



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**Cálculo plástico. Método directo
sistemático mediante Teoría de
Mecanismos.**

Autor:

Gómez Carretero, Juan

Tutor:

**Cacho Pérez, Mariano
Dpto. Construcciones Arquitectónicas,
Ingeniería del Terreno y Mecánica de
los Medios Continuos y Teoría de
Estructuras**

Valladolid, septiembre 2019



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**Cálculo plástico. Método directo
sistemático mediante Teoría de
Mecanismos.**

Autor:

Gómez Carretero, Juan

Tutor:

**Cacho Pérez, Mariano
Dpto. Construcciones Arquitectónicas,
Ingeniería del Terreno y Mecánica de
los Medios Continuos y Teoría de
Estructuras**

Valladolid, septiembre 2019

Al tutor del TFG, Mariano Cacho, por haberme ayudado desde el primer día siempre que lo he necesitado para poder sacar adelante este trabajo.

A mis padres y mi hermano, por apoyarme desde que empecé esta carrea que, ahora, cuatro años más tarde, finalizo.

A mis abuelos, por creer en mí y por dirigir sus oraciones para que consiguiera todo aquello que me haya propuesto durante este tiempo.

Resumen

Resolver problemas de cálculo plástico puede tratarse de una tarea compleja si se desea llevar a cabo utilizando metodologías convencionales. En la presente memoria se pretende desarrollar el método de cálculo plástico para el análisis de estructuras desde un plano teórico y fundamental hasta su aplicación práctica, con el objetivo de desarrollar un programa que sea capaz de resolverlo de forma sistemática.

El problema planteado se ha resuelto utilizando el llamado método directo, mediante teoría de mecanismos, aplicando las hipótesis necesarias, en tanto que se trata de un trabajo de estructuras planas de muy baja movilidad.

Los resultados presentados reflejan una utilidad práctica de gran magnitud, debido a su semejanza con los que se obtienen mediante otros métodos y con las ventajas que este conlleva.

Palabras clave

Cálculo plástico, mecanismo, estructura, rótula, esfuerzos.

Abstract

Solving plastic calculus problems might derive on a complex task if conventional methodology is taken. This project aims to develop a plastic calculus method for analysis of structures from a theoretical and fundamental perspective to its practical application, with the goal of developing a programme capable of solving these problems in a systemic manner.

The proposed problems have been solved by adopting the called direct method, through theory of mechanisms, applying as much as hypothesis as necessary, as the project analyses flat structures of very low mobility.

The results of the project present a practical application of high standard, considering its similarities with the results achieved through other methods and the practical advantages of using the direct method above other approaches.

Keywords

Plastic calculus, mechanisms, structure, balljoint, efforts.

Índice general

Resumen	2
Palabras clave	2
Abstract	3
Keywords	3
1. Introducción	14
1.1. Objeto del proyecto.....	14
1.2. Justificación del proyecto	14
1.3. Contenido del proyecto	14
2. Cálculo plástico	18
2.1. Análisis de una estructura hiperestática bajo esfuerzos axiales	19
2.1.1. Período elástico	20
2.1.2. Período elastoplástico.....	20
2.1.3. Período plástico	20
2.1.4. Conclusiones.....	20
2.2. Rótulas plásticas	21
2.3. Teoremas fundamentales del análisis plástico	24
2.3.1. Teorema del límite superior	24
2.3.2. Teorema del límite inferior	25
2.3.3. Método estático	25
2.3.4. Método directo.....	26
2.4. Otras consideraciones	28
2.4.1. Colapso parcial	28
2.4.2. Influencia del esfuerzo axial en el elemento plástico	28
2.4.3. Pandeo e inestabilidad del elemento	29
2.4.4. Rotura frágil.....	29

2.4.5.	Cargas a fatiga	30
3.	Metodología. Teoría de Mecanismos	32
3.1.	Cinemática directa	33
3.2.	Obtención del grado de hiperestaticidad	34
3.3.	Rotaciones entre sistemas de referencia	36
3.4.	Parametrización de las rotaciones	37
3.4.1.	Ángulos de Euler XYZ en ejes fijos	38
3.4.2.	Ángulos de Euler ZYX en ejes transformados o seguidores	39
3.4.3.	Conclusiones.....	39
3.5.	Coordenadas homogéneas	40
3.6.	Matrices homogéneas	40
3.6.1.	Aplicación	41
3.7.	Modelo de Denavit-Hartenberg	43
3.8.	Conclusiones	46
4.	Resultados.....	48
4.1.	Ejemplo de validación. Viga horizontal biempotrada	48
4.1.1.	Resolución del método directo de forma convencional.....	49
4.1.2.	Resolución del método directo mediante la Teoría de Mecanismos 52	
4.2.	Ejemplos.....	54
4.2.1.	Pórtico biempotrado (I).....	54
4.2.2.	Pórtico biempotrado (II).....	56
4.2.3.	Pórtico empotrado-apoyado	58
4.3.	Ejemplo de aplicación. Pórtico con dintel inclinado	60
5.	Conclusiones y líneas futuras.....	64
5.1.	Conclusiones	64
5.2.	Líneas futuras	64
	Bibliografía	66

Anexos	68
Anexo 1. Wolfram Mathematica	68
Definición de los comandos.....	68
Anexo 2. Diagrama de flujo del programa	73
Anexo 3. Código	74
Sistematización del método directo	80

Índice de Figuras

<i>Figura 1. Curva ideal tensión – deformación.....</i>	<i>18</i>
<i>Figura 2. Curva simplificada tensión - deformación.</i>	<i>19</i>
<i>Figura 3. Diagrama carga - flecha.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 4. Viga biempotrada con carga intermedia.....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 5. Obtención del momento plástico.</i>	<i>23</i>
<i>Figura 6. Diagrama simplificado momento - curvatura.</i>	<i>23</i>
<i>Figura 7. Teorema del límite superior.</i>	<i>25</i>
<i>Figura 8. Teorema del límite inferior.</i>	<i>25</i>
<i>Figura 9. Mecanismo de nudo.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 10. Mecanismo de panel.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 11. Mecanismo de viga.</i>	<i>27</i>
<i>Figura 12. Colapso parcial de una viga continua con 5 apoyos.....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 13. Curvas de interacción.</i>	<i>29</i>
<i>Figura 14. Posible estructura de colapso.....</i>	<i>32</i>
<i>Figura 15. Problema cinemático.</i>	<i>33</i>
<i>Figura 16. Robot SCORBOT.....</i>	<i>34</i>
<i>Figura 17. Definición de un punto en el espacio.</i>	<i>35</i>
<i>Figura 18. Estructura de tres barras.....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 19. Representación del vector u en dos sistemas de referencia $\{a\}$ y $\{b\}$.....</i>	<i>36</i>
<i>Figura 20. Ángulos de Euler X, Y, Z fijos.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 21. Rotaciones de un paralelepípedo en ejes fijos y ejes seguidores.</i>	<i>39</i>
<i>Figura 22. Modelo Denavit-Hartenberg (I).....</i>	<i>44</i>

<i>Figura 23. Modelo Denavit-Hartenberg (II).</i>	44
<i>Figura 24. Ejes no coplanarios.</i>	45
<i>Figura 25. Ejes coplanarios.</i>	45
<i>Figura 26. Ejes paralelos.</i>	45
<i>Figura 27. Viga biempotrada con carga intermedia.</i>	48
<i>Figura 28. Forma de colapso.</i>	49
<i>Figura 29. Problema de fuerzas virtuales.</i>	50
<i>Figura 30. Viga horizontal biempotrada.</i>	53
<i>Figura 31. Giro de las rótulas.</i>	54
<i>Figura 32. Ejemplo 1.</i>	55
<i>Figura 33. Solución del ejemplo 1.</i>	56
<i>Figura 34. Desplazamiento de los nodos en el instante de colapso (ejemplo 1).</i>	56
<i>Figura 35. Forma de colapso del ejemplo 1.</i>	56
<i>Figura 36. Ejemplo 2.</i>	57
<i>Figura 37. Solución del ejemplo 2.</i>	58
<i>Figura 38. Desplazamiento de los nodos en el instante de colapso (ejemplo 2).</i>	58
<i>Figura 39. Forma de colapso del ejemplo 2.</i>	58
<i>Figura 40. Ejemplo 3.</i>	59
<i>Figura 41. Solución del ejemplo 3.</i>	60
<i>Figura 42. Desplazamiento de los nodos en el instante de colapso (ejemplo 3).</i>	60
<i>Figura 43. Forma de colapso del ejemplo 3.</i>	60
<i>Figura 44. Ejemplo de aplicación.</i>	61
<i>Figura 45. Solución del ejemplo de aplicación.</i>	62

<i>Figura 46. Forma de colapso del ejemplo de aplicación.</i>	62
<i>Figura 47. Icono de Wolfram Mathematica.</i>	68
<i>Figura 48. Module. num toma el valor de b.</i>	69
<i>Figura 49. MatrixForm.</i>	69
<i>Figura 50. Bucle For.</i>	69
<i>Figura 51. Bucle If.</i>	70
<i>Figura 52. Subsets.</i>	70
<i>Figura 53. Table.</i>	70
<i>Figura 54. Comando Apply.</i>	71
<i>Figura 55. Simplify.</i>	71
<i>Figura 56. Comando Join.</i>	71
<i>Figura 57. Vector "nodos".</i>	80
<i>Figura 58. Vector "material".</i>	80
<i>Figura 59. Vector "perfil".</i>	81
<i>Figura 60. Vector "barras".</i>	81
<i>Figura 61. Vector "datos".</i>	81
<i>Figura 62. Matriz homogénea.</i>	82
<i>Figura 63. Cálculo de rótulas plásticas.</i>	83
<i>Figura 64. Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad.</i>	84
<i>Figura 65. Combinaciones de rótulas plásticas.</i>	85
<i>Figura 66. Posibles mecanismos de colapso.</i>	86
<i>Figura 67. Posible salida para mec2.</i>	87
<i>Figura 68. Posible salida para mec3.</i>	87
<i>Figura 69. MCp.</i>	88

<i>Figura 70. Posibles mecanismos de colapso.....</i>	<i>89</i>
<i>Figura 71. Vector sol.....</i>	<i>90</i>
<i>Figura 72. Cálculo de los desplazamientos.....</i>	<i>90</i>
<i>Figura 73. Vector δ.</i>	<i>91</i>
<i>Figura 74. PDV.....</i>	<i>91</i>
<i>Figura 75. Vector eq.</i>	<i>91</i>
<i>Figura 76. Ensayo de los mecanismos.....</i>	<i>92</i>
<i>Figura 77. Mreal.</i>	<i>92</i>
<i>Figura 78. Generación de momentos virtuales.....</i>	<i>93</i>
<i>Figura 79. Momentos virtuales.....</i>	<i>93</i>
<i>Figura 80. mvirtual.</i>	<i>94</i>
<i>Figura 81. Ecuaciones de compatibilidad.....</i>	<i>94</i>
<i>Figura 82. Giros de las rótulas plásticas.....</i>	<i>95</i>
<i>Figura 83. Ensayo de mecanismos.</i>	<i>97</i>
<i>Figura 84. Comprobar solución positiva.....</i>	<i>98</i>
<i>Figura 85. Solución.....</i>	<i>98</i>

Capítulo 1
INTRODUCCIÓN

1. Introducción

1.1. Objeto del proyecto

En la asignatura de *Estructuras y Construcciones Industriales* que se estudia en el cuarto curso del grado de Ingeniería Mecánica se desarrolla durante, aproximadamente, la tercera parte de la misma un bloque de *cálculo plástico*. A lo largo de este periodo se resuelven problemas de diversas estructuras en los que se pretende resolver la forma de colapso de los sistemas que se plantean, los momentos internos que aparecen, las fuerzas aplicadas y los giros y desplazamientos producidos.

Como complemento a esta formación recibida se realiza este proyecto, en el que se pretende dar un enfoque teórico de la materia que lo fundamenta y, sobre esta base, crear un código que sistematice, de una forma sencilla e intuitiva, estos problemas que se planteaban en la asignatura mencionada.

El objeto de esta sistematización es resolver pórticos, ya tengan sus apoyos fijos o empotrados y sobre los que actúan fuerzas exteriores puntuales aplicadas sobre cualquiera de sus puntos.

1.2. Justificación del proyecto

Plantear y resolver “manualmente” un problema de cálculo plástico para estructuras mediante el método directo puede ser una tarea larga y tediosa, incluso para sistemas de aparente simplicidad. Hay, también, configuraciones que, en caso de tratar de resolverlas de esta misma manera mediante métodos convencionales, tengan tantas posibles formas de colapso que sea completamente inviable tratar, incluso, de llegar a una solución confiando en otra cosa que no sea el azar para hallarla en un tiempo razonable.

Por estos motivos y por otros, como puede ser el amplio número de este tipo de problemas que haya que resolver por la causa que sea, se ha decidido programar una sistematización capaz de resolver problemas de cálculo plástico. De esta forma, simplemente, introduciendo los datos del sistema, se pretende que sea un programa el que los resuelva en un tiempo razonablemente inferior, lo que supone un ahorro de tiempo y esfuerzo muy considerable.

1.3. Contenido del proyecto

Justificar convenientemente el desarrollo de un problema de cálculo plástico mediante el método directo conlleva desarrollar y profundizar en el análisis del propio cálculo plástico, estudiando las estructuras y sus características en función de su configuración, así como las causas y efectos

1. Introducción

del mismo (rótulas plásticas, desplazamientos...) y los distintos teoremas que son capaces de explicar sus consecuencias.

Una vez se ha profundizado en el contenido teórico que fundamenta el proyecto, se procede a desarrollar la metodología con la que se resuelven las estructuras ya mencionadas. Dicha técnica se trata de la Teoría de Mecanismos, que intentará resolver los sistemas propuestos en este TFG, la cual se desarrolla teóricamente en su parte central, poniendo el foco en la cinemática, concretamente en la cinemática directa, ya que se estudian las consecuencias derivadas de unas fuerzas externas que se aplican sobre el sistema (primero se obtienen las fuerzas y, a partir de ellas, se podrían hallar los desplazamientos, no viceversa).

Por último, se presentan unos resultados prácticos de las estructuras propuestas y sus resultados, donde se resuelve un ejemplo de verificación y otros casos más completos que muestran la aplicación del análisis del cálculo plástico.

Capítulo 2
CÁLCULO PLÁSTICO

2. Cálculo plástico

El análisis del cálculo elástico permite estudiar estructuras antes de que ninguna de sus fibras alcance la tensión de límite de proporcionalidad (límite elástico). A pesar de que límite de proporcionalidad y límite elástico representan conceptos diferentes, se puede considerar que, en la práctica, coinciden.

Para calcular las cargas que producen el estado último de una estructura se emplea el **cálculo plástico**, que trata de hallar la carga límite de la estructura, asociada con el límite real de la misma como sistema capaz de transmitir cargas. Dicho planteamiento permite calcular un coeficiente de seguridad de la estructura, el cual se toma como la relación entre las cargas últimas y las cargas de servicio.

En la búsqueda de la carga límite, es necesario suponer cada combinación de cargas crece proporcionalmente entre sí, aproximación válida que no lleva a resultados muy diferentes de si alguna de las cargas pudiera llegar a variar libremente. La carga límite se alcanza posteriormente a superar el límite elástico del material, momento en el cual deja de tener validez el principio de superposición de efectos, utilizado para el análisis del cálculo elástico.

El comportamiento del material del que está formado una estructura varía en función de la carga que se le aplique, de forma ideal como se puede observar en la curva tensión - deformación [Figura 1], donde se representa la tensión que soporta una fibra frente a la deformación que se produce.

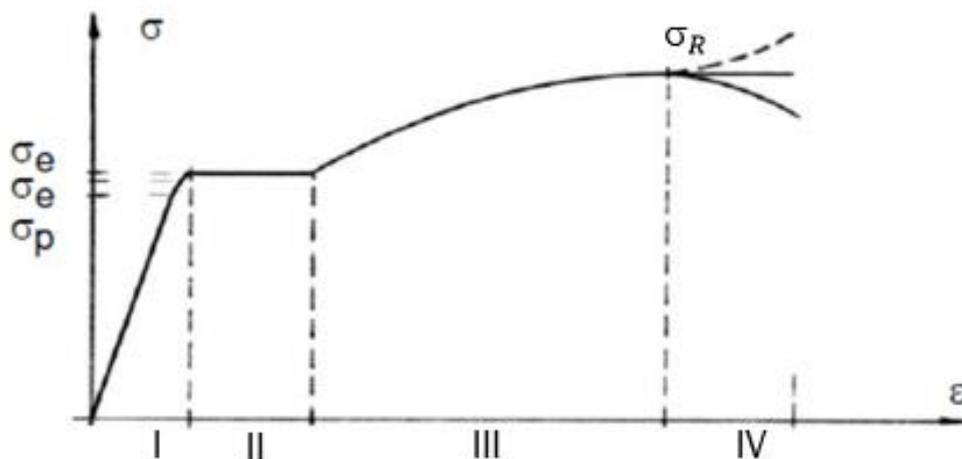


Figura 1. Curva ideal tensión - deformación.

La primera zona de la gráfica corresponde al periodo elástico, donde existe proporcionalidad entre tensión y deformación, siendo la pendiente de la recta

2. Cálculo plástico

el módulo de Young (E). Dentro del período elástico, en el momento que se deje de aplicar la carga, el material vuelve a su estado inicial. La segunda zona es el período de fluencia, en el cual aumenta considerablemente la deformación del material, dentro de unos intervalos de tensión sensiblemente constantes (σ_e). La siguiente etapa corresponde con la de endurecimiento, hasta llegar a un punto máximo, donde se produce la tensión de rotura (σ_R), a partir de la cual entramos en el período de estricción, en el que la deformación aumenta con tensiones menores a la de rotura, acabando por romper el material.

En el momento que un número considerable de fibras entra en fluencia, empieza a comportarse como un mecanismo incapaz de soportar cargas mayores, alcanzando deformaciones inadmisibles o llegando al colapso. Así, simplificando la zona de fluencia a una tensión constante σ_e , se supone la relación constitutiva ideal o simplificada mostrada en la Figura 2. Las zonas I y II corresponden, de manera simplificada, a las dos primeras de la curva ideal.

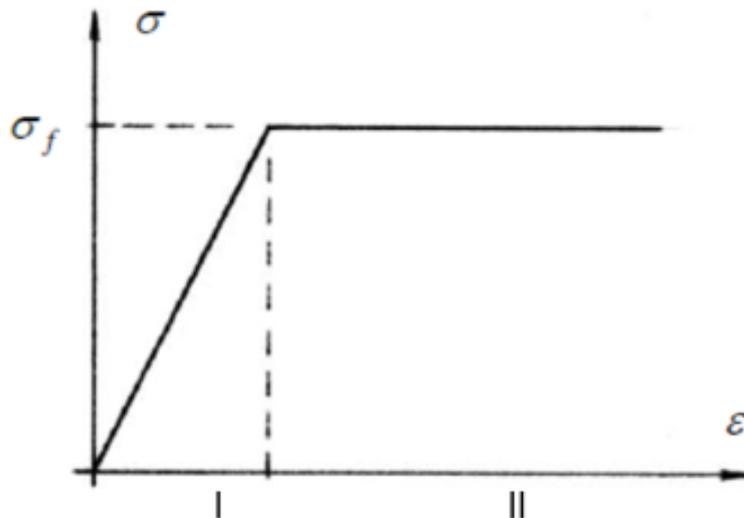


Figura 2. Curva simplificada tensión - deformación.

2.1. Análisis de una estructura hiperestática bajo esfuerzos axiales

Una estructura formada por barras rígidas sometida a grandes cargas, antes de romper, pasa por tres etapas. Primeramente, se pasa por una situación elástica, seguida por una situación elastoplástica intermedia y, finalmente, aparece un estado plástico.

2.1.1. Período elástico

Para calcular el período elástico entran en juego las ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y las ecuaciones constitutivas (ley de Hooke [ec. 1]).

$$\sigma = E * \varepsilon \quad \text{ec. 1}$$

Se obtiene la barra más cargada a partir de aquella que alcance la tensión de fluencia y dicha carga (P_E) será la resistencia nominal de la estructura. La flecha máxima (u_E) se calcula sustituyendo la carga por esta resistencia nominal.

2.1.2. Período elastoplástico

La barra o barras que alcanzan la tensión de fluencia aplican, a partir de entonces, una fuerza del valor del producto de esta tensión por el área. Con estas nuevas condiciones, se aplica la ecuación de equilibrio y se vuelve a calcular la flecha.

2.1.3. Período plástico

La capacidad de carga del sistema se alcanza cuando la última o últimas barras que soportan la estructura llegan a fluencia, momento en el que se está aplicando la carga límite o carga de colapso (P_c) y se puede aumentar la flecha sin aumentar la carga. La estructura comienza a comportarse como un mecanismo de un grado de libertad y falla por deformaciones excesivas o inadmisibles.

2.1.4. Conclusiones

Mediante el cálculo plástico, por tanto, se calcula la capacidad de carga real de la estructura, la cual es mayor que la que se obtiene al aplicar el cálculo elástico. De esta forma se consigue una economía del material desde el punto de vista del dimensionamiento.

Siendo la estructura hiperestática, la capacidad de carga es mayor en el caso plástico que en el elástico, resultado que no ocurriría si esta fuera isostática, igualándose el criterio plástico con el elástico.

El diagrama carga - flecha que resulta es el mostrado en la Figura 3. Siendo las rectas I, II y III las etapas elástica, elastoplástica y plástica, respectivamente.

