

Estados no clásicos de la luz: fundamentos matemáticos y aplicaciones físicas

Trabajo de Fin de Grado

Autor:

Daniel del Corral Martínez

23 de Julio de 2019



Universidad de Valladolid

Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica

Tutor:

Luis Miguel Nieto Calzada

Índice general

Resumen	VI
Abstract	VIII
1. Introducción	1
2. Fundamentos matemáticos	3
2.1. Introducción: El oscilador armónico	3
2.2. Definición de los estados coherentes	4
2.2.1. Funcion de onda en la representacion de coordenadas	6
2.2.2. Función de onda en la representación de momentos	9
2.2.3. Funcion de onda en el espacio de fases	10
2.3. Definiciones alternativas	12
2.3.1. Operador desplazamiento	12
2.3.2. Relación de incertidumbre	13
3. Propiedades generales	15
3.1. Valor esperado de la posición	15
3.2. Valor esperado del momento	16
3.3. Valor esperado del operador número	17
3.4. Valor esperado de la energía	17

3.5. Desviación cuadrática media del operador N	18
3.6. Relación de incertidumbre	18
3.7. Evolución temporal	19
3.8. Cálculo de probabilidades	22
3.9. Ortogonalidad entre estados	22
3.10. Acción del operador creación	23
4. Estados gato de Schrödinger	25
4.1. Función de onda en la representación de coordenadas	25
4.2. Función de onda en el espacio de fases: función de Wigner	27
4.3. Evolución temporal	28
5. Aplicaciones	33
5.1. Teoría cuántica de campos	33
5.1.1. Descripción del campo electromagnético en términos de estados coherentes	33
5.1.2. Generación de estados coherentes	34
5.1.3. Divergencias infrarrojas	36
5.2. Estados coherentes de spin (ECH)	36
5.3. Condensado de Bose-Einstein	38
5.4. Estados coherentes fermiónicos	39
6. Conclusiones	43

Índice de figuras

2.1. Función de onda para $z_1 = 1, z_2 = 5$ y $z_3 = 10$	8
2.2. Función de onda para $z_1 = e^{i0}, z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$	8
2.3. Módulo al cuadrado de la función de onda en el espacio de momentos para $z_1 = e^{i0}, z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$	10
2.4. Función de Wigner (2.48) para $z = 0$	11
2.5. Función de Wigner (2.48) para $z = 1 + i$	11
2.6. Función de Wigner (2.48) para $z = 1 - i$	12
3.1. Función de Wigner para $t = 0$ del estado $z = 1$	20
3.2. Función de Wigner para $t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi$ y $t = \frac{3\pi}{2}$ del estado $z = 1$. . .	21
3.3. Evolución temporal de la densidad de probabilidad (3.28) para $z = 1$ y $\omega = 1$ sobre el plano (x, t) . Hemos representado un periodo para t	21
3.4. Probabilidad de detectar 1, 2 ó 3 estados de vibración para cualquier número medio de estados de vibración, es decir, para cualquier $ z $	22
4.1. Densidad de probabilidad en la representación de momentos para la función de onda de un estado gato par para $z_1 = 0,6, z_2 = 1, z_3 = 2$. . .	27
4.2. Función de Wigner de un estado gato par para $z = 1$	28
4.3. Función de Wigner de un estado gato par para $z = 2$	29
4.4. Función de Wigner de un estado gato par para $z = 3$	29

- 4.5. Densidad de probabilidad del estado $z = 3e^{it}$ para diversos instantes de tiempo: de izquierda a derecha y de arriba a abajo, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{8}$, $t = \frac{7\pi}{16}$ y $t = \frac{\pi}{2}$ 30
- 4.6. Función de Wigner del estado $z = 3e^{-it}$ para diversos instantes de tiempo: de izquierda a derecha y de arriba a abajo, $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ y $t = \frac{\pi}{2}$. . . 31

Resumen

En este trabajo se presenta un resumen de resultados sobre los estados coherentes del oscilador armónico cuántico, así como ilustraciones gráficas de las densidades de probabilidad en las representaciones de coordenadas y momentos y en el espacio de fases, ésta última a través de la conocida función de Wigner.

En el primer capítulo se da una pequeña idea de la motivación para realizar este trabajo así como una reseña histórica sobre el inicio del estudio de los estados coherentes, muy presentes en varios ámbitos de la física y en concreto de la óptica cuántica.

En el segundo capítulo se comienza con un repaso general de varios resultados útiles sobre el oscilador armónico cuántico, principalmente las definiciones de los operadores creación y aniquilación y el hamiltoniano del oscilador armónico. Posteriormente aplicamos estos resultados al cálculo de la expresión analítica de un estado coherente general y de sus funciones de onda en las representaciones de coordenadas y de momentos y en el espacio de fases a través de la ya mencionada función de Wigner. Finalmente, veremos dos definiciones a mayores de los estados coherentes, a través del operador desplazamiento y mediante la relación de incertidumbre, la cual nos permitirá definir un tipo más general de estados coherentes, los *squeezed states* o estados comprimidos.

Una revisión más detallada de las propiedades generales de los estados coherentes se verá en el capítulo tres. Calcularemos los valores esperados de algunos observables importantes, las desviaciones cuadráticas medias de la posición y el momento, la relación de incertidumbre que minimizan los estados coherentes, la evolución temporal de las densidades de probabilidad y de la función de Wigner. Veremos también como la probabilidad de detección de modos de vibración sigue una distribución de Poisson, la no ortogonalidad entre estados, que permite que formen una base más que completa y, por último, la acción del operador creación sobre estos estados.

En el cuarto capítulo estudiaremos una superposición de estados coherentes, los llamados *estados gatos de Schrödinger*. Nos centraremos en el estudio de los estados gato pares. En este caso calcularemos la función de onda en el espacio de fases y la función de Wigner asociada, las cuales veremos, a través de la representación gráfica, que presentan una zona de interferencia cuántica entre las gaussianas asociadas a cada

uno de los estados coherentes que forman el estado. Por último, veremos la evolución temporal de estos estados gato.

En el capítulo cinco veremos algunas aplicaciones a diversos campos de la física.

Finalmente, en el capítulo seis discutiremos las conclusiones obtenidas de este trabajo.

Abstract

In this document a summary of results about the coherent states of the harmonic oscillator is presented, as well as graphic representations of the probability densities in the coordinate and momentum representation and in the phase-space formalism through the Wigner Function.

In the first chapter a brief idea of the motivation of this work is given, as well as a little historical review about the study of coherent states, very present in several fields of physics.

The second chapter begins with a general review of some useful results about the harmonic quantum oscillator, mainly the definitions of the creation and annihilation operators and the harmonic oscillator Hamiltonian. Subsequently, these results are applied to the calculus of the analytic expression of a coherent state and its wave function in the coordinate and momentum representations, and also in phase space through the Wigner function. Finally, two more definitions of coherent states will be given, one through the displacement operator and the other one with the minimal uncertainty relation, which would allow us to define a more general type of coherent state, called squeezed state.

A more general review of the properties of coherent states will be seen in the third chapter. Some of the expectation values of some important observables will be calculated: the mean quadratic deviations of the position and the momentum, the uncertainty relation (which coherent states minimize), the temporal evolution of the probability densities and the Wigner function. It will also be seen how the probability of detection of vibrational modes follows a Poissonian distribution, the non-orthogonality of states (which allows the coherent states to form a more-than-complete basis) and, lastly, the action of the creation operator in these states.

In the fourth chapter a superposition of coherent states, the so-called Schrödinger's cat states will be studied. The attention will be focused on the even cat states. In this case it will be calculated the wave function in the phase space and the associated Wigner Function, which will be seen through a graphical representation, which presents an interference quantum zone between the Gaussians of each of the coherent states that

form the state. At last, the temporal evolution of this cat states will be seen.

In chapter five some application to several fields of physics will be seen.

Finally, in chapter six, the conclusions of this paper will be discuss.

Capítulo 1

Introducción

Los estados coherentes son unos estados cuánticos cuya densidad de probabilidad preservan su forma en el tiempo, de ahí su nombre. Tienen un comportamiento y propiedades muy semejantes a las de un oscilador armónico clásico y es por eso por lo que fueron los primeros sistemas dinámicos en ser estudiados por Erwin Schrödinger. Estos estados fueron vistos por primera vez en la literatura científica gracias a un artículo de E. Schrödinger publicado en el *Naturwissenschaften Journal* en el año 1926. En él, Schrödinger construyó los llamados *minimum uncertainty wave packets* o paquetes de onda con incertidumbre mínima, que más tarde se pasó a llamar estados coherentes. No obstante, no fue hasta el año 1963 cuando J.R. Glauber, físico y profesor de Física de la Universidad Harvard y Premio Nobel en 2005 por su contribución a la teoría cuántica de coherencia óptica, comenzó a desarrollar la teoría de los estados coherentes. Glauber determinó los autoestados del operador aniquilación del oscilador armónico para así poder estudiar las funciones de correlación en óptica cuántica y describir un haz de laser coherente. Para ello, estableció una analogía entre los valores esperados de los operadores bosónicos de creación y aniquilación y las funciones clásicas de correlación óptica.

Estos estados están muy presentes en la física moderna actual. Entre sus múltiples aplicaciones podemos destacar aquellas a la mecánica cuántica, física atómica, termodinámica, física de la materia condensada, física nuclear, física de partículas y teoría cuántica de campos, siendo la más destacable la aplicación original a la óptica cuántica, con la que Glauber comenzó todo el desarrollo de los estados coherentes.

En la electrodinámica cuántica y otras teorías bosónicas de campos, los estados coherentes fueron introducidos por Glauber y pasaron a ser conocidos también bajo el nombre de *Glauber states*.

Capítulo 2

Fundamentos matemáticos

2.1. Introducción: El oscilador armónico

Debido a la naturaleza de los estados coherentes, comenzaremos dando, brevemente, unas definiciones sobre el oscilador armónico cuántico. El hamiltoniano de dicho oscilador toma el siguiente aspecto:

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2, \quad (2.1)$$

donde P y X son los operadores cuánticos de momento y posición, respectivamente, y ω es la frecuencia natural de oscilación. Recordamos que estos operadores no conmutan y son tales que:

$$[X, P] = i\hbar. \quad (2.2)$$

Definimos unos operadores especiales, llamados de creación, a^+ , aniquilación, a , y el operador número N dados por:

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} P, \quad (2.3)$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} P, \quad (2.4)$$

$$N = a^+ a. \quad (2.5)$$

Para simplificar la notación, tomaremos $\frac{m\omega}{\hbar} = 1$, de modo que los operadores (2.3) y (2.4) resultan:

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X - \frac{i}{\hbar} P \right), \quad (2.6)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X + \frac{i}{\hbar} P \right). \quad (2.7)$$

Podemos comprobar que los operadores (2.5), (2.6) y (2.7) cumplen las relaciones de conmutación siguientes:

$$\begin{aligned} [a^+, a] &= -I, \\ [N, a] &= -a, \\ [N, a^+] &= a^+. \end{aligned} \tag{2.8}$$

De igual modo, podemos escribir el hamiltoniano del oscilador armónico como:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right), \tag{2.9}$$

donde, introduciendo el operador número de (2.5), vemos que el hamiltoniano toma finalmente el siguiente aspecto:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right). \tag{2.10}$$

El cual, para simlificar la notación de nuevo, tomaremos como:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}}{\hbar\omega} = \left(N + \frac{1}{2} \right). \tag{2.11}$$

Llamaremos a los estados propios de dicho operador estados número, los cuales simplemente nos indicarán la energía del modo de oscilación de la partícula, puesto que esta vendrá dada, tal y como veremos en la siguiente sección, por:

$$\hat{E}_n = \left(n + \frac{1}{2} \right). \tag{2.12}$$

Designaremos a estos estados por $|n\rangle$ y, además, formarán la base con la que trabajaremos en la definición de los estados coherentes.

