Lección Inaugural del Curso Académico 2018-2019

SINGULARIDADES

Lección Inaugural del Curso Académico 2018-2019

SINGULARIDADES

Antonio Campillo López

Catedrático de Álgebra,
Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría
y Topología

Valladolid, 2018

Universidad de **Valladolid**

Diseño cubierta: Área de Imagen Corporativa. Universidad de Valladolid

Imprime: Imprenta Manolete, S. L.
C/ Pilar Miró, 1. Valladolid

D.L.: VA. 598-2018

Profesor ANTONIO CAMPILLO LÓPEZ

Magnífico y Excelentísimo Señor Rector;
Excelentísimas e Ilustrísimas Autoridades;
Distinguido Público:

Me ha sido confiada la gratísima tarea de pronunciar la lección inaugural del curso académico 2018-2019. A este honor, quisiera yo corresponder con una invitación. Quiero invitarles a asomarse por un momento a mi mundo. Desde luego, no es solo mío, disculpen el posesivo; son tantas las horas que paso en él... Es, ciertamente, un lugar peculiar, unas veces más amable, otras más inhóspito, que los matemáticos transitamos al modo en que lo haría un explorador que fuese, además, cartógrafo, notario, jardinero, ingeniero, constructor, detective, minero...

Mucho me satisfaría poder lograr acercarles a ustedes a parajes en que no sea difícil llegar a percibir, siquiera tangencialmente, su atmósfera, y la magia que los matemáticos hallamos en él.

Acompáñenme.

Presentación

La elección del título *Singularidades* se debe a tres razones. Primero, porque es el título del dominio científico sobre el que siempre han girado mi curiosidad y mi investigación. También, porque su tratamiento técnico requiere la convergencia de variadas áreas clásicas de las matemáticas como son la combinatoria, la geometría, la topología, la aritmética, el álgebra, el cálculo o el análisis. Finalmente, porque me encuentro entre los que piensan que aquello que es *singular* es también *bello* y, por tanto, merece ser apreciado y estudiado.

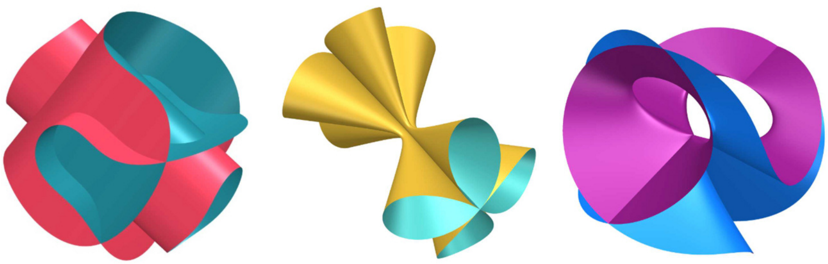


Figura 1: Diversas superficies generadas con el programa *Surfer*

Observen estas imágenes. Son tres bellas figuras. Están realizadas con el programa Surfer accesible en www.imaginary.org. Esta página web pertenece a IMAGINARY, una organización de comunicación matemática, interactiva, basada en la investigación y de código abierto. En sus 10 años de existencia, ha realizado 350 actividades públicas, 30 de ellas en España. El origen y el devenir científico de IMAGINARY son las Singularidades.

Observen estas otras (*pág 12*). Son tres figuras singulares. Se aprecia una singularidad en la primera, seis en la segunda y líneas enteras de singularidades en la tercera. Se entiende que es singular aquel punto que es raro entre todos los de la figura.

Mi especialización es en Singularidades, y a la vez en otras dos materias, la Geometría Algebraica y el Álgebra Conmutati-

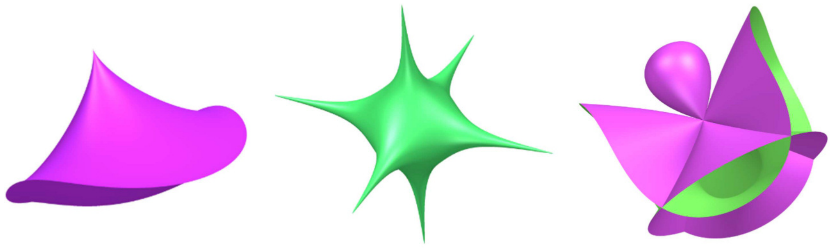


Figura 2: Superficies en las que se aprecian singularidades. *Surfer*

va. Las dos últimas son necesarias para la primera. El objetivo es el estudio de los puntos singulares de las figuras geométricas, es decir las *singularidades* propiamente dichas. Entre los problemas, hay dos de gran envergadura y trascendencia que vienen ocupando, en la práctica y con formulación precisa, a todos los especialistas desde hace más de 50 años. Uno es la resolución de singularidades, consistente en hallar para cada figura un modelo no singular junto con una parte destacada del mismo, denominada *figura excepcional*, cuya contracción recupere la figura singular de la que se ha partido. Desembrollar la figura singular, si se me permite. Otro es la clasificación de singularidades, en concreto poder decidir cuándo una figura singular es más compleja que otra y, en particular, cuándo tienen una complejidad equiparable.

Acaso esté ahora llamando *complejidad* a algo que antes llamé *belleza*.

Veamos un ejemplo. La superficie de un cilindro ilimitado es una figura que carece de singularidades, es decir, es no singular. Al seccionar el cilindro por un plano perpendicular a su eje veremos una circunferencia, a modo de cinturón del cilindro. Si ahora contraemos esa circunferencia hasta colapsarla en un punto, el cilindro se transforma en un cono doble ilimitado, con el punto de colapso como único punto singular. Seleccionamos ahora cuatro de las rectas generatrices del cono circular y ple-

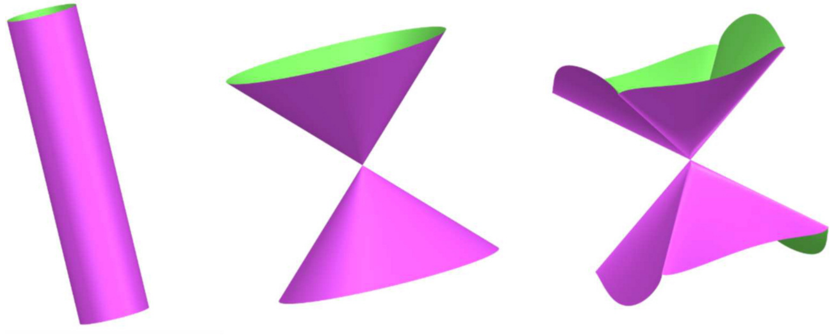


Figura 3: Cilindro, cono y cono con cuatro dobleces. *Surfer*

gamos el cono por cada una de ellas, sin colapsar ningún punto, para crear un cono con cuatro dobleces, cuyas singularidades son los puntos de los cuatro dobleces. Consideramos que el plegado es una segunda contracción.

La realización conjunta de ambas contracciones, transformando el cilindro directamente en el cono con dobleces, se interpreta como resolución de singularidades del cono con dobleces. La llamada figura excepcional la forman cinco líneas: la circunferencia-cinturón y las cuatro rectas generatrices del cilindro que pasan a ser, en el cono circular, las líneas de plegado. Se abre así la puerta a clasificar las singularidades a través de la figura excepcional.

Las transformaciones recíprocas de las contracciones se llaman *dilataciones*. Así, entendemos que los dobleces del cono plegado se dilatan a las rectas generatrices del cono circular, y que el vértice del cono circular se dilata a la circunferencia. El cilindro es la resolución de singularidades del cono con dobleces tras realizar ambas dilataciones sucesivamente. El problema de resolución de singularidades consiste en demostrar que cualquier figura con singularidades deviene no singular tras la realización sucesiva de una o más dilataciones.

Una vez se dispone de la resolución de una figura singular, su figura excepcional puede ser codificada de forma conveniente.

