Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

La integral de Henstock-Kurzweil

Autor: Laura Carreras Fernández

Tutor: Jorge Mozo Fernández

Índice general

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar la integral de Henstock-Kurzweil en el caso de funciones de una variable real, dando su construcción, propiedades básicas, y las versiones correspondientes de los teoremas de convergencia y teoremas fundamentales del cálculo.
A lo largo de la historia se han dado diferentes introducciones al concepto de integral de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, normalmente ligadas al concepto de área. Por ello, antes de tratar la integral de Henstock-Kurzweil se hace una breve introducción de las integrales anteriores, las de Cauchy, Riemann y Lebesgue con el fin de motivar el desarrollo de la nueva integral y de mostrar las principales diferencias y mejoras de unas respecto a otras.
A.L. Cauchy en 1823 propone una integra que funciona adecuadamente para las funciones continuas, o eventualmente con un número finito de discontinuidades de salto.
B. Riemann propone una definición de integral que resulta útil para estudiar funciones acotadas, incluso con una cantidad numerable de discontinuidades. Sin embargo esta construcción sigue siendo ineficaz para tratar algunas funciones problemáticas, como por ejemplo, la función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Uno de los resultados más destacados en la integral de Riemann es el TFC, el cual, en una de sus versiones, afirma que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable cuya derivada es continua entonces $f'(x)$ es integrable Riemann y

$$^{R}\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a) \tag{1}$$

Hay, no obstante, ejemplos de funciones derivables $f(x)$ tales que $f'(x)$ no es ni siquiera acotada y por tanto no es integrable Riemann.
En 1902, H. Lebesgue desarrolla una nueva noción de integral con una construcción diferente ya que es vez de hacer particiones en el dominio de la función lo hace en su rango, lo que hace necesaria la noción de medida que

él mismo construye. Esto supone una gran mejora ya que muchas funciones que no eran integrables en sentido Riemann sí lo serán en sentido Lebesgue, como por ejemplo, la función de Dirichlet definida antes. Sin embargo siguen existiendo funciones derivables $f(x)$ con derivada no integrable Lebesgue y en las que por tanto no se puede aplicar la expresión 1.

La nueva integral, cuyo nombre hace referencia a los matemáticos Ralph Henstock (Reino Unido, 1923) y Jaroslav Kurzweil (Chequia, 1926) que, trabajando de forma independiente, desarrollaron la integral de Riemann generalizada en 1961 y 1957 respectivamente permite salvar alguno de los problemas de las integrales anteriores. La construcción se basa en tomar sumas de Riemann sustituyendo el diámetro δ de una partición del intervalo de partida por un diámetro variable $\delta(t) > 0$, llamado «gauge». Esta construcción tiene en cuenta el posible carácter variable de una función. La principal ventaja de esta integral y su principal razón de desarrollo es la aplicación general del Teorema Fundamental del Cálculo, lo que quiere decir que la integral de Henstock-Kurzweil integra todas las funciones derivables, por lo que la fórmula 1, es siempre válida.

Otra diferencia con respecto a la integral de Lebesgue se observa al tratar la integrabilidad absoluta. Si $f(x)$ es integrable Lebesgue, $|f(x)|$ también lo es. Por tanto, funciones como

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no son integrables Lebesgue en $[0, \infty)$, ya que $|g(x)|$ no lo es. La integral de Henstock-Kurzweil recupera el carácter integrable de estas funciones.

En este TFG se pretende desarrollar la noción de integral de Henstock-Kurzweil en el caso de funciones reales de una variable real, a la cual se dedica el capítulo 4. De manera previa, se revisan otras nociones de integrales, Cauchy, Riemann y Lebesgue, las cuales ya han sido desarrolladas con detalle en las asignaturas de Cálculo infinitesimal y de Análisis Matemático. Las pruebas del capítulo 4 están detalladas pero no todas las de capítulos anteriores, las cuales sólo están esbozadas u omitidas, por estimar que se trata de material desarrollado y utilizado a lo largo del Grado en Matemáticas.

Capítulo 1

Integral de Cauchy

1.1. Construcción

Cauchy fue el primero en dar un proceso constructivo para el cálculo de integrales, investigando las características que debía poseer una función para ser integrable.
La construcción que dio Cauchy es la siguiente:
Dada una función acotada f en el intervalo $[a, b]$, se divide $[a, b]$ en un número finito de subintervalos contiguos $[x_{k-1}, x_k]$ con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$.
Se usará la siguiente terminología:

- La colección de intervalos contiguos $\{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$ se define como **partición** de $[a, b]$ y se denota por $\mathcal{P}$.

- Los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se definen como los **puntos de división** de $\mathcal{P}$. También se puede identificar $\mathcal{P}$ como $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

- La colección de puntos $\{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ dónde $x_k \in [x_k, x_{k+1}]$ se definen como las **etiquetas** de $\mathcal{P}$.

- Se denota por Δx_k a la longitud de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k], 1 \leq k \leq n$ y por $||\mathcal{P}||$ al **diámetro** de la partición, definido como:

$$||\mathcal{P}|| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$$

Se define la suma de Cauchy de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{\mathcal{P}} f \Delta x$$

El límite de las sumas, existente por ser f acotada, cuando la longitud de los intervalos tiende a cero, es la denominada integral de Cauchy de f en $[a, b]$ que denotaremos como ${}^{C}\int_a^b f(x)dx$.

Definición 1.1. *Dada una función acotada f en el intervalo $[a, b]$ se dice que es **integrable Cauchy** en $[a, b]$ o **integrable en el sentido de Cauchy** en $[a, b]$ en $[a, b]$ si existe un número A tal que para cada $\epsilon > 0$ existe una constante positiva δ tal que para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ cuyos subintervalos sean de longitud menor que δ se cumple:*

$$\left| \sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - A \right| < \epsilon.$$

Se escribe ${}^{C}\int_a^b f(x)dx = A$.

1.2. Teorema de Cauchy

Una vez dado un proceso constructivo de la integral, se buscan ahora condiciones suficientes sobre las funciones para garantizar la existencia de su integral en el sentido de Cauchy.

Definición 1.2. *Dadas dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de un intervalo $[a, b]$ se dice que $\mathcal{Q}$ es un **refinamiento** de $\mathcal{P}$ si los puntos de división de $\mathcal{P}$ están incluidos en los puntos de división de $\mathcal{Q}$, es decir cada subintervalo de $\mathcal{Q}$ está contenido en uno de $\mathcal{P}$.*

Teorema 1.3. *Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en sentido de Cauchy en $[a, b]$ y además el valor de la integral en único.*

Demostración. Veremos que considerando diferentes particiones cuyos diámetros tienden a cero, sus sumas de Cauchy forman una sucesión de Cauchy, estas por converger siempre nos darán el valor buscado de la integral de Cauchy. Considerando que:

1. Las funciones continuas definidas en intervalos cerrados y acotados son uniformemente continuas.

2. Se recurre a las sucesiones de Cauchy cuando no es posible calcular el límite, en este caso el número A de la definición de integral de Cauchy.

Utilizando estas ideas se demostrará que las sumas de Cauchy $\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x$, convergen a un límite A y que este límite en único ya que no depende de una

elección concreta de la partición siempre que se cumpla que la longitud de los subintervalos tienda a cero.
Comparamos las sumas de Cauchy de dos particiones cualesquiera.
Tomamos una partición $\mathcal{P}$ y un refinamiento $\widehat{\mathcal{P}}$ obtenido al añadir un número finito de puntos a la partición $\mathcal{P}$.
Sean $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ los puntos de división de $\mathcal{P}$ con:
$x_0 = y_{10}, y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1i_1} = x_1$
$x_1 = y_{20}, y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{1i_2} = x_2$
$\vdots$
$x_{n-1} = y_{n0}, y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{ni_n} = x_n$ los puntos de división de $\widehat{\mathcal{P}}$.
Entonces,

$$\left|\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - \sum_{\widehat{\mathcal{P}}} f\Delta y\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i_k} f(y_{kj-1})(y_{kj} - y_{kj-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i_k}[f(x_{k-1}) - f(y_{kj-1})](y_{kj} - y_{kj-1})\right|.$$

Aplicando que la función f es uniformemente continua en el intervalo $[a, b]$, es decir, dado un $\epsilon > 0$ existe δ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ con x e y puntos cualesquiera del intervalo $[a, b]$ cumpliendo $|x - y| < \delta$. Basta tomar los subintervalos de $\mathcal{P}$ con longitud menor que δ para concluir que

$$\left|\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - \sum_{\widehat{\mathcal{P}}} f\Delta y\right| < \epsilon(b - a).$$

Volviendo al problema original, dadas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dos particiones cualesquiera del intervalo $[a, b]$ cuyos subintervalos tengan longitud menor que δ se construye $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, un refinamiento de cada una de las particiones iniciales, cuyos subintervalos vuelven a tener longitud menor que δ. Por tanto las sumas asociadas, $\sum_{\mathcal{P}_1} f\Delta x$ y $\sum_{\mathcal{P}_2} f\Delta x$ están a una distancia menor que $\epsilon(b - a)$ de $\sum_{\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2} f\Delta x$, veamos a que distancia están una de otra utilizando la desigualdad triangular:

$$\left|\sum_{\mathcal{P}_1} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}_2} f\Delta x\right| = \left|\sum_{\mathcal{P}_1} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2} f\Delta x + \sum_{\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}_2} f\Delta x\right| \leq$$

$$\left|\sum_{\mathcal{P}_1} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2} f\Delta x\right| + \left|\sum_{\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}_2} f\Delta x\right| < 2\epsilon(b - a)$$

Utilizando esta idea de forma recurrente podemos construir una sucesión de particiones $\mathcal{P}_n$ tales que $\lim_{n\to\infty} ||\mathcal{P}|| = 0$. Las diferentes sumas de Cauchy, $\sum_{\mathcal{P}_n} f\Delta_n x$ para los diferentes valores de n están a una distancia $2\epsilon(b-a)$ unas de otras así que para un n suficientemente grande se tiene que $\sum_{\mathcal{P}_n} f\Delta_n x \to A$.
Por tanto hemos visto que la construcción dada por Cauchy está bien definida para funciones continuas y que el valor de la integral no depende de la partición escogida por lo que es único. □

Obsérvese que si f es continua en $[a,b]$, entonces $|f|$ es continua en $[a,b]$, y por tanto integrable. Se cumple en general que si f es integrable en el sentido de Cauchy, $|f|$ también lo es. El recíproco no es cierto como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ racional} \\ -1 & x \text{ irracional} \end{cases}$$

Se tiene que $|f|$ es integrable de Cauchy y que ${}^{C}\int_0^1 |f|\,dx = 1$ y sin embargo f no es integrable de Cauchy ya que no es continua.

1.3. Teoremas fundamentales del cálculo

Dada la derivada o la integral de una función nos planteamos como recuperar la función de partida.

Teorema 1.4. *(TFC-1) Si F es diferenciable en el intervalo $[a,b]$, y F' es continua en $[a,b]$, entonces,*

1. *F' es Cauchy integrable en $[a,b]$.*
2. *${}^{C}\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$ para cada x del intervalo $[a,b]$.*

Demostración. El primer apartado se deduce directamente del Teorema 1.2. Para la segunda parte utilizamos la continuidad uniforme de F y el teorema del valor medio.
Sea $\mathcal{P}$ una partición del intervalo $[a,b]$ y sean $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ sus puntos de división. Por el teorema del valor medio, $\exists c_k \in [a,b]$ tal que $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(c_k)(x_k - x_{k-1})$. Sea $\epsilon > 0$, por la integrabilidad de F', se tiene que existe un número positivo δ_1 tal que si $\mathcal{P}'$ es una partición

cualquiera del intervalo $[a, x]$ cuyos subintervalos son de longitud menor que δ_1, se tiene que:

$$\left| \sum_{\mathcal{P}'} F' \Delta x -^C \int_a^x F'(t)dt \right| < \epsilon.$$

Dado que la derivada F' es continua por hipótesis y por la continuidad uniforme se tiene que $\exists \delta_2 > 0$ tal que $|F'(c) - F'(d)| < \epsilon$ para c y d puntos del intervalo $[a, b]$ tales que $|c - d| < \delta_2$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que:

$$\left| F(x) - F(a) -^C \int_a^x F'(t)dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1})] - \sum_{k=1}^{n} F'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} F'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) -^C \int_a^x F'(t)dt \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |F'(c_k) - F'(x_{k-1})| (x_k - x_{k-1})$$

$$+ \left| \sum_{\mathcal{P}} F' \Delta x -^C \int_a^x F'(t)dt \right| < \epsilon(b - a) + \epsilon.$$

□

Teorema 1.5. *(TFC-2) Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, se define la función F en $[a, b]$ como $F(x) =^C \int_a^x f(t)dt$, entonces:*

1. *F es diferenciable en $[a, b]$.*
2. *$F' = f$ en $[a, b]$.*
3. *F es absolutamente continua en $[a, b]$.*

Demostración. F está bien definida ya que es la integral en el sentido de Cauchy de una función continua. Veamos que F es diferenciable en $[a, b]$ y que su valor coincide con f:

$$\left| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - f(x) \right|, h \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + h \in [a, b]$$

Aplicando que f es continua, es decir para $\delta > 0$ tal que $|x - t| < \delta$ $t \in [a, b]$, entonces $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ llegamos a:

$$\left| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \cdot {}^C \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\, dt \right| < \epsilon.$$

Llegando al resultado buscado.
Para demostrar la continuidad absoluta observamos que F' es continua y por tanto acotada en $[a, b]$:

$$|F(b_k) - F(a_k)| = |F'(c_k)(b_k - a_k)| \leq B\, |b_b - a_k|.$$

□

1.4. Teorema de convergencia

Otra forma de calcular integrales es usando los teoremas de convergencia, veamos como se aplican estos teoremas en la integral de Cauchy.

Teorema 1.6. *Si* $\{f_k\}$ *es una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente hacia* f *en el intervalo* $[a, b]$*, entonces* ${}^C\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} {}^C\int_a^b f_k(x)dx$

Demostración. f es continua por ser el límite uniforme de funciones continuas.
Se tiene que:

$$\left| {}^C\int_a^b f_k(x)dx - {}^C\int_a^b f(x)dx \right| \leq {}^C\int_a^b |f_k(x) - f(x)|\, dx,$$

Por la convergencia uniforme se tiene que el término de la derecha es menor que ϵ para todo $k \geq K$ con K un número natural, por lo que se concluye el resultado. □

Capítulo 2

Integral de Riemann

2.1. Construcción

La integral de Riemann surge al intentar dar respuesta a las cuestiones de Dirichlet sobre la discontinuidad de una función y su conservación de la integrabilidad.
La construcción que dio Riemann es la siguiente:
Dada una función acotada f en el intervalo $[a, b]$, se divide $[a, b]$ en un número finito de subintervalos contiguos $[x_{k-1}, x_k]$ con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$ y se toma un punto t_k en $[x_{k-1}, x_k]$. Se usará la siguiente terminología al igual que para la integral de Cauchy:

- La colección de puntos e intervalos $(t_1, [x_0, x_1]), (t_2, [x_1, x_2]), \ldots, (t_n, [x_{n-1}, x_n])$ se define como **partición etiquetada** de $[a, b]$ y se denota por $\mathcal{P}$.
- Los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se definen como los **puntos de división** de $\mathcal{P}$. También se puede identificar $\mathcal{P}$ como $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
- Los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ se definen como las **etiquetas** de $\mathcal{P}$.

Se define la suma de Riemann de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{\mathcal{P}} f\Delta x = S_R(f, \mathcal{P})$$

El límite de las sumas, existente por ser f acotada, cuando la longitud de los intervalos tiende a cero, es la denominada integral de Riemann de f en $[a, b]$ que denotaremos como ${}^{R}\int_a^b f(x)dx$.
Observamos que a diferencia de la suma de Cauchy dónde se evaluaba la función el en extremo izquierdo de cada subintervalo, en la suma de Riemann se

toma un punto cualquiera en cada subintervalo.

Definición 2.1. *Dada una función acotada f en el intervalo $[a, b]$ se dice que es* ***integrable Riemann en*** $[a, b]$ *o* ***integrable en el sentido de Riemann en*** $[a, b]$ *si existe un número A tal que para cada $\epsilon > 0$ existe una constante positiva δ tal que para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ cuyo diámetro sea de longitud menor que δ se cumple:*

$$\left| \sum_P f\Delta x - A \right| < \epsilon.$$

Se escribe $^R\int_a^b f(x)dx = A$.