2.2. Definición de los estados coherentes

Tal y como hemos indicado en la sección anterior, la base con la que trabajaremos será la formada por los estados número:

$$\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle, \dots\}. \tag{2.13}$$

La acción de los operadores creación, aniquilación y número sobre los elementos de esta base viene dada por [1]:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \tag{2.14}$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \tag{2.15}$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \tag{2.16}$$

Así mismo, la acción del hamiltoniano sobre estos estados número, es decir, la ecuación de autovalores del hamiltoniano, nos dara la energía de dichos osciladores armónicos:

$$\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = \left(N + \frac{1}{2}\right) |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle = \hat{E}|n\rangle. \quad (2.17)$$

Siendo $\hat{E}_n = E_n/\hbar\omega$. La ventaja de trabajar con la base de estados número es que podemos describir cualquier sistema físico que esté compuesto por osciladores armónicos, puesto que, además, la base en sí forma un conjunto ortonormal completo. Por este motivo, la usaremos para describir los estados coherentes $|z\rangle$, los cuales definimos como aquellos que son autoestados del operador aniquilación, a (2.7):

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad (2.18)$$

donde z es un número complejo cualquiera. Podemos escribir estos estados como una combinación lineal de los elementos de la base (2.13) :

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |n\rangle. \quad (2.19)$$

Para hallar la forma de los coeficientes a_n , aplicamos el operador aniquilación a sobre esta combinación lineal:

$$a|z\rangle = a \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n |n\rangle \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (a|n\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (2.20)$$

donde hemos tenido en cuenta (2.14) y que en el penúltimo sumatorio el término para $n = 0$ es cero. Ahora introducimos un nuevo índice $m = n - 1$, operamos y tenemos en cuenta la definición (2.18) de estos estados coherentes y llegamos a:

$$a|z\rangle = \sum_{m=-1}^{\infty} a_{m+1} \sqrt{m+1} |m\rangle = z \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m |m\rangle \right) = \sum_{m=0}^{\infty} z a_m |m\rangle. \quad (2.21)$$

Observamos, por comparación directa del segundo y cuarto término de esta ecuación, que podemos obtener una relación de recurrencia para el coeficiente de normalización a_n :

$$a_{m+1} = \frac{z}{\sqrt{m+1}} a_m. \quad (2.22)$$

Desarrollando dicha relación:

$$m = 0 \rightarrow a_1 = \frac{z}{\sqrt{1}} a_0, \quad (2.23)$$

$$m = 1 \rightarrow a_2 = \frac{z}{\sqrt{2}} a_1 = \frac{z^2}{\sqrt{2!}} a_0, \quad (2.24)$$

$$\vdots \quad (2.25)$$

$$m = n \rightarrow a_n = \frac{z^n}{\sqrt{n!}} a_0, \quad (2.26)$$

donde a_0 es una constante de normalización que determinaremos más adelante. Sustituyendo (2.26) en (2.19) obtenemos la expresión general, a falta de la constante a_0 , de un estado coherente general:

$$|z\rangle = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.27)$$

Para calcular la constante de normalización utilizaremos la propiedad de ortonormalidad de los estados coherentes, sirviéndonos de la ortonormalidad de los estados número:

$$\begin{aligned} 1 = \langle z|z\rangle &= \left(\bar{a}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \langle n| \right) \left(a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \right) = |a_0|^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n z^m}{\sqrt{n!m!}} \delta_{n,m} \\ &= |a_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|z|^2)^n}{n!} = |a_0|^2 e^{|z|^2} = 1, \end{aligned}$$

finalmente:

$$|a_0| = e^{-\frac{|z|^2}{2}}. \quad (2.28)$$

Quedando determinado así el modulo de la constante de normalización, a falta de la fase compleja. Sustituyendo (2.28) en (2.27), obtenemos la expresión general definitiva de los estados coherentes:

$$\boxed{|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.} \quad (2.29)$$

Podemos observar en (2.29) que, para cada numero complejo z , existe un estado coherente $|z\rangle$.

2.2.1. Funcion de onda en la representacion de coordenadas

Para tener una idea un poco más concreta de como son estos estados coherentes que acabamos de hallar, pasamos ahora a calcular la función de onda asociada, para lo cual pasaremos a trabajar en la representación de coordenadas. Llamaremos $\Psi(x, z)$ a dicha función de onda asociada al estado coherente correspondiente al número complejo z en la representación de coordenadas. Calculamos:

$$\Psi(x, z) = \langle x|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \langle x|n\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \pi^{-\frac{1}{4}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (2.30)$$

Donde hemos utilizado la representación de coordenadas de los estados número del oscilador armónico, dada por las funciones de Hermite:

$$\langle x|n\rangle = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \pi^{-\frac{1}{4}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (2.31)$$

siendo $H_n(x)$ los polinomios de Hermite de la variable x , autovalor del operador posición X . Comparando con la función generatriz de los polinomios de Hermite [2]:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \quad (2.32)$$

vemos que, si realizamos el cambio $t \rightarrow \frac{z}{\sqrt{2}}$, y sustituimos (2.32) en (2.30), la función de onda toma un aspecto mucho más sencillo, resultando ser:

$$\begin{aligned} \Psi(x, z) &= \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{2x\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{z^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{|z|^2+z^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2} + 2x\frac{z}{\sqrt{2}}} \\ &= \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{|z|^2+z^2}{2}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - z\right)^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Finalmente la función de onda del estado coherente $|z\rangle$ en la representación de coordenadas es

$$\boxed{\Psi(x, z) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{|z|^2+z^2}{2}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - z\right)^2},} \quad (2.34)$$

donde hemos utilizado la siguiente relación:

$$-\frac{x^2}{2} + 2x\frac{z}{\sqrt{2}} = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - z\right)^2 + z^2. \quad (2.35)$$

Podemos observar que dicha función de onda (2.34) es de tipo gaussiana, pues el producto de dos gaussianas siempre se puede transformar en otra. El módulo de dicha función será:

$$\boxed{|\Psi(x, z)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x - \sqrt{2}Re(z))^2}.} \quad (2.36)$$

Que resulta ser un paquete de ondas gaussiano y, además, estar normalizado

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, z)|^2 dx = 1. \quad (2.37)$$

Si nos restringimos ahora a valores reales de z , es decir, particularizando la ecuación (2.34) a un $z \in \mathbb{R}$, obtenemos:

$$\Psi(x, z) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - z\right)^2}. \quad (2.38)$$

Representamos, usando el programa Mathematica, la función (2.36), para $z \in \mathbb{R}$. Para ello, fijaremos tres $z \in \mathbb{R}$ cualesquiera, es decir, tres estados coherentes diferentes pero reales, y veremos su gráfica para cualquier x . La Figura 2.1 nos muestra el módulo al cuadrado de la función de onda para $z_1 = 1$, $z_2 = 5$ y $z_3 = 10$. En ella, podemos observar que, para cada estado coherente z_i , el pico de la gaussiana se ve desplazado exactamente la cantidad $x = \sqrt{2}Re(z_i) = \sqrt{2}z_i$, puesto que su parte real coincide con el módulo.

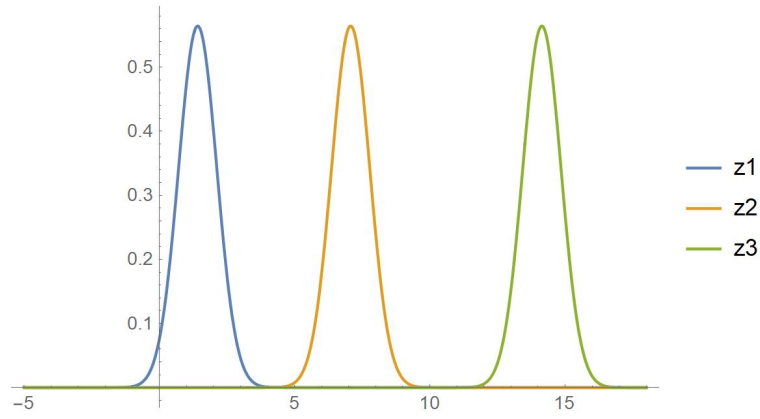


Figura 2.1: Función de onda para $z_1 = 1$, $z_2 = 5$ y $z_3 = 10$.

En la Figura 2.2 hemos representado de nuevo la ecuación (2.36). En ella, podemos observar el modulo al cuadrado de la función de onda para tres diferentes estados coherentes con el mismo módulo pero con diferente argumento: $z_1 = e^{i0}$, $z_2 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ y $z_3 = e^{\frac{i\pi}{2}}$. En este caso observamos como el máximo de la curva se va desplazando hacia la izquierda a medida que va disminuyendo su parte real, hasta llegar a z_3 , cuya parte real es nula. Si siguiéramos aumentando la fase veríamos cómo el pico se sigue desplazando hacia la izquierda hasta llegar al valor extremo correspondiente a una fase de π , y después comenzaría a desplazarse hacia la derecha hasta regresar a el estado inicial z_1 .

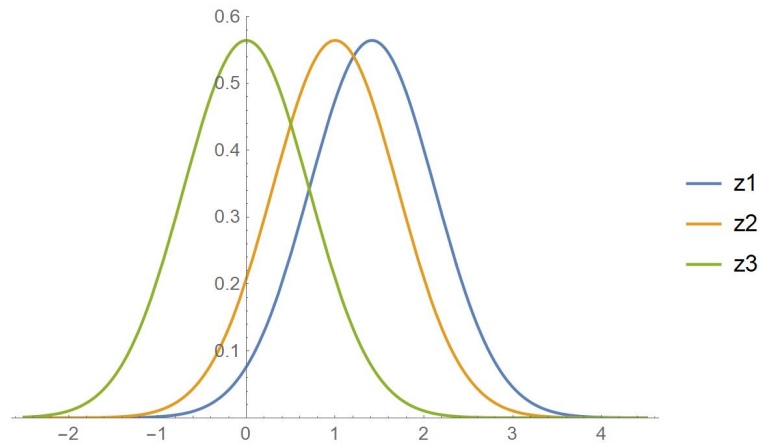


Figura 2.2: Función de onda para $z_1 = e^{i0}$, $z_2 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ y $z_3 = e^{\frac{i\pi}{2}}$.

En vista a estos resultados, cabe destacar una propiedad interesante de los estados coherentes, su densidad de probabilidad no cambia de forma para ningún z . El único efecto observable al cambiarlo es que el pico de la gaussiana se desplaza, el cual está siempre centrado en el punto $x = \sqrt{2}Re(z)$.

