UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Matemática Aplicada

PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA LA ELABORACIÓN DE UNA EXPOSICIÓN MATEMÁTICA EN ENSEÑANZA SECUNDARIA.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: José Manuel Domínguez Vélez

Tutor: Alfonso Jesús Población Sáez

Valladolid, julio 2019

RESUMEN

Aunque aún minoritarias, las exposiciones de contenido matemático han adquirido cierta relevancia social, sobre todo en el entorno escolar, en un intento de construir y visualizar aspectos y resultados que quedan en las aulas dentro de un marco exclusivamente teórico. El objeto del presente trabajo es el de recorrer algunas de las exposiciones de este tipo más conocidas, y elaborar una propuesta concreta de exposición de acuerdo al currículo o tema que elija el alumno, transmitiendo la idea de que este tipo de actividades como material didáctico complementario puede ayudar a enseñar, difundir y aprender conceptos del currículo de matemáticas en enseñanza secundaria.

Palabras claves:

Exposición matemática, museo, números, fractal, número, funciones, azar, teselar, educación Secundaria y Bachillerato.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de este trabajo final de Master haré mención de varias exposiciones matemáticas cuya presencia en nuestra sociedad es más bien exigua, aunque recientemente se ha inaugurado una sala en el *Museo de la Ciencia* de la ciudad de Valladolid totalmente dedicada a las matemáticas, habiendo sido visitada en varias ocasiones con la idea de descubrir las entrañas de dicha exposición, y a partir de la información recabada tener un punto de partida para poder dar forma a este trabajo.

Además de la visita física a los museos, es posible, gracias a internet, conocer gran parte de las actividades que se proponen en otros centros en los que existe algún tipo de divulgación matemática. Entre ellos he seleccionado el museo *SCPM* (*Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas*) *Isaac Newton*, el *Aula-Taller-Museo de las Matemáticas “π-ensa”* de Madrid, que organiza talleres y manualidades de forma periódica, algunos sobre matemáticas propiamente dichas, y otros pensando en el entretenimiento infantil, o el *Museo de las Ciencias de la UNAM* (Universidad Nacional Autónoma de México) con su exposición “*Universum*”. También he podido asistir a las actividades de divulgación “*Matemáticas en la calle*” organizadas por *SOCYLEM* (*Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática*) "*Miguel de Guzmán*", con la colaboración de alumnado del *Proyecto ESTALMAT Castilla y León* y de la *Sociedad Castellano y Leonesa de Profesores de Matemáticas* “*Miguel de Guzmán*”.

2. OBJETIVO

El objetivo de este trabajo final de Master es el de describir y comentar algunas exposiciones de carácter matemático existentes en la actualidad, para tratar de entender cómo implementar actividades que ayuden a fomentar el interés por las matemáticas y llegar a crear actividades propias que formen parte de una exposición matemática que pueda proponerse en un instituto o centro de enseñanza secundaria, y que el propio alumnado participe en su montaje y organización. Considero que la aproximación que transmite la educación no formal en la enseñanza de las matemáticas puede ayudar tanto al que no sabe de matemáticas, como al que se le dan mal, al que se apasiona con ellas, y como no, al niño que simplemente quiere jugar y consiga atisbar que detrás de esa experiencia lúdica subyace en realidad algún aspecto fundamentado y explicado por esta disciplina.

3. ANÁLISIS DE EXPOSICIONES MATEMÁTICAS.

A continuación, se describen algunas de las exposiciones matemáticas que he podido visitar personalmente, o he localizado a través de la web, o videos publicados en internet, seleccionando las que, a mi juicio, son más relevantes respecto a la enseñanza y el aprendizaje de tópicos de los currículos de secundaria:

3.1. ‘Malditas Matemáticas… ¿o no?’

Este es el enigmático título que se ha dado a la exposición permanente sobre matemáticas ubicada en la planta segunda del *Museo de la Ciencia de Valladolid*, sala que ha contado con el asesoramiento de la *Sociedad Castellana y Leonesa de Profesores de Matemáticas* “*Miguel de Guzmán*” (*SOCYLEM*) y que convierte al *Museo de la Ciencia de Valladolid* en uno de los pocos museos de España con una sala permanente dedicada exclusivamente a las Matemáticas.

Un panel con dedicatorias de 45 matemáticos y matemáticas españoles da la bienvenida a este espacio, dotado de una alta interactividad y estructurado en siete ámbitos diferentes: *Un1v3rs0 num3r1c0*, *Descubriendo figuras*, *Perplejidad*, *Emboscadas de la lógica*, *Azar y estadística desafían la intuición*, *En busca de una solución* y *MateMatizArte*. Cada uno de estos entornos incluye juegos y retos de dificultades variadas y desafiando al visitante. De esta forma, el público, por ejemplo, tendrá la oportunidad de utilizar un triciclo de ruedas cuadradas, se convertirá en un enano o un gigante en la ‘habitación de Ames’, aprenderá que es posible pasar una varilla recta por una rendija curva o descubrirá por qué la mayoría de las tapas de alcantarilla son circulares.

El visitante encontrará también los 850 primeros decimales del número π: una sucesión numérica recorre toda la sala, y percatarse donde se esconden curiosas secuencias como el *punto Feynman* (999999), números capicúas o teléfonos de la provincia de Valladolid. Con ello se pretende introducir el concepto de *número normal*, que se cree (no se ha llegado a demostrar aún) verifican números irracionales como π o e. La sala incluye una serie de vídeos que muestran la presencia de las Matemáticas en la naturaleza y en las artes, y diferentes aplicaciones informáticas que retan, por ejemplo, a colorear un mandala siguiendo el *teorema de los cuatro colores*, a comprender el famoso concurso ‘Monty-Hall’ o a resolver el problema del salto de caballo de ajedrez. También se recuerda a algunas personalidades de la historia de las matemáticas como Hypatia, Pitágoras, Ada

Byron o Maryam Mirzajani, y repasa algunas de las expresiones y números más importantes de la Historia de la Ciencia como el número áureo o la ecuación de Euler.

El objetivo de este proyecto es propiciar la reconciliación de una gran parte de la sociedad con las 'temidas' Matemáticas, de forma que el público, tras su visita, salga convencido de que éstas son amables, atractivas, interesantes e imprescindibles para la vida.

Una descripción más detallada de los contenidos de la sala es la siguiente:

1.- Un1v3rs0 num3r1c0:

- Panel explicativo de las familias de números, simulando una viñeta de un tebeo clásico español, *13 Rue del percebe*.
- Proyección de la animación *Bailad, primos, bailad*.
- Solitario danés.
- Puzle para asociar distintas representaciones de los números racionales.
- Puzle para asociar un número con su descomposición en factores primos.

2.- Perplejidad:

- Video *Nature by numbers*.
- Habitación de Ames.
- Botellas de Klein y Cintas de Möbius para manipular y vídeo explicativo.
- Maqueta de escalera de Escher.
- Juego de anamorfosis.
- Cubos de Yoshimoto.

3.- Descubriendo figuras:

- Triciclo con ruedas cuadradas para circular sobre un camino de cicloides.
- Arco luminoso a través del que se pasan cuerpos 3D translúcidos para observar distintas secciones obtenidas al ser cortados por la luz.
- Rendija hiperbólica.
- Diferentes modelos de tapas de alcantarilla para mostrar superficies de anchura constante y variable.
- Demostración del teorema de Pitágoras mediante una visualización con líquidos.
- Superficies regladas y superficies de revolución.

- Cono de Apolonio y otro módulo interactivo para demostrar la formación de cónicas.

- Aplicación de ordenador y dos puzles magnéticos para teselar el plano (cubrirlo completamente sin dejar huecos ni superponer piezas).

- Aplicación sobre fractales y pirámide fractal de Sierpinski.

4.- Emboscadas de la lógica:

- Laberinto numérico.
- Aplicación informática con el problema del salto de caballo del ajedrez.
- Cuatro problemas lógicos (juegos de mesa).
- Torres de Hanoi y modelo fractal de solución.

5.- Azar y estadística desafían la intuición:

- Gráficos ‘mentirosos’.
- Aplicación sobre el Triángulo de Tartaglia-Pascal.
- Máquina de Galton
- Dos juegos manipulativos sobre estimación a partir de una muestra.
- Aplicación con dos juegos: la paradoja de Monty-Hall y la carrera de caballos.

6.- En busca de una solución:

- Presentación de algunos problemas abiertos en matemáticas.
- Aplicación sobre el teorema de los cuatro colores.
- Problema del viajante.
- Curva de descenso más rápido.
- Manipulativo sobre los puentes del Pisuerga, aplicando resultados de teoría de grafos.

7.- MateMatizArte:

- Exposición de fotografías de la presencia de las matemáticas en obras de arte de Castilla y León, además de en la música, la literatura y el cine.
- Video *Ars Qubica*.

A continuación, se comentarán algunos de los temas y objetos expuestos en la sala:

3.1.1. 13, Un1v3rs0 num3r1c0

Ésta combinación de letras y números es la empleada para dar nombre a la sección que nos explica los distintos números, adaptándose al formato de las viñetas de un tebeo clásico español, *13 Rue del percebe*, para mostrar: *los números naturales (N) cuentan, identifican y ordenan*, explica qué son los números desde el 1 hasta el infinito; *los números enteros (Z) cuentan y ordenan a ambos lados de una referencia*, explica que son los números tanto positivos como negativos, incluyendo el cero; *los números racionales (Q) no ordenan pero sirven para repartir, medir y comparar,* explica que para repartir una tarta entre varios amigos se necesita fraccionar la unidad, y que un número racional se puede expresar como un número finito de decimales o infinito periódico; *los números reales (R) calculan,* explica que algunos de estos números no se pueden expresar como un cociente de dos números enteros, como puede ser el número π, el número phi, "Φ", etc.; y por último mencionan que los *números complejos (C) resuelven,* representándolos como las coordenadas de puntos sobre un plano, a diferencia de los números descritos anteriormente que se pueden representar como puntos de una recta.

El conjunto de números naturales se denota con la letra "ℕ" y está compuestos por los números 1, 2, 3,… hasta el infinito. Incluyen los ***números primos***, que son los números mayores que 1 y que tienen únicamente dos divisores distintos, el 1 y él mismo, y también los ***números compuestos***, aquellos con uno o más divisores distintos a la unidad y a sí mismo. El conjunto de los números enteros, denotado por "ℤ", está formado por los números naturales, el cero (en algunos libros lo contemplan dentro de los números naturales), y los números naturales negativos, que son los números naturales con signo negativo "-". A continuación tendríamos los números racionales, denotados con la letra "ℚ", formados por todos los números representados como cociente de dos números enteros; éstos pueden tener un número finito de decimales, o infinitos periódicos (entre ellos pueden distinguirse los *periódicos puros,* si toda su parte decimal está formada por cifras que se repiten indefinidamente, o pueden ser *periódicos mixtos* si su parte decimal está formada por un anteperiodo, cifras que no se vuelven a repetir, seguidas de un periodo, que serían las cifras que se repiten indefinidamente).

En el siguiente escalón están los números reales denotados con la letra "$\mathbb{R}$", formados por los racionales y por los irracionales, como serían el número π o $\sqrt{3}$, es decir, aquellos que no pueden ser expresados mediante una fracción, o tengan su expresión decimal infinitos números no periódicos [1]). Finalmente nos muestran los números complejos, denotados con "$\mathbb{C}$", que son el producto cartesiano de $\mathbb{R}\,x\,\mathbb{R}$, y constan de una parte real y una imaginaria, es decir de la forma $a + b$i, siendo i la unidad imaginaria, donde i=$\sqrt{-1}$. Una curiosidad en las potencias de la unidad imaginaria i, es que realizan ciclos cada cuatro potencias:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = \sqrt{-1} = i$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = i^2\, i = (-1)\, i = -i$$

Y a partir de ésta, el ciclo se repite:

$$i^4 = i^2\, i^2 = (-1)\,(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4\, i = 1\, i = i$$

$$i^6 = i^4\, i^2 = 1\,(-1) = -1$$

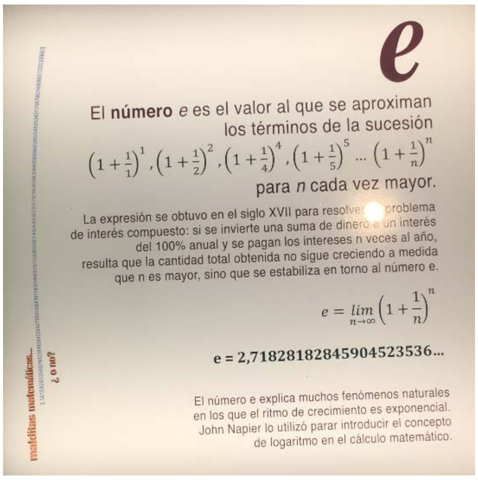
$$i^7 = i^4\, i^3 = 1\,(-i) = -i$$

Y así sucesivamente…

3.1.2. Números por el suelo

En el suelo nos encontramos algunas baldosas retroiluminadas con curiosidades sobre números, como la que define el número e como límite de una sucesión, así como su expresión decimal [2]

$$e \approx 2{,}71828182845904523536...$$

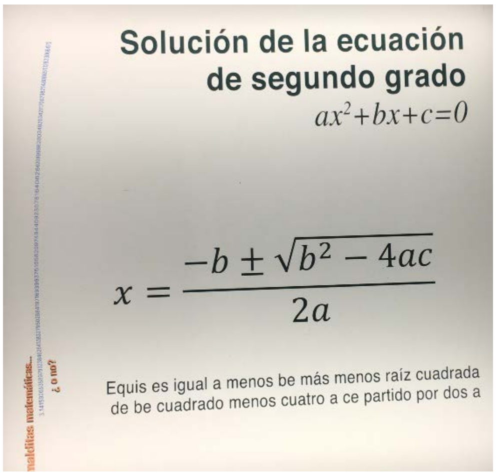


Otro panel nos muestra la *Ecuación de Euler*: $e^{i\pi} + 1 = 0$, en la que se "*relacionan los cinco números más importantes en matemáticas: e, i, π, 1 y 0*".

Otra baldosa se dedica al *número i, o unidad imaginaria, al que define como la raíz cuadrada de –1. Euler estableció el símbolo "i" para representarlo.* Indica que *gracias a "i" se pueden resolver todas las ecuaciones de segundo grado*, porque al resolverlas, a menudo nos encontramos con la raíz de un número negativo, $\sqrt{-n}$, siendo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\sqrt{-n} = i\,\sqrt{n}$; para cada $n \in \mathbb{N}$.

Una cuarta baldosa hace mención a la *solución de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$* escribiendo simplemente su solución general sin explicación alguna [2]

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



Es fácil deducir dicha expresión sin más que completar el cuadrado de un binomio:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicamos la ecuación por 4a

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumamos b^2 a ambos miembros

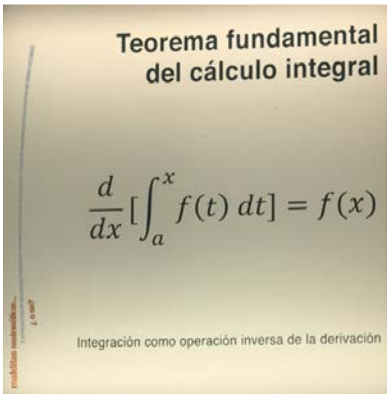
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}\,,$$

y basta con despejar finalmente la x.