2. Cálculo plástico

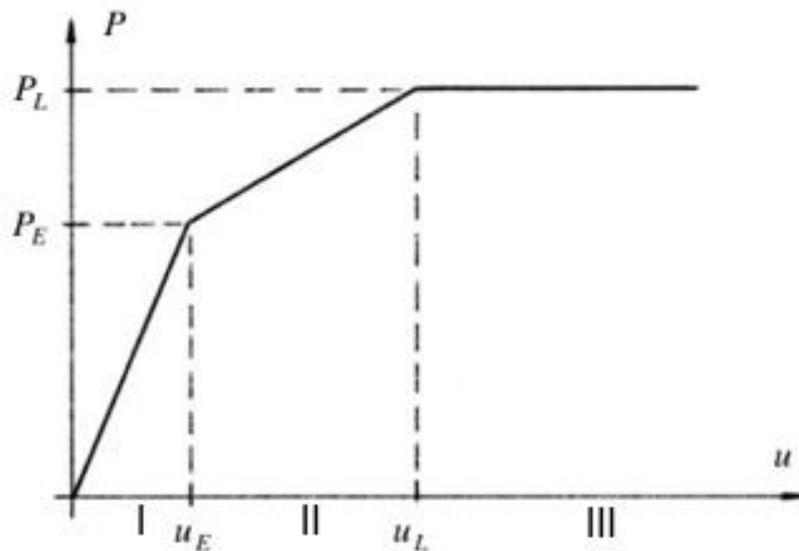


Figura 3. Diagrama carga - flecha.

Para un mismo incremento de carga, una barra solicitada aumenta su esfuerzo en una cantidad mayor en la fase elastoplástica que en la elástica, en tanto que barras que en esta primera trabajaban, en la fase elastoplástica dejan de hacerlo, lo que produce una sollicitación mayor en el resto. Así, nos referimos a “redistribución de esfuerzos” para señalar que en la distribución de esfuerzos en la fase elastoplástica es diferente a la que se produce en el material en fase elástica.

Calcular la carga límite en una estructura hiperestática se trata de un problema estáticamente determinado, donde las incógnitas corresponden al grado de hiperestaticidad de la estructura más uno. La carga externa inicial va creciendo de una forma proporcional a medida que se van perdiendo grados de hiperestaticidad, como se expone en la ec. 2.

$$P_i = \lambda P \quad \text{ec. 2}$$

2.2. Rótulas plásticas

Las rótulas plásticas se forman cuando una barra plastifica, produciéndose una elongación en cualquier punto de esta, superando la correspondiente a la plastificación, dejando de crecer proporcionalmente la tensión. En la Figura 4, cada uno de los puntos negros representa una rótula plástica de la estructura de colapso de una viga horizontal biempotrada con una carga intermedia.

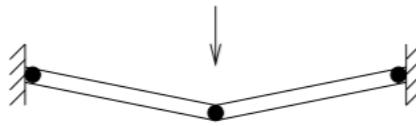


Figura 4. Viga biempotrada con carga intermedia.

La estructura entra en colapso y adquiere un grado de hiperestaticidad negativo en el momento que se han creado las rótulas suficientes para que suceda, de manera que pierde un grado de hiperestaticidad por cada rótula nueva que aparece.

Una rótula se define por secciones en las que se produce plastificación completa, pudiendo girar indefinidamente sin alterar el momento plástico (M_p), aquel momento flector que las solicita en ese instante.

Según el modelo simplificado bilineal de la Figura 2, la rótula se produce en la intersección entre la zona elástica y plástica. En la realidad dicha gráfica es progresiva, debido al endurecimiento por deformación, pero la simplificación se lleva a cabo quedando del lado de la seguridad.

El concepto de rótula plástica se trata de una simplificación del comportamiento plástico de elementos tipo barra, de manera que hay que realizar una serie de hipótesis para modelar la flexión de esta como un elemento unidimensional una vez se ha superado el límite elástico:

- **Hipótesis de sección plana.** El momento plástico de la sección se encuentra de una manera muy sencilla. Si en la fibra neutra la tensión es nula en régimen elástico [Figura 5], cuando se forma la rótula plástica, la tensión se anula en la línea de igualdad de áreas, siendo el momento plástico [ec. 3, ec. 4]:

$$M_p = Y_s \frac{A}{2} (y'_1 - y'_2) = Y_s S_x \quad \text{ec. 3}$$

$$S_x = \int_A \pm y' dA \quad \text{ec. 4}$$

Donde y'_1 e y'_2 son los centros de gravedad de $A/2$ a tracción y compresión, respectivamente. S_x es el primer momento del área. El momento plástico inicial (M_y) es aquel en el que comienza a plastificar la sección, que se calcula, según la ec. 5, mediante la inercia elástica medida desde la fibra neutra:

2. Cálculo plástico

$$M_y = Y_s Z = Y_s \int_A \pm \frac{y^2}{d} dA \quad \text{ec. 5}$$

El factor de forma α relaciona ambos momentos plásticos, siendo $\alpha = \frac{M_p}{M_y}$, indicando la proximidad entre ambos.

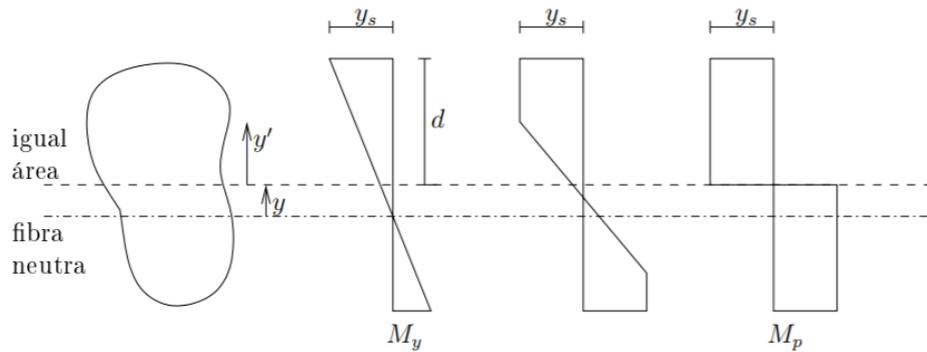


Figura 5. Obtención del momento plástico.

- La curva tensión - deformación, como ya se ha indicado, se puede simplificar a un **diagrama bilineal**, donde se elimina la diferencia entre M_y y M_p .
- Otra simplificación consiste en considerar, solamente, el comportamiento plástico, como se ilustra en la Figura 6, simplificando enormemente el cálculo.

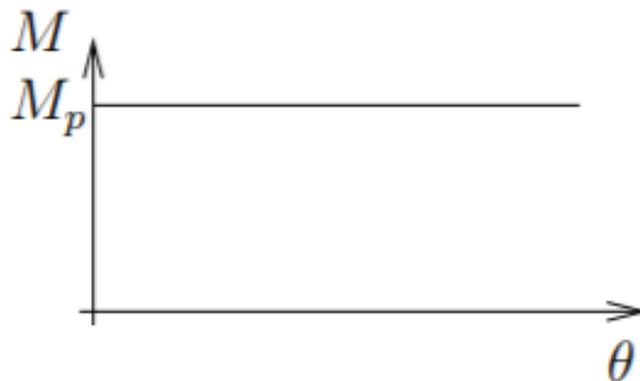


Figura 6. Diagrama simplificado momento - curvatura.

2.3. Teoremas fundamentales del análisis plástico

A continuación, se va a hacer una breve enumeración de los diferentes métodos que existen para estudiar el análisis plástico de las estructuras para, más adelante, desarrollar el método directo, que es objeto principal de este proyecto.

El fin de dichos métodos aplicados a sistemas sometidos a flexión consiste en hallar diagramas de solicitaciones que cumplan con las siguientes pautas:

- Cumplir con las condiciones de equilibrio.
- Formación de un mecanismo inestable a causa de la formación de rótulas plásticas.
- Cumplir en todo momento que $M \leq M_p$.

Se llegará a las cargas de colapso en el momento que ciertas cargas aplicadas sobre la estructura cumplan estas condiciones. Conocer el valor exacto de la carga de colapso es una tarea imposible, por lo que dicha carga se acotará entre dos valores como se expone en la ec. 6:

$$P_{ci} \leq P_c \leq P_{cs} \quad \text{ec. 6}$$

Los diferentes métodos para el cálculo plástico de análisis de estructuras son los siguientes:

2.3.1. Teorema del límite superior

Tomando, por ejemplo, una viga horizontal biempotrada con una carga distribuida a lo largo de toda ella, se supone un mecanismo de rotura y calculando una P_{cs} [Figura 7], que será mayor que la verdadera carga de colapso hasta el momento que se elija el verdadero mecanismo, momento en el cual $P_{cs} = P_c$.

2. Cálculo plástico

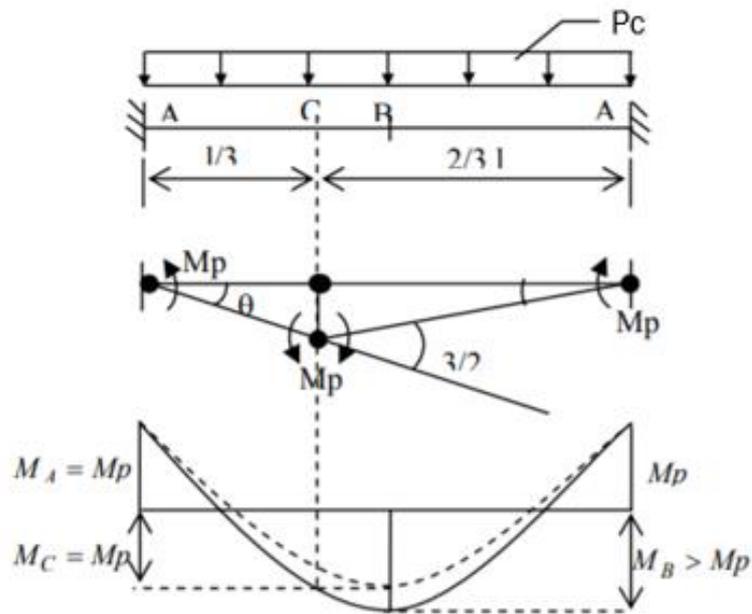


Figura 7. Teorema del límite superior.

2.3.2. Teorema del límite inferior

Se calcula una carga P_{ci} en base a un diagrama de solicitaciones internas en equilibrio de forma que $M \leq M_p$, siendo P_{ci} menor o, a lo sumo, igual a P_c . Como en el caso anterior, sólo eligiendo el verdadero mecanismo de colapso se llegará a dicha situación [Figura 8].

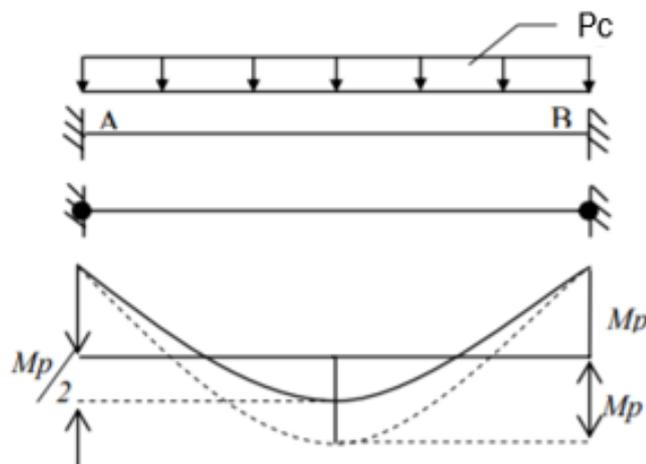


Figura 8. Teorema del límite inferior.

2.3.3. Método estático

Este método está basado en el teorema del límite inferior y consiste en estudiar, bajo cargas hiperestáticas, el diagrama de momentos en equilibrio,

de forma que se produzcan el mayor número posible de rótulas sin saltarse la condición de plasticidad.

De cada uno de los diagramas que se estudian se obtiene una $P_{ci} \leq P_c$, siendo, la mayor de todas ellas, $P_{ci} = P_c$ y produciendo el mecanismo de colapso.

2.3.4. Método directo

Basado en el teorema del límite superior, el método directo para el cálculo plástico de estructuras es el objetivo principal de este trabajo. Consiste en estudiar los diferentes mecanismos de colapso debido a la aparición de rótulas plásticas en distintos puntos para, posteriormente, hallar la carga crítica en equilibrio. Los puntos de una estructura candidatos a ser rótulas plásticas son los siguientes:

- Apoyos con el giro restringido.
- Uniones rígidas entre barras.
- Punto de aplicación de una carga concentrada.
- Cualquier punto intermedio de una carga distribuida.

Cuanto más elementos tenga la estructura, mayor será el número posible de mecanismos de colapso, de entre los cuales se debe encontrar el verdadero, y más tediosa será la búsqueda. Los mecanismos propuestos que no son solución darán límites superiores. El proceso a seguir para calcular este método es el siguiente:

1. Localizar los posibles puntos de rótulas plásticas.
2. Seleccionar los mecanismos posibles.
3. Calcular la carga de equilibrio en cada mecanismo mediante el Principio de Desplazamientos Virtuales.
4. El mecanismo solución es aquel que produzca la mínima carga y en el que los momentos en los nudos donde no se formen rótulas plásticas sean menor a M_p (seguro). Para comprobar que un mecanismo es la solución en el caso de que no se hayan estudiado todos los posibles mecanismos de colapso, se ha de comprobar que sea, también, compatible, es decir, que los giros que se han supuesto sean coherentes con los momentos.

2. Cálculo plástico

2.3.4.1. Análisis de pórticos por el método directo

En la práctica, los casos de vigas tienen fácil resolución, por lo cual se va a aplicar a un pórtico sencillo que será útil para definir ciertas referencias de interés general:

- a) Tipos de mecanismos: existen tres tipos de mecanismos generales,

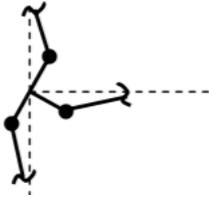


Figura 9. Mecanismo de nudo.

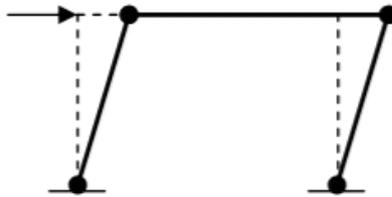


Figura 10. Mecanismo de panel.

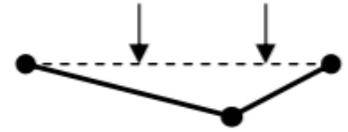


Figura 11. Mecanismo de viga.

como se puede observar en las Figura 9, Figura 10 y Figura 11.

Hay que tener en cuenta que cada caso particular puede estar compuesto por la combinación de diferentes tipos de mecanismos.

- b) Número de mecanismos linealmente independientes: se dice que un mecanismo es linealmente independiente en el caso de que no pueda ser construido a partir de la combinación lineal de otros mecanismos. Siendo NPR el número de rótulas plásticas posibles y GH el grado de hiperestaticidad del sistema, se obtiene EQ , el número de mecanismos linealmente independientes, según la ec. 7, se calcula como:

$$EQ = NPR - GH \quad \text{ec. 7}$$

- c) Geometría del movimiento: para calcular la forma de los desplazamientos en mecanismos complejos es necesario utilizar centros instantáneos de rotación para el estudio de la cadena cinemática.

Si sucede que ninguno de los mecanismos de colapso independientes escogidos haya resultado ser la solución al problema de cálculo plástico, se hace necesario llevar a cabo una combinación de los mismos para encontrar la verdadera solución.

2.4. Otras consideraciones

2.4.1. Colapso parcial

En caso de que exista un elemento muy débil que cause una fractura y no se llegue al mecanismo de colapso total, se puede producir una rotura en un sector de la estructura, resistiendo el resto de sectores a las cargas extremas.

Se puede ejemplificar gráficamente en el caso de la viga continua de la Figura 12, donde, aumentando la diferencia entre las cargas, pueden llegar a una relación en la que la estructura colapse parcialmente:

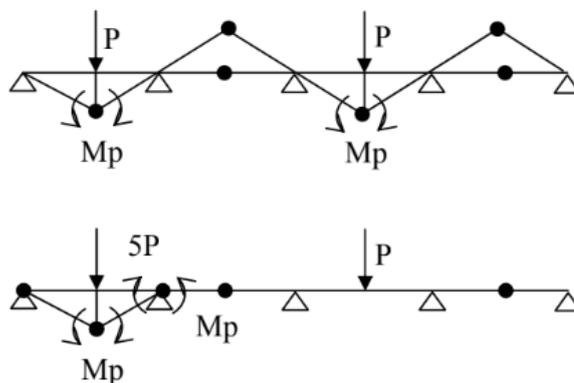


Figura 12. Colapso parcial de una viga continua con 5 apoyos.

2.4.1.1. Deformaciones

Como ya se ha señalado anteriormente, diseñando las secciones mediante métodos plásticos se produce un mejor aprovechamiento del material, resultando secciones menores que las calculadas mediante métodos elásticos, de manera que es necesario tener en cuenta la deformabilidad de las estructuras a medida que disminuyen las rigideces.

Antes del momento de colapso se puede conocer el diagrama de momentos (momento en el que la estructura es isostática), así, se puede calcular el estudio de deformaciones en el estado de rotura. Dichas deformaciones se pueden aproximar proporcionalmente al coeficiente de seguridad: relación entre la carga de servicio y la de rotura.

También se pueden calcular las deformaciones aplicando métodos elásticos estudiando las cargas de servicio.

2.4.2. Influencia del esfuerzo axial en el elemento plástico

El momento plástico que es capaz de resistir una sección se ve minorado con el esfuerzo axial. El problema se puede visualizar en la Figura 5,

2. Cálculo plástico

correspondiendo, de izquierda a derecha, a los campos elástico, elastoplástico y plástico, desarrollado en la hipótesis de sección plana en el punto 2.2.

En caso de que actúen simultáneamente distintos pares de cortante y flector, la plastificación de la sección variará en función de la relación entre las cargas, como se puede apreciar en la Figura 13, siendo α , como se ha apuntado anteriormente, el factor de forma.

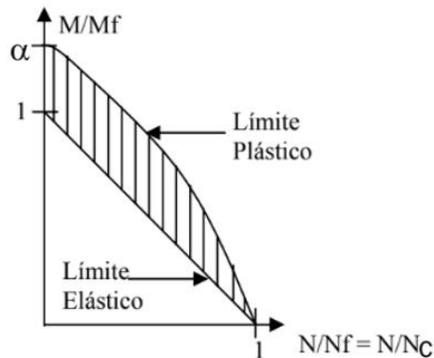


Figura 13. Curvas de interacción.

2.4.3. Pandeo e inestabilidad del elemento

Puede llegar a haber colapsos parciales o totales antes de que la estructura se convierta en mecanismo en caso de que se produzcan fenómenos de inestabilidad, conocidos como efectos de pandeo en diferentes formas:

- Pandeo de toda la estructura.
- Pandeo individual de algún o algunos elementos.
- Alabeo elástico local de una o unas chapas que forman el elemento.
- Alabeo plástico de un elemento.

Como apunte, cabe indicar que cada caso ha de ser resuelto de una manera particular.

2.4.4. Rotura frágil

Es premisa fundamental que esta situación se encuentre asegurada en el método plástico en tanto que este se basa en la capacidad de rotación, de manera que se pueda conseguir una correcta distribución plástica de las tensiones. Materiales frágiles como el vidrio o el hierro fundido producen fácilmente dichos efectos, igual que sucede con materiales o zonas de estos donde se puedan producir elevadas concentraciones de esfuerzos.

2.4.5. Cargas a fatiga

El método plástico estudia el colapso producido por el efecto de cargas crecientes, que van produciéndose rótulas hasta que el sistema se convierte en mecanismo. Las cargas a fatiga producen que la estructura colapse sin llegar a la carga límite, como se ha supuesto hasta ahora, debido al incremento de deformaciones que se producen en cada repetición de la carga.

Se pueden llegar a producir colapsos para cargas por debajo del valor de la carga plástica.

Capítulo 3

METODOLOGÍA. TEORÍA DE MECANISMOS

3. Metodología. Teoría de Mecanismos

Un mecanismo está formado por elementos, de los cuales todos tienen posibilidad de movimiento excepto uno, llamado elemento fijo o bancada. Estos elementos se desplazan unos relativamente de otros cuando se ven sometidos a fuerzas exteriores.

La **Teoría de Mecanismos** es de utilidad en este trabajo debido a que la cinemática estudia desplazamientos, velocidades y aceleraciones de una máquina, la cual se trata de un sistema con un número de grados de libertad positivos. El objeto de estudio de este trabajo son las estructuras, intrínsecamente definidas como sistemas hiperestáticos, es decir, con grados de libertad negativos y sin ningún tipo de libertad de movimientos. La pregunta, ahora, es por qué es de utilidad este método para el fin que se está buscando, teniendo en cuenta que se están analizando estructuras. La respuesta es que el análisis plástico intenta encontrar una forma de colapso del sistema estudiado, el cual, en dicho estado, se trata de un mecanismo con un número de grados de libertad positivo (como se puede apreciar en la Figura 14), de forma que se hace acertado el estudio mediante Teoría de Mecanismos.

