t^2}{\mu^2} = b^2. \tag{2.100}$$

Nos gustaría obtener una expresión del centro en función de σ_1 y σ_2, para ello, impongamos que los puntos $\sigma_1 + iG(\sigma_1)$ y $\sigma_2 + iG(\sigma_2)$ satisfagan la ecuación anterior, esto es

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \frac{G^2(\sigma_1)}{\mu^2} = b^2, \qquad \text{y} \qquad (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{G^2(\sigma_2)}{\mu^2} = b^2. \tag{2.101}$$

Ahora bien, igualando ambas expresiones, y despejando σ_3, obtenemos que

$$\sigma_3 = \frac{G^2(\sigma_2) - G^2(\sigma_1)}{2\mu^2(\sigma_2 - \sigma_1)} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Sustituyendo dicho valor en la primera ecuación de (2.101) y operando, obtenemos que

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{G^2(\sigma_1)}{\mu^2} + \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{G^2(\sigma_2) - G^2(\sigma_1)}{2\mu^2(\sigma_2 - \sigma_1)}\right)^2 \\ &= \frac{G^2(\sigma_1)}{\mu^2} + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \frac{G^2(\sigma_2) - G^2(\sigma_1)}{2\mu^2(\sigma_2 - \sigma_1)}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Si escribimos $F(x) := G^2(x)$, y aplicamos el teorema de los incrementos finitos, válido por ser la función G derivable, deducimos que existe un punto $\sigma_1 < \xi < \sigma_2$ tal que

$$\frac{G^2(\sigma_2) - G^2(\sigma_1)}{2\mu^2(\sigma_2 - \sigma_1)} = \frac{1}{2\mu^2}\frac{F(\sigma_2) - F(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{1}{2\mu^2}F'(\xi) = \frac{G'(\xi)G(\xi)}{\mu^2}.$$

Sustituyendo dicho valor en (2.102), obtendremos que

$$b^2 = \frac{G^2(\sigma_1)}{\mu^2} + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \frac{G'(\xi)G(\xi)}{\mu^2}\right)^2,$$

donde $\sigma_1 < \xi < \sigma_2$. Si tenemos presente las acotaciones de $G(\sigma)$ y $G'(\sigma)$ por hipótesis, se sigue que

$$b^2 \leq L^2 + (\frac{1}{2} + AL)^2,$$

justificándose así 1).

A continuación, denotemos por $t = q(\sigma)$ la ecuación de la mitad superior de γ_E, esto es

$$q(\sigma) = \mu\sqrt{b^2 - (\sigma - \sigma_3)^2}.$$

Derivando dos veces dicha expresión y simplificando, obtenemos que

$$q''(\sigma) = -\mu\frac{\sqrt{b^2 - (\sigma - \sigma_3)^2} - (\sigma - \sigma_3)\frac{-(\sigma-\sigma_3)}{\sqrt{b^2-(\sigma-\sigma_3)^2}}}{\left(b^2 - (\sigma - \sigma_3)^2\right)^2} = \frac{-\mu^4 b^2}{q^3(\sigma)}.$$

Como $q(\sigma)$ alcanza su máximo en el punto de ordenada μb, deducimos que $0 < q^3(\sigma) \leq \mu^3 b^3$, y por tanto,

$$\frac{\mu^4 b^2}{q^3(\sigma)} \geq \frac{\mu^4 b^2}{\mu^3 b^3} = \frac{\mu}{b}.$$

Por otro lado, como por 1) se tiene que $b \leq B$, entonces de lo anterior se sigue que

$$q''(\sigma) = \frac{-\mu^4 b^2}{q^3(\sigma)} \leq -\frac{\mu}{b} \leq -\frac{\mu}{B},$$

y de esta cota uniforme para la segunda derivada, tomando $h > 0$, deducimos que

$$q'(\sigma + h) - q'(\sigma) \leq -\frac{\mu h}{B}. \tag{2.103}$$

A continuación, consideremos la función $G_1(\sigma) = q(\sigma) - G(\sigma)$, y tomemos $h > 0$, se sigue de (2.98) y (2.103) que

$$\begin{aligned} G_1'(\sigma + h) - G_1'(\sigma) &= \big(q'(\sigma + h) - q'(\sigma)\big) - \big(G'(\sigma + h) - G'(\sigma)\big) \\ &< -\frac{\mu h}{B} - (-Ah) = \big(A - \frac{\mu}{B}\big)h. \end{aligned}$$

Si tomamos $\mu > AB$, entonces $G_1'(\sigma)$ es decreciente, y por tanto $G_1(\sigma)$ será una función cóncava. Ahora bien, como $G_1(\sigma_1) = G_1(\sigma_2) = 0$, puesto que los puntos $\sigma_1 + iG(\sigma_1)$ y $\sigma_2 + iG(\sigma_2)$ están en γ_E, deducimos que

$$\begin{aligned} &G_1(\sigma) > 0 \qquad \text{para } \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \\ &G_1(\sigma) < 0 \qquad \text{para } \sigma_3 - b < \sigma < \sigma_3, \text{ y } \sigma_3 < \sigma < \sigma_3 + b. \end{aligned}$$

La primera de las desigualdades indica que, en el intervalo correspondiente a $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, el arco α correspondiente a la elipse γ_E, se sitúa por encima de la gráfica de la función G. Un razonamiento similar permite asegurar, vía la segunda desigualdad, que los arcos complementarios a α se sitúan por debajo de la gráfica de la función G. Finalmente, debido a la simetría, se obtiene el resultado expuesto en 2).

Sea $\omega(s; \sigma_1, \sigma_2)$ la función armónica en Δ_s que toma el valor 1 sobre los dos arcos $t = G(\sigma)$ y $t = -G(\sigma)$ definidos para $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, y toma el valor 0 sobre el resto de la frontera de la banda Δ_s, es decir, $\omega(s; \sigma_1, \sigma_2)$ representa la medida armónica de los arcos $t = G(\sigma)$ y $t = -G(\sigma)$ definidos para $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, con respecto a Δ_s. Además, denotemos por $\omega_E(s; \sigma_1, \sigma_2)$, a la función armónica en E que toma el valor 1 sobre los arcos α y α' de γ_E, y el valor 0 sobre los dos arcos complementarios, de nuevo, $\omega_E(s; \sigma_1, \sigma_2)$ representa la medida armónica de los arcos α y α' con respecto a E. A continuación, definamos la función $w(s)$ como

$$w(s) = \omega_E(s; \sigma_1, \sigma_2) - \omega(s; \sigma_1, \sigma_2).$$

Es claro que la función $w(s)$ es armónica, y acotada en la intersección de Δ_s con E (pues ambas funciones, $\omega(s; \sigma_1, \sigma_2)$, y $\omega_E(s; \sigma_1, \sigma_2)$ toman valores entre 0 y 1). Además, w es continua en la frontera de dicho dominio acotado, pues tanto $\omega(s; \sigma_1, \sigma_2)$ como $\omega_E(s; \sigma_1, \sigma_2)$ lo son. Ahora bien, por un lado, como $\omega(s; \sigma_1, \sigma_2)$ toma el valor 1 sobre los arcos $t = G(\sigma)$ y $t = -G(\sigma)$ definidos para $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, y $\omega_E(s; \sigma_1, \sigma_2)$ toma valores no nulos ahí, se sigue que $w(s) < 0$ sobre dichos arcos. Por otro lado, como $\omega_E(s; \sigma_1, \sigma_2)$ se anula sobre los arcos complementarios a α y α', y $\omega(s; \sigma_1, \sigma_2)$ toma valores no nulos ahí, se sigue que $w(s) < 0$ sobre dichos arcos. Aplicando el teorema del módulo máximo A.11, deducimos que

$$0 \leq \omega_E(s; \sigma_1, \sigma_2) < \omega(s; \sigma_1, \sigma_2) \leq 1, \tag{2.104}$$

para cada $s \in \Delta_s \cap E$.