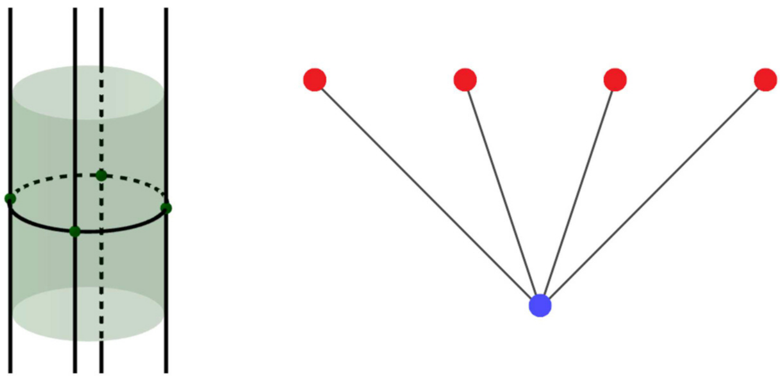


Figura 4: Figura excepcional y su grafo dual

Así, por ejemplo, la singularidad del cono circular puede resumirse en una única marca de color azul que representa a la circunferencia que se contrae. Sin embargo, para expresar la información del cono con cuatro dobleces necesitamos cinco marcas: una azul por la circunferencia que se contrae y otras cuatro marcas rojas por cada una de las generatrices del cilindro que se pliegan, a lo que se añaden cuatro líneas, cada una de las cuales une la marca azul con una de las marcas rojas para simbolizar que la circunferencia y la generatriz concernida son incidentes. Este gráfico se llama técnicamente *grafo dual* de la figura singular, por invertir los papeles: las líneas de la figura excepcional las representa como puntos, y los puntos de incidencia los representa mediante líneas.

El grafo dual es una herramienta clave para la clasificación de singularidades, aunque no siempre, y esto es un problema, la traducción de la rica realidad geométrica al lenguaje simplificador de la combinatoria permite distinguir dos figuras que nosotros percibimos como diferentes.

Las figuras que estamos considerando suelen, en geometría, llamarse *variedades*. La característica más evidente de una variedad, la que determina su naturaleza, es su dimensión. Los puntos son variedades de dimensión 0; las curvas, de dimensión 1; las superficies, de dimensión 2. El estudio clásico de sus características espaciales se conoce como geometría sintética y encuentra su techo en dimensión 3, más allá de la cual la visualización directa de las figuras ya no es factible. Este techo se rompe en el siglo XVII cuando los planteamientos de Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650) inauguran el estudio alternativo de las figuras a través de sus ecuaciones, fundando la geometría analítica.

Cuando las ecuaciones se expresan por polinomios en varias variables, las figuras se llaman *variedades algebraicas*. Del estudio de estas figuras, es decir, de las soluciones de los sistemas de ecuaciones polinómicas, es de lo que se encarga la geometría algebraica. En este nuevo escenario los puntos singulares pueden por fin ser manejados de forma precisa y sistemática. Estos puntos se reconocen analíticamente por ser aquellos cuyas coordenadas son solución de las ecuaciones de la variedad y, además, de unas ecuaciones adicionales derivadas de estas.

Vamos a revisar estos planteamientos. Con la introducción de los ejes cartesianos, los puntos del plano y los del espacio pueden identificarse respectivamente mediante un par ordenado y una terna ordenada de números, que son sus coordenadas cartesianas.

A partir de ese momento, cada ecuación en las incógnitas x e y proporciona una curva en el plano y, análogamente, cada ecuación en las incógnitas x, y, z determina una superficie en el espacio. En ambos casos, la figura en cuestión es la formada por aquellos puntos cuyas coordenadas, sustituidas en la ecuación, satisfacen la igualdad. Y, si tenemos un sistema formado por dos ecuaciones en tres incógnitas y la suerte de que las correspondientes superficies se corten entre sí, encontramos una curva en el espacio que es justamente la línea de intersección, es decir, el conjunto de puntos que son comunes a ambas por cumplir las dos ecuaciones del sistema.

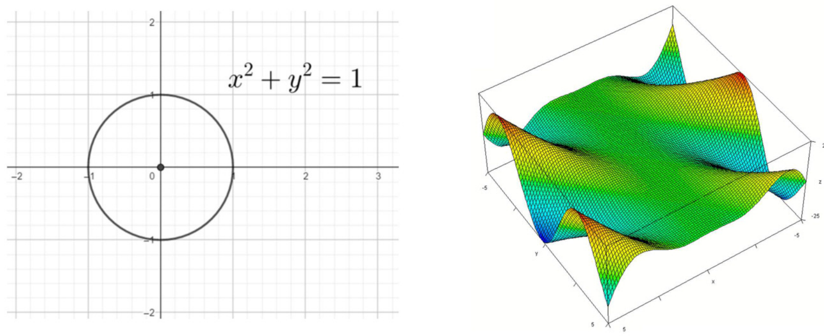


Figura 5: Curva sobre un plano y superficie en el espacio

Por otra parte, un polinomio consiste en una suma de varios términos llamados monomios, cada uno de los cuales lleva un coeficiente no nulo multiplicado por un producto de potencias de algunas o todas las variables (es decir, letras) disponibles. El grado de un monomio es la suma de los exponentes de dichas potencias, y el grado de un polinomio es el máximo de los grados de todos sus monomios.

Es un hecho curioso que las ecuaciones polinómicas de grado 1 producen variedades *lineales*: Las superficies resultan ser totalmente planas y las curvas, totalmente rectas. La materia cuyo cometido es tratar los sistemas de ecuaciones lineales y su sinfín de aplicaciones es conocida como álgebra lineal.

Como muchos de ustedes saben, dado un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, el problema de la posible existencia de ecuaciones superfluas en el sistema lo solventa de forma magistral el proceso de eliminación gaussiana que suprime q ecuaciones y mantiene vivas $m - q$. A partir de estas últimas se obtiene, en el caso compatible, el conjunto de soluciones, cuya dimensión es $n - (m - q)$ pues ese es el número de parámetros que deben introducirse.

Este sencillo pero fundamental resultado puede reformularse así: Si el sistema consta de m ecuaciones lineales de n variables,

r denota la dimensión de la variedad y q el número de ecuaciones superfluas, entonces

$$r - q = n - m$$

Se pone de manifiesto que, si bien los valores r y q dependen del sistema que se considere, su diferencia depende solo del tamaño del sistema.

Álgebra conmutativa

En geometría algebraica es posible concebir la existencia de variedades algebraicas que provengan de sistemas de ecuaciones polinómicas con una cantidad infinita de ecuaciones. Un decisivo resultado de David Hilbert (1862-1943) y Emmy Noether (1882-1935) afirma que, incluso en ese caso, basta con un puñado[1] de todas las ecuaciones del sistema para obtener la misma variedad algebraica. Decidir el número preciso de ecuaciones que debe haber en ese puñado, qué ecuaciones en el sistema inicial son superfluas o cuál es la dimensión de la variedad son cuestiones tan delicadas como interesantes. Forman parte de un catálogo de preguntas técnicas que son el objeto del álgebra conmutativa, una materia especializada.

En el desarrollo de los métodos de álgebra conmutativa para su aplicación a la geometría, fundamental para el devenir posterior de las matemáticas hasta nuestros días, fue decisiva la figura de Emmy Noether[2].

[1]Más precisamente, un número finito de ecuaciones.

[2]Emmy Noether trabajó también sobre teoría de invariantes y física matemática, con importantes contribuciones. El famoso teorema de Noether es un resultado de física; afirma que las simetrías proporcionan leyes de conservación.

Fotografía 1: Emmy Noether, al dejar Alemania en 1933. Otto Neugebauer. Archivos del Instituto de Matemáticas de Oberwolfach

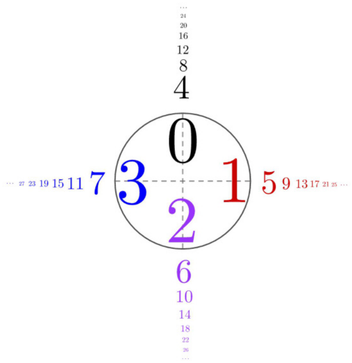
Matemática excepcionalmente dotada y tenaz, Emmy Noether encontró en la universidad alemana, por el hecho de ser mujer, todo tipo de vetos, desde la imposibilidad de matricularse (solo podía acudir a las clases como oyente, bajo la autorización del profesor) a la prohibición de dar clase, a pesar de la extraordinaria calidad de sus publicaciones. Solo a partir de 1915 pudo dar clases, sin salario, como asistente de Hilbert cuando ambos trabajaban también en relatividad, y en 1919 obtuvo un discreto contrato en Gotinga. En 1933 tuvo que emigrar, como tantos, a Estados Unidos donde trabajó al máximo nivel hasta su muerte, acaecida dos años más tarde.

Quizá recuerden el artículo de Javier Sampedro publicado en la portada del diario *El País* el día 8 de marzo de 2018 titulado *Emmy Noether hubiera hecho huelga*. Ya que de singularidades hablamos, bien puede decirse que Emmy Noether fue una auténtica singularidad.