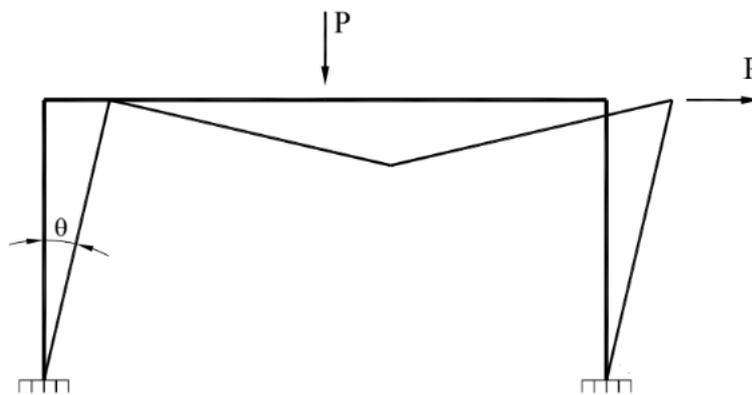


Figura 14. Posible estructura de colapso.

La cinemática se encarga, principalmente, de resolver problemas de manipuladores (robots), aplicables a otros campos, como es el caso de este TFG. Existen dos formas de resolver dichos problemas, mediante cinemática directa y cinemática inversa. La solución al primer problema consiste en encontrar el valor final del objeto de estudio (método que se utilizará en el caso práctico de este trabajo), que varía en función de los valores articulares. La cinemática inversa, por su lado, denota el cálculo de los valores articulares para poder posicionar un punto del espacio referido al sistema de coordenadas global [Figura 15].

3. Metodología. Teoría de Mecanismos

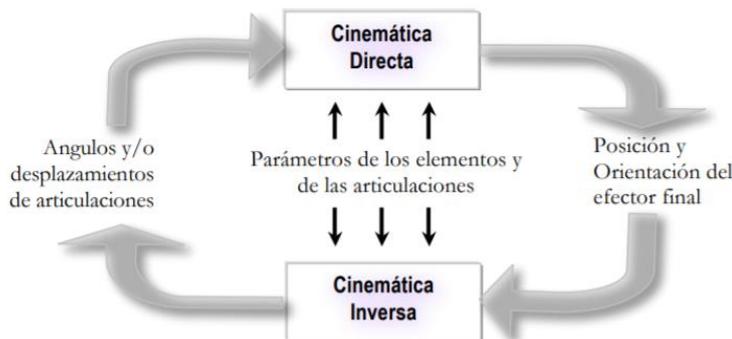


Figura 15. Problema cinemático.

Como se acaba de exponer, la cinemática resuelve desplazamientos, velocidades y aceleraciones, pero, para el análisis del cálculo plástico para estructuras, simplemente se van a tener en cuenta los desplazamientos. Hay que destacar que se va a trabajar con hipótesis de pequeños desplazamientos, lo que hace que tenga poco sentido estudiar las velocidades y aceleraciones mencionadas.

Para llevar a cabo el estudio de cálculo plástico, se realiza la hipótesis de trabajar con barras rígidas, sin tener en cuenta la flexibilidad que estas puedan tener. Las fuerzas que se aplican van incrementándose hasta formar, encadenadamente, rótulas plásticas, aumentando el número de barras y perdiendo grados de hiperestaticidad. Así, desde que la estructura está descargada hasta que se forma una rótula plástica no se estudia la flecha intermedia en ningún punto.

3.1. Cinemática directa

De forma generalizada, la cinemática directa es una técnica utilizada en gráficos 3D por ordenador para posicionar las partes de una estructura articulada a partir de sus elementos fijos y las transformaciones que se provocan a causa de las articulaciones de la estructura.

Como ya se ha comentado, esta técnica de resolución de problemas cinemáticos está ampliamente extendida en el mundo de la robótica, de forma que tomaremos como ejemplo un robot, formado por cuerpos rígidos (eslabones) enlazados por articulaciones, que se puede considerar una cadena cinemática. Tomando como sistema de referencia fijo la base del robot, la localización del resto de eslabones se puede describir referenciados a estos ejes. En caso de que un eslabón A dependa jerárquicamente de otro B, para calcular cualquier aspecto cinemático de esta parte rígida A, es condición necesaria llevar a cabo anteriormente un estudio de B, lo que hace obligatorio que, para calcular la posición de un eslabón del robot, es condición *sine qua non* calcular anteriormente las posiciones de aquellos eslabones de los que este dependa.



Figura 16. Robot SCORBOT.

Se puede concluir, por tanto, que el problema cinemático directo se reduce a calcular una matriz de transformación homogénea T (como se explicará más adelante) que relacione la posición y la orientación de un punto del mecanismo respecto del sistema de referencia fijo ubicado en la base.

3.2. Obtención del grado de hiperestaticidad

Lo primero que hay que hacer una vez conocida la estructura que se va a estudiar es calcular su grado de hiperestaticidad para saber el número de rótulas que se tiene que formar antes de convertirse en mecanismo.

Siendo M la movilidad, el número de grados de libertad (G) se calcula según la ec. 8 para el plano y según la ec. 9 en el espacio:

$$G = M - 3 \quad \text{ec. 8}$$

$$G = M - 6 \quad \text{ec. 9}$$

En el espacio se restan seis grados de libertad debido a que, para definir un objeto en las tres dimensiones se necesitan tres coordenadas de posición y tres de orientación. En cambio, en el plano sólo es necesario definir dos de posición y una de orientación, como se puede ver en la Figura 17:

3. Metodología. Teoría de Mecanismos

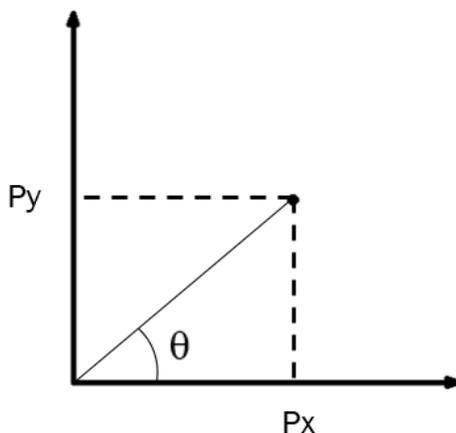


Figura 17. Definición de un punto en el espacio.

Por norma general, para calcular los grados de hiperestaticidad (GH) en una estructura plana, será suficiente con aplicar la ec. 10,

$$GH = r - (2 + l) \quad \text{ec. 10}$$

donde r es el número de reacciones que se producen en los apoyos y l el número de libertados que existan en la estructura, sin contar las de los apoyos. Para ejemplificarlo, se toma ejemplo la Figura 18, donde se calcula su grado de hiperestaticidad según la ec. 11:

$$GH = 2 * 3 - (2 + 3) = 1 \quad \text{ec. 11}$$

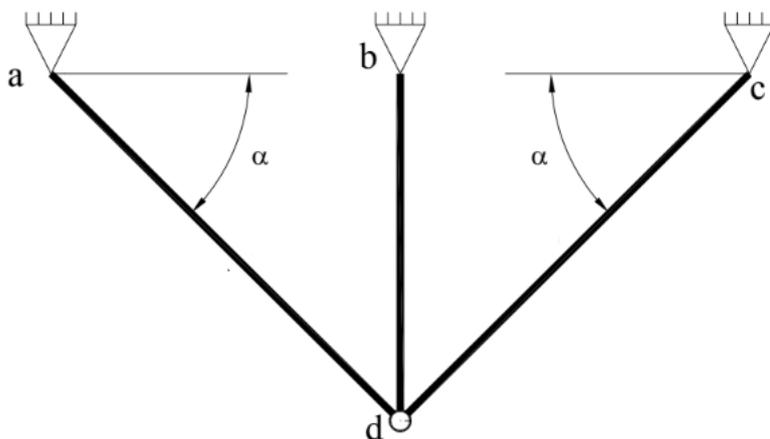


Figura 18. Estructura de tres barras.

Como se puede observar, la Figura 18 se trata de una estructura con tres apoyos fijos, sobre cada uno de los cuales se producen dos reacciones ($r = 6$) y una rotula, la cual le hace ganar 3 grados de libertad.

3.3. Rotaciones entre sistemas de referencia

Dados dos sistemas de referencia $\{a\}$ y $\{b\}$, orientados por los vectores unitarios i, j y k para cada base y un vector u cualquiera [Figura 19], las componentes de dicho vector sobre $\{a\}$ son las proyecciones sobre los vectores unitarios en referencia a $\{a\}$, denotados como [ec. 12]:

$$a_u = \begin{bmatrix} u_x^a \\ u_y^a \\ u_z^a \end{bmatrix} \quad \text{ec. 12}$$

Siendo el superíndice el sistema de referencia sobre el que se encuentra proyectado el vector u .

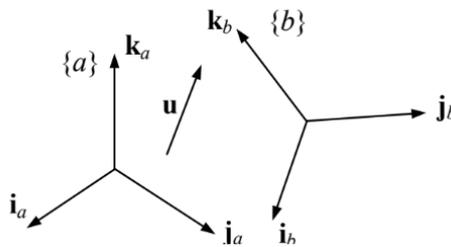


Figura 19. Representación del vector u en dos sistemas de referencia $\{a\}$ y $\{b\}$.

De igual forma que la proyección de un vector arbitrario u sobre un vector unitario w se obtiene mediante el producto escalar de u y w [ec. 13], las componentes de u sobre $\{a\}$ se obtienen mediante el producto escalar sobre las tres proyecciones [ec. 14].

$$u_w = \langle u, w \rangle \quad \text{ec. 13}$$

$$\begin{bmatrix} u_x^a \\ u_y^a \\ u_z^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^T i_a \\ u^T j_a \\ u^T k_a \end{bmatrix} \quad \text{ec. 14}$$

De manera análoga sirva para proyectar u sobre $\{b\}$. Aparte de poder proyectar el vector u desde el sistema de referencia inicial sobre $\{a\}$, también se puede proyectar desde $\{a\}$ hasta $\{b\}$, como queda reflejado en la ec. 15,

$$\begin{bmatrix} u_x^a \\ u_y^a \\ u_z^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^b u^T & {}^b i_a \\ {}^b u^T & {}^b j_a \\ {}^b u^T & {}^b k_a \end{bmatrix} \quad \text{ec. 15}$$

3. Metodología. Teoría de Mecanismos

pudiéndose expresar en forma matricial como aparece en la ec. 16,

$$u^a = \begin{bmatrix} b_i^T \\ b_j^T \\ b_k^T \end{bmatrix} u^b = {}^bR_a u^b \quad \text{ec. 16}$$

donde bR_a es la matriz de rotación o matriz de cambio de base entre los sistemas $\{b\}$ y $\{a\}$, igual que aR_b es la matriz de rotación entre $\{a\}$ y $\{b\}$. Estas matrices tienen tres propiedades:

1. Son ortogonales, es decir, su transpuesta coincide con su inversa, de manera que si se hace el producto entre bR_a y aR_b , da la matriz identidad.
2. La inversa de bR_a es aR_b , por lo tanto, al transponer o invertir una matriz de rotación a y b permutan.
3. Las columnas de la matriz de rotación aR_b son los vectores unitarios de $\{b\}$ expresados en $\{a\}$, de manera que aplicando las propiedades anteriores se puede deducir [ec. 17]:

$${}^aR_b = {}^bR_a^T = \begin{bmatrix} a_i^T \\ a_j^T \\ a_k^T \end{bmatrix}^T = [a_i \mid a_j \mid a_k] \quad \text{ec. 17}$$

3.4. Parametrización de las rotaciones

Para poder expresar la orientación de un sistema de referencia base en otro sistema de referencia objetivo, es posible utilizar la matriz de rotación entre ambos debido a que sus columnas contienen los vectores unitarios del sistema de referencia objetivo con respecto del sistema de referencia base. A pesar de aparentar ser una tarea sencilla, existen ciertos inconvenientes, de entre los que cabe destacar que se trata de una matriz de 9 elementos que no son independientes entre ellos, sino que debe cumplir las seis ecuaciones de ortonormalidad [ec. 18].

$$\begin{aligned}
 {}^a i_b^T {}^a i_b &= 1 \\
 {}^a j_b^T {}^a j_b &= 1 \\
 {}^a k_b^T {}^a k_b &= 1 \\
 {}^a i_b^T {}^a j_b &= 0 \\
 {}^a i_b^T {}^a k_b &= 0 \\
 {}^a j_b^T {}^a k_b &= 0
 \end{aligned}
 \tag{ec. 18}$$

Como los nueve elementos están sujetos a seis condiciones, solo existen tres independientes entre ellos, con lo que se deduce que, conociendo tres de ellos, los otros seis se pueden calcular aplicando estas ecuaciones. A continuación, se presentan diferentes formas de parametrizar las rotaciones.

3.4.1. Ángulos de Euler XYZ en ejes fijos

Se trata de tres rotaciones γ , β , α alrededor de los ejes X , Y , Z fijos, respectivamente. Cuando se habla de ejes fijos, se quiere decir que cada una de las rotaciones que se le aplican al sistema de referencia se hacen entorno al sistema de referencia inicial, a pesar de que el eje sobre el que se lleva a cabo una rotación pueda haberse movido previamente a este giro, como se ilustra en la Figura 20.

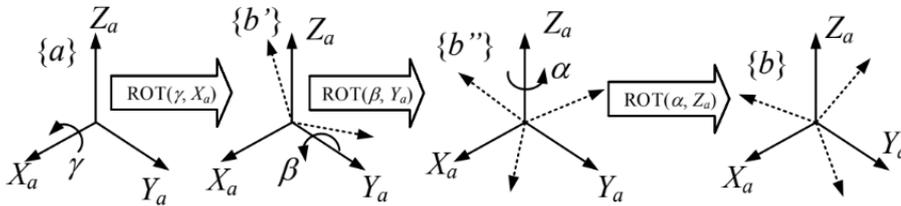


Figura 20. Ángulos de Euler X, Y, Z fijos.

Para calcular la matriz ${}^a R_b$, se aplican las rotaciones sucesivamente, primero la X_a , luego la Y_a y, por último, la Z_a . Hay que tener en cuenta que se hace en orden de postmultiplicación, es decir, la primera rotación debe ocupar la posición más a la derecha en la multiplicación y consecutivamente hacia adelante.

$${}^a R_b = R_{Z,\alpha} R_{Y,\beta} R_{X,\gamma}
 \tag{ec. 19}$$

Cada una de las matrices $R_{Z,\alpha}$, $R_{Y,\beta}$, $R_{X,\gamma}$ representan las matrices elementales de rotación alrededor de cada uno de los ejes.

3.4.2. Ángulos de Euler ZYX en ejes transformados o seguidores

Se trata de tres rotaciones α , β , γ alrededor de los ejes Z, Y, X transformados, respectivamente. A diferencia de los ejes fijos, donde las rotaciones se realizaban entorno al sistema de ejes de referencia inicial. El orden de rotación se realiza mediante una premultiplicación, es decir, primero se coloca la rotación entorno a Z, seguida de Y y, finalmente, de X.

$${}^aR_b = R_{Z,\alpha}R_{Y,\beta}R_{X,\gamma} \quad \text{ec. 20}$$

3.4.3. Conclusiones

Como se puede observar, la ec. 20 es idéntica a la ec. 19, a pesar de que las rotaciones no son conmutativas, dado que ambas rotaciones representan el mismo giro, como se puede apreciar gráficamente en la Figura 21, dotándole de una propiedad pseudoconmutativa.

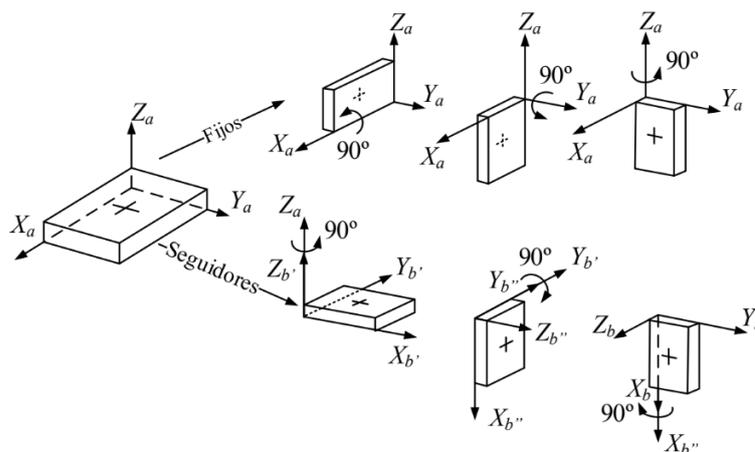


Figura 21. Rotaciones de un paralelepípedo en ejes fijos y ejes seguidores.

Para estructuras planas definidas en dos dimensiones espaciales, como sucede en este trabajo, todas las rotaciones de los ejes de referencia se realizan entorno al eje Z, lo que simplifica enormemente el problema. Todo lo que habrá que hacer para cambiar de un sistema de ejes a otro será rotar entorno al eje Z, como se ha visto en este apartado y trasladarlo mediante matrices homogéneas, desarrollado más adelante.

La matriz de rotación entorno al eje Z se puede generalizar como se indica en la ec. 21, donde θ es el ángulo que se gira en torno al eje Z.

$$R_z[\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 21}$$

3.5. Coordenadas homogéneas

La localización de sólidos en un espacio dimensional de n dimensiones se representa a través de coordenadas de un espacio $(n+1)$ -dimensional, de forma que el vector p [ec. 22], viene representado por una dimensión más en coordenadas homogéneas.

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{coordenadas homogéneas}} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} w \cdot p_x \\ w \cdot p_y \\ w \cdot p_z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{ec. 22}$$

3.6. Matrices homogéneas

Hasta ahora, se ha estudiado cómo rotar un sistema de referencia, mediante matrices de rotación. Las matrices de rotación no permiten ninguna posibilidad de traslación, problema que se puede resolver con las matrices homogéneas (T) [ec. 23].

$$T = \begin{bmatrix} R_{3x3} & p_{3x1} \\ f_{1x3} & w_{1x1} \end{bmatrix} \quad \text{ec. 23}$$

Siendo T la matriz homogénea, R representa la matriz de rotación; f se refiere a la transformación de perspectiva, que corresponde a un vector con todos sus elementos nulos; p al vector posición, que recorre desde el origen del sistema de referencia base hasta el origen del sistema de referencia objetivo y w al factor de escala que, en lo que a este trabajo se refiere, tendrá un valor unidad a todos los efectos. Las principales ventajas de las matrices homogéneas son:

- Simplicidad conceptual.
- Eficiencia computacional.
- Ahorro de memoria.

3. Metodología. Teoría de Mecanismos

Misma función que las matrices homogéneas cumplen también los cuaternios duales y el álgebra de tornillos, pero queda fuera del interés de este trabajo, siendo suficiente dejar constancia de su existencia.

Así, la matriz homogénea que interesa se representará como se indica en la ec. 24, teniendo en cuenta que f es un vector nulo y w , a efectos de este trabajo, siempre vale 1.

$$T = \begin{bmatrix} \bar{R} & \bar{p} \\ \bar{0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 24}$$

En cuanto a las ventajas que poseen estas matrices:

- Representa traslación y rotación en una sola matriz.
- Es una representación obvia de un sistema de referencia transformado.
- Es trivial componer transformaciones arbitrarias, tanto para ejes fijos como transformados.

Como inconvenientes de las matrices homogéneas:

- La transformación en 3D (6 grados de libertad) se representa con 16 parámetros, siendo altamente redundante, aunque solo 12 de los 16 parámetros son variables.
- La interpretación de la matriz de rotación no resulta obvia, precisando de autovalores y autovectores.

3.6.1. Aplicación

La operación básica de las matrices de rotación es trivial calculando productos por bloques.

- Traslación pura [ec. 25]:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I} & \bar{p} \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

ec. 25

$$\begin{bmatrix} \bar{I}\bar{r} + \bar{p} \cdot 1 \\ \bar{0}^T \bar{r} + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r} + \bar{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + p_x \\ y + p_y \\ z + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rotación pura [ec. 26]:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

ec. 26

$$\begin{bmatrix} \bar{R}\bar{r} + \bar{0} \cdot 1 \\ \bar{0}^T \bar{r} + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}\bar{r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}x + R_{12}y + R_{13}z \\ R_{21}x + R_{22}y + R_{23}z \\ R_{31}x + R_{32}y + R_{33}z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Transformación 3D general [ec. 27]:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & p_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & p_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R} & \bar{p} \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

ec. 27

$$\begin{bmatrix} \bar{R}\bar{r} + \bar{p} \cdot 1 \\ \bar{0}^T \bar{r} + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}\bar{r} + \bar{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}x + R_{12}y + R_{13}z + p_x \\ R_{21}x + R_{22}y + R_{23}z + p_y \\ R_{31}x + R_{32}y + R_{33}z + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

El determinante de una matriz homogénea, en cualquier caso, posee valor unidad, por lo que se puede inferir que siempre tiene inversa, que es otra matriz homogénea.

Siguen reglas de composición idénticas a las matrices de rotación, premultiplicando para ejes fijos y postmultiplicando para ejes transformados. Puesto que el producto matricial no es conmutativo, no es lo mismo rotar y trasladar que viceversa.

Es habitual querer representar rotaciones y traslaciones entre los diferentes eslabones que forman el mecanismo. La matriz homogénea A_i^{i-1} representa la transformación relativa entre dos elementos consecutivos. La matriz A_k^0 es la resultante del producto de A_1^0 hasta A_k^{k-1} y representa la cadena cinemática del sistema. Así, si un robot tiene seis grados de libertad, la posición y orientación del eslabón final en referencia a la base se obtiene del siguiente modo [ec. 28]:

$$T = A_6^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 A_6^5 \quad \text{ec. 28}$$

3.7. Modelo de Denavit-Hartenberg

Para resolver el problema de cinemática directa se suele utilizar el método de Denavit-Hartenberg partiendo de una situación inicial del sistema. Dicho modelo se trata de un convenio para representar las conexiones entre los eslabones del sistema, sistematizado mediante las siguientes tareas:

- Configuración del sistema de referencia solidario a cada eslabón.
- Cálculo de la matriz de transformación homogénea para cada articulación y, por lo tanto, para la matriz T .