2.2.2. Función de onda en la representación de momentos

Pasamos ahora a calcular cómo sería la función de onda de un estado coherente $|z\rangle$ en la representación de momentos. Esta la podemos obtener a través de la transformada de Fourier de la función de onda en la representación de posiciones, la definición que usaremos es la siguiente [3]:

$$\tilde{\Psi}(p, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} px} \Psi(x, z) dx. \quad (2.39)$$

Teniendo en cuenta la expresión para la función de onda en la representación de posiciones $\Psi(x, z)$ (2.34), calculamos la expresión de la función de ondas en la representación de momentos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(p, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} px} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{|z|^2 - z^2}{2}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - z\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{|z|^2 + z^2}{2}} e^{\left(\frac{ip}{\hbar\sqrt{2}} - z\right)^2}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde hemos utilizado el programa Mathematica para calcular la integral. Como, según nuestra definición de transformada de Fourier, ésta conserva la norma, la función $\tilde{\Psi}(p, z)$ estará también normalizada. Por tanto, finalmente, la función de onda toma el siguiente aspecto:

$$\boxed{\tilde{\Psi}(p, z) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{|z|^2 + z^2}{2}} e^{\left(\frac{ip}{\hbar\sqrt{2}} - z\right)^2}}. \quad (2.41)$$

Y el módulo al cuadrado de dicha función de onda será:

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(p, z)|^2 &= \frac{1}{\hbar\sqrt{\pi}} e^{\frac{|z|^2 + z^2}{2}} e^{\left(\frac{ip}{\hbar\sqrt{2}} - z\right)^2} e^{\frac{|z|^2 + \bar{z}^2}{2}} e^{\left(-\frac{ip}{\hbar\sqrt{2}} - \bar{z}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\hbar\sqrt{\pi}} e^{-|z|^2 - \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} e^{\left(\frac{ip}{\hbar\sqrt{2}} - z\right)^2 + \left(-\frac{ip}{\hbar\sqrt{2}} - \bar{z}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\hbar\sqrt{\pi}} e^{-|z|^2 - \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} e^{-\frac{p^2}{\hbar^2} + 2\sqrt{2}\frac{p}{\hbar}\text{Im}(z) + 2\text{Re}(z)^2 - 2\text{Im}(z)^2} \\ &= \frac{1}{\hbar\sqrt{\pi}} e^{-2\text{Im}(z)^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} + 2\sqrt{2}\frac{p}{\hbar}\text{Im}(z)} = \frac{1}{\hbar\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{p}{\hbar} - \sqrt{2}\text{Im}(z)\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Donde hemos utilizando que:

$$\begin{aligned} z^2 + \bar{z}^2 &= 2\text{Re}(z)^2 - 2\text{Im}(z)^2, \\ -2\text{Im}(z)^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} + 2\sqrt{2}\frac{p}{\hbar}\text{Im}(z) &= -\left(\frac{p}{\hbar} - \sqrt{2}\text{Im}(z)\right)^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Finalmente, la densidad de probabilidad en la representación de momentos es:

$$\boxed{|\tilde{\Psi}(p, z)|^2 = \frac{1}{\hbar\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{p}{\hbar} - \sqrt{2}\text{Im}(z)\right)^2}}. \quad (2.44)$$

Podemos observar una gran similitud entre las expresiones (2.41), (2.44) y (2.34), (2.36), pues en ambas representaciones obtenemos gaussianas cuyos picos se ven desplazados por la cantidad $\sqrt{2}Re(z)$ en la representación de posiciones y por $\sqrt{2}Im(z)$ en la representación de momentos, tal y como podemos apreciar en la Figura 2.3, en la cual aparece representada la densidad de probabilidad en el espacio de momentos para tres diferentes z , los mismos que en la Figura 2.2.

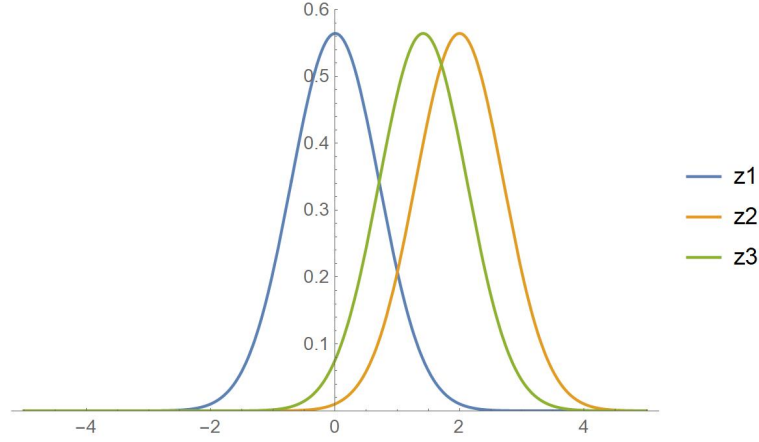


Figura 2.3: Módulo al cuadrado de la función de onda en el espacio de momentos para $z_1 = e^{i0}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2.2.3. Funcion de onda en el espacio de fases

La función de onda en el espacio de fases viene dada por la función de quasiprobabilidad de Wigner, la cual fue introducida por Eugene Wigner en 1932. Ésta la podemos definir de la siguiente manera [4]:

$$W(x, p, z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \Psi\left(x + \frac{y}{2}, z\right) \overline{\Psi}\left(x - \frac{y}{2}, z\right) dy. \quad (2.45)$$

Siendo $\Psi(x + \frac{y}{2}, z)$ la función de onda en la representación de coordenadas (2.34) y $\overline{\Psi}(x - \frac{y}{2}, z)$ su conjugada. Es importante resaltar que la función de Wigner siempre es real, es decir,

$$\overline{W(x, p, z)} = W(x, p, z), \quad (2.46)$$

aunque puede tomar valores positivos y negativos.

Sustituyendo en (2.45) la expresión de (2.34), se tiene:

$$\begin{aligned} W(x, p, z) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{|z|^2 - z^2}{2}} e^{-\left(\frac{x+\frac{y}{2}}{\sqrt{2}} - z\right)^2} e^{-\frac{|z|^2 - \bar{z}^2}{2}} e^{-\left(\frac{x-\frac{y}{2}}{\sqrt{2}} - \bar{z}\right)^2} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\sqrt{\pi}} e^{-(x-\sqrt{2}Re(z))^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4} - Im(z)^2 - \frac{ipy}{\hbar}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\sqrt{\pi}} e^{-(x-\sqrt{2}Re(z))^2} 2\sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{p}{\hbar} - \sqrt{2}Im(z)\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Finalmente:

$$W(x, p, z) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-(x-\sqrt{2}\operatorname{Re}(z))^2} e^{-\left(\frac{p}{\hbar}-\sqrt{2}\operatorname{Im}(z)\right)^2}. \quad (2.48)$$

Vemos que se trata del producto de dos gaussianas, por tanto, el aspecto cuando lo representemos en un gráfico tridimensional, será el de una gaussiana tridimensional. Para la representación utilizaremos el programa Mathematica, en el cual fijaremos un valor de estado coherente, es decir, un z y veremos su representación para el plano (x, p) , el plano del espacio de fases.

En las Figuras 2.4, 2.5, 2.6, podemos observar la densidad de probabilidad de los estados coherentes en el espacio de fases para tres valores diferentes de z . Vemos que el pico de la gaussiana está en todos los casos centrado en los puntos $(\sqrt{2}\operatorname{Re}(z), \sqrt{2}\operatorname{Im}(z))$ y que su forma es siempre la misma.

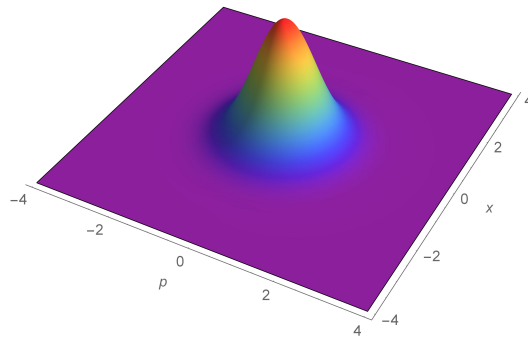


Figura 2.4: Función de Wigner (2.48) para $z = 0$.

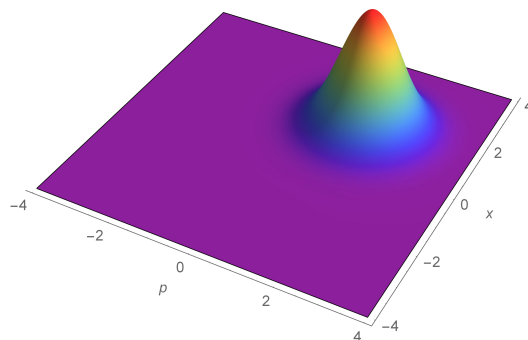


Figura 2.5: Función de Wigner (2.48) para $z = 1 + i$.

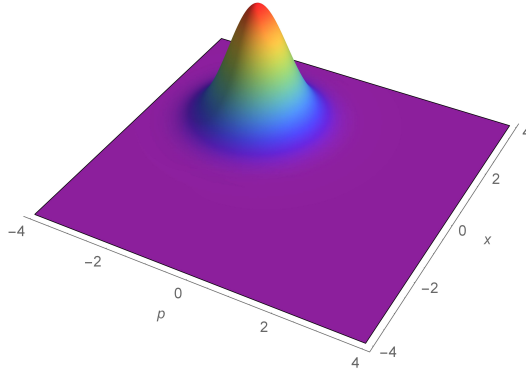


Figura 2.6: Función de Wigner (2.48) para $z = 1 - i$.

2.3. Definiciones alternativas

2.3.1. Operador desplazamiento

Existen otras formas de definir los estados coherentes que no sea a través de ser autoestados del operador aniquilación a [5], [8]. Una primera definición alternativa sería a través del operador unitario de desplazamiento:

$$D(z) = e^{za^+ - \bar{z}a}. \quad (2.49)$$

Donde \bar{z} representa el complejo conjugado de z y a^+ , a son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente. Los estados coherentes serían el resultado de aplicar este operador al estado de energía más baja, también llamado estado de vacío:

$$|z\rangle = D(z) |0\rangle. \quad (2.50)$$

Para comprobar que esta definición es válida, usaremos la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH):

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}, \quad (2.51)$$

la cual es válida si se cumple que:

$$[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0. \quad (2.52)$$

Siendo A y B dos operadores arbitrarios y $[A, B]$ su conmutador. Tomando $A = za^+$ y $B = -\bar{z}a$, vemos que se cumpliría la relación (2.52), puesto que, usando la primera de las relaciones (2.8):

$$[A, B] = [za^+, -\bar{z}a] = -|z|^2 [a^+, a] = |z|^2. \quad (2.53)$$

El operador desplazamiento (2.49) pasa a ser:

$$D(z) = e^{za^+ - \bar{z}a} = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^+} e^{-\bar{z}a}, \quad (2.54)$$

de modo que, aplicándolo al estado de vacío, recuperaríamos el resultado de estado coherente (2.29):

$$\begin{aligned} |z\rangle &= D(z) |0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^+} e^{-\bar{z}a} |0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(za^+)^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(\bar{z}a)^n}{n!} \right) |0\rangle = \\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (a^+)^n |0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Aquí, hemos usado que:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle. \quad (2.56)$$

2.3.2. Relación de incertidumbre

Otra manera de definirlos podría ser teniendo en cuenta la relación de incertidumbre de Heisenberg (3.22). Un estado coherente es aquel que cumple esta relación, minimizándola además:

$$(\Delta\langle X \rangle_z)^2 (\Delta\langle P \rangle_z)^2 = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2. \quad (2.57)$$

Esta última definición nos permite obtener, además de los estados coherentes, los llamados *squeezed states*, que son una generalización de los primeros. Los estados coherentes son aquellos para los cuales la dispersión en la posición y el momento son iguales, mientras que los *squeezed states* tienen dispersiones diferentes.

