

Cantor, Mosaicos y Laminaciones

Jaime Marcos Martín

25 de junio de 2019

Introducción

Este trabajo tiene como objetivo presentar, desarrollar y relacionar las nociones de conjunto de Cantor y Laminación. Para ello, nos centraremos principalmente en el ejemplo que proporcionan a tal efecto los espacios de mosaicos.

El espacio triádico de Cantor es modelo universal para los espacios topológicos metrizable, compactos, perfectos y totalmente desconectados. Otro modelo muy interesante de espacio de Cantor es el formado por las sucesiones de ceros y unos, o también el espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Éste último admite una representación dinámica gracias al llamado Shift de Bernoulli, o desplazamiento una unidad de los coeficientes. Tal representación se consigue multiplicando el espacio por el intervalo unidad y haciendo una identificación en los extremos dada por el Shift de Bernoulli. De este modo, obtenemos un espacio laminado con una transversal de tipo Cantor, al que se le aplican conceptos dinámicos como la holonomía, y en el que se pueden pedir propiedades sobre las hojas, como ser cerradas; o sobre los conjuntos: ser minimales, etc.

En este espíritu, damos un breve repaso a los conceptos de laminación y hojas de una laminación, para pasar a otros ejemplos significativos de laminaciones, como son los espacios de mosaicos, con una transversal determinada al marcar orígenes en las teselas. Las laminaciones que aparecen son, frecuentemente, transversalmente Cantor. Para dar una muestra de la teoría, terminamos el trabajo haciendo una prueba del siguiente resultado:

Todo mosaico uniformemente repetitivo y aperiódico tiene envoltura transversalmente Cantor.

Índice general

1. Caracterización de los Cantor	3
2. Laminaciones	18
3. Espacios de mosaicos	24

Capítulo 1

Caracterización de los Cantor

Pensemos en el conjunto $\{0, 1\}$ y dotémoslo de la topología discreta. Formemos a partir de él $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} = \{\text{aplicaciones } \sigma: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}\}$.

Si aquí consideramos la topología producto correspondiente, obtenemos una de las versiones del llamado *conjunto de Cantor*, que tiene la propiedad de ser un espacio *metrizable, compacto, perfecto y totalmente desconexo*.

El objetivo final de este primer capítulo es mostrar que, de hecho, las cuatro propiedades anteriores caracterizan por completo a un espacio topológico. Es decir:

Teorema. Dos espacios topológicos metrizables, compactos, perfectos y totalmente desconexos son homeomorfos entre sí.

Comenzamos presentando algunas nociones en torno a los espacios totalmente desconexos.

En lo sucesivo, se utilizarán en los argumentos propiedades básicas sobre separación y compacidad sin hacer mención explícita a las mismas. Por ejemplo ([1, p. 119]):

- ▶ todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto;
- ▶ todo subespacio compacto de un espacio Hausdorff es cerrado;
- ▶ en un espacio Hausdorff, subespacios compactos disjuntos se pueden separar mediante abiertos disjuntos.

Definición 1.1 Se dice que un espacio topológico X es totalmente desconexo si los únicos subconjuntos no vacíos y conexos de X son los subconjuntos unipuntuales.

Definición 1.2 Un espacio topológico X se denomina 0-dimensional si cada punto de X posee una base de entornos formada por abiertos-cerrados de X .

Es sencillo demostrar la siguiente relación entre los conceptos que hemos introducido:

Proposición 1.3 Todo espacio 0-dimensional y T_1 es totalmente desconexo.

Ejemplo 1.4 $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es totalmente desconexo:

una base de abiertos de la topología producto es, teniendo en cuenta que la topología sobre $\{0, 1\}$ es discreta,

$$\mathcal{U}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n} = \{\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}; \sigma(i_j) = x_j, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (1.1)$$

para $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces resulta que el complementario de un conjunto de la forma (1.1) es

$$\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{U}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n} = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{U}_{i_j}^{y_j},$$

si $y_j \in \{0, 1\}$, $y_j \neq x_j$. Además de ser cerrado, este conjunto es, nuevamente, abierto de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

Por otra parte, si tomamos $\sigma, \sigma' \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, $\sigma \neq \sigma'$, existirá $i \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$. El abierto-cerrado $\mathcal{U}_i^{\sigma(i)}$ separa σ y σ' , esto es, $\sigma' \notin \mathcal{U}_i^{\sigma(i)} \ni \sigma$. Si en último lugar observamos que una base de entornos de $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es

$$\{\mathcal{U}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_n)}; i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\},$$

podemos concluir que $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es 0-dimensional y T_1 . Según la Proposición 1.3, será totalmente desconexo, como habíamos afirmado.

¿En qué condiciones es cierto el recíproco de 1.3? Como detallaremos, la propiedad de Hausdorff y la compacidad local permitirán obtenerlo.

La noción de espacio totalmente desconexo surge de la conocida descomposición de un espacio topológico X en componentes conexas (recordemos que la componente conexa C_x de un elemento $x \in X$ consiste en la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen x), que naturalmente son disjuntas dos a dos y determinan una partición de X .

Es posible definir en X una partición alternativa también basada en la conexión, mediante una relación algo más laxa. Concretamente:

Se define en X la relación \sim dada por

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{no existe un abierto-cerrado } V \text{ de } X \text{ con } y \notin V \ni x, \quad x, y \in X. \quad (1.2)$$

Observemos algunas propiedades de esta relación.

- ▶ \sim es una relación de equivalencia.
Las propiedades reflexiva y simétrica son fáciles de verificar.
Comentamos solamente la propiedad transitiva:
si elegimos $x, y, z \in X$, y suponemos que existe un abierto-cerrado V de X tal que $z \notin V \ni x$, entonces o bien $y \in V$ (en cuyo caso $y \sim z$), o bien $y \notin V$ (que implica $y \sim x$).
Las clases de equivalencia por la relación \sim se denominan *quasicomponentes conexas de X* . Denotaremos por Q_x a la quasicomponente de un elemento $x \in X$.
- ▶ De la definición se desprende que Q_x coincide con la intersección de todos los abiertos-cerrados que contienen x .
- ▶ Para cada $x \in X$, ocurre que $C_x \subseteq Q_x$.
En efecto; si $y \notin Q_x$, existe un abierto-cerrado V de X tal que $y \notin V \ni x$, lo cual implica que no puede existir un conexo A de X de modo que $x, y \in A$. Por lo tanto $y \notin C_x$.
- ▶ En general, la otra inclusión no es cierta, con lo que las quasicomponentes pueden contener estrictamente a las componentes. Un ejemplo que lo demuestra es aquel dado por el subespacio de \mathbb{C}

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C}; |z| = r_n\} \cup \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1, z \notin \mathbb{R}\},$$

donde $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos y estrictamente menores que 1 con $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$. Si elegimos el punto $i \in \mathcal{S}$, ocurre que

$$C_i = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1, \Im z > 0\} \subsetneq Q_i = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1, z \notin \mathbb{R}\}.$$

No obstante, bajo ciertas condiciones ambas relaciones coinciden. Por ejemplo, si el espacio es conexo o si las componentes son abiertas (cerradas lo son siempre, pues la adherencia de un conexo es conexa).

Una situación más interesante se describe en el siguiente lema, que a su vez permitirá obtener una caracterización de la desconexión total para espacios compactos y Hausdorff.

Lema 1.5 *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Entonces las quasicomponentes coinciden con las componentes.*

Demostración: Sea $x \in X$. Por todo lo ya comentado, bastará probar que $Q_x \subseteq C_x$. Y, para ello, demostraremos que Q_x es conexo.

Supongamos que no lo es. Existen cerrados F_1, F_2 de Q_x tales que $Q_x = F_1 \cup F_2$, $F_1, F_2 \neq \emptyset$ y $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. En estas condiciones, F_1 y F_2 son compactos.

Pongamos que $x \in F_1$. En caso de que $x \in F_2$, se razona de manera análoga. Dispondremos de abiertos U_1, U_2 de X de manera que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $F_1 \subseteq U_1$ y $F_2 \subseteq U_2$. Naturalmente, es $Q_x \subseteq U_1 \cup U_2$ y $x \in U_1$. Consideramos

$$\mathfrak{U} = \{X \setminus A; A \text{ abierto-cerrado de } X, x \in A\}.$$

Ocurre que si $y \notin U_1 \cup U_2$, entonces $y \notin Q_x$ y por tanto existe A abierto-cerrado de X con $x \in A$ e $y \notin A$. Por esta razón, \mathfrak{U} es un recubrimiento abierto de $X \setminus (U_1 \cup U_2) = (X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2)$.

Pero $(X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2)$ es compacto, así que existe un subrecubrimiento finito de \mathfrak{U} para $(X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2)$; tendremos A_1, A_2, \dots, A_n abiertos-cerrados de X de suerte que $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i = B$,

$$(X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (X \setminus A_i) = X \setminus B. \quad (1.3)$$

Para llegar al absurdo, sólo resta observar que se tiene la igualdad

$$U_1 \cap B = (X \setminus U_2) \cap B.$$

La inclusión $U_1 \cap B \subseteq (X \setminus U_2) \cap B$ es inmediata; la otra se deduce de (1.3).

En efecto, como consecuencia de ella, $U_1 \cap B$ es abierto y cerrado en X . Además, $x \in U_1 \cap B$. Por lo tanto

$$F_2 \subseteq Q_x \subseteq U_1 \cap B \Rightarrow F_2 \subseteq U_1,$$

imposible.

Con este Lema disponible, la susodicha caracterización es inmediata:

Proposición 1.6 *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Son equivalentes:*

1. X es totalmente desconexo.
2. Para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existe un abierto-cerrado A de X tal que $y \notin A \ni x$.

A mayores, ya estamos en condiciones de probar el recíproco a la Proposición 1.3 que comentábamos.

Teorema 1.7 *Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Entonces X es 0-dimensional si y sólo si es totalmente desconexo.*

Demostración: Supongamos que X es totalmente desconexo.

Sea $x \in X$, y sea $W \subseteq X$ abierto tal que $x \in W$. Gracias a la compacidad local de X , podemos elegir un entorno abierto U de x contenido en W y con adherencia compacta. Entonces $Fr(U)$ es compacto, y es sencillo comprobar que $x \notin Fr(U)$.

Sea $p \in Fr(U)$. Aplicando la Proposición 1.6 a los puntos x, p dispondremos de un subconjunto abierto-cerrado V_p de \bar{U} tal que $p \notin V_p \ni x$. Así,

$$\mathfrak{V} = \{X \setminus V_p; p \in Fr(U)\}$$

es un recubrimiento por abiertos de $Fr(U)$. Existe un subrecubrimiento finito correspondiente a puntos $p_1, p_2, \dots, p_n \in Fr(U)$.

Entonces tomando $V = \bigcap_{i=0}^n V_{p_i}$ hemos terminado: no sólo $V \subseteq \bar{U}$; también $V \subseteq U$ porque $V \cap Fr(U) = \emptyset$. Por ello V es abierto y cerrado en X , $x \in V$ y $V \subseteq U \subseteq W$.

El concepto que presentamos a continuación será clave para desarrollar lo que resta de esta sección.

Definición 1.8 *Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de espacios topológicos no vacíos y $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de aplicaciones continuas $f_n: X_{n+1} \rightarrow X_n, n \geq 0$.*

La sucesión de pares $\{(X_n, f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ se denomina sucesión de límite inverso, la cual denotaremos más brevemente por $\langle X_n, f_n \rangle$.

En estas condiciones, se define el límite inverso de la sucesión $\langle X_n, f_n \rangle$ como el espacio

$$X_{\infty} = \{(x_0, x_1, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n ; f_n(x_{n+1}) = x_n, n \geq 0\} \subseteq \prod_{n=0}^{\infty} X_n,$$

dotado de la topología inducida por $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$.

A priori parece una definición un tanto abstracta. Pero observamos en casos concretos que, en el fondo, responde a la idea de límite que su propio nombre sugiere.

Ejemplo 1.9 Un ejemplo de este tipo de construcción lo constituye el caso particular en que la sucesión $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ está formada por subespacios encajados

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$$

y las aplicaciones $f_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ son las correspondientes inclusiones, que son continuas.

Resulta que $X_{\infty} \neq \emptyset$ si y sólo si $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n \neq \emptyset$. Además, en ese caso ambos espacios son homeomorfos via la aplicación

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n &\longrightarrow X_{\infty} \\ x &\longmapsto (x, x, \dots). \end{aligned}$$

En la construcción anterior se observa que el límite inverso de una sucesión $\langle X_n, f_n \rangle$ puede ser vacío: pensemos por ejemplo en la sucesión de espacios $\{(0, 1/n)\}_{n=1}^{\infty}$, dotados de la topología inducida por \mathbb{R} .

Sin embargo, bajo ciertas condiciones se puede garantizar que no lo es, y que además hereda propiedades de los espacios de partida.

El siguiente Teorema ilustra este comportamiento, que será útil más adelante. Para probarlo, necesitaremos primero algunos resultados auxiliares.

Lema 1.10 Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos Hausdorff, entonces $\prod_{i \in I} X_i$ también lo es.

Demostración: Sean $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ distintos.

Existe $j \in I$ tal que $x_j \neq y_j$, y por tanto dos abiertos U_j, V_j del espacio X_j de manera que $x_j \in U_j, y_j \in V_j$ y $U_j \cap V_j = \emptyset$.

Por consiguiente, si denotamos por π_j a la proyección correspondiente a X_j , tenemos que $x \in \pi_j^{-1}(U_j), y \in \pi_j^{-1}(V_j)$ y además que $\pi_j^{-1}(U_j), \pi_j^{-1}(V_j)$ son abiertos disjuntos de $\prod_{i \in I} X_i$.

Lema 1.11 *Sea X un espacio Hausdorff, y $\{K_i\}_{i \in I}$ una sucesión de subconjuntos compactos de X tal que $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset, I \neq \emptyset$. Entonces existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{i \in J} K_i = \emptyset$.*

Demostración: Probaremos algo que implica el resultado:

Para cada $J \subseteq I$ no vacío existe $J^* \subseteq I$ finito tal que

$$\bigcap_{i \in J^* \cup J} K_i = \emptyset. \quad (1.4)$$

Una vez que tengamos disponible esta afirmación, será suficiente tomar un $J \subseteq I$ finito.