Dicho modelo permite estandarizar la representación de cualquier mecanismo con sus articulaciones en serie, a pesar de que el modelo no sea único. Se trata de construir una tabla con tantas filas como grados de libertad internos tenga el sistema y 4 columnas, donde se representan giros y distancias a pares, donde solo el primer giro o la primera traslación pueden ser variables, permaneciendo los tres valores restantes constantes. De estas tablas se puede deducir completamente la topología y movilidad del robot, en su caso.

Los valores que pueden ser variables son los correspondientes al giro (θ) o traslación (d) en el eje Z , colocado en dirección del par que exista entre dos eslabones. El otro giro y traslación corresponden al eje X , como se indica en la ec. 29:

$$A_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 29}$$

Pasar desde el sistema (i-1)-ésimo al i-ésimo en el modelo de tres dimensiones se hará modelando, siempre, la composición de cuatro movimientos rígidos sobre ejes transformados, que se describen con cada una de las cuatro columnas de la tabla del modelo. Para asegurar el modelo hay que imponer dos condiciones:

1. Los ejes z_{i-1} y x_i deben ser coplanarios, cortándose en un punto P_i .
2. Los ejes z_{i-1} y x_i deben ser perpendiculares.

Cumplir estas dos condiciones requiere seguir un método de cuatro etapas:

1. Las variables articulares son θ_i y d_i , de forma que el eje Z_i será el eje del par cinemático (i+1)-ésimo. Según sea el par:

CÁLCULO PLÁSTICO. MÉTODO DIRECTO SISTEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE MECANISMOS

- Si es un par de revolución, θ_i es el ángulo que ha girado el eslabón con respecto del anterior y d_i es constante.
- Si es un par prismático, d_i es el desplazamiento del eslabón y θ_i es constante.

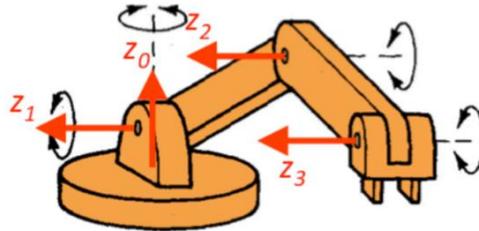


Figura 22. Modelo Denavit-Hartenberg (I).

2. El resto de elementos de la referencia solidaria a la base se pueden fijar arbitrariamente siempre y cuando O_0 esté sobre z_0 (estando este fijado por la primera articulación) y x_0 e y_0 formen un triedro directo con z_0 .

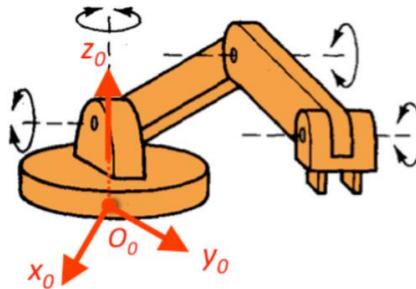


Figura 23. Modelo Denavit-Hartenberg (II).

3. Los ejes x_i y z_i deben ser perpendiculares, en tanto que forman parte de una base ortonormal. Además, x_i ha de ser, también, perpendicular a z_{i-1} .
 - Si z_i y z_{i-1} no son coplanarios, es decir, si se cruzan solo existe una recta perpendicular a ambos, que da la dirección de x_i . El origen O_i corresponde a la intersección entre x_i y z_i . El eje y_i completa el triedro directo [Figura 24].

3. Metodología. Teoría de Mecanismos

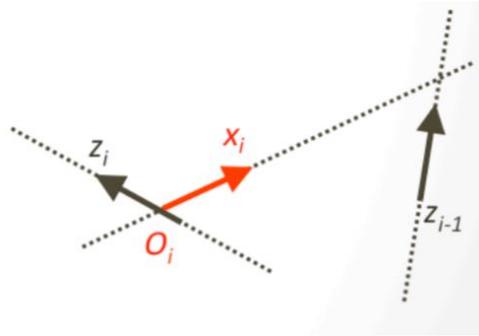


Figura 24. Ejes no coplanarios.

- Si z_i y z_{i-1} se cortan, x_i es la perpendicular común y O_i la intersección entre ambos [Figura 25].

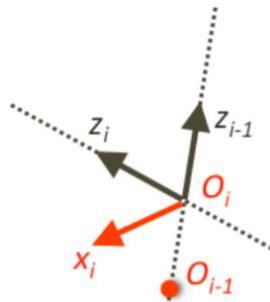


Figura 25. Ejes coplanarios.

- Si z_i y z_{i-1} son paralelos y, por lo tanto, coplanarios, hay infinitas soluciones para x_i y O_i será un punto arbitrario a lo largo de z_i .

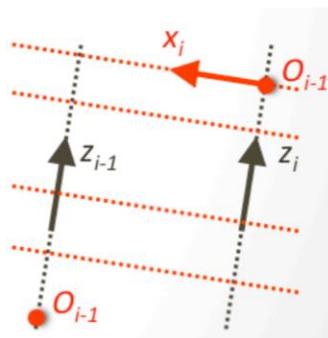


Figura 26. Ejes paralelos.

4. Como en el último sistema de referencia no tiene articulación (i+1)-ésima, se modela de forma diferente los anteriores, siendo el eje z_i el de la dirección de aproximación.

Como ya se ha comentado, el diseño no es único debido a que:

- O_0 , x_0 e y_0 se escogen de forma arbitraria.

- O_n, x_n, y_0 y z_n se escogen con cierta libertad.
- Cuando z_i y z_{i-1} son paralelos, x_i y O_i se pueden elegir libremente.
- Los signos de z_i y x_i se pueden escoger de forma arbitraria en cualquier caso.

En caso de que una articulación tenga más de un grado de libertad, se tomará como dos articulaciones independientes con un grado de libertad cada una.

3.8. Conclusiones

La aplicación de la Teoría de Mecanismos para sistemas de dos dimensiones, como son con los que se va a trabajar en este informe, conlleva una gran cantidad de simplificaciones que facilitan enormemente el trabajo.

En cuanto a la matriz homogénea, la componente Z del vector de posición se anula en todos los casos, quedando variables solo las componentes X e Y. Debido a esto, la constitución de la matriz homogénea es mucho más simple, siendo las dos últimas matrices de la ec. 28 matrices identidad. De la matriz de rotación entorno al eje Z cabe destacar que, como todos los pares son prismáticos para lo que nos concierne, siempre tiene la misma forma, véase la ec. 30:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 30}$$

En todos los casos, para el cálculo plástico de estructuras, las rótulas son de revolución, en ningún caso prismáticas, con lo que se puede concluir que solo el ángulo θ es variable, siendo todas las traslaciones constantes y de igual magnitud al tamaño de cada barra.

Con todo lo expuesto hasta ahora, podemos concluir que, para el fin de este trabajo la matriz homogénea siempre queda de la forma como se expone en la ec. 31:

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & O_{x,i} - O_{x,i-1} \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & O_{y,i} - O_{y,i-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 31}$$

Capítulo 4
RESULTADOS

4. Resultados

Utilizando el método directo para estructuras mediante la Teoría de Mecanismos se pretende resolver el problema de cálculo plástico computacionalmente de forma sistematizada.

Dicha sistematización es válida para todo tipo de pórticos bidimensionales solicitados por un número indefinido de fuerzas puntuales sobre cualquier punto de su estructura. No es válido, sin embargo, para la aplicación de cargas distribuidas, ya que su estudio conllevaría un análisis de optimización que se encuentra fuera del alcance y el estudio de este Trabajo de Fin de Grado. Van a ser objeto de estudio cinco ejemplos de estructuras dividido en tres secciones: una viga biempotrada como ejemplo de validación, un pórtico con tres configuraciones diferentes como comprobación de la sistematización y un pórtico con dintel inclinado como ejemplo de aplicación.

En el Anexo 3. Código, se explica el significado y desarrollo de cada parte del código, necesario para comprender ciertas partes de los ejemplos que se exponen a continuación.

4.1. Ejemplo de validación. Viga horizontal biempotrada

Con objeto de comprobar la validez del uso de la Teoría de Mecanismos para resolver problemas de cálculo plástico, en este apartado se resuelve una viga biempotrada con una carga intermedia de dos formas diferentes: primero, la solución se obtiene de la forma convencional de aplicar el método directo y, posteriormente, se ejemplifica cómo se hace utilizando Teoría de Mecanismos.

Se trata de una estructura [Figura 27] con tres posibles rótulas plásticas (los dos empotramientos y la sección sobre la que se aplica la carga) y dos grados de hiperestaticidad, de forma que solo existe una ecuación de equilibrio y una sola forma de colapso.

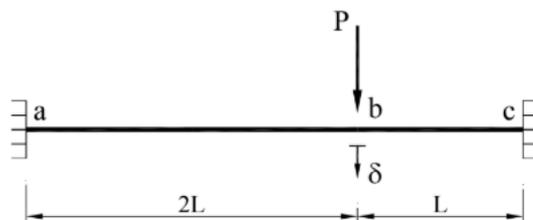


Figura 27. Viga biempotrada con carga intermedia.

4. Resultados

Con el fin de obtener una comprobación numérica final, se le van a dar valor a los datos del problema:

- $L = 4 \text{ m.}$
- $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Kg/m}^2.$
- $I_z = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ Kg m}^2.$
- $M_p = 172700 \text{ N m.}$

4.1.1. Resolución del método directo de forma convencional

Calculadas las ecuaciones de equilibrio se procede a calcular las posibles estructuras de colapso que, como se ha mencionado, en este caso solo existe una, y es la que se muestra en a Figura 28.

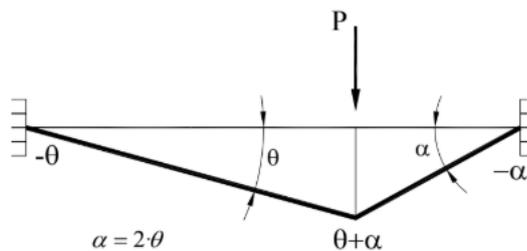


Figura 28. Forma de colapso.

Una vez representada la forma de colapso se tratan de relacionar los ángulos que se han girado cada uno de los nodos en los que se produce una rótula plástica [ec. 32], pudiendo ser simplificados aplicando la hipótesis de pequeños desplazamientos.

$$\alpha = \tan^{-1}(2 \tan \theta) \approx 2\theta \quad \text{ec. 32}$$

A continuación, se ensaya el mecanismo de colapso igualando el momento producido por la fuerza que se aplica sobre la barra a los momentos que producirían cada posible rótula plástica, multiplicados por el ángulo girado en cada una de ellas [ec. 33].

$$P \cdot 2L \cdot \theta = M_a(-\theta) + M_b \cdot 3\theta + M_c \cdot (-2\theta); \quad \text{ec. 33}$$
$$2PL = -M_a + 3M_b - 2M_c$$

CÁLCULO PLÁSTICO. MÉTODO DIRECTO SISTEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE MECANISMOS

Para calcular la carga de colapso (P_c), se despeja P de la ec. 33, sustituyendo los momentos en cada rótula por el momento plástico de la sección con el signo correspondiente, de forma que obtenemos la ec. 34:

$$2PL = M_p + 3M_p + 2M_p; \quad \text{ec. 34}$$

$$P_c = \frac{3M_p}{L}$$

Mediante el principio de fuerzas virtuales (PFV) es posible calcular los desplazamientos en cada nodo. Para ello, se sustituye la fuerza P por otra de valor unidad [Figura 29] y se resuelve el equilibrio, obteniendo la ec. 35.

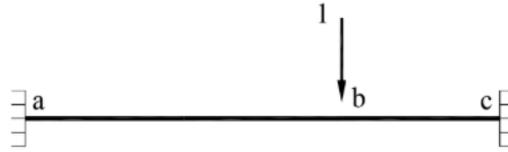


Figura 29. Problema de fuerzas virtuales.

Ecuación de equilibrio:

$$2 \cdot 1 \cdot L = -m_a + 3m_b - 2m_c \quad \text{ec. 35}$$

Hallando una relación sencilla entre los momentos virtuales [ec. 36],

$$m_a = -2 \cdot L$$

$$m_b = 0 \quad \text{ec. 36}$$

$$m_c = 0$$

se puede resolver el desplazamiento del nodo sobre el que se aplica la fuerza [ec. 37].

$$\delta = \int_0^{2L} m \frac{M}{EI} dx + \int_{2L}^{3L} m \frac{M}{EI} dx + \sum_i^{NPR} m_i \theta_i;$$

$$\delta = \frac{2L}{6EI} (-2L(-2M_p + M_p) + 0) + \frac{L}{6EI} (0 + 0) + (-2L) \cdot \theta_a; \quad \text{ec. 37}$$

$$\delta = \frac{2 \cdot M_p \cdot L^2}{3EI} - 2L \cdot \theta_a$$

Con los desplazamientos ya resueltos, se aplica la ecuación de compatibilidad [ec. 38] a la estructura de colapso para, después, poder hallar los giros en cada nodo.

4. Resultados

$$\delta = \sum \left\{ \frac{L}{6EI} [m_A(2M_A + M_B) + m_B(2M_B + M_A)] \right\} + \sum m_i Q_i \quad \text{ec. 38}$$

Se resuelven tantas ecuaciones de compatibilidad como grados de hiperestaticidad tenga la estructura (en este caso, son dos), para lo cual hay que darle valores a los momentos virtuales anulando, antes, la fuerza virtual, despejando de la ec. 39.

$$0 = -m_a + 3m_b - 2m_c \quad \text{ec. 39}$$

Se les da valores arbitrarios pero compatibles a m_a , m_b y m_c :

- Ecuación de compatibilidad 1: ($m_a = 3$; $m_b = 1$; $m_c = 0$)

$$0 = \frac{-M_p \cdot L}{2EI} + 3\theta_a + \theta_b \quad \text{ec. 40}$$

- Ecuación de compatibilidad 2: ($m_a = 0$; $m_b = 2$; $m_c = 3$)

$$0 = \frac{M_p \cdot L}{2EI} + 2\theta_b + 3\theta_c \quad \text{ec. 41}$$

Por último, se comprueba cuál es la última rótula plástica que se origina, siendo aquella que produzca un sistema de momentos compatible. Vamos comprobando rótula a rótula:

- Última rótula plástica en c:

$$\begin{aligned} \theta_c &= 0 \\ \theta_a &= \frac{M_p \cdot L}{4EI} \\ \theta_b &= \frac{-M_p \cdot L}{4EI} \end{aligned} \quad \text{ec. 42}$$

No es compatible porque el momento plástico en b es positivo y el giro negativo.

- Última rótula plástica en b :

$$\begin{aligned}\theta_b &= 0 \\ \theta_c &= \frac{-M_p \cdot L}{6EI} \\ \theta_a &= \frac{M_p \cdot L}{6EI}\end{aligned}\quad \text{ec. 43}$$

Tampoco es compatible porque el momento plástico en a es negativo y el giro es positivo.

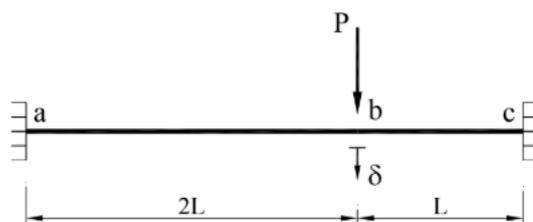
- Última rótula plástica en a :

$$\begin{aligned}\theta_a &= 0 \\ \theta_b &= \frac{M_p \cdot L}{2EI} = 0.01959444 \text{ rad} \\ \theta_a &= \frac{-M_p \cdot L}{2EI} = -0.01959444 \text{ rad}\end{aligned}\quad \text{ec. 44}$$

Se comprueba que la última rótula plástica se produce en b porque coinciden todos los giros con los momentos en sus nodos, siendo así compatible.

4.1.2. Resolución del método directo mediante la Teoría de Mecanismos

Una vez resuelto el problema aplicando el método directo de forma convencional, se va a explicar el proceso de resolución del mismo ejemplo que el apartado anterior empleando Teoría de Mecanismos. A modo de aclaración y para una comprensión esquemática del método empleado, se recomienda revisar el Anexo 2. Diagrama de flujo del programa, donde se muestra, de manera gráfica y simplificada, el procedimiento empleado a lo largo de este apartado..



4. Resultados

```
nodos = {{{0, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}, {{2L, 0, 0}, {0, -F, 0}},  
         {{{3L, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}};  
material = {{vE}};  
perfil = {{A, Iz, Mp}};  
barras = {{{1, 2}, {1, 1}}, {{2, 3}, {1, 1}}, {{3, 1}, {0, 0}}};  
datos = {L → 4, vE → 2.1 × 1011, Iz → 8360 × 10-8, S → 628 × 10-6,  
         σF → 275 × 106, Mp → S σF};
```

Figura 30. Viga horizontal biempotrada.

Para empezar, es necesario sacar la matriz homogénea de cambio de base del sistema (matriz T), como se ha explicado en el apartado 3.6.

Una vez calculada la matriz homogénea, se procede a obtener todos los posibles mecanismos de colapso, aunque, en este caso, solo es uno, restringiendo las rótulas que fuera necesario [ec. 45].

$$q_a = \Delta v \quad \text{ec. 45}$$

Seguidamente, se calculan los giros que se producen en las rótulas plásticas para cada posible forma de colapso, aplicando la hipótesis de pequeños desplazamientos ($\Delta v = 0.0001$). Para obtener estos giros hay que resolver un sistema de ecuaciones igualando la posición del último nodo de la estructura a ciertos elementos de la matriz T , obteniendo la ec. 46:

$$\begin{aligned} q_a &= 0.0001 \\ q_b &= -0.0003 \\ q_c &= 0.0002 \end{aligned} \quad \text{ec. 46}$$

Para calcular los desplazamientos relativos de cada nodo se postmultiplica la última columna de la matriz homogénea de ese nodo con las de todos los anteriores, restando el desplazamiento del nodo anterior.

$$\bar{\delta}_i = \prod_1^i T_i(\text{última columna}) - \bar{\delta}_{i-1} \quad \text{ec. 47}$$

Se ensaya el mecanismo de colapso para, después, resolver el problema virtual de idéntica manera que en el apartado anterior.

Después, se calculan las posibles soluciones resolviendo un sistema de ecuaciones con las ecuaciones de compatibilidad, las obtenidas del ensayo de mecanismos de colapso y los giros de las rótulas plásticas, todas ellas igualadas a cero.

Para acabar, hay que comprobar cuál de los resultados anteriores es seguro y compatible, obteniendo la solución. Como se puede comprobar en la

Figura 31 (calculado con Mathematica), el resultado es prácticamente idéntico al calculado en el apartado anterior.

$$\begin{aligned}\theta[1] &\rightarrow 0 \\ \theta[2] &\rightarrow 0.0196742 \\ \theta[3] &\rightarrow -0.0196742\end{aligned}$$

Figura 31. Giro de las rótulas.

Los resultados por ambos métodos son muy similares, la diferencia se debe a que, con este último, se está aplicando una hipótesis de pequeños desplazamientos que hace variar decimales ya lejanos de los significativos, por lo que se puede concluir que es un método válido.

4.2. Ejemplos

La sistematización computacional del cálculo plástico se ha llevado a cabo mediante el programa Wolfram Mathematica [Anexo 1. Wolfram Mathematica]. Los sistemas a resolver se tratan de tres ejemplos, todos ellos pórticos con dintel horizontal, pero con diferentes configuraciones.

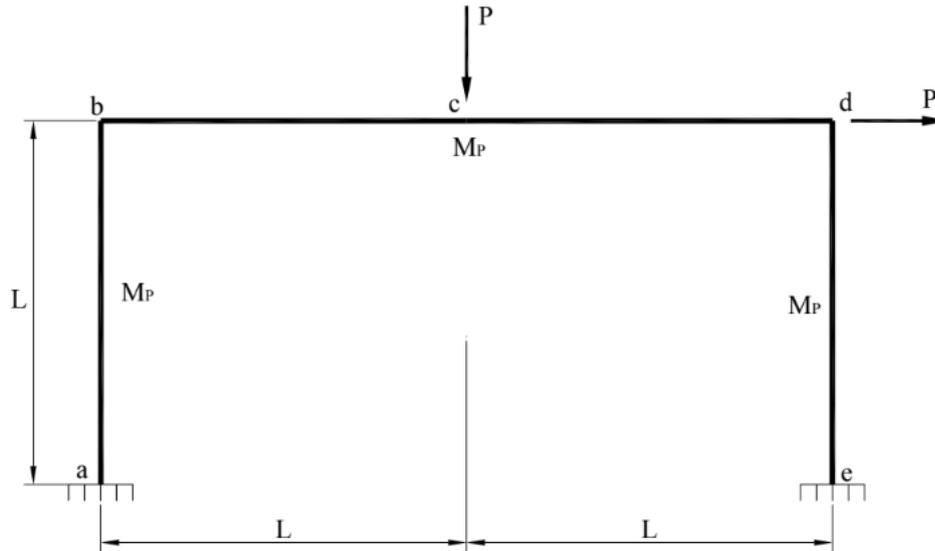
Todas las barras tienen la misma sección, momentos de inercia y momento plástico, midiendo el dintel el doble de lo que mide cada uno de los pilares. La estructura está dividida en cuatro secciones: los dos pilares y las dos mitades del dintel, dividido, en su caso, por la carga puntual intermedia que actúa sobre el dintel. Existe una quinta sección “ficticia”, que se trata de la bancada, la cual une entre ambos apoyos.