A continuación, en virtud del teorema de representación conforme de Riemann A.13, sea $\zeta = f(s)$ la función que representa (conformemente) el interior E de la elipse sobre el círculo unidad $|\zeta| < 1$, y que cumple que $f(\sigma_3) = 0$ y $f'(\sigma_3) > 0$. Además, la función $f(s)$ es continua sobre la frontera de E, en virtud del teorema de Caratheodory A.14, y tal que $f'(s)$ no se anula. Como γ_E tiene excentricidad fija, y su tamaño se mantiene acotado para todos μ, σ_1 y σ_2 (pues $b \leq B$), existirá una constante positiva γ, de modo que a cada arco de longitud λ de γ_E, le corresponde un arco de circunferencia, $|\zeta| < 1$, de longitud al menos igual a $\gamma\lambda$. Entonces, si denotamos por λ la longitud de arco de α, y por tanto de α', se sigue de la conservación de la medida armónica por representaciones conformes A.25, que

$$\omega_E(\sigma_3; \sigma_1, \sigma_2) \geq \frac{2\gamma\lambda}{2\pi} = \frac{\gamma\lambda}{\pi}, \tag{2.105}$$

donde el lado derecho es consecuencia del cálculo explícito de la medida armónica en el disco unidad, de los arcos $f(\alpha)$ y $f(\alpha')$ (véase la proposición A.26). Como $\lambda > \sigma_2 - \sigma_1$, se deduce de (2.104) y (2.105) que

$$\omega(\sigma_3; \sigma_1, \sigma_2) > \omega_E(\sigma_3; \sigma_1, \sigma_2) \geq \frac{\gamma\lambda}{\pi} > \frac{\gamma}{\pi}(\sigma_2 - \sigma_1). \tag{2.106}$$

A continuación, denotemos por

$$x_1 = x_0(\sigma_1) = x\big(\sigma_1 + iG(\sigma_1)\big),\ x_2 = x_0(\sigma_2) = x\big(\sigma_2 + iG(\sigma_2)\big),\ \text{y } x_3 = x(\sigma_3).$$

De nuevo, teniendo presente la conservación de la medida armónica por transformaciones conformes A.25, se sigue que $\omega(s; \sigma_1, \sigma_2) = \omega_{\mathcal{D}}(z; x_1, x_2)$, donde $z = z(s)$, y donde $\omega_{\mathcal{D}}(z; x_1, x_2)$ es la función armónica en $\mathcal{D}_\mathrm{z}$ que toma el valor 1 a lo largo de los segmentos correspondientes a $x_1 < x < x_2$, e $y = \pm\frac{\pi}{2}$, y es igual a 0 en el resto de la frontera de $\mathcal{D}_\mathrm{z}$, es decir, representa la medida armónica de los segmentos antes citados, con respecto a la banda $\mathcal{D}_\mathrm{z}$. En particular, para calcular explícitamente el valor que toma $\omega_{\mathcal{D}}(x_3; x_1, x_2)$, realicemos la representación conforme de dicha banda sobre el semiplano superior, $\mathbb{H}$, mediante la transformación $\hat{w} = u + iv = ie^z$. Entonces podemos expresar dicho valor como suma de las medidas armónicas de los segmentos $\{(u, v) \colon -e^{x_2} < u < -e^{x_1}, v = 0\}$ y $\{(u, v) \colon e^{x_1} < u < e^{x_2}, v = 0\}$, con respecto a $\mathbb{H}$, evaluado en el punto ie^{x_3} (véase la proposición A.27). Concretamente,

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathcal{D}}(x_3;x_1,x_2) &= \omega_{\mathbb{H}}(ie^{x_3};-e^{x_2},-e^{x_1}) + \omega_{\mathbb{H}}(ie^{x_3};e^{x_1},e^{x_2}) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{e^{x_2}}{e^{x_3}}\right) - \arctan\left(\frac{e^{x_1}}{e^{x_3}}\right)\right) \\
&+ \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{-e^{x_1}}{e^{x_3}}\right) - \arctan\left(\frac{-e^{x_2}}{e^{x_3}}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\big(\arctan(e^{x_2-x_3}) - \arctan(e^{x_1-x_3})\big) \\
&= \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{e^{x_2-x_3}-e^{x_1-x_3}}{1+e^{x_2-x_3+x_1-x_3}}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{e^{x_2-x_1}-1}{e^{x_3-x_1}+e^{x_2-x_3}}\right). \qquad (2.107)
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\sigma_2-\sigma_1<1$, se sigue de la proposición 2.2.9 que

$$x_2 = x_1 + O(1) \qquad \text{y} \qquad x_3 = x_1 + O(1). \qquad (2.108)$$

En efecto, por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= x(\sigma_2 + iG(\sigma_2)) - x(\sigma_1 + iG(\sigma_1)) \leq \overline{x}(\sigma_2) - \underline{x}(\sigma_1) \\
&\leq \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{d\sigma}{G(\sigma)} + C \leq \frac{\pi}{2}(\sigma_2-\sigma_1)\delta + C < K,
\end{aligned}$$

donde $\delta \leq G(\sigma)$ para cada $\sigma > \sigma_0$, y C y K son constantes, lo que justifica la primera igualdad. Por otro lado, se tiene que

$$x_3 - x_1 = x(\sigma_3) - x(\sigma_1 + iG(\sigma_1)) \leq \overline{x}(\sigma_3) - \underline{x}(\sigma_1) \leq \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_3}\frac{d\sigma}{G(\sigma)} + C' < K',$$

donde C' y K' son constantes, y se ha acotado $\sigma_3-\sigma_1$ por $\sigma_2-\sigma_1<1$, esto justifica la segunda igualdad. Ahora bien, se sigue de lo anterior, que existe una constante c independiente de x_1 y x_2, tal que $x_2-x_1<c$. Por otro lado, deducimos del teorema de los incrementos finitos que existe un valor $0<c_1<x_2-x_1<c$, tal que

$$e^{x_2-x_1}-1 = e^{x_2-x_1}-e^0 = e^{c_1}(x_2-x_1) < e^c(x_2-x_1).$$

De nuevo, aplicando el teorema de los incrementos finitos, deducimos que para cada $x>0$, se tiene que $\arctan(x)<x$. Entonces, se sigue de lo anterior, y de (2.107) que

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathcal{D}}(x_3;x_1,x_2) &= \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{e^{x_2-x_1}-1}{e^{x_3-x_1}+e^{x_2-x_3}}\right) \\
&\leq \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{e^c(x_2-x_1)}{2}\right) < \frac{2K}{\pi}(x_2-x_1), \qquad (2.109)
\end{aligned}$$

donde $K = 2^{-1}e^c$. Por último, la relación (2.99) se sigue de (2.106) y (2.109), tomando $\eta = \gamma/2K$. En efecto, resulta que

$$x_0(\sigma_2)-x_0(\sigma_1) = x_2-x_1 > \frac{\pi}{2K}\omega_{\mathcal{D}}(x_3; x_1, x_2) = \frac{\pi}{2K}\omega(\sigma_3; \sigma_1, \sigma_2) > \eta(\sigma_2-\sigma_1).$$

$\square$

A continuación generalizaremos el teorema 2.1.2 de la siguiente manera.

Teorema 2.3.2. Sea Δ_s el dominio definido para $\sigma > \sigma_0$ y $|t| < G(\sigma)$, donde la función $G(\sigma)$ satisface las siguientes propiedades:

1) Para cada $\sigma > \sigma_0$, se tiene que $G(\sigma) \geq \delta > 0$, siendo $G(\sigma)$ de variación acotada en dicho intervalo.

2) $G'(\sigma)$ existe para $\sigma \geq \sigma_0$, y además existe una constante positiva A, de modo que para cada $h > 0$ se cumple que

$$|G'(\sigma)| < A, \qquad \text{y} \qquad G'(\sigma + h) - G'(\sigma) > -Ah.$$

Sea $F(s)$ una función no idénticamente nula, acotada y holomorfa en Δ_s, continua en $\overline{\Delta}_s$. Entonces,

$$\int^{\infty} \ln\Big(\big|F\big(\sigma + iG(\sigma)\big)\big|\Big)e^{-S(\sigma)}d\sigma > -\infty,$$

donde la función $S(\sigma)$ se define según (2.68).