Más detalles sobre estas dispersiones se mostrarán en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Propiedades generales

3.1. Valor esperado de la posición

Para calcular el valor medio o valor esperado de la posición, deberemos calcular el siguiente bracket:

$$\langle X \rangle_z = \langle z | X | z \rangle. \quad (3.1)$$

Puesto que los estados coherentes son una combinación lineal de los estados número, necesitaremos ver cual es la acción del operador posición sobre los estados número. Recordando la expresión de los operadores aniquilación (??) y creación (??), podemos ver fácilmente la expresión que tomaría el operador posición en función de dichos operadores:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a), \quad (3.2)$$

cuya acción sobre los estados número será:

$$\langle n | X | m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m+1} \delta_{n,m+1} + \sqrt{m} \delta_{n,m-1} \right). \quad (3.3)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_z &= \langle z | X | z \rangle = e^{-|z|^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^{m+1} z^m}{\sqrt{m!(m+1)!}} \sqrt{m+1} + \frac{\bar{z}^n z^{n+1}}{\sqrt{n!(n+1)!}} \sqrt{n+1} \right) = \\ &= e^{-|z|^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|z|^2)^n \bar{z}}{n! \sqrt{n+1}} \sqrt{n+1} + \frac{(|z|^2)^n z}{n! \sqrt{n+1}} \sqrt{n+1} \right) = \\ &= e^{-|z|^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|z|^2)^n}{n!} (\bar{z} + z) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \operatorname{Re}(z) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(z). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Finalmente:

$$\langle z|X|z\rangle = \langle X\rangle_z = \sqrt{2}Re(z). \quad (3.5)$$

Tal y como vimos en las Figuras 2.1 y 2.2, la gaussiana estaba centrada en el punto $\sqrt{2}Re(z)$, lo cual vemos que corresponde con el valor esperado de la posición, como era de esperar. Podemos escribir, entonces, la densidad de probabilidad (2.36) de la siguiente manera:

$$|\Psi(x, z)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-\langle X\rangle_z)^2}. \quad (3.6)$$

3.2. Valor esperado del momento

Siguiendo un procedimiento análogo al de la sección anterior, podemos calcular el valor esperado del operador momento P , el cual, de nuevo usando las ecuaciones (??) y (??) resulta ser:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{i} (a - a^+). \quad (3.7)$$

Cuya acción sobre los estados número viene dada por la expresión:

$$\langle m|P|n\rangle = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} - \sqrt{n} \delta_{m,n-1} \right). \quad (3.8)$$

Calculando ahora, del mismo modo que en (3.4), el valor esperado del momento, obtenemos la siguiente relación:

$$\langle z|P|z\rangle = \langle P\rangle_z = \hbar\sqrt{2} Im(z). \quad (3.9)$$

De nuevo, la densidad de probabilidad (2.44), en terminos del valor esperado del momento, se puede escribir como sigue:

$$|\Psi(p, z)|^2 = \frac{1}{\hbar\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\hbar^2}(p-\langle P\rangle_z)^2}. \quad (3.10)$$

En vista a las ecuaciones (3.5) y (3.9) vemos que es posible establecer una analogía entre la posición y el momento y la parte real y la imaginaria, respectivamente, del numero complejo z que representa el estado coherente:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle X\rangle_z + \frac{i}{\hbar} \langle P\rangle_z \right). \quad (3.11)$$

3.3. Valor esperado del operador número

Podemos demostrar que el valor esperado del operador número en un estado coherente $|z\rangle$ coincide con el módulo al cuadrado del número z que representa dicho estado. Para realizar el cálculo, expresaremos el operador número en función de los operadores de creación y aniquilación según la ecuación (2.5) y calcularemos su acción sobre los estados número:

$$\langle n|N|n\rangle = \langle n|a^+a|n\rangle = m \delta_{n,m}. \quad (3.12)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \langle z|N|z\rangle &= \langle z|a^+a|z\rangle = e^{-|z|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n z^m}{\sqrt{n!m!}} m \delta_{n,m} = e^{-|z|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|z|^2)^n}{n!} n \\ &= e^{-|z|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|z|^2)^n}{(n-1)!} = e^{-|z|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|z|^2)^{m+1}}{m!} = e^{-|z|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|z|^2)^m}{m!} |z|^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Finalmente:

$$\boxed{\langle z|N|z\rangle = \langle N\rangle_z = |z|^2.} \quad (3.14)$$

3.4. Valor esperado de la energía

El valor esperado de la energía, para un estado coherente, lo podemos calcular teniendo en cuenta la expresión del hamiltoniano en función del operador número (2.11) y su acción sobre los estados número (2.16):

$$\langle z|\hat{\mathcal{H}}|z\rangle = \langle \hat{\mathcal{H}}\rangle_z = \langle z|N|z\rangle + \langle z|\frac{1}{2}|z\rangle. \quad (3.15)$$

Teniendo en cuenta la expresión del valor esperado del operador número calculada anteriormente (3.14):

$$\langle \hat{\mathcal{H}}\rangle_z = |z|^2 + \frac{1}{2} = \langle N\rangle_z + \frac{1}{2}, \quad (3.16)$$

vemos entonces que el valor esperado de la energía, como resulta lógico, depende del número medio de modos de vibración y por lo tanto del módulo al cuadrado del número z que representa el estado coherente, siendo no nulo cuando el número medio de modos de vibración es cero, es decir, cuando $z = 0$. Esto último representaría la energía del vacío.

3.5. Desviación cuadrática media del operador N

Para calcular la desviación o incertidumbre del operador número, utilizamos la siguiente expresión:

$$\Delta\langle N \rangle_z = \sqrt{\langle z|N^2|z \rangle - \langle z|N|z \rangle^2} = \sqrt{\langle N^2 \rangle_z - \langle N \rangle_z^2}. \quad (3.17)$$

Necesitamos obtener $\langle N^2 \rangle_z$, para ello, calcularemos la acción del operador N^2 sobre los estados número:

$$\langle n|N^2|m \rangle = \langle n|(a^+a)(a^+a)|m \rangle = \langle n|N|m \rangle \langle n|N|m \rangle = m \delta_{n,m} m \delta_{n,m} = m^2 \delta_{n,m}, \quad (3.18)$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle_z &= e^{-|z|^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\bar{z}^n z^m}{\sqrt{n!m!}} m^2 \delta_{m,n} = e^{-|z|^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(|z|^2)^m}{m!} m^2 = e^{-|z|^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(|z|^2)^{r+1}}{r!} (r+1) \\ &= e^{-|z|^2} |z|^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{(|z|^2)^r}{r!} r + \frac{(|z|^2)^r}{r!} \right) = e^{-|z|^2} |z|^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{(|z|^2)^r}{r!} |z|^2 + \frac{(|z|^2)^r}{r!} \right) \\ &= |z|^4 + |z|^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Introduciendo (3.19) en (3.19) y teniendo en cuenta (3.14) obtenemos:

$$\boxed{\Delta\langle N \rangle_z = |z|}. \quad (3.20)$$

3.6. Relación de incertidumbre

Podemos establecer la relación de incertidumbre entre la posición y el momento para un estado coherente. Para ello evaluaremos las incertidumbres de dichas magnitudes según las ecuaciones (3.5) y (3.9). Siguiendo el método empleado en la sección anterior:

$$\Delta\langle X \rangle_z = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}, \quad \Delta\langle P \rangle_z = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}. \quad (3.21)$$

Vemos que si multiplicamos ambas incertidumbres obtenemos la relación de indeterminación de Heisenberg (El cálculo explícito se puede encontrar en [8]):

$$\Delta\langle X \rangle_z \Delta\langle P \rangle_z = \frac{\hbar}{\omega}, \quad (3.22)$$

de modo que, estableciendo de nuevo la analogía entre parte real y parte imaginaria con la posición y el momento, un estado coherente $|z\rangle$ quedaría representado en el espacio de las fases como un círculo centrado en el punto $\sqrt{2}z = (\sqrt{2}Re(z), \sqrt{2}Im(z))$ y de radio $1/2$, que representaría dicha incertidumbre. Si quisiéramos representar un squeezed state, al tener diferentes dispersiones en la posición y el momento, quedaría representado con una elipse o círculo achatado en el espacio de fases, de ahí su nombre (squeezed).

3.7. Evolución temporal

Pasamos ahora a estudiar la evolución temporal de los estados coherentes. Cuando se trata de un hamiltoniano independiente del tiempo como el nuestro (oscilador armónico), el operador evolución temporal viene dado por:

$$U(t) = \exp\left(-\frac{it\mathcal{H}}{\hbar}\right), \quad (3.23)$$

siendo \mathcal{H} nuestro hamiltoniano en cuestión. Calculamos la acción de dicho operador sobre un estado coherente general (2.29), para ello, recordaremos la acción del hamiltoniano sobre un estado número (2.17) :

$$\begin{aligned} U(t)|z\rangle &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{it\mathcal{H}}{\hbar}} |n\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{it}{\hbar}(n+\frac{1}{2})\hbar\omega} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ze^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{-\frac{|ze^{-i\omega t}|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ze^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Finalmente, podemos expresar la evolución temporal de un estado coherente $|z\rangle$ como:

$$\boxed{U(t)|z\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} |ze^{-i\omega t}\rangle.} \quad (3.25)$$

Lo cual significa que un estado coherente en un tiempo t , formará un estado coherente con autovalor

$$z(t) = ze^{-i\omega t}. \quad (3.26)$$

Por tanto, cuando el estado coherente evolucione en el tiempo, seguirá siendo un estado coherente, pero su autovalor realizará rotaciones en el plano complejo (o si se prefiere, en el espacio de las fases). En otras palabras, podemos observar que la acción de este operador sobre el estado coherente simplemente añade una fase dependiente del tiempo al número complejo z , de modo que la gaussiana que lo representa, es decir, su forma, tampoco es modificada en este caso, simplemente se verá desplazada de la misma forma que en las Figuras 2.4, 2.5 y 2.6. A medida que avanza el tiempo, la fase irá cambiando y así lo hará el punto en el que está centrado el pico, realizando rotaciones tal y como habíamos indicado anteriormente. Para ver esto explícitamente, calcularemos ahora la forma de la función de onda una vez que hemos aplicado la evolución temporal, para ello solamente hay que añadir la exponencial y hacer el cambio $z \rightarrow ze^{-i\omega t}$. Recordando la expresión de la función de onda (2.34) y haciendo el cambio:

$$\Psi(x, z, t) = \langle x|U(t)|z\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{-\frac{|z|^2 - (ze^{-i\omega t})^2}{2}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - ze^{-i\omega t}\right)^2}. \quad (3.27)$$

Tomamos el módulo:

$$\boxed{|\Psi(x, z, t)|^2 = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-(x - \sqrt{2} \operatorname{Re}(ze^{-i\omega t}))^2}.} \quad (3.28)$$

Vemos, tal y como hemos comentado anteriormente, que el único efecto en el módulo de la función de onda de la evolución temporal es el de añadir una fase ωt , que cambia con el tiempo, al número complejo z , que representa el estado coherente, y por lo tanto el pico de la gaussiana se desplaza. Aquí es donde podemos hacer la analogía con el oscilador armónico clásico, pues la trayectoria que sigue el pico sería la misma que la de una partícula clásica.

Podemos calcular también, siguiendo un procedimiento análogo, la evolución temporal para la representación de momentos. El efecto sería el mismo, obteniendo una trayectoria clásica. Teniendo en cuenta la ecuación (2.41):

$$\Psi(p, z, t) = \sqrt{\frac{1}{\hbar}} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{\frac{|z|^2 - z^2 e^{-2i\omega t}}{2}} e^{\left(\frac{ip}{\hbar\sqrt{2}} - ze^{i\omega t}\right)^2}. \quad (3.29)$$

Así mismo, el módulo resultará ser:

$$|\Psi(p, z, t)|^2 = \frac{1}{\hbar\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\hbar^2}(p - \hbar\sqrt{2}Im(ze^{-i\omega t}))^2}. \quad (3.30)$$

Veamos ahora la evolución temporal de la densidad de probabilidad en el espacio de fases, la cual corresponde a la función de Wigner (2.48). Si representamos en un gráfico tridimensional esta función sobre el espacio de las fases para el punto $z = 1 + 0i$, en el instante inicial $t = 0$, obtendremos una gaussiana centrada en el punto $(\sqrt{2}Re(z), 0)$, tal y como se muestra en la Figura 3.1.