A cada ejemplo se le ha asignado unos valores numéricos a sus variables (propiedades geométricas y físicas del problema), iguales en todos ellos.

4.2.1. Pórtico biempotrado (I)

Se trata de un pórtico biempotrado con una carga vertical y hacia abajo intermedia en el dintel y otra horizontal del mismo valor en la parte superior del pilar derecho, dirigida hacia la derecha [Figura 32]. El dintel tiene el doble de longitud que cada uno de los pilares, común en todos los ejemplos.

4. Resultados



```

nodos = {{{0, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}, {{0, L, 0}, {0, 0, 0}},
          {{L, L, 0}, {0, -F, 0}}, {{2L, L, 0}, {F, 0, 0}},
          {{2L, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}};
material = {{vE}};
perfil = {{A, Iz, Mp}};
barras = {{{1, 2}, {1, 1}}, {{2, 3}, {1, 1}}, {{3, 4}, {1, 1}},
            {{4, 5}, {1, 1}}, {{5, 1}, {0, 0}}};
datos = {L → 4, vE → 2.1 × 1011, Iz → 8360 × 10-8, S → 628 × 10-6,
            σF → 275 × 106, Mp → S σF};
  
```

Figura 32. Ejemplo 1.

Las posibles rótulas plásticas que se producen en los apoyos con el momento restringido, en los nudos y en los puntos de aplicación de una carga puntual, por lo tanto, este ejemplo tiene una posible rótula plástica en cada nodo, sumando un total de cinco. La estructura tiene un grado de hiperestaticidad tres y, en base a estos resultados, se puede concluir que hay que resolver dos ecuaciones de equilibrio.

El mecanismo de colapso de esta estructura se forma por las rótulas plásticas en los nodos a, c, d y e, siendo el a el último que se forma, todos ellos con un momento plástico de 172.700 Nm en valor absoluto. El nudo b tiene un momento de 0.171778 Nm en el instante de colapso. Como se indica en la Figura 33, el valor de la fuerza es de 129.403 N en ese mismo instante.

$$\begin{pmatrix}
 F \rightarrow 129\,403. \\
 M[1] \rightarrow -172\,700 \\
 M[2] \rightarrow 0.171778 \\
 M[3] \rightarrow 172\,700. \\
 M[4] \rightarrow -172\,700 \\
 M[5] \rightarrow 172\,700. \\
 \theta [1] \rightarrow 0 \\
 \theta [2] \rightarrow 0 \\
 \theta [3] \rightarrow 0.00650244 \\
 \theta [4] \rightarrow -0.0130234 \\
 \theta [5] \rightarrow 0.00652098
 \end{pmatrix}$$

Figura 33. Solución del ejemplo 1.

Para la configuración descrita, el desplazamiento de los nodos es el que se muestra en la Figura 34, medido en mm, donde cada vector es un nodo (de forma ordenada de a hasta e) y cada componente de los vectores son los ejes X, Y y Z de arriba abajo en un sistema de referencia absoluto (condiciones comunes para los resultados de los tres ejemplos).

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} -4. \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} -4. \times 10^{-6} \\ 4. \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} -3.99999 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Figura 34. Desplazamiento de los nodos en el instante de colapso (ejemplo 1).

Como se puede observar, los desplazamientos en los nodos son siempre cero y el resto varía en función de la forma de colapso, véase Figura 35.

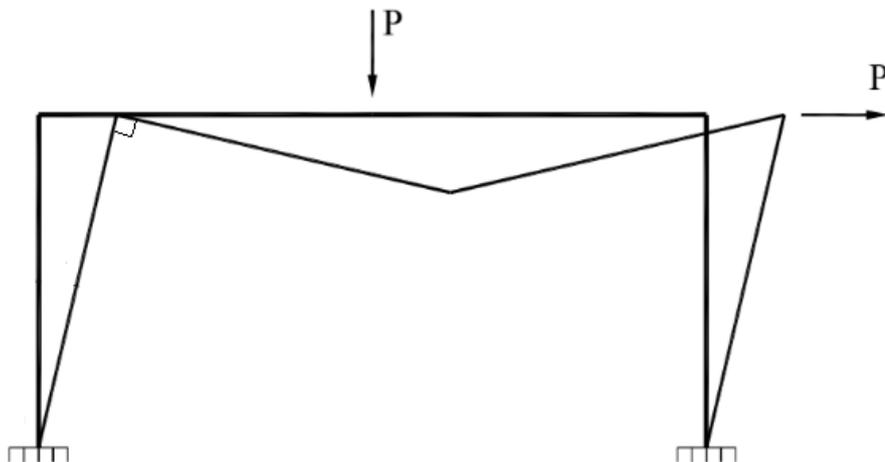
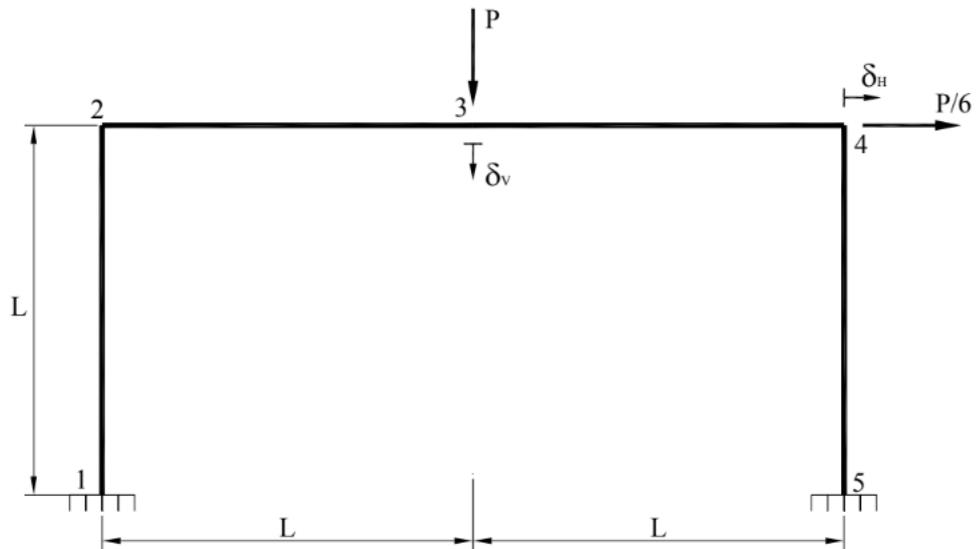


Figura 35. Forma de colapso del ejemplo 1.

4.2.2. Pórtico biempotrado (II)

Se estudia el pórtico biempotrado de la Figura 36, con una carga vertical intermedia hacia abajo en el dintel y otra horizontal una sexta parte menor, dirigida hacia la derecha, en la parte superior del pilar derecho.

4. Resultados



```

nodos = {{{0, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}, {{0, L, 0}, {0, 0, 0}},
           {{L, L, 0}, {0, -F, 0}}, {{2 L, L, 0}, {F/6, 0, 0}},
           {{2 L, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}};
material = {{vE}};
perfil = {{A, Iz, Mp}};
barras = {{{1, 2}, {1, 1}}, {{2, 3}, {1, 1}}, {{3, 4}, {1, 1}},
           {{4, 5}, {1, 1}}, {{5, 1}, {0, 0}}};
datos = {L → 4, vE → 2.1 × 1011, Iz → 8360 × 10-8, S → 628 × 10-6,
           σF → 275 × 106, Mp → S σF};
  
```

Figura 36. Ejemplo 2.

El ejemplo dos se distingue del uno en que la fuerza horizontal tiene un sexto del valor que la vertical, de manera que, su configuración en los apoyos y la estructura es igual, así que tiene el mismo número de nodos a ser candidatos a rótulas plásticas. Igualmente ocurre para los grados de hiperestaticidad y las ecuaciones de equilibrio, que son tres y dos, respectivamente, igual que en el caso anterior.

Las diferencias acaban ahí, debido a que la forma de colapso cambia completamente, formándose rótulas plásticas en los nodos *b*, *c* y *d* para un valor de la fuerza *P* de 172.446 N. La última rótula en formarse es la del nodo *b* y, en el instante de colapso, el valor del momento en *a* es de 28.103,8 Nm y 144.086 en el *e*, como se indica en la Figura 37.

$$\begin{pmatrix} F \rightarrow 172\,446. \\ M[1] \rightarrow 28\,103.8 \\ M[2] \rightarrow -172\,700 \\ M[3] \rightarrow 172\,700. \\ M[4] \rightarrow -172\,700 \\ M[5] \rightarrow 144\,086. \\ \theta[1] \rightarrow 0 \\ \theta[2] \rightarrow 0 \\ \theta[3] \rightarrow 0.032887 \\ \theta[4] \rightarrow -0.0131547 \\ \theta[5] \rightarrow 0 \end{pmatrix}$$

Figura 37. Solución del ejemplo 2.

Los desplazamientos de los nodos se indican en la Figura 38.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4. \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Figura 38. Desplazamiento de los nodos en el instante de colapso (ejemplo 2).

Solo existe movimiento en el nodo c en la dirección vertical, lo cual se debe a que, como no se producen rótulas plásticas en los apoyos, no existe movimiento en los extremos de los pilares y, como existe simetría en el colapso, se anula el desplazamiento horizontal en el nodo central del dintel [Figura 39].

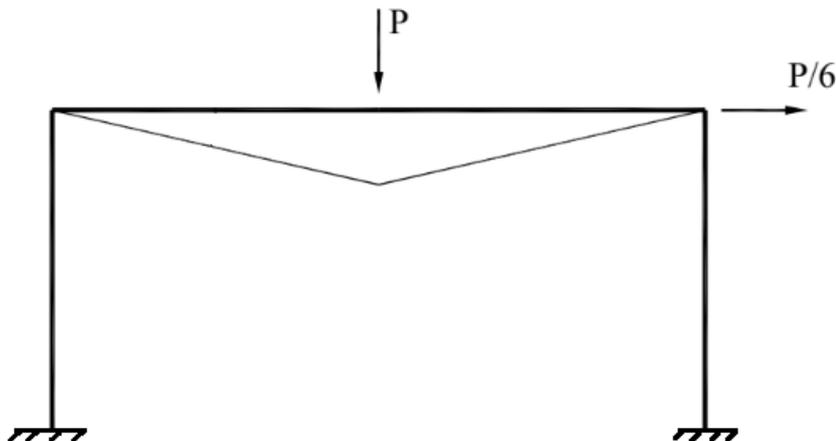
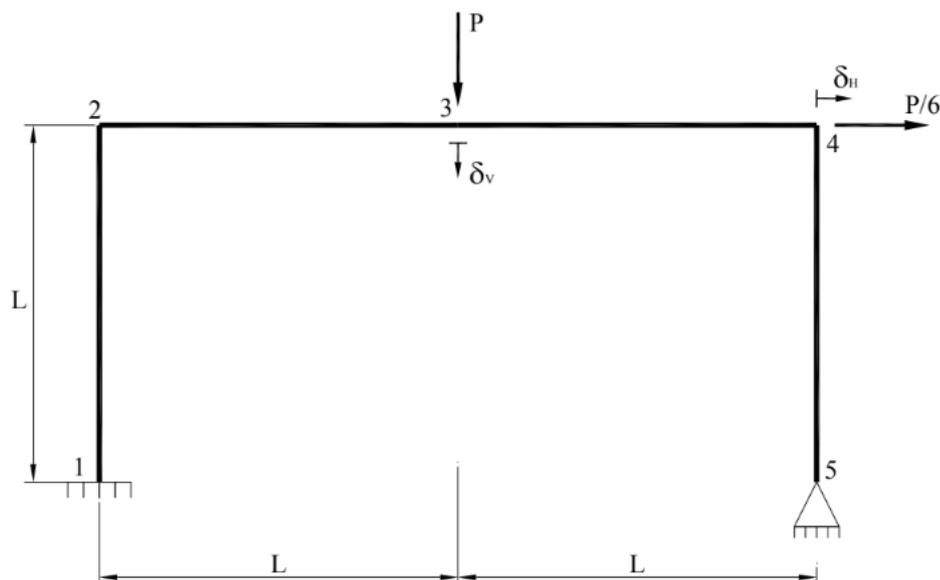


Figura 39. Forma de colapso del ejemplo 2.

4.2.3. Pórtico empotrado-apoyado

Por último, se resolverá el pórtico empotrado en el pilar izquierdo y apoyado en el derecho con una carga vertical intermedia en el dintel y otra horizontal una sexta parte menor en la parte superior del pilar derecho de la Figura 40.

4. Resultados



```

nodos = {{{0, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}, {{0, L, 0}, {0, 0, 0}},
           {{L, L, 0}, {0, -F, 0}}, {{2 L, L, 0}, {F / 6, 0, 0}},
           {{2 L, 0, 0}, {Fx, Fy, 0}}};
material = {{vE}};
perfil = {{A, Iz, Mp}};
barras = {{{1, 2}, {1, 1}}, {{2, 3}, {1, 1}}, {{3, 4}, {1, 1}},
           {{4, 5}, {1, 1}}, {{5, 1}, {0, 0}}};
datos = {L → 4, vE → 2.1 × 1011, Iz → 8360 × 10-8, S → 628 × 10-6,
           σF → 275 × 106, Mp → S σF};
  
```

Figura 40. Ejemplo 3.

En este ejemplo, el número de posibles rótulas plásticas es de cuatro, ya que el nodo e no es un empotramiento, sino un apoyo fijo y no puede ser candidato; el resto se mantienen. El grado de hiperestaticidad disminuye, ahora es de dos y aparecen dos ecuaciones de equilibrio.

La estructura de colapso se forma para un valor de la fuerza P de 172.660 N, con rótulas en b , c y d , siendo la b la última en producirse, como se concluye de la solución que se muestra en la Figura 41. En el apoyo fijo nunca hay momento en tanto que el giro se encuentra liberado, y en el empotramiento, el momento en el instante de colapso es de 115.095 Nm.

$$\begin{pmatrix} F \rightarrow 172\,660. \\ M[1] \rightarrow -115\,095. \\ M[2] \rightarrow -172\,700 \\ M[3] \rightarrow 172\,700. \\ M[4] \rightarrow -172\,700 \\ M[5] \rightarrow 0 \\ \theta[1] \rightarrow 0 \\ \theta[2] \rightarrow 0 \\ \theta[3] \rightarrow 0.0655616 \\ \theta[4] \rightarrow -0.0349461 \end{pmatrix}$$

Figura 41. Solución del ejemplo 3.

En la Figura 42 se muestran los desplazamientos de los nodos en el instante de colapso.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0004 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8.0012 \times 10^{-8} \\ 1.20044 \times 10^{-7} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Figura 42. Desplazamiento de los nodos en el instante de colapso (ejemplo 3).

El desplazamiento en el nudo *d* es ínfimo y el horizontal del *c* despreciable (como se ilustra en la Figura 43). El desplazamiento principal es el vertical del nudo central del dintel, producido por la fuerza mayor en la dirección negativa del eje Y (eje vertical).

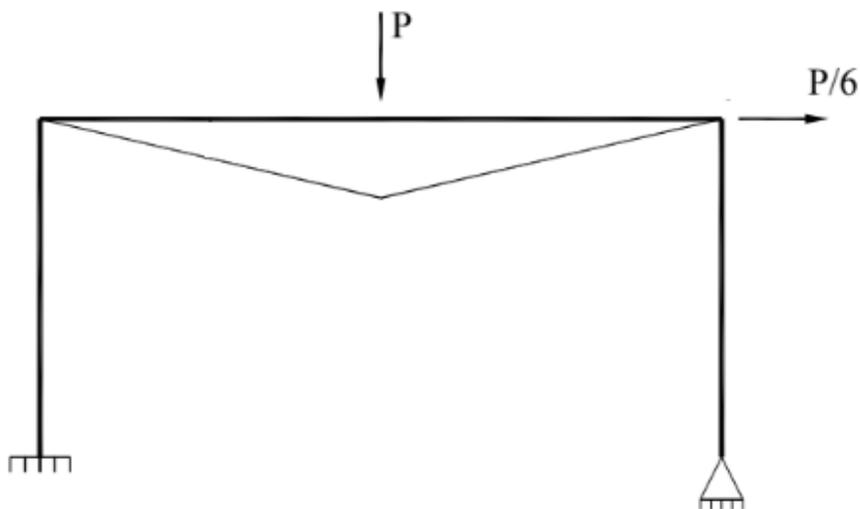


Figura 43. Forma de colapso del ejemplo 3.

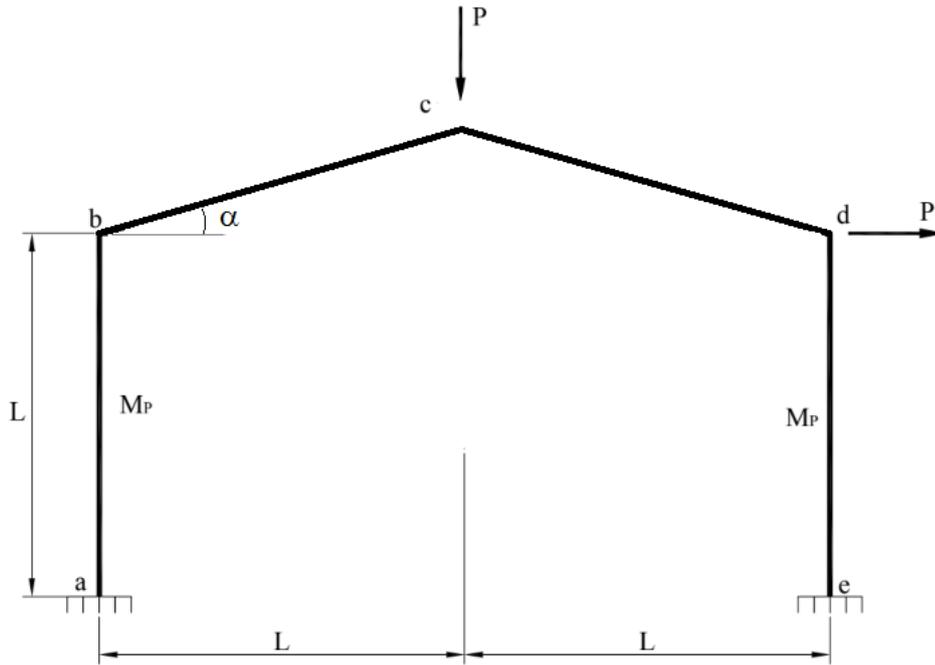
4.3. Ejemplo de aplicación. Pórtico con dintel inclinado

De la misma forma que se ha hecho hasta ahora, se va a resolver un último ejemplo, aparentemente similar al anterior pero que, resuelto “a mano” sería

4. Resultados

demasiado costoso en términos de tiempo que llevaría resolverlo, de forma que sirve de justificación a la sistematización que se ha realizado en este trabajo para resolver este tipo de problemas.

La diferencia con los ejemplos anteriores es que, en este caso, el dintel tiene cierta inclinación, lo cual complica sensiblemente los cálculos. Se trata de un pórtico biempotrado con dos cargas, una vertical hacia abajo sobre el nudo intermedio del dintel y otra horizontal hacia la derecha sobre el nudo que une a este con el pilar derecho, ambas fuerzas con el mismo valor [Figura 44].



```

nodos = {{ {0, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}, {{0, L, 0}, {0, 0, 0}},
           {{L, L*(1 + Cos[α]), 0}, {0, -F, 0}}, {{2L, L, 0}, {F, 0, 0}},
           {{2L, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}};
material = {{vE}};
perfil = {{A, Iz, Mp}};
barras = {{ {1, 2}, {1, 1}}, {{2, 3}, {1, 1}}, {{3, 4}, {1, 1}},
           {{4, 5}, {1, 1}}, {{5, 1}, {0, 0}}};
datos = {L → 4, vE → 2.1 × 1011, Iz → 8360 × 10-8, S → 628 × 10-6,
           σF → 275 × 106, Mp → S σF, α → 5 Degree};
  
```

Figura 44. Ejemplo de aplicación.

Como se trata de un pórtico biapoyado, cada uno de los nudos de la estructura es candidato a rótula plástica y hay un total de cinco, con un grado de hiperestaticidad tres y dos ecuaciones de equilibrio.

De entre las 16 posibles combinaciones de rótulas plásticas para producirse la forma de colapso, esta configuración hace colapsar a la estructura con rótulas en a, c, d y e, siendo a la última en formarse. La fuerza

CÁLCULO PLÁSTICO. MÉTODO DIRECTO SISTEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE MECANISMOS

de colapso es 107.981 N y, en ese instante, el nodo *b* soporta un momento de 86.184,8 Nm, como se ve en la Figura 45.

$$\left(\begin{array}{l} F \rightarrow 107981. \\ M[1] \rightarrow -172700 \\ M[2] \rightarrow -86184.8 \\ M[3] \rightarrow 172700. \\ M[4] \rightarrow -172700 \\ M[5] \rightarrow 172700. \\ \theta[1] \rightarrow 0 \\ \theta[2] \rightarrow 0 \\ \theta[3] \rightarrow 0.0358016 \\ \theta[4] \rightarrow -0.0887803 \\ \theta[5] \rightarrow 0.0685592 \end{array} \right)$$

Figura 45. Solución del ejemplo de aplicación.

Existen desplazamientos en los nodos *b*, *c* y *d*, debido a que en los dos apoyos se produce rótula plástica. La Figura 46 muestra una forma aproximada de la forma de colapso de la estructura.