Demostración. Consideremos la función $\Phi(z) = F\big(s(z)\big)$, como $\Phi(z)$ se anula, en la frontera de $\mathcal{D}_z$, sobre un conjunto de medida nula, se sigue de (2.99) que $F(\sigma+iG(\sigma))$ solo se anula como función de σ, sobre conjuntos de medida nula. En efecto, si no fuera así, es decir, si se anulara sobre un conjunto de medida positiva, digamos A (que supondremos contenido en la parte superior de la frontera), se tendría que

$$\int_A \ln(|\Phi(x + i\frac{\pi}{2})|)e^{-x}dx = -\infty,$$

lo que contradice el teorema A.3. Por tanto, la función $\log(F(\sigma + iG(\sigma)))$ es continua casi siempre.

Ahora bien, si denotamos por $\sigma_0^*(x)$, la función inversa de $x_0(\sigma) = x(\sigma + iG(\sigma))$, entonces, tendremos que esta es continua y creciente, pues en virtud del lema 2.3.1 tenemos que la función $x_0(\sigma)$ es creciente, y por tanto del teorema de la función inversa σ_0^* también. Teniendo presente que

$$\sigma_0^*(x) + iG\big(\sigma_0^*(x)\big) = s\big(x_0(\sigma_0^*(x) + i\frac{\pi}{2})\big) = s(x + i\frac{\pi}{2}),$$

realicemos en la integral que sigue el cambio de variable $\sigma = \sigma_0^*(x)$, entonces, en virtud del teorema A.22, deducimos que

$$\begin{aligned}
&\int^{\infty} \ln\Big(\big|F\big(\sigma + iG(\sigma)\big)\big|\Big) e^{-S(\sigma)} d\sigma \\
&= \int^{\infty} \ln\Big(\big|F\big(s(x + i\frac{\pi}{2})\big)\big|\Big) e^{-S(\sigma_0^*(x))} d\sigma_0^*(x) \\
&= \int^{\infty} \ln\Big(\big|\Phi\big(x + i\frac{\pi}{2}\big)\big|\Big) e^{-S(\sigma_0^*(x))} d\sigma_0^*(x).
\end{aligned}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que sobre $\overline{\Delta}_s$ se tiene que $|F(s)| \leq 1$, lo que implica que $\ln\big(\big|\Phi\big(x + i\frac{\pi}{2}\big)\big|\big) \leq 0$. Si no fuera así, por hipótesis, se tiene que existe una constante $N > 0$ tal que $|F(s)| \leq N$ en Δ_s. Tomemos la función $\hat{F} = F/N$, la cual tiene módulo menor o igual que 1 en la banda Δ_s, y además mantiene las mismas condiciones de regularidad que F. Aplicando el teorema a la función $\hat{F}$, deducimos que

$$\begin{aligned}
-\infty &< \int^{\infty} \ln\Big(\big|\hat{F}\big(\sigma + iG(\sigma)\big)\big|\Big) e^{-S(\sigma)} d\sigma \\
&= \int^{\infty} \ln\Big(\big|F\big(\sigma + iG(\sigma)\big)\big|\Big) e^{-S(\sigma)} d\sigma - \int^{\infty} \ln(N) e^{-S(\sigma)} d\sigma. \qquad (2.110)
\end{aligned}$$

Aplicando el corolario 2.2.18, deducimos que la última de las integrales es convergente, puesto que la integral $\int^{\infty} e^{-x} dx$ lo es, y por tanto, se obtiene de (2.110) que

$$\int^{\infty} \ln\Big(\big|F\big(\sigma + iG(\sigma)\big)\big|\Big) e^{-S(\sigma)} d\sigma > -\infty.$$

A continuación, se sigue de las relaciones (2.69), (2.51) y (2.99) que existen dos constantes a_1 y a_2, de modo que

$$\int_{a_1}^{\infty} \ln\Big(\big|\Phi\big(x + i\frac{\pi}{2}\big)\big|\Big) e^{-S(\sigma_0^*(x))} d\sigma_0^*(x) > c \int_{a_2}^{\infty} \ln\Big(\big|\Phi\big(x + i\frac{\pi}{2}\big)\big|\Big) e^{-x} dx,$$

donde c es una constante positiva. Basta aplicar el teorema A.3 a la función $\Phi(z)$ para concluir el resultado deseado.

$\square$

2.4. El problema de Watson generalizado

A lo largo de esta sección, como viene siendo habitual, denotaremos por Δ_s al dominio del plano $s = \sigma + it$, definido para $\sigma > \sigma_0$, y $|t| < G(\sigma)$, y sea $F(s)$ una función holomorfa en Δ_s. Además, consideremos una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números positivos. A continuación, supongamos que se satisfacen las siguientes relaciones en Δ_s:

$$|F(s)| \leq M_n e^{-n\sigma} \qquad \text{para cada } n \geq 1. \tag{2.111}$$

El problema de Watson generalizado consiste en dar condiciones necesarias y suficientes, relacionando la sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ con la función $G(\sigma)$, para que de (2.111) se deduzca que la función $F(s)$ es idénticamente nula. Antes de dar una respuesta a este problema, será necesario tratar un par de lemas previos.

Lema 2.4.1. Sea $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de números positivos, tal que $v_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Sea $N(x)$ su función de distribución, es decir:

$$N(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq v_1, \\ n & \text{si } v_n < x \leq v_{n+1}. \end{cases}$$

Además, denotemos por $N_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Entonces, se tiene que

$$\int_0^x N(t)dt = \max_{n\geq 1}(nx - N_n) = mx - N_m,$$

donde $m \geq 1$ es tal que $v_m < x \leq v_{m+1}$.

Demostración. Sea $x > v_1$ fijo, pero arbitrario, de modo que existe $m \geq 1$ tal que $v_m < x \leq v_{m+1}$. Es claro que

$$\begin{aligned}\int_0^x N(t)dt = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{v_k}^{v_{k+1}} N(t)dt + \int_{v_m}^{x} N(t)dt &= \sum_{k=1}^{m-1} k(v_{k+1} - v_k) + m(x - v_m) \\ &= mx - N_m.\end{aligned}$$

Resta ver que $\max_{n\geq 1}(nx - N_n) = mx - N_m$, para ello, distingamos dos casos: En primer lugar, si $0 < n < m$, se tiene que

$$\begin{aligned} nx - N_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(v_{k+1} - v_k) + n(x - v_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k(v_{k+1} - v_k) + n\sum_{k=n}^{m-1}(v_{k+1} - v_k) + n(x - v_m) \\ &\leq \sum_{k=1}^{m-1} k(v_{k+1} - v_k) + m(x - v_m) = mx - N_m. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $m < n$, entonces

$$\begin{aligned} nx - N_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(v_{k+1} - v_k) + nx - nv_n \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} k(v_{k+1} - v_k) - mv_m - \sum_{k=m+1}^{n} v_k + nx + mx - mx \\ &= mx - N_m - \sum_{k=m+1}^{n} (v_k - x) \leq mx - N_m, \end{aligned}$$

con lo que concluimos la prueba. □

Lema 2.4.2. Sean $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $N(x)$ definidos como en el lema 2.4.1, y sea $S(x)$ una función derivable para $x \geq c \geq 0$, con $0 < a < S'(x) < b$, donde a, b, c son constantes. Además, consideremos la función $N_1(x)$ definida como

$$N_1(x) = \int_0^x N(t)dt.$$

Entonces, las expresiones

$$\sum^{\infty} e^{-S(v_n)}, \qquad \int^{\infty} e^{-S(x)} N_1(x)dx, \tag{2.112}$$

convergen o divergen simultáneamente.