Otra baldosa menciona al *Teorema fundamental del cálculo integral*: [2]



El teorema fundamental del cálculo consiste (intuitivamente) en la afirmación de que la derivación e integración de una función son operaciones inversas. Esto significa que toda función continua verifica que la derivada de su función integral es igual a ella misma. Este resultado se incluye en el currículo de 2º de Bachillerato, como vemos a continuación: [3]

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

con $x\in[a,b]$ la función integral. Entonces F es derivable en (a,b) y

$$F'(x)=f(x)$$

para cualquier punto $x\in(a,b)$.

Demostración:

Aplicando la definición de derivada tenemos:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=$$

Separando la primera integral en dos sumandos (propiedad 3):

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral, $\exists c\in(x,x+h)$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt=f(c)\cdot(x+h-x)=f(c)\cdot h$$

Así:

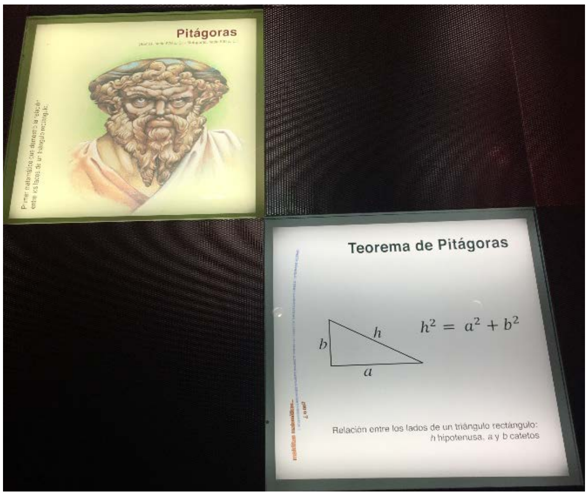
$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c)\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)$$

Como $c\in(x,x+h)$ y f es continua entonces $\lim_{h\to 0}f(c)=f(x)$ y, por tanto: $F'(x)=f(x)$.

Se mencionan, en otras baldosas, algunos matemáticos y matemáticas como Hipatía (hacia 355-415), matemática griega; Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci (1175-1250), junto a su célebre sucesión; Leonhard Euler (1707-1783) destacable por sus múltiples aportaciones matemáticas, como el número *e*, la teoría de grafos, etc.; Sophie Germain (1776-1831), cuyas aportaciones a la teoría de la elasticidad permitieron la construcción de la torre Eiffel; Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y su “campana de Gauss”; Ada Byron (1815-1852), considerada la primera programadora de la historia; Sofía Vasilievna Kovalievskaya (1850-1891), primera doctora en matemáticas; Pitágoras (hacia 570 – 500) y su teorema que relaciona los lados de un triángulo rectángulo,

$$h^2 = a^2 + b^2,$$

denotando por *h* la hipotenusa y *a*, *b* los catetos. [2]

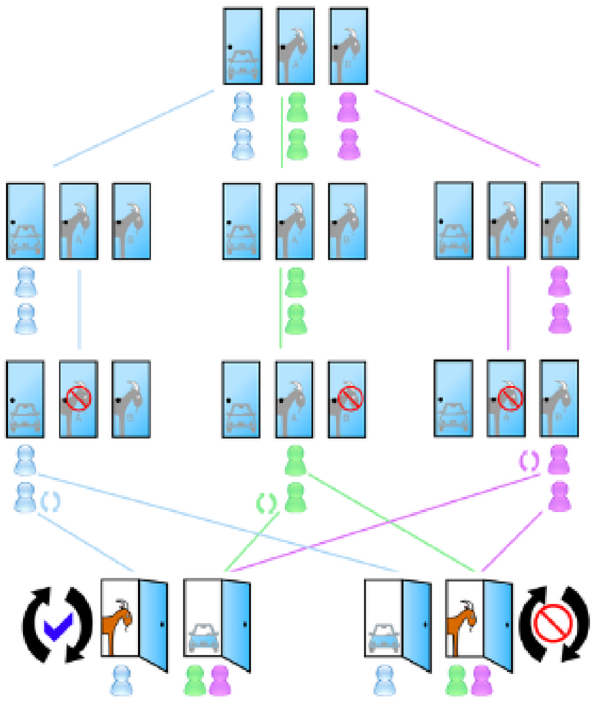


3.1.3. El problema de Monty Hall

Es una cuestión matemática en la que se aplican directamente resultados de cálculo de probabilidades basado en el concurso televisivo estadounidense *Trato hecho* (*Let's Make a Deal*). El ejercicio fue bautizado con el nombre del presentador de dicho concurso, Monty Hall:

Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras hay cabras. Se trata de escoger una puerta, digamos la nº 1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la nº 3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: "¿No prefieres escoger la nº 2?". Y la cuestión es: ¿Es mejor para ti cambiar tu elección?

Mantener la elección inicial es aconsejable sólo si se había acertado con la puerta que escondía el automóvil (con probabilidad 1/3), mientras que el cambio permite ganar en 2/3 partes (las correspondientes a haber elegido alguna de las puertas que esconden las cabras). El concursante debería por tanto cambiar su elección para maximizar la posibilidad de ganar el vehículo como podemos observar en el siguiente diagrama [4]:



Otra forma de afrontar este planteamiento es definiendo los siguientes eventos:

A: el concursante elige la puerta con el premio antes de cambiar de opción.

B: el concursante elige la puerta con el premio después de cambiar de opción.

Aplicando el teorema de Probabilidad Total, tenemos que

$p(B) = p(BA) + p(BA^c) = p(B|A)\ p(A) + p(B|A^c)\ p(A^c) = 0\ (1/3) + 1\ (2/3) = 2/3$

en donde A^c representa el complementario de *A*. La $p(B|A) = 0$, puesto que son eventos mutuamente excluyentes, $p(A) = 1/3$, debido a que desde el inicio se elige una puerta entre tres, y todas son equiprobables. La $p(B|A^c) = 1$, porque si eligió la puerta incorrecta desde el principio y posteriormente se realiza el cambio, siempre ganará. La $p(A^c) = 2/3$, porque $p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 1/3 = 2/3$.

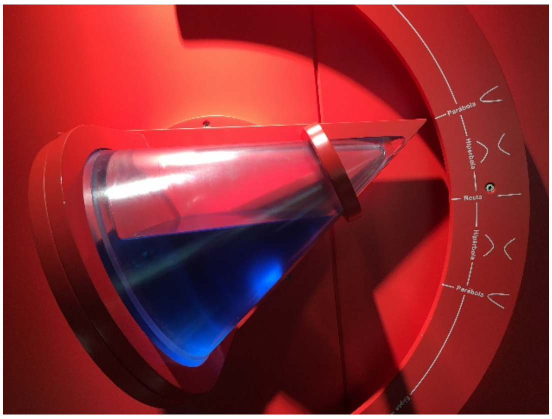
3.1.4. ¿Subes o bajas?

Este título precede a una maqueta que simula la idea de la escalera infinita del holandés M. C. Escher. Dependiendo del punto de vista en el que nos encontremos, la escalera parece que no tiene fin, cuando en realidad está inacabada. Escher basa su obra en figuras geométricas y mosaicos que juegan con la perspectiva y con la idea de infinito. [2]


3.1.5. Secciones del cono

Una zona de la sala nos muestra las distintas curvas que se obtienen al seccionar un cono, donde obtendremos una circunferencia al cortarlo por un plano paralelo a la base, apreciaremos una elipse si lo seccionamos con un plano inclinado de modo que sea oblicuo con el eje perpendicular a la base y corte a todas las generatrices, veremos una parábola si el plano inclinado con el cortamos un cono recto es oblicuo con el eje perpendicular a la base y paralelo a una generatriz, y visualizaremos una hipérbola si el plano es perpendicular a la base y no pasa por el vértice. Todo ello se muestra mediante dos módulos. El más visual es el que utiliza un líquido azulado dentro de un cono transparente, de forma que al girar el cono es el propio nivel del fluido el que nos dibuja cada curva. Se puede observar en la imagen que si el cono es cortado por un plano perpendicular a la base y que pase por el vértice, determina una línea recta que correspondería con la hipotenusa del triángulo rectángulo que al revolucionar, tomando como eje de giro su cateto mayor, generaría el cono recto.

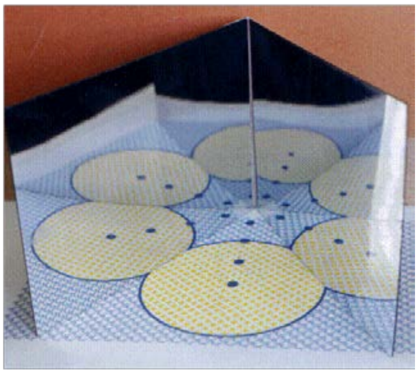
Próximo a éste, se encuentra un cono de madera ensamblado por distintas piezas con las secciones descritas en el párrafo anterior, con excepción de la recta. [2]



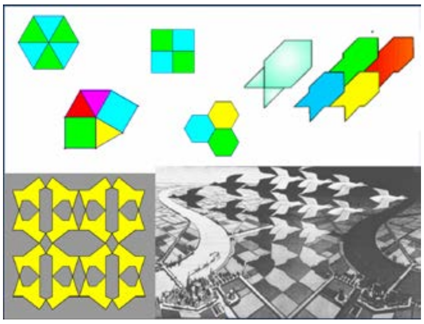

3.2. Aula-Taller-Museo “π-ensa”

Dentro de las pocas exposiciones dedicadas a las matemáticas, me he encontrado con el *Aula-Taller-Museo de las Matemáticas “π-ensa”* en Madrid. Sólo haré una breve mención para informar de la existencia de la misma, puesto que la documentación encontrada es muy escasa.

Han realizado diversos talleres matemáticos, como el *Libro de espejos*, impartido el sábado 9 de marzo de 2019 para niños que estén cursando 4º, 5º y 6º de primaria, donde con la ayuda de un papel doblado con efecto espejo, o con dos espejos rectangulares unidos, y dependiendo de la figura que reflejemos y el ángulo con el que se abra el espejo, se obtienen unos efectos u otros. [5]



Otro de los talleres confeccionados para el sábado 8 de junio de 2019 tenía el título *Crea tus propios mosaicos con ayuda de las Matemáticas*, destinado a un público mayor de 11 años y donde, según la imagen publicitaria, se prevé la elaboración de mosaicos con figuras planas obtenidas a partir de la combinación de simetrías, giros y otros movimientos en el plano, creando así distintos grupos cristalográficos planos. Éstos grupos cristalográficos también han sido objeto de parte de la exposición del *Museo de la Ciencia de Valladolid*, y a los que dedicaré una actividad para explicar cómo teselar el plano por medio del uso de giros y traslaciones. [5]



3.3. SCPM “Isaac Newton”

La *SCPM Isaac Newton* (*Casa-Museo de la Matemática Educativa*), promovido por la *Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas* y que cuenta con la colaboración de la *Consejería de Educación del Gobierno de Canarias* y del *Ayuntamiento de La Laguna*, con su exposición "Matemáticas 2000". La exposición consta de mesas en las que se ofrecen en torno a 60 actividades y carteles informativos. Cada actividad está planteada con un material manipulativo con el que se plantea un problema explicado en una plantilla de instrucciones que se debe resolver manipulando el objeto expuesto. [6]

3.4. Opinión de la directora del *Museo de la Ciencia de Valladolid*.

A modo de transición entre el análisis de las exposiciones matemáticas y la elaboración de mi propuesta de exposición matemática, me pareció interesante mantener una charla con la directora del *Museo de la Ciencia de Valladolid,* Inés Rodríguez Hidalgo, primeramente para percibir su opinión como responsable del contenido científico del museo y en segundo lugar, para conocer su valoración sobre la exposición de matemáticas actual. Con este propósito me puse en contacto con el museo e inmediatamente Inés me concedió una entrevista, para la que le hice llegar unas breves preguntas a modo de guion, para intentar romper el hielo, y desde el primer minuto se convirtió en un diálogo informal y muy agradable. Éramos dos personas con curiosidades y con la intención de divulgar las matemáticas a través de los museos y de las exposiciones.

A continuación, expongo algunos de los aspectos destacables de nuestra conversación:
- que la sala dedicada a las matemáticas sustituyó a una exposición permanente anterior, con los necesarios trabajos de adecuación
- que fue posible gracias a la financiación de la *Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología* y el *Ayuntamiento de Valladolid.*
- que la selección de contenidos, adaptación de los mismos al público general, redacción de paneles informativos y cartelas, asesoramiento para la construcción de juegos, aplicaciones, módulos interactivos… fue realizada por miembros de la *Asociación Castellano y Leonesa de Profesores de Matemáticas Miguel de Guzmán* (*SOCYLEM*) e Inés.

Según Inés, "*Esta sala de exposición permanente dedicada a las matemáticas contribuye (como el resto de contenidos y actividades del Museo) a la educación no-formal, que resulta complementaria a la educación formal o académica*".

Lo que quiere decir es que, para los niños y jóvenes, el acceso a las matemáticas es algo habitual, incluido en su educación, así que ir al museo a ver matemáticas puede que no les sorprenda demasiado, aunque aquí las encontrarán en un ambiente no académico y lúdico más atractivo y amable. Sin embargo, para los adultos, ver y descubrir matemáticas en un museo puede que sea su única forma de seguir aprendiendo sobre ellas, porque quizá no llegaron a estudiarlas, o no como en el currículo actual, o porque han acabado hace años sus estudios y posiblemente sus matemáticas actuales se reduzcan al uso de una simple calculadora de propaganda donde la operación más complicada que tiene es la raíz cuadrada o el tanto por ciento…

Es una de las razones por las que considero que las matemáticas tienen que estar en los museos para conseguir esa educación complementaria a la que cualquier individuo pueda optar.

Cuando empezamos a hablar de lo que podemos encontrar en esta sala de matemáticas del *Museo de la Ciencia*, Inés lo definió como un "espacio de reconciliación con las matemáticas", ese ha sido uno de los fines principales de la exposición. La sala se llama "*Malditas Matemáticas… ¿o no?*". Este título no ha gustado a algunos matemáticos colaboradores, porque parece implicar algo negativo; pero, ante los ojos de Inés (y secundo esa idea), refleja que la percepción que la sociedad tiene de las matemáticas es mayoritariamente negativa, muchas personas tienen miedo a las matemáticas, las rechazan e incluso algunas llegan al extremo de odiarlas… El título se solidariza de entrada con estas personas y, en lugar de intentar convencerlas de las bondades de las matemáticas desde el nombre de la sala, pretende sorprenderlas y darles la oportunidad de reconciliarse con ellas jugando. Así, para quienes odian a muerte las matemáticas o para quienes estas les son indiferentes, y se sienten ajenos e incapaces de entenderlas, la sala se convertirá en un espacio donde descubrir, jugar y disfrutar con las herramientas, curiosidades y coloridas actividades que se ofrecen, de modo que ni se den cuenta de que están haciendo (y aprendiendo) matemáticas. También está destinada a quienes sí están interesados en las matemáticas, personas que buscan, que quieren saber y descubrir más sobre ellas; entonces la sala se convertirá en un espacio en el que unos pensarán "anda, esto me suena" y otros "anda, qué divertido, ¿y esto son matemáticas?". En resumen, la exposición está destinada tanto al público especializado como al no especializado, al adulto y al niño, es para todos los públicos. La segunda parte del título, "*… ¿o no?*" es el voto de confianza que los creadores de la exposición dan a su proyecto, con la esperanza (fundada) de que realmente contribuya a aumentar los conocimientos de matemáticas de los visitantes y, sobre todo, a que salgan con una actitud mucho más positiva ante esta ciencia.