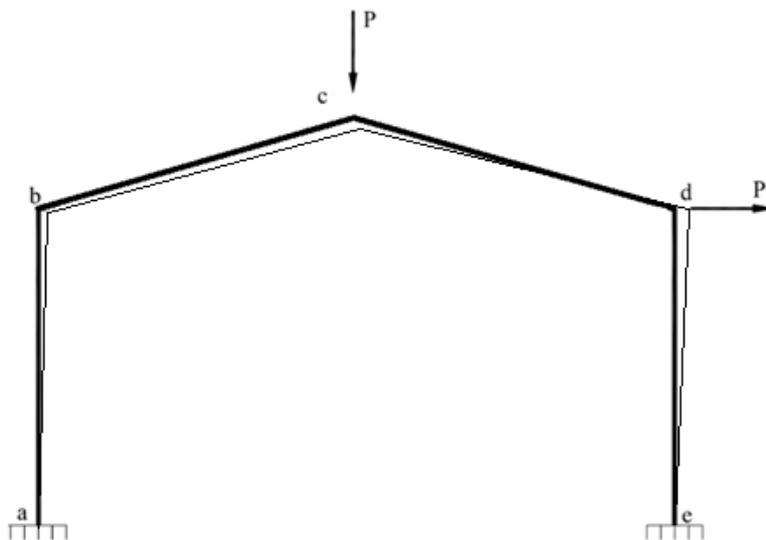


Figura 46. Forma de colapso del ejemplo de aplicación.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

5. Conclusiones y líneas futuras

5.1. Conclusiones

A lo largo del Grado en Ingeniería Mecánica, se estudian gran cantidad de áreas durante los cuatro años que dura la carrera, desde lo más general (podría ser considerado como una continuación de lo aprendido por el estudiante los años anteriores al acceso al grado) durante el primer año, hasta asignaturas que pertenecen a campos más específicos durante, sobre todo, los dos últimos cursos de la carrera. Lo que puede parecer, en ocasiones, conocimientos dispersos y desubicados, van adquiriendo una dimensión conjunta y completa cuando se les otorga un carácter más general y aplicado a casos concretos. Con esta visión como centro del aprendizaje, se ha pretendido llevar a cabo este Trabajo de Fin de Grado, que une diferentes disciplinas y áreas de la ingeniería para un mismo objetivo.

En el Grado de ingeniería Mecánica existen hasta cuatro asignaturas obligatorias relacionadas con la Resistencia de Materiales, sin el conocimiento que se adquiere en las cuales no se podría llevar a cabo un proyecto como este. El campo de estudio de dichas asignaturas es el fundamento para conocer y poder hacer un desarrollo del cálculo plástico mediante el método directo.

Por otro lado, para realizar una sistematización adecuada y lo más compacta posible del método directo, se ha empleado de la Teoría de Mecanismos. La Teoría de Mecanismos abarca un campo casi ilimitado, dentro del cual se ha desarrollado, en mayor medida, la cinemática fundamental para el interés de nuestros objetivos.

Resolver un sistema estructural de forma sistematizada conlleva un ahorro de tiempo muy considerable a la hora de la resolución de problemas de esta índole. Por ello, esta ha sido la principal motivación gracias a la que se ha realizado esta memoria: encontrar un resultado que simplificara todo lo posible resolver, de forma adecuada, un problema de cálculo plástico, uniendo de forma adecuada las dos áreas de la ingeniería expuestas en los párrafos anteriores.

5.2. Líneas futuras

El programa realizado resuelve pórticos bidimensionales con dos apoyos en sus extremos, de manera que la estructura forma un anillo cerrado teniendo en cuenta la bancada; las cargas exteriores que se han estudiado son siempre puntuales, aplicadas sobre cualquier punto de la estructura. Así, se tienen las condiciones de los problemas que puede resolver el código que se ha implementado, dejando fuera otras distribuciones y efectos externos que se

5. Conclusiones y líneas futuras

encontraban fuera del objetivo de este Trabajo de Fin de Grado, enumerados a continuación:

- En cuanto a sus **apoyos**: se puede completar el código para que sea capaz de resolver problemas que contengan más de dos apoyos.
- En cuanto a las **barras que componen la estructura**: poder obtener el resultado de una estructura que tenga alguna de sus barras en voladizo es una evolución que se le puede implementar al código para que sea capaz de resolverla.
- En cuanto a las **solicitaciones externas** que afectan a la estructura: el programa es capaz de resolver sistemas sobre los que actúan cargas y momentos puntuales, pero no tiene desarrollado un algoritmo que devuelva una solución a una carga distribuida, para lo cual se necesita un trabajo que se encuentra fuera del alcance de lo que, en esta memoria, se pretende estudiar.
- En cuanto a las **dimensiones del sistema**: resolver un problema de cálculo plástico bidimensional conlleva un trabajo bastante considerable, por lo que no cuesta imaginarse la magnitud de otro sistema tridimensional sobre el que actúan solicitudes externas en las tres dimensiones del espacio. Resolver este problema queda apuntado como posible proyecto futuro de un nivel superior al trabajo que aquí se presenta.

Bibliografía

- [1] Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de estructuras de la Universidad de Valladolid (2009): *Apuntes para una breve introducción a la Resistencia de Materiales y temas relacionados*. Valladolid (España).
- [2] Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de estructuras de la Universidad de Valladolid: *Análisis límite de estructuras de barras. Cálculo plástico*. Valladolid (España).
- [3] Avello Iturriagagoitia, Alejo (2014): *Teoría de Máquinas*. Universidad de Navarra (Navarra, España).
- [4] Möller Oscar: *Análisis Estructural I*. Universidad Nacional de Rosario, Rosario (Argentina).
- [5] Pérez, Victoria (2010): “Cinemática directa”. [Documento disponible en <https://matematica.laguia2000.com/general/cinemática-directa>]
- [6] Ramírez Arias, José Luis; Rubiano Fonseca, Astrid (2012): *Modelamiento matemático de la cinemática directa e inversa de un robot manipulador de tres grados de libertad*. Universidad Militar Nueva Granada, Nueva Granada (Colombia).
- [7] Rus Calborg, Guillermo (2008): *Cálculo plástico de estructuras de barras: Teoría*. Universidad de Granada, Granada (España).
- [8] Santamaría López, Edie (2010): “Coordenadas homogéneas y representación matricial”. [Documento disponible en <https://jeremijosue.wordpress.com/coordenadas-homogeneas-y-representacion-matricial/>]
- [9] Tristán Vega, Antonio: *Mecánica de Robots*. Universidad de Valladolid, Valladolid (España).
- [10] Universidad de Sevilla (2013): *Estabilidad. Análisis plástico de estructuras*. Sevilla (España).
- [11] Vicente Díaz, Saturnino: *Robotica industrial, apuntes de Ingeniería Electrónica*. E.U. Politécnica Universidad de Sevilla, Sevilla (España).
- [12] “Mathematica”. Wikipedia [Documento disponible en <https://es.wikipedia.org/wiki/Mathematica>]

Anexos

Anexo 1. Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica es un programa creado en 1988 que se utiliza en diversas áreas (ciencia, ingeniería, matemáticas...). La versión usada en este TFG es la 11.3, lanzada el 8 de marzo de 2018, disponible para una amplia variedad de dispositivos. Mathematica se divide en dos partes:

- **Kernel** o núcleo: encargado de realizar los cálculos.
- *Front end* o **interfaz**: permite al usuario interactuar con el kernel desplegando los resultados.

Existe la posibilidad de que distintas interfaces puedan conectarse al mismo núcleo. Para comunicar kernel e interfaz, Mathematica utiliza el protocolo MathLink.

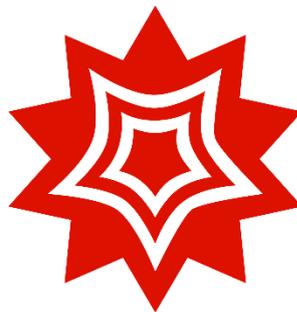


Figura 47. Icono de Wolfram Mathematica.

La interfaz ofrece analogías a un cuaderno de trabajo, en tanto que los datos de entrada por parte del usuario y los resultados que envía el núcleo se colocan en celdas jerárquicas.

Entre el amplísimo número de características generales de Wolfram Mathematica, podemos destacar:

- Biblioteca de funciones matemáticas elementales y especiales.
- Matrices y manipulación de datos.
- Computación numérica y simbólica.

Definición de los comandos

A continuación, se van a explicar la función de los diferentes comandos que se utilizan en este TFG:

- **Module[{x,y,...},expr]** [Figura 48]: permite configurar variables locales (x, y) con nombres que son locales para esta función, dejando de contener la información que tienen dentro de *Module* en el resto del programa.

```

num = Module[{a, b},
  |módulo
  a = 2;
  b = a + 1;
  b
];

In[5]:= num
Out[5]= 3

```

Figura 48. Module. num toma el valor de b.

- **Lenght[expr]**: devuelve la longitud del vector *expr*.
- **Norm[expr]**: calcula la norma del vector *expr*.
- **MatrixForm[expr]**: muestra la matriz *expr* en forma de matriz [Figura 49].

```

In[7]:= MatrixForm[{{a, b}, {c, d}}]
|forma de matriz

Out[7]//MatrixForm=
  ( a b )
  ( c d )

```

Figura 49. MatrixForm.

- **For[inicio,final,incr,cuerpo]** [Figura 50]: ejecuta *inicio*, después evalúa *cuerpo* en intervalos crecientes con el valor de *incr* hasta que el contador interno deja de dar *True* a la condición *final*.

```

In[4]:= a = 1;
For[i = 1, i ≤ 5, i++,
  a += 1;
];
a

Out[6]= 6

```

Figura 50. Bucle For.

- **If[condicion,t,f,u]** [Figura 51]: Si se cumple *condición* (*True*), se ejecuta *t*, de lo contrario (*False*), se ejecuta *f* y, en caso de que no evalúe ni *True* ni *False*, se ejecuta *u*.

```
In[7]:= i = 2;
      If[i == 1, j = 1, j = 0];
      j
Out[9]= 0
```

Figura 51. Bucle If.

- **Print[expr]**: saca *expr* por pantalla.
- **Binomial[n,m]**: Calcula el binomial de *n* sobre *m* según la ec. 48.

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{ec. 48}$$

- **Subsets[list,{n_{min}, n_{max}}**]: saca una lista con todas las posibles combinaciones del vector *list*, cuyas dimensiones estén contenidas entre los elementos {*n_{min}*, *n_{max}*}.

```
Subsets[{a, b, c, d}, {2, 3}]
{{a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d},
 {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}}
```

Figura 52. Subsets.

- **AppendTo[s,elem]**: añade *elem* dentro del vector *s* como su último elemento.
- **Table[expr,{i,i_{min}, i_{max}}**]: genera un vector de *i* copias de *expr* desde *i_{min}* hasta *i_{max}*.

```
In[2]:= Table[{}, {i, 1, 4}]
Out[2]= {{}, {}, {}, {}}
```

Figura 53. Table.

- **Do[expr,{i,i_{min}, i_{max}}**]: evalúa *expr* con la variable *i* sucesivamente desde *i_{min}* hasta *i_{max}* (de uno en uno).
- **Dot[a,b,c]**: devuelve el producto de vectores, matrices y tensores.
- **Apply[f,expr] (f@@expr)**: aplica el commando *f* a todas las partes de *expr*.

```
In[1]:= Dot @@ {a, b, c}
Out[1]= a.b.c
```

Figura 54. Comando Apply.

- **Chop[num,dim]**: redondea *num* al orden de magnitud marcado por *dim*.
- **Sum[f,{i,i_{min},i_{max}}**] [ec. 49]: evalúa la suma de la función *f* desde *i_{min}* hasta *i_{max}*.

$$\text{Sum}[f, \{i, i_{\max}\}] = \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} f \quad \text{ec. 49}$$

- **Simplify[expr] (expr//Simplify)**: realiza una secuencia de operaciones algebraicas y otras transformaciones en *expr* y devuelve la forma más simple que encuentra [Figura 55].

```
In[2]:= Simplify[(2 x + 4 x^2) / 2 + 1]
Out[2]= 1 + x + 2 x^2
```

Figura 55. Simplify.

- **Join[list₁,list₂,...]**: une en un solo vector o matriz, otros escalares, vectores o matrices.

```
In[3]:= Join[{a, b, c}, {x, y}, {u, v, w}]
Out[3]= {a, b, c, x, y, u, v, w}
```

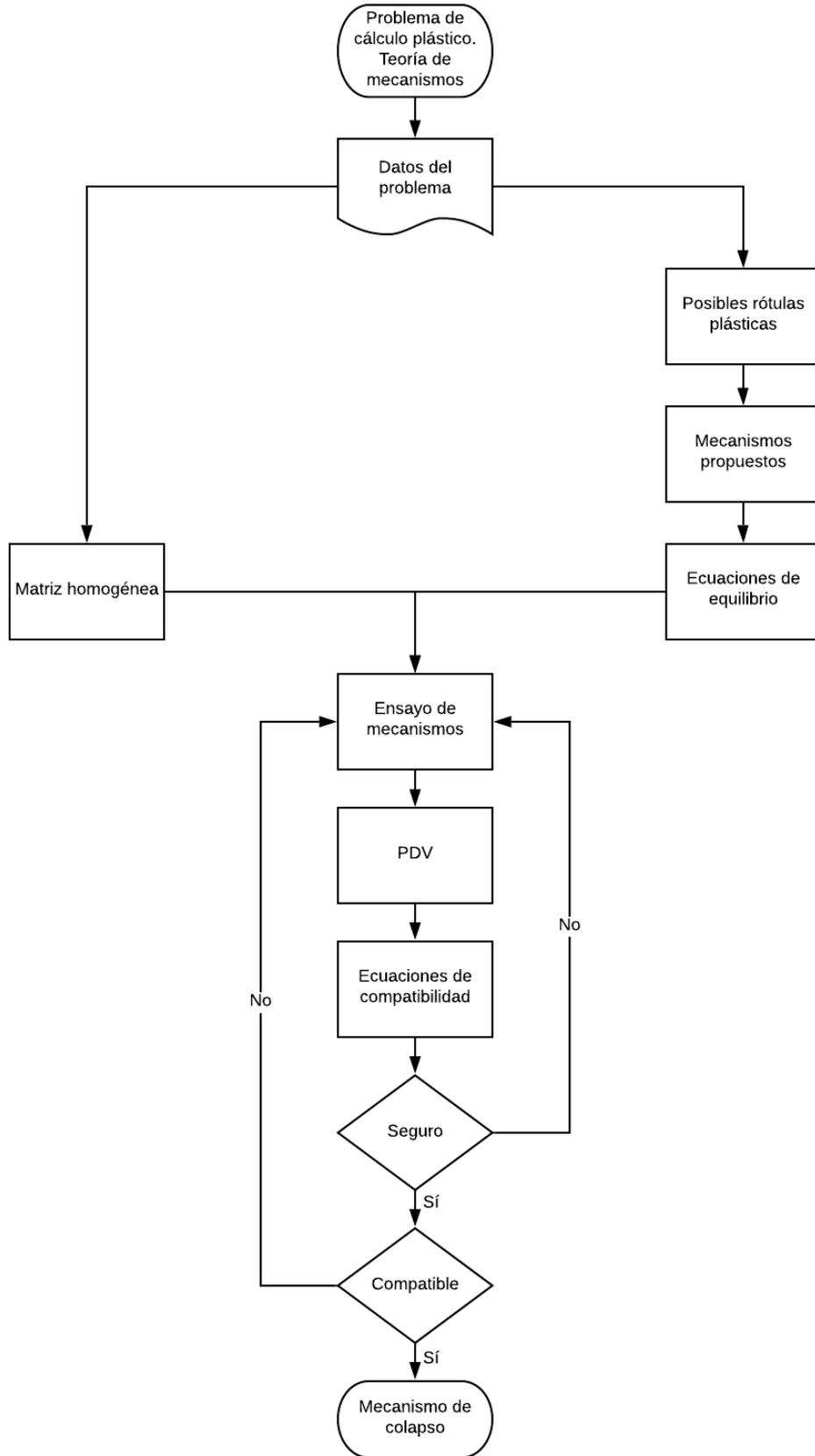
Figura 56. Comando Join.

- **DiscreteDelta[n₁,n₂,...]**: calcula la función delta discreta de cada parámetro, dando 1 si cada *n_i* es 0 y dando 0 en cualquier otro caso.
- **Solve[expr,vars]**: trata de resolver el sistema *expr* de ecuaciones o desigualdades en función de las variables *vars*.
- **Refine[expr,assum]**: resuelve la forma de *expr* que se obtendría en caso de que los símbolos fueran reemplazados por expresiones numéricas explícitas en caso de satisfacer la condición *assum*.
- **Assumptions**: se trata de la condición *assum* definida en el comando *Refine[expr,assum]*.

CÁLCULO PLÁSTICO. MÉTODO DIRECTO SISTEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE MECANISMOS

- **And (&&):** es la función lógica “y”. Evalúa el argumento dando *False* inmediatamente si algún elemento del mismo es *False* y dando *True* si todos los elementos son *True*.

Anexo 2. Diagrama de flujo del programa



Anexo 3. Código

(*Enunciado*)

```
nodos = {{{0, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}, {{0, L, 0}, {0, 0, 0}},  
        {{L, L, 0}, {0, -F, 0}}, {{2 L, L, 0}, {F, 0, 0}},  
        {{2 L, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}};  
material = {{vE}};  
perfil = {{A, Iz, Mp}};  
barras = {{{1, 2}, {1, 1}}, {{2, 3}, {1, 1}}, {{3, 4}, {1, 1}},  
          {{4, 5}, {1, 1}}, {{5, 1}, {0, 0}}};  
datos = {L -> 4, vE -> 2.1 10^11, Iz -> 8360 10^-8,  
        S -> 628*10^-6, σF -> 275*10^6, Mp -> S σF};
```

(*Matriz homogénea*)

```
matrizT = Module[{Li, λx, λy, λz},  
  nd = Length[nodos];  
  nb = Length[barras];  
  mT = T[1] = {{1, -q[1], 0, 0}, {q[1], 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0},  
             {0, 0, 0, 1}};  
  For[i = 1, i <= nd - 1, i++, {  
    Li = Norm[nodos[[i + 1, 1]] - nodos[[i, 1]]];  
    λx = (nodos[[i + 1, 1, 1]] - nodos[[i, 1, 1]])/Li;  
    λy = (nodos[[i + 1, 1, 2]] - nodos[[i, 1, 2]])/Li;  
    λz = 0/Li;  
    T[i + 1] = {{1, -q[i + 1], 0, λx Li},  
              {q[i + 1], 1, 0, λy Li}, {0, 0, 1, λz Li}, {0, 0, 0, 1}};  
    mT = mT.T[i + 1];  
  }  
];  
mT];
```

(*Rótulas plásticas*)

```
{NPR, Comp} = Module[{NPR, Comp},  
  NPR = 0;  
  Comp = {};  
  For[i = 1, i <= nd, i++,  
    If[  
      (nodos[[i, 2, 1]] == Fx || nodos[[i, 2, 2]] == Fy) &&  
      nodos[[i, 2, 3]] == 0,  
      {NPR = NPR, Comp = AppendTo[Comp, 0]},  
      {NPR += 1, Comp = AppendTo[Comp, 1]},  
      {NPR += 1, Comp = AppendTo[Comp, 1]}  
    ];  
  ];  
  {NPR, Comp}];  
Comp;  
Print["El número de posibles rótulas plásticas es de ", NPR];
```

(*Ecuaciones de equilibrio*)

```
GH = 0;  
For[i = 1, i <= nd, i++,  
  If[nodos[[i, 2, 1]] == Fx, GH += 1];  
  If[nodos[[i, 2, 2]] == Fy, GH += 1];  
  If[nodos[[i, 2, 3]] == Mz, GH += 1];
```

Anexos

```
];
GH = GH - 3;
If[Sum[nodos[[i, 1, 2]], {i, nd}] == 0, GH = GH - 1];
EQ = NPR - GH;
Print["Ecuaciones de equilibrio = ", EQ];
Print["Ecuaciones de compatibilidad = ", GH];

(*Posibles mecanismo de colapso (todos)*)

mec = {};
mec = Subsets[
  (For[i = 1, i <= nd, i++,
    If[Comp[[i]] == 1,
      AppendTo[mec, barras[[i, 1, 1]]]
    ]
  ],
  mec),
  {NPR - (nd - 3), NPR}
];
Print["Todas las posibles combinaciones de rótulas plásticas
son:", mec];
mecnec = mec;

For[avanza = Length[mecnec[[1]]], avanza <= Length[nodos],
  avanza++, {
  Do[{
    mecextra = {};
    For[i = 1, i <= Length[mecnec], i++,
      If[Length[mecnec[[i]]] == avanza,
        AppendTo[mecextra, mecnec[[i]]]
      ]
    ];
    mec = mecextra;
    dim = Length[mecextra];
    mec2 = Table[{}, dim];
    For[i = 1, i <= dim, i++,
      mec2[[i]] = mec[[i]];
      For[j = 1, j <= nd - Length[mec[[i]]], j++,
        AppendTo[mec2[[i]], 0]
      ]
    ];
    mec3 = Table[0, dim, nd];
    For[i = 1, i <= dim, i++,
      For[j = 1, j <= nd, j++,
        If[mec2[[i, j]] != 0,
          mec3[[i, mec2[[i, j]]]] = mec2[[i, j]];
        ]
      ]
    ];
    MCp = Table[{}, dim];
    For[j = 1, j <= dim, j++,
      (k = 0;
      For[i = 1, i <= nd, i++,
        If[Comp[[i]] == 1,
          (If[mec3[[j, i]] != 0 && k == 0, (k = 1;
            AppendTo[MCp[[j]], q[i] == Δv));
          If[mec3[[j, i]] == 0,
            AppendTo[MCp[[j]], q[i] == 0])
          ]
        ]
      ]
    ];
  ]
];
```