Demostración. En primer lugar, realizando una integración por partes, obtenemos que

$$\int_c^T e^{-S(t)} N(t)dt = e^{-S(T)} N_1(T) - e^{-S(c)} N_1(c) + \int_c^T e^{-S(t)} S'(t) N_1(t)dt. \tag{2.113}$$

Por otro lado, se tiene la siguiente acotación

$$\begin{aligned} e^{-S(T)} N_1(T) &= e^{-S(T)} \int_0^T N(t)dt = e^{-S(T)} \int_0^T N(t) e^{-S(t)} e^{S(t)} dt \\ &\leq e^{-S(T)} e^{S(T)} \int_0^T N(t) e^{-S(t)} dt = \int_0^T N(t) e^{-S(t)} dt, \end{aligned}$$

donde la desigualdad es consecuencia del no decrecimiento de la función S. Entonces, de la convergencia de $\int^{\infty} e^{-S(t)} N(t)dt$, se deduce de lo anterior la convergencia de $\int^{\infty} e^{-S(t)} N_1(t)dt$, pues recordemos que $S'(x)$ está acotado por hipótesis. Recíprocamente, si esta última integral converge, entonces existirá una sucesión $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} t_i = \infty, \qquad \text{y} \qquad \lim_{i\to\infty} e^{-S(t_i)} N_1(t_i) = 0.$$

Por tanto, se deduce de lo anterior y de la expresión (2.113) que

$$\begin{aligned}
\int_c^{\infty} e^{-S(t)} N(t)dt &= \lim_{i\to\infty} \int_c^{t_i} e^{-S(t)} N(t)dt \\
&= -e^{-S(c)} N_1(c) + \lim_{i\to\infty} \int_c^{t_i} e^{-S'(t)} N_1(t)dt \\
&= -e^{-S(c)} N_1(c) + \int_c^{\infty} e^{-S(t)} S'(t) N_1(t)dt \\
&\leq b \int_c^{\infty} e^{-S(t)} N_1(t)dt < \infty,
\end{aligned}$$

lo que justifica plenamente la convergencia de la integral $\int^{\infty} e^{-S(t)} N(t)dt$.

A continuación, aplicando el teorema A.20, esto es, realizando una segunda integración por partes, obtenemos que

$$\int_c^T e^{-S(t)} dN(t) = e^{-S(T)} N(T) - e^{-S(c)} N(c) + \int_c^T e^{-S(t)} S'(t) N(t)dt.$$

Un razonamiento similar al expuesto al comienzo de la demostración, permite concluir que la convergencia de $\int^{\infty} e^{-S(t)} N(t)dt$ resulta equivalente a la convergencia de $\int^{\infty} e^{-S(t)} dN(t)$. Finalmente, basta observar que

$$\int^{\infty} e^{-S(t)} dN(t) = \sum^{\infty} e^{-S(v_n)},$$

para concluir que las expresiones de (2.112) convergen o divergen de forma simultánea.

□

Definición 2.4.3. Dada una sucesión de números reales positivos $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty$, llamamos sucesión regularizada logarítmicamente convexa de $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, a una nueva sucesión $\{M_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. Su primer elemento es la unidad, esto es, $M_1^c = 1$.

2. Para cada $n > 1$, se tiene que $(M_n^c)^2 \leq M_{n-1}^c M_{n+1}^c$.

3. Para cada $n \geq 1$, se tiene que $M_n^c \leq M_n$.

4. Si tomamos otra sucesión $\{M'_n\}_{n=1}^{\infty}$, cumpliendo las propiedades anteriores, entonces, para cada $n \geq 1$, se tiene que $M'_n \leq M_n^c$.

Observación 2.4.4. La condición $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty$ garantiza la existencia de dicha regularizada. Además, si denotamos por $q(x)$ a

$$q(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{x^n}{M_n},$$

entonces, la sucesión regularizada logarítmicamente convexa de la sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, viene dada por la expresión

$$M_n^c = \sup_{x\geq 0} \frac{x^n}{q(x)}.$$

Lema 2.4.5. Sea $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos, tales que $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty$, y sea $\{M_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión regularizada logarítmicamente convexa de la sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$. A continuación, sea

$$A(t) = \max_{n\geq 1} \big(nt - \ln(M_n)\big).$$

Sea $S(x)$ una función definida como en el lema 2.4.2. Entonces, las expresiones

$$\sum^{\infty} e^{-S\left(\ln\left(\frac{M_{n+1}^c}{M_n^c}\right)\right)}, \qquad \int^{\infty} A(t)e^{-S(t)}dt,$$

convergen o divergen simultáneamente.

Demostración. En primer lugar, teniendo en cuenta que el hecho de alterar un número finito de valores de la sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ no altera el valor de $A(t)$ para t suficientemente grande, ni el valor de $\{M_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ para n suficientemente grande, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las cantidades

$$\ln\Big(\frac{M_n^c}{M_{n-1}^c}\Big) \quad \text{para } n \geq 2, \tag{2.114}$$

son positivas y forman una sucesión no decreciente, cumpliendo además que $1 = (M_1^c)^2 \leq M_2^c$. En efecto, como la sucesión $\{M_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ verifica que $(M_n^c)^2 = M_n^c M_n^c \leq M_{n-1}^c M_{n+1}^c$, entonces operando, se obtiene que

$$\frac{M_n^c}{M_{n-1}^c} \leq \frac{M_{n+1}^c}{M_n^c},$$

lo que justifica el no decrecimiento de (2.114). Ahora bien, tomemos la sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números positivos y creciente dada por

$$v_n = \begin{cases} \ln(M_1^c) & \text{para } n = 1, \\ \ln\left(\frac{M_n^c}{M_{n-1}^c}\right) & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

Con vistas a la aplicación del lema 2.4.1, escribamos

$$N_n = \sum_{i=1}^{n} v_i = \ln(M_n^c) \qquad \text{y} \qquad N(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq v_1, \\ n & \text{si } v_n < x \leq v_{n+1}, \text{ para } n \geq 1. \end{cases}$$

Entonces, deducimos que

$$\int_0^x N(t)dt = \max_{k\geq 1}(kx - N_k) = \max_{n\geq 1}(nx - \ln(M_n^c)) = A(x).$$

Para concluir, basta aplicar el lema 2.4.2.

□

Teorema 2.4.6. Sea $G(\sigma)$ una función de variación acotada, definida para cada $\sigma > \sigma_0$, con $\lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma) > 0$. Además, tomemos una constante $c > \sigma_0$ y definamos la función $S(\sigma)$ como

$$S(\sigma) = \frac{\pi}{2}\int_c^{\sigma} \frac{du}{G(u)}.$$

Sea $F(s)$ una función holomorfa en el dominio Δ_s definido para $\sigma > \sigma_0$, y $|t| < G(\sigma)$, y cumpliendo en Δ_s las desigualdades

$$|F(s)| \leq M_n e^{-n\sigma} \qquad \text{para cada } n \geq 1, \tag{2.115}$$

donde $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos. Supongamos que se da una de las siguientes condiciones equivalentes:

1) Si $B(\sigma)$ es la función traza de la sucesión $\{\ln(M_n)\}_{n=1}^{\infty}$, esto es,

$$B(\sigma) = \sup_{n\geq 1}(n\sigma - \ln(M_n)),$$

entonces

$$\int^{\infty} B(\sigma)e^{-S(\sigma)}d\sigma = \infty. \tag{2.116}$$

2) $\liminf_{n\to\infty} M_n^{1/n} < \infty$, o bien $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty$ y en este caso

$$\sum^{\infty} e^{-S\left(\ln\left(\frac{M_{n+1}^c}{M_n^c}\right)\right)} = \infty, \tag{2.117}$$

donde $\{M_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ es la regularizada logarítmicamente convexa de la sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Entonces, la función $F(s)$ es idénticamente nula.

Recíprocamente, si se satisface una de las siguientes dos propiedades equivalentes:

3)
$$\int^{\infty} B(\sigma)e^{-S(\sigma)}d\sigma < \infty; \tag{2.118}$$

4) $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty$ y

$$\sum^{\infty} e^{-S\left(\ln\left(\frac{M_{n+1}^c}{M_n^c}\right)\right)} < \infty, \tag{2.119}$$

entonces existe una función $F(s)$ holomorfa, no idénticamente nula sobre $\overline{\Delta}_s$, que satisface las desigualdades (2.115).

Demostración. En primer lugar, se deduce de (2.115) que para cada $s \in \Delta_s$ se tiene que

$$|F(s)| \le \inf_{n\ge 1}\{M_n e^{-n\sigma}\} =: A_0(\sigma),$$

y si $\liminf_{n\to\infty} M_n^{1/n} < \infty$, se deduce que $A_0(\sigma) = 0$ para σ suficientemente grande, obteniéndose así el resultado buscado. En efecto, existe una sucesión creciente de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, con $n_k \uparrow \infty$, de forma que

$$M_{n_k}^{1/n_k} \le c, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

siendo c una constante positiva. Por otro lado, se tiene que

$$M_{n_k} e^{-n_k\sigma} = \left(M_{n_k}^{1/n_k} e^{-\sigma}\right)^{n_k} \le \left(\frac{c}{e^{\sigma}}\right)^{n_k} \longrightarrow 0, \quad k \to \infty,$$

tomando σ suficientemente grande, de forma que $e^{\sigma} > c$. Se sigue de lo anterior que $A(\sigma) = 0$ para σ grande y del principio de identidad deducimos que F necesariamente es la función idénticamente nula.