La sala no sigue un discurso cronológico ni pretende ser exhaustiva en cuanto a los contenidos. Se estructura en siete ámbitos donde encontramos paneles explicativos y, sobre todo, juegos manipulativos, aplicaciones informáticas y módulos interactivos. Cada uno de ellos lleva su cartela con tres apartados: primero, un *título llamativo*, segundo, una explicación de cómo se *juega*, y tercero, cuáles son las *matemáticas escondidas*.

Las experiencias que causan más impacto y resultan más atractivas al público son la habitación de Ames, donde dos personas deben salir de esquinas opuestas para cruzarse y comprobar cómo parecen agrandarse o empequeñecer; el triciclo de ruedas cuadradas que circula sobre un camino de cicloides es algo curioso para grandes y pequeños; el juego "¿Cuál cae más rápido?" en el que se lanzan tres bolas por distintos recorridos y se comprueba que la que aparentemente parece que va a llegar antes no es realmente la más rápida (basado en la curva braquistócrona); o la varilla recta que pasa por una rendija curva.

La directora del museo plantea algunas posibles y futuras mejoras: perfeccionar el mantenimiento y durabilidad de algunos modelos, actualizar la aplicación sobre teselaciones o colocar una anamorfosis gigante. También se espera, con la ayuda de los matemáticos colaboradores, conformar una guía a la exposición enfocada a varios niveles (niños de infantil y primaria, estudiantes de educación secundaria obligatoria, estudiantes de Bachillerato, y público inexperto o no familiarizado con el currículo actual de matemáticas), y dar la formación necesaria a los monitores.

Estas guías marcarían un recorrido con una selección de contenidos y un orden a seguir dependiendo de la edad. Personalmente, se me ocurre que sería de interés colocar en las carteleras de cada enigma matemático una figura geométrica con un número en su interior, o un color con un número en una esquina donde cada figura o color indicara una edad y/o un nivel, y el número indicaría el orden en el que habría que hacer el recorrido por la exposición; además dicho color podría ir representado en una línea que te vaya guiando desde la entrada a cada objeto de la exposición a recorrer.

En cuanto al público que suele ir a visitar el museo, básicamente los días de diario por la mañana la mayor afluencia es de centros escolares, que acuden tanto a la exposición como al taller "Jugando a espías" al que pude asistir durante mi practicum, basado en la criptografía y en el descifrado de enigmas, que forma parte de la oferta educativa del museo. En cambio, los fines de semana la mayor afluencia es de público familiar, padres con sus hijos a los que causa curiosidad una sala exclusiva de matemáticas. Una ocasión de lleno absoluto es la "Noche de los museos", que se celebra el sábado más próximo al *Día Internacional de los Museos* (18 de mayo), con entrada gratuita desde la hora de cierre hasta la una de la madrugada. El ambiente nocturno y la gratuidad atraen a público habitualmente poco interesado, pero curioso hacia las matemáticas. Otro evento periódico es la *Noche Europea de los Investigadores*, celebrada el último viernes de septiembre, en el que unas 3000 personas acuden al Museo para disfrutar de la amplia oferta de talleres, visitas guiadas, demostraciones, planetario, espectáculos participativos... Las tardes de diario la asistencia de público es más esporádica e individualizada, e incluye visitas de profesores para consultar y ver el museo antes de llevar a sus clases.

Antes de continuar con este trabajo, quiero agradecer a Inés Rodríguez Hidalgo por su grata atención y por su sinceridad en nuestra conversación. También quiero transmitir, por parte de Inés, el agradecimiento a los profesores de *SOCYLEM* y a todas las personas intervinientes en la exposición, puesto que han colaborado y se han involucrado de tal forma que sin ellos la creación de este espacio exclusivamente dedicado a las matemáticas no habría sido posible ni en Valladolid, ni en ningún otro lugar del mundo.

4. PROPUESTA DE ACTIVIDADES

Explicaré diversas actividades adecuadas a la enseñanza de matemática de ESO y Bachillerato para ser expuestas en salas o en espacios de colegios donde puedan ser empleados para el aprendizaje, y como no el disfrute, del alumnado mientras hacen matemáticas.

4.1. Contribución de las actividades a la adquisición de las competencias

Las competencias básicas deben proporcionar la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada. Son una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivaciones, valores éticos, actitudes, emociones y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz, de modo que la incorporación de éstas competencias al currículo permite finalizar óptimamente aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos.

Es importante este apartado, ya que sólo si el alumno adquiere las competencias básicas de cada etapa de su enseñanza, obtendrá el título correspondiente.

Competencias básicas a desarrollar:

- Comunicación lingüística: utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita, y de aprendizaje y regulación de conductas y emociones. La meta es comprender y saber comunicar tanto en el lenguaje castellano como en el lenguaje matemático básico. Se pretende la adquisición de esta competencia tiene consecuencias en el aprendizaje, la conformación de conocimientos y el desarrollo del pensamiento. Prima el uso de la lengua en contextos y situaciones diversos como instrumento de aprendizaje y de relación social. Imprescindible que el alumno reciba la enseñanza suficiente para saber hablar y saber leer, para que entiendan los enunciados a través de una correcta comprensión lectora, a la vez que deben saber escribir y saber decir correctamente lo que quieren decir.

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología: es la habilidad para utilizar números y sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático para producir e interpretar informaciones, para conocer más sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad y para resolver problemas relacionados con la vida diaria y el mundo laboral. Contribuye a valorar la validez de argumentaciones e informaciones, a seguir razonamientos válidos y a valorar de los resultados obtenidos, de modo que la utilización espontánea de los elementos matemáticos y formas de argumentar y razonar en el ámbito personal, social y laboral, así como su uso para interpretar y producir información, resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y del resto de campos de conocimiento y para tomar decisiones.

- Competencia digital: habilidad para buscar y obtener información y transformarla en conocimiento. Capacidad para acceder, seleccionar, analizar, sintetizar, relacionar, hacer inferencias y deducciones, ser capaz de comunicar la información y los conocimientos adquiridos, empleando recursos expresivos de los diferentes lenguajes y técnicas, así como las nuevas tecnologías de información y comunicación, TICs como un excelente instrumento de aprendizaje.

- Aprender a aprender: es la habilidad que hace que el alumno se inicie en el aprendizaje y a su vez sea capaz de continuarlo de manera autónoma, y sobre todo a través de la investigación personal individualizada o en grupo. El alumno debe ser consciente de sus propias capacidades intelectuales, del proceso y las estrategias empleadas para desarrollarlas, y a su vez, también debe ser consciente de lo que puede hacer por sí mismo y de lo que puede hacer con ayuda de los demás. Esta competencia supone una mejora en la capacidad de enfrentarse con éxito al aprendizaje autónomo. Este proceso de aprender a aprender afecta al desarrollo del pensamiento y al propio proceso del aprendizaje repercutiendo en aspectos personales y de relación social.

- Competencias sociales y cívicas: competencia cuyo desarrollo hará que el alumno pueda vivir en sociedad, comprender la realidad social del mundo en que se vive y ejercer la ciudadanía democrática. Se transmitirán habilidades para participar plenamente en la vida cívica y con respeto a los demás por medio de la elaboración de grupos de trabajo en el aula. Se potenciará que todos los alumnos puedan convivir con unos valores universalmente aceptados, los derechos humanos y los valores constitucionales. Se harán grupos con variedad de alumnos, con distinto grado de asertividad, de conocimientos, etc.

- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor: habilidad que se refiere a la posibilidad de optar con criterio propio y llevar adelante las iniciativas necesarias para desarrollar la opción elegida y hacerse responsable de ella en el ámbito personal, social y laboral, de modo que se hará una preparación del alumno con respecto a su futura vida profesional y para afrontar cambios personales, sociales y económicos.

- Conciencia y expresiones culturales: se intentará, aunque con una breve pincelada, que el alumno aprecie, comprenda y valore críticamente, alguna manifestación cultural y artística como fuente de disfrute y enriquecimiento personal. No será un trabajo artístico que potencie, de forma directa, el desarrollo estético, la creatividad y la imaginación, pero le permitirá apreciar diversos aspectos de la geometría y su aplicación en el mundo del arte y la cultura, como se puede hacer mostrándoles formas geométricas de mosaicos u obras de arte de pintores que usan figuras geométricas, y calculen superficies de las figuras geométricas de dichas obras.

Todas estas competencias se aplicarán en ejemplos o actividades que serán explicadas en apartados posteriores.

4.2. Clasificación de las actividades

En el momento de presentar las actividades se precisa de un aspecto fundamental, que es el de a quién van dirigidas las tareas objeto.
En el curso para el que se pretenden las tareas que expondré, se emplea la clasificación presentada en el artículo de *Smith y Stein* (1998) que atiende al nivel de demanda cognitiva exigida por la actividad. El artículo está centrado en la selección y creación de tareas matemáticas a partir de experiencias con docentes, señalan que una tarea matemática puede ser analizada considerando el tipo de razonamiento que los estudiantes ponen en práctica para realizarla. Los mismos autores utilizan él termino demanda cognitiva para hacer referencia al tipo y al nivel de pensamiento que los estudiantes requieren para involucrarse y resolver con éxito la tarea. Describen dos aspectos a considerar para evaluar una tarea, primero, el de ir más allá́ de las características superficiales de una tarea, ya que estas con frecuencia no indican el nivel de complejidad matemática de la tarea; y segundo, el nivel de demanda cognitiva depende de los estudiantes que la ejecutan.
Smith & Stein consideran los siguientes niveles para clasificar las tareas:

a) Bajo nivel de demanda cognitiva – Memorización:

- Reproducen hechos, reglas, formulas y definiciones aprendidas o dadas previamente.
- No pueden ser resueltas utilizando un procedimiento porque no existe o porque en el marco en que se pide no prevé suficiente tiempo para efectuarlo.
- No son ambiguas. Implican la reproducción exacta de tareas hechas con anterioridad.
- No tienen conexión con los conceptos o significados que son el fundamento de las reglas, hechos o definiciones aprendidos o reproducidos.

b) Bajo nivel de demanda cognitiva - Procedimiento sin conexiones:
   - Son algorítmicas. Se dice concretamente lo que hay que usar o es muy evidente por las actividades previas.
   - Reclaman poca demanda cognitiva para ser resueltas. Hay poca ambigüedad sobre lo que hay que hacer y cómo hacerlo.
   - No hay conexión con los conceptos o significados que subyacen en el procedimiento utilizado.
   - Están enfocadas a producir respuestas correctas en lugar de desarrollar comprensión matemática.
   - No piden explicaciones o solo las piden enfocadas a describir el procedimiento usado.

c) Alto nivel de demanda cognitiva - Procedimiento con conexiones:
   - Están enfocadas al uso de procedimientos con la intención de desarrollar niveles más profundos de comprensión de conceptos y de ideas matemáticas.
   - Sugieren implícita o explícitamente pautas a seguir que son procedimientos más generales que tienen conexiones propias con las ideas subyacentes.
   - Requieren cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque pueden utilizar procedimientos generales, éstos no se aplican automáticamente. El alumnado necesita establecer una relación con las ideas que fundamentan el procedimiento para poder resolver la actividad con éxito y desarrollar su comprensión.

d) Alto nivel de demanda cognitiva - Trabajar en matemáticas. Dos de las características fundamentales de este nivel son: que la información es representada en múltiples formas, y que las conexiones entre las representaciones ayudan al desarrollo de significados:

- Se pedirá al alumno que genere su propio enunciado del problema de modo que se le irá guiando hacia una tarea de un alto nivel de demanda cognitiva con el uso de elementos cotidianos.
- Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. No sugieren ninguna aproximación predecible ensayada con anterioridad a la propuesta de la tarea.
- Requieren que el alumnado entienda y explore la naturaleza de los conceptos.
- Exigen auto-regulación del propio proceso cognitivo.
- Fomentan el acceso a conocimiento relevante y a utilizarlo en la tarea.
- Requieren analizar la actividad y las restricciones que pueden limitar las posibles estrategias para su resolución.
- Exigen un considerable esfuerzo cognitivo y pueden implicar ansiedad por parte del alumnado a causa de la naturaleza impredecible que el proceso de resolución requiere.

4.3. Currículo

Atendiendo a los contenidos y criterios de evaluación que se establecen en la legislación vigente sobre el currículo básico, se ha identificado cada actividad con el curso correspondiente y con el bloque al que pertenecen los contenidos a desarrollar.

4.4. Actividades para EXPOSICIÓN

Cuando un grupo de personas llegar a exponer una serie de imágenes fijas, objetos e instalaciones interactivas con la intención de proyectar en la sociedad una imagen sugerente y cercana, a la vez que ven unas matemáticas relacionadas con el arte, la educación, las aplicaciones matemáticas, la magia, etc., así como la formación con talleres que hacen que “jugando” se aprendan matemáticas, es entonces, cuando se produce este acercamiento a las matemáticas.

Se pretende que todas estas actividades matemáticas hagan que el alumno actúe de acuerdo con modos propios de matemáticos, como la exploración sistemática de alternativas, la flexibilidad para cambiar de punto de vista, la búsqueda de soluciones, el recurso a la particularización, la sistematización, etc.

Explicaré diversas actividades adecuadas a la enseñanza de las matemáticas de ESO y Bachillerato para ser expuestas en salas de museos.

4.4.1. Actividad 01: El uso de la calculadora

Objetivo: después de haber realizado el periodo del practicum con alumnos de ESO a Bachillerato, me he dado cuenta que hay un uso prematuro de la calculadora en el aula. El problema no es que la utilicen demasiado pronto, el problema es que no la saben usar correctamente o dependiendo de la marca de la calculadora, usan un orden distinto en la jerarquía de las operaciones.

Curso: 1º ESO / 2º ESO / 3º ESO.

Edad: 12/13 años / 13–14 años / 14–15 años.

Currículo: En 2º de ESO aparece en el bloque Números y Álgebra como un criterio de evaluación el aplicar correctamente la jerarquía de las operaciones. Uso de la calculadora: competencia digital.

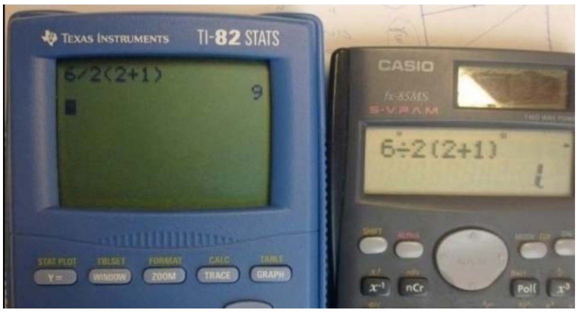
Nivel de la actividad: bajo nivel de demanda cognitiva, donde se emplean procesos de memorización por repetición y comprobación de operaciones con la calculadora. Alta contribución a la competencia digital.