Teorema 2.2. *Si f es Riemann integrable en $[a, b]$ el valor de la integral es único.*

Demostración. Dada f Riemann integrable en $[a, b]$ suponemos que hay dos valores A y B que satisfacen la definición 2.1. Fijamos $\epsilon > 0$ y elegimos δ_A y δ_B correspondientes a los valores A y B respectivamente. Sea $\delta = \text{mín}(\delta_A, \delta_B)$ y supongamos que $\mathcal{P}$ es una partición con diámetro menor que δ, tomamos un conjunto de etiquetas $\{t_i\}_{i=1}^n$ para $\mathcal{P}$, entonces aplicando la desigualdad triangular se tiene que:

$$|A - B| \leq \left| A - \sum_P f\Delta t \right| + \left| \sum_P f\Delta t - B \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dado que ϵ es arbitrario se concluye que $A = B$. □

2.2. Integrabilidad

Teorema 2.3. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces f es Riemann integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Al ser $[a, b]$ un intervalo compacto, se tiene que f es acotada y uniformemente continua en $[a, b]$, es decir, existe un número real B tal que $|f(x)| < B$ para todo $x \in [a, b]$. Sea $\Delta x = (b - a)/n$ y sea $\mathcal{P}_n$ la partición definida por los puntos $\{a + k\Delta x\}_{k=1}^{n-1}$. Usaremos la notación $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_R$ para denotar las particiones etiquetadas tomando como etiquetas los extremos izquierdos y derechos de los subintervalos respectivamente. Se tiene que:

$$-B(b - a) \leq \sum_{\mathcal{P}_{n,L}} f\Delta x \leq B(b - a)$$

la serie $\left\{\sum_{\mathcal{P}_{n,L}} f\Delta x\right\}$ debe tener un punto de acumulación A.
Veamos que $^R\int_a^b f(x)dx = A$.
Sea $\epsilon > 0$, usando la continuidad uniforme se toma $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(s)| < \epsilon$ cuando $s, t \in [a, b]$ y $|s - t| < \delta$.
Se toma n tal que $\left|\sum_{\mathcal{P}_{n,L}} -A\right| < \epsilon$ y $||\mathcal{P}_n|| = \frac{b-a}{n} < \delta$. Sea $\mathcal{P} = \{t_k, [x_{k-1}, x_k]\}_{k=1}^n$ una partición etiquetada de $[a, b]$ con $||\mathcal{P}|| < \delta$.
Finalmente se define $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{P} = \{[y_{j-1}, y_j]\}_{j=1}^m$.
Nos fijamos en un único subintervalo de $\mathcal{P}$, $[x_{i-1}, x_i]$. Por ser $\mathcal{Q}$ un refinamiento de $\mathcal{P}$ se tiene que los subintervalos de $\mathcal{Q}$ están contenidos en los de $\mathcal{P}$, es decir, $x_{i-1} = y_{j-1} < \ldots < y_k = x_i$ para ciertos valores de j y k por lo que se tiene que $|f(t_i) - f(y_p)| < \epsilon$ para $j \leq p \leq k$.
Consideramos las sumas de Riemann en estos intervalos:

$$|f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - [f(y_j)(y_j - y_{j-1}) + \ldots + f(y_k)(y_k - y_{k-1})]|$$

$$= |[f(t_i)(y_j - y_{j-1}) + \ldots + f(t_i)(y_k - y_{k-1})]$$

$$-[f(y_j)(y_j - y_{j-1}) + \ldots + f(y_k)(y_k - y_{k-1})]|$$

$$\leq |f(t_i) - f(y_j)|(y_j - y_{j-1}) + \ldots + |f(t_i) - f(y_k)|(y_k - y_{k-1})$$

$$< \epsilon(y_j - y_{j-1}) + \ldots + \epsilon(y_k - y_{k-1})$$

$$= \epsilon(y_k - y_{j-1}) = \epsilon(x_i - x_{i-1})$$

Podemos aplicar el mismo razonamiento a todos los subintervalos de $\mathcal{P}$ y de $\mathcal{Q}$ por lo que se llega a:

$$|\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - \sum_{\mathcal{Q}_R} f\Delta x|$$

$$< \epsilon(x_1 - x_0) + \epsilon(x_2 - x_1) + \ldots + \epsilon(x_n - x_{n-1}) = \epsilon(b - a)$$

Como $\mathcal{Q}$ también es un refinamiento de $\mathcal{P}_n$ razonando de la misma forma se tiene también que:

$$|\sum_{\mathcal{P}_L} f\Delta x - \sum_{\mathcal{Q}_R} f\Delta x| < \epsilon(b - a)$$

Finalmente usando la desigualdad triangulas y las diferentes desigualdades anteriores se llega a:

$$|\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - A| \leq |\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - \sum_{\mathcal{Q}_R} f\Delta x|$$

$$+|\sum_{\mathcal{Q}_R} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}_{n,L}} f\Delta x| + |\sum_{\mathcal{P}_{n,L}} f\Delta x - A$$
$$< 2\epsilon(b-a) + \epsilon$$

Dado que ϵ es arbitrario se concluye que f es integrable y que ${}^R\int_a^b f = A$. $\square$

Teorema 2.4. *Si f es acotada y tiene un número finito de discontinuidades en $[a,b]$ entonces f es integrable Riemann en $[a,b]$.*

Demostración. Supongamos que f es continua en todo $[a,b]$ salvo en $x=a$. Como f es acotada, existe un valor B tal que $|f| < B$ para todo $x \in [a,b]$. Por el teorema precedente la integral $s_n ={}^R \int_{a+\frac{1}{n}}^b f$ está bien definida cuando $n > \frac{1}{b-a}$ ya que f es continua en ese intervalo. Entonces cuando $m > n$:

$$|s_m - s_n| = \left| {}^R\int_{a+\frac{1}{m}}^{a+\frac{1}{n}} f \right| \leq^R \int_{a+\frac{1}{m}}^{a+\frac{1}{n}} |f| \leq^R \int_{a+\frac{1}{m}}^{a+\frac{1}{n}} B = B\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) < \frac{B}{n}$$

por tanto $\{s_n\} = \left\{ {}^R\int_{a+\frac{1}{n}}^b f \right\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $A = \lim_{n\to\infty} s_n$. Sea $\epsilon > 0$ y elegimos n_0 tal que $|s_{n_0} - A| < \epsilon/6$, $\frac{1}{n_0} < \epsilon/3B$, y $n_0 > \frac{1}{b-a}$. Definimos $a_0 = a + \frac{1}{n_0}$. Como f es integrable en $[a_0, b]$ se puede encontrar un δ tal que $|\sum_P f\Delta x - s_{n_0}| < \epsilon/6$ para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}$ de $[a_0, b]$ de diámetro menor que δ.
Sea $\delta' = \text{mín}\left\{\delta, \frac{\epsilon}{6B}\right\}$ y supongamos que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ de diámetro menor que δ'. Si a_0 no es un punto de división de $\mathcal{P}$, se toma una nueva partición etiquetada $\mathcal{P}^*$ añadiendo a_0 como punto de división y usando los extremos izquierdos de los subintervalos como las etiquetas de la nueva partición. Observemos que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}^*$ coinciden salvo en los subintervalos que contienen a a_0. Dado que los valores de f en cualquier par de etiquetas de un intervalo dado puede diferir como máximo $2B$ se tiene que:

$$\left| \sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}^*} f\Delta x \right| \leq 2B\delta < \epsilon/3.$$

Si a_0 es un punto de división de $\mathcal{P}$ entonces se toma $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ y por tanto la diferencia de las sumas de Riemann es cero.
Se divide $\mathcal{P}^*$ en dos particiones etiquetadas $\mathcal{P}_1^*$ y $\mathcal{P}_2^*$ de $[a, a+\frac{1}{n_0}]$ y $[a+\frac{1}{n_0}, b]$ respectivamente. Entonces:

$$\left| \sum_{\mathcal{P}_1^*} f\Delta x \right| \leq \sum_{\mathcal{P}_1^*} B\Delta x = B\frac{1}{n_0} < \epsilon/3$$

y como el diámetro de $\mathcal{P}_2^*$ es menor que δ

$$\left|\sum_{\mathcal{P}_2^*} f\Delta x - A\right| \leq \left|\sum_{\mathcal{P}_2^*} f\Delta x - s_{n_0}\right| + |s_{n_0} - A| < \epsilon/3$$

Por tanto;

$$\left|\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - A\right|$$

$$\leq \left|\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}^*} f\Delta x\right| + \left|\sum_{\mathcal{P}^*} f\Delta x - A\right|$$

$$\leq \left|\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}^*} f\Delta x\right| + \left|\sum_{\mathcal{P}_1^*} f\Delta x\right| + \left|\sum_{\mathcal{P}_2^*} f\Delta x - A\right| < \epsilon$$

Por lo que se concluye que f es integrable en $[a, b]$. Para un número finito de discontinuidades se razona de la misma forma dividiendo la integral en el intervalo inicial en diferentes subintervalos. □

2.3. Teoremas fundamentales del cálculo

Como en el caso de Cauchy nos preguntamos si es posible recuperar una función partiendo de su integral de Riemann y viceversa.

Teorema 2.5. *(TFC-1) Si F es diferenciable en el intervalo $[a, b]$, y F' es continua en $[a, b]$, entonces,*

1. *F' es Riemann integrable en $[a, b]$.*
2. *${}^{R}\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$ para cada x del intervalo $[a, b]$.*

Demostración. El primer apartado se deduce directamente del teorema 2.3. Para la segunda parte tomamos una partición cualquiera del intervalo $[a, x]$, $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$. Aplicando el teorema del valor medio a F en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se pueden seleccionar etiquetas $\{t_i\}_{i=1}^n$ tales que $F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.
Entonces la suma asociada a F' y a la partición $\mathcal{P}$ tiene forma telescópica y se llega a:

$$\sum_{k=1}^n F'(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(x) - F(a).$$

Es decir, para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene que:

$$\left| \sum_{\mathcal{P}} F'\Delta x - F(x) + F(a) \right| = 0 < \epsilon$$

Y por la definición 2.1 de integral de Riemann se concluye que:

$$^R\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$$

□

Sin embargo este resultado no es todo lo fuerte que se desearía ya que falla al recuperar alguna función a partir de su derivada como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Se define $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{x^2}) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Entonces, f es diferenciable en $[0,1]$ con derivada

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{\pi}{x^2}) + \frac{2\pi}{x} \sin(\frac{\pi}{x^2}) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como f' no es acotada en $[0,1]$, f' no es integrable en $[0,1]$.

Teorema 2.6. *(TFC-2) Dada f integrable Riemann en el intervalo $[a,b]$, se define F en $[a,b]$ como $F(x) =^R \int_a^x f$, entonces:*

1. *F es continua en $[a,b]$.*
2. *Si f es continua en $x_0 \in (a,b)$, entonces F es diferenciable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Demostración. Por ser integrable Riemann f es acotada, sea B su cota, dados $x, y \in [a,b]$ tales que $x < y$ se tiene que:

$$|F(y) - F(x)| = \left| ^R\int_x^y f \right| \leq ^R \int_x^y B = B(x-y)$$

Por lo que dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta = (x-y) = B/\epsilon$ para cumplir la definición de continuidad y por tanto se concluye la continuidad de F.
Sea f continua en x_0. Dado cualquier $\epsilon > 0$ se puede encontrar $\delta > 0$ tal que

$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$ para cualquier $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$. Por la monotonía de la integral se tiene que:

$$^R\int_{x_0}^{x} (f(x_0) - \epsilon) \leq ^R\int_{x_0}^{x} f \leq ^R\int_{x_0}^{x} (f(x_0) + \epsilon)$$

por lo que se tiene que:

$$(f(x_0) - \epsilon)(x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq (f(x_0) + \epsilon)(x - x_0)$$

Operando en ambas desigualdades se llega a:

$$-\epsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \leq \epsilon$$

Por lo que se concluye que $F'(x_0) = f(x_0)$. □

2.4. Teorema de convergencia

Nos preguntamos ahora como interactúa la integral de Riemann con los límites.

Teorema 2.7. *Sea una sucesión $\{f_n\}$ de funciones Riemann integrables en $[a, b]$ y que convergen uniformemente en $[a, b]$ hacia f. Entonces f es Riemann integrable en $[a, b]$ y se tiene que:*

$$^R\int_{a}^{b} \lim_{n\to\infty} f_n = ^R\int_{a}^{b} f = \lim_{n\to\infty} {^R\int_{a}^{b}} f$$

Demostración. Por ser f_n Riemann integrable en $[a, b]$, f_n es acotada en $[a, b]$. Por la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ existe un valor B tal que $|f_n(x)| < B$ para todo $x \in [a, b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Llevándolo a la integral se tiene que:

$$-B(b - a) \leq ^R\int_{a}^{b} f_n \leq B(b - a)$$

Por tanto, $\left\{^R\int_a^b f_n\right\}$ es una sucesión acotada que debe tener un punto de acumulación A.
Veremos que f es integrable y $^R\int_a^b f = A$.
Sea $\epsilon > 0$, tomamos n tal que $\left|^R\int_a^b f_n - A\right| < \epsilon/3$ y $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3(b - a)$ para todo $x \in [a, b]$, este n existe por la convergencia uniforme de f_n. Entonces para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P} = \{(t_k, [x_{k-1}, x_k])\}_{k=1}^{m}$,

$$\left|\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}} f_n\Delta x\right| = \left|\sum_{k=1}^{m}(f(t_k) - f_n(t_k))\Delta x\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{\epsilon}{3(b-a)} \Delta x = \epsilon/3$$

Como f_n es integrable en $[a,b]$, se puede encontrar $\delta > 0$ tal que $\left|\sum_{\mathcal{P}} f_n \Delta x - ^R\int_a^b f_n\right| < \epsilon/3$ para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ con diámetro $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Entonces para cualquier partición etiquetada de $[a,b]$

$$\left|\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - A\right| \leq \left|\sum_{\mathcal{P}} f\Delta x - \sum_{\mathcal{P}} f_n \Delta x\right|$$

$$+ \left|\sum_{\mathcal{P}} f_n \Delta x - ^R\int_a^b f_n\right| + \left|^R\int_a^b f_n - A\right| < \epsilon$$

Por lo que se concluye que f es integrable en $[a,b]$ con $^R\int_a^b f = A = \lim_{n\to\infty} {}^R\int_a^b f_n$.

Para terminar la demostración únicamente falta verificar que $\left\{^R\int_a^b f_n\right\}$ converge hacia A. Por la unicidad de la integral la sucesión solamente puede tener un punto de acumulación por lo que debe converger hacia A y se concluye. $\square$

2.5. Integral de Darboux

Dieciséis años después de la publicación del trabajo de Riemann, Darboux da una nueva definición de integral que hace más sencilla la demostración de algunas propiedades y teoremas, aquí sólo veremos su definición y su equivalencia con la integral de Riemann.

Definición 2.8. *Sea f una función acotada definida en $[a,b]$ y sea $\mathcal{P} = \{[x_{k-1}, x_k]\}_{k=1}^n = \{I_k\}$ una partición de $[a,b]$. La **suma inferior de Darboux** y la **suma superior de Darboux** de f sobre $\mathcal{P}$ son respectivamente;*

$$S_{\underline{D}}(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x_i - x_{i-1}) = \sum_{\mathcal{P}} \inf_{I_k} f\Delta x_k$$

y

$$S_{\overline{D}}(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x_i - x_{i-1}) = \sum_{\mathcal{P}} \sup_{I_k} f\Delta x_k$$

*La **integral inferior de Darboux** y la **integral superior de Darboux** de f sobre $[a,b]$ son:*

$$^{\underline{D}}\int_a^b f = \sup_{\mathcal{P}} S_{\underline{D}}(f,\mathcal{P})$$

y

$$^{\overline{D}}\int_a^b f = \inf_{\mathcal{P}} S_{\overline{D}}(f, \mathcal{P})$$

Si $^{\underline{D}}\int_a^b f = ^{\overline{D}}\int_a^b f$ *entonces* f *es* ***Darboux integrable*** *en* $[a, b]$ *y la* ***integral de Darboux*** *de* f *en* $[a, b]$ *es:*

$$^{D}\int_a^b f = ^{\underline{D}}\int_a^b f = ^{\overline{D}}\int_a^b f$$

Teorema 2.9. *Sea* f *una función en* $[a, b]$*. Entonces* f *es Riemann integrable si y sólo si* f *es Darboux integrable. Además* $^{R}\int_a^b f = ^{D}\int_a^b f$*. Es decir, la integral de Riemann y de Darboux son equivalentes.*

Demostración. Primero supongamos que f es Riemann integrable. Para demostrar que f es Darboux integrable necesitamos controlar las sumas superiores e inferiores de Darboux usando particiones etiquetadas.
Tomamos $\epsilon > 0$ y elegimos $\delta > 0$ tal que $\left| ^{R}\int_a^b f - \sum_{\mathcal{P}} f \Delta x \right| < \epsilon$ para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ con diámetro menor que δ. Se fija una partición concreta $\mathcal{P}_0 = \{I_k\}$ con diámetro menor que δ y se seleccionan etiquetas $\{s_k\}$ y $\{t_k\}$ tales que:

$$f(s_k) - \epsilon < \inf_{I_k} f \leq \sup_{I_k} f < f(t_k) + \epsilon.$$

Denotamos por $\mathcal{P}_s$ y $\mathcal{P}_t$ a las correspondientes particiones etiquetadas, entonces,

$$\begin{aligned} S_{\overline{D}}(f, \mathcal{P}_0) - S_{\underline{D}}(f, \mathcal{P}_0) &= \sum_{\mathcal{P}} \sup_{I_k} f \Delta x_k - \sum_{\mathcal{P}} \inf_{I_k} f \Delta x_k \\ &< \sum_{\mathcal{P}} (f(t_k) + \epsilon) \Delta x_k - \sum_{\mathcal{P}} (f(s_k) - \epsilon) \Delta x_k \\ &= S_R(f, \mathcal{P}_t) - S_R(f, \mathcal{P}_s) + 2\epsilon(b - a). \end{aligned}$$

Ahora $S_R(f, \mathcal{P}_t)$ y $S_R(f, \mathcal{P}_s)$ están ambas a una distancia ϵ de $^{R}\int_a^b f$ por lo que están a una distancia 2ϵ la una de la otra. Por tanto,

$$S_{\overline{D}}(f, \mathcal{P}_0) - S_{\underline{D}}(f, \mathcal{P}_0) < 2\epsilon + 2\epsilon(b - a).$$

Por tanto las sumas superiores e inferiores de Darboux están a una distancia menor que un valor dependiente de ϵ por lo que se concluye que f es Darboux integrable.
Supongamos ahora que f es Darboux integrable, tomamos $\epsilon > 0$. Como f es

Darboux integrable, f está acotada por algún valor B y se puede encontrar una partición $\mathcal{P}_0$ tal que $S_{\overline{D}}(f,\mathcal{P}_0) - S_{\underline{D}}(f,\mathcal{P}_0) < \epsilon/2$. Denotamos por N el número de puntos de división de $\mathcal{P}_0$. Supongamos que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada cualquiera de $[a,b]$ con diámetro menor que δ, determinaremos δ más adelante, y sea $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}$, se tiene que:

$$S_{\overline{D}}(f,\mathcal{Q}) - S_{\underline{D}}(f,\mathcal{Q}) \leq S_{\overline{D}}(f,\mathcal{P}_0) - S_{\underline{D}}(f,\mathcal{P}_0) < \epsilon/2$$

y por tanto,

$$S_{\underline{D}}(f,\mathcal{Q}) \leq^D \int_a^b f \leq S_{\overline{D}}(f,\mathcal{Q}),$$

y se concluye también que $\left|{}^D\int_a^b f - S_{\underline{D}}(f,\mathcal{Q})\right| < \epsilon/2$. Utilizando esto tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 \leq^D \int_a^b f - S_{\underline{D}}(f,\mathcal{P}) \\ \leq \left|{}^D\int_a^b f - S_{\underline{D}}(f,\mathcal{Q})\right| + |S_{\underline{D}}(f,\mathcal{Q}) - S_{\underline{D}}(f,\mathcal{P})| \\ < \epsilon/2 + 2BN\,\|\mathcal{P}\|\,. \end{aligned}$$