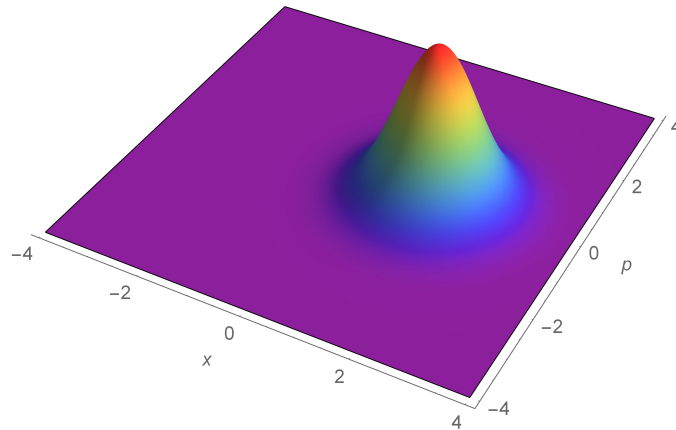


Figura 3.1: Función de Wigner para $t = 0$ del estado $z = 1$.

Si ahora aplicamos la evolución temporal, la fase de z irá cambiando y por lo tanto la gaussiana se desplazará alrededor del origen realizando una circunferencia, tal y

como podemos observar en la Figura 3.2, en la cual hemos representado a la vez la función de Wigner del estado $z = 1$ para diferentes tiempos.

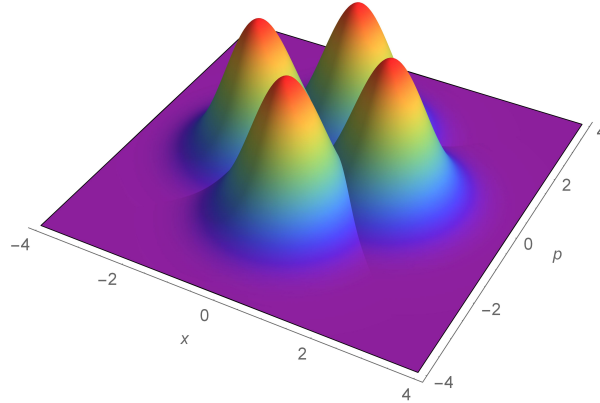


Figura 3.2: Función de Wigner para $t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi$ y $t = \frac{3\pi}{2}$ del estado $z = 1$.

Podemos realizar una representación análoga, pero esta vez sobre el plano (x, t) , tal y como se muestra en la Figura 3.3. En ella, hemos representado en el eje vertical la densidad de probabilidad en función de la coordenada x y del tiempo (las dos variables en el plano), de manera que a medida que avanzamos en el tiempo, así lo hará la densidad de probabilidad, cuyo pico sigue una trayectoria dada por el $\cos(\omega t)$ según la ecuación (2.48).

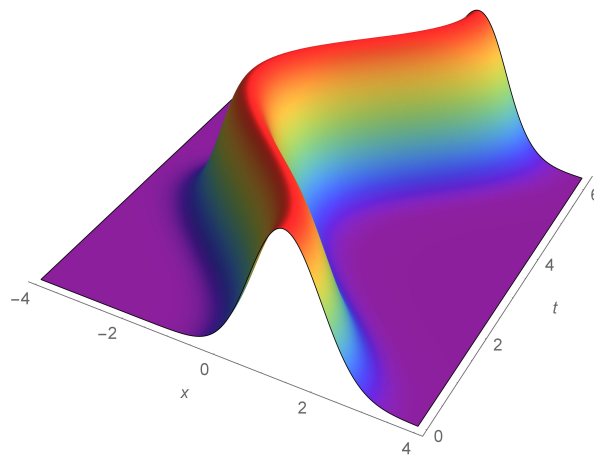


Figura 3.3: Evolución temporal de la densidad de probabilidad (3.28) para $z = 1$ y $\omega = 1$ sobre el plano (x, t) . Hemos representado un periodo para t .

3.8. Cálculo de probabilidades

La probabilidad de detectar una partícula en el estado de vibración $|m\rangle$ lo calculamos como el módulo al cuadrado de la proyección del estado $\langle m|$ sobre el estado $|z\rangle$:

$$P(m, z) = |\langle m|z\rangle|^2 = \left| \langle m| e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right|^2 = e^{-|z|^2} \frac{|z|^{2m}}{m!}. \quad (3.31)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.14) podemos reescribir la probabilidad (3.31) como:

$$P(N, z) = e^{-\langle N \rangle_z} \frac{\langle N \rangle_z^m}{m!}, \quad (3.32)$$

donde vemos que podemos calcular la probabilidad en función del número medio de estados de vibración del estado coherente. En la Figura 3.4 podemos observar la probabilidad de obtener $m = 1, 2, 3$ estados de vibración para cualquier número medio de estados de vibración. Vemos que la probabilidad es máxima cuando el número medio de estados de vibración coincide con m , es decir, cuando $\langle N \rangle_z = m$.

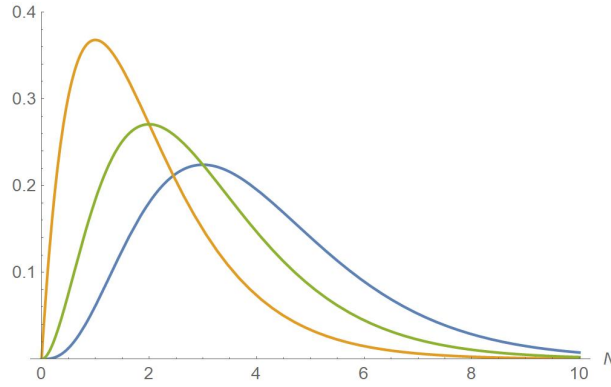


Figura 3.4: Probabilidad de detectar 1, 2 ó 3 estados de vibración para cualquier número medio de estados de vibración, es decir, para cualquier $|z|$.

Podemos observar que dicha distribución de probabilidad coincide con una distribución de Poisson, lo cual es una consecuencia suficiente y necesaria de la invariancia bajo la detección o aniquilación de un estado de vibración, tal y como vimos en la sección anterior: todas las detecciones estadísticas son independientes.

3.9. Ortogonalidad entre estados

Dados dos estados coherentes $|z\rangle$ y $|v\rangle$ cualesquiera, no serán ortogonales entre sí. De hecho, si calculamos su producto escalar:

$$\langle z|v\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n v^m}{\sqrt{n!m!}} \delta_{n,m} = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{z}v)^n}{n!} = e^{-\frac{|z|^2+|v|^2-2\bar{z}v}{2}}. \quad (3.33)$$

Finalmente, operando se llega a:

$$\boxed{\langle z|v\rangle = e^{-|z-v|^2}}. \quad (3.34)$$

Vemos por tanto que siempre existirá un cierto solapamiento entre los estados coherentes. Este solapamiento será menor a medida que $|z - v| \gg 0$, pero nunca llegará a ser nulo.

3.10. Acción del operador creación

Hemos visto que los estados coherentes se definen como aquellos propios del operador aniquilación, pero todavía no hemos visto la acción del operador creación sobre un estado coherente. Esta la podemos calcular como sigue [6]:

$$\begin{aligned} a^+|z\rangle &= a^+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (a^+)^n |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (a^+)^{n+1} |0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{(n+1)!} (a^+)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} (a^+)^n |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde hemos usado la definición (2.56). Por lo tanto podemos observar que la acción del operador creación formalmente se puede considerar como si se realizara la derivada del estado coherente respecto de la variable z , es decir:

$$a^+|z\rangle = \frac{\partial}{\partial z}|z\rangle. \quad (3.36)$$

De esta manera vemos que el operador creación no es un operador propio de los estados coherentes así definidos, lo cual resulta evidente de su definición.

Capítulo 4

Estados gato de Schrödinger

Los estados gato de Schrödinger, del inglés *Schrödinger's cat states*, consisten en una superposición de estados coherentes. El nombre de dichos estados deriva de la muy conocida paradoja sobre el gato de Schrödinger. En ella, se proponía el estado de un gato como una superposición de dos estados, el estado vivo y el estado muerto. Del mismo modo, definiremos los estados gato como una superposición de dos estados coherentes que estén en oposición de fase. Esto se podría extrapolar a más sistemas, por ejemplo, definir el estado de spin de una partícula como superposición de *spin up* y *spin down*.

Para los estados coherentes del oscilador armónico podemos definir dos tipos de estados gato, los pares:

$$|C+\rangle = N(|z\rangle + |-z\rangle), \quad (4.1)$$

y los impares:

$$|C-\rangle = M(|z\rangle - |-z\rangle), \quad (4.2)$$

siendo N una constante de normalización, dada por [7]:

$$N = \frac{1}{\sqrt{2 + 2e^{-2|z|^2}}}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{2 - 2e^{-2|z|^2}}}. \quad (4.3)$$

En este capítulo nos centraremos solo en el estudio de los estados gato pares $|C+\rangle$.

4.1. Función de onda en la representación de coordenadas

Comenzamos calculando la función de onda asociada en la representación de coordenadas para los estados gato pares:

$$\Psi_C(x, z) = \langle x|C+\rangle = N(\langle x|z\rangle + \langle x|-z\rangle) = N(\Psi(x, z) + \Psi(x, -z)). \quad (4.4)$$

Teniendo en cuenta la expresión de la función de onda (2.34):

$$\boxed{\Psi_C(x, z) = N\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{|z|^2-z^2}{2}} \left(e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-z\right)^2} + e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+z\right)^2} \right)}, \quad (4.5)$$

cuyo modulo al cuadrado será:

$$|\Psi_C(x, z)|^2 = \frac{N^2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{|z|^2-z^2}{2}} e^{-\frac{|z|^2-\bar{z}^2}{2}} \left[e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-z\right)^2} + e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+z\right)^2} \right] \left[e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\bar{z}\right)^2} + e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\bar{z}\right)^2} \right]. \quad (4.6)$$

Podemos observar que se trata del producto de varias gaussianas, de modo que al final obtendremos tres términos. Dos de ellos corresponderán a las densidades de probabilidad asociadas a $\Psi(x, z)$ y $\Psi(x, -z)$ y la resultante estará asociada a la interferencia cuántica entre ambos estados, tal y como vemos a continuación:

$$\begin{aligned} |\Psi_C(x, z)|^2 &= \frac{N^2}{\sqrt{\pi}} \left(\Psi(x, z) + \Psi(x, -z) + e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-z\right)^2} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\bar{z}\right)^2} + e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+z\right)^2} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\bar{z}\right)^2} \right) \\ &= \frac{N^2}{\sqrt{\pi}} \left(\Psi(x, z) + \Psi(x, -z) + 2e^{-x^2} e^{-2Im(z)^2} e^{-z^2-\bar{z}^2} \cos(2\sqrt{2}xIm(z)) \right) \\ &= \frac{N^2}{\sqrt{\pi}} \left(\Psi(x, z) + \Psi(x, -z) + 2e^{-x^2} e^{-2Re(z)^2} \cos(2\sqrt{2}xIm(z)) \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde nos hemos servido del programa Mathematica para simplificar la expresión.

Podemos observar como obtenemos las gaussianas asociadas a cada uno de los estados coherentes $|z\rangle$ y $|-z\rangle$, centradas en los respectivos puntos $\sqrt{2}Re(z)$ y $-\sqrt{2}Re(z)$, mas un término adicional: una gaussiana centrada en el origen y modulada por un coseno, el cual nos dará cuenta de la interferencia cuántica entre ambos estados.