Texto a exponer:

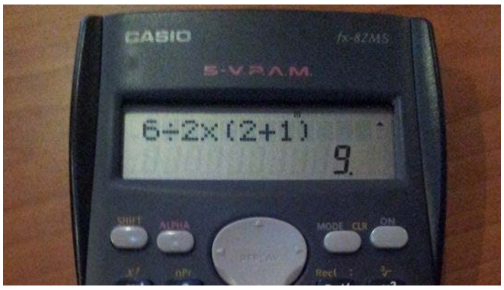
¡¡Con paréntesis no hay fallo!!

Imágenes a colocar:

Se mostrarán imágenes de distintas calculadoras donde aparecen operaciones idénticas con resultados distintos, y resultados iguales con operaciones escritas de forma distinta.



[7]



[8]

Explicación verbal:

La jerarquía de las operaciones es:

1.- Realiza todas las operaciones empezando por los grupos de adentro. Los símbolos de agrupación incluyen paréntesis ( ), llaves { }, corchetes [ ].

2.- Se resuelven las potencias y las raíces, como las raíces cuadradas.

3.- Multiplicación y división, de izquierda a derecha.

4.- Suma y resta, de izquierda a derecha.

Esto significa que primero debemos resolver las operaciones que aparezcan entre paréntesis, llaves o corchetes, y de dentro hacia afuera, después las multiplicaciones y las divisiones (en el orden que queramos) y después las sumas y las restas (también en el orden que queramos. Si dentro de unos paréntesis aparecen otras operaciones se sigue la misma jerarquía.

Explicación matemática:

¿Entonces por qué la expresión 6/2(2+1) da dos resultados distintos en función del orden en el que hagamos las operaciones, o en función de la marca de la calculadora? (recordemos que si no aparece ningún símbolo entre dos expresiones es como si estuviéramos ejecutando una multiplicación). En los casos de la imagen [[6]] tenemos:

a) 6/2(2+1) = [Primero el paréntesis] = 6/2(3) = [si hacemos primero la división] = 3(3) = [y por último la multiplicación] = 9.
b) 6/2(2+1) = [Primero el paréntesis] = 6/2(3) = [si hacemos primero la multiplicación] = 6/6 = [y por último la división] = 1.

Todo este problema en la jerarquía de las operaciones que usa nuestra calculadora se resuelve con el simple hecho de colocar paréntesis, llaves o corchetes para asegurarnos el orden en las operaciones:

a) **(**6/2**)**(2+1) = [Primero los paréntesis] = **(**3**)**(3) = [y luego la multiplicación]=9
b) 6/**(**2(2+1)**)** = [Primero los paréntesis, de dentro hacia afuera] = 6/**(**2(3)**)** = 6/6 = [y luego la división] = 1.

He aquí la comprobación de que usando más paréntesis somos nosotros los que elegimos el orden de las operaciones, y no la calculadora.

4.4.2. Actividad 02: Tales

Objetivo: El objetivo fundamental de esta actividad consiste en que los alumnos resuelvan problemas reales de medición de áreas y cálculo de distancias inaccesibles, a través del triángulo, que es el elemento básico de la trigonometría, y de la semejanza de triángulos, la cual nos permite comparar las longitudes de los lados de triángulos proporcionales.

Empleando el Teorema de Tales en un triángulo, desarrollaremos la división de una figura *Le Modulor de Le Corbusier*, figura que utilizó el arquitecto Le Corbusier para representar las proporciones del cuerpo humano y que a su vez empleó para dar proporción a sus edificios. Se pretende utilizar el teorema de Tales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes reales para la resolución de problemas geométricos.

Curso: 2º ESO / 3º ESO.

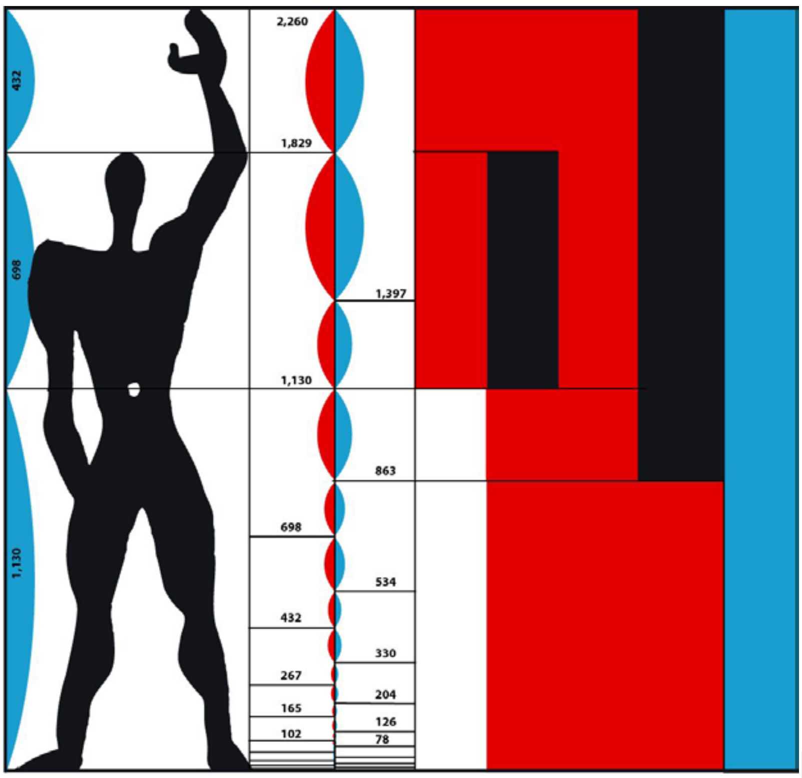
Edad: 13–14 años / 14–15 años.

Currículo: bloque de Geometría: Semejanza - Teorema de Tales: semejanza de triángulos-proporciones.

Nivel de la actividad: Alto nivel de demanda cognitiva: fase de resolución de problemas. Después de haber tenido un contacto con la explicación del teorema de Tales, se procederá a interpretar por qué conseguimos una única imagen completa del *Modulor* al colocar partes del mismo a distintas distancias. Para ello se medirá en la sala las dimensiones y se procederá a comprobar que se cumplen las proporciones del teorema de Tales por semejanza de triángulos.

Texto a exponer:

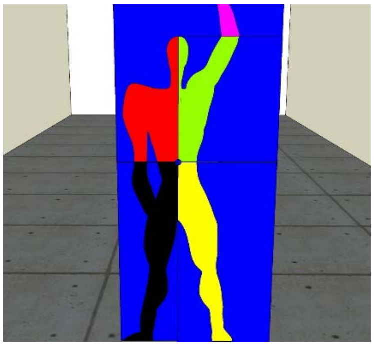
Un modulor escondido.

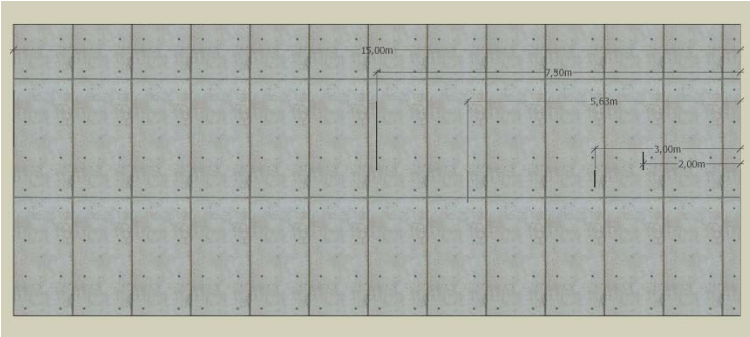


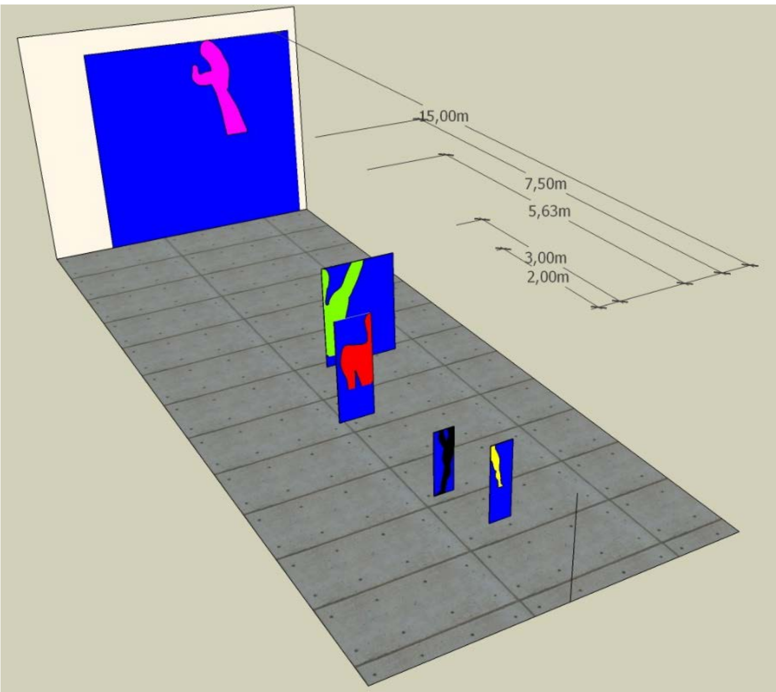
[9]

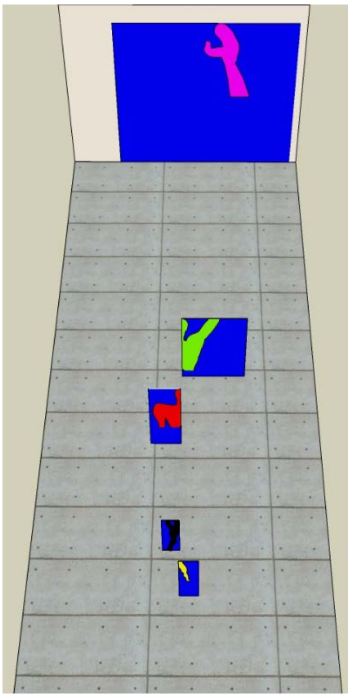
Imágenes a colocar:

Se pintarán cuatro expositores con las siluetas de color negro, amarillo, rojo y verde, y la pared del fondo de la sala se pintará con la silueta rosa:









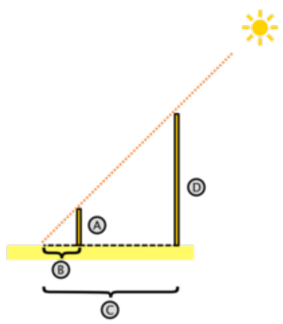
Explicación verbal:

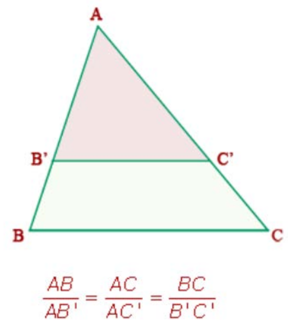
Sabiendo que el *Modulor* de Le Corbusier tiene las medidas de 1.13 metros hasta el ombligo, 1.829 metros hasta la cabeza y 2.26 metros hasta la punta de los dedos con el brazo levantado. Partiendo que la figura pintada de negro está en verdadera magnitud, es decir, tiene una altura de 1.13 metros y se encuentra a 3.00 metros, en proyección horizontal, desde la posición del observador.

Las partes del Modulor están colocadas con las dimensiones y distancias exactas desde el punto del observador, que se deberá encontrar en el acceso a la sala de exposiciones y con una altura exacta del punto de vista de 1.75 metros de altura, habrá recrecidos para que los más pequeños puedan subirse y ver el efecto que se crea.

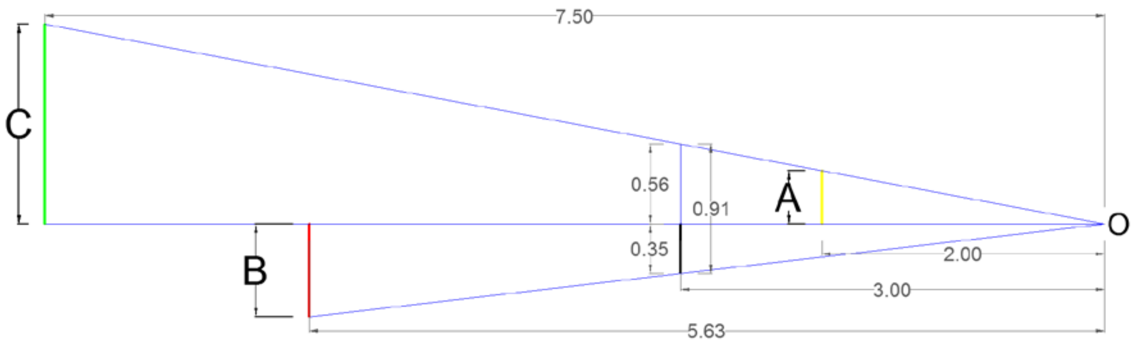
Explicación matemática:

Teorema Primero de Tales [[10]]: *Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.*





Teniendo colocada la figura negra a 3.00 metros del origen (*O*), en proyección horizontal, y con una anchura de 0.35 metros y el ancho total del *Modulor* es de 0.91 metros; si queremos colocar la figura amarilla (*A*) a 2.00 metros de *O*, la figura roja (*B*) a 5.63 metros de *O*, y la figura amarilla (*C*) a 7.50 metros de *O*. Calcular mediante el teorema de Tales la anchura de las figuras *A*, *B* y *C*.



Obtenemos las relaciones siguientes:

$\frac{3.00}{2.00} = \frac{0.56}{A} \Rightarrow$ en donde $A = 0.3733$ metros.

$\frac{3.00}{5.63} = \frac{0.35}{B} \Rightarrow$ en donde $B = 0.6568$ metros.

$\frac{3.00}{7.50} = \frac{0.56}{C} \Rightarrow$ en donde $C = 1.40$ metros.

Siendo *A*, *B* y *C* las longitudes en proyección horizontal de la figura amarilla, roja y verde respectivamente.

Para una sala con un fondo de 15.00 metros, la figura rosa que se pintará sobre la pared posterior, tendrá una anchura *D*:

$\frac{3.00}{15.00} = \frac{0.56}{D} \Rightarrow$ en donde $D = 2.80$ metros.

4.4.3. Actividad 03: Pitágoras

Objetivo: empleando el teorema de Pitágoras en un triángulo, conocido uno de los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, calcularemos el cateto restante.

Curso: 1º ESO / 2º ESO / 3º ESO.

Edad: 12-13 años / 13–14 años / 14–15 años.