Bastante antes de aplicarse a la geometría, el álgebra conmutativa había surgido ante la necesidad de métodos para tratar los más delicados problemas en el área de la teoría de números. Miremos ahora hacia ese campo.

Dentro de 48 horas sus relojes marcarán la misma hora que en este instante; dentro de 50 horas marcarán la hora actual más 2. Esto se llama *aritmética modular*, y significa que, del número de horas transcurridas, al reloj solo le interesa el resto de su división entre 12, pues los múltiplos de 12 equivalen a cero.

Tomemos diferentes números primos distintos de 2, y pensemos en un reloj de 4 horas. Escribamos esos primos en rojo o en azul según que, cuando pasen ese número de horas, la hora que marque el reloj, es decir, el resto de su división entre 4, sea igual a 1 o sea igual a 3.



Números primos :

3 5 7 11 13 17 19 23 29

Factorización única :

$5 = (2+i)*(2-i) \ = \ 2^2+1^2$

$13 = (3+2i)*(3-2i) \ = \ 3^2+2^2$

$17 = (4+i)*(4-i) \ = \ 4^2+1^2$

$29 = (5+2i)*(5-2i) \ = \ 5^2+2^2$

Figura 6: Reloj de cuatro horas y factorización única de 5, 13, 17 y 29 como enteros de Gauss

Todos los primos de color rojo, tales como 5, 13, 17 y 29, son la suma de los cuadrados de dos números enteros. Los azules, 3, 7, 11, 19, 23..., sin embargo, nunca lo son. ¿Es una casualidad?

No lo es, es un relevante resultado de teoría de números que dice qué ocurre para cada uno de los infinitos primos impares: si deja resto 1, el primo será suma de los cuadrados de dos números enteros; si deja resto 3, no lo será.

Además de los números enteros habituales como son $+3$ o -2, en teoría de números se dispone de otras clases de números similares. Por ejemplo, los *enteros de Gauss*, así llamados en alusión a Karl Friedrich Gauss (1777-1855), son los números complejos que, como $3-2i$, tienen entera su parte real y su parte imaginaria. El cuadrado de i es el número -1.

Todos los primos de color rojo, por ser suma de dos cuadrados, pueden escribirse como producto de dos enteros de Gauss y por tanto dejan, en este nuevo escenario, de ser números primos (cosa que no les sucede a los primos azules).

A pesar de todo, los enteros de Gauss siguen gozando de factorización única como producto de números primos (de los suyos). Las cosas empeoran si pasamos a una tercera clase de *números enteros* formada por $3 - 2r$ y similares donde r es un símbolo cuyo cuadrado es -5. Como podemos observar,

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + r) \cdot (1 - r),$$

de modo que la factorización prima de 6 que conocíamos ha dejado de ser única. Este comportamiento es desconcertante y dificulta posteriores avances.

Un inciso. Este tipo de cuestiones pueden parecer divertimentos o especulaciones sin sentido, pero el hecho es que la seguridad de todas las transacciones electrónicas depende de sistemas criptográficos basados en la factorización de números enteros y propiedades relacionadas.

Para superar en lo posible aquella disfunción, Richard Dedekind (1831-1916) demostró una propiedad de factorización única más débil que sí cumplen los diferentes tipos de enteros, y que se formula no en términos de números sino en términos de ideales.

Este trabajo dio origen al álgebra conmutativa, con el concepto de ideal como clave.

La palabra *ideal* designa, en matemáticas, al conjunto de los números que pueden obtenerse sumando múltiplos de determinados números enteros que actúan como generadores. Curiosamente, el mismo concepto y todos los procedimientos asociados resultan plenamente vigentes si en lugar de números enteros se trabaja con polinomios en varias variables.

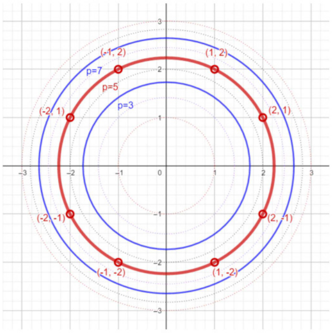
Pues bien: los ideales de polinomios son el objeto idóneo para manejar el conjunto de todas las ecuaciones presentes en el sistema que define a una variedad (¡y toda la infinidad de ecuaciones superfluas que quisiéramos añadir al mismo!) y que, como se ya ha dicho, siempre puede reducirse a un puñado de ellas, según probaron Hilbert y Noether.

Hilbert demostró también que, cuando los coeficientes de los polinomios y las coordenadas de las soluciones requeridas son de determinada naturaleza, por ejemplo, son números complejos, ocurre que toda la información geométrica que reside en una variedad equivale a toda la información algebraica que reside en el ideal asociado, y viceversa. Es el *teorema de los ceros*. Este resultado proporciona un puente vigoroso entre la geometría sintética y la geometría analítica por el que transita la geometría algebraica.

Ese puente fue enormemente reforzado en los años 50 del siglo XX por Alexander Grothendieck (1928-2014), al dotar de recursos y pensamiento geométrico completo a la totalidad de los ideales, sean de la naturaleza o procedencia que sean. Para su revolucionario trabajo creó una noción geométrica mucho más general que la noción de variedad que se adapta, en especial, a la geometría algebraica y a la teoría de números.

La idea central de esta noción (que recibe el nombre de *esquema*) es que los sistemas de ecuaciones, y por tanto los ideales, tienen su "imagen real", como las de IMAGINARY, en el espacio ordinario, pero a la vez tienen tantas imágenes diferentes como

$$x^2 + y^2 = 5$$



$Imagen\ real : La\ circunferencia$

$Imagen\ compleja :$

$$x = u + iv \qquad y = w + it$$

$$u^2 - v^2 + w^2 - t^2 = 5$$
$$2(uv + wt) = 0$$

$Imagen\ entera :$

$(+2, +1)\ (+1, +2)\ (-1, +2)\ (-2, +1)$
$(-2, -1)\ (-1, -2)\ (+1, -2)\ (+2, -1)$

Figura 7: Circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ real, compleja y entera

posibilidades existan de elegir las coordenadas de las soluciones del sistema. Entre ellas su "imagen compleja", que necesita dimensión doble para ser visualizada ya que cada coordenada tiene parte real y parte imaginaria. También sus "imágenes enteras", cuyas soluciones tienen coordenadas que son enteros, enteros de Gauss, modulares u otros. Alguna de estas imágenes puede quedar desierta, por ser vacía, pero entre todas retratarán al ideal.

Este puente aún se ensanchó más desde los años 60 con los avances de la computación, con el énfasis en los algoritmos entre polinomios. El austriaco Bruno Buchberger (1942) aportó el famoso algoritmo que permite calcular generadores especiales, llamados *bases de Gröbner*, para todos los ideales de polinomios. Este resultado, junto a numerosos estudios y aplicaciones a partir de entonces, dieron lugar a una nueva materia, el álgebra computacional, subyacente y complementaria al álgebra conmutativa[3]. Las aplicaciones científicas y técnicas de las bases de Gröbner son relevantes, por ejemplo, en inteligencia artificial.

[3]El álgebra computacional se dedica a la computación polinómica, que constituye hoy día un eje principal de la computación simbólica.

Para las singularidades no son útiles las bases de Gröbner sino un concepto alternativo llamado *bases estándar*. Los especialistas probaron hacia 1964 la existencia de bases estándar y la aplicaron decisivamente a la resolución de singularidades. Los resultados y los algoritmos obtenidos son semejantes, pero los dos contextos y sus aplicaciones son diferentes. Conscientes de ello, a mediados de los años 80 los matemáticos alemanes Gert-Martin Greuel (1944) y Gerhard Pfister (1947), en ese momento profesores cada uno en una de las partes de Alemania que poco después se reunificarían, promovieron la creación de métodos computacionales comunes y una aplicación informática que proporcionase los algoritmos y los cálculos efectivos en ambos contextos. Así nació el conocido sistema de cálculo formal *Singular*, que desde el final de los años 80 se consideró un proyecto, y un producto, de la reunificación alemana.

La escuela italiana de geometría algebraica

Si analizo mi ascendencia científica, veo que esta se remonta al siglo XIX, a los tiempos de otra unificación, la de Italia en 1861. En concreto, a los del geómetra Luigi Cremona (1830-1903), doctorado en Pavía en 1853 bajo la dirección de Francesco Brioschi (1824-1897). Brioschi fue profesor de ingeniería civil, fundador en 1863 y primer director del Politécnico de Milán, el más antiguo instituto politécnico de Italia.