Utilizando el programa Mathematica vamos a representar la función (4.7) para diferentes $z \in \mathbb{R}$, tal y como podemos observar en la Figure 4.1. El motivo de la elección de $z \in \mathbb{R}$ es por simplicidad, estamos considerando una fase inicial nula y por tanto todos los z se encuentran en el eje real. Además, el término del coseno será máximo, ya que la parte imaginaria será nula.

Vemos como, a medida que las gaussianas de cada uno de los estados coherentes están más cercanas, más interferencia ocurre entre ellas. Por ejemplo, en la Figura 4.1, observamos como para $z_1 = 0,6$ la interferencia es tal que las dos gaussianas se solapan, mientras que para $z_3 = 2$ las gaussianas están lo suficientemente alejadas y los términos de interferencia resultan ser prácticamente nulos. Una situación intermedia podemos observar para $z_2 = 1$.

Si consideráramos $z \in \mathbb{C}$ sería como evaluar la evolución temporal de un estado gato, lo cual veremos en las siguientes secciones.

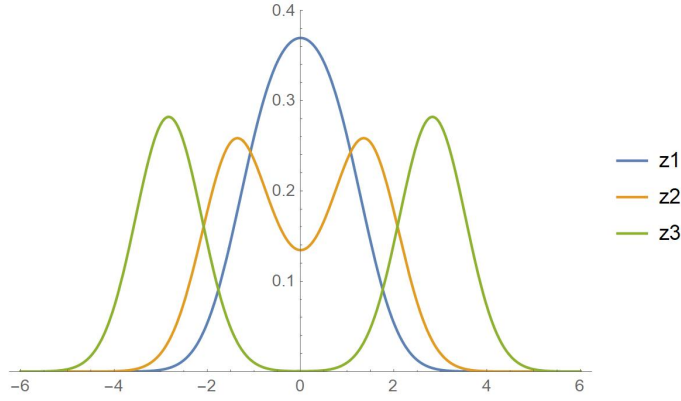


Figura 4.1: Densidad de probabilidad en la representación de momentos para la función de onda de un estado gato par para $z_1 = 0,6$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$.

4.2. Función de onda en el espacio de fases: función de Wigner

Para el cálculo de la función de Wigner de un estado gato par utilizaremos el mismo procedimiento que el utilizado anteriormente, es decir, tomaremos la definición dada en [4]. Para simplificar notación, dividiremos el cálculo en cuatro integrales. Dos de ellas corresponderán a las funciones de Wigner $W(x, p, z)$ y $W(x, p, -z)$ y las otras dos a las interferencias entre los estados, las cuales finalmente se podrán expresar en forma de un coseno, al igual que en la sección anterior.

Teniendo en cuenta la definición de la función de onda en la representación de coordenadas dada por (4.5), calculamos la función de Wigner:

$$\begin{aligned} W_C(x, p, z) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \Psi_C(x + \frac{y}{2}, z) \bar{\Psi}_C(x - \frac{y}{2}, z) dy \\ &= N^2 (W(x, p, z) + W(x, p, -z) + I_1 + I_2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

En esta expresión, las integrales I_1 e I_2 se calculan de un modo análogo al realizado en la sección dedicada a la función de Wigner. La primera es:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \Psi_C(x + \frac{y}{2}, z) \bar{\Psi}_C(x - \frac{y}{2}, -z) dy \\ &= \frac{e^{-2|z|^2}}{\pi\hbar} e^{-\left(\frac{p}{\hbar} + i\sqrt{2}\text{Re}(z)\right)^2} e^{-\left(x - i\sqrt{2}\text{Im}(z)\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por otro lado, la segunda es:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \Psi_C(x + \frac{y}{2}, -z) \bar{\Psi}_C(x - \frac{y}{2}, z) dy \\ &= \frac{e^{-2|z|^2}}{\pi\hbar} e^{-\left(\frac{p}{\hbar} - i\sqrt{2}\text{Re}(z)\right)^2} e^{-\left(x + i\sqrt{2}\text{Im}(z)\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Juntando los cuatro términos, obtenemos finalmente la expresión de la función de Wigner para un estado gato par:

$$\begin{aligned}
W_C(x, p, z) &= \frac{N^2}{\pi\hbar} \left(e^{-(x-\sqrt{2}\text{Re}(z))^2} e^{-\left(\frac{p}{\hbar}-\sqrt{2}\text{Im}(z)\right)^2} + e^{-(x+\sqrt{2}\text{Re}(z))^2} e^{-\left(\frac{p}{\hbar}+\sqrt{2}\text{Im}(z)\right)^2} \right. \\
&\quad \left. + e^{-2|z|^2} e^{-\left(\frac{p}{\hbar}+i\sqrt{2}\text{Re}(z)\right)^2} e^{-(x-i\sqrt{2}\text{Im}(z))^2} + e^{-2|z|^2} e^{-\left(\frac{p}{\hbar}-i\sqrt{2}\text{Re}(z)\right)^2} e^{-(x+i\sqrt{2}\text{Im}(z))^2} \right) \\
&= \frac{N^2}{\pi\hbar} \left\{ e^{-(x-\sqrt{2}\text{Re}(z))^2} e^{-\left(\frac{p}{\hbar}-\sqrt{2}\text{Im}(z)\right)^2} + e^{-(x+\sqrt{2}\text{Re}(z))^2} e^{-\left(\frac{p}{\hbar}+\sqrt{2}\text{Im}(z)\right)^2} \right. \\
&\quad \left. + 2e^{-p^2-x^2} \cos\left(2\sqrt{2}\left[p\text{Re}(z) - x\text{Im}(z)\right]\right) \right\}, \tag{4.11}
\end{aligned}$$

donde nuevamente hemos utilizado el programa Mathematica para simplificar la expresión obtenida.

Podemos representar dicha función utilizando de nuevo el programa Mathematica. Para ello, fijaremos un valor de z y representaremos en el eje z la función de Wigner y sobre el plano $x - y$ el plano del espacio de fases. En las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 podemos observar la función de Wigner para un estado gato par para tres diferentes z . De nuevo observamos que aparece una interferencia cuántica modulada por el coseno entre las dos gaussianas que representan los dos estados coherentes que forman el estado gato. Observamos también como las oscilaciones de dicha interferencia son paralelas al eje p , ya que fijado un z , la forma del coseno viene dada por la variable p .

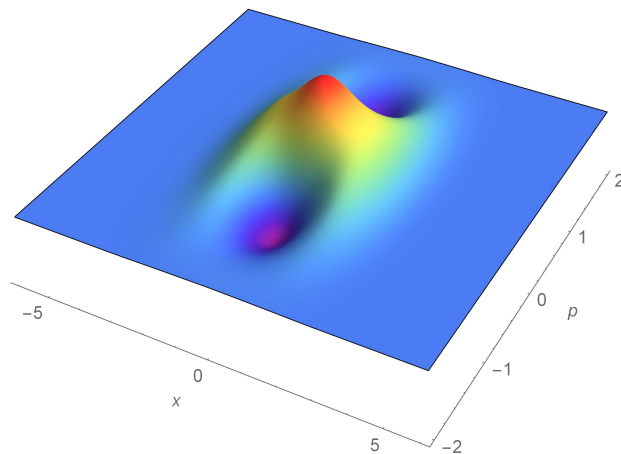


Figura 4.2: Función de Wigner de un estado gato par para $z = 1$.

4.3. Evolución temporal

Pasamos ahora a estudiar la evolución temporal de la densidad de probabilidad (4.1). Para ello, seguiremos un procedimiento análogo al de la (3.28), es decir, añadi-

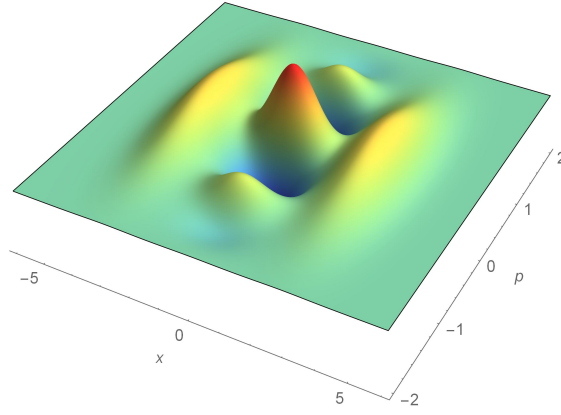


Figura 4.3: Función de Wigner de un estado gato par para $z = 2$.

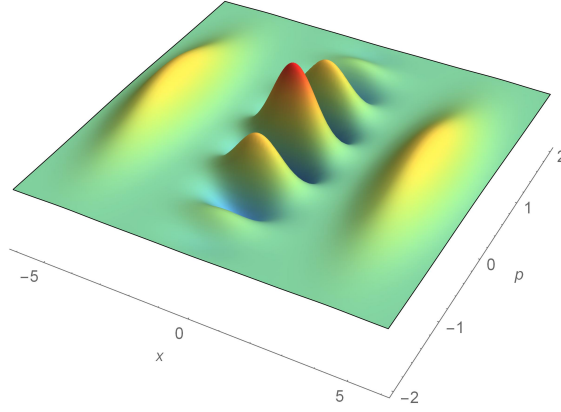


Figura 4.4: Función de Wigner de un estado gato par para $z = 3$.

remos una fase compleja al numero z que representa el estado coherente:

$$|\Psi_C(x, z, t)|^2 = e^{\frac{-i\omega t}{2}} \frac{N^2}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-(x - \sqrt{2}\text{Re}(ze^{-i\omega t}))^2} + e^{-(x + \sqrt{2}\text{Re}(ze^{-i\omega t}))^2} \right. \quad (4.12)$$

$$\left. + 2e^{-x^2} e^{-2\text{Re}(ze^{-i\omega t})^2} \cos \left(2\sqrt{2} \left[p\text{Re}(ze^{-i\omega t}) - x\text{Im}(ze^{-i\omega t}) \right] \right) \right\},$$

A continuación, en la Figura 4.5, representamos las densidades de probabilidad para un $z \in \mathbb{C}$, el cual tomaremos de módulo unitario y de fase inicial nula, de modo que la acción de la evolución temporal, al igual que en las secciones anteriores, será la de cambiar la fase. Esto lo podemos observar en las siguientes figuras.

Para fases mayores a $\frac{\pi}{2}$ la forma de la densidad de probabilidad se repetiría, pero en sentido contrario, pues los dos estados se encuentran en oposición de fase.