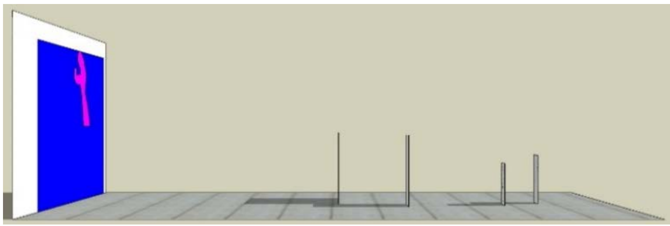
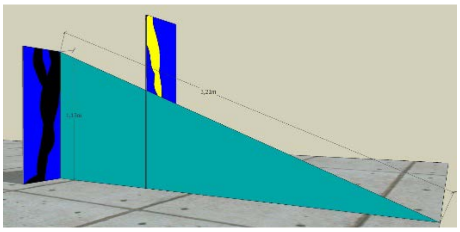
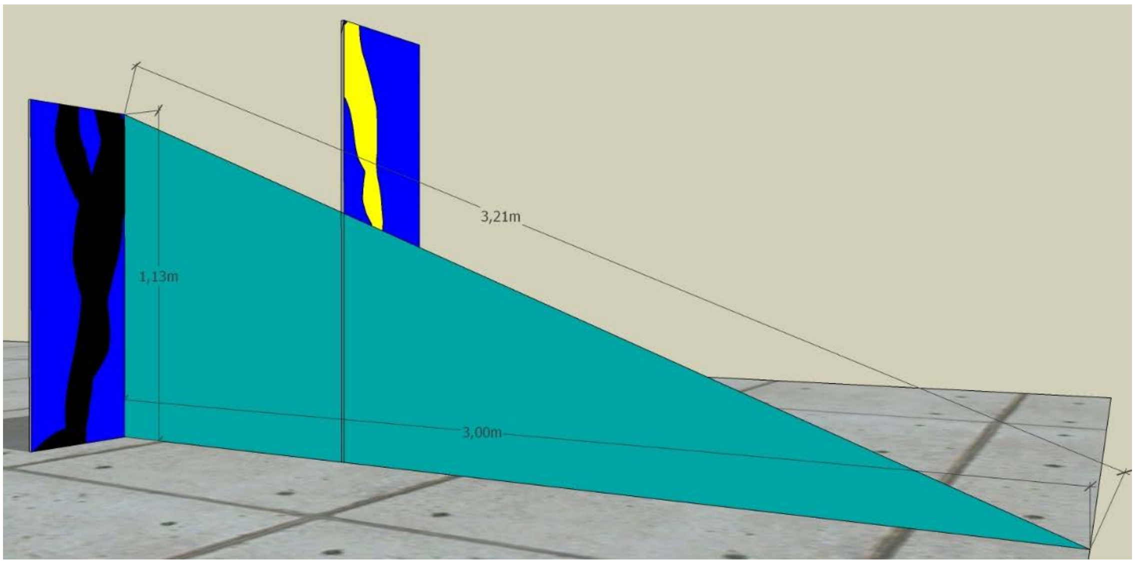
Currículo: bloque de Geometría: Teorema de Pitágoras- Triángulos rectángulos.

Nivel de la actividad: Bajo nivel de demanda cognitiva: fase de reproducción de problemas en la que se emplean procedimientos sin conexiones, es una resolución mediante la aplicación directa del teorema.

Texto a exponer:

Sabiendo que el Modulor de Le Corbusier tiene las medidas de 1.13 metros hasta el ombligo, 1.829 metros hasta la cabeza y 2.26 metros hasta la punta de los dedos con el brazo levantado. Para una hipotenusa de 3.21m y una altura de la silueta negra ubicada en la exposición coincidiendo con la altura del ombligo del Modulor, ¿a qué distancia de la puerta de entrada de la sala se encuentra?

Imágenes a colocar:

Explicación verbal:

Teorema de Pitágoras [11]: *En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.* $a^2 + b^2 = c^2$*, siendo a y b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c la medida de su hipotenusa.*

Explicación matemática:

Tendríamos un triángulo rectángulo de hipotenusa de 3.21m y uno de sus catetos sería de 1.13 m, coincidiendo con la altura del ombligo del *Modulor*. Por lo tanto, por Pitágoras podremos obtener la distancia a la que se encuentra: sean a y b los catetos, y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo, escribiremos

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$1.13^2 + b^2 = 3.21^2 \Rightarrow b^2 = 3.21^2 - 1.13^2 \Rightarrow b = \sqrt{3.21^2 - 1.13^2} = 3.00\ metros$$

Se encuentra a 3.00 metros de distancia del acceso a la sala de la exposición.

4.4.4. Actividad 04: Entradas para el fútbol

Objetivo: se trata de que los alumnos interpreten un enunciado y su transformación a funciones lineales, para después dibujarlas y analizar el resultado. Esta actividad tiene una alta contribución a la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, puesto que requiere la transformación del lenguaje verbal al lenguaje matemático.

Curso: 3º ESO.

Edad: 14 – 15 años.

Currículo: bloque de Funciones: Funciones- Funciones lineales.

Nivel de la actividad: Alto nivel de demanda cognitiva: fase de resolución de problemas en la que se requieren procedimientos con conexiones. Se requiere cierto grado de esfuerzo cognitivo, aunque pueden utilizar procesos generales en el inicio de la actividad, pero el alumnado necesita establecer una relación con las ideas que fundamentan el procedimiento para poder resolver la actividad y obtener una interpretación del resultado.

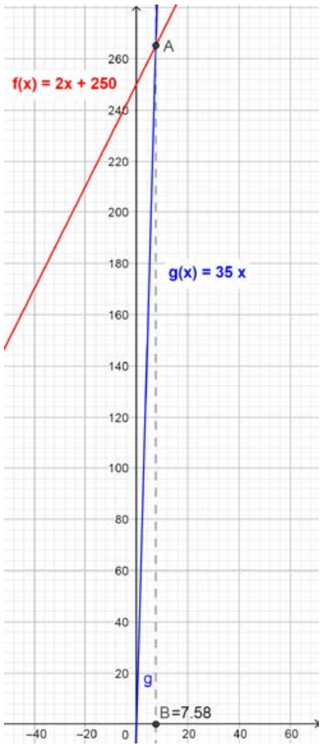
Texto a exponer:

El Real Valladolid propone para la temporada 2019-20 unos abonos anuales para la zona oeste de preferencia y socios en la edad de cadete (13-16 años) a 250 € el abono más 2 € por cada partido al que se asista. En cambio, sin estar abonado, cada entrada en el mismo sitio y para la misma edad, costará 35 € por partido. ¿A partir de cuantos partidos sale rentable el abono anual?

Imágenes a colocar: [12]

Gráfica:

En la gráfica se representa el número de partidos en el eje de abscisas, eje *x*, y el precio se representa en el eje de ordenadas, eje *y*:



Explicación verbal:

Las funciones del coste, siendo x el número de partidos anuales, son: con abono (en color rojo) sería $f(x) = 2x + 250$. Y sin abono (en color azul), tendríamos que $g(x) = 35x$.

Podemos comprobar que, al representarlas, se observa que a partir de determinado valor de x, donde x es el número de partidos a los que voy a ver al *Real Valladolid*, es más rentable estar abonado, y teniendo en cuenta que el número de partidos de la temporada será de 18 partidos. Este valor donde se cortan las dos gráficas lineales, es el punto de corte de las dos rectas: por tanto, si vamos a ver al *Real Valladolid* más de x veces o más al año, en nuestro caso si vamos al menos 8 veces, es más barato estar abonado que comprar entradas sueltas partido a partido.

Explicación matemática:

Tenemos que el enunciado lo podemos transformas en dos gráficas lineales, una de la forma explícita $y=mx + n$, para el precio con abono (en color rojo), que sería $f(x) = 2x + 250$, con pendiente 2 y punto de corte con el eje de ordenadas en el 250. Y por otro lado tendríamos una gráfica con la forma explícita $y = mx$ para el precio de entradas sin abono (en color azul), $g(x) = 35x$.

Para calcular matemáticamente el punto de corte igualamos las ecuaciones, puesto que la coordenada y de ambas ecuaciones coincide:

$$2x + 250 = 35x$$

$$250 = 33x \Rightarrow x = 250/33 = 7.57575758$$

Por lo tanto, si vamos a al menos 8 partidos, o más, de los 18 que se jugarán en el estadio José Zorrilla, nos saldrá más rentable sacarnos el abono que comprar entradas para cada partido.

4.4.5. Actividad 05: El lanzador de peso

Objetivo: se trata de que los alumnos interpreten la gráfica de una función cuadrática, una vez dibujada y con ello poder analizar el resultado. Esta actividad tiene una alta contribución a la competencia matemática y a la competencia lingüística, puesto que requiere la traducción del lenguaje gráfico/matemático al lenguaje verbal.

Curso: 3º ESO.

Edad: 14 – 15 años.

Currículo: bloque de Funciones: Funciones- Funciones cuadráticas.

Nivel de la actividad: Alto nivel de demanda cognitiva: fase de resolución de problemas en la que se requieren procedimientos con conexiones. Se requiere cierto grado de esfuerzo cognitivo, aunque pueden utilizar procesos generales en el inicio de la actividad, pero el alumno necesita establecer una relación con las ideas que fundamentan el gráfico para poder resolver la actividad y dar un resultado acorde a lo que se pregunta.

Texto a exponer:

Un lanzador de peso tira la bola siguiendo una trayectoria de ecuación:

$$f(x) = -0.04x^2 + 0.64x + 1.5$$

donde ***x*** *es la distancia recorrida por la bola en metros, e* ***y*** *la altura que alcanza también en metros.*

a) ¿Qué distancia alcanza la bola?

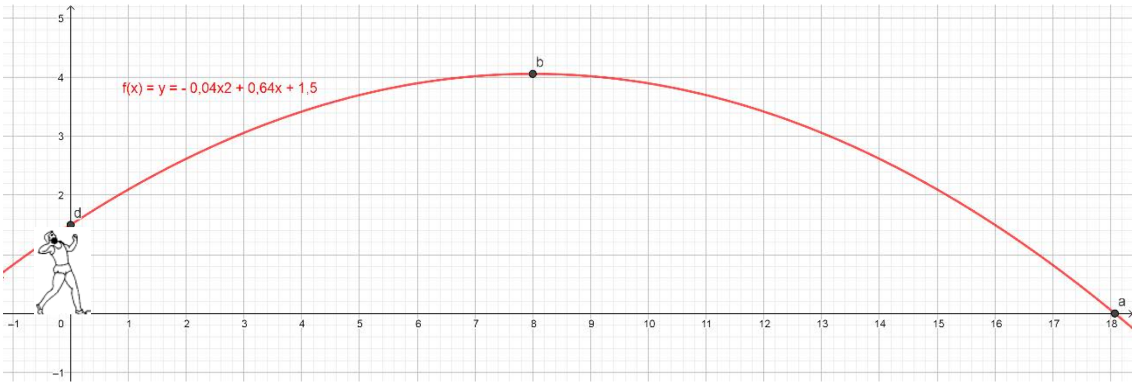
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

c) Representa gráficamente los datos obtenidos anteriormente e intenta dibujar, aproximadamente, la función.

d) Si en el momento en el que el lanzador suelta el peso se encuentra en el punto (0,0) ¿desde qué altura se lanza el peso?

Imagen a colocar: [[13]]

Gráfica:



Explicación verbal:

En principio, hay que identificar que nos encontramos ante una ecuación polinómica de grado 2, es decir, tendremos una función cuadrática. Dicha función es completa porque tiene la forma polinómica

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

por lo tanto la función describirá un tiro parabólico donde el lanzador se encuentra en el punto (0, 0), la distancia máxima del peso antes de impactar con el suelo será la coordenada *x* el punto *a* = (18.07472,0), es decir 18.07472 metros, la altura máxima que alcanza el peso será la proporcionada por la coordenada y del vértice de la parábola, siendo el punto *b* = (8,4.06) y por lo tanto la altura máxima será 4.06 metros, y por último la altura inicial desde la que se lanza el peso, sabiendo que el lanzador en el momento de soltar el peso se encuentra en el punto (0, 0), la altura desde la que el peso inicia su trayectoria es la coordenada y cuando sustituimos en la ecuación por el valor de *x* = 0, obteniendo el punto $d = (0, 1.5)$, y por ende la altura inicial en el momento en el que se suelta el peso es de 1.5 metros, que corresponde con el valor en metros del término independiente de la función $f(x)$.

Explicación matemática:

Teniendo

$$f(x) = -0.04x^2 + 0.64x + 1.5$$

o lo que es lo mismo

$$y = -0.04x^2 + 0.64x + 1.5$$

entonces calcularemos los apartados de la siguiente forma:

a) *¿Qué distancia alcanza la bola?* Para calcular el punto *a*, hay que buscar las raíces de la función dada $y = -0.04x^2 + 0.64x + 1.5$, donde

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0.64 \pm \sqrt{0.64^2 - 4(-0.04)1.5}}{2(-0.04)}$$

obteniendo los valores de $x = -2.07472$, y $x = 18.07472$; como nos pide la distancia que alcanza el peso, escogemos la raíz positiva, puesto que el negativa no tiene sentido al estar hablando de una distancia.

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola? El punto que representa el máximo absoluto de una función cuadrática cuyo *a* tiene valor negativo es el vértice, y la altura máxima que alcanzará el peso que sigue la trayectoria de la función $f(x)$ es la coordenada y de ese punto. Para calcular el vértice, primero calculamos su coordenada

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0.64}{2(-0.04)} = 8;$$

sustituimos el valor obtenido en $f(8)$ y resulta que $y = 4.06$, por lo tanto la altura máxima que alcanza el peso, es de 4.06 metros.

c) Representa gráficamente los datos obtenidos anteriormente e intenta dibujar, aproximadamente, la función: se dan valores a x en $f(x)$ para obtener los distintos valores de *y:*

	x	***y***
Corte OX^-	–2.07472	0
Corte *OY*	0	1.5
Corte OX^+	18.07472	0
Vértice	8	4.06
	2	2.62

Por simetría con el vértice, al dibujar el punto (2, 2.62) podremos dibujar directamente su simétrico (10, 2.62).

d) Si en el momento en el que el lanzador suelta el peso se encuentra en el punto (0, 0) ¿desde qué altura se lanza el peso? Será el valor del único punto de corte que tiene la función cuadrática con el eje de ordenadas, y como nos dicen que el lanzador está en el punto (0, 0), sustituimos el valor de $x = 0$ en la función $f(x)$, obteniendo el valor de $y = 1.5$, por lo tanto, el peso es lanzado originalmente desde la altura de 1.5 metros.

4.4.6. Actividad 06: La nadadora

Objetivo: lo primero que se busca es que sepan interpretar lo que dice el enunciado, de tal modo que identifiquen que es una progresión aritmética, y el cómo podrían resolver la actividad, aplicando la fórmula matemática, y no por la *cuenta de la vieja*, que pocos casos puede resolvernos.

Curso: 3º ESO.

Edad: 14 – 15 años.

Currículo: bloque de Funciones: Sucesiones-Progresiones aritméticas.

Nivel de la actividad: Alto nivel de demanda cognitiva, estando en la fase de resolución de problemas se potenciará el razonamiento matemático, ya que cada día que pasa, la nadadora entrena 5 minutos más que el día que le precede, y así hasta las dos semanas. Se ha elegido un periodo muy corto de tiempo, para que se vea que se puede hacer sumando día tras día, algo tedioso pero mecánico, o que podremos calcularlo aplicando la fórmula, más directo, pero que necesita un conocimiento de qué significan los valores que se están tomando para la fórmula.