Denotemos $K(L) = \bigcap_{i \in L} K_i$ para cada $L \subseteq I$. Para probar (1.4), escribimos

$$\emptyset = K(I) = K(J) \cap K(I \setminus J),$$

luego

$$X \setminus K(I \setminus J) = \bigcup_{i \in I \setminus J} (X \setminus K_i) \supseteq K(J).$$

Reparemos en los siguientes hechos:

- ▶ $K_i \subseteq X$ es cerrado de X para cada $i \in I$. Por lo tanto, $X \setminus K_i$ es abierto de X para cada $i \in I$.
- ▶ Visto esto, y en virtud de la última igualdad, $\{K(J) \cap (X \setminus K_i)\}_{i \in I \setminus J}$ será un recubrimiento abierto de $K(J)$.
- ▶ Además, $K(J)$ es compacto.
En primer lugar, $K(J)$ es cerrado como intersección de cerrados. Si tomamos un $j \in J \neq \emptyset$, tendremos que $K(J) \subseteq K_j$ es cerrado también como subespacio de K_j .
Pero K_j era ante todo compacto, así que $K(J)$ es compacto. Y entonces lo será no sólo como subespacio de K_j , sino también como subespacio de X .

Luego de todo lo dicho, existirá $J_0 \subseteq I$ de suerte que $J \subseteq J_0, I \setminus J_0$ es finito y

$$\bigcup_{i \in I \setminus J_0} (X \setminus K_i) \supseteq K(J) \Rightarrow K(J) \cap \left(\bigcap_{i \in I \setminus J_0} K_i \right) = \bigcap_{i \in J \cup (I \setminus J_0)} K_i = \emptyset.$$

Escogiendo $J^* = I \setminus J_0$, hemos terminado.

Lema 1.12 *Sea $\langle X_n, f_n \rangle$ una sucesión de límite inverso. Denotemos*

$$Y_k = \{(x_0, x_1, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n ; f_k(x_{k+1}) = x_k\} \subseteq \prod_{n=0}^{\infty} X_n, k \geq 0.$$

Entonces $\bigcap_{k=0}^n Y_k \neq \emptyset \quad \forall n \geq 0$.

Demostración: Se prueba rápidamente por inducción sobre $n \geq 0$.

Para $n = 0$, simplemente observamos que existirá $x_0 \in f_0(X_1)$, y por lo tanto un $x_1 \in X_1$ tal que $f_0(x_1) = x_0$. La sucesión buscada se completa entonces tomando un $x_m \in X_m \neq \emptyset$ para cada $m \geq 2$.

En la etapa de inducción se razona como en el caso $n = 0$.

Ya estamos en condiciones de probar el resultado que anunciábamos.

Teorema 1.13 *Si $\langle X_n, f_n \rangle$ es una sucesión de límite inverso tal que cada espacio de la sucesión es no vacío, compacto y Hausdorff, entonces el límite inverso X_∞ es no vacío, compacto y Hausdorff.*

Demostración: Ya sabemos que $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ es Hausdorff, y gracias al Teorema de Tychonoff (ver [1, p. 120]) podemos afirmar que es también compacto. Con las notaciones del lema anterior,

$$X_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=0}^n Y_k, \quad (1.5)$$

donde $\bigcap_{k=0}^n Y_k \neq \emptyset \quad \forall n \geq 0$.

Según hemos visto, para comprobar que X_∞ es no vacío, es suficiente mostrar que $\bigcap_{k=0}^n Y_k$ es compacto para todo $n \geq 0$. A su vez, esto quedará garantizado si es cerrado (por la compacidad de $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$), y en última instancia si cada Y_k es cerrado.

Tomamos por tanto un elemento $y = (y_n)_{n=0}^\infty \notin Y_k$. Ocurrirá que $f_k(y_{k+1}) \neq y_k$, así que dispondremos de abiertos U_k, V_k de X_k tales que $f_k(y_{k+1}) \in U_k$, $y_k \in V_k$ y $U_k \cap V_k = \emptyset$. Gracias a la continuidad de f_k , encontramos un abierto W_{k+1} de X_{k+1} de suerte que $y_{k+1} \in W_{k+1}$ y $f_k(W_{k+1}) \subseteq U_k$. Entonces

$$X_0 \times X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times V_k \times W_{k+1} \times X_{k+2} \times \dots$$

es un abierto de $\prod_{n=0}^\infty X_n$ que contiene y y que no corta a Y_k , con lo que deducimos que Y_k es cerrado.

En último lugar, (1.5) permite deducir ahora el carácter cerrado de $X_\infty \subseteq \prod_{n=0}^\infty X_n$, y por tanto su compacidad. Asimismo, la propiedad de Hausdorff se hereda del espacio producto.

Si tenemos dos sucesiones de límite inverso, es también posible hablar de *aplicaciones* entre ambas. Eventualmente, queremos obtener a partir de ellas una aplicación entre los correspondientes límites inversos, y es por esta razón que dichas *aplicaciones* no podrán ser completamente arbitrarias.

El sentido preciso de todo esto se da en la siguiente definición.

Definición 1.14 Sean $\langle X_n, f_n \rangle, \langle Y_n, g_n \rangle$ dos sucesiones de límite inverso. Diremos que una sucesión $\Phi = \{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ de aplicaciones $\phi: X_n \rightarrow Y_n$ es una aplicación de $\langle X_n, f_n \rangle$ en $\langle Y_n, g_n \rangle$ si se satisface que

$$\phi_n \circ f_n = g_n \circ \phi_{n+1} \tag{1.6}$$

para cada $n \geq 0$.

En este caso, se define la aplicación inducida $\phi_\infty: X_\infty \rightarrow Y_\infty$ por

$$\phi_\infty(x_0, x_1, \dots) = (\phi_0(x_0), \phi_1(x_1), \dots)$$

para cada $(x_0, x_1, \dots) \in X_\infty$.

Se dirá que Φ es continua (respectivamente sobreyectiva, inyectiva) cuando cada ϕ_n sea continua (respectivamente sobreyectiva, inyectiva).

Como comentábamos, la condición (1.6) sirve a un propósito concreto, y es garantizar que la aplicación inducida ϕ_∞ está bien definida como tal. Efectivamente, gracias a ella ocurre que

$$(x_0, x_1, \dots) \in X_\infty \Rightarrow (\phi_0(x_0), \phi_1(x_1), \dots) \in Y_\infty.$$

Es pertinente estudiar las posibilidades que tiene la aplicación inducida de heredar cualidades de las aplicaciones de la sucesión:

Proposición 1.15 *Con las notaciones de la definición anterior, se verifican:*

1. Si Φ es continua, entonces también lo es ϕ_∞ .
2. Si todos los espacios X_n, Y_n son compactos y Hausdorff,

$$\Phi \text{ sobreyectiva} \Rightarrow \phi_\infty \text{ sobreyectiva.}$$

Demostración: Denotemos por π_n y π'_n a las proyecciones n -ésimas de $\prod_{n=0}^\infty X_n$ y de $\prod_{n=0}^\infty Y_n$, respectivamente. Entonces

$$(\pi'_n \circ \phi_\infty)(x_0, x_1, \dots) = \phi_n(x_n) = (\phi_n \circ \pi_n)(x_0, x_1, \dots)$$

para cada $(x_0, x_1, \dots) \in X_\infty$. De aquí se desprende que, para cada $n \geq 0$, $\pi'_n \circ \phi_\infty$ es continua, ya que $\phi_n \circ \pi_n$ lo es (como composición de dos continuas).

Pero esto implica a su vez que la propia aplicación ϕ_∞ es continua: si tomamos un abierto básico de Y_∞ , digamos

$$Y_\infty \cap \left(\bigcap_{k=0}^n \pi_k'^{-1}(V_k) \right)$$

para ciertos abiertos $V_k \subseteq Y_k$ y cierto $n \geq 0$, se tiene que

$$\phi_\infty^{-1} \left(Y_\infty \cap \left(\bigcap_{k=0}^n \pi_k'^{-1}(V_k) \right) \right) = X_\infty \cap \left(\bigcap_{k=0}^n (\pi_k' \circ \phi_\infty)^{-1}(V_k) \right),$$

abierto de X_∞ . Así cumplimos con 1.

Asumamos ahora las hipótesis de 2. Para probar la sobreyectividad de ϕ_∞ , tomemos un elemento $y = (y_n)_{n=0}^\infty \in Y_\infty$. Consideremos para cada $n \geq 0$ el subespacio de X_n

$$A_n = \phi_n^{-1}(\{y_n\}) \neq \emptyset.$$

Por ser Y_n Hausdorff, $\{y_n\}$ es cerrado y en consecuencia A_n también. Y por ello, A_n es compacto para todo $n \geq 0$.

Si llamamos $h_n = f_n|_{A_{n+1}}$, ocurre que

$$\phi_n(h_n(a_{n+1})) = \phi_n(f_n(a_{n+1})) = g_n(\phi_{n+1}(a_{n+1})) = g_n(y_{n+1}) = y_n$$

para cada $a_{n+1} \in A_{n+1}$ debido a la condición (1.6), por lo que $h_n(A_{n+1}) \subseteq A_n$ y disponemos de la sucesión de límite inverso $\langle A_n, h_n \rangle$.

Su límite $A_\infty \subseteq X_\infty$ es no vacío en virtud del Teorema 1.13, y tiene la propiedad de que si $x = (x_0, x_1, \dots) \in A_\infty$, entonces $\phi(x) = y$.

Los límites inversos proporcionan potentes aplicaciones. Una de ellas es la que viene a continuación; extraer información sobre un espacio mediante sucesivas particiones *refinadas* del mismo.

Definición 1.16 *Dadas dos particiones $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ de un espacio topológico X , diremos que \mathfrak{V} refina \mathfrak{U} si para cada $V \in \mathfrak{V}$ existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $V \subseteq U$.*

Observemos que, en estas condiciones, U es único y cada $U \in \mathfrak{U}$ es unión de elementos de \mathfrak{V} .

Sea $\{\mathfrak{U}_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de particiones de X tal que \mathfrak{U}_{n+1} refina \mathfrak{U}_n para cada $n \geq 0$. Entonces se define la sucesión derivada de $\{\mathfrak{U}_n\}_{n=0}^\infty$ como la sucesión de límite inverso

$$\langle \mathfrak{U}_n, f_n \rangle,$$

donde \mathfrak{U}_n está dotado de la topología discreta y f_n aplica $U_n \in \mathfrak{U}_n$ en el único $U_{n+1} \in \mathfrak{U}_{n+1}$ tal que $U_n \subseteq U_{n+1}$.

Llegamos a un resultado fundamental de este primer capítulo. Si el espacio satisface las condiciones oportunas, es posible recuperarlo a partir de la construcción anterior.

Teorema 1.17 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y totalmente desconexo.*

1. *Existe una sucesión $\{\mathfrak{U}_n\}_{n=0}^\infty$ de particiones de X tal que*
 - (a) *cada \mathfrak{U}_n está formada por abiertos de diámetro menor que $1/2^n$, y*
 - (b) *\mathfrak{U}_{n+1} refina \mathfrak{U}_n para todo $n \geq 0$.*
2. *Con las notaciones de la Definición 1.16, y para cualquier sucesión que satisfaga 1, X es homeomorfo a \mathfrak{U}_∞ .*

Este esquema responde a un hecho intuitivo: “en el límite”, los subconjuntos que forman las particiones se convierten en los puntos del espacio.

Demostración: Una base de entornos de cada punto de X estará formada por las bolas cerradas y centradas en ese punto. Estos entornos son compactos, así que X es localmente compacto. Por el Teorema 1.7, deducimos que X es 0-dimensional.

En lo que concierne a 1, podremos considerar un recubrimiento de X por entornos abiertos y cerrados de diámetro menor que 1, que por compacidad suponemos finito. Sea

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_k\}$$

ese recubrimiento. Entonces definiendo

$$U_1^0 = \tilde{U}_1, U_2^0 = \tilde{U}_2 \setminus \tilde{U}_1, \dots, U_{k_0}^0 = \tilde{U}_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \tilde{U}_i \right),$$

obtenemos una partición $\mathfrak{U}_0 = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ por conjuntos abiertos y cerrados de X de diámetro menor que 1.

Razonando ahora por inducción, consideremos una partición finita $\mathfrak{U}_n = \{U_1^n, U_2^n, \dots, U_{k_n}^n\}$ de X formada por abiertos-cerrados de X de diámetro menor que $1/2^n$.

Cada $U_j^n \subseteq X$ es un espacio metrizable, compacto y 0-dimensional. Por consiguiente podemos argumentar con cada uno como hicimos con X (con la salvedad de que ahora requerimos entornos de diámetro menor que $1/2^{n+1}$), y así construir la partición deseada \mathfrak{U}_{n+1} .

Vamos entonces con 2.

En primer lugar, \mathfrak{U}_∞ es no vacío, compacto y Hausdorff porque cada \mathfrak{U}_n lo es y disponemos del Teorema 1.13.

Para dar un homeomorfismo entre X y \mathfrak{U}_∞ , interpretamos X como el límite inverso de

$$X \xleftarrow{Id_X} X \xleftarrow{Id_X} X \xleftarrow{Id_X} \dots$$

y definimos una aplicación $\Phi: \langle X, Id_X \rangle \longrightarrow \langle \mathfrak{U}_n, f_n \rangle$: ponemos $\Phi = \{\phi_n\}_{n=0}^\infty$, donde

$$\phi_n: X \longrightarrow \mathfrak{U}_n$$

envía un elemento $x \in X$ en el único $U = \phi_n(x)$ de \mathfrak{U}_n que lo contiene.

Rápidamente se comprueba que esta correspondencia satisface (1.6), luego la definición de Φ es correcta.

Φ es sobreyectiva, y como los subconjuntos de cada partición \mathfrak{U}_n son abiertos, Φ es continua. En consecuencia, basta aplicar la Proposición 1.15 para deducir que la aplicación inducida $\phi_\infty: X \longrightarrow \mathfrak{U}_\infty$ será, asimismo, sobreyectiva y continua.

Además, de su continuidad y del hecho de que X es compacto e \mathfrak{U}_∞ es Hausdorff, se sigue que ϕ_∞ es cerrada. En definitiva; llegado este punto, sólo resta demostrar que ϕ_∞ es inyectiva.

También es rápido: sean $x, y \in X$ distintos. Entonces existirá un $n \geq 0$ tal

que $0 < 1/2^n < \epsilon = d(x, y)$, y necesariamente

$$\phi_n(x) \neq \phi_n(y) \Rightarrow \phi_\infty(x) \neq \phi_\infty(y).$$

El terreno ya está preparado para probar la caracterización de los Cantor.

Definición 1.18 *Se dice que un subespacio A de un espacio topológico X es perfecto si todo punto de A es un punto de acumulación de A .*

Ejemplo 1.19 *El espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es perfecto.*

Dado un elemento $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ y un entorno $\mathcal{U}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_n)}$ de dicho elemento, es claro que siempre podemos encontrar elementos en el entorno distintos del propio σ (por ejemplo, modificando la imagen por σ de un entero distinto de i_1, i_2, \dots, i_n).