Cremona[4] fue uno de los principales impulsores de la geometría italiana. Sus trabajos sobre curvas y superficies algebraicas han sido el origen de la geometría descriptiva moderna. Entre sus descubrimientos, las célebres *transformaciones cremonianas* fueron una gran novedad que, entre otras cosas, permitieron re-

[4]Cremona recibió numerosos honores como científico, entre ellos en dos ocasiones el prestigioso premio Steiner, que honraba la memoria de quien fue máximo exponente de la geometría sintética, Jakob Steiner (1796-1863).

solver las singularidades de las curvas algebraicas por un proceso algorítmico, es decir, obtener el primer resultado importante sobre resolución de singularidades. Dichas transformaciones son simetrías, en un sentido muy original, de una superficie plana. Están determinadas por la elección de tres puntos no alineados. El efecto geométrico que producen es dilatar primero cada uno de los tres puntos en respectivas tres nuevas líneas, y después contraer cada una de las tres líneas que unían a dos de los puntos originales, para retornar a la superficie plana de partida.

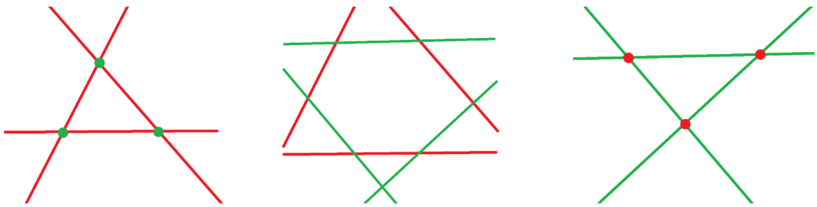
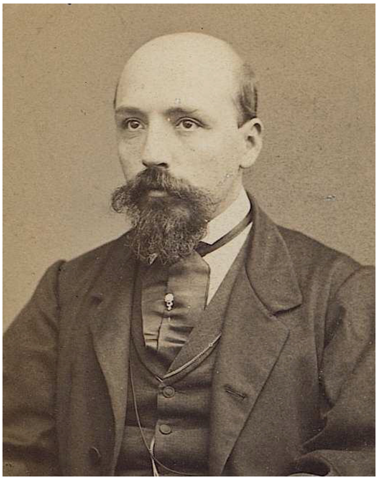


Figura 8: Transformaciones cremonianas

La historia de las matemáticas considera a Cremona como quien estableció la escuela italiana de geometría algebraica, que llegaría a tener gran influencia. Contó con varias decenas de destacados matemáticos que hicieron contribuciones importantes, tanto italianos como de otros países. La escuela fue especialmente creativa e internacionalmente muy potente, sobre todo en *geometría birracional*, término que hace referencia a la naturaleza de las transformaciones cremonianas. La relevancia científica y social de Cremona en su tiempo fue enorme, debido a su prestigio como matemático y a su compromiso social[5].

[5]Con objeto de difundir su genio matemático, se creó en 1884 el *Círculo Matemático de Palermo* que llegó a ser en 1914 la mayor sociedad científica del mundo con alrededor de un millar de socios.



Fotografía 2: Luigi Cremona. Sociedad Matemática de Hamburgo y Archivos del Instituto de Matemáticas de Oberwolfach (MFO)

Entre los primeros miembros de la escuela se encontraban Giuseppe Veronese (1854-1917), doctorado en Roma bajo la dirección de Cremona en 1877, y Guido Castelnuovo (1865-1952), doctorado en Padua bajo la dirección de Veronese en 1886. Veronese, de talento polifacético, se interesó inicialmente por estudios artísticos y técnicos para terminar doctorándose en matemáticas. Aunque su preferencia fue la geometría sintética, fue pionero en el estudio de la geometría en dimensiones superiores[6]. Con Veronese estudió, en Padua, Tulio Levi Civita (1873-1941), cuyos trabajos sobre cálculo tensorial fueron fundamentales y permitieron a Albert Einstein (1879-1955) formular la teoría general de la relatividad.

[6]Un principio que utilizó Veronese en geometría algebraica fue el siguiente. Dado que son polinómicas las ecuaciones de las variedades, se puede sustituir analíticamente el producto de variables de cada monomio por una variable nueva, de forma que los cálculos algebraicos con polinomios se convierten en cálculos de álgebra lineal; entonces, aunque ahora aparecen mayor número de variables, los cálculos son factibles por ser lineales.

Castelnuovo trabajó en Turín antes de su acceso como profesor en Roma en 1891. En 1903, cuando falleció Cremona, Castelnuovo tomó su relevo. Amplió, en términos geométricos prácticos, el trabajo que habían realizado una década antes Alexander von Brill (1842-1935) y Max Noether[7] (1844-1921), conocido como *teoría de Brill-Noether*, que proporciona un compendio avanzado de resultados para las curvas bastante más allá que los proporcionados por el *teorema de Riemann-Roch*, que habían probado antes Bernhard Riemann (1826-1866) y Gustav Roch (1839-1866).

Ambos resultados, Riemann-Roch y Brill-Noether, se consideran centrales y fundacionales de la geometría algebraica.

Motivado por sus estudios previos sobre las curvas planas singulares, Castelnuovo se dedicó intensamente a las superficies algebraicas[8]. Fue el primero en formular para ellas su teorema de Riemann-Roch y, junto con Federigo Enriques (1871-1946), presentó su clasificación. Una de sus creaciones universales fue el famoso *criterio de contracción*, que determina qué curvas de una superficie no singular no crean singularidades cuando se colapsan a un punto.

De los cuatro personajes anteriormente citados (Brioschi, Cremona, Veronese y Castelnuovo), cabe destacar que además de su labor científica tuvieron una gran relevancia social y política (todos ellos fueron senadores). Además, estuvieron muy implicados en el debate de la enseñanza en todos los niveles educativos. De hecho, Cremona fue ministro de Educación a finales del XIX y, en los años 40 del siglo XX, Castelnuovo fue nombrado alto comisionado para la Ciencia con el cometido de recuperar las

[7]Padre de Emmy Noether.

[8]En el periodo 1900-1908 el trabajo de la escuela fue especialmente brillante y colaborativo, en especial, sobre superficies algebraicas. La escuela se había organizado en 1880 y la dirigía Corrado Segre (1863-1924) desde Turín, pasando luego a ser dirigida por Castelnuovo.

instituciones científicas en Italia tras la liberación de Roma.La hija de este último, Emma Castelnuovo (1913-2014), fue una especialista universalmente reconocida en la enseñanza de las matemáticas.

Riemann-Roch y Brill-Noether

Observen ahora la nueva imagen. Se trata de un grafo, es el grafo de Clebsch[9].

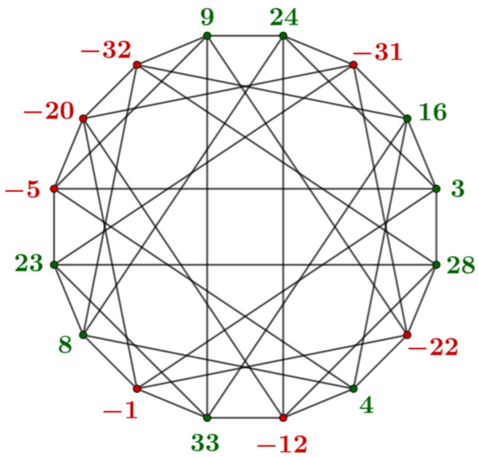


Figura 9: Una distribución de Riemann-Roch sobre el grafo de Clebsch, de montante 25

Tiene 16 vértices que entenderemos que son 16 personas o, si se prefiere, contribuyentes. Las 40 aristas significan que hay una relación de vecindad entre algunos pares de esas personas. Es

---

[9]Alfred Clebsch (1833-1872) fue un matemático alemán especialista en geometría algebraica y uno de los fundadores de la revista *Mathematische Annalen*. El grafo de Clebsch se ha utilizado para probar que el número de Ramsey $R(3,3,3)$ es igual a 17, mostrando que las 120 aristas del grafo completo de 16 vértices pueden repartirse en tres grupos de 40 para obtener tres copias del grafo de Clebsch.

visible que cada persona tiene 5 vecinos. Imaginemos que se dispone de una determinada distribución de una cierta cantidad, o *montante*, de euros entre las personas del grafo, entendiendo que tanto la cantidad como las asignaciones a las personas pueden ser un activo o una deuda.