Texto a exponer:

Una nadadora entrenó todos los días durante dos semanas. El primer día nadó 15 minutos, y a partir del primer día, nadó 5 minutos más que el día anterior.

a) ¿Cuánto tiempo nadó el ultimo día?

b) ¿Y a lo largo de las dos semanas?

Imagen a colocar:


[14]

Explicación verbal:

El enunciado nos dice que nadamos un día 15 min., al día siguiente 5 min. más que el día anterior, y al siguiente 5 min más que el anterior… y así sucesivamente hasta completar las dos semanas, que serían 14 días.

Haciéndolo mecánicamente día a día:

a) Para calcular cuánto tiempo nadó el último día de la segunda semana:

a_1 = día 1º = 15 min.

a_2 = día 2º = 15+5 = 20 min.

a_3 = día 3º = 20+5 = 25 min.

a_4 = día 4º = 25+5 = 30 min.

a_5 = día 5º = 30+5 = 35 min.

a_6 = día 6º = 35+5 = 40 min.

a_7 = día 7º = 40+5 = 45 min.

a_8 = día 8º = 45+5 = 50 min.

a_9 = día 9º = 50+5 = 55 min.

a_{10} = día 10º = 55+5 = 60 min.

a_{11} = día 11º = 60+5 = 65 min.

a_{12} = día 12º = 65+5 = 70 min.

a_{13} = día 13º = 70+5 = 75 min.

a_{14} = día 14º = 75+5 = 80 min.

Por lo tanto, el último día de la segunda semana, habrá nadado 80 min.

b) Para calcular cuánto nadó a lo largo de las dos semanas, sumaríamos los tiempos que nadó cada día, es decir

$$S_{14} = \sum_{n=1}^{14} a_n = 2260 \text{ min.}$$

Al final de la segunda semana, habrá nadado 2260 min.

Explicación matemática:

Habiendo ofrecido unos conocimientos de progresiones aritméticas, donde habremos definido una *sucesión* (o *progresión*) numérica como un conjunto de números ordenados, y cada uno de estos números los llamamos *términos de la sucesión*, donde a_1 es el primer término, a_2 es el segundo término, a_3 es el tercer término... a_n es el n-ésimo término. Y ésta sucesión será *aritmética* si cada término es la suma del término anterior más un número constante, al que llamamos *diferencia de la sucesión*, denotado por d. Es decir,

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

De lo que podemos demostrar que el *término general* de una progresión aritmética donde su primer término es a_1 y su diferencia d:

Conociendo a_1

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d$

…

Por lo tanto, de forma general:

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d, \quad \forall n \geq 1$

En conclusión, para obtener los minutos que nadó el último día de la segunda semana, día 14, aplicando directamente la fórmula del término general $a_n = a_1 + (n-1)d$, $\forall n \geq 1$,

a) Para calcular cuánto tiempo nadó el último día de la segunda semana, siendo $a_1 = 15$, $n = 14$, $d = 5$, entonces

$$a_{14} = a_1 + (14-1)d = 15 + 13 * 5 = 80 \text{ min.}$$

b) Para calcular cuánto nadó a lo largo de las dos semanas, 14 días, hay que hacer la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} * n \quad , \forall n \geq 1$$

Siendo $a_1 = 15$, $a_{14} = 80$, $n = 14$, $d = 5$, entonces

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} * n = \frac{15+80}{2} * 14 = 2660 \; min.$$

4.4.7. Actividad 07: *Un, Dos, Tres, … responda otra vez*

Objetivo: analizar las probabilidades de un juego de azar, de tal modo que la primera impresión que se percibe del juego es errónea a no ser que se analice matemáticamente.

Curso: 4º ESO / 1º Bachillerato

Edad: 15-16 años / 16-17 años

Currículo: bloque de Estadística y Probabilidad - Azar y probabilidad.

Nivel de la actividad: Alto nivel de demanda cognitiva: fase de resolución de problemas. Se necesita un análisis matemático del juego para que la razón no nos lleve al error.

Texto a exponer:

La subasta era la tercera y última parte del programa. En ella se mezclaba el suspense del concurso y la diversión con el entretenimiento de todo un show. Iban apareciendo azafatas y humoristas que dejaban en la mesa del presentador un objeto con una tarjetita que leía el presentador hasta un cierto párrafo de la misma, y es cuando decía "...y hasta aquí puedo leer" creando la duda en los concursantes acerca de qué regalo se escondía en la tarjetita en cuestión. Cuando en la mesa llegaban a los tres últimos regalos de la noche, el presentador permitía a los concursantes ir desechando los objetos uno a uno hasta quedarse con el último, que era el que encerraba el premio que finalmente se llevaban los concursantes, y podía ser muy bueno (coches, apartamentos, dinero, viajes...) o muy malo (la Ruperta, la Botilde, el Antichollo o el Crack, dos millones y medio de cerillas, una ordeñadora automática, un silbato gigante, unas bolsas de agua caliente, ...).

La lectura de la tarjeta del regalo elegido por los concursantes era el momento más emocionante del programa... El presentador, conforme iba leyendo el texto, ofrecía una cantidad de dinero o el cambio por otro objeto de los tres de la mesa. La cantidad iba en aumento conforme más leía la tarjeta... Aquí entraba en juego la habilidad de los concursantes para descubrir si el presentador ofrecía dinero porque el premio era malo o era una trampa y el regalo era buenísimo...

En conclusión, los concursantes tenían que elegir un regalo de los tres que había en la mesa, después el presentador les hacía desechar uno, y después les hacía elegir de nuevo entre los dos restantes. ¿Qué probabilidad tenían de elegir el mejor de los tres regalos?

Imágenes a colocar: [[15]]

OBJETO 1: La calabaza Ruperta; OBJETO 2: La Botilde; OBJETO 3: ¡el coche!

Explicación verbal:
(Se trata de utilizar elementos españoles para el juego del Monty Hall).
La recta final del conocido concurso español de los 80, creado por Chicho Ibáñez Serrador y presentado por Mayra Gómez Kemp, planteaba a los participantes un acertijo clásico de las matemáticas, conocido como la paradoja de Monty Hall.
Se ofrece un concurso cuya mecánica es la siguiente:
Al concursante se le ofrece la posibilidad de escoger uno entre tres objetos con una tarjeta cada uno, tras uno de ellos se encuentra un coche o una casa (premio gordo), y tras los otros dos está la calabaza Ruperta y La Botilde. El concursante gana el premio que se oculta en la tarjeta del objeto que escoja.
Después de que el concursante escoja un objeto, el presentador abre uno de los otros dos objetos, mostrando La Botilde. Siempre puede hacerlo, ya que incluso si el concursante ha escogido la Calabaza Ruperta, queda La Botilde entre los objetos que ha descartado y el presentador conoce lo que hay detrás de cada objeto. Entonces, ofrece al concursante la posibilidad de cambiar su elección inicial y escoger el otro objeto que descartó originalmente y que continúa en la mesa. La pregunta oportuna es: ¿debe hacerlo o no?

La probabilidad de que el concursante escoja en su primera oportunidad el objeto que oculta el coche o la casa es de 1/3, por lo que la probabilidad de que el coche/casa se encuentre en una de las puertas que no ha escogido es de 2/3. ¿Qué cambia cuando el presentador muestra a La Botilde tras uno de los otros dos objetos?

Una suposición errónea es que, una vez sólo queden dos objetos, ambos tienen la misma probabilidad, es decir 1/2, de contener el coche/casa. Es errónea ya que el presentador desecha el objeto después de la elección del jugador. Esto es, la elección del jugador afecta al objeto que abre el presentador. No es un suceso aleatorio ni inconexo, si no que va ligado a la previa elección del jugador.

Si el jugador escoge en su primera opción la puerta que contiene el coche/casa, con una probabilidad de 1/3, entonces el presentador puede desechar cualquiera de los otros dos objetos. Además, el jugador pierde el coche/casa si cambia cuando se le ofrece la oportunidad, puesto que había acertado. Pero, si el jugador escoge La Botilde en su primera opción, con una probabilidad de 2/3, el presentador sólo tiene la opción de desechar un objeto, y este es el único objeto restante que contiene a la Calabaza Ruperta.

En ese caso, el objeto que queda tiene que contener el coche/casa, por lo que cambiándolo gana, puesto que había elegido un premio malo como primera opción.

En resumen, si mantiene su elección original gana si escogió originalmente el objeto con el premio gordo y con probabilidad de 1/3, mientras que, si cambia el objeto, gana si escogió originalmente uno de los dos objetos malos y con probabilidad de 2/3. Por lo tanto, el concursante debe cambiar su elección si quiere maximizar la probabilidad de ganar.

Explicación matemática:

Definimos los eventos

A: el concursante elige el objeto con el premio antes de cambiar de opción

B: el concursante elige el objeto con el premio después de cambiar de opción.

Aplicando el teorema de Probabilidad Total, tenemos que

Sean A_1, A_2,..., A_n sucesos incompatibles dos a dos, cuya unión es el espacio muestral ($A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$), y B es otro suceso.

Entonces: $p(B) = p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + ... + p(A_n)p(B/A_n) =$

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(B|A_i)$$

En nuestro caso particular,

$p(B) = p(BA) + p(BA^c) = p(B|A)\ p(A) + p(B|A^c)\ p(A^c) = 0\ (1/3) + 1\ (2/3) = 2/3$

en donde A^c representa el complementario de A. La $p(B|A) = 0$, puesto que son eventos mutuamente excluyentes, $p(A) = 1/3$, debido a que desde el inicio se elige uno de los objetos entre tres, y todos son equiprobables. La $p(B|A^c) = 1$, porque si eligió el objeto incorrecto desde el principio y posteriormente se realiza el cambio, siempre ganará. La $p(A^c) = 2/3$, porque $p(A^c) =1 - p(A) = 1 - 1/3 = 2/3$.

4.4.8. Actividad 08: Buscando a Phi en la geometría

Objetivo: descubrir que el número Phi, Φ, también llamado número áureo o número de oro, puede obtenerse de distintas formas, tanto aritméticas como geométricas, son algunas de éstas últimas las que veremos en esta actividad. A la vez que identifican formas y figuras planas, analizando sus propiedades y sus relaciones geométricas, utilizando métodos de experimentación gráfica como medio de investigación en geometría.

Curso: 1º ESO / 3º ESO

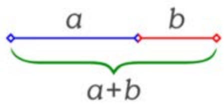
Edad: 12 – 13 años.

Currículo: bloque de Números y operaciones: Razones y proporciones. Geometría.

Nivel de la actividad: Bajo nivel de demanda cognitiva, mediante la repetición y reproducción de distintas formas de obtener gráficamente el número phi.

Texto a exponer:

El número áureo, Phi, surge de la proporción que existe entre dos segmentos de recta, siendo 'a' el tramo más largo y 'b' el tramo más corto, de modo que longitud total o suma de los dos segmentos 'a' y 'b' es al segmento 'a', como el 'a' es al menor 'b'.



[16]

La ecuación algebraica es $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$

Simplificamos $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$

Sustituimos $\Phi = \frac{a}{b}$ *de tal forma que* $1 + \Phi - 1 = \Phi$

Multiplicamos por Φ a ambos lados de la ecuación

$$\Phi\,(1+\Phi^{-1}) = \Phi\,\Phi \;\Rightarrow\; \Phi + 1 = \Phi^2$$

Ordenamos la ecuación $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$

Y resolvemos la ecuación de segundo grado $\Phi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Quedando demostrado que la solución positiva nos da el valor de Phi

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887498\ldots$$

La otra solución es negativa,

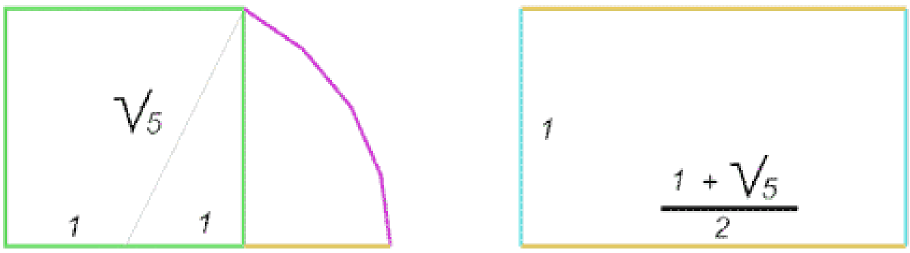
$$L = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.6180339\ldots$$

Explicación verbal y gráfica:

- PHI A PARTIR DE UN CUADRADO Y EL RECTÁNGULO ÁUREO

Para obtener el numero áureo en un cuadrado de lado la unidad, se traza un arco que tenga por centro el punto medio de uno de sus lados y su diámetro alcance el vértice del lado opuesto y desde ese punto se lleva el arco hasta su intersección con prolongación del primer lado elegido obteniendo un segmento que llamamos Phi. La relación entre Phi y un lado del cuadrado es el número áureo: $\Phi = \frac{1+\ \sqrt{5}}{2}$

Partiendo de un cuadrado que mida dos unidades de lado, el total del segmento verde y amarillo miden 1 más el radio del arco $1 + \ \sqrt{5}$. Si hacemos la mediatriz de este segmento verde y amarillo, obtendremos el valor de Φ.



[17]

Según Pitágoras en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos.

Sea c la hipotenusa, y a, b los catetos, según Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$

Como $a = 2$, $b = 1$ $\Rightarrow$ $c^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

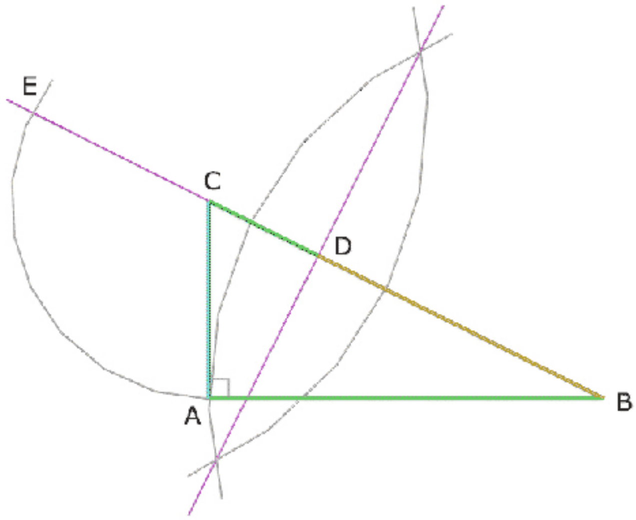
Entonces la hipotenusa: $c = \sqrt{5} = 2.230667\ldots$

A la que sumo 1 para completar el segmento: $1 + \ \sqrt{5}$ obteniendo el valor de Phi para dos unidades de lado, por lo tanto tendré que dividirlo por dos, y de éste modo obtenemos a partir de un cuadrado que, en color amarillo: $\frac{1+\ \sqrt{5}}{2} = \Phi = 1.61803\ldots$

- PHI A PARTIR DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Dibujamos un triángulo rectángulo de vértices *ABC*, con el ángulo recto en el vértice *A*, y la hipotenusa es el segmento *BC*. El cateto *AB* mide 2 unidades y el cateto *AC* mide 1 unidad. Dibujamos el arco de centro *C* y radio *CA*. Trazamos una prolongación de la hipotenusa a partir de *C* hasta que se cruza el arco de radio *CA*. El punto donde se intersecan la prolongación de la hipotenusa y el arco anteriormente mencionado es el punto *E*.