Lema 1.20 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y un abierto no vacío U de un espacio topológico perfecto, compacto, Hausdorff y totalmente desconexo X . Entonces existen abiertos U_1, U_2, \dots, U_n no vacíos y disjuntos dos a dos tales que*

$$U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n.$$

Demostración: Se argumenta por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

Como X es perfecto, U no puede ser unipuntual. Sean $x, y \in U$ distintos. Aplicando la Proposición 1.6, deducimos que existe un abierto-cerrado V de X tal que $y \notin V \ni x$. Por tanto la descomposición

$$U_1 = U \cap V, \quad U_2 = U \setminus V$$

satisface el caso $n = 2$.

Pero ahora en la etapa de inducción es igualmente válido este argumento para pasar de una descomposición

$$U = U'_1 \cup U'_2 \cup \dots \cup U'_n$$

a otra

$$U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n \cup U_{n+1},$$

aplicándolo a cualquiera de los abiertos U'_1, U'_2, \dots, U'_n .

Tengamos en cuenta que cada uno de los abiertos de la descomposición anterior es cerrado de U también.

Podemos finalmente formular:

Teorema 1.21 *Dos espacios métricos perfectos, compactos y totalmente desconexos son homeomorfos.*

Demostración: Sean X, Y tales espacios.

La clave de la demostración es construir sucesiones de particiones $\{\mathfrak{U}_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\mathfrak{V}_n\}_{n=0}^\infty$ para X e Y respectivamente de manera que

- (a) se satisfagan las condiciones de 1.17(1),
- (b) \mathfrak{U}_n y \mathfrak{V}_n tengan el mismo número de elementos para cada $n \geq 0$, esto es, que sean de la forma

$$\mathfrak{U}_n = \{U_1^n, U_2^n, \dots, U_{k_n}^n\}, \quad \mathfrak{V}_n = \{V_1^n, V_2^n, \dots, V_{k_n}^n\},$$

para cada $n \geq 0$, y

- (c) con las notaciones anteriores, U_j^n y V_j^n son unión del mismo número de elementos de \mathfrak{U}_{n+1} y \mathfrak{V}_{n+1} , respectivamente.

Para ello, alteramos la construcción inductiva que se hacía en 1.17(1).

En primer lugar, conseguimos que $\mathfrak{U}_0, \mathfrak{V}_0$ tengan el mismo número de elementos aplicando el Lema 1.20, que permite descomponer abiertos siempre que sea necesario. Los abiertos que surgen de esta descomposición siguen siendo abiertos-cerrados de X , según hemos comentado.

Por otra parte, si tenemos particiones $\mathfrak{U}_n, \mathfrak{V}_n$ verificando (b), entonces generamos las nuevas particiones $\mathfrak{U}_{n+1}, \mathfrak{V}_{n+1}$ como en 1.17(1), pero razonando como en el párrafo anterior para conseguir (c). Esto implicará a su vez que $\mathfrak{U}_{n+1}, \mathfrak{V}_{n+1}$ cumplen con (b).

De esta manera, las sucesiones resultantes tienen ciertamente las propiedades deseadas. En particular, el Teorema 1.17 asegura que \mathfrak{U}_∞ es homeomorfo a X y que \mathfrak{V}_∞ es homeomorfo a Y .

Dar un homeomorfismo entre \mathfrak{U}_∞ y \mathfrak{V}_∞ es lo único que falta. Naturalmente, se tratará de una aplicación inducida.

La única dificultad es ordenar la notación. Para cada $n \geq 1$, tomamos enteros $1 = q_0 < q_1 < \dots < q_{k_{n-1}} = k_n + 1$ y numeramos los elementos de \mathfrak{U}_n de manera que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k_{n-1}\}$

$$\{j \in \{1, 2, \dots, k_n\}; U_j^n \subseteq U_i^{n-1}\} = \{j \in \{1, 2, \dots, k_n\}; q_{i-1} \leq j < q_i\}.$$

Idénticamente se adecúa la notación para la sucesión $\{\mathfrak{V}_n\}_{n=0}^\infty$.

Así dispuesto, definimos para cada $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \phi_n: \mathfrak{U}_n &\longrightarrow \mathfrak{V}_n \\ U_n^j &\longmapsto V_n^j, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$j = 1, 2, \dots, k_n$.

Esta sucesión de aplicaciones claramente verifica (1.6), y la aplicación que induce es continua (Proposición 1.15) y biyectiva.

Más aún, su inversa es la aplicación inducida por una sucesión de aplicaciones de la misma forma que (1.7). Esto concluye la prueba, pues entonces la continuidad de la inversa se deduce nuevamente con la Proposición 1.15.

Un poco más de trabajo permite establecer un espacio modelo:

Corolario 1.22 $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es, módulo homeomorfismo, el único espacio métrico perfecto, compacto y totalmente desconexo.

Demostración: Después de todo lo que hemos visto hasta ahora sobre este espacio, falta probar solamente su metrizabilidad y su compacidad.

En cuanto a lo primero, si se define

$$d(\rho, \sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}} |\rho(n) - \sigma(n)|$$

para cada $\rho, \sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, entonces se comprueba que d es una métrica en $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, y que la topología que induce coincide con la que ya teníamos.

Una vez confirmada la metrizabilidad, podemos recurrir a la caracterización secuencial de la compacidad para concluir la prueba, mediante un argumento diagonal clásico:

Sea $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. La coordenada 0 de los elementos de la sucesión sólo admite dos posibilidades: 0 ó 1. Por lo tanto existirán infinitos términos de la sucesión que tengan uno de estos dos números como coordenada 0. Denotemos por $\{\sigma_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ a la subsucesión formada por estos términos.

Repetimos el argumento ahora con las coordenadas -1, 0 y 1 y la subsucesión que acabamos de obtener; tendremos una subsucesión $\{\sigma_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ de la anterior (y, por tanto, de la original) tal que todos sus términos coinciden en la susodichas coordenadas.

Una vez completado este proceso por inducción, la subsucesión diagonal

$$\{\sigma_k^k\}_{k=1}^{\infty}$$

es una subsucesión de la sucesión original que converge en $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

Capítulo 2

Laminaciones

Este segundo capítulo está dedicado presentar brevemente las llamadas *laminaciones*.

Intuitivamente, se trata de espacios dotados de una partición en variedades denominadas *hojas*, cuya disposición obedece a un determinado modelo transversal. Como sugiere la terminología, dichos espacios se asemejan a una superposición de láminas o capas.

Para precisar esta idea, necesitaremos una descripción de las laminaciones en términos de cartas locales:

Definición 2.1 Sean \mathcal{M} y \mathcal{T} dos espacios topológicos, y n, k enteros con $n > 0, k \geq 0$.

1. Se dice que un abierto conexo U de \mathcal{M} es un abierto foliado (o distinguido) de \mathcal{M} (de dimensión n y modelado transversalmente por \mathcal{T}) si existen un abierto T de \mathcal{T} , un abierto P de \mathbb{R}^n que contiene al origen y un homeomorfismo

$$h: U \longrightarrow P \times T.$$

En estas condiciones, el par (U, h) será una carta foliada.

Por otra parte, las contraímagenes de la forma $h^{-1}(P \times \{t\}), t \in T$ se denominan placas (del abierto U). Asimismo, diremos que T es una transversal local, que se identifica habitualmente con $h^{-1}(\{\mathbf{0}\} \times T)$.

2. Sean $(U_1, h_1), (U_2, h_2)$ dos cartas foliadas como en 1. Se dice que (U_1, h_1) y (U_2, h_2) son compatibles si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o bien $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ y se satisfacen:

(a) El cambio de carta

$$h_j \circ h_i^{-1}: h_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow h_j(U_i \cap U_j)$$

admite una expresión de la forma

$$(h_j \circ h_i^{-1})(\mathbf{x}, t) = (\phi_{ij}(\mathbf{x}, t), \gamma_{ij}(t)), \quad (\mathbf{x}, t) \in h_i(U_i \cap U_j),$$

de modo que si denotamos por π_1, π_2 a las proyecciones de los productos involucrados (que son siempre abiertas), se tienen las condiciones de regularidad:

(b) γ_{ij} es un homeomorfismo entre los abiertos (no vacíos)

$$\pi_2(h_i(U_i \cap U_j)) \subseteq T_i, \quad \pi_2(h_j(U_i \cap U_j)) \subseteq T_j,$$

y

(c) para cada $t \in T_i$, $\phi_{ij}(\cdot, t)$ es una C^k -equivalencia entre los abiertos (no vacíos)

$$\pi_1((P_i \times \{t\}) \cap h_i(U_i \cap U_j)) \subseteq P_i, \quad \pi_1((P_i \times \{\gamma_{ij}(t)\}) \cap h_j(U_i \cap U_j)) \subseteq P_j.$$

3. Sea $\mathfrak{A} = \{(U_i, h_i)\}_{i \in I}$ una familia de cartas foliadas como en 2. Diremos que \mathfrak{A} es un atlas foliado para \mathcal{M} (de dimensión n , clase C^k y relativo a \mathcal{T}) si $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de \mathcal{M} y dos cartas cualesquiera de \mathfrak{A} son compatibles.

Asociado al atlas \mathfrak{A} , se define el eje o transversal completa de \mathfrak{A} como la unión disjunta $\bigsqcup_{i \in I} T_i = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times T_i)$.

La definición anterior es larga y algo abstracta, así que es conveniente hacer una lectura más geométrica de lo que estamos considerando.

El que hemos definido es un concepto de atlas que responde a la concepción habitual. En él, los cambios de carta deben satisfacer una condición de compatibilidad (representada aquí por 2) acorde con la estructura que se pretende concebir.

En este caso, dicha compatibilidad se traduce en que las placas de un abierto foliado deben tener, en caso de intersección, *continuidad* en las placas de otro abierto foliado. Haciendo una lectura en las cartas, γ_{ij} determina qué placas de un abierto “conectan” con qué placas del otro. Y, por su parte, ϕ_{ij}^t describe cómo es cada una de esas “conexiones”.

Definición 2.2 *Dos atlas foliados como en 2.1(3) son equivalentes si su unión es nuevamente un atlas foliado del mismo tipo.*

Dicho de otro modo, si eligiendo dos cartas cualesquiera de sendos atlas, éstas son compatibles según 2.1(2).

Es inmediato que la relación que define la equivalencia entre atlas foliados de la forma 2.1(3) es una relación de equivalencia.

Definición 2.3 *Con las notaciones de la Definición 2.1, una laminación de dimensión n y clase C^k modelada transversalmente por \mathcal{T} es una clase de equivalencia de atlas foliados.*

En cada clase de equivalencia de atlas existe un representante privilegiado, que es el atlas maximal; éste se obtiene como la unión de todos los atlas de la clase. De este modo, la laminación puede identificarse con dicho atlas maximal.

Como comentábamos, los principales objetos asociados a una laminación son las hojas.

Se entenderá que, en presencia de una laminación, las cartas consideradas corresponden al atlas maximal.

Proposición 2.4 *Mantengamos las notaciones anteriores. La relación \sim dada en \mathcal{M} por*

$$\begin{aligned} p \sim q \text{ si y sólo si existen placas } P_1, P_2, \dots, P_n \text{ tales que} \\ P_j \cap P_{j+1} \neq \emptyset, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ p \in P_1, q \in P_n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia por esta relación son subconjuntos conexos de \mathcal{M} , que se denominan hojas.

Demostración: Es sencillo verificar que se trata de una relación de equivalencia.

Por otra parte, la conexión de cada hoja está garantizada porque ésta se puede escribir como una unión de caminos finitos de placas, en el sentido de (2.1) (véase [2, p. 130]).

En la práctica, el atlas maximal no está disponible, y se dispone únicamente de representantes intermedios. Pero esto no es inconveniente, porque las hojas pueden definirse también mediante placas de cualquier atlas que sea equivalente al maximal, con idéntico resultado. En otras palabras, las hojas de la laminación se pueden obtener a partir de cualquier atlas de la clase de equivalencia.

De la Proposición 2.4 se obtiene que cada hoja posee una estructura natural como variedad de dimensión n y clase C^k . El ejemplo más sencillo de laminación parte de esta idea:

Ejemplo 2.5 (Laminación horizontal) Si \mathcal{M} es una variedad de clase C^k y dimensión n y \mathcal{T} es un espacio topológico, entonces $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$ admite estructura de laminación de dimensión n y clase C^k modelada transversalmente por \mathcal{T} .

La estructura diferenciable proporciona un atlas foliado para $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$; si $\mathfrak{A}_0 = \{(P_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ es un atlas de \mathcal{M} como variedad, basta construir para cada $i \in I$ una nueva carta (ahora foliada) $h_i: P_i \times \mathcal{T} \rightarrow \phi_i(P_i) \times \mathcal{T}$ dada por

$$h_i(\mathbf{p}, t) = (\phi_i(\mathbf{p}), t), \quad (\mathbf{p}, t) \in P_i \times \mathcal{T}.$$

En este caso, la descomposición de \mathcal{M} en hojas viene dada por $\mathfrak{H} = \{\mathcal{M} \times \{t\}\}_{t \in \mathcal{T}}$.

Ejemplo 2.6 (Shift de Bernoulli) Un tipo de laminaciones que tiene especial interés lo forman aquellas que están modeladas transversalmente por un conjunto de Cantor.

Consideramos el producto $[0, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

$\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es, de acuerdo con el Capítulo 1, un conjunto de Cantor. Además, $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ admite un automorfismo, que es el denominado *Shift de Bernoulli*:

$$\mathcal{S}: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}},$$

que aplica un elemento $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ en

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\sigma) : \mathbb{Z} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ n &\longmapsto \sigma(n+1). \end{aligned}$$

Definimos a partir de \mathcal{S} la siguiente relación de equivalencia:

$$(1, \sigma) \sim (0, \mathcal{S}(\sigma)), \quad \sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}.$$

De esta manera, lo que estamos haciendo es “pegar” extremos de los intervalos según el Shift de Bernoulli, generándose las hojas de la laminación. Estas hojas consisten en las componentes conexas por caminos del cilindro

$$([0, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}) / \sim,$$

que son unión de conjuntos de la forma

$$\left(\bigcup_{i=1}^k ([0, 1] \times \{\sigma_i\}) \right) / \sim \tag{2.2}$$

para $\sigma_{i+1} = \mathcal{S}(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, $k \geq 1$.

El atlas dado por las dos cartas siguientes determina esta estructura:

$$\begin{aligned} \phi_1: (-1/2, 1/2) \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow ([0, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}) / \sim \\ (x, \sigma) &\longmapsto [(x + 1/2, \sigma)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2: (-1/2, 1/2) \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow ([0, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}) / \sim \\ (x, \sigma) &\longmapsto \begin{cases} [(x + 1, \sigma)] & \text{si } -1/2 < x \leq 0, \\ [(x, \mathcal{S}(\sigma))] & \text{si } 0 < x < 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Efectivamente, las placas asociadas a estas cartas

$$\phi_1(((-1/2, 1/2) \times \{\sigma\})), \phi_2(((-1/2, 1/2) \times \{\sigma\})), \sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$$

conforman los subconjuntos de la forma (2.2).