Tomando $\|\mathcal{P}\| < \delta = \frac{\epsilon}{4BN}$, la última expresión es menor que ϵ y se concluye que:

$${}^D\int_a^b f - \epsilon < S_{\underline{D}}(f,\mathcal{P}).$$

Razonando de forma similar se llega a que:

$$S_{\overline{D}}(f,\mathcal{P}) <^D \int_a^b f + \epsilon.$$

Por tanto:

$${}^D\int_a^b f - \epsilon < S_{\underline{D}}(f,\mathcal{P}) \leq S_R(f,\mathcal{P}) \leq S_{\overline{D}}(f,\mathcal{P}) <^D \int_a^b f + \epsilon$$

lo que implica que:

$$\left|S_R(f,\mathcal{P}) -^D \int_a^b f\right| < \epsilon.$$

Por tanto f es integrable Riemann con ${}^R\int_a^b f =^D \int_a^b f$ □

Veamos ahora una condición suficiente y necesaria para que una función sea integrable Riemann. Para ello necesitamos un lema que enunciaremos sin demostración y tres elementos que definimos a continuación:

Definición 2.10. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea S un subconjunto no vacío de $[a, b]$. La* ***oscilación de f en*** *S se define como:*

$$w(f, S) = \sup \{f(t) : t \in S\} - \inf \{f(t) : t \in S\}$$

Sea $x \in [a, b]$ y para $\delta > 0$, sea $U_\delta(x) = \{t \in [a, b] : |t - x| < \delta\}$. La ***oscilación de f en*** *x se define como*

$$w(f, x) = \lim_{\delta \to 0^+} w(f, U_\delta)$$

Definición 2.11. *Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, sea S un subconjunto del mismo intervalo y sea $J(S, \mathcal{P})$ la suma de las longitudes de los intervalos cerrados $[x_{i-1}, x_i]$ que contienen puntos de la adherencia de S. El* ***contenido exterior de Jordan*** *de S, denotado como $\overline{c}(S)$, es definido como el ínfimo de $J(S, \mathcal{P})$ para cierta partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$. La función $\overline{c}$ así definida es monótona y subaditiva.*

Definición 2.12. *Para cierto $\epsilon > 0$, se define el conjunto $\mathbf{D}_\epsilon(\mathbf{f})$ como sigue, $D_\epsilon(f) = \{x \in [a, b] : w(f, x) \geq \epsilon\}$*

Lema 2.13. *Supongamos que $w(f, x) < \epsilon$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces, existe una partición $\mathcal{P} = x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a, b]$ tal que $w(f, [x_{i-1}, x_i]) < \epsilon$ para $i = 1, \ldots, n$*

Teorema 2.14. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces, f es Riemann integrable en $[a, b]$ si y sólo si, f es acotada y para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $D_\epsilon(f)$ tiene contenido exterior de Jordan cero.*

Demostración. Supongamos primero que f es acotada y que para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $D_\epsilon(f)$ tiene contenido exterior de Jordan cero. Elegimos $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para $a \leq t \leq b$. Sea $\epsilon > 0$ y sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$ tal que la suma de las longitudes de los subintervalos determinados por $\mathcal{P}$ que contienen puntos de $D_{\epsilon/2(b-a)}$ es menor que $\frac{\epsilon}{4M}$. Etiquetamos estos subintervalos como $\{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$ y el resto de subintervalos de $\mathcal{P}$ como $\{J_1, J_2, \ldots, J_l\}$. Aplicando el lema previo a cada J_j se tiene que $w(f, J_j) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ para $j = 1, \ldots, l$. Entonces se tiene:

$$S_{\overline{D}}(f, \mathcal{P}) - S_{\underline{D}}(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^{k} w(f, I_i) l(I_i) + \sum_{j=1}^{l} w(f, J_j) l(J_j)$$

$$< 2M \frac{\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b - a) = \epsilon$$

por lo que f es integrable Darboux y por tanto también integrable Riemann. Para la segunda parte utilizaremos el contrarrecíproco, supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que $\overline{c}(D_\epsilon(f)) = c > 0$. Veremos que f no es Darboux integrable y por tanto tampoco Riemann integrable.
Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea I el conjunto de todos los índices i tales que la intersección de $[x_{i-1}, x_i]$ y $D_\epsilon(f)$ es no vacía. Sea $I' \subset I$ el conjunto índices i tales que $(x_{i-1}, x_i) \cap D_\epsilon(f) \neq \emptyset$. Se tiene que para $i \in I', w(f, [x_{i-1}, x_i]) \geq \epsilon$. Sea $\eta > 0$. Supongamos que $i \in I \setminus I'$. Entonces, al menos uno de los extremos de $[x_{i-1}, x_i]$ está en $D_\epsilon(f)$. Se hace un refinamiento de $\mathcal{P}$ añadiendo $y_i, y_i' \in (x_{i-1}, x_i)$ tales que $y_i < y_i', |y_i - x_{i-1}| < \frac{\eta}{2n}$ y $|y_i' - x_i| < \frac{\eta}{2n}$. Para $i \in I \setminus I'$, se etiquetan los intervalos $[x_{i-1}, y_i]$ y $[y_i', x_i]$ por $J_1, \ldots, J_m$ donde $m \leq 2n$. Nótese que $[y_i, y_i'] \cap D_\epsilon(f) = \emptyset$ así que

$$\begin{aligned} c &\leq \sum_{i \in I'} (x_i - x_{i-1}) + \sum_{k=1}^{m} l(J_k) \\ &\leq \sum_{i \in I'} (x_i - x_{i-1}) + 2n\frac{\eta}{2n} = \sum_{i \in I'} (x_i - x_{i-1}) + \eta. \end{aligned}$$

Dado que $\eta > 0$ es arbitrario, se tiene que

$$c \leq \sum_{i \in I'} (x_i - x_{i-1}).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S_{\overline{D}}(f, \mathcal{P}) - S_{\underline{D}}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} w(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \\ &\geq \sum_{i \in I'} w(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \geq \epsilon c. \end{aligned}$$

Como esto es cierto para cualquier partición se concluye que f no es Darboux integrable y por tanto tampoco es Riemann integrable. □

Por tanto hemos visto que la integral de Riemann funciona bien para funciones continuas y funciones que son continuas salvo es un conjunto, que es de alguna forma, pequeño. Sin embargo si una función tiene muchas discontinuidades la integral de Riemann no existe como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Se define la *función de Dirichlet* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[0, 1]$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ hay un número racional r_i y uno irracional q_i, por tanto tomando las particiones etiquetadas $\mathcal{P}_r$, donde las etiquetas son números racionales y $\mathcal{P}_q$ donde las etiquetas son números irracionales se tiene que

$$S_R(f, \mathcal{P}_r) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = 1$$

mientras que

$$S_R(f, \mathcal{P}_q) = \sum_{i=1}^{n} f(q_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.$$

Por tanto, independientemente de lo fina que sea una partición siempre se puede tomar un conjunto de etiquetas tal que la suma de Riemann asociada es cero y otro conjunto de etiquetas tal que la suma de Riemann asociada es uno. Ahora, supongamos que f es integrable Riemann con integral igual a A. Tomamos $\epsilon < 1/2$ y se toma el correspondiente δ. Si $\mathcal{P}_r$ y $\mathcal{P}_q$ son las partición con diámetro menor que δ y etiquetas racionales e irracionales respectivamente, entonces

$$1 = |S_R(f, \mathcal{P}_q) - S_R(f, \mathcal{P}_r)|$$

$$\leq |S_R(f, \mathcal{P}_q) - A| + |A - S_R(f, \mathcal{P}_r)| < \epsilon + \epsilon < 1.$$

Lo que es una contradicción y se concluye que f no es integrable Riemann.

Capítulo 3

Integral de Lebesgue

Motivado por dar solución al problema de una función que teniendo derivada acotada no es integrable Riemann, Henri Lebesgue desarrolló un nuevo método de integración diferente en su construcción a las integrales vista previamente ya que en vez de tomar una partición del eje de abscisas, del dominio de la función f que se desea integrar, lo toma del eje de ordenadas, del rango de f.
Para dar esta construcción se hace necesaria la asignación de una medida a diferentes tipos de conjuntos, se necesita la teoría de la medida.
Esta teoría ha sido vista en las asignaturas de Análisis matemático de segundo curso y Teoría de la probabilidad y estadística matemática de tercer curso por ello y por no ser el tema principal del trabajo los resultados necesarios serán enunciados sin demostración.

3.1. Teoría de la medida

Definición 3.1. *Se define la* ***medida exterior de un conjunto*** $A \subset \mathbb{R}$*, denotada por* $\mu^*(A)$*, como*

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_k l(I_k),\ \textit{cuando}\ \{I_k\}_{k=1}^{\infty}\ \textit{es una familia numerable}\right.$$
$$\left.\textit{de semiintervalos tales que}\ A \subset \cup_{k=1}^{\infty}\{I_k\}\right\}$$

donde $l(I)$ *es la longitud del intervalo* I*.*

Proposición 3.2. *Propiedades de la medida exterior.*

1. *Si* $A \subset B$*,* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*.*

2. *Si* I *es un semiintervalo,* $\mu^*(I) = l(I)$.

3. $\mu^*(\emptyset) = 0$ *y* $\mu^*(\mathbb{R}) = \infty$.

4. *(Subaditividad numerable) Si* $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$*, entonces* $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Definición 3.3. *(Criterio de medibilidad de Carathéodory) Un conjunto* $E \subseteq \mathbb{R}$ *se dice que es* ***medible*** *si*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 3.4. *Un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *tal que* $\mu^*(A) = 0$ *se llama* ***conjunto de medida nula****.*

Proposición 3.5. *Para cualquier conjunto* E *medible de números reales siempre existe un abierto* G *tal que* $E \subset G$ *y* $\mu^*(G - E) \leq \epsilon$.

Definición 3.6. *Sea* X *un conjunto no vacío y* $\mathcal{A}$ *una colección de subconjuntos de* X.
Llamamos $\sigma -$ **álgebra** *a* $\mathcal{A}$ *si se cumple*

1. *Si* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$

2. *Si* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $\cap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$

3. *Si* $E \in \mathcal{A}$, $E^c = \mathbb{R} \setminus E \in \mathcal{A}$

4. $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$

Proposición 3.7. *La familia de conjuntos medibles,* $\mathcal{M}$*, es una* σ*-álgebra.*

Definición 3.8. *La* σ*-álgebra generada por la colección de conjuntos abiertos recibe el nombre de* σ***-álgebra de Borel****.*

Definición 3.9. *Sea* $\mathcal{M}$ *la colección de todos los conjuntos medibles, se define la* ***medida de Lebesgue*** *como* $\mu^* |_{\mathcal{M}} = \mu$

Proposición 3.10. *Dada una colección* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos, se tiene que*

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Proposición 3.11. *Dada una colección* $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ *de conjuntos medibles, se define* $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$*, entonces*

$$\mu(E) = \lim_{k \to \infty} \mu(E_k)$$

Proposición 3.12. *Dada una colección* $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ *de conjuntos medibles y de medida finita cada uno de ellos se define* $E = \cap_{k=1}^{\infty} E_k$*, entonces*

$$\mu(E) = \lim_{k \to \infty} \mu(E_k)$$

Definición 3.13. *Se dice que una propiedad se verifica* ***casi siempre*** *en un conjunto y se denota por* ***c.s.*** *si el conjunto de puntos donde no se verifica es de medida nula.*

Como comentábamos al principio de este capítulo la integral de Lebesgue a diferencia de las dos integrales vistas previamente toma inicialmente un intervalo del rango de la función por lo que se necesita que el conjunto $f^{-1}[\alpha, \beta]$ sea medible, esto será equivalente a que la función sea medible por lo que pasamos ahora a estudiar brevemente las funciones medibles y algunas de sus características.

Definición 3.14. *Llamamos* $\mathbb{R}$***-completada*** *a* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$*, donde* $-\infty, \infty$ *son dos puntos que no están en* $\mathbb{R}$*.*
Una base de abierto de $\bar{\mathbb{R}}$ *está formada por los conjuntos:*
$(x - \delta, x + \delta)$ *para* $x \in \mathbb{R}$*, con* $\delta > 0$*.*
$(a, \infty]$ *para* ∞*, con* $a \in \mathbb{R}$*.*
$[-\infty, a)$ *para* $-\infty$*, con* $a \in \mathbb{R}$*.*

Definición 3.15. *Una función* f *a valores en* $\bar{\mathbb{R}}$ *definida en un conjunto medible* E *se dice que es* ***medible*** *si la imagen inversa por* f *de cualquier conjunto abierto de* $\bar{\mathbb{R}}$ *es un conjunto medible.*

Proposición 3.16. *Sea* E *un conjunto medible, veamos algunas propiedades de las funciones medibles:*

1. *Si* $f : E \to \mathbb{R}$ *es una función continua,* f *es medible*
2. *Si* $\mu(E) = 0$*, cualquier función* $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ *es medible.*
3. *Si* $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$*,* E_k *medible, y* $f : E \to \mathbb{R}$ *es tal que* $f|_{E_k}$ *es medible, entonces* f *es medible.*

Teorema 3.17. *Sea* f_k *una sucesión de funciones medibles a valores en* $\bar{\mathbb{R}}$ *que convergen puntualmente a* $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$*, entonces* f *es medible. El resultado sigue siendo cierto si la convergencia se da casi siempre.*

Definición 3.18. *Sea $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$, se definen las* ***parte positiva*** *y* ***parte negativa*** *de f como*

$$f^+ = \sup\{f, 0\}, \quad f^- = -\inf\{f, 0\} = \sup\{-f, 0\}$$

Se verifica que si f es medible, f^+, f^- son medibles.
Además se tiene que

$$f = f^+ - f^- \quad |f| = f^+ + f^-$$

$$f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|) \quad f^- = \frac{1}{2}(f - |f|).$$

Con estos resultados ya estamos en posición de construir la integral de Lebesgue.

3.2. Construcción de la integral de Lebesgue

Definición 3.19. *Si $E \subset \mathbb{R}$, se define la* ***función característica*** *como*

$$\chi_E : \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Proposición 3.20. *La función χ_E es medible si y sólo si E es medible.*

Definición 3.21. *Una* ***función simple*** *$s : E \to \mathbb{R}$ es una función medible que toma sólo un número finito de valores. $s(E)$ es un conjunto finito.*

Proposición 3.22. *Una función s es simple si y sólo si se puede escribir de la forma $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j}$, donde $\alpha_j \in \bar{\mathbb{R}}$, E_j conjuntos medibles de $\mathbb{R}$*

Teorema 3.23. *Sea E un conjunto medible, $f : E \to [0, \infty]$ una función medible. Existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples tales que*

1. *$\forall x \in E$, $0 \leq s_1(x) \leq \ldots \leq s_n(x)$, $s_n(x) \leq f(x)$.*
2. *$\forall x \in E$, $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)$. Si f es acotada, la convergencia es uniforme.*

Definición 3.24. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, $s : E \to [0, \infty)$ una función simple. Sea $s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j}$ una representación de s. Se define la* ***integral de Lebesgue*** *de s como ${}^{L}\int_E s d\mu = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(E_j)$.*

Definición 3.25. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, $f : E \to [0, \infty)$ una función medible. Se define la* ***integral de Lebesgue*** *de f como*
${}^{L}\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E s d\mu : s : E \to [0, \infty]\right.$ recorre las funciones simples tales que $0 \leq s \leq f\}$

Proposición 3.26. *Veamos algunas propiedades de la integral de Lebesgue para este tipo de funciones*
Sean $f, g : E \to [0, \infty]$

1. *Si* $f \leq g$, *entonces* ${}^L\int_E f d\mu \leq^L \int_E g d\mu$

2. *Si* F *es un conjunto medible tal que* $F \subset E$, ${}^L\int_F f d\mu = {}^L\int_E f\chi_F d\mu$

3. *Si* $\mu(E) = 0$, ${}^L\int_E f d\mu = 0$

4. *Si* $c > 0$, ${}^L\int_E cf d\mu = c\ {}^L\int_E f d\mu$

3.3. Teoremas de convergencia

Teorema 3.27. *(Teorema de la convergencia monótona)*
Sea E *un conjunto medible y sea* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión creciente de funciones medibles,* $f_k : E \to [0, \infty)$. *Sea* $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. *Entonces,*

$$ {}^L\int_E f d\mu = \lim_{k\to\infty} {}^L\int_E f_k d\mu $$

Para la demostración de este teorema utilizaremos lo siguiente:

Corolario 3.28. *Si* φ *es una función simple y no negativa en* $\mathbb{R}$, *entonces,* $\Phi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *definida como* $\Phi(E) = {}^L\int_E \varphi$ *es una medida en* $\mathcal{M}$.

Ahora ya estamos en posición de demostrar el teorema.