Pensemos que el montante es, por ejemplo, de 25 euros. Entonces se permite la acción, digamos legal, de que una persona sea generosa con sus vecinos y les obsequie con un euro a cada uno, o bien que los vecinos de una de esas personas sean solidarios con ella y le donen cada uno un euro. Nada impide que un deudor obsequie o done euros a sus vecinos aumentando con ello su deuda.

El *problema de Riemann-Roch* consiste en averiguar cuándo resultará posible que, tras sucesivas acciones legales, se llegue a una nueva distribución que deje sin deudas a todas y cada una de las personas. Según que ello suceda o no, diremos que el problema tiene o no tiene solución.

En geometría, la distribución se denota por D y el montante por d, es decir, en este caso, $d = 25$. El pensamiento geométrico aporta aquí una buena noticia, y es que existe una distribución *canónica* del grafo, denotada por K, que asigna a cada vértice dos euros menos que el número de vecinos que tenga. En nuestro ejemplo, K es la distribución que asigna 3 euros a cada persona, y su montante es 48. El valor de la mitad más uno del montante de la distribución canónica es el *género* del grafo, que se denota por g. Por tanto, en nuestro caso, $g = 25$.

Del pensamiento geométrico importaremos otras dos nuevas nociones:

Una, es que cada distribución D dispone de una distribución compañera $K - D$, que se concibe como su *dual* y cuyas asignaciones a los vértices son las diferencias entre las asignaciones de K y las de D. En el ejemplo, es una distribución de montante 23.

La otra, es que para cada distribución D hay un valor teórico $r(D)$ de *superávit* de dicha distribución, cuyo eventual cálculo resolverá el problema de Riemann-Roch para ella. Cuando el problema no tiene solución el valor del superávit es -1 y, en caso contrario, cuando sí la tiene, el superávit es la máxima cantidad posible tal que, aunque se retirase del montante mediante aportaciones de uno, varios, o todos los vértices, el problema continuaría teniendo solución.

El teorema de Riemann-Roch afirma que se cumple siempre la siguiente igualdad

$$r(D) - r(K - D) = d + 1 - g$$

Como $d = g = 25$, se deduce que $r(D) - r(K-D) = 1$, y por tanto $r(D)$ no puede ser -1. Ello prueba que el problema tiene solución para la distribución de la figura.

La fórmula pone de manifiesto cómo los superávits de una distribución y su distribución dual difieren siempre en una cantidad que solo depende de datos directos del problema[10]: el género del grafo y el montante de la distribución. Por tanto, basta calcular uno de los dos superávits, $r(D)$ o $r(K-D)$, para que quede calculado también el otro. Además, están ligados: si uno es grande, el otro también ha de serlo.

Se puede ver con la nueva distribución de montante 24 que observarán en la figura 10. En ella, todos son activos salvo un desamparado que tiene una deuda. Ahora bien, la distribución dual convierte al desamparado en magnate, quien puede resolver el problema dual sin pensar tanto. Puesto que $d + 1 - g = 0$, se deduce de la fórmula que $r(D) = r(K-D)$, y se concluye que ambos problemas tienen solución.

[10]Una relación análoga entre los distintos parámetros de un problema ya la habíamos observado con anterioridad (página 17); en aquella ocasión, en el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales.

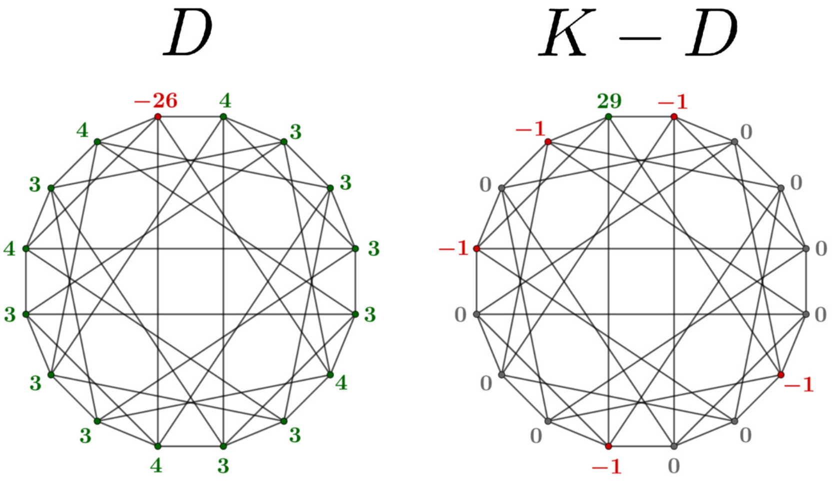


Figura 10: Una distribución de Riemann-Roch sobre el grafo de Clebsch, de montante 24, y su distribución dual

Observar las dualidades, cuando estas existen, es un desiderátum estratégico en geometría, ya que en la práctica ocurre que fenómenos complejos tienen frecuentemente duales sencillos e inteligibles donde obtener respuestas elegantes que pueden después revertirse al escenario original[11].

Naturalmente, la fórmula de Riemann-Roch es cierta cualquiera que sea el grafo y cualquiera que sea la distribución. El montante de la distribución canónica es siempre par porque cada arista puede escenificarse como un estrechamiento de manos entre las personas concernidas; por tanto el género, que es su mitad más uno, es siempre un número entero.

---

[11]Entre las consecuencias directas de la fórmula de Riemann-Roch están que, si el montante es como mínimo el valor de g entonces el problema tiene solución, y que si el montante es g-1 la distribución y su dual tienen o no tienen simultáneamente solución. Por ejemplo, para la distribución del grafo de la figura 9, tanto el montante como el género son iguales a 25, por lo tanto sabemos que tiene solución.

La teoría de Brill-Noether profundiza en la fórmula anterior. La conjetura que plantea afirma que, dados tres enteros d, g y r, la condición necesaria y suficiente para que un grafo de género g disponga de distribuciones de d euros cuyo superávit sea como poco igual a r, es que se cumpla la desigualdad:

$$g \geq (r+1)(g-d+r)$$

Se sabe que es cierta la condición necesaria. Sin embargo, hasta la fecha, la condición suficiente solo se ha podido demostrar hasta género 5.

Estos planteamientos y resultados acerca de grafos son del todo coincidentes con aquellos formulados 150 años antes en el ámbito de la geometría, donde en vez de grafos se consideran curvas algebraicas no singulares y en vez de vértices se toman puntos concretos de dichas curvas. Evidentemente, las *acciones legales* son ahora otras de otra naturaleza. En geometría, tanto el teorema de Riemann-Roch como la conjetura de Brill-Noether son ciertos[12].

El género es el distintivo principal de las curvas algebraicas. Su magia reside en el hecho de que tiene tres interpretaciones radicalmente diferentes, pero todas ellas fundamentales. Una de naturaleza algebraica, otra geométrica, y la tercera topológica a partir de la forma de la imagen compleja de la curva, que es concretamente *un toro de tantas asas como el género*. En la figura se observan toros de una, tres y cinco asas, respectivamente.

La ventaja de las curvas planas sobre las curvas en espacios de mayor dimensión es que tienen una única ecuación; por tanto, los cálculos, las fórmulas y su visualización son asequibles.

---

[12] Castelnuovo encontró una desigualdad para el género en términos de d y r más exigente y ajustada que la de Brill-Noether, aplicable a aquellas curvas algebraicas contenidas en un espacio de dimensión r cuyo grado sea d. Es decir, en geometría el superávit es la dimensión del espacio en el que se ubica la curva y el montante es el grado.

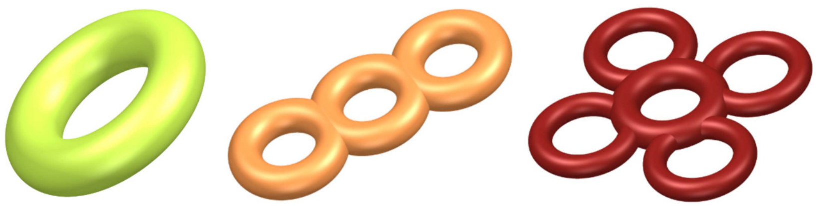


Figura 11: Toros de una, tres y cinco asas. *Surfer*

Hoy día, estos cálculos son algoritmos computacionales disponibles en *Singular*. Se aplican, en particular, para la codificación y la decodificación computacional de los códigos correctores de errores, es decir, códigos que añaden dígitos de control al texto de las transmisiones con objeto de recuperar dicho texto de la información distorsionada recibida.