CÁLCULO PLÁSTICO. MÉTODO DIRECTO SISTEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE MECANISMOS

(*Mecanismos propuestos, ecuaciones de equilibrio*)

```
Δv = 0.000001;
sol = Table[0, {dim}];
gdl = Table[q[i], {i, 1, nd}];
Do[
  vP = {};
  For[i = 1, i <= nd - Length[MCp[[neq]]], i++, (
    If[i == 1, AppendTo[vP, mT[[2, 4]]];
    If[i == 2, AppendTo[vP, mT[[2, 1]]];
    If[i == 3, AppendTo[vP, mT[[1, 4]]];
    j = i;
    If[j > 3, j = 3];
  )
];
If[j == 1,
  kk = Solve[
    Join[{vP == nodos[[nd, 1, 2]]}, MCp[[neq]],
    gdl
  ] /. datos;
];
If[j == 2,
  kk = Solve[
    Join[{vP == nodos[[nd, 1, {2, 3}]]}, MCp[[neq]],
    gdl
  ] /. datos;
];
If[j == 3,
  kk = Solve[
    Join[{vP == nodos[[nd, 1, {2, 3, 1}]]},
    MCp[[neq]],
    gdl
  ] /. datos;
];
s = 0;
j = 0;
min = 10^10;
i = 1;
Do[s += Abs[q[i]] /. kk, {i, nd - 1}];
Do[
  If[s[[i]] < min, {min = s[[i]}, j = i},
  {i, Length[s]}
];
sol[[neq]] = kk[[j],
{neq, dim}
];
sol2 = {};
For[i = 1, i <= dim, i++,
  If[sol[[i]] == List, , ,
  AppendTo[sol2, sol[[i]]]
]
];
sol = sol2;
sol = Chop[sol, 10^-8];
```

(*desplazamientos*)

```
dim = Length[sol];
```

Anexos

```

δ = Table[
  Table[
    ((Dot @@ Table[T[j], {j, i}])[[{1, 2, 3}, 4]]) -
      nodos[[i, 1]],
    {i, nd}
  ] /. sol[[neq]] /. datos,
  {neq, dim}
];
δ = Chop[δ, 10^-6];

(*Aplicar el PDV*)

eq = Table[
  (Sum[δ[[neq, i]].nodos[[i, 2]], {i, nd}] -
    Sum[M[i] q[i], {i, nd}])/Δv /. sol[[neq]],
  {neq, dim}
] /. (0.0 -> 0) // Simplify;

(*Ensayo de mecanismos*)

Mreal = Table[{}, {dim}];
Table[
  For[i = 1, i <= nd, i++,
    If[
      q[i] != 0 /. sol[[neq]] || Comp[[i]] == 0,
      Mreal[[neq]] = AppendTo[Mreal[[neq]], (
        If[repite == 1,
          M[i] -> Sign[q[i]] Mp /. sol[[neq]],
          M[i] -> -Sign[q[i]] Mp /. sol[[neq]]
        ]
      )],
      Mreal[[neq]] = AppendTo[Mreal[[neq]], θ[i] -> 0],
      Mreal[[neq]] = AppendTo[Mreal[[neq]], M[i] -> 0]
    ];
  ];
, {neq, dim}
];

(*Ecuaciones de compatibilidad*)

cc = {};
For[i = 1, i <= nd, i++,
  If[Comp[[i]] == 0, (AppendTo[cc, m[i] == 0])]
];
ec = {};
For[i = 1, i <= EQ, i++,
  For[j = 1, j <= dim, j++,
    If[sol[[j, nd - i + 1, 2]] != 0,
      (AppendTo[ec, eq[[j]] /. F -> 0 /.
        Table[M[i] -> m[i], {i, nd}]]);
      j = dim;
      eq[[j]] = 0)
    ];
  ];
];

mvirtual = Table[
  Solve[
    Join[

```

CÁLCULO PLÁSTICO. MÉTODO DIRECTO SISTEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE MECANISMOS

```

        Table[m[i] == DiscreteDelta[j - i], {i, GH}], cc,
        {ec == Table[0, {EQ}]}
    ]
    ][[1]],
    {j, GH}
];
mvirtual = Chop[mvirtual, 10^-6];

EC = Table[
    Table[
        For[pfv = 0; i = 1, i <= nb - 1, i++, {
            Li = Norm[nodos[[i + 1, 1]] - nodos[[i, 1]]] /.
                datos;
            vEi = material[[barras[[i, 2, 1]], 1]] ;
            Izi = perfil[[barras[[i, 2, 2]], 2]];
            Mi = M[i];
            Mj = M[i + 1];
            mi = m[i];
            mj = m[i + 1];
            pfv += Li/(6 vEi Izi) (mi (2 Mi + Mj) +
                mj (Mi + 2 Mj));
        }
    ],
    pfv += Sum[m[i]  $\theta$ [i], {i, nd}];
    pfv = Simplify[pfv /. Mreal[[neq]] /. mvirtual[[j]]],
    {j, GH}
],
{neq, dim}
];

adic = Table[
    Table[
        Mreal[[neq, i, 1]] == Mreal[[neq, i, 2]],
        {i, nd}
    ],
    {neq, dim}
];

incog = Join[{F}, Table[M[i], {i, nd}],
    Table[ $\theta$ [i], {i, nd}]];
giros = Table[{}], {dim}];
Table[
    For[i = 1, i <= nd, i++,
        If[
            Mreal[[neq, i, 1]] == M[i],
            AppendTo[giros[[neq]],  $\theta$ [i]]
        ]
    ],
    {neq, dim}
];

```

(*ensayar los mecanismos posibles*)

```

Do[
    For[i = 1, i <= Length[giros[[neq]]], i++, {
        For[j = 1, j <= Length[eq] - EQ + 1, j++,
            {
                add = {};
                For[k = j, k <= EQ + j - 1, k++,
                    AppendTo[add, eq[[k]]]
                ]
            }
        ]
    ]
];

```

```

];
sol = Solve[
  Join[
    {
      EC[[neq]] == Table[0, {GH}],
      add == Table[0, {EQ}],
      {giros[[neq, i]]} == {0}
    },
    adic[[neq]]
  ], incog
][[1]] /. (0.0 -> 0);
If[
  Refine[
    (And @@ Table[Abs[M[i]] <= Mp, {i, nd}] /.
      sol),
    Assumptions -> {Mp > 0, Iz > 0, vE > 0}
  ],
  If[
    Refine[
      (And @@ Table[Sign[θ[i] M[i]] >= 0,
        {i, nd}] /. sol),
      Assumptions -> {Mp > 0, Iz > 0, vE > 0}
    ],
    {solucion = sol,
      i = Length[giros[[neq]]]}
  ]
]
]
}
]
}
],
{neq, dim}
];
If[(solucion[[1, 2]] /. datos) >= 0,
  {solucion = (solucion /. datos), repite = 2}
];
}
, {repite, 2}
];
If[(solucion[[1, 2]] /. datos) >= 0, avanza = Length[nodos] +
1];
}
]
MatrixForm[solucion /. datos]

```

Sistematización del método directo

En este apartado se desarrolla el significado del código parte por parte, tratando de aclarar el significado general del mismo y buscar una coherencia del conjunto, con el objetivo de facilitar la comprensión de quien esté interesado en ampliar o utilizar este programa. Cabe aclarar que el significado físico y el método empleado para resolver el problema general del método directo para calcular estructuras ha sido desgranado en el cuerpo de esta memoria, por lo que en este anexo no se va a encontrar una explicación detallada del método, sino una explicación a modo de manual del propio código.

Vectores de entrada

En primer lugar, se definen las familias de los valores de entrada del problema de cálculo plástico que se desee resolver. Son los únicos vectores que hay que introducir; el resto del programa es común para todos los ejemplos. Los distintos vectores que hay que definir son los siguientes:

- Vector **nodos** [Figura 57]: introduce tantos subvectores como nodos tenga el sistema. Cada uno de ellos está compuesto por otros dos vectores: el primero indica las coordenadas $\{p_{x,i}, p_{y,i}, p_{z,i}\}$ de cada nodo respecto del origen y el segundo las fuerzas $\{F_{x,i}, F_{y,i}, F_{z,i}\}$ que actúan sobre él.

```
nodos = {{{0, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}, {{0, L, 0}, {0, 0, 0}},  
         {{L, L, 0}, {0, -F, 0}}, {{2L, L, 0}, {F, 0, 0}},  
         {{2L, 0, 0}, {Fx, Fy, Mz}}};
```

Figura 57. Vector "nodos".

Como se aprecia en la Figura 57, el primer y último nodo se trata de los apoyos. En estos, se denotan siempre: F_x a la fuerza proyectada en el eje X, F_y a la que actúa según el eje Y y M_z al momento, en caso de que exista en el apoyo sobre la que se trabaje.

- Vector **material**: define el módulo de elasticidad del material o materiales de los que está hecha la estructura, como se observa en la Figura 58, donde solo está formada por un único material.

```
material = {{vE}};
```

Figura 58. Vector "material".

- Vector **perfil**: define la sección de cada barra y sus características. De nuevo, en la Figura 59 podemos observar una estructura con una única sección.

```
perfil = {{A, Iz, Mp}};
```

Figura 59. Vector "perfil".

- Vector **barras**: está formado por el número de barras que tenga la estructura más uno, debido a que el último vector de esta familia se refiere, en cualquier caso, a la bancada.

```
barras = {{{1, 2}, {1, 1}}, {{2, 3}, {1, 1}}, {{3, 4}, {1, 1}},  
          {{4, 5}, {1, 1}}, {{5, 1}, {0, 0}}};
```

Figura 60. Vector "barras".

Como se puede ver en la Figura 60, cada subvector está formado por otros dos subvectores, el primero de ellos indica de qué nodo a qué nodo va cada barra y el segundo hacer referencia al material y al perfil de esa barra, respectivamente, excepto en la bancada, que es siempre un vector nulo en tanto que no se trata de una barra propiamente dicha.

- Vector **datos** [Figura 61]: se trata del último vector de entrada y define las variables del problema de cálculo plástico. Se introducen:

- L : longitud de referencia.
- νE : módulo de elasticidad del material.
- I_z : momento de inercia de la sección.
- S : superficie de la sección.
- σ_F : límite elástico del material.
- M_p : momento plástico de la sección, producto de S por σ_F .

```
datos = {L → 4, νE → 2.1 × 1011, Iz → 8360 × 10-8, S → 628 × 10-6,  
        σF → 275 × 106, Mp → S σF};
```

Figura 61. Vector "datos".

Matriz homogénea

Una vez definidos los valores de entrada del problema, se procede a calcular la Matriz homogénea T del sistema (matriz T). Véase Figura 62.

```

matrizT = Module[{Li, λx, λy, λz},
  nd = Length[nodos];
  nb = Length[barras];
  mT = T[1] = {{1, -q[1], 0, 0}, {q[1], 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0},
    {0, 0, 0, 1}};
  For[i = 1, i ≤ nd - 1, i++, {
    Li = Norm[nodos[[i + 1, 1]] - nodos[[i, 1]]];
    λx = (nodos[[i + 1, 1, 1]] - nodos[[i, 1, 1]]) / Li;
    λy = (nodos[[i + 1, 1, 2]] - nodos[[i, 1, 2]]) / Li;
    λz = 0 / Li;
    T[i + 1] = {{1, -q[i + 1], 0, λx Li}, {q[i + 1], 1, 0, λy Li},
      {0, 0, 1, λz Li}, {0, 0, 0, 1}};
    mT = mT.T[i + 1];
  }
];
mT];

```

Figura 62. Matriz homogénea.

Donde se define:

- **nd**: número de nodos de la estructura.
- **nb**: número de barras de la estructura.
- **mT_i**: matriz homogénea que transforma el sistema de referencia del nodo i al sistema de referencia base.
- **matrizT**: matriz homogénea que transforma el sistema de referencia del último nodo al sistema de referencia base.
- **T[i]**: matriz homogénea que transforma el sistema de referencia del nodo i al sistema de referencia de i-1.
- **Li**: distancia absoluta entre dos nodos consecutivos o longitud de cada sección.
- **λ_x**: longitud de cada sección referenciada al eje X de la base.
- **λ_y**: longitud de cada sección referenciada al eje Y de la base.
- **λ_z**: longitud de cada sección referenciada al eje Z de la base (siempre es 0 ya que se están estudiando estructuras bidimensionales).

- $q[i]$: representa el giro en cada nodo en un sistema de ejes transformados.

La *matriz* T se calcula postmultiplicando el total de las $T[i]$, cada una de las cuales se calcula dentro de un bucle *For*, que se repite tantas veces como el número de nodos menos uno, ya que la primera $T[i]$ ($T[1]$) es siempre igual y se refiere a la base absoluta.

Podría calcularse una *matriz* T 3×3 ya que se trata de un problema plano, pero, en este caso, habría que estar manipulando diferentes partes del programa de forma artificial para que las operaciones con las diferentes matrices dieran una solución, debido a que, como pueden existir momentos, siempre va a haber vectores con una dimensión más que con la que se estaría trabajando en este caso.

Rótulas plásticas

A continuación, se procede al cálculo del número total de rótulas plásticas posibles para cada sistema [Figura 63].

```
{NPR, Comp} = Module[{NPR, Comp},
  NPR = 0;
  Comp = {};
  For[i = 1, i ≤ nd, i++,
    If[
      (nodos[[i, 2, 1]] == Fx || nodos[[i, 2, 2]] == Fy) &&
      nodos[[i, 2, 3]] == 0,
      {NPR = NPR, Comp = AppendTo[Comp, 0]},
      {NPR += 1, Comp = AppendTo[Comp, 1]},
      {NPR += 1, Comp = AppendTo[Comp, 1]}
    ];
  ];
  {NPR, Comp}];
Comp;
Print["El número de posibles rótulas plasticas es de ", NPR];
```

Figura 63. Cálculo de rótulas plásticas.

El significado de cada variable es el siguiente:

- **NPR**: número de posibles rótulas plásticas.
- **Comp**: vector de salida donde cada 0 representa que el nodo que ocupa ese lugar del vector no puede ser rótula plástica y cada 1 indica que ese nodo es candidato a serlo.

Estas variables se calculan utilizando un bucle *For* que se repite tantas veces como número de nodos haya, añadiendo un 0 al vector *Comp* en caso de que el momento en ese nodo sea 0 y una de las dos fuerzas (horizontal o vertical) sea F_x o F_y (o ambas), respectivamente, es decir, si se trata de un apoyo con el momento liberado. En cualquier otro caso, se añade un 1. Si se añade un 1 al vector *Comp*, *NPR* suma uno a su valor anterior.

Ecuaciones de equilibrio

A continuación, se trata de obtener el número de ecuaciones de equilibrio y compatibilidad del sistema, de la forma que se observa en la [Figura 64].

```
GH = 0;  
For[i = 1, i ≤ nd, i++,  
  If[nodos[[i, 2, 1]] == Fx, GH += 1];  
  If[nodos[[i, 2, 2]] == Fy, GH += 1];  
  If[nodos[[i, 2, 3]] == Mz, GH += 1];  
];  
GH = GH - 3;  
If[Sum[nodos[[i, 1, 2]], {i, nd}] == 0, GH = GH - 1];  
EQ = NPR - GH;  
Print["Ecuaciones de equilibrio = ", EQ];  
Print["Ecuaciones de compatibilidad = ", GH];
```

Figura 64. Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad.

Donde:

- **GH**: ecuaciones de compatibilidad.
- **EQ**: ecuaciones de equilibrio.

El contador de *GH* empieza en 0 para ir aumentando a medida que avanza el bucle *For*, que se repite tantas veces como nudos tenga la estructura. El número de grados de hiperstaticidad final será el número de movimientos restringidos en cada eje de cada apoyo menos tres, excepto si se trata de una viga horizontal. En este caso, se resta cuatro debido a que hay una ecuación menos.

Las ecuaciones de equilibrio se obtienen de restar *NPR* y *GH*.

El programa da de salida dos *Print* indicando el número de ecuaciones de equilibrio y compatibilidad que tiene el sistema, respectivamente.

Posibles mecanismos de colapso (I)

En este apartado se van a calcular todos los posibles mecanismos de colapso y, posteriormente, las restricciones que hay que ponerle a cada uno de ellos para que se formen. Empezando por el principio, se muestra el código en la Figura 65:

```

mec = {};
mec = Subsets[
  (For[i = 1, i ≤ nd, i++,
    If[Comp[[i]] == 1,
      AppendTo[mec, barras[[i, 1, 1]]]
    ]
  ]);
  mec),
  {NPR - (nd - 3), NPR}
];
Print["Todas las posibles combinaciones de rótulas plásticas son:",
  mec];
mecnec = mec;

```

Figura 65. Combinaciones de rótulas plásticas.

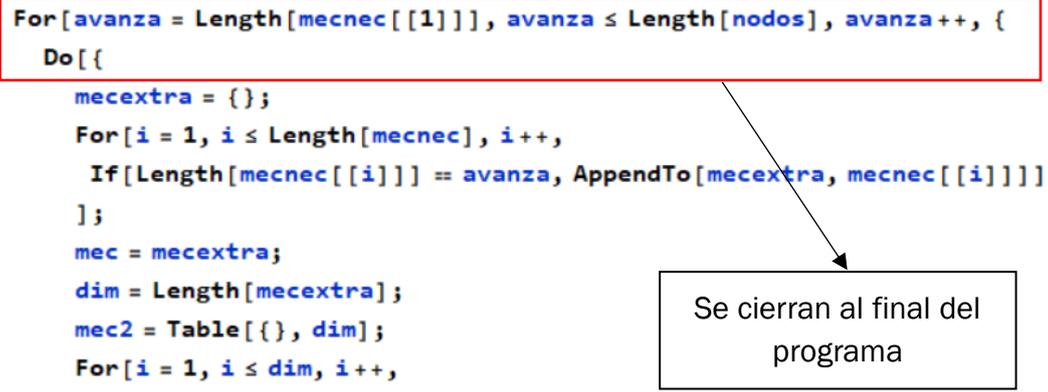
Donde *mec* es un vector que contiene todos los posibles mecanismos de colapso. Cada subvector indica los nodos en los que se produciría giro en caso de ser esa combinación la de colapso.

El bucle *For* que se encuentra dentro de *Subsets* va haciendo un recorrido por todos los nodos de la estructura, añadiendo a *mec* la posición de los nodos que *Comp* le dice que son candidatos a rótulas plásticas. *Subsets* le concede a *mec* todos los mecanismos de colapso posibles.

Una vez halladas todas las formas en las que pudiera ser que rompa la estructura, hay que darle al programa las condiciones para que cada una de esas posibilidades se lleve a cabo [Figura 66].

CÁLCULO PLÁSTICO. MÉTODO DIRECTO SISTEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE MECANISMOS

```
For[avanza = Length[mecnec[[1]]], avanza ≤ Length[nodos], avanza++, {
  Do[{
    mecextra = {};
    For[i = 1, i ≤ Length[mecnec], i++,
      If[Length[mecnec[[i]]] == avanza, AppendTo[mecextra, mecnec[[i]]]]
    ];
    mec = mecextra;
    dim = Length[mecextra];
    mec2 = Table[{}, dim];
    For[i = 1, i ≤ dim, i++,
      mec2[[i]] = mec[[i]];
      For[j = 1, j ≤ nd - Length[mec[[i]]], j++,
        AppendTo[mec2[[i]], 0]
      ];
    ];
    mec3 = Table[0, dim, nd];
    For[i = 1, i ≤ dim, i++,
      For[j = 1, j ≤ nd, j++,
        If[mec2[[i, j]] ≠ 0, mec3[[i, mec2[[i, j]]]] = mec2[[i, j]]];
      ];
    ];
    MCp = Table[{}, dim];
    For[j = 1, j ≤ dim, j++,
      (k = 0;
      For[i = 1, i ≤ nd, i++,
        If[Comp[[i]] == 1,
          (If[mec3[[j, i]] ≠ 0 && k == 0, (k = 1;
            AppendTo[MCp[[j]], q[i] == Δv));
          If[mec3[[j, i]] == 0, AppendTo[MCp[[j]], q[i] == 0]);
        ]
      ];)
    ];
  ];
};
```



Se cierran al final del programa

Figura 66. Posibles mecanismos de colapso.

El significado de las variables que interviene en esta parte del código se explica a continuación:

- **mecextra**: vector que reúne los elementos de *mec* con la misma longitud.
- **dim**: se refiere al número de posibles mecanismos de colapso.
- **mec2** [Figura 67]: convierte a *mec* en vectores $nd \times 1$ añadiendo ceros al final.

```
{ {1, 2, 3, 0, 0}, {1, 2, 4, 0, 0}, {1, 2, 5, 0, 0}, {1, 3, 4, 0, 0},
  {1, 3, 5, 0, 0}, {1, 4, 5, 0, 0}, {2, 3, 4, 0, 0}, {2, 3, 5, 0, 0},
  {2, 4, 5, 0, 0}, {3, 4, 5, 0, 0}, {1, 2, 3, 4, 0}, {1, 2, 3, 5, 0},
  {1, 2, 4, 5, 0}, {1, 3, 4, 5, 0}, {2, 3, 4, 5, 0}, {1, 2, 3, 4, 5} }
```

Figura 67. Posible salida para mec2.