Demostración. Primero remarquemos que f es positiva y medible por ser el límite de funciones medibles. Por la monotonía de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ se tiene que $\left\{{}^L\int_E f_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ también es monótona y además $\lim_{k\to\infty} {}^L\int_E f_k \leq^L \int_E f$.
Para probar la otra desigualdad, se fija $0 < a < 1$ y sea φ una función simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Sea $E_k = \{x \in E : f_k(x) \geq a\varphi(x)\}$. Dado que $f_k(x)$ crece hacia $f(x)$ punto a punto, se tiene que $E_k \subset E_{k+1}$ para todo k y $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$.
Por tanto,

$$ {}^L\int_E f_k \geq^L \int_{E_k} f_k \geq a\ {}^L\int_{E_k} \varphi $$

Como vimos antes, $\Phi(E) =^L \int_E \varphi$ define una medida, así que por las propiedades de la medida, proposición 3.10

$$ a\ {}^L\int_E \varphi = a \lim_{k\to\infty} {}^L\int_{E_k} \varphi \leq \lim_{k\to\infty} {}^L\int_E f_k. $$

Haciendo $a \to 1$, vemos que $\lim_k {}^L\int_E f_k \geq^L \int_E \varphi$. Dado que es válido para todas las funciones simples $\varphi \leq f$, se llega a que

$$\lim_{k\to\infty} {}^L\int_E f_k \geq^L \int_E f$$

□

Lema 3.29. *(Lema de Fatou)*
Sea $E \in \mathcal{M}$ y $f_k : E \to [0,\infty]$ medible para todo k. Entonces,

$${}^L\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} {}^L\int_E f_k$$

Demostración. Sea $h_k(x) = \inf_{j\geq k} f_j(x)$, se tiene que h_k es positiva y medible, además $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ crece hacia $\liminf_{k\to\infty} f_k$. Por el teorema de la convergencia monótona,

$${}^L\int_E \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} {}^L\int_E h_k.$$

Como $h_k \leq f_k$ para todo $x \in E$,

$$\lim_{k\to\infty} {}^L\int_E h_k \leq \liminf_{k\to\infty} {}^L\int_E f_k.$$

□

Hasta ahora sólo hemos tratado con funciones medibles positivas, veamos cómo tratar las funciones medibles reales.

Definición 3.30. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible. f es integrable si ${}^L\int_E f^+ < \infty$ y ${}^L\int_E f^- < \infty$. En este caso se define la **integral de Lebesgue** de f como*

$${}^L\int f = {}^L\int_E f^+ - {}^L\int_E f^- \in \mathbb{R}$$

Teorema 3.31. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible, f es integrable si y sólo si $|f|$ es integrable.*

Demostración. Si f es integrable se tiene que f^+ y f^- son integrables y como $|f| = f^+ + f^-$, $|f|$ también es integrable.
Si $|f|$ es integrable se tiene que ${}^L\int_E |f| =^L \int_E f^+ +^L \int_E f^- < \infty$ por lo que se tiene que ${}^L\int_E f^+ < \infty$ y ${}^L\int_E f^- < \infty$ y se concluye que f es integrable. □

Teorema 3.32. *(Teorema de la convergencia dominada) Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto medible E, tales que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente hacia f casi siempre. Si existe una función integrable Lebesgue g tal que $|f_k(x)| \leq g(x)$ para todo k y casi todo $x \in E$. Entonces,*

1. *f es integrable Lebesgue.*

2. $\lim_{k\to\infty} {}^L\int_E |f - f_k| = 0$.

3. ${}^L\int_E f = \lim_{k\to\infty} {}^L\int_E f_k$.

Para esta demostración se usará el corolario siguiente que se enunciará sin demostración, su demostración se puede encontrar en [4].

Corolario 3.33. *Sea $E \in \mathcal{M}$ y $f_k, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles cumpliendo $f_k \leq g$ para todo k. Si g es integrable Lebesgue en E, entonces,*

$$ {}^L\int_E \limsup_{k\to\infty} f_k \geq \limsup_{k\to\infty} {}^L\int_E f_k $$

Demostración. Por hipótesis se tiene que $-g \leq f_k \leq g$ c.s., así que se puede aplicar el corolario enunciado previamente y el lema de Fatou. Dado que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia f puntualmente casi siempre,

$$ \limsup_{k\to\infty} {}^L\int_E f_k \leq {}^L\int_E \limsup_{k\to\infty} f_k = {}^L\int_E f = {}^L\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} {}^L\int_E f_k $$

Por tanto, ${}^L\int_E f = \lim {}^L\int_E f_k$.
Para terminar la prueba, nótese que $|f - f_k|$ converge a 0 puntualmente c.s. y $|f(x) - f_k(x)| \leq g(x)$ para todo k y casi todo x. Por tanto, por la primera parte del teorema, $\lim {}^L\int_E |f(x) - f_k(x)| = 0$ y se concluye. □

3.4. Integrabilidad

Veamos que la integrabilidad en el sentido de Riemann implica la integrabilidad en el sentido de Lebesgue gracias a la función de Dirichlet ya vimos que el recíproco no es cierto.

Teorema 3.34. *Si f es integrable Riemann en $[a, b]$, entonces f es también integrable Lebesgue en $[a, b]$ y se cumple ${}^L\int_a^b f = {}^R\int_a^b f$.*

Demostración. Ya vimos que ser Riemann integrable era equivalente a ser Darboux integrable, teorema 2.9, usaremos la integral inferior y superior de Darboux, definición 2.8, en esta demostración.
Sea $\{\mathcal{Q}_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones del intervalo $[a, b]$ tal que:

1. $\lim_{k\to\infty} \mu(\mathcal{Q}_k) = 0$;

2. $\lim_{k\to\infty} S_{\underline{D}}(f, \mathcal{Q}_k) = {}^{\underline{D}}\int_a^b f$;

3. $\lim_{k\to\infty} S_{\overline{D}}(f, \mathcal{Q}_k) =^{\overline{D}} \int_a^b f$.

Se definen $\mathcal{P}_k = \cup_{j=1}^{k} \mathcal{Q}_j$, entonces $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de particiones encajadas, es decir, $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}_{k+1}$, que satisfacen las condiciones 1,2 y 3.
Se fija k y se supone que $\mathcal{P}_k = x_0, x_1, \ldots, x_j$. Sea $m_i = \inf\{f(t) : x_{i-1} \leq t \leq x_i\}$ y $M_i = \sup\{f(t) : x_{i-1} \leq t \leq x_i\}$, y se definen las funciones simples l_k y u_k como

$$l_k(x) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)}(x) + m_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]}(x)$$

y

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)}(x) + M_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]}(x),$$

donde $\chi_{(A)}(x)$ es la función indicatriz del conjunto A.
Se tiene que ${}^{L}\int_{[a,b]} l_k = S_{\underline{D}}(f, \mathcal{P}_k)$ y ${}^{L}\int_{[a,b]} u_k = S_{\overline{D}}(f, \mathcal{P}_k)$. Dado que las particiones están encajadas, se tiene que $l_k \leq f \leq u_k$ y la sucesión $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ crece y $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ decrece. Se definen l y u como $l(x) = \lim_{k\to\infty} l_k(x)$ y $u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x)$. Por el teorema de la convergencia monótona,

$${}^{L}\int_a^b l = \lim_{k\to\infty} {}^{L}\int_a^b l_k = \lim_{k\to\infty} S_{\underline{D}}(f, \mathcal{P}_k) =^{\underline{D}} \int_a^b f$$

y

$${}^{L}\int_a^b u = \lim_{k\to\infty} {}^{L}\int_a^b u_k = \lim_{k\to\infty} S_{\overline{D}}(f, \mathcal{P}_k) =^{\overline{D}} \int_a^b f$$

Como f es Riemann integrable, se tiene que, ${}^{\underline{D}}\int_a^b f =^{\overline{D}} \int_a^b f$, así que

$${}^{L}\int_a^b l =^{L} \int_a^b u$$

Por tanto, como $l \leq f \leq u$, $l = f = u$ c.s. en $[a, b]$, f es integrable Lebesgue en $[a, b]$ y

$${}^{L}\int_a^b f =^{R} \int_a^b f$$

$\square$

3.5. Teoremas fundamentales del cálculo

Teorema 3.35. *(TFC-1) Si F es una función diferenciable con derivada acotada en $[a, b]$, entonces F' es integrable Lebesgue en $[a, b]$ y*

$${}^{L}\int_a^x F' = F(x) - F(a)$$

para todo $x \in [a,b]$.

Demostración. Primero nótese que F es medible por ser continua. Se extiende F a $[a, b+1]$ mediante $F(x) = F(b) + F'(b)(x-b)$ para $x \in [b, b+1]$. Se define f_n de la siguiente manera,

$$f_n(x) = n\left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right], x \in [a,b]$$

estas funciones son medibles con $\{f_n\}$ convergiendo punto a punto hacia F' en $[a,b]$. Entonces F' es medible y acotada por hipótesis por lo que es integrable Lebesgue.
Por el teorema del valor medio, dado $t \in [a,b]$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un valor $c \in \left(t, t+\frac{1}{n}\right)$ tal que

$$n\left[F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right] = F'(c).$$

Como F' es acotada, se tiene que $\{f_n\}$ es uniformemente acotada. Por tanto usando el teorema de la convergencia acotada, la continuidad de F y el teorema fundamental del cálculo para la integral de Riemann, teorema 2.6, se concluye que,

$$\begin{aligned}
{}^L\int_a^x F' &= {}^L\int_a^x \lim_n n\left[F\left(t+\frac{1}{n}\right) - F(t)\right] dt \\
&= \lim_n n \cdot {}^L\int_a^x \left[F\left(t+\frac{1}{n}\right) - F(t)\right] dt \\
&= \lim_n n \cdot \left[{}^L\int_a^x F\left(t+\frac{1}{n}\right) dt - {}^L\int_a^x F(t)dt\right] \\
&= \lim_n n \cdot \left[{}^L\int_{a+\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} F(t)dt - {}^L\int_a^x F(t)dt\right] \\
&= \lim_n \left[n \cdot {}^L\int_x^{x+\frac{1}{n}} F - n{}^L\int_a^{a+\frac{1}{n}} F\right] \\
&= \lim_n n \cdot {}^R\int_x^{x+\frac{1}{n}} F - \lim_n n{}^R\int_a^{a+\frac{1}{n}} F \\
&= F(x) - F(a).
\end{aligned}$$

□

Observemos que a diferencia del primer teorema fundamental del cálculo para la integral de Riemann donde se pedía la continuidad de la derivada, en la versión para la integral de Lebesgue se pide la acotación de la derivada, una condición menos fuerte. Veamos con el siguiente ejemplo como una función que no era integrable Riemann pero sí es integrable Lebesgue.

Ejemplo: Recordemos que la función de Dirichlet, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ya vimos que esta función no era integrable Riemann, ejemplo de la página 23 pero sí es integrable Lebesgue ya que coincide casi siempre con una función constante que es integrable Lebesgue.

Sin embargo sigue habiendo funciones derivables cuya derivada no es integrable Lebesgue por lo que no se puede aplicar la fórmula del TFC-1. Veamos un ejemplo.

Ejemplo Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \cos(\pi/x^2)$ si $x > 0$ y $f(0) = 0$ si $x = 0$. Entonces f es derivable en $[0,1]$ con:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\cos(\frac{\pi}{x^2}) + \frac{2\pi}{x}\sin(\frac{\pi}{x^2}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Veamos que $|f'|$ no es integrable Lebesgue en $[0,1]$ lo que implicará que f tampoco lo es. Tomemos

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}} \text{ y } \beta_k = \sqrt{\frac{1}{2k}}.$$

Se tiene que ${}^L\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f' = 1/2k$. Como los segmentos $[\alpha_k, \beta_k]$ son disjuntos se tiene que

$$^L\int_0^1 |f'| \geq \sum_{k=1}^{\infty} {}^L\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f'| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty$$

Por lo que $|f'|$ no es integrable y por tanto f tampoco.

Para la demostración de la segunda versión del teorema fundamental del cálculo necesitaremos la noción de continuidad absoluta y una serie de lemas que enunciaremos a continuación sin demostración, las demostraciones se pueden encontrar en el libro [3].

Lema 3.36. *Sea f integrable en $[a,b]$. Entonces, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que ${}^{L}\int_E |f| < \epsilon$ para cualquier subconjunto E de $[a,b]$ tal que $\mu(E) < \delta$.*

Lema 3.37. *Sea f integrable Lebesgue en $[a,b]$. Si $F(x) = {}^{L}\int_a^x f = 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $f = 0$ c.s. en $[a,b]$.*

Lema 3.38. *Si f es creciente en $[a,b]$ entonces f es diferenciable c.s. en $[a,b]$.*

Teorema 3.39. *(TFC-2) Sea f una función integrable Lebesgue en $[a,b]$, se define $F(x) = {}^{L}\int_a^x f$ en $[a,b]$. Entonces F es absolutamente continua en $[a,b]$ y $F' = f$ c.s. en $[a,b]$.*

Demostración. Veamos primero que F es absolutamente continua. Se toma $\epsilon > 0$. Como f es integrable Lebesgue por el lema 3.37 se tiene que existe un $\delta > 0$ tal que ${}^{L}\int_A |f| < \epsilon$ cuando A es un conjunto medible tal que $\mu(A) < \delta$. Sea $\{(x_k, y_k)\}$ una colección finita de subintervalos disjuntos de $[a,b]$ tales que $\sum_k |x_k - y_k| < \delta$. Tomando $A = \cup_k (x_k, y_k)$ se tiene que $\mu(A) = \sum_k |x_k - y_k| < \delta$ así que

$$\sum_k |F(x_k) - F(y_k)| = \sum_k \left| {}^{L}\int_{x_k}^{y_k} f \right|$$
$$\leq \sum_k {}^{L}\int_{x_k}^{y_k} |f| = {}^{L}\int_A |f| < \epsilon$$

Por tanto F es absolutamente continua y consecuentemente diferenciable casi siempre.
Primero probaremos que $F' = f$ c.s. bajo la condición adicional de que $|f| < B$. Se extiende F a $[a, b+1]$ mediante $F(x) = F(b)$ para $x \in [b, b+1]$. Entonces $\lim_{n\to} n\left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right] = F'(x)$ para los $x \in (a,b)$ donde F es diferenciable. Se tiene entonces que,

$$\left| n\left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right]\right| = n \left| {}^{L}\int_x^{x+\frac{1}{n}} f \right| \leq n \cdot {}^{L}\int_x^{x+\frac{1}{n}} |f| \leq B,$$

procediendo de la misma forma que en la demostración del teorema 3.35 usando el teorema de la convergencia acotada se concluye que

$${}^{L}\int_a^x F' = {}^{L}\int_a^x \lim_n n\left[F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right]$$
$$= F(x) - F(a) = F(x)$$

Esto implica que

$$^{L}\int_a^x (F' - f) = \left(^{L}\int_a^x F' \right) - F(x) = 0$$

para todo $x \in [a, b]$. Por tanto por el lema 3.38, $F' = f$ c.s en $[a, b]$.
Si f no es acotada, no se cumple la suposición hecha en la parte precedente, supongamos primero que $f \geq 0$. Razonamos de igual forma que en la parte precedente pero usando en esta ocasión el lema de Fatou, lema 3.29, en lugar del teorema de la convergencia acotada para concluir que, para los $x \in (a, b)$ para los que F es diferenciable,

$$\begin{aligned} ^{L}\int_a^x F' &= {}^{L}\int_a^x \lim_n n \left[F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t) \right] \\ &\leq \liminf_n {}^{L}\int_a^x n \left[F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t) \right] \\ &= F(x) - F(a) = F(x). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$^{L}\int_a^x (F' - f) = \left(^{L}\int_a^x F' \right) - F(x) \leq 0.$$

Para la otra desigualdad, se define

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n \\ n, & f(x) > n \end{cases}$$

y $F_n(x) = {}^{L}\int_a^x f_n$ para $x \in [a, b]$. Entonces $F - F_n$ es no negativa y creciente en $[a, b]$ así que por el lema 3.39, $(F - F_n)'$ existe y es no negativa casi siempre en $[a, b]$. Además, $F_n' = f_n$ c.s. en $[a, b]$. Recordemos que estamos suponiendo que f en no negativa y por tanto f_n también es no negativa,

$$0 \leq (F - F_n)' = F' - F_n' = F' - f_n \leq F' \text{ c.s}$$

Por tanto,

$$^{L}\int_a^x (F' - f_n) \geq 0.$$

Como la desigualdad se cumple para todos los valores de n,

$$^{L}\int_a^x (F' - f) \geq 0$$

por el teorema de la convergencia dominada.
Por tanto, cuando f es no negativa, $F' = f$ c.s. Para el caso general basta considerar $f = f^+ - f^-$. $\square$

Capítulo 4

Integral de Henstock-Kurzweil

Este nuevo tipo de integral surge al querer dar con un proceso de integración que garantice que todas las funciones obtenidas al derivar puedan ser reconstruidas a partir de su derivada, es decir, que sean integrables.
Recordemos que vimos ejemplos donde una función con derivada acotada no era integrable Riemann, esto nos llevó a introducir la integral de Lebesgue con la que sí se podía garantizar la integrabilidad si se tenía la acotación de la derivada. Con la integral de Henstock-Kurzweil se podrá prescindir de la acotación para garantizar que una función es integrable.
Esta integral fue desarrollada en 1957 por Jaroslav Kurzweil utilizando una generalización de la integral de Riemann, independientemente en 1961 Ralph Henstock hizo un profundo estudio de la generalización de la integral de Riemann. En este texto nos referiremos a esta integral cono la integral de Henstock-Kurzweil aunque en otros textos se puede encontrar como la integral de gauge, haciendo referencia a su construcción.
La palabra inglesa gauge puede ser traducida como calibre o calibrador y su versión francesa, jauge, como medidor, debido a la falta de textos en castellano que hagan referencia a este término en este texto se mantendrá el uso de gauge.

4.1. Construcción

Recordemos que al construir la integral de Riemann se elegían particiones cuyo diámetro fuera menor que cierto δ prefijado, es decir nos fijábamos en la longitud del mayor subintervalo, esta forma de proceder no tiene en cuenta el comportamiento local de la función a integrar. En la integral de Henstock-Kurzweil el valor de δ podrá variar con el fin de ajustarse al comportamiento local de la función, si la función no varía en torno a un punto se tomará un

δ mayor, mientras que si sufre oscilaciones el valor de δ será menor.
El valor variable de δ es la idea clave en la nueva integral, veamos los elementos necesarios para la construcción de la nueva integral.