Por otro lado, las equivalencias entre 1) y 2), y entre 3) y 4), se deducen del lema 2.4.5, reemplazando A por B, y teniendo presente que la función $S(\sigma)$

satisface las condiciones impuestas en el lema 2.4.2. Debido a esto último, nos centraremos en la justificación del teorema tomando como hipótesis 1) y 3).

Supongamos 1). Tomando logaritmos, se deduce de (2.115) que para cada $s \in \Delta_s$,

$$\ln\big(|F(s)|\big) \leq -n\sigma + \ln(M_n), \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

y de aquí obtenemos que,

$$\ln\big(|F(s)|\big) \leq \inf_{n\geq 1}\{-n\sigma + \ln(M_n)\} = -\sup_{n\geq 1}\{n\sigma - \ln(M_n)\} = -B(\sigma),$$

donde $B(\sigma)$ es una función creciente. Ahora bien, si tomamos la función $G_1(\sigma)$ definida como $G_1(\sigma) = G(\sigma) - e^{-\sigma}$, y si tomamos $\sigma_1 > \sigma_0$ suficientemente grande, entonces G_1 es positiva, continua y con propiedades similares a las de G para $\sigma > \sigma_1$, y por tanto, $F(s)$ es holomorfa el dominio Δ_1 definido para $\sigma > \sigma_1$, y $|t| < G_1(\sigma)$, y es continua en $\overline{\Delta_1}$, pues es holomorfa en Δ_s y este dominio contiene a $\overline{\Delta_1}$. Por otra parte, consideremos la función $S_1(\sigma)$ definida como

$$S_1(\sigma) = \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{du}{G_1(u)}.$$

Se deduce de (2.116) y del criterio de comparación para integrales que

$$\int^{\infty} B(\sigma)e^{-S^*(\sigma)}d\sigma = \infty, \tag{2.120}$$

donde $S^*(\sigma) = \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma}\frac{du}{G(u)}$. Ahora bien, de la definición de $S^*(\sigma)$ y $S_1(\sigma)$, se sigue que

$$S^*(\sigma) - S_1(\sigma) = \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{G_1(u) - G(u)}{G(u)G_1(u)}du = \frac{\pi}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{-e^{-u}}{G^2(u) - G(u)e^{-u}}du, \tag{2.121}$$

expresión acotada entre sendas constantes positivas para σ suficientemente grande, por ser la correspondiente integral impropia, extendida a (σ_1, ∞), convergente. Nuevamente por el criterio de comparación por cociente, se deduce de (2.120) y (2.121) que

$$\int^{\infty} B(\sigma)e^{-S_1(\sigma)}d\sigma = \infty.$$

Para concluir basta aplicar el teorema 2.2.19 en el dominio Δ_1, tomando $N(\sigma) = B(\sigma)$ y $M \equiv 0$, deduciéndose pues que la función $F(s)$ debe ser idénticamente nula.

Por otro lado, si suponemos que se da (2.118), entonces podemos aplicar el teorema 2.2.20, pues $B(\sigma)$ es no decreciente, y deducir que existe una función $F(s)$ no nula y holomorfa en $\overline{\Delta}_s$ tal que para $n \geq 1$, se tiene que

$$\ln\big(|F(s)|\big) \leq -B(\sigma) = \inf_{n\geq 1}\{-n\sigma + \ln(M_n)\} \leq -n\sigma + \ln(M_n),$$

y por tanto, se obtiene

$$|F(s)| \leq M_n e^{-n\sigma} \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

concluyéndose la demostración del teorema. □

Si imponemos a la frontera de Δ_s condiciones más restrictivas, obtendremos resultados más simples, pero importantes, como el que sigue.

Teorema 2.4.7. Con la notación e hipótesis del teorema anterior, suponemos que la función $G(\sigma)$, de variación acotada y con

$$\lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma) = G > 0,$$

es tal que

$$\int^{\infty} |G - G(\sigma)| d\sigma < \infty. \tag{2.122}$$

Entonces, las condiciones siguientes equivalentes:

1)
$$\int^{\infty} B(\sigma)e^{-\frac{\pi\sigma}{2G}} d\sigma = \infty; \tag{2.123}$$

2) O bien $\liminf_{n\to\infty} M_n^{1/n} < \infty$, o bien $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty$ y
$$\sum^{\infty} \left(\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c}\right)^{\pi/2G} = \infty, \tag{2.124}$$

son necesarias y suficientes para que de las desigualdades en Δ_s,

$$|F(s)| \leq M_n e^{-n\sigma} \qquad \text{para } n \geq 1,$$

se deduzca que la función $F(s)$, supuesta holomorfa en Δ_s, es idénticamente nula.

Demostración. En primer lugar, la equivalencia entre ambas condiciones se deduce del lema 2.4.5, tomando la función $S_1(\sigma) = \frac{\pi\sigma}{2G}$. Es por esto, que nos centraremos en la primera de las condiciones, como hicimos en el teorema anterior.

En esta línea, tomando, como en el teorema anterior, $S(\sigma) = \frac{\pi}{2}\int_c^\sigma \frac{du}{G(u)}$, se tiene que

$$\begin{aligned} S(\sigma) - S_1(\sigma) &= \frac{\pi}{2}\int_c^\sigma \frac{du}{G(u)} - \frac{\pi\sigma}{2G} = \frac{\pi}{2}\left(\int_c^\sigma \frac{G - G(u)}{G(u)G}du - \frac{c}{G}\right) \\ &\leq \frac{\pi}{2G}\left(\frac{1}{\delta}\int_c^\sigma \big(G - G(u)\big)du - c\right). \end{aligned} \tag{2.125}$$

Se sigue de (2.122), (2.123), (2.125) y del criterio de comparación, que

$$\int^\infty B(\sigma)e^{-S(\sigma)}d\sigma = \infty.$$

Concluimos que el teorema que nos ocupa es una consecuencia del teorema 2.4.6. □

Teorema 2.4.8. Sea $f(z)$, con $z = x + iy$, una función holomorfa en un semiplano definido para $x > c \geq 0$, donde c es una constante, y sea $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números reales positivos. Sea g una constante positiva. Cada una de las siguientes condiciones equivalentes:

1) Si $T(r)$ es la función definida como

$$T(r) = \sup_{n\geq 1}\left(\frac{r^n}{M_n}\right),$$

entonces

$$\int^\infty \frac{\ln\big(T(r)\big)}{r^{1+\frac{1}{g}}}dr = \infty; \tag{2.126}$$

2) O bien $\liminf_{n\to\infty} M_n^{1/n} < \infty$, o bien $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty$ y

$$\sum^\infty \left(\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c}\right)^{1/g} = \infty,$$

donde $\{M_n^c\}_{n=1}^\infty$ es la regularizada logarítmicamente convexa de la sucesión $\{M_n\}_{n=1}^\infty$;

3) O bien $\liminf_{n\to\infty} M_n^{1/n} < \infty$, o bien $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty$ y

$$\sum^\infty \frac{1}{(M_n^c)^{1/gn}} = \infty,$$

son necesarias y suficientes para que de las desigualdades

$$|f(z)| \leq \frac{M_n}{|z|^{gn}} \qquad \text{para } n \geq 1, \text{ y } x > c, \tag{2.127}$$

resulte que la función $f(z)$ es idénticamente nula.