Se traza la mediatriz del segmento *BE*, haciendo dos arcos, uno con centro en *B* y radio *AB*=2 unidades, y otro con centro en *E* y el mismo radio de dos unidades. Se traza una línea que pase por los dos puntos en los que se intersecan los dos arcos anteriores, de tal forma que ésta línea corta la hipotenusa *BC* en el punto *D*.



Obtenemos que el segmento, de color amarillo,

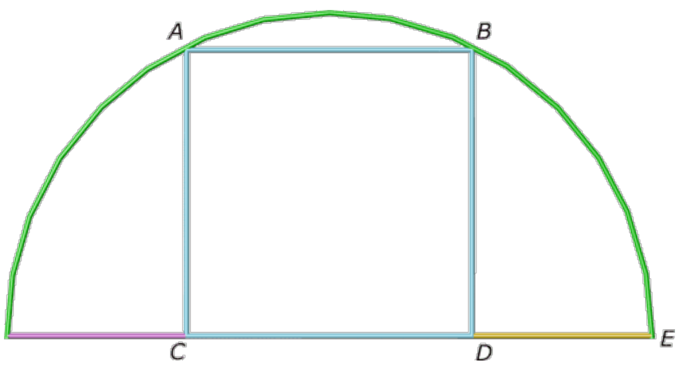
$$BD = ED = \Phi = \frac{1+\ \sqrt{5}}{2} = 1.61803\ ...$$

Y el segmento restante de la hipotenusa,

$$CD = \left|\frac{1-\ \sqrt{5}}{2}\right| = 0.6180339\ldots$$

- PHI A PARTIR DE UN CUADRADO INSCRITO EN UN SEMICÍRCULO

Dibujamos un semicírculo cortado por su diámetro y de radio $\frac{\sqrt{5}}{2\ unidades}$, en color verde. Dentro de este semicírculo trazamos una paralela al diámetro y a la distancia de la unidad, de modo que interseca al semicírculo en los puntos *A* y *B*, y trazamos un cuadrado *ABCD* inscrito en el semicírculo, que tendrá de lado la unidad y uno de sus lados, el *CD*.



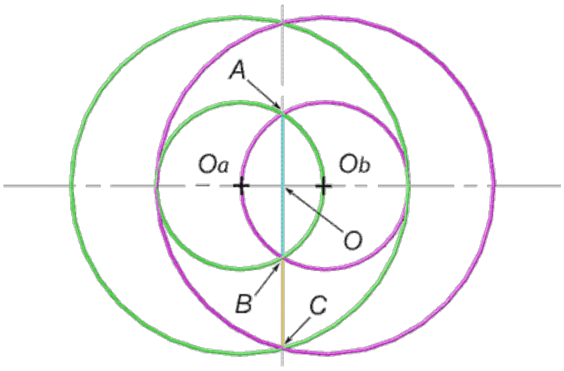
Como *CD* = 1 unidad, entonces

$$CE = \Phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\ \sqrt{5}}{2} = 1.61803\ ...$$

- PHI A PARTIR DE CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS

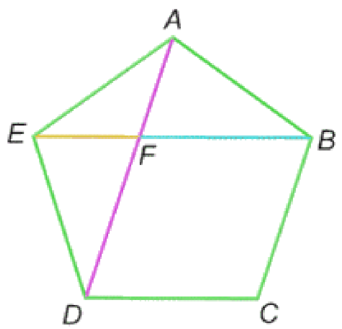
Se trazan dos circunferencias concéntricas, en color verde, con el mismo centro *Oa*, uno con un diámetro de una unidad y el otro con un diámetro de dos unidades. Dicho de otra manera, dos círculos concéntricos en los que el diámetro de uno de ellos sea el doble del otro.

Trazamos desde *Oa* una horizontal, y donde se corte con el primer círculo pequeño de color verde, colocamos el centro *Ob* y trazamos otras dos circunferencias, en color magenta. Las dos circunferencias de radio la unidad se intersecan en los puntos *A* y *B*, y las dos circunferencias de radio dos unidades también se intersecan en dos puntos, de modo que llamaremos *C* a uno de ellos. Si dividimos la medida del segmento *AC* por la medida del segmento *AB* obtenemos el número de oro, Φ.

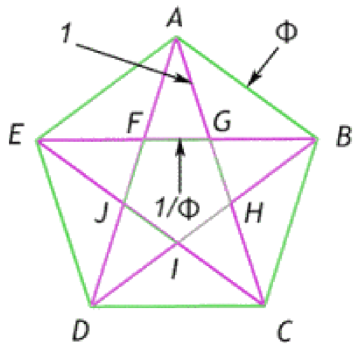


+ PHI A PARTIR DE UN PENTÁGONO

Si en un pentágono regular *ABCDE* trazo dos de sus diagonales, segmentos *AD* y *BE*, que se cruzan en *F*, si *BF* = 1, entonces *BE* = Φ.



Y si en un pentágono regular *ABCDE*, trazamos todas sus diagonales desde cada vértice hasta sus dos vértices opuestos, obtenemos otro pentágono *FGHIJ*, interior al *ABCDE*, tal que si *AG* = 1, entonces el lado del pentágono mayor = *AB* = Φ y *FG* = 1/ Φ.



Encontramos otra relación entre el pentágono regular, y la estrella pentagonal, de modo que siendo *D* la diagonal del pentágono regular igual al lado de la estrella pentagonal, y *L* el lado del pentágono regular, se cumple que:

$$\frac{D}{L} = \Phi = 1.61803398\ldots$$

$$\frac{1+1+\frac{1}{\Phi}}{\Phi} = \Phi = 161803398\ldots$$

4.4.9. Actividad 09: ¡Magia!

Objetivo: se pretende el uso de los números naturales y a la vez descubran una relación con el número nueve y los múltiplos de 9.

Curso: 1º ESO.

Edad: 12 – 13 años.

Currículo: bloque de Números y Álgebra: Múltiplos.

Nivel de la actividad: Bajo nivel de demanda cognitiva en la que se prevé que usen operaciones sencillas para descubrir que el *truco* depende de que se obtenga una carta múltiplo de 9.

Texto a exponer:

El número 9 tiene una propiedad muy conocida en el mundo de la magia, tanto por su sencillez, como por su invisibilidad para el público.

Coge una baraja de cartas colocada con los dorsos hacia arriba y sigue los siguientes pasos: Primero, mira la carta situada en la posición 9 empezando por carta de más arriba. Segundo, piensa en un número entre el 10 y el 20, el que quieras menos el 20 claro, y tercero, pon de una en una en la mesa, tantas cartas cara abajo como el número que has pensado, por ejemplo 15. Después, suma las cifras del número que habías elegido, por ejemplo, si pensaste el 15, la suma sería 1+5 = 6.A continuación, del montón de cartas que has puesto cara abajo sobre la mesa, retira tantas cartas como esa suma, *es decir, 6 cartas. Finalmente, la carta que ha quedado encima del montón de la mesa, es la que miraste al principio.*

Imagen a colocar:

Explicación verbal:

Esa carta que ha quedado encima del montón de la mesa y que es la que miraste al principio del juego, es la carta que inicialmente estaba en la novena posición.

Esto ocurre porque al elegir un número entre el 10 y el 19, ambos inclusive, lo que se hace es forzar a que salga el número nueve y así elegir la carta 9ª. De la misma manera que si pensamos una carta entre el 20 y el 29, obligamos a que salga el número dieciocho y así elegir la carta 18ª. Si pensamos una carta entre el 30 y el 39, lo que hacemos es forzar a que salga el número veintisiete y así elegir la carta 27ª. Y si tenemos una baraja americana con 52 cartas, podremos llegar a pensar en una carta entre el 40 y el 49, forzando a que salga el número treinta y seis y así elegir la carta 36ª. Y para la elección de un número entre el 50 y el 52, ambos inclusive, conseguimos que salga el número cuarenta y cinco, de modo que elegiremos la carta 45ª.

Como se puede observar, todas las cartas que forzamos a que salgan, la carta 9ª, 18ª, 27ª, 36ª y 45ª, todas ellas ocupan una posición múltiplo de 9.

Explicación matemática:

Basándonos en la propiedad del número nueve que dice que, si a un número cualquiera le restamos la suma de sus cifras, el resultado es un múltiplo de nueve.

Demostración para un número de dos cifras:

Sea ab un número natural de dos cifras: $ab=(10a+b)$, que será la suma de las decenas, $10a$, más las unidades de dicho número, b.

Y la suma de sus dos cifras es $(a+b)$.

(al ser un número de dos dígitos, lo que obtenemos es la *raíz digital* de ese número ab).

Si restamos el número menos la suma de sus cifras:

$$(10a+b)-(a+b)=10a+b-a-b=9a,$$

y observamos que el número resultante es múltiplo de 9.

Análogamente sucede con números de cualquier número de cifras, como puede generalizarse sin dificultad.

Existen otros muchos trucos, basados también en el número 9 y en la propiedad siguiente: si un número es múltiplo de 9, su raíz digital también es 9. La *raíz digital* es el dígito único que resulta de sumar los dígitos de un número, y sumando los dígitos del número resultante hasta que se obtenga un solo dígito.

4.4.10. Actividad 10: La jungla de cristal

Objetivo: aunque este acertijo aparece en gran variedad de textos de ESO, sin que corresponda en rigor a uno u otro curso en concreto, creo que es una buena actividad que hará pensar al alumno de la ESO. También se busca que asimilen el cambio de unidades de volumen.

Curso: 1º ESO.

Edad: 12–13 años.

Currículo: Unidad didáctica: Sistemas de medida: volumen. Números y operaciones.

Nivel de la actividad: Alto nivel de demanda cognitiva: fase de resolución de problemas, en la que tendrán que aplicar la adición y sustracción de volúmenes para obtener el resultado final.

Texto a exponer:

En la película Jungla de cristal 3: la venganza (Die hard: with a vengeance), Simon, un astuto terrorista, propone al detective John McClane (Bruce Willis) y a su amigo un acertijo para desactivar una bomba, tienen que colocar sobre una maleta una garrafa que contenga exactamente 4 galones de agua, pero sólo disponen de una garrafa de 5 galones y otra de 3 galones, ambas sin graduar, ¿cómo lo resolverías? [[18]]

Explicación verbal:

Primero debemos saber que el galón internacional o estadounidense equivale a: 3.785411784 litros, redondeando serían 3.7854 litros. Y el galón imperial o británico equivale a 4.5460902819948 litros, que redondeando serían 4.5461 litros.

Volviendo al acertijo, llenaríamos de agua la garrafa de 5 galones, de ésta se echa agua en la de tres hasta llenarla, y lo que nos queda en la garrafa de 5 galones son exactamente 2 galones de agua. Estos dos galones de agua los vertemos en la garrafa de 3 galones.

Si volvemos a llenar la garrafa de 5 galones, y echamos agua en la garrafa de 3 galones hasta llenarla, de modo que sólo podremos pasar 1 litro de agua de la garrafa de 5 galones a la de 3 galones, por lo que ya tendríamos 4 galones en la garrafa de 5 galones y habremos desactivado la bomba.

Explicación matemática:

Un modo de justificar rigurosamente este trasvase de agua entre garrafas recae en la introducción de *ecuaciones diofánticas* de primer grado (son aquellas ecuaciones con coeficientes enteros de las que sólo estamos interesados en encontrar soluciones también enteras). No revisten demasiada dificultad para alumnos de este nivel ya que sólo se utiliza el teorema de la división entera y el *algoritmo de Euclides* para calcular la solución general. No estando este último resultado en los currículos actuales de secundaria, esta actividad constituiría una ampliación, a discreción del profesor, de todos estos resultados. En la asignatura *Metodología y Evaluación en Matemáticas* de este Master, se impartió dicha explicación de hora y media de duración aproximadamente.

4.5. Actividades para TALLER

Hacer que los alumnos se acerquen a las matemáticas de una manera lúdica, es el “as” en la manga que podremos utilizar para que desaparezca la idea de que las matemáticas son muy difíciles y están alejadas de la realidad. Es por ello que el uso de manualidades táctiles y visuales son necesarias para que el alumno asimile conceptos, que, dentro del marco formal de la enseñanza a través del libro escolar, no es capaz de entender por sí solo.

Los talleres, al efectuarse en grupos, contribuyen a desarrollar, en mayor o menor medida, todas las competencias básicas: C. lingüística, puesto que es fundamental que en el grupo prevalezca el uso de la lengua como instrumento de aprendizaje y de relación social. C. matemática, ya que las formas de expresión y el razonamiento matemático para seguir razonamientos válidos y valorar los resultados obtenidos. C. digital, en el empleo de TICs, geogebra, calculadoras. C. aprender a aprender, ya que las manualidades harán que piensen en lo que están haciendo e investiguen nuevas opciones con lo asimilado en el taller. C. sociales y cívicas, potenciada por el empleo de grupos en el que deben relacionarse entre ellos. C. sentido de iniciativa y espíritu emprendedor, ya que siempre que haya un grupo de alumnos, alguno tiene que ser el portavoz de todo el grupo y el que tire del grupo cuando se desvíe de su cometido.

Adecuaré diversas actividades que pueden ser realizadas en talleres convenientes para la enseñanza matemática de ESO y Bachillerato.

4.5.1. Actividad 11: Fractales

Objetivo: el trabajo con fractales en secundaria puede ser muy útil para trabajar conceptos geométricos y actitudes de trabajo en el aula de matemáticas. Además, con el uso de fractales en 3D podemos trabajar el importante paso de las 2D a las 3D y potenciar la visión espacial.

En la construcción de fractales también está implícita una cierta idea de infinito que se puede ir descubriendo y asimilando por los alumnos. Si bien esta idea está ligada a una imposibilidad física, podemos realizar fractales hasta donde nos permita el papel, y con ello el alumno se irán acercando a conceptos matemáticos que consolidarán en cursos posteriores, y algunos ampliarán en una carrera universitaria.

Curso: hasta 2º ESO.

Edad: hasta 13 – 14 años.

Currículo: idea de infinito. Visión tridimensional.

Nivel de la actividad: Bajo nivel de demanda cognitiva: fase de reproducción de problemas, pero que se puede llegar hasta una fase de modelado, puesto que al ser el fractal un elemento geométrico infinito, podrán *romper* el papel hasta donde les permita su habilidad con el material empleado. La carga estética de ésta actividad contribuye, entre otras, a la competencia básica de conciencia y expresiones culturales.

Texto a exponer:

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas. MANDELBROT en 1977 lo definió como una "forma geométrica fragmentada que puede subdividirse en partes, cada una de las cuales es una copia a tamaño reducido del todo", es decir que es un elemento geométrico cuya estructura básica se fractaliza, se fragmenta sucesivamente, de tal forma que al variar la escala observamos un objeto similar.

Imagen a colocar:

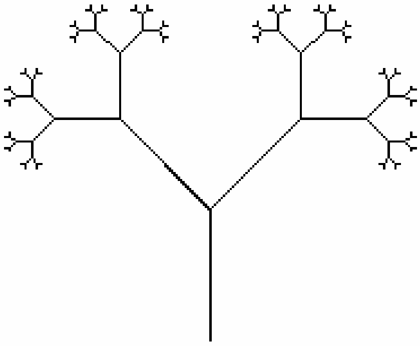
Al acompañar de una imagen que describe un fractal, como por ejemplo el brécol o brócoli romanesco, el alumno obtendrá una pequeña sospecha de lo que es un fractal.