Claude Shannon (1916-2001), creador de la teoría de la información y promotor del bit como unidad de medida, publicó en 1948 sus bases matemáticas para las telecomunicaciones actuales. Su enfoque interesó especialmente a Andrei Kolmogorov (1903-1987), teórico de la probabilidad.

Las construcciones y su utilización práctica llegarían décadas más tarde. Al comienzo de los años 80, matemáticos rusos crearon los códigos correctores álgebro-geométricos, a partir de curvas algebraicas sobre cuerpos finitos, cuya descripción se basa en Riemann-Roch y su implementación, en Brill-Noether. Entre ellos se han descubierto *códigos excelentes*, previstos por la teoría de Shannon, que simultáneamente minimizan su costo de transmisión y maximizan la corrección de errores. El descubrimiento requiere que el cuerpo finito[13] tenga 49 elementos o más.

[13] La aritmética de un reloj con un número primo de horas es la de un cuerpo finito. Por ejemplo, hay cuerpos finitos con 7 elementos. Dado que 7 es primo como entero de Gauss, también hay un cuerpo finito con 49 elementos, manejable con dos relojes de 7 horas, uno real y otro imaginario.

Debate sobre los fundamentos y el rigor

El italiano Cremona, el alemán Felix Klein (1849-1925), el ruso Andrei Markov (1856-1922) y el sueco Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) fueron los organizadores del primer congreso internacional de matemáticos, ICM[14], que tuvo lugar en Zurich en 1897.

En la segunda edición del ICM, celebrada en París en 1900, David Hilbert anunció su famosa lista de 23 problemas matemáticos, conocidos como *Problemas de Hilbert*, que debían ser resueltos a lo largo del siglo recién comenzado. Muchos de ellos fueron efectivamente resueltos o reformulados; alguno sigue formando parte de las listas actuales.

En la cuarta edición del ICM, que tuvo lugar en Roma en 1908, fue Henri Poincaré[15] (1854-1912) quien ofreció una conferencia de respuesta a la pronunciada por Hilbert en París. Hilbert y Poincaré fueron quienes marcaron, respectivamente desde Gotinga y París, la evolución de las matemáticas en el cambio de siglo y las primeras décadas del siglo XX. Lideraban las dos líneas de pensamiento dominantes, la primera basada en el rigor lógico y la deducción y la segunda en la intuición, la visualización y la imaginación.

En esos tiempos surgió el debate sobre los fundamentos y el rigor en las matemáticas. Aparecieron paradojas que afectaban a los fundamentos, como las conocidas del filósofo y matemático Bertrand Russell[16] (1872-1970) y fue necesaria la axiomatización

[14]El ICM se celebra cada cuatro años. La única vez que se ha celebrado en España fue en Madrid en 2006, y su edición más reciente (2018) ha sido acogida en Rio de Janeiro. Desde la edición de 1954, la Unión Matemática Internacional (IMU) colabora en la organización del ICM.

[15]Como curiosidad, Henri Poincaré y el presidente de la República Francesa Raymond Poincaré eran primos (entre sí).

[16]Bertrand Russell recibió el premio Nobel de Literatura en 1950.

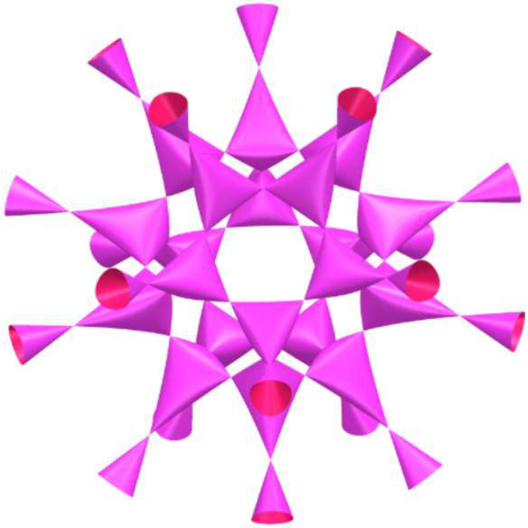


Figura 12: Séxtica de Barth. IMAGINARY

de muchas áreas de las matemáticas, tal y como Hilbert realizó con la geometría y planteó en general más tarde.

Tras una primera década muy brillante, la escuela italiana de geometría algebraica se fue debilitando con el avance del siglo XX, y su estela declinó en 1935. El cambio político en Italia en 1922 y sus posteriores consecuencias, sobre todo a partir de 1925, se evidencia como causa decisiva. La dirección de la escuela había recaído en Castelnuovo, a quien sucedió en 1930 Francesco Severi (1879-1961), interlocutor con el poder político de la época. Aunque con Castelnuovo la escuela había mantenido su rumbo, en la etapa siguiente era ostensible el desprestigio ocasionado por la ausencia de rigor en sus enunciados y justificaciones. Por citar un ejemplo, Severi había afirmado que el máximo número de singularidades que puede tener una superficie de grado 6 en un espacio tridimensional es 52. Ahora se sabe que la conocida superficie *séxtica de Barth* tiene 65, como demostró en 1996 el matemático alemán Wolf Barth (1942-2016) y, poco después, en 1997, se probó que era precisamente 65 el máximo posible.

Figura 13: Séptica de Labs. IMAGINARY

La séxtica de Barth es una realidad observable hoy día gracias a la creación del matemático y diseñador alemán Oliver Labs para IMAGINARY, que plasma las singularidades de esta superficie mostrando también su belleza. En su tesis doctoral, defendida en Mainz en 2005, Labs estudió el mismo problema para superficies de grado 7, encontrando una con 99 singularidades, que es número récord hasta el momento y que naturalmente también se puede observar en otra de sus creaciones. Se sabe con seguridad que es imposible superar 104 singularidades, pero se desconoce si existen sépticas con más de 99.

Oscar Zariski (1899-1986) se doctoró en Roma en 1924 bajo la dirección de Castelnuovo. Sus pioneras aplicaciones del álgebra a la geometría, que originaron grandes avances en ambas áreas, y sus cualidades como profesor son reconocidas universalmente. Había nacido en Bielorrusia, entonces parte de Rusia. Se desplazó a Kiev en 1918 para iniciar estudios en filosofía, antes de realizarlos en matemáticas. Por la evolución de Ucrania y Rusia en la época, viajó a Italia en 1921 y se integró como matemático en Roma. Castelnuovo observó su interés por el rigor y por su uso del álgebra, lo que era una novedad ostensible, y le advirtió de que, a su entender, los métodos de la escuela estaban ya agotados.

Además de Castelnuovo, Zariski se encontró como profesores a Enriques y Severi. A la hora de publicar su primer artículo, su coautor Enriques le sugirió cambiar su nombre bielorruso Ascher Zaritsky por el más italianizado Oscar Zariski. Permaneció becado en Roma en su postdoctorado entre 1925 y 1927.

Dada la situación en Italia de ese momento, Castelnuovo lo puso en contacto con Solomon Lefschetz (1884-1972) quien se había desplazado a Estados Unidos y era profesor en Princeton. Zariski fue profesor en Baltimore durante dos décadas, y más tarde en Harvard, desde 1947 hasta su fallecimiento en 1986.

Desde Baltimore viajó con frecuencia a Princeton para discutir ideas con Lefschetz, cuyo trabajo sobre topología le influyó enormemente. Entre las aplicaciones revolucionarias a la geometría algebraica destaca el estudio de las curvas en el plano atendiendo, más que a la geometría de sus puntos, a la topología del *hueco* entre la curva y el plano, lo que proporcionaba mayor información sobre la curva que la geometría de la misma. Este fenómeno, especialmente notorio en curvas singulares, condujo a la clasificación de las singularidades. La topología había sido una constante en los trabajos de Riemann, Poincaré y Klein, y ya había sido axiomatizada en 1914 por Felix Hausdorff (1868-1942) y, por tanto, estaba provista de rigor.

Álgebra y singularidades

En América, Zariski se interesó profundamente por el álgebra conmutativa, cuyo desarrollo le habían ocultado sus profesores italianos. Desde 1933 asistió al seminario semanal de Emmy

Noether[17] quien, junto con Wolfgang Krull (1899-1971), se encontraba elaborando el álgebra apropiada para aplicarla a las variedades y sus singularidades. Publicó en 1935 su impresionante libro *Superficies Algebraicas* en el que revisaba todos los resultados de la escuela italiana, con objeto de difundirlos en la comunidad internacional. Pasó ese año en Princeton, donde en 1930 se había creado el Instituto de Estudios Avanzados para acoger a los científicos migrados desde Europa. Además de Einstein y Lefschetz, en Princeton coincidieron Kurt Gödel (1906-1978), Alonzo Church (1903-1995), John von Neumann (1903-1957) y también Alan Turing (1912-1954), que se doctoró bajo la dirección de Church[18].