A continuación, estudiaremos la evolución temporal de la función de Wigner, para

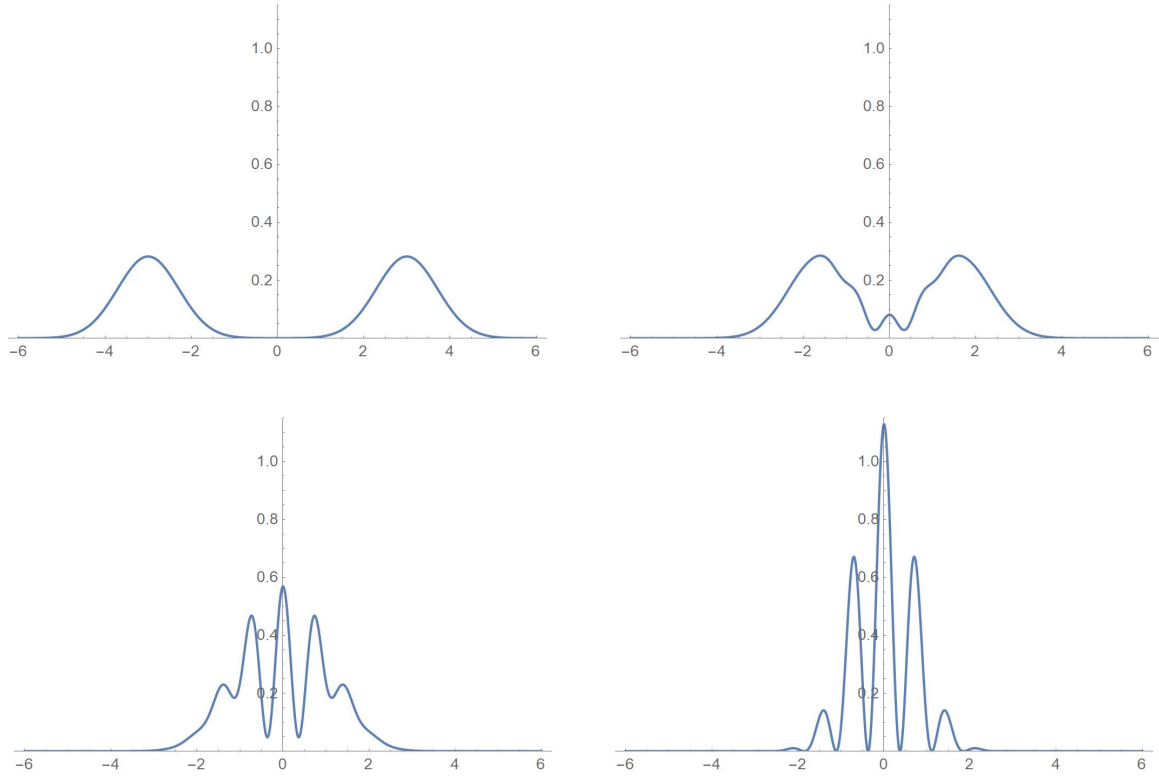


Figura 4.5: Densidad de probabilidad del estado $z = 3e^{it}$ para diversos instantes de tiempo: de izquierda a derecha y de arriba a abajo, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{8}$, $t = \frac{7\pi}{16}$ y $t = \frac{\pi}{2}$.

ello, al igual que cuando vimos la evolución temporal de un estado coherente, iremos variando la fase del z asociado al estado gato. En la Figura 4.6, podemos observar dicha evolución temporal.

Podemos observar como las dos gaussianas de los extremos van girando en sentido antihorario a medida que la fase de z va cambiando. De igual modo, las interferencias cuánticas moduladas por el coseno también giran, siendo siempre perpendiculares a las rectas dadas por:

$$p = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} x. \quad (4.13)$$

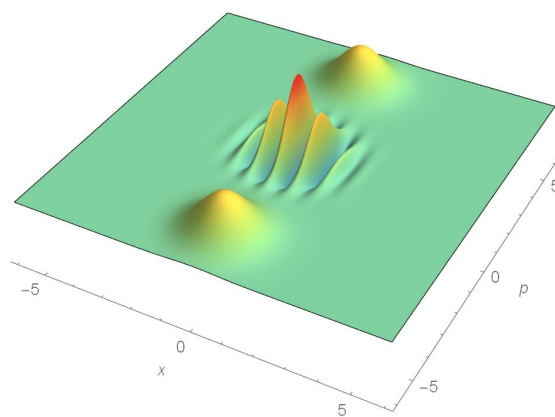
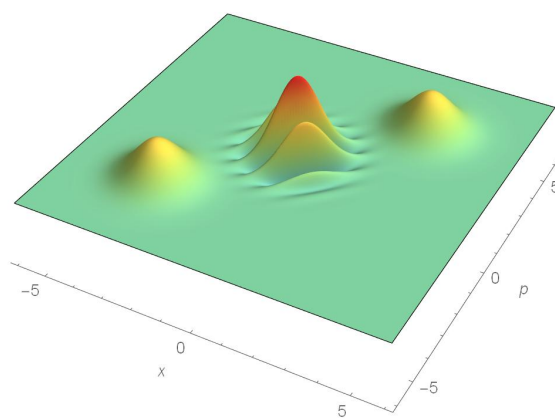
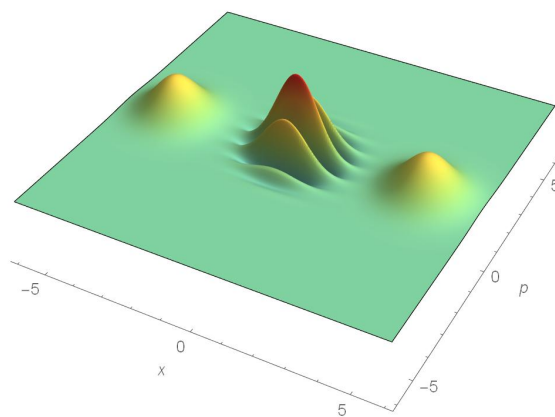


Figura 4.6: Función de Wigner del estado $z = 3e^{-it}$ para diversos instantes de tiempo: de izquierda a derecha y de arriba a abajo, $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ y $t = \frac{\pi}{2}$.

Capítulo 5

Aplicaciones

5.1. Teoría cuántica de campos

5.1.1. Descripción del campo electromagnético en términos de estados coherentes

Para poder estudiar las propiedades cuánticas de las ondas electromagnéticas, así como de la luz, es necesaria una cuantización del campo electromagnético. Para ello, haremos uso de una base con la que poder trabajar, la cual en nuestro caso será una base formada por los estados coherentes.

En términos de coherencia óptica, podemos considerar la función de correlación del campo electromagnético como:

$$G^n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \text{tr}\{\rho E^-(x_1) \dots E^-(x_n) E^+(x_{n+1}) \dots E^+(x_{2n})\}. \quad (5.1)$$

Donde x_i son las coordenadas espaciales, ρ el operador densidad y $E^\pm(x_i)$ son los operadores del campo eléctrico con frecuencias positivas y negativas. La condición de coherencia completa para un campo electromagnético es que todas las funciones de correlación satisfagan la siguiente relación de factorización:

$$G^n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \xi^*(x_1) \dots \xi^*(x_n) \xi(x_{n+1}) \xi(x_{2n}). \quad (5.2)$$

Donde cada uno de estos factores son los autovalores de los operadores de campo eléctrico $E^\pm(x_i)$. Por tanto:

$$\begin{aligned} E^+(x_i)|\phi\rangle &= \xi(x_i)|\phi\rangle, \\ \langle\phi|E^-(x_i) &= \langle\phi|\xi^*(x_i). \end{aligned} \quad (5.3)$$

La condición (5.2) implica que estos operadores se deban comportar como variables clásicas, lo cual nos supone un problema, pues debemos describir movimientos clásicos

en función de estados cuánticos. No obstante, como ya hemos apuntado anteriormente, los estados coherentes son aquellos que se asemejan más a descripciones clásicas, aunque estos estados solo han sido descritos para el oscilador armónico.

En mecánica cuántica de campos, el campo electromagnético consiste en una superposición de osciladores armónicos, llamados fotones, lo cual nos indica que podremos utilizar los estados coherentes $|z\rangle$ como los estados propios de los operadores de campo eléctrico $E^\pm(x_i)$ para así poder realizar nuestra descripción.

El hamiltoniano de un campo electromagnético [9] se puede considerar entonces como una suma de infinitos modos electromagnéticos u osciladores armónicos de diversas frecuencias ω_k llamados fotones, es decir, teniendo en cuenta (2.9):

$$\mathcal{H} = \sum_{k,\lambda=\pm 1} \omega_k \left((a_k^\lambda)^\dagger a_k^\lambda + \frac{1}{2} \right). \quad (5.4)$$

Siendo k el vector de onda asociado a cada fotón, que representaría la energía, y $\lambda = \pm 1$ la dirección de propagación, por lo tanto, los estados coherentes que describirían la coherencia óptica del campo electromagnético podrían ser expresados, atendiendo a (2.55), como:

$$\boxed{|\{z_k^\lambda\}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^3k \sum_{\lambda=\pm 1} |z_k^\lambda|^2\right) \exp\left(\int d^3k \sum_{\lambda=\pm 1} z_k^\lambda (a_k^\lambda)^\dagger\right) |0\rangle.} \quad (5.5)$$

Estos estados (5.5) fueron los que Glauber denominó estados coherentes, aunque en la literatura científica se suelen llamar también estados coherentes fotónicos por razones obvias. De este modo, haces de luz coherentes pueden ser completamente descritos según la mecánica cuántica en función de los estados coherentes.

5.1.2. Generación de estados coherentes

En la sección anterior vimos como definir estados coherentes con la condición de la coherencia óptica, no obstante, según la teoría cuántica de campos, todas las magnitudes son derivables a partir de amplitudes de transición vacío-vacío en presencia de una fuente externa. Esto es lo que haremos a continuación. Demostraremos que el resultado final de este proceso es un estado coherente si la única interacción es una interacción lineal con el campo externo.

La interacción del campo electromagnético con una corriente j_μ puede ser descrita como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu. \quad (5.6)$$

La ecuación de movimiento asociada a dicha interacción, en el gauge de Feynman será:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu = j^\nu, \quad (5.7)$$

cuya solución general viene dada por:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= A_{in}^\mu(x) + \int d^4y \Delta_{ret}(x-y) j^\mu(y) \\ &= A_{out}^\mu(x) + \int d^4y \Delta_{adv}(x-y) j^\mu(y), \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde A_{in}^μ y A_{out}^μ son los campos fotónicos antes y después de la interacción con la corriente j^μ y $\Delta_{ret}(x-y)$ y $\Delta_{adv}(x-y)$ son las funciones de Green retardadas y avanzadas respectivamente. Los estados asociados serán los que correspondan a antes y después de la interacción, que denotaremos por:

$$|\cdot\rangle_{in}, \quad |\cdot\rangle_{out}. \quad (5.9)$$

Despejando en (5.8):

$$A_{out}^\mu(x) = A_{in}^\mu(x) + \int d^4y [\Delta_{ret}(x-y) - \Delta_{adv}(x-y)] j^\mu(y) = A_{in}^\mu(x) + A_{cl}^\mu(x), \quad (5.10)$$

donde hemos introducido $A_{cl}^\mu(x)$ como un campo clásico generado por la corriente $j^\mu(x)$. Llamaremos S a la transformación entre los estados (5.9), la cual puede ser escrita como:

$$S = \exp\left(-i \int d^4x A_{in} j(x)\right) = \exp\left(-i \int d^4x A_{out} j(x)\right). \quad (5.11)$$

De modo que:

$$|\cdot\rangle_{out} = S^\dagger |\cdot\rangle_{in}. \quad (5.12)$$

Vemos, por tanto que, si comenzáramos desde el estado $|0\rangle_{in}$, el estado final tras la interacción del campo libre $A^\mu(x)$ con la corriente $j^\mu(x)$ resulta ser un estado coherente:

$$|0\rangle_{out} = \exp\left(i \int d^4x A_{in} j(x)\right) |0\rangle_{in}, \quad (5.13)$$

puesto que, si realizamos el desarrollo de Fourier del campo libre $A^\mu(x)$, y sustituimos en (5.13) obtenemos la expresión (5.5):

$$|0\rangle_{out} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^3k \sum_{\lambda=\pm 1} |z_k^\lambda|^2\right) \exp\left(\int d^3k \sum_{\lambda=\pm 1} z_k^\lambda (a_k^\lambda)^\dagger\right) |0\rangle = |\{z_k^\lambda\}\rangle. \quad (5.14)$$

5.1.3. Divergencias infrarrojas

Cuando se trata de calcular los elementos de matriz de un scattering entre electrones y fotones encontramos que el estado final presenta unas divergencias logarítmicas para valores de $|k|$ pequeños. Esto es lo que se conoce como divergencias infrarrojas y los estados (5.5) juegan un papel importantísimo a la hora de hacerlas desaparecer.