Un concepto de gran interés asociado a las laminaciones es la *holonomía*. A grandes rasgos, el estudio de la holonomía proporciona información sobre cómo quedan “envueltas” las hojas. Se trata de obtener características globales sobre la laminación, más allá del aspecto local que viene dado por las cartas.

Por ejemplo, en el caso del Shift de Bernoulli se pueden distinguir dos situaciones.

Por un lado, existen sucesiones en $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ con la propiedad de que, aplicándole el Shift un número finito de veces, se vuelve a obtener la sucesión de partida. Tal es el caso de la sucesión σ que alterna ceros y unos,

$$\sigma = (\dots 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \dots),$$

para la cual $\mathcal{S}^2(\sigma) = \sigma$. En general, si colocamos k ceros entre cada dos unos, se tiene $\mathcal{S}^{k+1}(\sigma) = \sigma$. Lo que estamos diciendo es que la hoja que contiene σ “vuelve sobre sí” tras dar $k+1$ vueltas al cilindro. En este caso, se habla de que la hoja *tiene holonomía no trivial*.

Pero hay casos en que esto no es así. Es decir, casos en que la hoja no vuelve sobre sí; pensemos por ejemplo en una sucesión σ formada íntegramente por ceros, salvo un uno en cierta posición. Ésta satisface

$$\mathcal{S}^k(\sigma) \neq \sigma \quad \forall k \geq 1.$$

Cuando esto ocurre, se dice que la hoja que contiene σ *tiene holonomía trivial*, o también que *no tiene holonomía*.

Rigurosamente, la dinámica transversa de una laminación se aborda mediante el llamado *pseudogrupo de holonomía* de la laminación. Se trata de un pseudogrupo topológico generado por las transformaciones γ_{ij} entre abiertos de la transversal, y que no depende del atlas considerado. Es decir, pseudogrupos de holonomía de atlas equivalentes son equivalentes en un cierto sentido, denominado de Haefliger (véase [3, pp. 1-14]). Dicho pseudogrupo alberga entonces información sobre la disposición global de las hojas.

No obstante, es posible también hacer un estudio individualizado de la holonomía de cada hoja. Para ello, se recurre al *grupo de holonomía* de la hoja, formado por gérmenes de transformaciones del pseudogrupo de holonomía que dejan invariante un determinado punto en la transversal de la hoja en cuestión. En este caso, ocurre por ejemplo que la holonomía trivial se traduce en que el grupo de holonomía sea trivial.

Ejemplo 2.7 (Foliación racional del toro) Consideramos el toro 2-dimensional $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y un entero $k \geq 1$. Identificando \mathbb{S}^1 con \mathbb{R}/\mathbb{Z} , describimos la aplicación $f: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$,

$$f(\alpha + \mathbb{Z}, \beta + \mathbb{Z}) = k \cdot \alpha + \beta + \mathbb{Z}.$$

Las imágenes inversas de puntos de \mathbb{S}^1 forman hojas de una laminación del toro. Estas hojas tienen holonomía, y vuelven sobre sí tras dar k vueltas al toro.

Concretamente, la imagen inversa de cada punto $\gamma + \mathbb{Z}$ de \mathbb{S}^1 en cada circunferencia $\mathbb{S}^1 \times \{\beta + \mathbb{Z}\}$ está formada por k puntos

$$\left(\frac{\gamma}{k} - \frac{\beta}{k} + \frac{j}{k} + \mathbb{Z}, \beta + \mathbb{Z} \right), \quad 0 \leq j \leq k - 1.$$

Se observa entonces que cada vez que se completa una de las k vueltas que comentábamos (esto es, β alcanza un valor entero), los k puntos giran la k -ésima parte de una vuelta, asociándose cada uno con el siguiente en el sentido de giro. Tras k vueltas, vuelven a su posición original, cerrándose la hoja.

Capítulo 3

Espacios de mosaicos

En el último capítulo vamos a exponer la construcción de un espacio métrico formado por mosaicos en \mathbb{R}^2 . Éste admitirá una estructura de laminación, y proporcionará variados ejemplos al respecto.

El primer paso será definir adecuadamente lo que entenderemos por mosaico. En principio, un mosaico no es más que una teselación del plano, aunque provista de algunas restricciones.

En este sentido, comenzaremos estableciendo un “modelo” para las *teselas* que formarán nuestros mosaicos:

Definición 3.1 *Llamaremos prototesela a todo subconjunto P de \mathbb{R}^2 que satisfaga las siguientes condiciones:*

1. P es homeomorfo a la bola cerrada unidad $\overline{B}(0, 1)$.
2. $\mathbf{0} \in \overset{\circ}{P}$.

La condición 1 no restringe demasiado la forma de las prototeselas, pues éstas podrían tener un aspecto muy distinto al de, por ejemplo, un polígono. Sin embargo, será suficiente para desarrollar las propiedades que nos interesan.

Por otra parte, 2 responderá al interés de asociar al mosaico un conjunto de puntos del plano, como veremos después.

Definición 3.2 *Llamaremos tesela a cualquier subconjunto T de \mathbb{R}^2 tal que existen un vector $\mathbf{v}_T \in \mathbb{R}^2$ y una prototesela P con $T - \mathbf{v}_T = P$.*

Observemos que, en particular, T será también homeomorfo a la bola cerrada unidad, ya que toda traslación es un homeomorfismo. También $\mathbf{v}_T \in \overset{\circ}{T}$, debido a que $\mathbf{0} \in \overset{\circ}{P}$.

A la hora de definir las teselas, pueden permitirse también combinaciones de rotaciones y traslaciones de las prototeselas; incluso simetrías más generalmente. Aquí nos limitamos a considerar traslaciones, a lo que añadiremos el requisito adicional de que el conjunto de prototeselas de referencia sea finito.

Si dos subconjuntos A y B de \mathbb{R}^2 son isométricos a través de una traslación, diremos que A es una *copia por traslación* de B (y viceversa).

Definición 3.3 *Un mosaico en \mathbb{R}^2 es una familia numerable M de teselas que satisface:*

1. *Existe un conjunto finito de prototeselas \mathcal{P} de manera que toda tesela $T \in M$ es una copia por traslación de alguna prototesela $P \in \mathcal{P}$.*
2. *M es un recubrimiento de \mathbb{R}^2 .*
3. *Dos teselas distintas de M tienen interiores disjuntos.*

En este caso, diremos que M es un mosaico de tipo \mathcal{P} .

El conjunto de los mosaicos de tipo \mathcal{P} se denotará por $\mathbb{M}(\mathcal{P})$.

El que \mathcal{P} sea finito proporciona, por ejemplo, una cota común para el diámetro de las teselas. O también (como veremos) la finitud local de los mosaicos, como recubrimientos de \mathbb{R}^2 .

Para complementar esta Definición, son oportunos algunos comentarios.

En primer lugar, podemos asumir que el conjunto \mathcal{P} de prototeselas no es *redundante*, en el sentido de que no existen dos prototeselas de modo que una sea copia por traslación de la otra.

Con esta suposición, para cada tesela $T \in M$ el vector $-\mathbf{v}_T$ que traslada T en su prototesela modelo $P \in \mathcal{P}$ es único:

si existieran dos vectores distintos con tal propiedad, rápidamente deducimos que sería $T + \mathbf{u} = T$ para algún vector \mathbf{u} no nulo. Pero entonces razonando por inducción $T + n \cdot \mathbf{u} = T$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, T se conservaría por traslaciones de vectores con módulo arbitrariamente grande, lo cual es imposible por compacidad (luego acotación) de T .

Esta unicidad permite a su vez distinguir un punto en cada tesela del mosaico; con las notaciones empleadas, dicho punto será \mathbf{v}_T para cada tesela $T \in M$. Una manera de formalizar esta idea es, en lugar de las teselas originales, considerar los pares (T, \mathbf{v}_T) , que llamaremos *teselas punteadas*.

Y con ellos, es posible hablar del *mosaico punteado de M* ,

$$\dot{M} = \{(T, \mathbf{v}_T); T \in M\},$$

que será de utilidad a la hora de construir la laminación del espacio de

mosaicos.

Ligados a los mosaicos, también es conveniente describir lo que serán los *motivos*. Un *motivo* es cualquier subconjunto finito (de teselas) de un mosaico $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$, ya sea conexo o no.

Una última cuestión es que, dado un conjunto de prototeselas \mathcal{P} , es posible que $\mathbb{M}(\mathcal{P})$ sea vacío. Existen numerosos ejemplos en que esto no es así, luego podemos pensar en lo sucesivo que $\mathbb{M}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$.

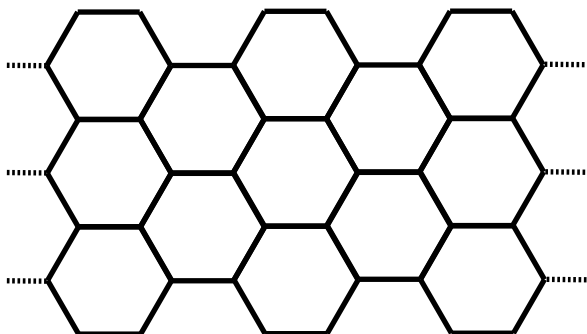
Ejemplo 3.4 (Mosaicos periódicos) Los mosaicos más sencillos son aquellos que se denominan *periódicos*. En el plano, un mosaico $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ se denomina *periódico* si existen dos vectores $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ linealmente independientes tales que

$$M + w_1 = M + w_2 = M,$$

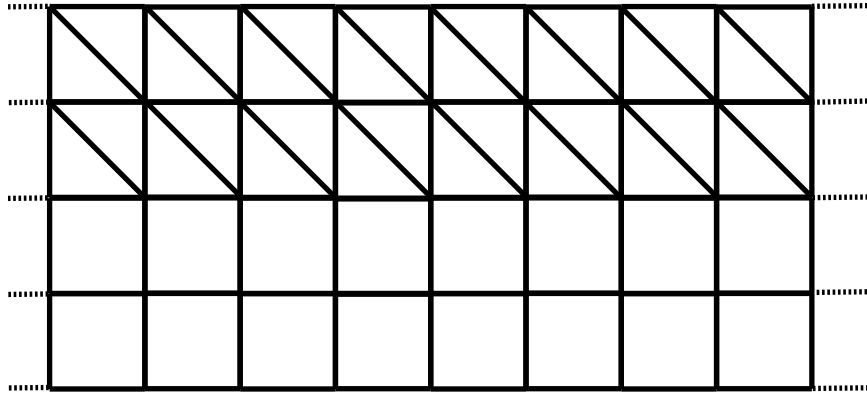
y, como consecuencia,

$$M + n \cdot w_1 + m \cdot w_2 = M \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplos de este tipo de mosaicos lo proporcionan el mosaico regular por cuadrados, triángulos o hexágonos (regulares).



Hay una noción más débil de periodicidad en \mathbb{R}^2 , y es que el mosaico sea periódico en una sola dirección: un mosaico $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ es 1-periódico si existe un vector w no nulo tal que $M + w = M$. Naturalmente, la periodicidad (ó 2-periodicidad, según esta terminología) implica la 1-periodicidad, aunque no al revés. No es difícil construir un ejemplo que ilustre tal afirmación:



En relación con la periodicidad, un concepto que tiene gran interés en el terreno de los mosaicos es la *aperiodicidad*. Un mosaico $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ se denomina *aperiódico* si para todo $w \neq 0$ se verifica $M + w \neq M$.

Hay que recalcar que ser aperiódico no es lo mismo que ser no periódico; el mosaico anterior es no periódico pero 1-periódico, luego no aperiódico. Sin embargo, sí es cierto que todo mosaico aperiódico es no periódico, claro.

Ejemplo 3.5 (Mosaicos repetitivos) La periodicidad es una condición bastante fuerte sobre una teselación del plano.

Ésta responde a la idea de un mosaico que *se repite*. Pero hay otras formulaciones más sutiles, que por ello tienen mayor interés.

Se dice que un mosaico $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ es *repetitivo* si para cada motivo $m \subseteq M$ existe un radio $R > 0$ tal que toda bola de radio R contiene una copia por traslación del motivo m .

Este concepto tiene su versión “uniforme”: M es *uniformemente repetitivo* si para cada $r > 0$ existe un radio $R > 0$ de manera que cualquier bola de radio R contiene una copia por traslación de cualquier motivo de diámetro menor que r . Es decir, el radio R se puede tomar común para todos los mosaicos con diámetro menor que una constante positiva dada.

Se desprende de esto que todo mosaico uniformemente repetitivo es repetitivo. Y, también, la periodicidad es más fuerte que la repetitividad. Lo probamos:

Sea $r > 0$, y m un motivo de diámetro menor que r (podemos suponerlo contenido en una bola $B(x_0, r)$, para cierto $x_0 \in \mathbb{R}^2$) de un mosaico periódico $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$.

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ los vectores linealmente independientes tales que $M + u =$

$M + v = M$. En vistas de probar que M es, de hecho, uniformemente repetitivo, afirmamos que es válida la elección $R = r + \max\{\|u\|, \|v\|\}$.

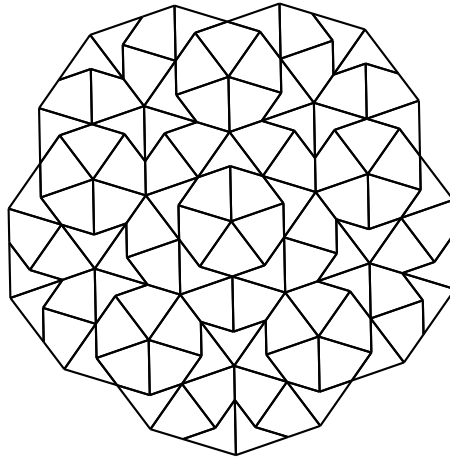
Consideremos por ello una bola $B(x, R)$, centrada en un punto cualquiera $x \in \mathbb{R}^2$. Gracias a la independencia lineal de u y v , existen números reales λ, μ tales que $x - x_0 = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$. Asimismo, son de interés los enteros $m_i = \lfloor \lambda \rfloor + i, n_j = \lfloor \mu \rfloor + j, 0 \leq i, j \leq 1$.