Trabajando intensamente, Zariski protagonizó avances fundamentales de la geometría algebraica para variedades de cualquier dimensión.

En 1945, su encuentro con André Weil[19] (1906-1998), hermano de la filósofa y pacifista Simone Weil (1909-1943), propició un intenso (y extenso) debate sobre los métodos de la geometría algebraica, cuya renovación ambos perseguían desde sus respectivos intereses, que en el caso de Weil era la teoría de números. Había surgido una década antes la llamada *escuela franco-*

---

[17]Presentó una conferencia plenaria en el ICM de Zurich de 1932, la primera impartida por una mujer.

[18]La tesis de Turing-Church mostró que las funciones recursivas, que Church concebía como base para la computación teórica, eran exactamente las mismas que las computables que Turing definió. Para probar la existencia de funciones no computables, Turing utilizó los argumentos teóricos con los que Gödel había mostrado la incompletitud de los sistemas de axiomas. Su solución al *problema de la parada* fue el origen de la informática.

[19]En 1949 formuló las *conjeturas de Weil* sobre las soluciones de los sistemas de ecuaciones polinómicas sobre cuerpos finitos, que serían demostradas en los siguientes 25 años por Bernard Dwork (1923-1998), Grothendieck, Michael Artin (1934) y Pierre Deligne (1944). Protagonizó una discusión científica con Severi sobre una teoría de este en el ICM de Ámsterdam en 1954. Posteriormente Weil aportó las pruebas de sus argumentos.

americana[20]. El álgebra conmutativa que Zariski había desarrollado sirvió de inspiración a Grothendieck para concebir, en los años 50, sus fundamentos para la nueva geometría algebraica.

Fotografía 3: Oscar Zariski. George M. Bergman, Berkeley. Archivos del Instituto de Matemáticas de Oberwolfach (MFO)

En 1950 Zariski fue invitado al ICM que tuvo lugar en Cambridge, Massachussets, el primero celebrado en la postguerra. Su intervención fue histórica. En ella anunció su prueba de la resolución de singularidades de variedades de dimensión menor o igual que 3. En dimensión 1 era ya conocida desde Cremona; Zariski la había probado en dimensiones 2 y 3 en 1939 y 1944 respecti-

[20]La escuela franco-americana surgió tras la publicación por Zariski del libro *Superficies algebraicas*. André Weil, Claude Chevalley (1909-1984) y Pierre Samuel (1921-2009) fueron de los primeros franceses en adherirse. Pierre Samuel fue alumno doctoral de Zariski y más tarde, ambos publicaron en 1958 y 1960 los dos volúmenes del libro *Álgebra Conmutativa*, todo un clásico y un referente.

vamente. Planteó in situ, con sólidas bases de álgebra, el problema de resolución de singularidades al que, con gran creatividad, se dedicarían intensamente desde 1960 tres de sus alumnos doctorales más destacados[21].

En 1965 Zariski también planteó, con las mismas bases, el problema de clasificación de singularidades, en sus *estudios en equisingularidad*, sobre los que continuó trabajando a pesar de su jubilación.

Personalmente, estos trabajos de equisingularidad me son especialmente queridos, ya que son los primeros que estudié y son el origen de los problemas en los que sigo trabajando.

De forma complementaria, Vladimir Arnold (1937-2010), Egbert Brieskorn (1936-2013), Terry Wall (1936) y otros colaboradores han utilizado la topología, y en concreto la visión de John Milnor (1931) sobre las ecuaciones de los puntos singulares, para clasificar las singularidades atendiendo a su *modalidad*, un número natural que mide la capacidad de deformarse en otras singularidades. Han elaborado catálogos completos para las primeras modalidades y han codificado las figuras excepcionales con suficiente información para clasificarlas.

La información codificada para las singularidades es su grafo dual. Los grafos que aparecen se denominan grafos de Dynkin, ya que la mayoría de ellos habían sido utilizados por Eugene Dynkin (1924-2014) para tratar otros problemas. Cuando la modalidad es 0, las singularidades se llaman *simples* y los grafos duales que las caracterizan son los ADE de Dynkin, mostrados en la figura 14, que se corresponden a su vez con las simetrías de las figuras poliédricas regulares elementales[22]. El primero de la lista, A_1, es precisamente el de la singularidad del cono.

---

[21]S.S. Abhyankar (1930-2012), Heisuke Hironaka y Joseph Lipman (1938).

[22]Pirámides y prismas poligonales regulares, tetraedro, cubo y octaedro, dodecaedro e icosaedro. El cubo y el octaedro tienen las mismas simetrías, lo mismdo ocurre con el dodecaedro y el icosaedro.

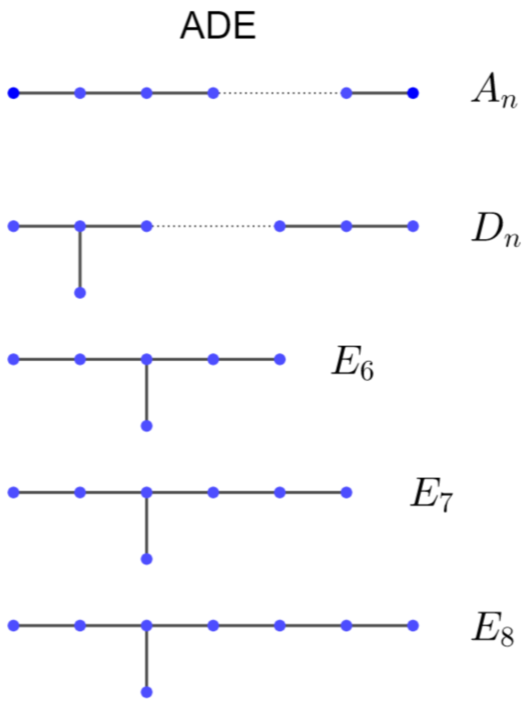


Figura 14: Grafos ADE de Dynkin

Heisuke Hironaka (1931) se doctoró bajo la dirección de Zariski en 1960. En 1964 publicó el teorema de resolución de singularidades en todas las dimensiones, por lo que resolvió el problema en el escenario geométrico. Su demostración es monumental y tiene una inmensa cantidad de aplicaciones. Recibió por ello la Medalla Fields en el ICM de Niza en 1970. La demostración de Hironaka, por sucesivas dilataciones, es plenamente creativa y, sin duda, una de las más célebres de las matemáticas. Hasta los años 90 no se probó que hay algoritmos computacionales de resolución, que hoy están disponibles en *Singular*.

Recibió en 1975 la Orden de la Cultura de Japón, su país natal, que concede el emperador. Como emérito regresó a Japón, a principios de los 80, donde creó una fundación que lleva su nombre para promover y financiar la formación de jóvenes matemáticos.

El célebre John Nash[23] (1928-2015) reaccionó en 1964 al teorema de Hironaka, planteando nuevas formas de clasificar las singularidades mirando a través de las curvas trazadas sobre las mismas. Más de 40 años después se ha logrado probar que su planteamiento es válido para las singularidades de superficie.

Shigefumi Mori (1951) desarrolló el programa que lleva su nombre para la geometría birracional, basado en una de las consecuencias del teorema de Hironaka y en los criterios de contracción que originó Castelnuovo, por el que recibió la Medalla Fields en 1990. En agosto de 2018, Caucher Birkar (1978) ha recibido la Medalla Fields por sus cruciales progresos en el programa de Mori.

David Mumford (1937) fue también alumno doctoral de Zariski. Recibió la Medalla Fields en el ICM de Vancouver en 1974 por su trabajo en geometría algebraica, que revisaba al completo la teoría de invariantes. Resolvió el problema 14 de Hilbert y su teoría se aplica a los problemas de clasificación.

[23]John Nash recibió el premio Nobel de Economía en 1994.

Desde los años 80, Mumford es asimismo un reconocido especialista en matemática aplicada, campo en el que también ha recibido las principales distinciones internacionales por sus trabajos en áreas como visión, imagen, reconocimiento de patrones y descripción matemática de la capacidad humana.