Las divergencias que surgen en este scattering son debidas a que el campo electromagnético interactúa con los electrones emitiendo un número infinito de fotones, que forman un estado coherente en el estado final, como vimos en la sección anterior.

Si consideramos el scattering de un solo electrón, este se puede representar de manera clásica como una corriente $j^\mu(k)$, cuya transformada de Fourier es:

$$j^\mu(k) = \frac{ie}{\sqrt{2(2\pi)^3|k|}} \left(\frac{p_f^\mu}{p_f k} - \frac{p_i^\mu}{p_i k} \right), \quad (5.15)$$

siendo $p_{i,f}$ los momentos de los electrones en los estados inicial y final, respectivamente. Si ahora sumamos la sección eficaz sobre todos los posibles momentos de los electrones conteniendo un número arbitrario de fotones emitidos, siempre usando los estados coherentes (5.5), las divergencias que se producían son ahora canceladas. Esto nos da una manera elegante de resolver el problema, pero se puede demostrar también que las divergencias desaparecerían para cualquier orden, no solo en la sección eficaz, sino también en los elementos de matriz.

5.2. Condensado de Bose-Einstein

Un condensado de Bose-Einstein es un estado particular de la materia, el cual ocurre cuando se enfría a temperaturas próximas al cero absoluto ($-273,15^\circ\text{C}$) algunos materiales. Los átomos de dichos materiales, al descender la temperatura, comenzarán a ocupar el nivel más bajo de energía, el nivel fundamental, llegando finalmente a estar todos los átomos en el mismo estado.

Según el principio de exclusión de Pauli, solamente las partículas bosónicas podrán alcanzar este estado, puesto que los fermiones no pueden tener los mismos números cuánticos. El condensado de Bose-Einstein implica que todos los átomos serán iguales y, por tanto, indistinguibles. Se trata, por tanto, de un estado de coherencia cuántica.

Si consideramos un condensado de Bose-Einstein en el cual tengamos un número muy grande de bosones y aplicamos repetidamente el operador aniquilación podemos crear una serie de *agujeros*. Con una elección adecuada, una superposición de estos estados puede dar lugar a un estado coherente.

Como el número de partículas de este condensado es muy grande, podemos considerarlas infinitas y por tanto el estado cuántico del condensado se puede expresar como [11]:

$$|CBE\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_f!}}(a^+)^{n_f}|0\rangle, \quad (n_f \gg 1) \quad (5.16)$$

Siendo n_f el número de partículas. Debido a que el condensado está lleno de partículas, no sería posible añadir una nueva partícula y aumentar la energía, es decir:

$$a^+|CBE\rangle = 0. \quad (5.17)$$

Pero, por otro lado, como hay muchas partículas en el condensado, es posible eliminar una partícula y por tanto:

$$a^m|CBE\rangle \neq 0, \quad 0 \leq m \leq n_f. \quad (5.18)$$

De modo que un condensado de Bose-Einstein con estas características (un gran número de partículas y energía fija) puede considerarse como un estado propio del estado de vacío del operador creación:

$$|CBE\rangle = |0\rangle_+. \quad (5.19)$$

Y, a su vez, si eliminamos una partícula, creando un agujero:

$$\begin{aligned} |0\rangle_+ &= |n_f\rangle, \\ |1\rangle_+ &= |n_f - 1\rangle = a|0\rangle_+, \\ \dots & \\ |j\rangle_+ &= |n_f - j\rangle = \frac{a^j}{\sqrt{j!}}|0\rangle_+, \\ \dots & \end{aligned} \quad (5.20)$$

De modo que estos pueden ser definidos como:

$$|n\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{n!}}a^n|0\rangle_+. \quad (5.21)$$

Así, los operadores de creación y aniquilación actuarán sobre estos estados como:

$$a|n\rangle_+ = \sqrt{n+1}|n+1\rangle_+, \quad (5.22)$$

$$a^+|n\rangle_+ = \sqrt{n}|n-1\rangle_+. \quad (5.23)$$

Podemos ver que, cuando consideramos un condensado de Bose-Einstein de esta manera, los papeles de los operadores de creación y de aniquilación se intercambian los papeles. El operador número, el cual, a diferencia del caso del oscilador armónico, en vez de darnos el número de partículas, nos dará el número de huecos que hemos creado, se puede expresar como:

$$N_+ = aa^+. \quad (5.24)$$

Tal y como hemos comentado anteriormente, si el numero de partículas que estamos considerando es tan grande que lo podemos considerar infinito, podremos considerar los estados como una combinación lineal infinita de estos estados $|z\rangle_+$, puesto que no tendremos límite inferior. Estos estados son propios del operador creación:

$$a^+ |z\rangle_+ = z^* |z\rangle_+. \quad (5.25)$$

Y se pueden expresar, por tanto, como estados coherentes del operador creación, resultando ser:

$$|z\rangle_+ = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_+. \quad (5.26)$$

Los cuales pueden ser obtenidos aplicando el complejo conjugado del operador desplazamiento definido en (2.49):

$$|z\rangle_+ = D^+(z)|0\rangle_+, \quad (5.27)$$

de esta manera, podemos observar como los condensados de Bose-Einstein desplazados en un potencial armónico pueden ser vistos como estados coherentes propios del operador creación.

5.3. Estados coherentes fermiónicos

Al igual que como hicimos en la sección anterior, podemos establecer los estados coherentes para un sistema fermiónico [12]. Para ello, consideraremos un sistema cuántico compuesto por N fermiones. Podemos definir los operadores de creación y aniquilación para cada fermión, a_i^+ y a_i , los cuales cumplirán con las mismas condiciones de conmutación (2.8) que habíamos definido anteriormente:

$$\begin{aligned} [a_i^+, a_j] &= -\delta_{ij}, \\ [N_i, a_i] &= -a_i, \\ [N_i, a_i^+] &= a_i^+, \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde el operador número N_i vendrá definido también de igual modo que en (2.5).

$$N_i = a_i^+ a_i. \quad (5.29)$$

Necesitamos definir el espacio donde vamos a trabar. Este será un espacio de Hilbert formado por el producto directo de cada uno de los espacios de Hilbert bidimensionales $H_i \equiv \mathbb{C}^2$, es decir:

$$H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N = \mathbb{C}^{2N} \quad (5.30)$$

Del mismo modo, la base de este espacio será:

$$|n_1 n_2 \dots n_N\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_N\rangle. \quad (5.31)$$

Donde los n_i son los numeros de ocupación de cada fermión, los cuales, a diferencia de los bosones que podían tener cualquier valor, pueden valer sólomente 1 ó 0. Los operadores de creación y de aniquilación tendrán la siguiente acción sobre dichos estados:

$$\begin{aligned}
a_i|0\rangle_i &= |0\rangle_i, \\
a_i^+|0\rangle_i &= |1\rangle_i, \\
a_i|1\rangle_i &= |0\rangle_i, \\
a_i^+|1\rangle_i &= |0\rangle_i.
\end{aligned}
\tag{5.32}$$

A su vez, el operador número:

$$\begin{aligned}
N_i|n_i\rangle_i &= n_i|n_i\rangle_i, \\
N_i|n_1n_2\dots n_N\rangle &= n_i|n_1n_2\dots n_N\rangle.
\end{aligned}
\tag{5.33}$$

Denotaremos los estados coherentes fermiónicos por $|\Psi\rangle$, siendo Ψ numeros de Grassmann [12] [?], y para su definición vamos a utilizar la definición análoga a (2.50):

$$|\Psi\rangle = e^{-\frac{|\Psi|^2}{2}} e^{\Psi a^+} |0\rangle = e^{-\frac{|\Psi|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi^n}{n!} (a^+)^n |0\rangle = e^{-\frac{|\Psi|^2}{2}} (|0\rangle + \Psi|1\rangle), \tag{5.34}$$

donde hemos considerado un solo fermión. Si ahora extendemos la definición a un sistema de dos fermiones y llamamos $|\psi_1\rangle$ al estado del primer fermión y $|\psi_2\rangle$ al estado del segundo, el estado del sistema vendrá descrito por el producto directo ordenado de dos estados coherentes de un fermión cada uno:

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = e^{-\frac{|\Psi|^2}{2}} (|00\rangle + \psi_1|10\rangle + \psi_2|01\rangle - \psi_1\psi_2|11\rangle), \tag{5.35}$$

donde hemos utilizado:

$$|\Psi|^2 = \psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2. \tag{5.36}$$

Por último, si quisiéramos extenderlo a un sistema formado por un número arbitrario de N fermiones [12]:

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle = e^{-\frac{|\Psi|^2}{2}} \prod_{i=1}^N e^{\psi_i a_i^+} |0\rangle = e^{-\frac{|\Psi|^2}{2}} e^{\sum_{i=1}^N \psi_i a_i^+} |0\rangle \tag{5.37}$$

Capítulo 6

Conclusiones

Los estados coherentes del oscilador armónico son unos estados cuánticos que comparten una gran similitud con los estados clásicos, sobre todo en lo que a trayectoria se refiere. Esto lo podemos observar en la preservación de la forma de la densidad de probabilidad en el tiempo, tanto en la representación de momentos como en la de coordenadas. Además, la función de Wigner también describe una trayectoria clásica en el espacio de fases.

La forma de la densidad de probabilidad es siempre la misma, una gaussiana, simplemente se desplaza siguiendo un movimiento armónico simple, igual que en el caso clásico.

La distribución de probabilidad, cuando nos referimos a la detección de modos de vibración, es de tipo Poissoniana, lo cual concuerda con la teoría.

Por otro lado, son unos estados que minimizan la relación de incertidumbre, tal y como hemos visto.

Finalmente, hemos visto como los estados gato de Schrödinger presentan una zona de interferencia cuántica, la cual viene dominada por una gaussiana multiplicada por un coseno.

Bibliografía

- [1] A. Galindo, P. Pascual, *Mecánica Cuántica*, Alhambra, (1978).
- [2] M. Gadella, L.M Nieto, *Métodos Matemáticos Avanzados para Ciencias e Ingenierías*, Secretariado de Publicaciones Universidad de Valladolid, (2000).
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Editorial Wiley-VCH, (1977).
- [4] L.M Nieto, *Aplicaciones físicas del formalismo de Moyal a la mecánica cuántica*, Universidad de Valladolid, (1991).
- [5] en Advanced Summer School in Physics, O. Rosas Ortiz, M. Carvajal, O. Miranda (Editores), American Institute of Physics Conference Proceedings Vol.**809**, (2006).
- [6] E. Fradkin, *Introduction to QFT (notas del curso)*, University of Illinois, (2018).
- [7] C.C. Gerry, P.L. Knight, *Quantum superposition and Schrödinger cat states in quantum optics*, Am. J. Phys. **65** (1997) 964-974.
- [8] T.M. van Haeringen, *Generalized coherent states (bachelor project)*, University of Groningen, (2016).
- [9] Wei-Min Zhang, *Coherent States in Field Theory*, arXiv:hep-th/9908117, (1999)
- [10] T. Csörge, *Coherent States of the creation operator from fully developed Bose-Einstein condensates*, arXiv:quant-ph/9903080, (1999).
- [11] G. Junker, J.R. Klauder, *Coherent-state quantization of constrained fermion systems*, Eur. Phys. J. **C4** (1998) 173-183