Lema 4.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $y \in [a, b]$. Para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, dependiente de y, tal que*

$$|f(v) - f(u) - f'(y)(v - u)| \leq \epsilon(v - u)$$

cuando $u, v \in [a, b]$ y $y - \delta < u \leq y \leq v < y + \delta$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y sea $y \in [a, b]$. Como f es diferenciable n y, existe un $\delta(y) > 0$ tal que si $x \in [a, b]$ y $0 < |x - y| < \delta(y)$ entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(y) \right| < \epsilon.$$

Multiplicando cada término por $|x - y|$, se tiene que

$$|f(x) - f(y) - f'(y)(x - y)| \leq \epsilon|x - y|,$$

lo que también es válido para $x = y$. Ahora tomemos $u, v \in [a, b]$ y $y - \delta(y) < u \leq y \leq v < y + \delta(y)$. Entonces,

$$\begin{gathered} |f(v) - f(u) - f'(y)(v - u)| \\ |\{f(v) - f(y) - f'(y)(v - y)\} + \{f(y) - f(u) - f'(y)(y - u)\}| \\ \leq |f(v) - f(y) - f'(y)(v - y)| + |f(y) - f(u) - f'(y)(y - u)| \\ \leq \epsilon(v - y) + \epsilon(y - u) = \epsilon(v - u) \end{gathered}$$

Con lo que se concluye. □

Definición 4.2. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. Un $\delta -$ **gauge** en E es una función positiva $\delta : E \to \mathbb{R}^+$. Donde $\mathbb{R}^+$ denota los números reales estrictamente positivos.*

Definición 4.3. *Dado un δ-gauge, una partición etiquetada $\mathcal{P} = \{(t_k, [x_{k-1}, x_k])\}_{k=1}^n$ se dice que es $\delta -$ **buena** si $t_k - \delta(t_k) < x_{k-1} \leq t_k \leq x_k < t_k + \delta(t_k)$, donde $1 \leq k \leq n$.*

Definición 4.4. *Sea $E \subset \mathbb{R}$, un $\gamma -$ **gauge** es una función de E a intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$, donde $\delta(t)$ es un $\delta -$ **gauge**.*

Definición 4.5. *Dado un γ-gauge, una partición etiquetada $\mathcal{P} = \{(t_k, I_k)\}_{k=1}^n$ de $[a, b]$ se dice que es $\gamma -$ **buena** si para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $I_k \subset \gamma(t_k)$*

Observemos que dada una partición $\widetilde{\mathcal{P}} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ con diámetro menor que δ se puede tomar un conjunto de etiquetas $\{y_k\}_{k=1}^n$ tales que $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Si $\gamma(t) = (t-\delta, t+\delta)$ para todo $t \in [a,b]$, entonces $[x_{k-1}, x_k] \subset \gamma(y_k)$ por lo que la partición etiquetada $\mathcal{P} = \{(y_k, I_k)\}_{k=1}^n$ es una partición γ-buena de $[a,b]$. Este es el gauge usado en la integral de Riemann, por tanto las construcciones hechas en la integral de Riemann son compatibles con los gauges.

Veamos un resultado relativo a γ-gauges e intervalos que nos será de utilidad en futuras demostraciones.

Lema 4.6. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $E \subset I$ no vacío. Sea γ un γ-gauge en I. Entonces, existe una familia numerable $\{(t_k, J_k) : k \in \sigma\}$ tal que los intervalos $\{J_k : k \in \sigma\}$ son subintervalos disjuntos y cerrados de I, $t_k \in J_k \cap E$, $J_k \subset \gamma(t_k)$, y $E \subset \cup_{k\in\sigma} J_k \subset I$.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}_k$ el conjunto de subintervalos de I obtenidos al dividir I en 2^k subintervalos iguales. Se tiene que $\cup_{k=1}^{\infty}\mathcal{D}_k$ es un conjunto numerable y si $J' \in \mathcal{D}_k$ y $J'' \in \mathcal{D}_l$, entonces o bien J' y J'' son disjuntos o bien uno está contenido en el otro.
Sea $\mathcal{E}_1$ el conjunto que contiene a los elementos $J \in \mathcal{D}_1$ para los cuales existe un $t \in E \cap J$ tal que $J \subset \gamma(t)$. Sea $\mathcal{E}_2$ el conjunto que contiene a los elementos $J \in \mathcal{D}_2$ para los cuales existe un $t \in E \cap J$ tal que $J \subset \gamma(t)$ y J no está contenido en ningún elemento de $\mathcal{E}_1$, se continúa el proceso para el resto de $\mathcal{D}_k$. De esta forma se ha obtenido una colección de intervalos cerrados de I, $\{\mathcal{E}_k\}_{k=1}^{\infty}$, alguno de los cuales puede ser vacío. El conjunto $\mathcal{E} = \cup_{k=1}^{\infty}\mathcal{E}_k$ es una colección numerable de intervalos cerrados disjuntos contenidos en I. Por construcción, si $J \in \mathcal{E}$, entonces existe un $t \in E \cap J$ tal que $J \subset \gamma(t)$. Falta ver que $E \subset \cup_{J\in\mathcal{E}} J$.
Sea $t \in E$. Entonces, existe un entero K tal que para $k \geq K$, si $J_{k(t)} \in \mathcal{D}_k$ es el subintervalo que contiene a t, entonces $J_{k(t)} \subset \gamma(t)$. Entonces o bien $J_k \in \mathcal{E}_K$ o bien existe un $J \in \cup_{k=1}^{K-1}\mathcal{E}_k$ tal que $J_K \subset J$. Por tanto, $t \in \cup_{J\in\mathcal{E}} J$. □

Definición 4.7. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se dice que la función f es **integrable Henstock-Kurweil** en $[a,b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un gauge γ en $[a,b]$ tal que para toda partición etiquetada $\mathcal{P}$ γ-buena de $[a,b]$,*

$$|S_R(f, \mathcal{P}) - A| < \epsilon.$$

Donde $S_R(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_P f\Delta x$ es la suma de Riemann vista en el segundo capítulo.

*El número A es la **integral de Henstock-Kurweil** de f en $[a,b]$ y se donota por $A = {}^{\text{H-K}}\int_a^b f$.*

Para garantizar que la integral de Henstock-Kurzweil está bien definida se necesita que dado un gauge γ exista una partición etiquetada γ-buena y que el valor de la integral sea único, los resultados que veremos a continuación nos garantizan ambos aspectos.

Teorema 4.8. *Sea γ un gauge en $[a,b]$. Entonces existe una partición etiquetada γ-buena en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $E = \{t \in (a,b] : [a,t] \text{ tiene una partición etiquetada } \gamma\text{-buena}\}$. Se quiere probar que $b \in E$.
Primero observemos que $E \neq \emptyset$ ya que si $x \in \gamma(a) \cap (a,b)$, entonces $\{(a,[a,x])\}$ es una γ-buena partición etiquetada de $[a,x]$. Por tanto, $x \in E$ y $E \neq \emptyset$.
Ahora veamos que $y = \sup E$ es un elemento de E. Por definición $y \in [a,b]$, por tanto γ está definida en y. Se toma $x \in \gamma(y)$ tal que $x < y$ y $x \in E$, y sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada γ-buena de $[a,y]$. Entonces, $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{(y,[x,y])\}$ es una partición etiquetada γ-buena de $[a,y]$. Consecuentemente, $y \in E$.
Por último, veamos que $y = b$. Supongamos que $y < b$. Se toma $w \in (\gamma/y) \cap (y,b)$. Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada γ-buena de $[a,y]$. Entonces, $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{(y,[y,w])\}$ es una partición etiquetada γ-buena de $[a,w]$. Como $y < w$, esto contradice la definición de y, por tanto $y = b$. $\square$

Para ver la unicidad del valor de la integral de Henstock-Kurzweil usaremos algunas propiedades de los gauges. Dados γ_1 y γ_2 gauges definidos en $[a,b]$, entonces la función $\gamma(t) = \gamma_1(y) \cap \gamma_2(t)$ también es un gauge en $[a,b]$. De hecho si δ_1 y δ_2 son los δ-gauges utilizados en la definición de γ_1 y γ_2 respectivamente, se tiene que $\delta(t) = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$. Además si $\mathcal{P}$ una partición etiquetada γ-buena, entonces $\mathcal{P}$ también es una partición etiquetada γ_1-buena y una partición etiquetada γ_2-buena, ya que para $(t,I) \in \mathcal{P},\ I \subset \gamma(t) \subset \gamma_i(t)$ para $i = 1,2$.

Teorema 4.9. *El valor de la integral de Henstock-Kurzweil de una función f es único.*

Demostración. Sea f una función integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ y sean A, B valores que satisfacen la definición 4.5. Fijamos $\epsilon > 0$ y elegimos γ_A y γ_B correspondientes a los gauge de la definición 4.5 para A y B respectivamente y $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ correspondiente al ϵ de la definición. Sea $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cap \gamma_2(t)$ y sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada γ-buena, como $\mathcal{P}$ es γ_1-buena y γ_2-buena se tiene que

$$|A - B| \leq |A - S_R(f,\mathcal{P})| + |S_R(f,\mathcal{P}) - B| < \epsilon' + \epsilon' = \epsilon.$$

Como ϵ era un valor arbitrario, se concluye que $A = B$ y por tanto el valor de la integral de Henstock-Kurzweil es único. $\square$

Veamos que todo función integrable Riemann es integrable Henstock-Kurzweil por lo que los resultados y criterios de integrabilidad que teníamos para la primera podrán ser utilizados en esta nueva integral.

Teorema 4.10. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann entonces f es integrable Henstock-Kurzweil y el valor de las integrales coincide.*

Demostración. Sea f integrable Riemann, sea δ el valor correspondiente a ϵ en la definición 2.1, y $\mathcal{P}$ la partición etiquetada de diámetro menor que δ, es decir se tiene que

$$\left| S_R(f, \mathcal{P}) - {}^{R}\!\!\int_a^b f \right| < \epsilon$$

Para comprobar que f es integrable Henstock-Kurzweil basta tomar el gauge $\gamma(t) = (t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2})$ ya que así cualquier partición etiquetada γ-buena tendrá un diámetro menor que δ por lo que también se tendrá

$$\left| S_R(f, \mathcal{P}) - {}^{\text{H-K}}\!\!\int_a^b f \right| < \epsilon$$

por lo que la función es integrable Henstock-Kurzweil.
Falta ver que el valor de las integrales coincide

$$\left| {}^{R}\!\!\int_a^b f - {}^{\text{H-K}}\!\!\int_a^b f \right| \leq$$

$$\left| {}^{R}\!\!\int_a^b f - S_R(f, \mathcal{P}) \right| + \left| S_R(f, \mathcal{P}) - {}^{\text{H-K}}\!\!\int_a^b f \right| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

Como ϵ es arbitrario se concluye el resultado. $\square$

Sin embargo el recíproco no es cierto, veamos un ejemplo de ello.

Ejemplo: Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función de Dirichlet, ya vimos que esta función no es integrable Riemann, veremos que f es integrable Henstock-Kurzweil y que ${}^{\text{H-K}}\!\int_0^1 f = 0$.
Sea $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ una enumeración de los números racionales en $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Sea $c > 0$ y δ y γ un δ-gauge y un γ-gauge respectivamente definidos como sigue

$$\delta(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 2^{-i} c & \text{si } x = r_i \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} (x-c, x+c) & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ (x-2^{-i}c, x+2^{-i}c) & \text{si } x = r_i \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tomamos $c = \epsilon/4$. Sea $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, m\}$ una partición γ-buena de $[0,1]$, se tiene que

$$|S_R(f,\mathcal{P}) - 0| = |S_R(f,\mathcal{P})| = \left| \sum_{i=1}^{m} f(t_i) l(I_i) \right|$$

$$\left| \sum_{\substack{(t_i,I_i)\in\mathcal{P} \\ t_i \notin \mathbb{Q}}} f(t_i) l(I_i) + \sum_{\substack{(t_i,I_i)\in\mathcal{P} \\ t_i \in \mathbb{Q}}} f(t_i) l(I_i) \right|.$$

La suma para los $t_i \notin \mathcal{P} \cap \mathbb{Q}$ es cero ya que $f(t) = 0$ cuando $t \notin \mathbb{Q}$. Para estimar la suma para los $t_i \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Q}$, nótese que $f(t_i) = 1$ ya que $t_i \in \mathbb{Q}$ y recuérdese que cada etiqueta t_i puede ser una etiqueta de dos intervalos como máximo. Como $t_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, existe un j tal que $t_i = r_j$. Por tanto, si $(t_i, I_i) \in \mathcal{P}$, entonces $I_i \subset \gamma(t_i)$, tal que $l(I_i) \le l(\gamma(t_i)) = l(\gamma(r_j)) = 2^{1-j}\frac{\epsilon}{4}$. Por tanto,

$$\left| \sum_{t_i \notin \mathcal{P}\cap\mathbb{Q}} f(t_i) l(I_i) + \sum_{t_i \in \mathcal{P}\cap\mathbb{Q}} f(t_i) l(I_i) \right|$$

$$= \left| \sum_{t_i \in \mathcal{P}\cap\mathbb{Q}} f(t_i) l(I_i) \right| \le 2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{1-j} \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Por tanto hemos visto que dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un γ-gauge, γ tal que para cualquier partición γ-buena, $\mathcal{P}$, $|S_R(f,\mathcal{P}) - 0| < \epsilon$. Por lo que se concluye que la función de Dirichlet es integrable Henstock-Kurzweil en $[0,1]$ y el valor de la integral es cero.

Recordemos que las funciones continuas son integrables Riemann por lo que como consecuencia del teorema precedente se tiene que

Teorema 4.11. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, entonces, f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$.*

4.2. Propiedades básicas

Veamos que la nueva integral posee las propiedades fundamentales con las que contaban las integrales anteriores.

Proposición 4.12. *(Linealidad)*
Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si f y g son funciones integrables Henstock-Kurzweil, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable Henstock-Kurzweil y

$$\text{H-K}\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \text{ H-K}\int_a^b f + \beta \text{ H-K}\int_a^b g$$

Demostración. Se fija $\epsilon > 0$ y se elige $\gamma_f > 0$ tal que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada γ_f-buena de $[a,b]$, entonces

$$\left| S(f,\mathcal{P}) - \text{ H-K}\int_a^b f \right| < \frac{\epsilon}{2(1+|\alpha|)}.$$

De igual forma, se toma $\gamma_g > 0$ tal que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada γ_g-buena de $[a,b]$, entonces

$$\left| S(g,\mathcal{P}) - \text{H-K}\int_a^b g \right| < \frac{\epsilon}{2(1+|\beta|)}.$$

Ahora, sea $\gamma(t) = \gamma_f(y) \cap \gamma_g(t)$ y sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada γ-buena de $[a,b]$. Entonces,

$$\left| S_R(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}) - \left(\alpha \text{ H-K}\int_a^b f + \beta \text{ H-K}\int_a^b g \right) \right|$$

$$= \left| (\alpha S_R(f,\mathcal{P}) + \beta S_R(g,\mathcal{P})) - \left(\alpha \text{ H-K}\int_a^b f + \beta \text{ H-K}\int_a^b g \right) \right|$$

$$= \left| \alpha \left(S_R(f,\mathcal{P}) - \text{ H-K}\int_a^b f \right) + \beta \left(S_R(g,\mathcal{P}) - \text{ H-K}\int_a^b g \right) \right|$$

$$\leq |\alpha| \left| S_R(f,\mathcal{P}) - \text{ H-K}\int_a^b f \right| + |\beta| \left| S_R(g,\mathcal{P}) - \text{ H-K}\int_a^b g \right|$$

$$< \frac{\epsilon\,|\alpha|}{2(1+|\alpha|)} + \frac{\epsilon\,|\beta|}{2(1+|\beta|)} < \epsilon.$$

Como ϵ era arbitrario, se llega a que $\alpha f + g\beta$ es Henstock-Kurzweil integrable y

$$\text{H-K}\int_a^b (\alpha f + g\beta) = \alpha \text{ H-K}\int_a^b f + \beta \text{ H-K}\int_a^b g.$$

□

Proposición 4.13. *(Positividad)*
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función positiva integrable Henstock-Kurzweil. Entonces, ${}^{\text{H-K}}\int_a^b f \geq 0$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, tomamos un gauge γ que satisfaga la definición 4.5 para la integral de f, entonces, si $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada γ-buena de $[a, b]$,

$$\left| S_R(f, \mathcal{P}) - {}^{\text{H-K}}\int_a^b f \right| < \epsilon.$$

Por tanto, como $S_R(f, \mathcal{P}) \geq 0$,

$${}^{\text{H-K}}\int_a^b f > S_R(f, \mathcal{P}) - \epsilon \geq -\epsilon$$

para cualquier ϵ positivo, por tanto se concluye que ${}^{\text{H-K}}\int_a^b f \geq 0$. □

Como consecuencia de estos dos previos resultados se cumple que

Proposición 4.14. *Sean f y g dos funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a, b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces,*

$${}^{\text{H-K}}\int_a^b f \leq {}^{\text{H-K}}\int_a^b g$$

Teorema 4.15. *(Criterio de Cauchy)*
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, entonces f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe un gauge γ tal que si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos particiones etiquetadas γ-buenas de $[a, b]$, entonces

$$|S_R(f, \mathcal{P}_1) - S_R(f, \mathcal{P}_2)| < \epsilon$$

Esta desigualdad es el criterio de Cauchy.