En estas condiciones, existe un par (i, j) tal que

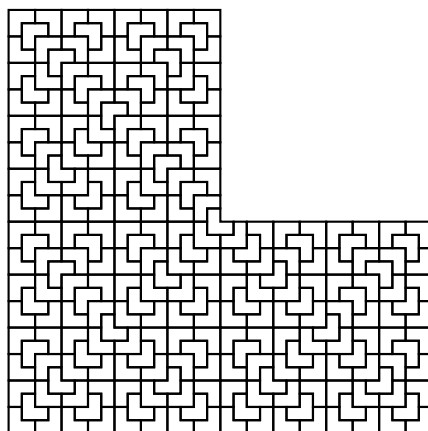
$$B(x_0 + m_i \cdot u + n_j \cdot v, r) \subseteq B(x, R);$$

pero por periodicidad $m \subseteq B(x_0 + m_i \cdot u + n_j \cdot v, r) \subseteq B(x, R)$.

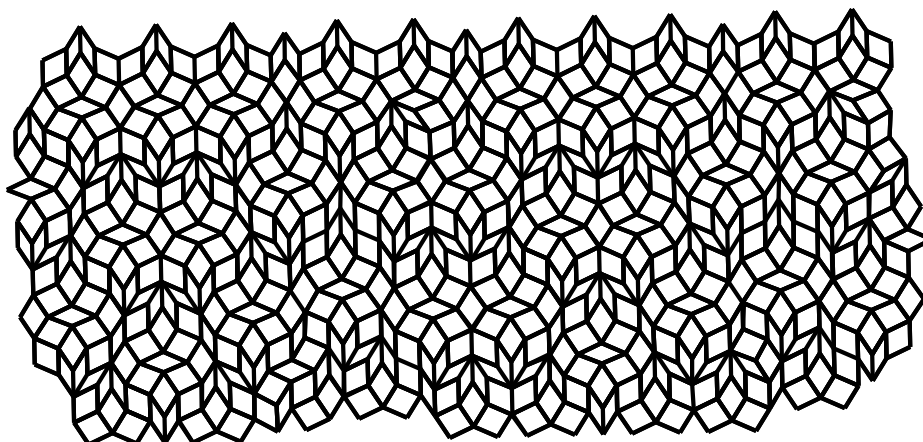
No obstante, es de hecho estrictamente más fuerte, con lo que la definición no es superflua. Pueden considerarse a tal efecto algunos de los célebres mosaicos de Penrose formados por *dardos* y *cometas*.



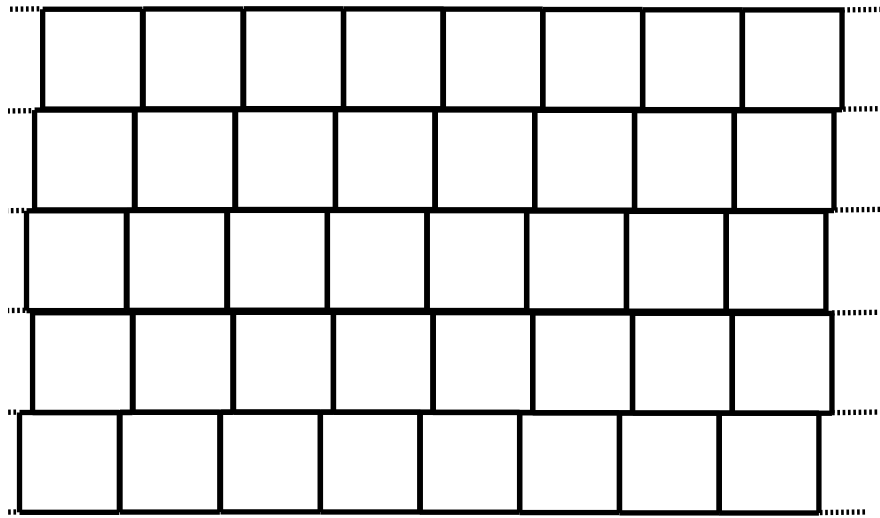
También son notables otras teselaciones repetitivas y no periódicas (incluso aperiódicas) menos populares. Muchas de ellas surgen de procesos de *inflación* y *deflación*, en los que las teselas forman motivos cada vez mayores que a su vez se comportan como las teselas originales. Por ejemplo, el mosaico conocido como *chair substitution tiling*.



Aunque en ejemplos como éstos aparecen giros y reflexiones de teselas, es posible después de todo elegir un número finito de prototeselas que conforman el mosaico mediante traslaciones. Por esta razón, tienen sentido en nuestro contexto.



Existen conjuntos de prototeselas que sólo permiten teselar el plano de manera aperiódica. A saber, con algunas de las anteriores se puede forzar la configuración aperiódica mediante la colocación de “muescas” y “salientes” en las teselas, a modo de “puzzle” si se quiere. En cualquier caso, la simplicidad del conjunto de prototeselas no debe engañarnos. Es posible construir únicamente con cuadrados un mosaico bastante patológico, que ni tan siquiera es repetitivo.



Esto es, cada fila de cuadrados se desplaza por una cantidad $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ distinta, con respecto al origen por ejemplo.

Una construcción similar permite observar que existen mosaicos repetitivos, pero que no lo son uniformemente. La idea es generar una teselación que se comporte como la sucesión numérica

...1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 5 1 2 1 3 1 2 1...

cuya formación responde al siguiente esquema:

Se comienza colocando unos en las posiciones pares. Las posiciones restantes (las impares) forman un subconjunto de \mathbb{Z} equipotente a \mathbb{Z} , luego se puede repetir el argumento: tendremos doses en las posiciones pares de este subconjunto, y las restantes formarán de nuevo un subconjunto equipotente a \mathbb{Z} , etc. Iterando el proceso, se llega a semejante sucesión.

Ésta es tal que cualquier *motivo* finito se repite uniformemente, pero aquellos que tienen *longitud* 1 (los propios términos de la sucesión) se repiten con menor frecuencia cuanto más alto es el número, lo que provoca una falta de uniformidad. Pero lo mismo ocurre, en general, para aquellos que tienen longitud acotada.

Volvamos a los mosaicos: el plano se tesela mediante filas de cuadrados, numeradas según \mathbb{Z} .

Las filas que se corresponden con un número común de la sucesión están alineadas verticalmente. No obstante, para cada natural n tomamos un cierto desplazamiento $\epsilon_n \in [0, \frac{1}{2})$, de modo que si $n \neq m$ entonces $\epsilon_n \neq \epsilon_m$. Por tener una referencia, podemos pensar que $\epsilon_1 = 0$. Es decir, las filas asociadas a un cierto natural quedan desplazadas una cantidad particular y distinta de las demás.

Como es de esperar, la falta de uniformidad en el mosaico es más complicada que en la sucesión. Sin embargo, ésta se observa, por ejemplo, al tomar motivos con diámetro comúnmente acotado que involucran teselas de filas consecutivas.

Nuestro marco de trabajo será $\mathbb{M}(\mathcal{P})$; pasamos ya a establecer en él una métrica, y con ella una topología.

En este espacio, el origen de \mathbb{R}^2 tendrá un papel relevante. Intuitivamente, la distancia entre dos mosaicos será menor cuanto mayor sea su coincidencia, salvo una pequeña traslación, en torno al origen. Lo detallamos:

Por comodidad, para referirnos al subconjunto de teselas de un mosaico dado $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ que cortan a un cierto subconjunto A de \mathbb{R}^2 , denotaremos

$$M_A = \{T \in M; T \cap A \neq \emptyset\}. \quad (3.1)$$

Si A es acotado, entonces M_A es de hecho un motivo; equivalentemente, $M_{B(0,R)}$ es un motivo para todo $R > 0$. Así lo veremos más adelante, al probar la finitud local de los mosaicos.

Por otra parte, el desplazamiento del mosaico M por un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ consiste en desplazar las teselas que lo forman,

$$M + \mathbf{v} = \{T + \mathbf{v}; T \in M\},$$

que es de nuevo un mosaico.

Aclarada la notación, tomemos dos mosaicos $M, M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$. Se define el conjunto

$$A_{M,M'} = \left\{ \epsilon \in (0, 1); \exists \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in B(0, \epsilon); (M + \mathbf{v})_{B(0, \frac{1}{\epsilon})} = (M' + \mathbf{v}')_{B(0, \frac{1}{\epsilon})} \right\}.$$

Consecuentemente, la presunta distancia entre M y M' será

$$d(M, M') = \begin{cases} 1 & \text{si } A_{M,M'} = \emptyset, \\ \inf A_{M,M'} & \text{si } A_{M,M'} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Notemos que en el caso $A_{M,M'} \neq \emptyset$, $\inf A_{M,M'}$ nunca se puede alcanzar.

Proposición 3.6 *d es una métrica sobre $\mathbb{M}(\mathcal{P})$.*

Demostración: Nos limitamos a comprobar las propiedades.

En primer lugar, es claro que $d(M, M') \geq 0$ para todos $M, M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$.

Además, se sigue de la simetría de la definición que $d(M, M') = d(M', M)$.

Si $M = M'$, entonces podemos tomar vectores $\mathbf{v}, \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ para cada $\epsilon \in (0, 1)$, lo que implica rápidamente que $d(M, M') = 0$.

Recíprocamente, sean $M, M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ tales que $d(M, M') = 0$. Por la caracterización de inferior, existe una sucesión $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (0, 1)$ tal que $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dispondremos para cada $n \geq 1$ de vectores $\mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_n \in B(\mathbf{0}, \epsilon_n)$ tales que

$$(M + \mathbf{v}_n)_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon_n})} = (M' + \mathbf{v}'_n)_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon_n})},$$

o lo que es lo mismo,

$$(M + \mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n)_{B(-\mathbf{v}'_n, \frac{1}{\epsilon_n})} = M'_{B(-\mathbf{v}'_n, \frac{1}{\epsilon_n})}, \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{0}$, $\mathbf{v}'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{0}$.

Fijemos una tesela $T \in M$. Si vemos que $T \in M'$, habremos terminado: la inclusión $M \subseteq M'$ implica $M = M'$, debido a que los mosaicos recubren el plano.

La idea es simple, pero requiere algo de trabajo.

En primer lugar, T es un compacto de \mathbb{R}^2 y $\|\mathbf{u}_n\| < 2\epsilon_n < 2 \quad \forall n \geq 1$, así que existe $R_T > 0$ tal que $T + \mathbf{u}_n \subseteq B(\mathbf{0}, R_T) \quad \forall n \geq 1$. Y observemos que para cada $n \geq 1$,

$$B\left(-\mathbf{v}'_n, \frac{1}{\epsilon_n}\right) \supseteq B\left(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon_n} - \|\mathbf{v}'_n\|\right) \supseteq B\left(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon_n} - \epsilon_n\right) \supseteq B\left(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon_n} - 1\right),$$

de manera que existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$B\left(-\mathbf{v}'_n, \frac{1}{\epsilon_n}\right) \supseteq B(\mathbf{0}, R_T) \supseteq T + \mathbf{u}_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Por otra parte, fijémonos en el punto distinguido de la tesela T , $\mathbf{v}_T \in \mathring{T}$. Dispondremos para él de un radio $r > 0$ tal que $B(\mathbf{v}_T, r) \subseteq \mathring{T}$, luego

$$B(\mathbf{v}_T + \mathbf{u}_n, r) \subseteq (T + \mathbf{u}_n)^\circ = \mathring{T} + \mathbf{u}_n \quad \forall n \geq 1.$$

Entonces de un $n_1 \geq 1$ en adelante, $\epsilon_n < \frac{r}{2}$, lo que implica que

$$\|\mathbf{u}_n\| < 2\epsilon_n < r \quad \forall n \geq n_1.$$

O sea que si $n \geq N = \max\{n_0, n_1\}$, entonces teniendo en cuenta (3.2)

$$\|\mathbf{u}_n\| < 2\epsilon_n < r, \quad T + \mathbf{u}_n \in M'.$$

Sea T' la tesela $T' = T + \mathbf{u}_N$ de M' . Veamos que, forzosamente, $T = T'$.

Afirmamos que $T' = T + \mathbf{u}_n \quad \forall n \geq N$. Si existiese $n > n_0$ con $T' \neq T + \mathbf{u}_n$,

por (3.2) sería de todos modos $T + \mathbf{u}_n = S'$ para cierta tesela $S' \in M', S' \neq T'$. Como dos teselas de M' tienen interiores disjuntos y $\mathbf{v}_{T'} = \mathbf{v}_T + \mathbf{u}_N$
 $\mathbf{v}_{S'} = \mathbf{v}_T + \mathbf{u}_n$,

$$B(\mathbf{v}_T + \mathbf{u}_N, r) \cap B(\mathbf{v}_T + \mathbf{u}_n, r) = \emptyset.$$

Se sigue que

$$2r \leq \|\mathbf{v}_T + \mathbf{u}_N - (\mathbf{v}_T + \mathbf{u}_n)\| = \|\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_n\| < 2\epsilon_N + 2\epsilon_n < r + r = 2r,$$

absurdo.

Sea ahora $\mathbf{w} \in T$. Por lo que acabamos de probar, $\mathbf{w} + \mathbf{u}_n \in T' \quad \forall n \geq N$, y mientras tanto $\mathbf{w} + \mathbf{u}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{w}$. Así pues, el carácter cerrado de T' permite deducir que $\mathbf{w} \in T'$, y con ello que $T \subseteq T'$.

La otra contención se prueba igual, poniendo $T = T' - \mathbf{u}_n \quad \forall n \geq N$.

Sólo resta entonces demostrar la desigualdad triangular para d . En esta línea, pensemos en tres mosaicos $M, M', M'' \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$. Queremos demostrar que

$$d(M, M') \leq d(M, M'') + d(M', M'').$$

Según la definición de d , podemos suponer que $d(M, M'') + d(M', M'') < 1$. En caso contrario, la desigualdad estaría probada. En particular, estamos suponiendo que $A_{M', M''}, A_{M, M''} \neq \emptyset$, así que podemos considerar $\epsilon, \epsilon' \in (0, 1)$ tales que existen vectores $\mathbf{v}, \mathbf{v}_0'' \in B(\mathbf{0}, \epsilon)$, $\mathbf{v}', \mathbf{v}_1'' \in B(\mathbf{0}, \epsilon')$ de suerte que

$$\begin{aligned} (M + \mathbf{v})_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon})} &= (M'' + \mathbf{v}_0'')_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon})}, \\ (M' + \mathbf{v}')_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon'})} &= (M'' + \mathbf{v}_1'')_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon'})}. \end{aligned}$$

Es más; por la caracterización del inferior, es posible tomar ϵ y ϵ' de modo que $\epsilon + \epsilon' < 1$. Si llamamos $R_0 = \frac{1}{\epsilon'} - \|\mathbf{v}_0''\| > 0$, $R_1 = \frac{1}{\epsilon} - \|\mathbf{v}_1''\| > 0$, podemos garantizar (como razonábamos más arriba) las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (M + \mathbf{v} + \mathbf{v}_1'')_{B(\mathbf{0}, R_1)} &= (M'' + \mathbf{v}_0'' + \mathbf{v}_1'')_{B(\mathbf{0}, R_1)}, \\ (M' + \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0'')_{B(\mathbf{0}, R_0)} &= (M'' + \mathbf{v}_0'' + \mathbf{v}_1'')_{B(\mathbf{0}, R_0)}. \end{aligned}$$

O sea que

$$(M' + \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0'')_{B(\mathbf{0}, R)} = (M + \mathbf{v} + \mathbf{v}_1'')_{B(\mathbf{0}, R)},$$

siendo $R = \min\{R_0, R_1\} > 0$, $\|\mathbf{v}' + \mathbf{v}_0''\|, \|\mathbf{v} + \mathbf{v}_1''\| < \epsilon + \epsilon' < 1$.