Demostración. En primer lugar veamos que las tres condiciones son equivalentes. Por un lado, la convergencia o divergencia simultánea de la segunda y tercera condición se deduce del teorema de Denjoy-Carleman 1.3.4 (en particular, de la afirmación de que los enunciados 4 y 5 de aquel teorema son equivalentes), tomando la sucesión $\{(M_n^c)^{1/g}\}_{n=1}^{\infty}$. Por otro lado, teniendo en cuenta que

$$\log\big(T(e^\sigma)\big) = \sup_{n\geq 1}\left(\log\left(\frac{e^{\sigma n}}{M_n}\right)\right) = \sup_{n\geq 1}\big(\sigma n - \ln(M_n)\big) = B(\sigma),$$

y realizando el cambio de variable $r = e^\sigma$ en la integral (2.126), obtenemos que

$$\int^{\infty} \frac{\ln\big(T(r)\big)}{r^{1+\frac{1}{g}}} dr = \int^{\infty} \ln\big(T(e^\sigma)\big) e^{-\frac{\sigma}{g}} d\sigma = \int^{\infty} B(\sigma) e^{-\frac{\sigma}{g}} d\sigma. \tag{2.128}$$

La equivalencia entre las dos primeras condiciones se sigue del lema 2.4.5, tomando $S(x) = x/g$. En efecto, la divergencia de la serie

$$\sum^{\infty} e^{-S\left(\ln\left(\frac{M_{n+1}^c}{M_n^c}\right)\right)} = \sum^{\infty} e^{-\frac{1}{g}\ln\left(\frac{M_{n+1}^c}{M_n^c}\right)} = \sum^{\infty}\left(\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c}\right)^{1/g}$$

equivale a la divergencia de la integral (2.128), y por tanto a la divergencia de (2.126).

A continuación definamos la función $F(s) = f(e^{s/g})$, que es holomorfa en el dominio Δ definido para $\sigma > g\ln(c) = \sigma_0$, y

$$|t| < g \arccos(e^{-\frac{\sigma-\sigma_0}{g}}) = G(\sigma).$$

Además, la función $G(\sigma)$ es una función creciente que tiende hacia $\frac{\pi g}{2}$, cuando $\sigma \to \infty$. Por otro lado, como la función f satisface las desigualdades (2.127), entonces la función $F(s)$ satisface que

$$|F(s)| = |f(e^{s/g})| \leq \frac{M_n}{|e^{s/g}|^{gn}} = \frac{M_n}{e^{\mathrm{Re}(s)n}} = M_n e^{-n\sigma} \qquad \text{para } n \geq 1.$$

Por tanto, aplicando el teorema 2.4.7, pues (2.122) es válido en el caso que nos ocupa,

$$\int^{\infty} |G-G(\sigma)|d\sigma = g\int^{\infty} |\frac{\pi}{2}-\arccos(e^{-\frac{\sigma-\sigma_0}{g}})|d\sigma = g\int^{\infty} |\arcsin(e^{-\frac{\sigma-\sigma_0}{g}})|d\sigma,$$

y teniendo presente que las condiciones 1) y 2) del presente teorema son, de hecho, casos particulares de las condiciones expuestas en el teorema 2.4.7, deducimos que la función $F(s)$ es idénticamente nula, y por tanto, lo es $f(z)$. □

Observación 2.4.9. El teorema 2.4.8 resuelve problemas de casianaliticidad en clases de funciones con desarrollo asintótico uniforme (véase la introducción de este capítulo). Obsérvese que, siendo f holomorfa en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > c\}$, con $c \geq 0$, podemos definir la función $g(z) := f(1/z^{1/g})$, que será holomorfa en una región sectorial D (contraimagen del semiplano anterior por la transformación $z \mapsto 1/z^{1/g}$) bisecada por la dirección $d = 0$, con amplitud π y que tiene al origen en su frontera. Además, las estimaciones (2.127) se traducirán en estimaciones para g de la forma

$$|g(w)| \leq M_n |w|^n, \qquad n \geq 1,\ w \in D,$$

lo que significa, de acuerdo con las definiciones 2.0.5 y 2.0.8, que $g \in \tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(D)$ y g es plana. Por lo tanto, el teorema previo da condiciones equivalentes a la existencia de funciones planas no triviales en la clase $\tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(D)$; en otras palabras, resuelve el problema de la inyectividad de la aplicación de Borel, o determina la casianaliticidad de la clase indicada.

En el caso particular de que $c = 0$, la contraimagen del semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ por la aplicación $z \mapsto 1/z^{1/g}$ es precisamente el sector no acotado $S(0, g)$ bisecado por la dirección $d = 0$ y de apertura πg, y los resultados anteriores resuelven la casianaliticidad en la clase $\tilde{\mathcal{A}}^u_{\{M_n\}}(S(0, g))$. Si tomamos, por ejemplo, $g = 1$, se ha dado respuesta al siguiente problema:

Indicar condiciones necesarias y suficientes sobre una sucesión de números reales positivos $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ para que, si $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos, y $f_1(z)$, y $f_2(z)$ son dos funciones holomorfas en un semiplano, las desigualdades:

$$\left|f_1(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{z^k}\right| \leq \frac{M_n}{|z|^n}, \quad \left|f_2(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{z^k}\right| \leq \frac{M_n}{|z|^n}, \quad \text{para } n \geq 1, \text{ y } x > c, \tag{2.129}$$

impliquen que $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Teorema 2.4.10. Cada una de las condiciones 1), 2), y 3) del teorema 2.4.8, tomando $g = 1$, es necesaria y suficiente, para que de (2.129) se siga que $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Demostración. Tomemos la función $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$, entonces, de la desigualdad triangular, se sigue que

$$|f(z)| = |f_1(z) - f_2(z)| = \left| f_1(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{z^k} - f_2(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{z^k} \right| \leq \frac{2M_n}{|z|^n}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Para concluir, basta aplicar el teorema previo. □

Apéndice A

Nociones previas

A lo largo de este capítulo iremos añadiendo algunos resultados básicos necesarios para la justificación de los teoremas desarrollados en los capítulos previos. La mayoría de estos resultados se han estudiado durante el grado en la asignatura de variable compleja de tercero, y otros, en cambio, se han visto en las asignaturas de ampliación de teoría de funciones y en análisis armónico, pertenecientes al máster de investigación en matemáticas.

Teorema A.1. (Teorema de Plancherel) Existe un isomorfismo de espacio de Hilbert $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$, con las siguientes propiedades:

1) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{F}(f)$ es la transformada de Fourier de f, es decir, para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} dx.$$

2) $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$, para cada función $f \in L^2(\mathbb{R})$.

3) Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces tenemos la siguiente relación simétrica entre f y $\mathcal{F}(f)$: Si

$$\phi_A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixt} dx, \quad \text{y} \quad \psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \mathcal{F}(f)(t) e^{ixt} dt,$$

entonces $\|\phi_A - \mathcal{F}(f)\|_2 \to 0$, y $\|\psi_A - f\|_2 \to 0$, cuando $A \to \infty$.

Corolario A.2. Con la notación del teorema anterior, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, y $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(t) e^{ixt} dt,$$

en casi todo punto.

Proposición A.3. (Desigualdad de Hölder) Sean $p, q \in [0, \infty]$ exponentes conjugados y X un subconjunto medible en el sentido de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in L^p(X)$ y $g \in L^q(X)$, entonces $fg \in L^1(X)$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema A.4. (Teorema de holomorfía bajo el signo integral) Sean A un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$, Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon A \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que:

1) Para cada $z \in \Omega$ fijo, la función $f_z\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_z(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, z)$ es medible en A.

2) Para cada $\mathbf{x} \in A$ fijo, la función $f_{\mathbf{x}}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_{\mathbf{x}}(z) = f(\mathbf{x}, z)$ es holomorfa en Ω.

3) Fijado $z_0 \in \Omega$, existe un entorno V de z_0, $V \subset \Omega$ y una función $g\colon A \longrightarrow [0, \infty)$ integrable Lebesgue en A tal que

$$|f(\mathbf{x}, z)| \leq g(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } (\mathbf{x}, z) \in A \times V.$$

Entonces, la función $F\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como sigue

$$F(z) = \int_A f(\mathbf{x}, z) d\mathbf{x} \quad \text{para cada } z \in \Omega,$$

es holomorfa en Ω, y además,

$$F'(z) = \int_A \frac{\partial}{\partial z} f(\mathbf{x}, z) d\mathbf{x} \quad \text{para cada } z \in \Omega.$$

Teorema A.5. (Principio de Identidad) Sean f y g dos funciones holomorfas en un mismo abierto conexo U de $\mathbb{C}$ que coinciden en un subconjunto A que tiene al menos un punto de acumulación en U. Entonces $f(z) = g(z)$ para cada $z \in U$.