Demostración. Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un gauge γ tal que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada γ-buena de $[a, b]$, entonces $\left| S_R(f, \mathcal{P}) - {}^{\text{H-K}}\int_a^b f \right| < \frac{\epsilon}{2}$. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dos particiones etiquetadas γ-buenas de $[a, b]$, entonces

$$|S_R(f, \mathcal{P}_1) - S_R(f, \mathcal{P}_2)| \leq \left| S_R(f, \mathcal{P}_1) - {}^{\text{H-K}}\int_a^b f \right| + \left| {}^{\text{H-K}}\int_a^b f - S_R(f, \mathcal{P}_2) \right| < \epsilon$$

Por lo que se cumple el criterio de Cauchy.
Supongamos ahora que se cumple el criterio de Cauchy y veamos que f es

integrable Henstock-Kurzweil.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, se toma un gauge $\gamma_k > 0$ tal que para cada par de particiones etiquetadas γ-buenas de $[a,b]$, $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ se tiene que

$$|S_R(f,\mathcal{P}_1) - S_R(f,\mathcal{P}_2)| < \frac{1}{k}.$$

Reemplazando γ_k por $\cap_{j=1}^{k}\gamma_j$, se tiene que $\gamma_{k+1} \subset \gamma_k$. Para cada k, se fija una partición etiquetada γ_k-buena, $\mathcal{P}_k$. Nótese que para $j > k$, como $\gamma_j \subset \gamma_k$, $\mathcal{P}_j$ es una partición etiquetada γ_k-buena de $[a,b]$. Por tanto,

$$|S_R(f,\mathcal{P}_k) - S_R(f,\mathcal{P}_j)| < \frac{1}{k},$$

lo que implica que la serie $\{S_R(f,\mathcal{P}_k)\}_{k=1}^{\infty}$ es una serie de Cauchy en $\mathbb{R}$, y por tanto converge. Sea A el límite de esta serie. De la desigualdad anterior se tiene que

$$|S_R(f,\mathcal{P}_k) - A| \leq \frac{1}{k}.$$

Falta verificar que A satisface la definición de integral de Henstock-Kurzweil. Se toma $\epsilon > 0$ y $K > 2/\epsilon$. Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada γ_K-buena de $[a,b]$. Entonces,

$$|S_R(f,\mathcal{P}) - A| = |S_R(f,\mathcal{P}) - S_R(f,\mathcal{P}_K)| + |S_R(f,\mathcal{P}_K) - A| < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} < \epsilon.$$

Por tanto f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$. □

Teorema 4.16. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$. Si $J \subset [a,b]$ es un subintervalo cerrado, entonces f es integrable Henstock-Kurzweil en J.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y γ un gauge en $[a,b]$ tal que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos particiones etiquetadas γ-buenas de $[a,b]$, entonces $|S_R(f,\mathcal{P}_1) - S_R(f,\mathcal{P}_2)| < \epsilon$. Sea $J = [c,d]$ un subintervalo cerrado de $[a,b]$. Sea $J_1 = [a,c]$ y $J_2 = [d,b]$ si alguno de ellos contiene un único punto no los consideraremos más ya que la integral sería nula en ese conjunto. Sea $\overline{\gamma} = \gamma|_J$ y $\gamma_i = \gamma|_{J_i}$. Supongamos que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{E}$ son particiones etiquetadas $\overline{\gamma}$-buenas de J, y $\mathcal{P}_i$ es una partición etiquetada γ-buena de J_i, $i = 1, 2$. Entonces $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ y $\mathcal{E} = \cup(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ son particiones etiquetadas γ-buenas de $[a,b]$. Como $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{E}'$ contienen los mismos pares (z_j, I_j) de J,

$$|S_R(f,\mathcal{P}) - S_R(f,\mathcal{E})| = |S_R(f,\mathcal{P}') - S_R(f,\mathcal{E}')| < \epsilon.$$

Por el criterio de Cauchy, f es integrable Henstock-Kurzweil en J. □

Teorema 4.17. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\{I_j\}_{j=1}^m$ un conjunto de intervalos cerrados con interiores disjuntos tales que $[a,b] = \cup_{j=1}^m I_j$. Si f es integrable Henstock-Kurzweil en cada I_j, entonces f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ y*

$$^{\text{H-K}}\int_a^b f = \sum_{j=1}^m {}^{\text{H-K}}\int_{I_j} f$$

Demostración. Supongamos primero que $[a,b]$ está dividido en dos subintervalos, $I_1 = [a,c]$ e $I_2 = [c,b]$, y que f es integrable Henstock-Kurzweil en ambos intervalos. Se toma $\epsilon > 0$ y para $i = 1,2$ se toma un gauge γ_i en I_i tal que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada γ_i-buena de I_i, entonces $\left|S_R(f,\mathcal{P}) - {}^{\text{H-K}}\int_{I_i} f\right| < \frac{\epsilon}{2}$. Si $x < c$, el mayor intervalo centrado en x que no contiene a c es $(x - |x-c|, x + |x-c|) = (x - |x-c|, c)$, de igual manera si $x > c$ el mayor subintervalo centrado en x que no contiene a c es $(c, x - |x-c|)$. Definimos un gauge en $[a,b]$ de la siguiente manera:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1(x) \cap (x - |x-c|, c) & \text{si} \quad x \in [a,c) \\ \gamma_2(x) \cap (c, x - |x-c|) & \text{si} \quad x \in (c,b] \\ \gamma_1(c) \cap \gamma_2(c) & \text{si} \quad x = c \end{cases}$$

Como $c \in \gamma(x)$ si y solo si $x = c$, c es una etiqueta para toda partición etiquetada γ-buena. Dado que $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada γ-buena de $[a,b]$. Si $(c,J) \in \mathcal{P}$ y J tiene intersección no vacía con I_1 e I_2, se divide J en dos intervalos $J_i = J \cap I_i$, con $J_i \subset \gamma_i(c)$, $i = 1,2$. Entonces, $f(c)l(J) = f(c)l(J_1) + f(c)l(J_2)$. Escribimos $\mathcal{P}$ como $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, donde $\mathcal{P}_i = \{(x,J) \in \mathcal{P} : J \in I_i\}$. Por la construcción de γ, $\mathcal{P}_i$ es una partición etiquetada γ_i-buena de I_i. Después de dividir el intervalo asociado a la etiqueta c, si fuera necesario, se tendría que $S_R(f,\mathcal{P}) = S_R(f,\mathcal{P}_1) + S_R(f,\mathcal{P}_2)$. Por tanto,

$$\left|S_R(f,\mathcal{P}) - \left\{ {}^{\text{H-K}}\int_{I_1} f + {}^{\text{H-K}}\int_{I_2} f \right\}\right| \leq \left|S_R(f,\mathcal{P}_1) - {}^{\text{H-K}}\int_{I_1} f\right| +$$

$$\left|S_R(f,\mathcal{P}_2) - {}^{\text{H-K}}\int_{I_2} f\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto, f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ y ${}^{\text{H-K}}\int_a^b f = {}^{\text{H-K}}\int_{I_1} f + {}^{\text{H-K}}\int_{I_2} f$. Razonando por inducción se concluye el resultado. □

4.3. Primer teorema fundamental del cálculo

Veamos ahora los teoremas fundamentales del cálculo para la integral de Henstock-Kurzweil que como comentamos al principio del capítulo fue la mejora de estos teoremas lo que motivó su desarrollo y es su principal mejora respecto a las integrales anteriores.

Teorema 4.18. *Sean $F, f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sea F continua y tal que $F' = f$ salvo tal vez en un conjunto numerable de puntos de $[a,b]$, Entonces, f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ y*

$$\text{H-K} \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostración. Sea $C = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la colección de puntos donde o bien F' no existe o bien F' existe pero no es igual a f. Sea $\epsilon > 0$. Si $t \in [a,b] \setminus C$, se elige $\delta(t) > 0$ para este ϵ utilizando el lema 4.1. Si $t \in C$, entonces $t = c_k$ para cierto k. Se toma $\delta(t) = \delta(c_k) > 0$ así que $|x - c_k| < \delta(c_k)$ implica que:

1. $|F(x) - F(c_k)| < \epsilon 2^{-(k+3)}$
2. $|f(c_k)|\,|x - c_k| < \epsilon 2^{-(k+3)}$

δ está bien definido ya que F es continua en $[a,b]$ y $|x - c_k|$ se puede hacer tan pequeño como se desee, basta con tomar x lo suficientemente próximo a c_k. Se define el gauge $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$ para todo $t \in [a,b]$.
Sea $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : \ i = 1, \dots, m\}$ una partición etiquetada γ-buena de $[a,b]$, donde $I_i = [a_i, b_i]$ para cada i. Nótese que si $a_i \neq a$, entonces existe un j tal que $a_i = b_j$, de forma similar se tiene que $b_i \neq b$. Sea $\mathcal{P}_1$ el conjunto de elementos de $\mathcal{P}$ con etiquetas en $[a,b] \setminus C$ y $\mathcal{P}_2$ el conjunto de elementos de $\mathcal{P}$ con etiquetas en C. Por el lema 4.1,

$$\sum_{(t_i,I_i)\in\mathcal{P}_1} |F(b_i) - F(a_i) - f(t_i)(b_i - a_i)| \leq \sum_{(t_i,I_i)\in\mathcal{P}_1} \epsilon(b_i - a_i) \leq \epsilon(b - a).$$

Si $t_i = c_k$ para cierto k, por (1) y (2)

$$\begin{aligned} &|F(b_i) - F(a_i) - f(t_i)(b_i - a_i)| \\ &\leq |F(b_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(a_i)| + |f(c_k)(b_i - a_i)| \\ &< \frac{\epsilon}{2^{k+3}} + \frac{\epsilon}{2^{k+3}} + \frac{\epsilon}{2^{k+3}} < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{(t_i,I_i)\in\mathcal{P}_2} |F(b_i) - F(a_i) - f(t_i)(b_i - a_i)| < 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \epsilon$$

ya que cada c_k puede ser una etiqueta de como máximo dos subintervalos de $\mathcal{P}$. Gracias a que cada punto de división, diferente de a y b, es a la vez extremo derecho e izquierdo de los subintervalos, se llega a que

$$|S_R(f,\mathcal{P}) - [F(b) - F(a)]| = \left| \sum_{(t_i,I_i)\in\mathcal{P}} \{F(b_i) - F(a_i) - f(t_i)(b_i - a_i)\} \right|$$

$$\leq \epsilon(b-a) + \epsilon = (1+b-a)\epsilon,$$

con lo que se concluye. □

Obsérvese que en este caso no se pide ni la continuidad de F' como se hacía para la integral de Riemann ni la acotación de F' como se hacía para la de Lebesgue. Más adelante veremos un ejemplo de una función integrable Henstock-Kurzweil pero no integrable Lebesgue.

4.4. Integrabilidad absoluta

A diferencia de la integral de Lebesgue en la que la integrabilidad de una función medible f es equivalente a la integrabilidad de $|f|$ como vimos en el teorema 3.31, en la integral de Henstock-Kurzweil esto no sucede. Veamos un ejemplo de ello.

Ejemplo Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2\cos(\pi/x^2)$ si $x > 0$ y $f(0) = 0$ si $x = 0$. Entonces f es derivable en $[0,1]$ con:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\cos(\frac{\pi}{x^2}) + \frac{2\pi}{x}\sin(\frac{\pi}{x^2}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo, teorema 4.18, f' es integrable Henstock-Kurzweil en $[0,1]$ y ${}^{\text{H-K}}\int_0^1 f' = -1$.
Sin embargo, $|f'|$ no es integrable Henstock-Kurzweil en $[0,1]$. Razonamos de igual forma que en el ejemplo de la sección 3.5, tomando

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}} \text{ y } \beta_k = \sqrt{\frac{1}{2k}}.$$

Los segmentos $[\alpha_k, \beta_k]$ son disjuntos y $|f'|$ es continua y por tanto integrable Henstock-Kurzweil sobre cada uno de ellos. Además, si $x \in [\alpha_k, \beta_k]$, se tiene que

$$2k\pi \leq \frac{\pi}{x^2} \leq (4k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Por tanto,

$$^{\text{H-K}}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f'| = {}^{\text{H-K}}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f' = f(\beta_k) - f(\alpha_k) = \frac{1}{2k}.$$

y

$$^{\text{H-K}}\int_{0}^{1} |f'| \geq \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\text{H-K}}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f'| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty$$

Por lo que $|f'|$ no es integrable Henstock-Kurzweil.
Nos preguntamos por tanto que relación existe entre la integrabilidad en sentido Henstock-Kurzweil de una función y su valor absoluto.

Introducimos un nuevo concepto relativo a los δ-gauges que será de utilidad en esta sección.

Definición 4.19. *Un δ-gauge, δ en $[a,b]$ se dice que es ϵ-**adaptado** a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si f es integrable, el valor de su integral es A, y si $|S(\mathcal{P}, f) - A| \leq \epsilon$ para toda partición δ-buena, $\mathcal{P}$, de $[a,b]$.*

Definición 4.20. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es **absolutamente integrable Henstock-Kurzweil** en $[a,b]$ si f y $|f|$ son ambas integrables Henstock-Kurzweil en $[a,b]$.*

Proposición 4.21. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ si y sólo si, f^+ y f^- son integrables Henstock-Kurzweil en $[a,b]$.*

Demostración. Si f y $|f|$ son ambas integrables Henstock-Kurzweil, entonces $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ y $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ son integrables Henstock-Kurzweil por linealidad.
Si f^+ y f^- son integrables Henstock-Kurzweil, entonces $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ - f^-$ también son integrables Henstock-Kurzweil por linealidad. □

Proposición 4.22. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente integrable Henstock-Kurzweil, entonces,*

$$\left| {}^{\text{H-K}}\int_a^b f \right| \leq {}^{\text{H-K}}\int_a^b |f|.$$

Demostración. Se tiene la cadena de desigualdades

$$-{}^{\text{H-K}}\int_a^b |f| \leq -{}^{\text{H-K}}\int_a^b f^- \leq {}^{\text{H-K}}\int_a^b f =$$

$$^{\text{H-K}}\int_a^b f^+ - {}^{\text{H-K}}\int_a^b f^- \leq {}^{\text{H-K}}\int_a^b f^+ \leq {}^{\text{H-K}}\int_a^b |f|$$

con lo que se concluye. □

Proposición 4.23. *Si f y g son integrables Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ y $|f| \leq g$, entonces f es absolutamente integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $a_1 < a_2 < \ldots < a_{N+1}$ una subdivisión de un segmento $[a_1, a_{N+1}] \subset [a,b]$, entonces se tiene que $\sum_{k=1}^{N} \left| {}^{\text{H-K}}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f \right| \leq \sum_{k=1}^{N} {}^{\text{H-K}}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g \leq {}^{\text{H-K}}\int_a^b g < \infty$ Se define

$$S = \sup_{a_1<a_2<\ldots<a_{N+1}\in[a,b]} \sum_{k=1}^{N} \left| {}^{\text{H-K}}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f \right| < \infty$$

Veremos que f es integrable y su integral es igual a S.
Sea $\epsilon > 0$ y consideramos puntos $a_1 < a_2 < \ldots < a_{N+1}$ de $[a,b]$, tales que

$$\sum_{k=1}^{N} \left| {}^{\text{H-K}}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f \right| \geq S - \epsilon.$$

Sea δ un δ-gauge ϵ-adaptado a f en $[a,b]$ tal que

$$\delta(x) \leq \text{mín}(|x-a_1|, |x-a_2|, \ldots, |x-a_{N+1}|).$$

Sea $[\alpha, \beta]$ un segmento contenido en $[a,b]$ y sea $\mathcal{P}$ una partición δ-buena de un segmento contenido en $[a,b]$ y que contiene a $[a_1, a_{N+1}]$. Se toma $a_0 = \alpha$ y $a_{N+2} = \beta$. Entonces, se tiene $S_R(|f|, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{N+1} S_R(|f|, \mathcal{P}_k)$ donde $\mathcal{P}_k$ es una partición δ-buena de $[a_k, a_{k+1}]$.
Se definen las subdivisiones parciales δ-buenas de $[a,b]$ siguientes

$$\mathcal{J}_k^+ = \left\{ (J,x) \in \mathcal{P}_k \mid l(J)\cdot f(x) - {}^{\text{H-K}}\int_J f \geq 0 \right\},$$

$$\mathcal{J}_k^- = \left\{ (J,x) \in \mathcal{P}_k \mid l(J)\cdot f(x) - {}^{\text{H-K}}\int_J f < 0 \right\},$$

$$\mathcal{J}^+ = \cup_{k=0}^{N+1} \mathcal{J}_k^+ \text{ y } \mathcal{J}^- = \cup_{k=0}^{N+1} \mathcal{J}_k^-.$$

Si $u - v \geq 0$, se tiene que $-(u-v) \leq |u| - |v| \leq u - v$, y por tanto por el lema de Henstock

$$-\epsilon \leq -\sum_{(J,x)\in\mathcal{J}^+} \left(l(J)\cdot f(x) - {}^{\text{H-K}}\int_J f \right)$$

$$\leq \sum_{(J,x)\in\mathcal{J}^+} \left(l(J)\cdot |f(x)| - \left| {}^{\text{H-K}}\int_J f \right| \right) \leq \sum_{(J,x)\in\mathcal{J}^+} \left(l(J)\cdot f(x) - {}^{\text{H-K}}\int_J f \right) \leq \epsilon.$$

Por tanto, $-\epsilon \leq S_R(|f|, \mathcal{J}^+) - \sum_{(J,x)\in\mathcal{J}^+} \left|{}^{\text{H-K}}\int_J f\right| \leq \epsilon$. Y de igual manera $-\epsilon \leq S_R(|f|, \mathcal{J}^-) - \sum_{(J,x)\in\mathcal{J}^+} \left|{}^{\text{H-K}}\int_J f\right| \leq \epsilon$, por tanto, $-2\epsilon \leq S_R(|f|, \mathcal{P}) - \sum_{(J,x)\in\mathcal{J}^+\cup\mathcal{J}^-} |{}^{\text{H-K}}\int_J f| \leq 2\epsilon$. Como cada intervalo de $\mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$ está contenido en un $[a_k, a_{k+1}]$, se tiene que

$$S - \epsilon \leq \sum_{k=0}^{N+1} \left|{}^{\text{H-K}}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f\right| \leq \sum_{(J,x)\in\mathcal{J}^+\cup\mathcal{J}^-} \left|{}^{\text{H-K}}\int_J f\right| \leq S.$$

Finalmente se tiene que $S - 3\epsilon \leq S_R(|f|, \mathcal{P}) \leq S + 2\epsilon$, y como ϵ es arbitrario se concluye que $|f|$ es integrable en $[a, b]$ de integral igual a S. □

Proposición 4.24. *Sean f, g y h funciones integrables Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y tales que $h \leq f$ y $h \leq g$, entonces las funciones* $\text{mín}(f, g)$ *y* $\text{máx}(f, g)$ *son integrables en $[a, b]$.*

Demostración. Se tiene que las funciones positivas $f - h$ y $g - h$ son integrables Henstock-Kurzweil. Además la función $f - g$ también es integrable Henstock-Kurzweil y

$$|f - g| \leq (f - h) + (g - h).$$

Por tanto, por la proposición precedente se tiene que $f - g$ es absolutamente integrable.
Para concluir basta observar que

$$\text{mín}(f, g) = \frac{1}{2}\left((f - g) - |f - g|\right) \text{ y } \text{máx}(f, g) = \frac{1}{2}\left((f - g) + |f - g|\right).$$

□

4.5. Lema de Henstock

A continuación veremos un resultado que nos será útil para las demostraciones de los teoremas de convergencia.