Universidad e investigación

Ustedes habrán reparado en que todavía no he hecho mención a nuestro país, y es obligado que nos preguntemos dónde hemos estado y dónde estamos en relación con el tema tratado.

Cierto es que, durante mucho tiempo, sencillamente no estuvimos.

Por siglos, España había permanecido de espaldas a la vida matemática europea. El impulso a los estudios científicos en las universidades que se inició hacia 1845 fue en parte malogrado por la inercia y, aunque redujo notablemente nuestro retraso respecto de Europa, nos dejó aún a considerable distancia.

En el recordado discurso inaugural del Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (AEPPC)[24] celebrado en Valladolid en octubre de 1915, el matemático Julio Rey Pastor (1888-1962) atribuye a José Echegaray[25] (1832-1916) el mérito de iniciar en 1865 en España el tránsito a la matemática contemporánea al introducir, desde la Escuela de Caminos, contenidos actualizados. Laboriosamente se comenzaron a difundir en nuestro país las ideas y teorías que triunfaban en el extranjero

---

[24]Con el ambiente regenerador de principios del siglo XX se creó la Junta de Ampliación de Estudios (JAE) en 1907, la AEPPC en 1908 y la Sociedad Matemática Española (SME) en 1911. La JAE, que estuvo presidida por Santiago Ramón y Cajal (1852-1934) hasta su fallecimiento y por Ignacio Bolívar (1850-1944) hasta 1939, propició una apertura científica al mundo.

[25]José Echegaray recibió el premio Nobel de Literatura en 1904.

pero, lamenta Rey Pastor, lo hacían «cuando ya habían dado de sí cuanto podían dar, cuando ya habían cristalizado en un libro». Pregunta Rey Pastor: «¿Podemos colaborar ya en la ciencia universal, o debemos todavía limitarnos a asimilarla?»

En los 20 años siguientes, la matemática española efectivamente progresó y se dinamizó con el trabajo de numerosos especialistas relevantes, gran parte de los cuales, sin embargo, hubieron al poco tiempo de dejar el país, o la ciencia.

Nuestra relación con las Singularidades llegó hace 50 años, tras un encuentro en París de jóvenes matemáticos con Hironaka a principios del significativo 1968. A través de Hironaka llegaron las Singularidades a Madrid, y poco más tarde se extendieron también a Valladolid y Sevilla. Además, se estableció contacto con otros alumnos de Zariski. A la vez, la versión francesa de la escuela franco-americana había llegado a Barcelona y se asentó más tarde en Salamanca.

Quienes nos especializamos entonces accedimos como profesores desde los primeros años 80 a una universidad española que estaba siendo profundamente transformada. Se apostó por la investigación y la cooperación internacional, y con esa realidad se ofreció empleo de calidad para los jóvenes. La ley transformadora indujo estatutos de progreso en las universidades, y con el apoyo institucional recibido progresó nuestra ciencia.

Fruto de aquel esfuerzo, desde entonces hemos podido encontrar regularmente apellidos españoles en seminarios celebrados en cualquier lugar del mundo, en la bibliografía que acompaña a los más recientes artículos de investigación, en la generación y el avance de nuevas ideas y en la influencia científica.

En la actualidad la comunidad matemática está bien organizada, la equiparación internacional es un hecho y el progreso continúa. Y siempre tenemos jóvenes investigadores con futuro.

En Singularidades se han realizado valiosas aportaciones, entre ellas conjeturas famosas, abundantes trabajos pioneros, solución a problemas como el comentado de Nash y creación de algoritmos como los disponibles en *Singular*, que se han llevado a cabo por hombres y, mayoritariamente, mujeres investigadoras.

Sin embargo, observamos con preocupación cómo, en los últimos tiempos, el apoyo a la investigación ha perdido fuerza y apenas se ofrecen puestos de trabajo para nuestros jóvenes científicos, muchos de los cuales han tenido que emigrar; las evaluaciones con frecuencia son incapaces de detectar y recompensar la calidad. El colectivo de científicos va disminuyendo poco a poco, y pronto lo hará de forma galopante, por jubilación... La universidad y la investigación necesitan con urgencia amplias plantillas de jóvenes profesores e investigadores.

Mientras tanto, la comunidad científica ha mostrado una de sus singularidades, la solidaridad. Como consecuencia se ha alentado la investigación. Por cierto, antes no les dije que, cuando el problema de Riemann-Roch tiene solución, siempre tiene una que consiste solo en acciones solidarias.

Al comenzar el curso, quisiera reclamar mayor apoyo institucional para que la ciencia avance aún mucho más en nuestro país. Porque se necesita, en palabras otra vez de Rey Pastor, «que España progrese en la ciencia, para que la ciencia pueda progresar en España».

Muchas gracias.

Anexo: ICM y Medallas Fields

La primera edición del Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) se celebró en 1897. Entre 1900 y 1936 y desde 1950 se ha celebrado cada cuatro años, con solo dos excepciones: en 1916 no se celebró, y en 1982 se aplazó al año siguiente.

La Unión Matemática Internacional (IMU) tiene como uno de sus objetivos apoyar y ayudar con la organización del ICM, lo que ha sucedido de 1920 a 1932 tras su fundación y a partir de 1951 cuando fue refundada. La IMU es un organismo no gubernamental sin ánimo de lucro, creado para promover la cooperación internacional en matemáticas.

Las Medallas Fields se consideran la más alta distinción en el ámbito de las matemáticas, como es el Premio Nobel en otras disciplinas. Desde 1936, se conceden en cada edición del ICM a entre dos y cuatro matemáticos cuya edad sea menor de 40 años. Desde 1954 son premios de la IMU.

A continuación se presenta la relación de las sucesivas ediciones del ICM y de las Medallas Fields concedidas en cada uno de ellos.

- **Zurich, Suiza** 1897
- **París, Francia** 1900
- **Heildelberg, Alemania** 1904
- **Roma, Italia** 1908

- **Cambridge, Reino Unido** 1912
- **Estrasburgo, Francia** 1920
- **Toronto, Canadá** 1924
- **Bolonia, Italia** 1928
- **Zurich, Suiza** 1932
- **Oslo, Noruega** 1936

  Lars Ahlfors

  Jesse Douglas
- **Cambridge, Massachussets, EE UU** 1950

  Laurent Schwartz

  Atle Selberg
- **Ámsterdam, Países Bajos** 1954

  Kunihiko Kodaira

  Jean-Pierre Serre
- **Edimburgo, Reino Unido** 1958

  Klaus Roth

  René Thom
- **Estocolmo, Suecia** 1962

  Lars Hörmander

  John Milnor
- **Moscú, Unión Soviética** 1966

  Michael Atiyah

  Paul Cohen

  Alexander Grothendieck

  Stephen Smale

- **Niza, Francia** 1970

    Alan Baker

    Heisuke Hironaka

    Serge Novikov

    John Thompson

- **Vancouver, Canadá** 1974

    Enrico Bombieri

    David Mumford

- **Helsinki, Finlandia** 1978

    Pierre Deligne

    Charles Fefferman

    Gregori Margulis

    Daniel Quillen

- **Varsovia, Polonia** 1983

    Alain Connes

    William Thurston

    Shing-Tung Yau

- **Berkeley, California, EE UU** 1986

    Simon Donaldson

    Gerd Faltings

    Michael Freedman

- **Kioto, Japón** 1990

    Vladimir Drinfeld

    Vaughan Jones

    Shigefumi Mori

    Edward Witten

- **Zurich, Suiza** 1994

    Jean Bourgain

    Pierre-Louis Lions

    Jean-Christophe Yoccoz

    Efim Zelmanov

- **Berlín, Alemania** 1998

    Richard Borcherds

    Timothy Gowers

    Maxim Kontsevich

    Curtis Mcmullen

- **Pekín, China** 2002

    Laurent Lafforgue

    Vladimir Voevodsky

- **Madrid, España** 2006

    Andrei Okounkov

    Grigori Perelman

    Terence Tao

    Wendelin Werner

- **Hyderabad, India** 2010

    Elon Lindenstrauss

    Ngô Bào Châu

    Stanislav Smirnov

    Cédric Villani

- **Seúl, Corea del Sur** 2014

  Artur Avila

  Manjul Bhargava

  Martin Hairer

  Maryam Mirzakhani

- **Río de Janeiro, Brasil** 2018

  Caucher Birkar

  Alessio Figalli

  Peter Scholze

  Akshay Venkatesh

- ***San Petersburgo, Rusia*** *2022*

De Abhyankar a Zariski

Índice de figuras