Este radio y estos vectores harán que $A_{M, M'}$ sea no vacío si $\frac{1}{\epsilon + \epsilon'} \leq R$.

Equivalentemente, si

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\epsilon + \epsilon'} \leq R_0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\epsilon + \epsilon'} \leq R_1 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\epsilon + \epsilon'} \leq \frac{1}{\epsilon'} - \|\mathbf{v}_0''\| \quad \text{y} \quad \frac{1}{\epsilon + \epsilon'} \leq \frac{1}{\epsilon} - \|\mathbf{v}_1''\| \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\|\mathbf{v}_0''\| \leq \frac{1}{\epsilon'} - \frac{1}{\epsilon + \epsilon'} = \frac{\epsilon}{\epsilon'(\epsilon + \epsilon')} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{v}_1''\| \leq \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon + \epsilon'} = \frac{\epsilon'}{\epsilon(\epsilon + \epsilon')} \right), \end{aligned}$$

lo cual es cierto, ya que $\|\mathbf{v}_0''\| < \epsilon$, $\|\mathbf{v}_1''\| < \epsilon'$ y $\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon'}, \frac{1}{\epsilon + \epsilon'} < 1$.

Lo anterior prueba que $d(M', M) \leq \epsilon + \epsilon'$ para cada elección de ϵ, ϵ' con $\epsilon + \epsilon' < 1$. Como con estas condiciones ϵ y ϵ' pueden ser arbitrariamente próximos a, respectivamente, $d(M, M'')$ y $d(M', M'')$, deducimos de ello la desigualdad triangular.

Cabe comentar que en (3.1) podríamos haber definido alternativamente

$$M_A = \{T \in M; T \subseteq A\}$$

con idéntico resultado, pues bajo la suposición de que \mathcal{P} es finito, existe una cota superior para el diámetro de las teselas de nuestros mosaicos. La distancia no sería igual, pero sí la topología que genera.

El conjunto $\mathbb{M}(\mathcal{P})$ dotado de esta topología se conoce como *espacio de Gromov-Hausdorff*.

Es posible distinguir en $\mathbb{M}(\mathcal{P})$ un subespacio que hereda una topología peculiar.

Recordemos que en cada tesela de un mosaico $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ teníamos un punto distinguido, lo que permitía considerar el mosaico punteado \dot{M} de M . Denotaremos por $\mathcal{D}_M \subseteq R^2$ al conjunto de todos los puntos distinguidos de teselas de M . En otras palabras, \mathcal{D}_M es la proyección por la segunda componente del mosaico punteado \dot{M} .

En este sentido, nos fijamos en el subconjunto $\mathbb{T}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{M}(\mathcal{P})$ formado por aquellos mosaicos M tales que $\mathbf{0} \in \mathcal{D}_M$. Acorde con el papel de transversal que jugará en la laminación, este subespacio se conoce como *transversal canónica*.

Estudiemos entonces la topología que $\mathbb{M}(\mathcal{P})$ induce sobre la transversal canónica.

La imposición $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$ provoca una “discretización” de los mosaicos en la transversal canónica, al restringirnos a aquellos que tienen algún punto

distinguido coincidente con el origen. Esto tendrá un reflejo en la topología, materializado en la desconexión total del espacio $\mathbb{T}(\mathcal{P})$.

Se puede decir aún más. Y es que, de hecho, dicha topología admite una descripción en términos de una *ultramétrica*:

Definición 3.7 Una ultramétrica sobre un conjunto no vacío X es una métrica u que satisface la desigualdad ultramétrica, a saber,

$$u(x, y) \leq \max\{u(x, z), u(y, z)\} \quad \forall x, y, z \in X.$$

El par (X, u) se denomina espacio ultramétrico.

La desigualdad ultramétrica implica la desigualdad triangular, lo que será útil más adelante. Pero tiene también otras importantes consecuencias, que ya anunciábamos.

Proposición 3.8 Si (X, u) es un espacio ultramétrico, entonces toda bola abierta es cerrada. Como consecuencia, (X, u) es totalmente desconexo.

Demostración: Escojamos un $x \in X$ y un radio $R > 0$. Sea $y \in \overline{B(x, R)}$. Entonces para cada $r > 0$ ocurre que $B(x, R) \cap B(y, r) \neq \emptyset$. En particular, si tomamos r de modo que $0 < r < R$ y un punto $z \in B(x, R) \cap B(y, r)$,

$$u(x, y) \leq \max\{u(x, z), u(y, z)\} < R$$

por la desigualdad ultramétrica.

La afirmación de que el espacio es totalmente desconexo se desprende de su 0-dimensionalidad (las bolas abiertas forman un sistema fundamental de entornos en cada punto) y de su carácter T_1 (de hecho, Hausdorff). Se trata, recordemos, de la Proposición 1.3.

Dados dos mosaicos $M, M' \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$, se define

$$C_{M, M'} = \{R > 0; M_{B(0, R)} = M'_{B(0, R)}\},$$

y con él

$$\mathcal{R}(M, M') = \begin{cases} \sup C_{M, M'} & \text{si } C_{M, M'} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } C_{M, M'} = \emptyset. \end{cases}$$

Cabe observar que si $C_{M, M'} \neq \emptyset$, $\mathcal{R}(M, M') < \infty$, entonces $\mathcal{R}(M, M')$ se alcanza. Veamos:

Sea $T \in M_{B(0, \mathcal{R}(M, M'))}$. Esto es, $T \cap B(0, \mathcal{R}(M, M')) \neq \emptyset$.

Sabemos que T es homeomorfa a la bola cerrada unidad via un homeomorfismo $f: T \rightarrow \overline{B}(0, 1)$.

El Teorema de invariancia del dominio ([4, p. 3]) , permite deducir que los puntos de $\overset{\circ}{T}$ y $B(0, 1) \subseteq \overline{B}(0, 1)$ se corresponden por f . Así, dado que la adherencia de $B(0, 1)$ relativa a $\overline{B}(0, 1)$ es la propia bola cerrada unidad y que los homeomorfismos respetan la operación de adherencia, tenemos que T es regularmente cerrado en sí mismo: $T = \overline{\overset{\circ}{T}}$.

Podremos escribir $\overline{\overset{\circ}{T}} \cap B(0, \mathcal{R}(M, M')) \neq \emptyset$. Debido al carácter abierto de $B(0, \mathcal{R}(M, M'))$, esto implica que de hecho

$$\overset{\circ}{T} \cap B(0, \mathcal{R}(M, M')) \neq \emptyset.$$

Por la caracterización del superior, existe una sucesión $\{R_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_{M, M'}$ de números reales positivos tal que $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(M, M')$. Gracias a la continuidad de la norma, podemos afirmar que existirá $n_0 \geq 1$ tal que $\overset{\circ}{T} \cap B(0, R_n) \neq \emptyset$ si $n \geq n_0$.

En particular, es $T \cap B(0, R_{n_0}) \neq \emptyset$, luego

$$T \in M_{B(0, R_{n_0})} = M'_{B(0, R_{n_0})} \subseteq M'_{B(0, \mathcal{R}(M, M'))}.$$

La otra inclusión se prueba de manera análoga.

Además, se concluye que en este caso $C_{M, M'}$ es un intervalo de \mathbb{R} de la forma

$$C_{M, M'} = \left(0, \mathcal{R}(M, M')\right].$$

Sin más preámbulos, definimos la distancia entre los mosaicos M, M' como

$$d_{\mathfrak{h}}(M, M') = e^{-\mathcal{R}(M, M')},$$

donde se entiende que $d_{\mathfrak{h}}(M, M') = 0$ si $\mathcal{R}(M, M') = \infty$.

Proposición 3.9 $d_{\mathfrak{h}}$ es una ultramétrica en $\mathbb{T}(\mathcal{P})$.

Demostración: Las propiedades de simetría y no negatividad de $d_{\mathfrak{h}}$ se siguen inmediatamente de la definición.

También es rápido comprobar que $d_{\mathfrak{h}}(M, M')$ si y sólo si $M = M'$.

Según hemos comentado, para terminar es suficiente demostrar la desigualdad ultramétrica. Para mosaicos M, M', M'' , ésta equivale a demostrar que

$$d_{\mathfrak{h}}(M, M') \leq d_{\mathfrak{h}}(M, M'') \quad \text{ó} \quad d_{\mathfrak{h}}(M, M') \leq d_{\mathfrak{h}}(M', M''),$$

a su vez equivalente a

$$\mathcal{R}(M, M') \geq \mathcal{R}(M, M'') \quad \text{ó} \quad \mathcal{R}(M, M') \geq \mathcal{R}(M', M'').$$

Esta última condición es consecuencia de la inclusión

$$C_{M, M'} \supseteq C_{M, M''} \cap C_{M', M''}$$

y de que o bien $C_{M, M''} \cap C_{M', M''} = C_{M, M''}$, o bien $C_{M, M''} \cap C_{M', M''} = C_{M', M''}$.

Para completar esta construcción, aún falta comprobar que esta métrica $d_{\mathfrak{h}}$ induce la topología de subespacio de $\mathbb{T}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{M}(\mathcal{P})$.

Proposición 3.10 *La restricción de d a $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ y $d_{\mathfrak{h}}$ inducen la misma topología sobre $\mathbb{T}(\mathcal{P})$.*

Demostración: Fijemos un mosaico $M \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$. Como $d_{\mathfrak{h}}$ está acotada por 1, podemos escribir cualquier radio de interés en la forma e^{-R} , $R \geq 0$. De esta manera, las bolas según esta distancia admiten una descripción sencilla:

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{h}}(M, e^{-R}) &= \{M' \in \mathbb{T}(\mathcal{P}); d_{\mathfrak{h}}(M, M') < e^{-R}\} = \\ &= \{M' \in \mathbb{T}(\mathcal{P}); \mathcal{R}(M, M') > R\}. \end{aligned}$$

Ahora, recordemos la forma que tenía una bola según la distancia d del espacio $\mathbb{M}(\mathcal{P})$. Para un $\delta > 0$,

$$B(M, \delta) = \mathbb{M}(\mathcal{P}) \quad \text{si } \delta > 1,$$

y si $0 \leq \delta \leq 1$,

$$\begin{aligned} B(M, \delta) &= \{M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P}); A_{M, M'} \neq \emptyset, \inf A_{M, M'} < \delta\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P}); \exists \epsilon \in (0, \delta), \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in B(0, \epsilon) \text{ con} \\ (M + \mathbf{v})_{B(0, \frac{1}{\epsilon})} = (M' + \mathbf{v}')_{B(0, \frac{1}{\epsilon})} \end{array} \right\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P}); \exists \epsilon \in (0, \delta), \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in B(0, \epsilon) \text{ con} \\ M_{B(0, \frac{1}{\epsilon} - \epsilon)} = (M' + \mathbf{v}' - \mathbf{v})_{B(0, \frac{1}{\epsilon} - \epsilon)} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Como el conjunto de prototeselas \mathcal{P} es finito, podemos elegir un radio $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r)$ contiene a lo sumo un punto distinguido de cada mosaico

de $\mathbb{M}(\mathcal{P})$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Por ejemplo, podemos escoger para cada prototesela $\mathcal{T} \in \mathcal{P}$ un radio $r_{\mathcal{T}} > 0$ tal que $B(\mathbf{0}, r_{\mathcal{T}}) \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$, y después fijar $r = r(\mathcal{P}) = \min_{\mathcal{T} \in \mathcal{P}} r_{\mathcal{T}} > 0$.

De esta manera, si tomamos $\delta = \min\{r, \frac{1}{R+1}\}$, entonces $\|\mathbf{v}' - \mathbf{v}\| < 2r$ y las condiciones

$$M_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon} - \epsilon)} = (M' + \mathbf{v}' - \mathbf{v})_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon} - \epsilon)} \quad \text{y} \\ M' \in \mathbb{T}(\mathcal{P}),$$

fuerzan que $\mathbf{v}' - \mathbf{v} = \mathbf{0}$, puesto que el punto distinguido de alguna tesela de $M' + \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ debe coincidir con el origen. Además, como $\frac{1}{\delta} \geq R + 1$, será

$$\frac{1}{\epsilon} - \epsilon > \frac{1}{\delta} - \delta \geq \frac{1}{\delta} - 1 \geq R,$$

por lo que $B(M, \delta) \cap \mathbb{T}(\mathcal{P}) \subseteq B_{\text{th}}(M, e^{-R})$.

Al revés es más sencillo:

Fijemos un $\delta > 0$. Para que $B_{\text{th}}(M, e^{-R}) \subseteq B(M, \delta) \cap \mathbb{T}(\mathcal{P})$, basta tomar $R > \frac{2}{\delta}$. Efectivamente, con esta elección de R , sirve $\epsilon = \frac{\delta}{2}$, $\mathbf{v}, \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ para cada mosaico $M' \in B_{\text{th}}(M, e^{-R})$.

Ya tenemos el terreno preparado para definir una laminación en nuestro espacio de mosaicos. Las hojas de dicha laminación admiten una descripción sencilla; se trata de las órbitas en $\mathbb{M}(\mathcal{P})$ por la acción del grupo de traslaciones,

$$\mathbb{M}(\mathcal{P}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{M}(\mathcal{P}) \\ (M, \mathbf{v}) \longmapsto M + \mathbf{v}.$$

Es decir, la hoja que contiene un mosaico M será $\mathcal{H}_M = \{M + \mathbf{v}; \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}$.

No obstante, es oportuno un atlas foliado que corrobore esta partición.

Para ello, vamos a concebir dos tipos de cartas, que estarán basadas en la transversal de mosaicos. Con el objeto de recubrir todo el espacio $\mathbb{M}(\mathcal{P})$, podemos pensar en la posición relativa del origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ con respecto a las teselas de un mosaico $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$.

Puede ocurrir, por ejemplo, que el origen se encuentre en el interior de alguna tesela $T \in M$. En esta situación, consideramos la prototesela $\mathcal{T} \in \mathcal{P}$ que es copia por traslación de T . Ocurre, por definición, que $T - \mathbf{v}_T = \mathcal{T}$, donde $-\mathbf{v}_T \in \tilde{\mathcal{T}}$. Esto da una idea para el primer tipo de carta.