- **mec3** [Figura 68]: ordena el contenido de los vectores de *mec2* colocando a los números distintos de cero en su posición, los ceros rellenan los lugares que no han sido asignados.

```
{ {1, 2, 3, 0, 0}, {1, 2, 0, 4, 0}, {1, 2, 0, 0, 5}, {1, 0, 3, 4, 0},
  {1, 0, 3, 0, 5}, {1, 0, 0, 4, 5}, {0, 2, 3, 4, 0}, {0, 2, 3, 0, 5},
  {0, 2, 0, 4, 5}, {0, 0, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4, 0}, {1, 2, 3, 0, 5},
  {1, 2, 0, 4, 5}, {1, 0, 3, 4, 5}, {0, 2, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4, 5} }
```

Figura 68. Posible salida para mec3.

- **MCp**: se encarga de restringir cada posible forma de colapso, indicando para cada una un pequeño giro en un nudo y anulando el resto de giros que no eran nulos en *mec3*.

A partir de esta parte del código, interviene un bucle *For* hasta el final del mismo que lo repite tantas veces como componentes de distinta longitud tenga *mec* y, para cada una de estas iteraciones, un bucle *Do* que abarca la misma parte del código que se repite dos veces cada vez y asegura que da el resultado positivo del problema, debido a que puede existir otro resultado negativo que no interesa. *mecextra* consigue que *mec* tenga, en cada iteración del *For*, una longitud cada vez mayor.

mec2 tiene las mismas dimensiones que *mec* y, originalmente, se construye como un conjunto de vectores nulos, a cada uno de los cuales se le iguala a su análogo de *mec* para, después, acabar de formar *mec2* mediante un bucle *For*, que itera tantas veces como a cada subvector le queda para tener un número de componentes igual a *nd*.

Hallado *mec2*, se calcula *mec3*. Este nuevo vector se define inicialmente como "Table[0,dim,nd]", dotándole de tantos subvectores como posibles mecanismos de colapsos haya, siendo cada uno de estos un vector nulo con *nd* componentes. Para completar *mec3* hay que hacer uso de dos bucles *For*, uno, primero, que recorra cada subvector y otro que, en caso de que una posición de *mec2* sea distinta de 0, coloque ese número en la nueva posición que le corresponde.

Para *MCp* se parte de tantos vectores nulos como posibles estructuras de colapso. Recorriendo un bucle que estudia cada uno de ellos en cada iteración, se trata de que, para la primera rótula plástica posible, si esa posición no es nula en *mec3*, se le da ese pequeño giro que se explicaba anteriormente. Todos

los ceros de *mec3* sirven para restringir los giros en esas posiciones en cada subvector de *MCp* [Figura 69].

$$\begin{pmatrix} q[1] = \Delta v & q[5] = 0 \\ q[1] = \Delta v & q[4] = 0 \\ q[1] = \Delta v & q[3] = 0 \\ q[1] = \Delta v & q[2] = 0 \\ q[1] = 0 & q[2] = \Delta v \end{pmatrix}$$

Figura 69. *MCp*.

Posibles mecanismos de colapso (II)

Para cada mecanismo del apartado anterior, ahora se trata de calcular cómo colapsa la estructura en esos casos planteando un pequeño giro (hipótesis de pequeños desplazamientos) para las rótulas.

```

Δv = 0.000001;
sol = Table[0, {dim}];
gd1 = Table[q[i], {i, 1, nd}];
Do[
  vP = {};
  For[i = 1, i ≤ nd - Length[MCp[[neq]]], i++, (
    If[i == 1, AppendTo[vP, mT[[2, 4]]]];
    If[i == 2, AppendTo[vP, mT[[2, 1]]]];
    If[i == 3, AppendTo[vP, mT[[1, 4]]]];
    j = i;
    If[j > 3, j = 3];
  )
];
If[j == 1,
  kk = Solve[
    Join[{vP == nodos[[nd, 1, 2]]}, MCp[[neq]]],
    gd1
  ] /. datos;
];
If[j == 2,
  kk = Solve[
    Join[{vP == nodos[[nd, 1, {2, 3}]]}, MCp[[neq]]],
    gd1
  ] /. datos;
];
If[j == 3,
  kk = Solve[
    Join[{vP == nodos[[nd, 1, {2, 3, 1}]]}, MCp[[neq]]],
    gd1
  ] /. datos;
];

```

```

s = 0;
j = 0;
min = 10^10;
i = 1;
Do[s += Abs[q[i]] /. kk, {i, nd - 1}];
Do[
  If[s[[i]] < min, {min = s[[i]], j = i},
  {i, Length[s]}
];
sol[[neq]] = kk[[j]],
{neq, dim}
];
sol2 = {};
For[i = 1, i ≤ dim, i++,
  If[sol[[i]] == List, , ,
  AppendTo[sol2, sol[[i]]]
]
];
sol = sol2;
sol = Chop[sol, 10^-8];

```

Figura 70. Posibles mecanismos de colapso.

Las variables que se han definido en la Figura 70 son:

- Δv : pequeño desplazamiento, en este caso 0.000001 m.
- **sol**: vector de entrada nulo con una dimensión igual que *mecextra*.
- **gdl**: vector que contiene los giros de cada nudo.
- **vP**: ecuaciones formadas a partir de elementos de la matriz homogénea T necesarias para resolver el sistema de ecuaciones para resolver el colapso de la estructura.
- **kk**: posibles soluciones para cada configuración.
- **s**: escalar nulo que acumula los giros en cada rótula.
- **j**: escalar nulo que deja de serlo cuando una solución es, en principio, válida.
- **min**: escalar que asegura que no exista una solución desproporcionada.
- **sol2**: vector nulo que solo acepta las soluciones reales, en tanto que hay otras que no tienen solución, las cuales deja fuera.

CÁLCULO PLÁSTICO. MÉTODO DIRECTO SISTEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE MECANISMOS

Según el número de restricciones que se necesiten para definir una estructura de colapso, se la añaden a v^P más o menos ecuaciones para resolverla (cuantas más restricciones, menos ecuaciones se necesitan).

En función de las ecuaciones que se hayan necesitado, el programa resuelve despejando las componentes de gdI resolviendo un sistema de ecuaciones en el que iguala v^P a la posición del último nodo y añade las restricciones que contiene el correspondiente MCp , dando valor a kk , el cual contiene los valores de los giros en cada nodo.

Seguidamente, se trata de buscar a solución a cada posible estructura de colapso (sol), de forma que, para ello, se recurre a j , s y min , siendo la solución válida aquella que cumpla que s sea menor que min , momento en el cual se le da un valor a j , que define la parte de kk , dando valor a sol . Como ya se ha comentado, $sol/2$ anula aquellas soluciones que no devuelven un resultado numérico, en tanto que son físicamente inviables.

$$\begin{pmatrix} q[1] \rightarrow 1. \times 10^{-6} & q[2] \rightarrow 0.000706982 & q[3] \rightarrow -0.00141446 & q[4] \rightarrow 0.000706481 & q[5] \rightarrow 0 \\ q[1] \rightarrow 1. \times 10^{-6} & q[2] \rightarrow -1.99999 \times 10^{-6} & q[3] \rightarrow 1.99998 \times 10^{-6} & q[4] \rightarrow 0 & q[5] \rightarrow -9.99994 \times 10^{-7} \\ q[1] \rightarrow 1. \times 10^{-6} & q[2] \rightarrow -1. \times 10^{-6} & q[3] \rightarrow 0 & q[4] \rightarrow 9.99998 \times 10^{-7} & q[5] \rightarrow -9.99998 \times 10^{-7} \\ q[1] \rightarrow 1. \times 10^{-6} & q[2] \rightarrow 0 & q[3] \rightarrow -2. \times 10^{-6} & q[4] \rightarrow 1.99999 \times 10^{-6} & q[5] \rightarrow -9.99998 \times 10^{-7} \\ q[1] \rightarrow 0 & q[2] \rightarrow 1. \times 10^{-6} & q[3] \rightarrow -2. \times 10^{-6} & q[4] \rightarrow 9.99995 \times 10^{-7} & q[5] \rightarrow 0 \end{pmatrix}$$

Figura 71. Vector sol .

Desplazamientos

El cálculo de los desplazamientos en cada nodo se realiza multiplicando todas las matrices homogéneas de cada nodo hasta aquel que se calcula, restando el desplazamiento del nodo anterior (desplazamiento relativo al nodo anterior). Esto se realiza para cada configuración.

```
dim = Length[sol];
δ = Table[
  Table[
    ((Dot @@ Table[T[j], {j, i}]) [[{1, 2, 3}, 4]]) -
    nodos[[i, 1]],
    {i, nd}
  ] /. sol[[neq]] /. datos,
  {neq, dim}
];
δ = Chop[δ, 10^-6];
```

Figura 72. Cálculo de los desplazamientos.

Por lo tanto, δ es una matriz de tantas filas como mecanismos posibles y columnas como nodos.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4. \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4.00283 \times 10^{-6} \\ 0.00283193 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 5.99929 \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4. \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3.99999 \times 10^{-6} \\ -3.99996 \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3.99998 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4. \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4. \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3.99999 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4. \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4. \times 10^{-6} \\ 4. \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3.99999 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 4. \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Figura 73. Vector δ .

Aplicación del PDV

En este apartado se calcula la relación entre fuerzas que se le aplican externamente a la estructura y los momentos que se producen en cada nodo.

```
eq = Table[
  (Sum[ $\delta$ [[neq, i]].nodos[[i, 2]], {i, nd}] -
   Sum[M[i] x q[i], {i, nd}]) /  $\Delta v$  /. sol[[neq]],
  {neq, dim}
] /. (0.0 -> 0) // Simplify;
```

Figura 74. PDV.

El sumatorio del producto de los desplazamientos en cada nodo por las fuerzas que se aplican sobre el mismo menos el sumatorio del producto de los momentos en cada nodo por el giro calculado en sol, todo ello dividido entre Δv , permite calcular eq, siendo este un vector de la misma longitud que sol [Figura 74]. eq representa en un mismo término la relación entre fuerzas y momentos para cada posible configuración.

$$\begin{pmatrix} -2831.93 F - 1. M[1] - 706.982 M[2] + 1414.46 M[3] - 706.481 M[4] \\ -0.0000160007 F - 1. M[1] + 1.99999 M[2] - 1.99998 M[3] + 0.999994 M[5] \\ -3.99999 F - 1. M[1] + 1. M[2] - 0.999998 M[4] + 0.999998 M[5] \\ -7.99999 F - 1. M[1] + 2. M[3] - 1.99999 M[4] + 0.999998 M[5] \\ -4. F - 1. M[2] + 2. M[3] - 0.999995 M[4] \end{pmatrix}$$

Figura 75. Vector eq.

Ensayo de mecanismos

Para ensayar los mecanismos, se tiene en cuenta que si se produce un giro en un nudo donde puede haber una rótula plástica, a ese momento se le asigna el valor del momento plástico. En caso de que un candidato a rótula plástica no gire, se le asigna un valor nulo a ese giro. Si se trata de un nudo que no es candidato a rótula plástica, se le anula el momento.

```

Mreal = Table[ {}, {dim} ];
Table[
  For[ i = 1, i ≤ nd, i++,
    If[
      q[i] ≠ 0 /. sol[[neq]] || Comp[[i]] == 0,
      Mreal[[neq]] = AppendTo[Mreal[[neq]], (
        If[ repite == 1,
          M[i] → Sign[q[i]] Mp /. sol[[neq]],
          M[i] → -Sign[q[i]] Mp /. sol[[neq]]
        ]
      )],
      Mreal[[neq]] = AppendTo[Mreal[[neq]], 0[i] → 0],
      Mreal[[neq]] = AppendTo[Mreal[[neq]], M[i] → 0]
    ];
  ],
  {neq, dim}
];

```

Figura 76. Ensayo de los mecanismos.

Mreal saca una matriz donde se define el signo de los momentos plásticos en cada rótula para cada posible configuración, como se ve en la Figura 77.

$$\left(\begin{array}{cccccc}
 M[1] \rightarrow -Mp & M[2] \rightarrow -Mp & M[3] \rightarrow Mp & M[4] \rightarrow -Mp & \theta[5] \rightarrow 0 \\
 M[1] \rightarrow -Mp & M[2] \rightarrow Mp & M[3] \rightarrow -Mp & \theta[4] \rightarrow 0 & M[5] \rightarrow Mp \\
 M[1] \rightarrow -Mp & M[2] \rightarrow Mp & \theta[3] \rightarrow 0 & M[4] \rightarrow -Mp & M[5] \rightarrow Mp \\
 M[1] \rightarrow -Mp & \theta[2] \rightarrow 0 & M[3] \rightarrow Mp & M[4] \rightarrow -Mp & M[5] \rightarrow Mp \\
 \theta[1] \rightarrow 0 & M[2] \rightarrow -Mp & M[3] \rightarrow Mp & M[4] \rightarrow -Mp & \theta[5] \rightarrow 0
 \end{array} \right)$$

Figura 77. *Mreal*.

Ecuaciones de compatibilidad

Llegados a este punto, se hace necesario realizar un análisis virtual del sistema, anulando las fuerzas reales. Para ello, hay que tratar que se forme un sistema de ecuaciones compatible y determinado a partir de la relación de

fuerzas y momentos de cada configuración, haciéndose necesario para el análisis virtual anular las fuerzas reales y resolviendo los términos de momentos virtuales del sistema de ecuaciones mencionado.

```

cc = {};
For[i = 1, i ≤ nd, i++,
  If[Comp[[i]] == 0, (AppendTo[cc, m[i] == 0] )]];
ec = {};
For[i = 1, i ≤ EQ, i++,
  For[j = 1, j ≤ dim, j++,
    If[sol[[j, nd - i + 1, 2]] ≠ 0,
      (AppendTo[ec, eq[[j]] /. F → 0 /. Table[M[i] → m[i], {i, nd}]]);
      j = dim;
      eq[[j]] = 0)
    ];
  ];
];
];

```

Figura 78. Generación de momentos virtuales.

Para acumular los momentos virtuales de los nodos que no son candidatos a rótula plástica hay que añadir un vector que los acumule y les otorgue un valor nulo, lo cual se muestra en la Figura 78 mediante cc.

El vector ec recoge las ecuaciones de los momentos virtuales y crea el sistema de ecuaciones para resolver el problema virtual, anulando, como ya se ha comentado, las fuerzas del sistema real e igualando a 0 cada ecuación.

```

mvirtual = Table[
  Solve[
    Join[
      Table[m[i] == DiscreteDelta[j - i], {i, GH}], cc,
      {ec == Table[0, {EQ}]}
    ]
  ][[1]],
  {j, GH}
];
mvirtual = Chop[mvirtual, 10^-6];

```

Figura 79. Momentos virtuales.

mvirtual devuelve un sistema de tantas soluciones del problema virtual como ecuaciones de compatibilidad tenga el problema real [Figura 80].

$$\begin{pmatrix} m[1] \rightarrow 1. & m[2] \rightarrow 0 & m[3] \rightarrow 0 & m[4] \rightarrow -1.00025 & m[5] \rightarrow 1.0006 \\ m[1] \rightarrow 0 & m[2] \rightarrow 1. & m[3] \rightarrow 0 & m[4] \rightarrow 1.0002 & m[5] \rightarrow -2.0002 \\ m[1] \rightarrow 0 & m[2] \rightarrow 0 & m[3] \rightarrow 1. & m[4] \rightarrow 0 & m[5] \rightarrow 1.9996 \end{pmatrix}$$

Figura 80. *mvirtual*.

```

EC = Table[
  Table[
    For[pfv = 0; i = 1, i ≤ nb - 1, i++, {
      Li = Norm[nodos[[i + 1, 1]] - nodos[[i, 1]]] /. datos;
      vEi = material[[barras[[i, 2, 1]], 1]];
      Izi = perfil[[barras[[i, 2, 2]], 2]];
      Mi = M[i];
      Mj = M[i + 1];
      mi = m[i];
      mj = m[i + 1];
      pfv += Li / (6 vEi Izi) (mi (2 Mi + Mj) + mj (Mi + 2 Mj));
    }
  ];
  pfv += Sum[m[i] × θ[i], {i, nd}];
  pfv = Simplify[pfv /. Mreal[[neq]] /. mvirtual[[j]]],
  {j, GH}
],
{neq, dim}
];

```

Figura 81. Ecuaciones de compatibilidad.

La resolución de las ecuaciones de compatibilidad (EC) para cada uno de las posibles configuraciones de rotura de la estructura se calcula de forma trivial dentro de un bucle *For* que define cada uno de los tramos de la estructura, bancada inclusive. Para definir las propiedades de cada barra (dimensiones, módulo de elasticidad y momento de inercia), el código llama a los datos introducidos al comienzo del programa; véase *Vectores de entrada* (Página 80).

Giros de las rótulas

En primer lugar, se muestra cómo, en la Figura 82, se hace necesario crear una matriz (*adic*) en la que se agrupen los momentos de cada nudo y cada posible solución del problema.

El vector *incog* recoge, de forma simbólica, las fuerzas y momentos que intervengan en el problema en un mismo vector.

Generar una matriz de giros (*giros*) de las rótulas plásticas para cada configuración se hace imprescindible para, más adelante, resolver el problema de cálculo plástico. Esta matriz no contiene los giros de los nodos que no son candidatos a ser rótula plástica.

```

adic = Table[
  Table[
    Mreal[[neq, i, 1]] == Mreal[[neq, i, 2]],
    {i, nd}
  ],
  {neq, dim}
];
incog = Join[{F}, Table[M[i], {i, nd}], Table[θ[i], {i, nd}]];
giros = Table[{}, {dim}];
Table[
  For[i = 1, i ≤ nd, i++,
    If[
      Mreal[[neq, i, 1]] == M[i],
      AppendTo[giros[[neq]], θ[i]]
    ]
  ],
  {neq, dim}
];

```

Figura 82. Giros de las rótulas plásticas.

Ensayar los posibles mecanismos de colapso

Como paso último para resolver los giros, momentos y fuerzas de colapso, se ensayan los mecanismos con los que se han estado trabajando hasta este momento. El resultado del problema será aquella configuración que cumpla las condiciones de ser seguro y compatible.

La solución se comprueba a dentro de un bucle *Do* [Figura 83] que se recorre un máximo de veces igual a mecanismos candidatos a ser la solución al problema (*dim*). En cada iteración del *Do* se trata de determinar si cada configuración es segura y compatible, siendo el resultado que se busca solo aquel que cumpla ambas condiciones, como ya se ha mencionado. El resultado válido se guarda en la variable *solucion* solo si primero es segura y, una vez cumpla esta condición, se comprueba que sea compatible. Si una configuración no es segura no se estudia su condición de compatibilidad.

CÁLCULO PLÁSTICO. MÉTODO DIRECTO SISTEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE MECANISMOS

- Para que se cumpla la condición de seguridad, se comprueba que los momentos que aparecen en cada nodo sean coherentes con el momento plástico.
- La condición de compatibilidad se cumple cuando todos los giros de la estructura corresponden en sentido y signo con los momentos correspondientes en cada nodo.

```

Do[
  For[i = 1, i ≤ Length[giros[[neq]]], i++, {
    For[j = 1, j ≤ Length[eq] - EQ + 1, j++,
      {
        add = {};
        For[k = j, k ≤ EQ + j - 1, k++,
          AppendTo[add, eq[[k]]]
        ];
        sol = Solve[
          Join[
            {
              EC[[neq]] == Table[0, {GH}],
              add == Table[0, {EQ}],
              {giros[[neq, i]]} == {0}
            },
            adic[[neq]]
          ], incog
        ][[1]] /. (0.0 → 0);
        If[
          Refine[
            (And @@ Table[Abs[M[i]] ≤ Mp, {i, nd}] /. sol),
            Assumptions → {Mp > 0, Iz > 0, vE > 0}
          ],
          If[
            Refine[
              (And @@ Table[Sign[θ[i] × M[i]] ≥ 0, {i, nd}] /. sol),
              Assumptions → {Mp > 0, Iz > 0, vE > 0}
            ],
            {solucion = sol,
              i = Length[giros[[neq]]]}
          ]
        ]
      }
    ]
  ],
  {neq, dim}
];

```

Seguro

Compatible

Figura 83. Ensayo de mecanismos.

CÁLCULO PLÁSTICO. MÉTODO DIRECTO SISTEMÁTICO MEDIANTE TEORÍA DE MECANISMOS

Hallada la configuración segura y compatible, queda, solamente, asegurar que sea el resultado positivo del problema, condición que se cumple cuando la fuerza de la solución tiene signo positivo. En caso contrario, el programa busca el resultado positivo cambiando el signo de los momentos en Ensayo de mecanismos (Página 92).

```
    If[ (solucion[[1, 2]] //. datos) ≥ 0,  
        {solucion = (solucion //. datos), repite = 2}];  
    }  
    ,  
    {repite, 2}  
];  
If[ (solucion[[1, 2]] //. datos) ≥ 0, avanza = Length[nodos] + 1];  
]]  
MatrixForm[solucion //. datos]
```

Figura 84. Comprobar solución positiva.

Solución al problema del cálculo plástico

La Figura 85 sirve como muestra a lo que es un resultado que se obtiene una vez el programa ha resultado un problema de cálculo plástico para un pórtico biempotrado.

```
    F → 129403.  
    M[1] → -172700  
    M[2] → 0.171778  
    M[3] → 172700.  
    M[4] → -172700  
    M[5] → 172700.  
    θ[1] → 0  
    θ[2] → 0  
    θ[3] → 0.00650244  
    θ[4] → -0.0130234  
    θ[5] → 0.00652098
```

Figura 85. Solución.

La solución resuelve la fuerza (F) con la que se forma la estructura de colapso, los momentos ($M[i]$) en cada nodo en ese instante y los giros ($\theta[i]$) acumulados en los nodos.