Proposición A.6. (Desigualdades de Cauchy para las derivadas) Sea f una función holomorfa en el disco $D(a, r)$, y supongamos que existe una constante positiva M, de modo que

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{para todo } z \in D(a, r).$$

Entonces, para cada $n = 0, 1, 2, ...$, se verifica que

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

Demostración. Aplicaremos la fórmula integral de Cauchy en cada disco $\overline{D}(a, R)$, con $0 < R < r$. Para ello, sea γ_R la curva que parametriza el disco de centro a y radio R, es decir,

$$\gamma_R = a + Re^{it} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, de la fórmula integral de Cauchy aplicada a $\overline{D}(a, R)$, deducimos que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Acotando la expresión anterior, obtenemos que

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \text{long}(\gamma_R) \max_{w \in \gamma_R^*} \left| \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi R \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{n!M}{R^n},$$

y tomando límites cuando $R \to r$, se concluye que

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{r^n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_0.$$

$\square$

Teorema A.7. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio Ω, de modo que ninguna función es idénticamente nula en ninguna componente de Ω. Supongamos que la serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|,$$

converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω. Entonces,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

define una función f holomorfa en Ω y no nula.

Teorema A.8. (Fórmula de Jensen) Sea f una función holomorfa en $B(0,1)$, tal que $f(0) \neq 0$. Sea $0 < r < 1$, y sean $a_1, a_2, ..., a_n$ todos los ceros de f en $B(0,r)$, donde cada cero aparece acorde a su multiplicidad. Entonces

$$\ln(|f(0)|) + \log\left(\frac{r^n}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(|f(re^{i\theta})|)d\theta.$$

Observación A.9. Por un lado, si f tiene ceros en la frontera de $B(0,r)$, entonces la integral anterior es impropia. Por otro lado, el segundo sumando del lado izquierdo es cero si f no tiene ceros en $B(0,r)$.

Teorema A.10. Sea $\phi(\zeta)$ una función no idénticamente nula, holomorfa y acotada en el disco abierto $|\zeta| < 1$, continua en el disco cerrado $|\zeta| \leq 1$, salvo quizás en el punto $\zeta = 1$. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \ln(|\phi(e^{i\theta})|)d\theta > -\infty.$$

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\phi(\zeta)$ tiene en el origen un cero de orden $k \geq 0$. Entonces, existe una función $g(\zeta)$ holomorfa en $|\zeta| < 1$, con $g(0) \neq 0$, tal que $\phi(\zeta) = \zeta^k g(\zeta)$. Resulta que la función g es acotada en $|\zeta| < 1$, en efecto: en un entorno de 0 por ser g holomorfa, y en el resto por ser acotadas $\phi(\zeta)$ y ζ^{-k}. Existe pues una constante positiva M tal que $|g(\zeta)| \leq M$. A continuación, consideremos la función ψ definida en $|\zeta| < 1$ como

$$\psi(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{M}.$$

La función $\psi(\zeta)$ no se anula en el origen por construcción, y su módulo está acotado por 1 en el disco unidad. Sean $0 < \rho < 1$, y $0 < \epsilon < \pi$, se sigue de lo anterior que $|\psi(\rho e^{i\theta})| \leq 1$, por lo que $\ln(|\psi(\rho e^{i\theta})|) \leq 0$, y por tanto se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \ln(|\psi(\rho e^{i\theta})|)d\theta &= \int_0^{2\pi} \ln(|\psi(\rho e^{i\theta})|)d\theta \\ &\quad - \left(\int_0^{\epsilon} \ln(|\psi(\rho e^{i\theta})|)d\theta + \int_{2\pi-\epsilon}^{2\pi} \ln(|\psi(\rho e^{i\theta})|)d\theta\right) \\ &\geq \int_0^{2\pi} \ln(|\psi(\rho e^{i\theta})|)d\theta. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Por otro lado, aplicando para el ρ previo la fórmula de Jensen A.8, se deduce que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \ln(|f(re^{i\theta})|)d\theta &= 2\pi\ln(|f(0)|) + 2\pi\log\left(\frac{\rho^n}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right) \\ &\geq 2\pi\ln(|\psi(0)|), \end{aligned} \tag{A.2}$$

donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son todos los ceros de f en $B(0,\rho)$. Sustituyendo (A.2) en (A.1), y teniendo presente que ψ no se anula en el origen, se deduce que

$$\int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \ln(|\psi(\rho e^{i\theta})|)d\theta \geq \int_0^{2\pi} \ln(|\psi(\rho e^{i\theta})|)d\theta \geq 2\pi \ln(|\psi(0)|) > -\infty.$$

Haciendo tender $\rho \to 1$, y aplicando el Lema de Fatou A.12, se sigue de lo anterior que

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \ln(|\psi(e^{i\theta})|)d\theta &\geq \limsup_{\rho\to 1} \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \ln(|\psi(\rho e^{i\theta})|)d\theta \\ &\geq 2\pi \ln(|\psi(0)|) > -\infty. \end{aligned}$$

Por último, haciendo tender $\epsilon \to 0$ se deduce que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \ln(|\psi(e^{i\theta})|)d\theta = \int_0^{2\pi} \ln(|\psi(e^{i\theta})|)d\theta \geq 2\pi \ln(|\psi(0)|) > -\infty. \quad (A.3)$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \ln(|\psi(e^{i\theta})|)d\theta &= \int_0^{2\pi} \ln\left(\left|\frac{\phi(e^{i\theta})}{M(e^{i\theta})^k}\right|\right)d\theta = \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{|\phi(e^{i\theta})|}{M}\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \ln(|\phi(e^{i\theta})|)d\theta - 2\pi\ln(M), \end{aligned}$$

y sustituyendo lo anterior en (A.3), se concluye lo deseado

$$\int_0^{2\pi} \ln(|\phi(e^{i\theta})|)d\theta > -\infty.$$

□

Teorema A.11. (Teorema del módulo máximo) Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, y f una función holomorfa en U. Entonces:

1) Si $|f|$ presenta un máximo local en un punto $z_0 \in U$, es decir, si existe un entorno V de z_0 con $V \subset U$ y de modo que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in V$, entonces f es constante en U.

2) Supongamos además que U es acotado y que f es continua en $\overline{U}$. Entonces, $|f|$ alcanza su máximo absoluto en la frontera de U; es decir, existe un punto $\xi \in \mathrm{Fr}(U)$ tal que $|f(\xi)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$.

Teorema A.12. (Lema de Fatou) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles y no positivas. Entonces

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n.$$

Teorema A.13. (Teorema de la aplicación conforme de Riemann) Sea Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, distinto de $\mathbb{C}$, y sea $a \in \Omega$. Entonces, existe una única función $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica, cumpliendo las siguientes propiedades:

1) $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.

2) f es biyectiva.

3) $f(\Omega) = D(0,1)$.

Teorema A.14. (Teorema de Carathéodory) Sean Ω_1 y Ω_2 dominios acotados en $\mathbb{C}$, cuya frontera es una curva de Jordan. Si $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es la representación conforme de un dominio en otro, entonce f se extiende de forma continua e inyectiva a $\partial\Omega_1$. Concretamente, existe una función continua e inyectiva, $\hat{f} : \overline{\Omega}_1 \longrightarrow \overline{\Omega}_2$, tal que $\hat{f}\big|_{\Omega_1} = f$.

Teorema A.15. (Teorema de Weierstrass) Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en U que converge uniformemente en los compactos de U hacia la función f. Entonces, f es holomorfa en U, y para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de U hacia $f^{(k)}$.

El siguiente resultado puede encontrarse en [5, p. 221]

Teorema A.16. Sean Ω un dominio, y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω tal que $\{f_n(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para algún $z_0 \in \Omega$. Supongamos que se da una de las siguientes condiciones:

1) La sucesión $\{\mathrm{Im}(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en lo compactos de Ω.

2) Se tiene que $\mathrm{Im}(f_n)(z) \leq \mathrm{Im}(f_{n+1})(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \Omega$.

3) Se tiene que $|f_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y todo $z \in \Omega$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) \neq 0$.

Entonces, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de Ω.

A.1. Integral de Riemann-Stieltjes

Para las propiedades relativas a la integral de Riemann-Stieltjes, pueden seguirse los textos [3] y [17].