Se define la aplicación

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{T}}: \dot{T} \times F_{\mathcal{T}} &\longrightarrow \mathbb{M}(\mathcal{P}) \\ (\mathbf{x}, M) &\longmapsto M - \mathbf{x},\end{aligned}$$

siendo $F_{\mathcal{T}} = \{M \in \mathbb{T}(\mathcal{P}); \mathcal{T} \in M\}$.

Comprobemos las propiedades pertinentes:

- Sea el radio $r(\mathcal{P}) > 0$ que introdujimos en la prueba de la Proposición 3.10. Entonces si consideramos un mosaico $N \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$ tal que $\mathcal{T} \in N$, $F_{\mathcal{T}}$ se escribe

$$F_{\mathcal{T}} = \{M \in \mathbb{T}(\mathcal{P}); \mathcal{R}(M, N) > r(\mathcal{P})\} = B_{\mathfrak{m}}(N, e^{-r(\mathcal{P})}),$$

de modo que $F_{\mathcal{T}}$ es un abierto de $\mathbb{T}(\mathcal{P})$. Si tal mosaico N no existiera, entonces podríamos prescindir de la prototesela \mathcal{T} .

- $\varphi_{\mathcal{T}}$ es inyectiva:

Sean $(\mathbf{x}, M), (\mathbf{x}', M') \in \dot{T} \times F_{\mathcal{T}}$ distintos. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, $M \neq M'$, entonces es claro que $M - \mathbf{x} \neq M' - \mathbf{x}'$.

Supongamos que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, pero $M - \mathbf{x} = M' - \mathbf{x}'$. Llamando $\mathbf{y} = \mathbf{x}' - \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, es $M + \mathbf{y} = M' \ni \mathcal{T}$.

En particular, $\mathcal{T} + \mathbf{y} = T' \in M'$ con $T' \neq \mathcal{T}$, y sin embargo ambas teselas pertenecen a M' . En consecuencia, $\dot{T}' \cap \dot{T} = \emptyset$.

Ahora bien, dado que $\mathbf{x}' \in \dot{T}'$, se tiene $\mathbf{x}' + \mathbf{y} = \mathbf{x} \in \dot{T}' \cap \dot{T}$; absurdo.

- $\varphi_{\mathcal{T}}(\dot{T} \times F_{\mathcal{T}})$ es abierto de $\mathbb{M}(\mathcal{P})$:

Sea $M \in \varphi_{\mathcal{T}}(\dot{T} \times F_{\mathcal{T}})$; para un radio $0 < \delta \leq 1$, era

$$\begin{aligned}B(M, \delta) &\subseteq \left\{ M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P}); \exists \epsilon \in (0, \delta), \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in B(\mathbf{0}, \epsilon) \text{ con } \right. \\ &\quad \left. (M + \mathbf{v} - \mathbf{v}')_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon} - \epsilon)} = M'_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon} - \epsilon)} \right\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{ M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P}); \exists \epsilon \in (0, \delta), \mathbf{u} \in B(\mathbf{0}, 2\epsilon) \text{ con } \right. \\ &\quad \left. (M + \mathbf{u})_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon} - 1)} = M'_{B(\mathbf{0}, \frac{1}{\epsilon} - 1)} \right\}. \quad (3.3)\end{aligned}$$

Los mosaicos de $\varphi_{\mathcal{T}}(\dot{T} \times F_{\mathcal{T}})$ son tales que el origen se encuentra en el interior de una tesela que es copia por traslación de \mathcal{T} . Para el mosaico M , sea T esa tesela.

Supongamos que $\eta > 0$ es tal que $B(\mathbf{0}, \eta) \subseteq T$. Entonces si elegimos $\delta = \frac{\eta}{2}$, está garantizado que $\mathbf{0} \in T + \mathbf{u}$, y como consecuencia $B(M, \delta) \subseteq \varphi_{\mathcal{T}}(\dot{T} \times F_{\mathcal{T}})$.

► $\varphi_{\mathcal{T}}$ es continua:

Con las notaciones anteriores, fijemos un radio $\delta \leq \frac{\eta}{2}$. Esta vez notemos que

$$\begin{aligned} B(M, \delta) &\supseteq \left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P}); \exists \epsilon \in (0, \delta), \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in B(0, \epsilon) \text{ con} \\ (M' + \mathbf{v}' - \mathbf{v})_{B(0, \frac{1}{\epsilon}+1)} = M_{B(0, \frac{1}{\epsilon}+1)} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P}); \exists \epsilon \in (0, \delta), \mathbf{u}' \in B(0, 2\epsilon) \text{ con} \\ (M' + \mathbf{u}')_{B(0, \frac{1}{\epsilon}+1)} = M_{B(0, \frac{1}{\epsilon}+1)} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Entonces pongamos $r = \min\{\tilde{r}, \delta\} > 0$, verificándose $B(\mathbf{0}, \tilde{r}) \subseteq \dot{\mathcal{T}}$ (luego $B(-\mathbf{v}_T, r) \subseteq \dot{\mathcal{T}}$), y un $R > 0$ lo bastante grande como para que $R > \frac{2}{\delta} + 1 + \|\mathbf{v}_T\|$. Bajo estas condiciones,

$$\varphi_{\mathcal{T}} \left(B(-\mathbf{v}_T, r) \times B_{\mathfrak{h}}(M - \mathbf{v}_T, e^{-R}) \right) \subseteq B(M, \delta),$$

donde, observemos, el par $(-\mathbf{v}_T, M - \mathbf{v}_T)$ es la imagen inversa de M por $\varphi_{\mathcal{T}}$. Justifiquemos la inclusión; un elemento del miembro izquierdo es de la forma $M' + \mathbf{v}_T + \mathbf{u}'$, con

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' \in B(\mathbf{0}, r) &\subseteq B(\mathbf{0}, \delta) = B\left(\mathbf{0}, 2\frac{\delta}{2}\right) \quad \text{y} \\ M'_{B(0, R)} &= (M - \mathbf{v}_T)_{B(0, R)}, \end{aligned}$$

implicando la última condición que

$$(M' + \mathbf{v}_T)_{B(0, \frac{2}{\delta}+1)} = ((M' + \mathbf{v}_T + \mathbf{u}') - \mathbf{u}')_{B(0, \frac{2}{\delta}+1)} = M_{B(0, \frac{2}{\delta}+1)}.$$

En definitiva, $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ es una elección válida para cada elemento de $\varphi_{\mathcal{T}} \left(B(-\mathbf{v}_T, r) \times B_{\mathfrak{h}}(M - \mathbf{v}_T, e^{-R}) \right)$, con lo que se tiene inclusión anunciada. Luego también la continuidad de $\varphi_{\mathcal{T}}$.

► Sólo falta comprobar que la inversa

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{T}}^{-1}: \varphi_{\mathcal{T}} \left(\dot{\mathcal{T}} \times F_{\mathcal{T}} \right) &\longrightarrow \dot{\mathcal{T}} \times F_{\mathcal{T}} \\ M &\longmapsto (-\mathbf{v}_T, M - \mathbf{v}_T) \end{aligned}$$

es también continua. Tomemos radios $r, R > 0$ y recuperemos (3.3), poniendo análogamente

$$B(M, \delta) \subseteq \left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathbb{M}(\mathcal{P}); \exists \epsilon \in (0, \delta), \mathbf{u}' \in B(0, 2\epsilon) \text{ con} \\ (M' + \mathbf{u}')_{B(0, \frac{1}{\epsilon}-1)} = M_{B(0, \frac{1}{\epsilon}-1)} \end{array} \right\}.$$

Para $\delta \leq \frac{\eta}{2}$ lo bastante pequeño, un mosaico M' de este último conjunto tiene imagen por $\varphi_{\mathcal{T}}^{-1}$

$$\varphi_{\mathcal{T}}^{-1}(M') = (\mathbf{u}' - \mathbf{v}_T, M' + \mathbf{u}' - \mathbf{v}_T).$$

Poniendo $\delta = \min\{\frac{r}{2}, \frac{1}{1+\|\mathbf{v}_T\|+R}\}$,

$$\varphi_{\mathcal{T}}^{-1}(B(M, \delta)) \subseteq B(-\mathbf{v}_T, r) \times B_{\text{h}}(M - \mathbf{v}_T, e^{-R}),$$

ya que, de esta manera, $\frac{1}{\epsilon} - 1 - \|\mathbf{v}_T\| > \frac{1}{\delta} - 1 - \|\mathbf{v}_T\| \geq R$ para cualquier $\epsilon \in (0, \delta)$.

O sea que al fin podemos afirmar que $\varphi_{\mathcal{T}}$ es un homeomorfismo para cada prototesela $\mathcal{T} \in \mathcal{P}$. Sin embargo, hay que analizar también el otro tipo de carta, pues ciertamente éstas no bastan para recubrir $\mathbb{M}(\mathcal{P})$; ¿Qué ocurre si el origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ se encuentra en la intersección de varias teselas (y en el interior de ninguna)?

Hemos denotado a la transversal canónica por $\mathbb{T}(\mathcal{P})$, quizá omitiendo un subíndice pertinente: $\mathbb{T}(\mathcal{P}) = \mathbb{T}_0(\mathcal{P})$. En efecto, ya que respecto a la topología dada sobre $\mathbb{T}(\mathcal{P})$, el origen tenía un papel relevante.

Pero no hay inconveniente en colocar como subíndice cualquier otro punto \mathbf{p} de \mathbb{R}^2 . Al hacerlo, entendemos que la distancia $d_{\text{h}} = d_{\text{h}}^0$ introducida en $\mathbb{T}_0(\mathcal{P})$ se sustituye por otra $d_{\text{h}}^{\mathbf{p}}$, que tiene como referencia el punto \mathbf{p} en lugar del origen. El espacio ultramétrico $(\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{P}), d_{\text{h}}^{\mathbf{p}})$ es entonces un subespacio de $(\mathbb{M}(\mathcal{P}), d^{\mathbf{p}})$, siendo $d^{\mathbf{p}}$ la distancia análoga a d empleando bolas centradas en \mathbf{p} .

El círculo se cierra observando que tanto los espacios $(\mathbb{M}(\mathcal{P}), d)$ y $(\mathbb{M}(\mathcal{P}), d^{\mathbf{p}})$ como los (respectivos) subespacios $(\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{P}), d_{\text{h}})$ y $(\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{P}), d_{\text{h}}^{\mathbf{p}})$ son homeomorfos (de hecho isométricos) a través de la correspondencia $M \mapsto M + \mathbf{p}$.

Volviendo a la cuestión de las cartas, pensemos en aquel planteamiento: el origen no se encuentra en el interior de ninguna tesela, para un mosaico dado M . Por tanto, pertenece a la intersección de varias (fronteras de) teselas del mosaico. Lo que haremos en este caso será construir una carta *ad hoc* para dicho mosaico.

Sea \mathfrak{m} el motivo formado por todas las teselas que contienen el origen, es decir,

$$\mathfrak{m} = \{T \in M; \mathbf{0} \in T\}.$$

Para ser realmente un motivo, \mathfrak{m} ha de ser finito. Un resultado auxiliar zanja esta cuestión:

Lema 3.11 *Si $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$, entonces M es localmente finito.*

Demostración: Ocurre de hecho algo más fuerte, que implica la anterior afirmación: si $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^2, R > 0$ entonces $B(\mathbf{p}_0, R)$ corta a un número finito de teselas de M .

Supongamos que no es así, y que $B(\mathbf{p}_0, R)$ corta a un número infinito de teselas de M . Como \mathbb{P} es finito, las teselas de M tienen su diámetro uniformemente acotado, luego podemos suponer que $\overline{B}(\mathbf{p}_0, R) \supseteq B(\mathbf{p}_0, R)$ contiene a un número infinito de teselas de M .

Entonces contiene a un conjunto infinito de puntos distinguidos (distintos), concretamente $\{\mathbf{v}_T; T \subseteq \overline{B}(\mathbf{p}_0, R)\}$. Al ser $\overline{B}(\mathbf{p}_0, R)$ compacto, el anterior conjunto admite un punto de acumulación; esto es absurdo, ya que la distancia entre dos cualesquiera de esos puntos es, al menos, $r(\mathcal{P})$.

Escogemos entonces una tesela $S \in \mathfrak{m}$, y su punto distinguido \mathbf{v}_S . La transversal quedará constituida ahora por el subconjunto de $\mathbb{T}_{\mathbf{v}_S}(\mathcal{P})$ formado por aquellos mosaicos que contienen el motivo \mathfrak{m} ,

$$F_{\mathfrak{m}} = \{M \in \mathbb{T}_{\mathbf{v}_S}(\mathcal{P}); \mathfrak{m} \subseteq M\}.$$

Como abierto de \mathbb{R}^2 , cualquiera que garantice la inyectividad: $B(\mathbf{0}, r(\mathcal{P}))$ valdrá. Así pues, la carta correspondiente es ahora

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{m}, S}: B(\mathbf{0}, r(\mathcal{P})) \times F_{\mathfrak{m}} &\longrightarrow \mathbb{M}(\mathcal{P}) \\ (\mathbf{x}, M) &\longmapsto M - \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Esta vez, $F_{\mathfrak{m}}$ no va a ser una bola abierta, pero es abierto de todos modos: se justifica tomando un radio $R > 0$ tal que $\mathfrak{m} \subseteq B(\mathbf{v}_S, R)$ (\mathfrak{m} es compacto como unión finita de compactos), de modo que entonces $B_{\mathfrak{m}}^{\mathbf{v}_S}(M, e^{-R}) \subseteq F_{\mathfrak{m}}$ para todo $M \in F_{\mathfrak{m}}$.

La continuidad de $\psi_{\mathfrak{m}, S}$ y de su inversa se obtiene mediante un argumento similar al utilizado con el primer tipo de carta.

¿Habrá compatibilidad entre las cartas?

Tomemos una carta del primer tipo, $\varphi_{\mathcal{T}}$ (para cierta prototesela \mathcal{T}), y otra del segundo, $\psi_{\mathfrak{m}, S}$, asociada a un motivo \mathfrak{m} que contiene una copia por traslación S de \mathcal{T} . Sea (\mathbf{x}, M) un par en el dominio adecuado para $\psi_{\mathfrak{m}, S}$. Entonces,

$$\begin{aligned} (\varphi_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{m}, S})(\mathbf{x}, M) &= \varphi_{\mathcal{T}}^{-1}(M - \mathbf{x}) = (-\mathbf{v}_{S-\mathbf{x}}, M - \mathbf{x} - \mathbf{v}_{S-\mathbf{x}}) = \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{v}_S, M - \mathbf{v}_S). \end{aligned}$$

Al revés,

$$\begin{aligned} (\psi_{m,S}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{T}})(\mathbf{y}, N) &= \psi_{m,S}^{-1}(N - \mathbf{y}) = (-\mathbf{v}_S - \mathbf{y}, N - \mathbf{y} + \mathbf{v}_S + \mathbf{y}) = \\ &= (\mathbf{y} + \mathbf{v}_S, N + \mathbf{v}_S), \end{aligned}$$

o sea que se satisfacen las condiciones pertinentes en el cambio de carta. En particular, la segunda componente es una isometría que no depende de los vectores y la primera tiene toda la regularidad deseable.