Lema 4.25. *(Henstock)*
Sea f una función integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$, y para $\epsilon > 0$ sea δ_ϵ un δ-gauge en $[a, b]$ por tanto para cualquier partición etiquetada δ_ϵ-buena de $[a, b]$ se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^{I} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - {}^{\text{H-K}}\int_a^b f\right| < \epsilon.$$

Sea $F_1, F_2, \ldots, F_J$ una colección de subintervalos cerrados y disjuntos de $[a,b]$, con $y_j \in F_J \subset (y_j - \delta_\epsilon(y_j), y_j + \delta_\epsilon(y_j))$, donde $1 \leq j \leq J$. Entonces,

$$\left|\sum_{j=1}^{J}\left\{f(y_j)l(F_j) - \ ^{\text{H-K}}\int_{F_j} f(x)\right\}\right| \leq \epsilon$$

y

$$\sum_{j=1}^{J}\left|f(y_j)l(F_j) - \ ^{\text{H-K}}\int_{F_j} f(x)\right| \leq 2\epsilon,$$

donde $l(F_j)$ indica la longitud del subintervalo F_j.

Demostración. El conjunto $[a,b] - \cup_{j=1}^{J} F_j$ es una colección finita de intervalos abiertos. Añadimos a cada uno sus extremos obteniendo una colección finita de subintervalos cerrados $K_1, K_2, \ldots, K_N$ de $[a,b]$ donde f es integrable Henstock-Kurzweil por el teorema 4.15.
Se toma un δ-gauge $\delta_n < \delta_\epsilon$ tal que para $\eta > 0$ y una partición etiquetada δ_ϵ-buena de K_n, que denotamos $K(\mathcal{P}_n)$ se tiene que

$$\left|\sum_{K(\mathcal{P}_n)} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \ ^{\text{H-K}}\int_{K_n} f(x)\right| < \frac{\eta}{N}.$$

Las particiones $K(\mathcal{P}_1), K(\mathcal{P}_2), \ldots, \mathcal{P}_N$ junto con $F_1, F_2, \ldots, F_J$ forman una partición etiquetada δ_ϵ-buena de $[a,b]$ Entonces,

$$\left|\sum_{j=1}^{J}\left\{f(y_j)l(F_j) - \ ^{\text{H-K}}\int_{F_j} f(x)\right\}\right|$$

$$= |[f(y_1)l(F_1) + f(y_2)l(F_2) + \ldots + f(y_J)l(F_J)$$

$$\left. + \sum_{K(\mathcal{P}_1)} f(x)\Delta x + \sum_{K(\mathcal{P}_2)} f(x)\Delta x + \ldots + \sum_{K(\mathcal{P}_N)} f(x)\Delta x \right]$$

$$- \left[^{\text{H-K}}\int_{F_1} f(x) + ^{\text{H-K}}\int_{F_2} f(x) + \ldots + ^{\text{H-K}}\int_{F_J} f(x) \right.$$

$$\left. + \ ^{\text{H-K}}\int_{K_1} f(x) + ^{\text{H-K}}\int_{K_2} f(x) + \ldots + ^{\text{H-K}}\int_{K_N} f(x) \right]$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\left(\text{H-K}\int_{K_n} f(x)\right)-\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{K(\mathcal{P}_N)} f(x)\Delta x\right)\Bigg|$$

$$< \epsilon + \sum_{n=1}^{N}\left|\text{H-K}\int_{K_n} f(x) - \sum_{K(\mathcal{P}_n)} f(x)\right| < \epsilon + N\frac{\eta}{N} = \epsilon + \eta.$$

Como η es arbitrario, la segunda desigualdad es válida. Para la primera desigualdad, de los subintervalos $F_1, F_2, \ldots, F_J$ se toman aquellos que cumplen $f(y_j)l(F_j) - \text{ H-K}\int_{F_j} f(x) \geq 0$. Por tanto,

$$0 \leq \sum f(y_j)l(F_j) - \text{ H-K}\int_{F_J} f(x) \leq \epsilon.$$

Si se tuviera, $f(y_j)l(F_j) - \text{ H-K}\int_{F_j} f(x) < 0$ se cumpliría

$$-\sum f(y_j)l(F_j) + \text{ H-K}\int_{F_J} f(x) \leq \epsilon.$$

Juntando ambas partes se llega a que,

$$\sum \left| f(y_j)l(F_j) - \text{ H-K}\int_{F_j} \right| \leq 2\epsilon.$$

$\square$

4.6. Teoremas de convergencia

Teorema 4.26. *(Convergencia monótona) Sea $\{f_k\}$ una sucesión monótona de funciones integrables Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ que convergen puntualmente hacia f en $[a,b]$. Entonces, f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ si y solo si la sucesión $\left\{\text{H-K}\int_a^b f_k(x)\right\}$ es acotada en $[a,b]$. En este caso,*

$$\text{H-K}\int_a^b f(x) = \lim_{k\to\infty} \text{ H-K}\int_a^b f_k(x).$$

Demostración. Supongamos que la serie $\{f_k\}$ es monótona creciente, $f_1 \leq f_2 \ldots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq f$ en $[a,b]$. Si f es integrable Henstock-Kurzweil, entonces, $\text{H-K}\int_a^b f_k(x) \leq \text{ H-K}\int_a^b f(x)$ para todo k, y la sucesión monótona creciente $\left\{\text{H-K}\int_a^b f_k\right\}$ al estar acotada por $\text{H-K}\int_a^b f$ es convergente.

Recíprocamente, supongamos que A es el límite de la sucesión $\left\{ {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_k \right\}$. Veremos que f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ y que ${}^{\text{H-K}}\int_a^b f = A$. Se toma $\epsilon > 0$. Para $k \geq K$, se tiene que $0 \leq A - {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_k(x) < \epsilon$. Como las funciones f_k son integrables Henstock-Kurzweil, se tiene un δ_ϵ^k-gauge para f_k tal que

$$\left| S_R(f_k, \mathcal{P}) - {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_k(x) \right| < \frac{\epsilon}{2^k}$$

para cada partición etiquetada, $\mathcal{P}$, δ_ϵ^k-buena de $[a,b]$.
Sea $x \in [a,b]$. Como $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_k(x)| < \epsilon$ cuando $k \geq n(x) \geq K$.
La función $\delta_\epsilon(x) = \delta_\epsilon^{n(x)}$ es un gauge en $[a,b]$. Sea $\mathcal{P}$ una partición etiquetada δ_ϵ-buena de $[a,b]$. Recordemos que la suma de Riemann también podía expresarse como $S_R(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{I} f(t_i)\Delta x_i$ entonces se tiene que,

$$|S_R(f,\mathcal{P}) - A| \leq \left| \sum_{i=1}^{I} f(t_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{I} f_{n(t_i)}(t_i)\Delta x_i \right|$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{I} \left\{ f_{n(t_i)}(t_i)\Delta x_i - {}^{\text{H-K}}\int_{\Delta x_i} f_{n(t_i)}(x) \right\} \right|$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{I} {}^{\text{H-K}}\int_{\Delta x_i} f_{n(t_i)}(x) - A \right|$$

Veamos cómo se acotan cada uno de los términos de la derecha de la última desigualdad.
El primer término está dominado por $\sum_{i=1}^{I} \left| f(t_i) - f_{n(t_i)}(t_i) \right| \Delta x_i < \epsilon(b-a)$. Para el tercer término, teniendo en cuenta que la serie $\{f_k\}$ es monótona creciente, que los subintervalos de la partición $\mathcal{P}$ son disjuntos y que los números naturales $n(t_1), n(t_2), \ldots, n(t_I)$ son todos mayores o iguales que K se tiene que

$${}^{\text{H-K}}\int_a^b f_K(x) = \sum_{i=1}^{I} {}^{\text{H-K}}\int_{\Delta x_i} f_K(x) \leq \sum_{i=1}^{I} {}^{\text{H-K}}\int_{\Delta x_i} f_{n_{(t_i)}}(x),$$

entonces,

$$0 \leq A - \sum_{i=1}^{I} {}^{\text{H-K}}\int_{\Delta x_i} f_{n_{(t_i)}}(x) \leq A - {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_K(x) < \epsilon.$$

Veamos por último cómo acotar el segundo término, los números naturales $n(c_1), n(c_2), \ldots, n(c_I)$ pueden no ser todos distintos. Aquellos que son iguales corresponden a la misma partición y usando el lema de Henstock se tiene que

$$\left| \sum_{k=1}^{l} f_{n(c_{i_k})} \Delta x_{i_k} - {}^{\text{H-K}}\int_{\Delta x_{i_k}} f_{n(c_{i_k})} \right| \leq \frac{\epsilon}{2^{n(c_{i_k})}}.$$

Siendo $n(c_{i_1}) = n(c_{i_2}) = \ldots = n(c_{i_l})$.
El segundo término está dominado por $\sum \epsilon/2^k = \epsilon$. Hemos visto por tanto que para esta partición etiquetada δ_ϵ-buena de $[a, b]$ la diferencia entre la suma de Riemann asociada a f y el valor A de la integral está acotado por $\epsilon(b-a) + \epsilon + \epsilon$. Esta es la definición de ser integrable Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ y que el valor de la integral sea A, por tanto

$$^{\text{H-K}}\int_a^b f(x) = \lim_{k\to\infty} {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_k(x).$$

El argumento en el caso de que $f_1 \geq \ldots f_k \geq f_{k+1} \geq \ldots f$ es similar. □

Teorema 4.27. *(Convergencia encajada) Sea $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una serie de funciones integrables Henstock-Kurzweil en $[a, b]$ que convergente puntualmente hacia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si existen dos funciones integrables Henstock-Kurzweil $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que para todo n se tiene que $g \leq f_n \leq h$. Entonces f es integrable y*

$$\lim_{k\to\infty} {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_n = {}^{\text{H-K}}\int_a^b f.$$

Demostración. Dados dos enteros m y n tales que $m \geq n$, consideramos la función $F_{m,n}$ definida por $F_{m,n} = \min_{k\in[n,m]} f_k$. Por la proposición 4.23 se tiene que para todo $m \geq n$, $F_{m,n}$ es integrable. Además, la serie $(G_m = F_{m,n})_{m\geq n}$ es decreciente, acotada inferiormente por g y tiene como límite a $F_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Como ${}^{\text{H-K}}\int_a^b G_m \geq {}^{\text{H-K}}\int_a^b g$, por el teorema de la convergencia monótona se tiene que F_n es integrable y que ${}^{\text{H-K}}\int_a^b F_n \leq \inf_{k\geq n} {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_k \leq {}^{\text{H-K}}\int_a^b h$. La serie (F_n) es creciente y converge hacia f. Volviendo a aplicar el teorema de la convergencia monótona se tiene que f es integrable y que

$$^{\text{H-K}}\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} {}^{\text{H-K}}\int_a^b F_n \leq \lim_{k\to\infty} \inf {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_n.$$

Razonando de igual manera se tiene que $\lim_{k\to\infty} \sup {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_n \leq {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_n$.
Por lo que se concluye el resultado $\lim_{k\to\infty} {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_n = {}^{\text{H-K}}\int_a^b f$. □

Como consecuencia de este teorema se tiene el teorema de la convergencia dominada.

Teorema 4.28. *(Convergencia dominada) Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una serie de funciones integrables Henstock-Kurzweil que convergen puntualmente hacia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si existe una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para todo n se tiene que $|f_n| \leq g$ se tiene que f es integrable y que*

$$\lim_{k\to\infty} {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_n = {}^{\text{H-K}}\int_a^b f.$$

Demostración. Basta observar que la serie (f_n) está encajada por g y $-g$ que son ambas integrables Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ por lo que se concluye el resultado. □

4.7. Relación con la integral de Lebesgue

Veremos que las funciones integrables Lebesgue son integrables Henstock-Kurzweil para ello se hará una demostración en varios pasos partiendo de las funciones escalonadas que definimos a continuación.

Definición 4.29. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una* ***función escalonada*** *si existe una partición $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}$ de $[a,b]$ tal que f es constante en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i).*

Teorema 4.30. *Sea f integrable Lebesgue en $[a,b]$ entonces f es integrable Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ y los valores de las integrales coinciden.*

Demostración. La demostración consta de varias partes,
Parte 1 Las funciones escalonadas son integrables Henstock-Kurzweil y su valor coincide con el de la integral de Lebesgue.
Sea $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada. Las funciones escalonadas son integrables Riemann ya que tienen un número finito de discontinuidades, por tanto también son integrables Henstock-Kurzweil y los valores coinciden, se tiene que

$${}^{R}\int_a^b s = {}^{\text{H-K}}\int_a^b s$$

Por otra parte las funciones escalonadas son integrables Lebesgue ya que son discontinuas en un número finito de puntos, es decir, en un conjunto de medida cero, además las funciones integrables Lebesgue son a su vez integrables Riemann, por lo que también se tiene

$${}^{L}\int_a^b s = {}^{R}\int_a^b s$$

Por lo que empleando ambas igualdades se concluye que

$$^{L}\int_a^b s = {}^{\text{H-K}}\int_a^b s$$

Parte 2 Las funciones simples son integrables Henstock-Kurzweil y su valor coincide con el de la integral de Lebesgue.
Sea G un subintervalo abierto de $[a,b]$, G se puede expresar como la unión numerable de intervalos disjuntos $G = \cup I_k$. Se define una sucesión de funciones escalonadas $\{f_k\}$, donde $f_k = \chi_{I_1} + \chi_{I_2} + \ldots + \chi_{I_k}$. Entonces f_k es integrable Henstock-Kurzweil y $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \chi_G$. Nótese que si $x \in [a,b] \setminus G$, entonces $f_k(x) = 0$ para todo k y $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$.
Si $x \in G$, entonces existe un número natural N tal que $x \notin I_1 \cup \ldots \cup I_{N-1}$, $x \in I_N$, $x \notin I_{N+1}, \ldots$. Esto quiere decir que,

$$f_1(x) = \ldots = f_{N-1}(x) = 0,$$

$$f_N(x) = 1 = f_{N+1}(x) = \ldots, \text{ y}$$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 1.$$

Por el teorema de la convergencia monótona, aplicado tanto a la integral de Lebesgue como a la de Henstock-Kurzweil y dado que $0 \le f_k \le 1$ en $[a,b]$ la función característica de G es integrable Henstock-Kurzweil y Lebesgue, y

$$^{\text{H-K}}\int_a^b \chi_G = \lim_{k\to\infty} {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_k$$

$$\lim_{k\to\infty} {}^{L}\int_a^b f_k = {}^{L}\int_a^b \chi_G$$

Sea ahora E un subconjunto medible de $[a,b]$. Se puede cubrir E con una sucesión monótona decreciente de conjuntos abiertos G_k tales que $\lim \mu(G_k) = \mu(E)$, aplicando la proposición 3.5. De nuevo, $f_k = \chi_{G_k}$ define una sucesión monótona de funciones integrables tanto Henstock-Kurzweil como Lebesgue que convergen puntualmente hacia χ_E, tales que $0 \le f_k \le 1$ en $[a,b]$ y $0 \le {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_k \le b-a$ para todo k. Entonces se tiene que,

$$^{\text{H-K}}\int_a^b \chi_E = \lim_{k\to\infty} {}^{\text{H-K}}\int_a^b f_k$$

$$= \lim_{k\to\infty} {}^{L}\int_a^b f_k = {}^{L}\int_a^b \chi_E.$$

Para concluir basta observar que una función simple es una combinación lineal de funciones características en conjuntos medibles, por tanto, si s es una función simple definida en $[a, b]$ se tiene que

$$^{\text{H-K}}\int_a^b s = {}^{L}\int_a^b s.$$

Parte 3 Supongamos que f es una función positiva integrable Lebesgue en $[a, b]$. Entonces existe una sucesión de funciones simples, $\{s_k\}$, convergente puntualmente hacia f en $[a, b]$. Entonces,

$$^{\text{H-K}}\int_a^b s_k = {}^{L}\int_a^b s_k \leq {}^{L}\int_a^b f < \infty.$$

Aplicando el teorema de la convergencia monótona se tiene que

$$^{\text{H-K}}\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} {}^{\text{H-K}}\int_a^b s_k$$

$$\lim_{k\to\infty} {}^{L}\int_a^b s_k = {}^{L}\int_a^b f.$$

Parte 4 Si f no es positiva basta aplicar la parte precedente a las funciones

$$f^+ = \sup\{f, 0\} \quad \text{y} \quad f^- = -\inf\{f, 0\}$$

□

Veamos un ejemplo de que el recíproco no es cierto.
Ejemplo: Sea $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2\cos(\frac{\pi}{x^2}) & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases}$$

F' es derivable en $[0, 1]$ y su valor es

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\cos(\frac{\pi}{x^2}) - \frac{2\pi}{x}\sin(\frac{\pi}{x^2}) & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Por el TFC-1 para la integral de Henstock-Kurzweil se tiene que F' es integrable Henstock-Kurzweil en $[0, 1]$.
Sin embargo, $|F'|$ no es integrable Henstock-Kurzweil en $[0, 1]$. Utilizando la positividad de la integral se tiene que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$^{\text{H-K}}\int_{\frac{1}{\sqrt{i+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{i}}} |F'| \geq \left| {}^{\text{H-K}}\int_{\frac{1}{\sqrt{i}}}^{\frac{1}{\sqrt{i+1}}} F' \right| = \left| F\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{i+1}}\right) \right| = \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \geq \frac{2}{i+1}.$$

Lo que implica que, para todo $N \in \mathbb{N}$

$$^{\text{H-K}}\int_0^1 |F'| \geq \sum_{i=1}^{N} \frac{2}{i+1}$$

El miembro de la derecha de la desigualdad diverge con N por lo que $|F'|$ no puede ser integrable Henstock-Kurzweil en $[0,1]$ y por el teorema 4.29 $|F'|$ no es integrable Lebesgue por lo que F' tampoco lo es por el teorema 3.31. Recordemos que la función F' tampoco es integrable Riemann ya que no es acotada, como vimos en el ejemplo de la página 16.