Definición A.17. Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$ con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, denotamos por $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces, dada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, denotamos por

$$U(\mathcal{P}, f\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i, \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$L(\mathcal{P}, f\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i, \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

y tomando el superior y el inferior de entre todas las posibles particiones $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ denotamos por

$$\underline{\int_a^b} f(t)d\alpha(t) = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha),$$
$$\overline{\int_a^b} f(t)d\alpha(t) = \inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Si ambos valores coinciden, decimos que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ y denotamos dicho valor por

$$\int_a^b f(t)d\alpha(t),$$

y lo denominamos integral de Stieltjes de f con respecto a α en $[a,b]$.

Observación A.18. Si la función $\alpha(t)$ es derivable con continuidad, se verifica la siguiente desigualdad entre las integrales de Stieltjes, y la integral de Riemann clásica

$$\int_a^b f(t)d\alpha(t) = \int_a^b f(t)\alpha'(t)dt.$$

Resultará de especial interés una generalización del teorema de holomorfía bajo el signo integral A.4, que nos permitirá garantizar la holomorfía con las integrales de tipo Riemann-Stieltjes. El siguiente resultado puede encontrarse en [7]

Teorema A.19. (Teorema de holomorfía bajo el signo integral general) Sean X un espacio localmente compacto y μ una medida positiva sobre X. Consideremos Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon X\times\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$. Supongamos que:

1) Para cada $z\in\Omega$ fijo, la función $f_z\colon X\longrightarrow\mathbb{C}$ definida por $f_z(x)=f(x,z)$ es integrable.

2) Para casi todo $x\in X$ fijo, la función $f_x\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ definida por $f_x(z)=f(x,z)$ es holomorfa en Ω.

3) Existe una función $g\colon X\longrightarrow[0,\infty)$ integrable tal que para todo $z\in\Omega$ se tiene que
$$|f(x,z)|\leq g(x)\quad\text{casi siempre en } X.$$

Entonces, la función $F\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ definida como sigue
$$F(z)=\int_X f(x,z)d\mu(x)\quad\text{para cada } z\in\Omega,$$
es holomorfa en Ω.

Teorema A.20. (Integración por partes) Sea $\alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ monótona creciente. Si $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$, entonces $\alpha\in\mathcal{R}(f)$ en $[a,b]$ y tenemos que
$$\int_a^b fd\alpha=f(x)\alpha(x)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b\alpha df.$$

A continuación se muestra el teorema de integración por partes adaptado a integrales impropias.

Teorema A.21. (Integración por partes) Sea $\alpha:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ monótona creciente. Si $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ para cada $b\geq a$, entonces $\alpha\in\mathcal{R}(f)$ para cada $b\geq a$ y tenemos que
$$\int_a^\infty fd\alpha=f(x)\alpha(x)\Big|_{x=a}^{x\to\infty}-\int_a^\infty\alpha df.$$

Teorema A.22. (Teorema del cambio de variable) Supongamos que ϕ es una función continua estrictamente creciente que transforma $[A,B]$ en $[a,b]$. Supóngase también que α es monótona creciente sobre $[a,b]$, y $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a,b]$. Si se define β y g sobre $[A,B]$ por medio de
$$\beta(y)=\alpha(\phi(y)),\qquad g(y)=f(\phi(y)).$$
Entonces, $g\in\mathcal{R}(\beta)$ y
$$\int_A^B gd\beta=\int_a^b fd\alpha.$$

A.2. Medida Armónica

El concepto de medida armónica fue expuesto por Nevalinna en la década de 1920, aunque los hermanos Riesz ya hicieron uso de ella anteriormente en sus trabajos. La medida armónica surge del estudio del problema Dirichlet. Es una herramienta decisiva en el estudio del crecimiento de las funciones, y de su curvatura. Igualmente tiene diversas aplicaciones en el Análisis Matemático, como el problema de la corona y en los problemas de representación conforme, y también en la teoría de la probabilidad, especialmente a la hora de considerar la teoría de la difusión y el movimiento browniano.

Remitimos a los textos [8], [10] y [15] para propiedades adicionales sobre la misma.

Definición A.23. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, cuya frontera consiste en varias curvas de Jordan. Sea E una unión finita de arcos en $\partial\Omega$ (incluyendo la posibilidad de que solo haya una componente conexa). Entonces la medida armónica de E en el punto $z \in \Omega$, es el valor en z de la función armónica ω en Ω, acotada entre 0 y 1, y cuyo límite en la frontera toma el valor 1 en los puntos de E, y toma el valor 0 en los puntos de $\partial\Omega \setminus E$. Denotaremos la medida armónica por $\omega(z, E, \Omega)$, o $\omega(z, E)$, según esté claro el dominio o no. Si E se compone de un único arco, delimitado entre los puntos e_1 y e_2, escribiremos la medida armónica por $\omega(z, e_1, e_2, \Omega)$, o $\omega(z, e_1, e_2)$.

Observación A.24. Una propiedad interesante sobre la medida armónica es la aditividad, es decir, si $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$, entonces

$$\omega(z, E, \Omega) = \omega(z, E_1, \Omega) + \omega(z, E_2, \Omega) + \cdots + \omega(z, E_n, \Omega).$$

El siguiente resultado establece la conservación de la medida armónica por transformaciones conformes.

Proposición A.25. Sean Ω_1 y Ω_2 dominios cuya frontera consiste en curvas de Jordan en $\mathbb{C}$, y sea $\phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ la representación conforme de un dominio en el otro. Si $E_1 \subseteq \partial\Omega_1$ es un arco y $z \in \Omega_1$, entonces

$$\omega(z, \Omega_1, E_1) = \omega(\phi(z), \Omega_2, \phi(E_1)).$$

Aquí $\phi(E_1)$ está bien definido en virtud del teorema de Carathéodory.

Concluimos esta sección proporcionando de forma explícita la función que representa la medida armónica sobre el disco unidad, y sobre el semiplano imaginario superior.

Proposición A.26. Sea $D = D(0,1)$ el disco unidad, y sea E un arco de la circunferencia unidad de ángulo α. Entonces, la medida armónica de E en el origen viene dada por
$$\omega(0, E, D) = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Proposición A.27. Si $\mathbb{H}$ denota el semiplano superior, y tomamos $a < b$ números reales, entonces la medida armónica del segmento de extremos a y b en un punto $z \in \mathbb{H}$ viene dada por

$$\omega(z, a, b, \mathbb{H}) = \omega((x+iy), a, b, \mathbb{H}) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x-a}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x-b}{y}\right)\right).$$

Bibliografía

[1] R.B. Ash and W.P. Novinger, *Complex Variables*, disponible en la página web http://www.math.uiuc.edu/r-ash/CV.html (último acceso el 16 de junio de 2018).

[2] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Education, 3rd edition, 1979.

[3] T. M. Apostol, *Análisis matemático*, Reverté, 1ª edición, 1972.

[4] W. Balser, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, 2000.

[5] R. B. Burckel, *An introduction to classical complex analysis*, Birkhauser, 1ª edición, 1979.

[6] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Second Edition, Springer, 1978.

[7] J. Dieudonné, *Treatise on analysis*, Vol II, Academic Press, 1976.

[8] J. B. Garnett, D. E. Marshall, *Harmonic Measure*, Cambridge University Press, 2005.

[9] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. I*, Springer Verlag, 1983.

[10] S. G. Krantz, *Geometric Function Theory*, Birkhäuser Basel, 2006.

[11] J. Lelong-Ferrand, *Note on a paper by Mandelbrojt and Mac Lane*, Trans. Amer. Math. Soc. 61 (1947), 468.

[12] S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Collection de monographies sur la theorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[13] S. Mandelbrojt, G. R. MacLane,*On Functions Holomorphic in a Strip Region, and an Extension of Watson's Problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 61, no. 3 (1947), 454–467.

[14] R. Nevanlinna, V. Paatero, *Introduction to complex analysis*, Addison-Wesley, cop. 1969.

[15] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1970.

[16] F. J. Pérez, *Curso de Análisis Complejo*, Universidad de Granada, 2004.

[17] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, MacGraw-Hill, New York, 1987.

[18] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[19] L. Tristán, J. Sanz, F. Galindo, M. Núñez, *Variable compleja*, apuntes de clase suministrados por el Prof. Tristán, Universidad de Valladolid, 2016.