El cambio entre dos cartas del segundo tipo tiene una forma similar, mientras que dos cartas distintas del primer tipo tienen imágenes disjuntas.

Como apuntábamos, este atlas foliado se adecúa a la descripción de las hojas: un camino finito de placas según este atlas consiste en la traslación de un mosaico por vectores de un cierto abierto de \mathbb{R}^2 .

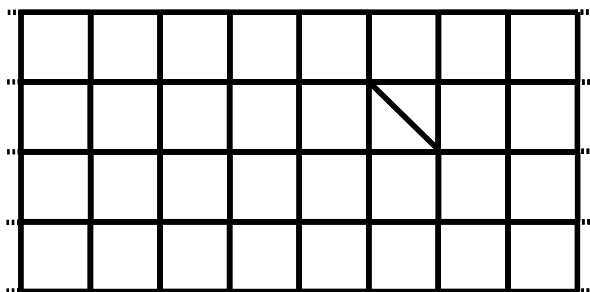
La laminación de mosaicos alberga variados ejemplos en cuanto a la dinámica transversa, que se pueden describir en términos de características que ya hemos introducido.

Por ejemplo, es claro que una hoja que contiene un mosaico aperiódico tiene holonomía trivial. Por otra parte, si contiene un mosaico periódico o 1-periódico, ésta pasa a tener holonomía no trivial.

Sin embargo, para terminar nos centraremos en el concepto de *envoltura* de un mosaico:

Definición 3.12 Sea $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$. Se conoce como *envoltura del mosaico* M a la adherencia de su hoja, $\Omega_M = \overline{\mathcal{H}_M}$.

En general, \mathcal{H}_M no es un cerrado; es decir, $\Omega_M \not\subseteq \mathcal{H}_M$. Esto puede observarse considerando la envoltura de un mosaico formado por teselas cuadradas, salvo por una, dividida en dos triángulos.



Dicha envoltura contiene el mosaico formado íntegramente por cuadrados, que por otra parte no se encuentra en la hoja.

De acuerdo con la introducción, vamos a estudiar condiciones suficientes para que la envoltura de un mosaico sea, transversalmente, un conjunto de Cantor. Esto es, nos preguntamos en qué condiciones $\Omega_M \cap \mathbf{T}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor, si \mathbf{T} es la transversal completa del atlas foliado que hemos dado para $\mathbb{M}(\mathcal{P})$. Es razonable plantearse, ya que, como sabemos, $\Omega_M \cap \mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}$ es un espacio métrico totalmente desconexo para cualquier mosaico M . Ello se debe a que \mathbf{T} (como unión disjunta) sigue siendo un espacio métrico, que hereda el carácter totalmente desconexo de cada transversal local. Además, es un hecho general el que todo subespacio de un espacio totalmente desconexo sea totalmente desconexo.

Por la caracterización de los Cantor, basta pensar entonces en que $\Omega_M \cap \mathbf{T}$ sea, a mayores, compacto y perfecto.

En términos de la topología de \mathbf{T} , la perfección se traduce en que, dado cualquier mosaico, existan otros que compartan con él motivos arbitrariamente extensos en torno al origen y sin embargo sean distintos del mosaico en cuestión.

Ya introdujimos conceptos que garantizan esta propiedad.

Proposición 3.13 *Sea $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ un mosaico aperiódico y repetitivo. Entonces $\Omega_M \cap \mathbf{T}$ es perfecto.*

Demostración: En el sentido que comentábamos más arriba, tomemos un mosaico $N \in \mathcal{H}_M \cap \mathbf{T}$ y un radio $r > 0$. Consideremos el motivo

$$\mathbf{n} = N_{B(\mathbf{0}, r+1)}.$$

Como M es repetitivo, N también lo es, con lo que existirá un radio $R > 0$ tal que $N_{B(\mathbf{y}, R)}$ contiene una copia por traslación \mathbf{n}' de \mathbf{n} para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. En particular, podemos elegir \mathbf{y} de manera que $B(\mathbf{y}, R) \cap B(\mathbf{0}, r+1) = \emptyset$, asegurando que \mathbf{n}' es distinto de \mathbf{n} .

Sea $\mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$ el vector que verifica $\mathbf{n} = \mathbf{n}' + \mathbf{v}'$. Entonces el mosaico $N' = N + \mathbf{v}'$ es distinto de N por aperiodicidad y verifica

$$N_{B(\mathbf{0}, r+1)} = N'_{B(\mathbf{0}, r+1)},$$

razón por la cual $N' \in B_{\mathfrak{h}}(N, e^{-r}) \setminus \{N\}$. O sea que $\mathcal{H}_M \cap \mathbf{T}$ es perfecto. Ahora, reparemos en la forma que tenían las bolas del espacio $\mathbb{M}(\mathcal{P})$. Si $N \in \Omega_M \cap \mathbf{T}$, la intersección $B(N, \delta) \cap \mathcal{H}_M \neq \emptyset$ contiene también mosaicos

de $\mathcal{H}_M \cap \mathbf{T}$. De este hecho, se deduce que todo mosaico de $\Omega_M \cap \mathbf{T}$ es adherente a $\mathcal{H}_M \cap \mathbf{T}$ en \mathbf{T} , y por ello que $\Omega_M \cap \mathbf{T}$ es también perfecto.

Para la compacidad, la condición que funciona es la llamada *condición FPC* (del inglés, *Finite Pattern Condition*). Un mosaico satisface la condición FPC si, fijado un diámetro $r > 0$, existen en él una cantidad finita de motivos con diámetro menor que r módulo traslación.

El desarrollo de la prueba es semejante al que se tenía en el Corolario 1.22, aunque algo más complicado.

Proposición 3.14 *Si $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ satisface la condición FPC, entonces $\Omega_M \cap \mathbf{T}$ es compacto.*

Demostración: Puesto que se trata de un espacio métrico, trabajaremos secuencialmente. Fijemos una sucesión $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ de mosaicos de $\mathcal{H}_M \cap \mathbf{T}$ y un radio $r > 0$ de manera que r exceda una cota superior para el diámetro de las teselas.

Consideramos la bola $B(\mathbf{0}, r)$, y para cada $k \geq 1$ el motivo $\mathbf{m}_{k,1}$ de M_k que ésta contiene (y que será no vacío por la elección de r). Como M satisface la condición FPC y $M_k \in \mathcal{H}_M \forall k \geq 1$, existirá un motivo $\mathbf{n}_1 \subseteq B(\mathbf{0}, r)$ y una subsucesión $\{M_{k,1}\}_{k=1}^{\infty}$ de manera que $\mathbf{n}_1 = \mathbf{m}_{k,1} + \mathbf{v}_{k,1}$ para cierto vector $\mathbf{v}_{k,1} \in B(\mathbf{0}, 2r)$, para todo $k \geq 1$.

A continuación, tomamos la bola $B(\mathbf{0}, 2r)$, y para cada $k \geq 1$ el motivo $\mathbf{m}_{k,2}$ de $M_{k,1}$ que ésta contiene. Por la elección de r , contendrá estrictamente a $\mathbf{m}_{k,1}$. Se repite el argumento, con lo que obtenemos un motivo \mathbf{n}_2 , $B(\mathbf{0}, 2r) \supseteq \mathbf{n}_2 \supsetneq \mathbf{n}_1$ y una subsucesión $\{M_{k,2}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{M_{k,1}\}_{k=1}^{\infty}$ (y por tanto de la original) tal que $\mathbf{n}_2 = \mathbf{m}_{k,2} + \mathbf{v}_{k,2}$ para todo $k \geq 1$. En efecto, los vectores son los mismos: en particular, deben trasladar el motivo $\mathbf{m}_{k,1}$ en el motivo \mathbf{n}_1 para todo $k \geq 1$.

Iterando esta construcción, obtenemos una subsucesión diagonal $\{M_{k,k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la original, de modo que para cada $k \geq 1$ existe un motivo $\mathbf{n}_k = \mathbf{m}_{k,k} + \mathbf{v}_{k,k}$ que contiene estrictamente a los anteriores,

$$\mathbf{n}_1 \subsetneq \mathbf{n}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathbf{n}_k \subsetneq \dots,$$

teniéndose a mayores $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{n}_k$. Llamemos N al mosaico determinado por esta sucesión de motivos.

La sucesión $\{\mathbf{v}_{k,k}\}_{k=1}^{\infty}$ estará acotada, pues $\mathbf{v}_{k,k} \in B(\mathbf{0}, 2r) \forall k \geq 1$. Por ello, admite una subsucesión $\{\mathbf{v}_{k_l,k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ que converge a un vector $\mathbf{v} \in \overline{B}(\mathbf{0}, 2r)$. Extraemos finalmente una subsucesión $\{M_{k_l,k_l}\}_{l=1}^{\infty}$, con la virtud de que

$$\mathbf{m}_{k_l,k_l} + \mathbf{v}_{k_l,k_l} = \mathbf{n}_{k_l,k_l} = (\mathbf{n}_{k_l,k_l} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{m}_{k_l,k_l} + (\mathbf{v}_{k_l,k_l} - \mathbf{v}) = \mathbf{n}_{k_l,k_l} - \mathbf{v}$$

para todo $l \geq 1$, y siendo $v_{k_l, k_l} - v \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \mathbf{0}$. De aquí, se deduce que $M_{k_l, k_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} N - v$ en $\mathbb{M}(\mathcal{P})$, por lo que $N - v \in \Omega_M$.

Pero además \mathbf{T} es cerrado en $\mathbb{M}(\mathcal{P})$, y como consecuencia $\{M_{k_l, k_l}\}_{l=1}^\infty$ es una subsucesión de la sucesión original $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ que converge a un mosaico $N - v \in \Omega_M \cap \mathbf{T}$.

Lo que acabamos de probar equivale a que $\mathcal{H}_M \cap \mathbf{T}$ sea relativamente compacto en \mathbf{T} . Es decir, $\overline{\mathcal{H}_M \cap \mathbf{T}} \supseteq \Omega_M \cap \mathbf{T}$ es compacto. Ahora bien, $\Omega_M \cap \mathbf{T}$ es entonces cerrado en un compacto, así que compacto también.

Si un mosaico es repetitivo y FPC, entonces es fácil deducir que, de hecho, es uniformemente repetitivo. Y el recíproco también es cierto:

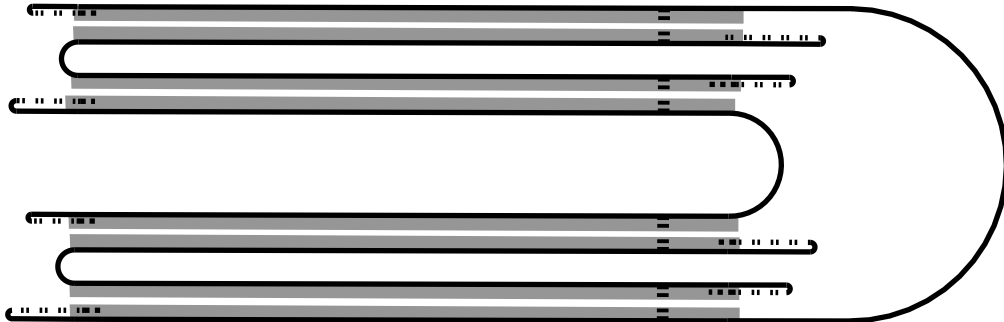
Proposición 3.15 *Sea $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ un mosaico uniformemente repetitivo. Entonces M es repetitivo y satisface la condición FPC.*

Demostración: Basta probar que M es FPC, así que fijemos una cantidad $r > 0$ y supongamos que existen en M infinitos motivos con diámetro menor que r , módulo traslación.

Existe un radio $R > 0$ tal que toda bola $B(\mathbf{y}, R)$ contiene infinitos motivos con diámetro menor que r , módulo traslación. Pero esto es absurdo, ya que cualquiera de éstas bolas contiene, a lo más, un motivo m de M . Como subconjunto finito de teselas, los motivos que m contiene representan a lo sumo una cantidad finita.

Entonces, después de todo es posible enunciar:

Teorema 3.16 *Si $M \in \mathbb{M}(\mathcal{P})$ es un mosaico aperiódico y uniformemente repetitivo, entonces su envoltura tiene una transversal homeomorfa al conjunto de Cantor.*



Bibliografía

- [1] Stephen Willard: *General Topology*.
Ed. Addison-Wesley, 1970. Addison-Wesley series in Mathematics.
- [2] Marta Macho Stadler: *Topología General*.
Managua, 2002.
- [3] Paweł Walczak: *Dynamics of Foliations, Groups and Pseudogroups*.
Ed. Springer Basel AG, 2004.
- [4] Michael Spivak: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*.
Houston, Texas, Ed. Publish or Perish, 1999. Vol. 1, 3^a edición.
- [5] Pablo González Sequeiros: *Laminaciones Afables*.
Universidade de Santiago de Compostela, 2012. Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, Vol. 123.
- [6] Álvaro Lozano Rojo: *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos*.
Universidade de Santiago de Compostela, 2008. Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, Vol. 112.
- [7] Antón Carlos Vázquez Martínez: *Geometría ergódica y asintótica de grafos aleatorios*.
Universidade de Santiago de Compostela, 2018.
- [8] María Pérez Fernández de Córdoba: *Número de ramificación y percolación de un pseudogrupo*.
Universidade de Santiago de Compostela, 2012.
- [9] Fernando Q.Gouvêa: *p-adic Numbers. An Introduction*.
Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.

- [10] Jean Bellissard, Riccardo Benedetti, Jean-Marc Gambaudo: *Spaces of Tilings, Finite Telescopic Approximations and Gap-Labeling*. Ed. Springer-Verlag, 2005. Communications in Mathematical Physics 261.
- [11] Johannes Kellendonk, Ian F. Putnam: *Tilings, C^* -algebras and K -theory*. Ed. M. Baake, R.V. Moody: *Directions in Mathematical Quasicrystals*. CRM Monograph Series, AMS, 2000 (pp. 186-215).
- [12] Lorenzo Sadun: *Tilings, tiling spaces and topology*. Philosophical Magazine 86, 2006.