4.8. Segundo teorema fundamental del cálculo

Teorema 4.31. *(TFC-2) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable Henstock-Kurzweil, se define $F(x) =^{\text{H-K}} \int_a^x f(t)dt$. Entonces, F es diferenciable en casi todo $x \in [a,b]$ y $F'(x) = f(x)$.*

Para demostrar este teorema necesitamos el siguiente un lema de convergencia.

Lema 4.32. *Sea $\mathcal{C} = \{I_i \ : \ i = 1, \ldots, N\}$ un conjunto finito de intervalos de $\mathbb{R}$. Entonces, existen intervalos disjuntos dos a dos $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{C}$ tales que*

$$\frac{1}{3}\mu\left(\cup_{i=1}^{N} I_i\right) \leq \mu\left(\cup_{j=1}^{N} J_j\right).$$

Demostración. La medida de los intervalos de $\mathbb{R}$ coincide con su longitud por lo que $\mu(I) = l(I)$, I intervalo.
Reordenando los intervalos si fuera necesario, se puede suponer que

$$l(I_N) \leq l(I_{N+1}) \leq \ldots \leq l(I_2) \leq l(I_1).$$

Sea $J_1 = I_1$. Sea $\mathcal{C}_1 = \{I \in \mathcal{C} \ : \ I_1 \cap I = \emptyset\}$ y nótese que si $I_i \in \mathcal{C}$ y $I_i \notin \mathcal{C}_1$, entonces $I_i \subset 3J_1$, donde $3J_1$ es el intervalo concéntrico con J_1 que tiene tres veces su longitud. Sea J_2 el elemento de $\mathcal{C}_1$ con el menor índice, y por tanto la mayor longitud. Sea $\mathcal{C}_2 = \{I \in \mathcal{C}_1 \ : \ I_2 \cap I = \emptyset\}$ y de igual forma se definen los $\mathcal{C}_k$ sucesivos. Como $\mathcal{C}$ es un conjunto finito, la selección de los intervalos J_j termina tras un número de pasos finitos, digamos k pasos. Por construcción, los intervalos $\{J_1, \ldots J_k\}$ son disjuntos dos a dos, y si $I_i \in \mathcal{C}$

no está en la elección, entonces existe un j tal que $I_i \subset 3J_j$. Por tanto, $\cup_{i=1}^N I_i = \cup_{j=1}^k \cup_{I_i \cup J_j \neq \emptyset} I_i \subset \cup_{j=1}^k 3J_j$, así que

$$\frac{1}{3}\mu\left(\cup_{i=1}^N I_i\right) \leq \frac{1}{3}\mu\left(\cup_{j=1}^k 3J_i\right) \leq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^k \mu(3J_j) = \sum_{j=1}^k \mu(J_j) = \mu\left(\cup_{j=1}^k J_j\right).$$

□

Ahora ya estamos en posición de demostrar el segundo teorema fundamental del cálculo.

Demostración. Se fija $\mu > 0$, se dice que x satisface la condición $(*_\mu)$ si para cada entorno de x que contiene a un intervalo $[u, v]$ tal que $x \in (u, v)$ se tiene que

$$\left|\frac{F(v) - F(u)}{v - u} - f(x)\right| > \mu. \tag{4.1}$$

Sea E_μ el conjunto de todos los $x \in (a, b)$ que satisfacen la condición $(*_\mu)$, se define $E = \cup_{i=1}^\infty E_{1/n}$. Supongamos que $x \notin E$. Entonces, para todo $n \geq 1$, existe un entorno U_n de x tal que para cualquier intervalo $[u, v] \subset U_n$ con $x \in (u, v)$, se tiene que

$$\left|\frac{F(v) - F(u)}{v - u} - f(x)\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Por la continuidad de F, la desigualdad se mantiene cuando u se reemplaza por x. Por tanto, si $x \notin E$, entonces F es diferenciable en x y $F'(x) = f(x)$. Falta probar que E_μ es de medida cero para cualquier $\mu > 0$, lo que implicaría que $E = \cup_{i=1}^\infty E_{1/n}$ tiene medida cero. Si $E_\mu = \emptyset$, no habría nada que probar, así que supongamos que $E_\mu \neq \emptyset$. Sea $\epsilon > 0$, como f es integrable Henstock-Kurzweil , por el lema de Henstock, lema 4.25, existe un γ-gauge γ en $[a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^l |F(v_i) - F(u_i) - f(x_i)(v_i - u_i)| < \frac{\epsilon\mu}{6} \tag{4.2}$$

para cualquier partición etiquetada γ-buena $\mathcal{P} = \{(x_i, [u_i, v_i]) \ : \ i = 1, \ldots, l\}$ de $[a, b]$. Para $x \in E_\mu$, se toma un intervalo $[u_x, v_x]$ tal que $x \in [u_x, v_x] \subset \gamma(x)$ y 4.1 se mantiene. Después, se toma un γ-gauge γ_1 en E_μ tal que $\gamma_1(x) \subset (u_x, v_x)$ para todo $x \in E_\mu$. Por el lema 4.6, existe una colección numerable de intervalos disjuntos $\{J_k \ : \ k \in \sigma\}$ y puntos $\{x_k \ : \ k \in \sigma\}$ tales que $x_k \in J_k \cap E_\mu$, $J_k \subset \gamma_1(x_k) \subset (u_{x_k}, v_{x_k})$, y $E_\mu \subset \cup_{k\in\sigma} J_k \subset [a, b]$. Sea $\alpha = \sum_{k\in\sigma} l(J_k) \leq b - a < \infty$, se toma N tal que $\sum_{k=1}^N l(J_k) > \frac{\alpha}{2}$.

Aplicando el lema 4.32 a $\{(u_{x_k}, v_{x_k}) \; : \; k = 1, \ldots, N\}$ para conseguir una colección de intervalos disjuntos $\{(u_{y_1}, v_{y_1}), \ldots, (u_{y_K}, v_{y_K})\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{K} l((u_{y_1}, v_{y_1})) = \mu\left(\cup_{i=1}^{K}(u_{y_1}, v_{y_1})\right) \geq \frac{1}{3}\mu\left(\cup_{k=1}^{N}(u_{x_k}, v_{x_k})\right) \tag{4.3}$$

$$\geq \frac{1}{3}\mu\left(\cup_{k=1}^{N} l(J_k)\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} l(J_k) > \frac{\alpha}{6}.$$

Como $\{(x_i, [u_{x_i}, v_{x_i}]) \; : \; i = 1, \ldots, N\}$ es una partición etiquetada γ-buena de $[a, b]$, por 4.1 y 4.2,

$$\mu \sum_{i=1}^{K} l((u_{y_i}, v_{y_i})) \leq \sum_{i=1}^{N} |F(v_{x_i}) - F(u_{x_i}) - f(x_i)(v_{x_i} - u_{x_i})| < \frac{\epsilon\mu}{6}.$$

Ahora por 4.3 se tiene que $\epsilon > \alpha$. Como $E_\mu \subset \cup_{k\in\sigma} J_k$ y $\sum_{k\in\sigma} l(J_k) = \alpha < \epsilon$, se deduce que E_μ es de medida cero. □

4.9. Extensión a un intervalo cualquiera

Hasta ahora solamente hemos construido la integral de Henstock-Kurzweil para un intervalo cerrado acotado, veamos como definirla para un intervalo cualquiera de la recta completada $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definición 4.33. *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es integrable Henstock-Kurzweil si existe un número real A tal que para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un δ-gauge, $\delta : I \to \mathbb{R}^+$ y un segmento $[\alpha, \beta] \subset I$ tal que si $\mathcal{P}$ es una subdivisión δ-buena de un segmento contenido en I y que contiene a $[\alpha, \beta]$, entonces $|S_R(f, \mathcal{P}) - A| \leq \epsilon$. El número real A es la integral de f sobre I, $A =^{\text{H-K}} \int_I f$.*

Obsérvese que si $I = [a, b]$ es un segmento, se puede tomar $[\alpha, \beta] = [a, b]$ y la nueva definición es equivalente a la dada en un principio, definición 4.7. Veamos un resultado que nos indica cómo calcular una integral en un intervalo cualquiera, uno no acotado por ejemplo.

Teorema 4.34. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Entonces f es integrable en I si y sólo si f verifica las dos propiedades siguientes*

- *f es integrable en todo segmento $[c, d] \subset I$ y*
- *${}^{\text{H-K}}\int_c^d f$ admite un límite finito cuando $c \to a^+$ y $d \to b^-$*

Se tiene entonces que este límite es igual a la integral de f en I.

Primero veamos un lema previo que usaremos en la demostración del teorema.

Lema 4.35. *Si $I' \subset I$ son dos intervalos con los mismos extremos, una función $f : I \to \mathbb{R}$ es integrable en I si y sólo si, es integrable en I'. En este caso,*

$$^{\text{H-K}}\int_I f = ^{\text{H-K}}\int_{I'} f$$

.

Demostración. Veremos el caso en que $I = (a, b]$, donde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $I' = (a, b)$. Los otros casos se demuestran de manera similar.
Trabajaremos con δ-gauges tales que $\delta(x) \leq \epsilon/(1 + |f(x)|)$ para todo $x \in I$. Por tanto los términos de las sumas de Riemann estarán acotados superiormente por $\delta(x) \cdot |f(x)| \leq \epsilon$.
Si f es integrable en $(a, b]$ y si $(\delta, [\alpha, b])$ es una pareja ϵ-adaptada a f en $(a, b]$, entonces $(\delta, [\alpha, b - \delta(b)])$ es una pareja ϵ-adaptada a f en (a, b). De hecho, toda partición $\mathcal{P}$ de un intervalo que contenga a $[\alpha, b - \delta(b)]$ se puede completar añadiendo $([b - \delta(b), b])$ para obtener $\mathcal{P}'$ una partición δ-buena de un segmento que contiene a $[\alpha, \beta]$. Entonces,

$$\left| S_R(f, \mathcal{P}) - {}^{\text{H-K}}\int_{(a,b]} f \right| \leq \delta(b) \cdot |f(b)| + \left| S_R(f, \mathcal{P}') - {}^{\text{H-K}}\int_{(a,b]} f \right| \leq 2\epsilon.$$

Por tanto, f es integrable en (a, b) y ${}^{\text{H-K}}\int_{(a,b)} f = {}^{\text{H-K}}\int_{(a,b]} f$.
Recíprocamente, supongamos que f es integrable en (a, b). Sea $(\delta, [\alpha, \beta])$ una pareja ϵ-adaptada a f en (a, b) donde $\beta \geq b - \delta(b)$ con $\delta(b) = \epsilon/(1+|f(b)|)$. Si $\mathcal{P} = ([a_k, a_{k+1}], x_k)_{1 \leq k \leq N}$ es una partición etiquetada δ-buena de un segmento que contiene a $[\alpha, b]$, entonces $\mathcal{P}' = ([a_k, a_{k+1}], x_k)_{1 \leq k \leq N-1}$ es una partición δ-buena de un segmento que contiene a $[\alpha, \beta]$ y

$$\left| S_R(f, \mathcal{P}) - {}^{\text{H-K}}\int_{(a,b)} f \right| \leq \delta(x_N) \cdot |f(x_N)| + \left| S_R(f, \mathcal{P}') - {}^{\text{H-K}}\int_{(a,b)} f \right| \leq 2\epsilon.$$

Por tanto, f es integrable en $(a, b]$ y ${}^{\text{H-K}}\int_{(a,b]} f = {}^{\text{H-K}}\int_{(a,b)} f$. □

Ahora ya estamos en disposición de demostrar el teorema.

Demostración. Empecemos viendo que si f es una función integrable en I y que si $a = \text{ínf}(I) \in \mathbb{R} \cup -\infty$ y $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \infty$, entonces, ${}^{\text{H-K}}\int_I f = \lim_{\substack{c \to a^+ \\ d \to b^-}} {}^{\text{H-K}}\int_c^d f$.

Por el lema precedente podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I = (a, b)$. Por el teorema 4.16, tenemos la primera condición. Para ver que se cumple la segunda, sea $\epsilon > 0$ y sea $(\delta, [\alpha, \beta])$ una pareja ϵ-adaptada a f en I. Si $[c, d]$ contiene a $[\alpha, \beta]$ y si $\mathcal{P}$ es una partición δ-buena de $[c, d]$, se tiene que $\left|S_R(f, \mathcal{P}) - {}^{\text{H-K}}\int_I f\right| \leq \epsilon$. Como la integral de f en $[c, d]$ puede ser aproximada por tales sumas de Riemann $S_R(f, \mathcal{P})$, se deduce que para todo segmento $[c, d]$ contenido en I y que contiene a $[\alpha, \beta]$, se tiene que $\left|{}^{\text{H-K}}\int_c^d f - {}^{\text{H-K}}\int_I f\right| \leq \epsilon$. Por tanto ${}^{\text{H-K}}\int_I f = \lim_{\substack{c \to a^+ \\ d \to b^-}} {}^{\text{H-K}}\int_c^d f$.
Veamos el recíproco. Suponemos que $I = [a, b)$ sin pérdida de generalidad por el lema previo, veamos que si $\lim_{d \to b^-} {}^{\text{H-K}}\int_a^d f = A \in \mathbb{R}$ entonces f es integrable en I y su integral es A. Sea $\epsilon > 0$, se toma una sucesión estrictamente creciente (d_k) de límite b tal que $\left|{}^{\text{H-K}}\int_a^{d_k} f - A\right| \leq \frac{\epsilon}{2^k}$. Se toma a continuación para todo k un δ-gauge δ_k en $[d_k, d_{k+1}]$ que es $\epsilon/2^k$-adaptado a f en estos intervalos. Se define entonces un δ-gauge en $[a, b]$ de la siguiente manera

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_0(a) & \text{si } x = a \\ \min(\delta_k(x), x - d_k, d_{k+1} - x) & \text{si } x \in (d_k, d_{k+1}) \\ \min(\delta_k(d_k), \delta_{k-1}(d_k)) & \text{si } x = d_k,\ k \geq 1 \end{cases}$$

Entonces toda partición $\mathcal{P}$ δ-buena de $[a, d]$ con $d_k \leq d < d_{k+1}$ se puede dividir en particiones $\mathcal{P}_j$ de $[d_j, d_{j+1}]$ para $0 \leq < k$, y de $[d_k, d]$ para $j = k$. Se tiene por tanto

$$\forall j < k, \ \left|S_R(f, \mathcal{P}_j) - {}^{\text{H-K}}\int_{d_j}^{d_{j+1}} f\right| \leq \frac{\epsilon}{2^j} \ \text{ y } \ \left|S_R(f, \mathcal{P}_k) - {}^{\text{H-K}}\int_{d_k}^{d} f\right| \leq \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Para la segunda acotación se ha utilizado el teorema 4.16.
Se tiene que $S_R(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=0}^k S_R(f, \mathcal{P}_j)$, por lo que

$$|S_R(f, \mathcal{P}) - A| \leq \left|S_R(f, \mathcal{P}) - {}^{\text{H-K}}\int_a^d f\right| + \left|{}^{\text{H-K}}\int_a^d f - A\right| \leq \sum_{j=0}^{k} \frac{\epsilon}{2^j} + \frac{\epsilon}{2^k} = 2\epsilon$$

para toda partición δ-buena $\mathcal{P}$ de un segmento que contiene a $[a, d_1]$.

□

Veamos cómo este resultado nos permite calcular la integral de Henstock-Kurzweil de la función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ que no es integrable Lebesgue por no ser integrable su valor absoluto.

Ejemplo: Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. f es continua en $[1,\infty)$ por lo que es integrable en cada segmento $[c,d] \subset [1,\infty)$. Haciendo una integración por partes se obtiene que para todo $c \in (1,\infty)$:

$$^{\text{H-K}}\int_1^c f = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^c - \ ^{\text{H-K}}\int_1^c \frac{\cos(x)}{x^2}.$$

Por una parte se tiene que $\text{lím}_{c\to\infty}(\cos(c)/c) = 0$, para el segundo término se tiene que las funciones $x \to (\cos(x))/x^2$ y $x \to |(\cos(x))/x^2|$ son continuas en $[1,\infty)$ y $|(\cos(x))/x^2| \leq 1/x^2$. La integral $^{\text{H-K}}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ es convergente, por tanto la integral $^{\text{H-K}}\int_1^c \frac{\cos(x)}{x^2}$ tiene un límite finito cuando c tiende a ∞ lo que permite concluir que la integral $^{\text{H-K}}\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}$ es convergente.

Bibliografía

[1] Apuntes de la asignatura de *Análisis matemático* impartida por Manuel Núñez Jiménez

[2] Clément Kesselmark y Laurent Moonens, *Les théorèmes fondamentaux de calcul intégral*, Gazette-SMF (141), 49-67, 2014.

[3] C. Ray Rosentrater, *Varieties of Integration*, Mathematical Association of America, 2015.

[4] Douglas S. Kurtz y Charles W. Swartz, *Theories of Integration*, WORLD SCIENTIFIC, 2004.

[5] Frank E. Burk, *A Garden of Integrals*, Mathematical Association of America, 2007.

[6] Jean-Pierre Ramis y André Warusfel (directores), *Mathématiques. Tout-en-un pour la Licence*, DUNOD, 2007.