Explicación verbal:

El concepto de fractal se puede abordar desde dos puntos de vista:

1.- atendiendo a su naturaleza: respondiendo a la pregunta ¿Qué son los fractales?, un fractal puede ser una curva o la gráfica de una cierta función con unas propiedades de continuidad y de medida, pueden ser poligonales, lineales o conjuntos de puntos. Los fractales plantean y resuelven problemas de continuidad, problemas de medida...: Longitud de una línea fractal, superficie de un recinto rodeado por una línea cerrada o un perímetro fractal, ..., como por ejemplo tenemos los conjuntos de Cantor, las curvas de Koch (copo de nieve), los conjuntos de Peano (curva de Peano), etc.

2.- atendiendo a su forma, a su construcción y a su representación: respondiendo a la pregunta ¿Cómo son los fractales? Son objetos autosemejantes que se construyen mediante un proceso de iteración o repetición de una geometría recursiva en la que se construye a partir de un mismo elemento base.



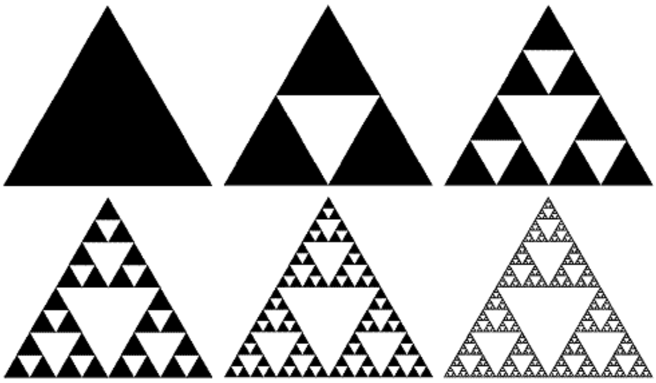

Atendiendo a éstos dos puntos de vista, podemos decir que un fractal es una figura con un perímetro de longitud infinita, con un número infinito de vértices, y de superficie infinita, si está cerrada. Y desde el segundo punto de vista de su forma, un fractal es una figura geométrica con una estructura compleja y pormenorizada a cualquier escala. Tienen la particularidad de que, si un objeto fractal lo aumentamos, la imagen que aparece vuelve a tener el mismo aspecto independientemente de cual sea la escala que utilicemos, y cada elemento está formando parte de elementos mayores.

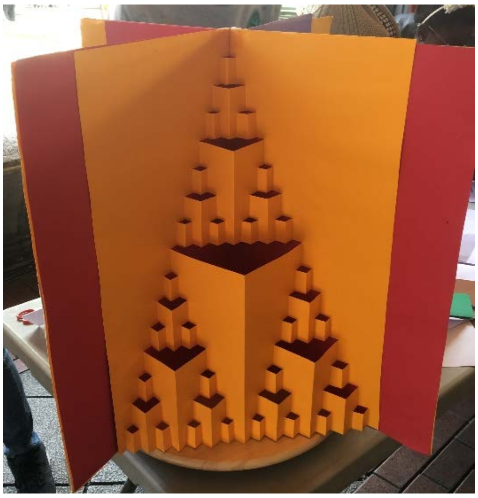
Otra propiedad de los fractales es que son autosemejantes, es decir, tienen la propiedad de que una pequeña sección de un fractal puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el fractal. Un ejemplo de ésta propiedad es el “copo de nieve”, curva que se obtiene tomando un triángulo equilátero y colocando sucesivos triángulos, cada vez de menor tamaño, en el tercio medio de los lados cada vez más pequeños.

Explicación práctica/manualidad:

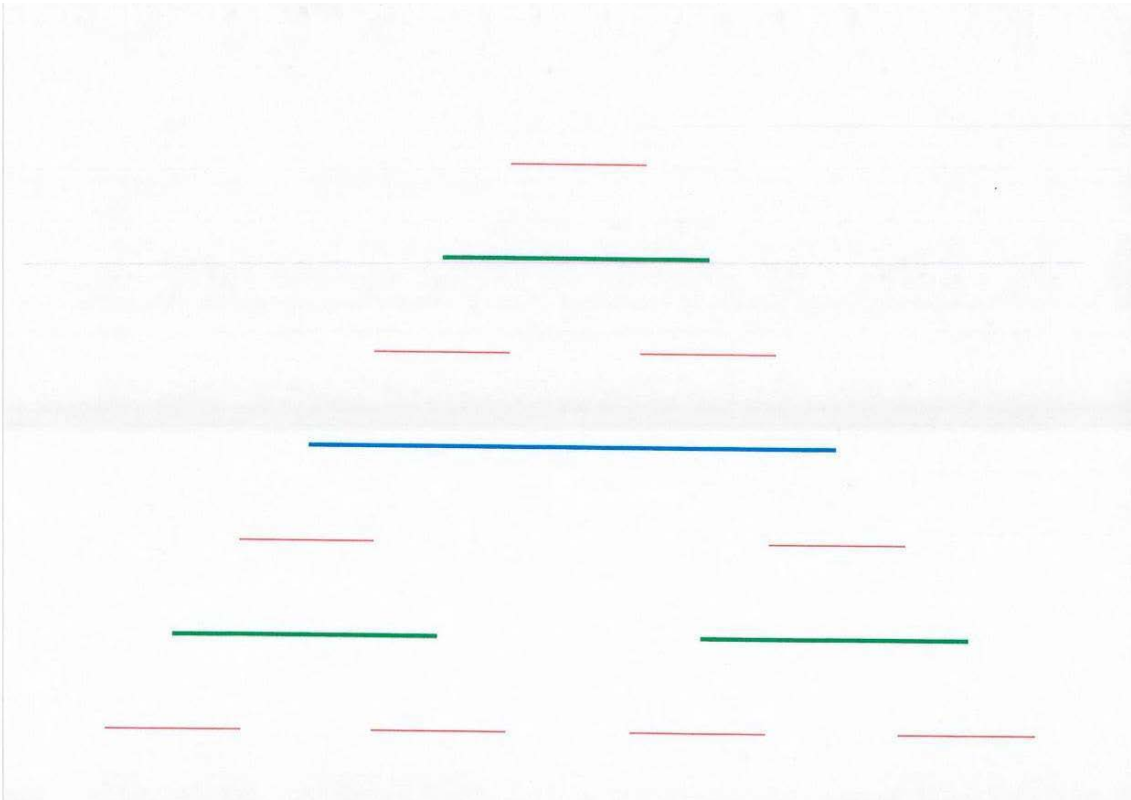
Ahora vamos a construir fractales en tres dimensiones partiendo de plantillas pop-up, termino anglosajón utilizado para las tarjetas que al abrir muestran figuras en 3D. Mediante cortes y dobleces adecuados marcados en las plantillas se obtienen llamativas construcciones que permiten visualizar de manera finita un fractal.

Triángulo de Sierpinski:

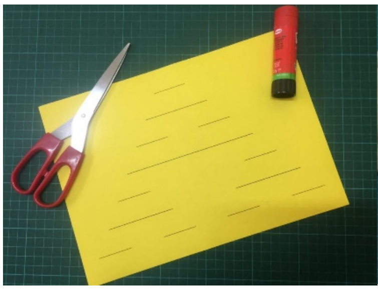
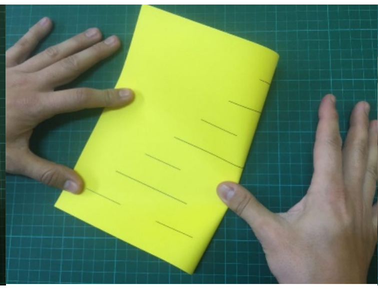
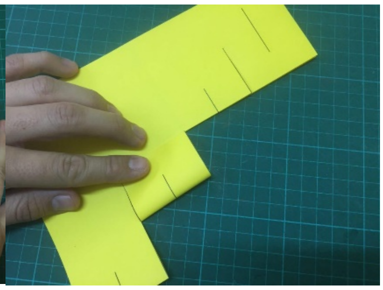


Daremos una plantilla, o la podrán hacer ellos, para hacer el Triángulo de Sierpinski:



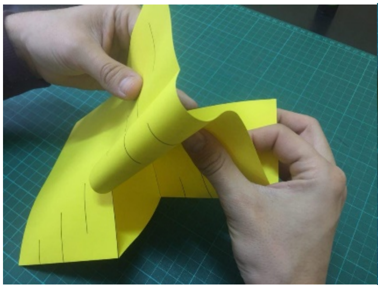
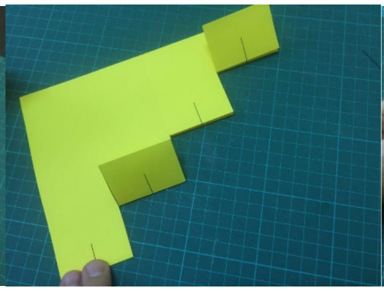
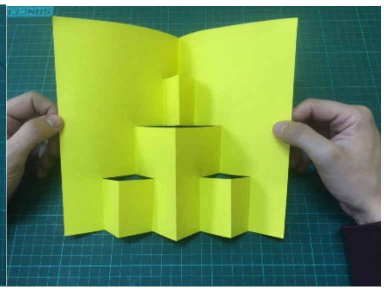
Explicación: con la ayuda de tijeras y pegamento procedemos a los pasos:

Paso 1.- Dobla verticalmente la hoja por la mitad con el dibujo hacia afuera.

Paso 2.- Corta el segmento azul (el más grande), y dobla verticalmente por los extremos del segmento azul hacia dentro, quedándonos una especie de escalera de dos peldaños.

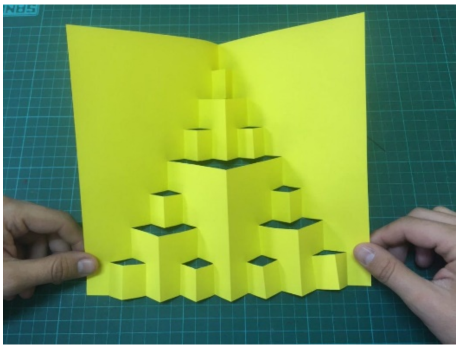
Paso 3.- Corta los dos segmentos verdes y luego desde sus extremos, dobla verticalmente y hacia dentro, quedándonos una especie de escalera de cuatro peldaños.

Paso 4.- Corta los segmentos rojos y desde sus extremos, dobla verticalmente y hacia dentro, quedándonos una especie de escalera de ocho peldaños. (Podríamos continuar, pero ya es suficiente para la actividad en clase.)

Fijaros que estamos repitiendo la misma acción una y otra vez, esto se llama iterar y es un procedimiento empleado en la obtención de fractales.

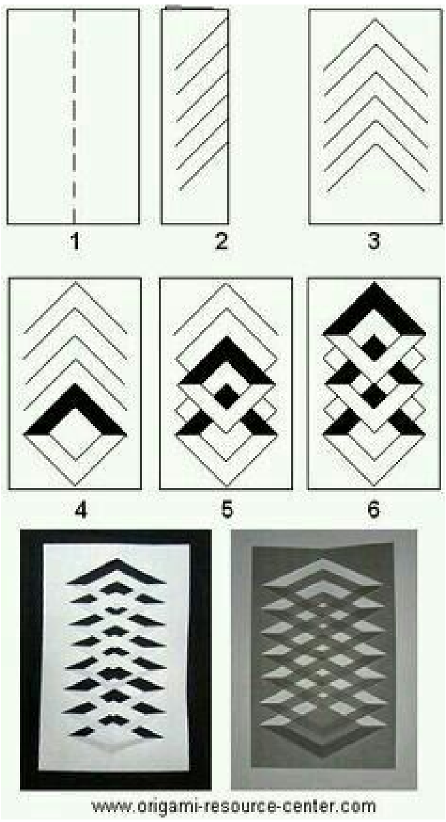
Paso 5.- Desdoblamos algunas partes y vemos como nos queda el triángulo de Sierpinski en 3D. Nos tiene que quedar como la imagen siguiente.

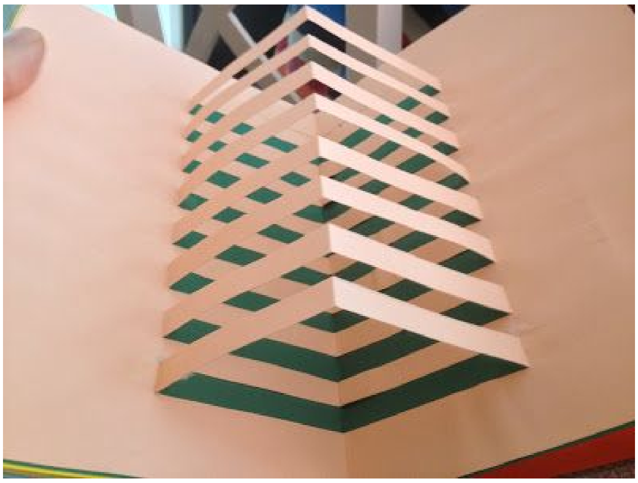


Paso 6.- Luego pegamos por detrás una cartulina de otro color para que haga contraste y se aprecie mejor el volumen.

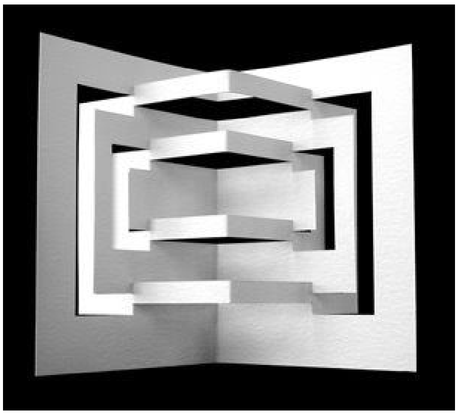
Otra versión un poco más “fragmentada”

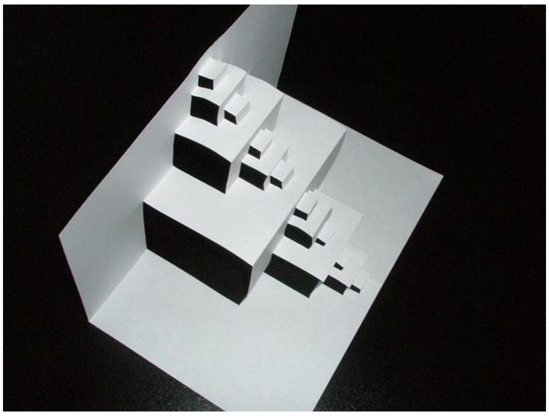
Otros ejemplos:





Se pueden construir infinidad de versiones





4.5.2. Actividad 12: Libro de Espejos

Objetivo: se pretende llegar a la concepción de que los polígonos regulares son formas o figuras planas cerradas y convexas, que se pueden producir por la repetición por simetría de una forma más sencilla, como es la línea recta. Utilizaremos el libro de espejos para comprobar la propiedad iterativa de la imagen especular y a su vez identificar las formas y las figuras planas, analizando sus propiedades y sus relaciones geométricas.

Curso: 1º ESO.

Edad: 12 – 13 años.

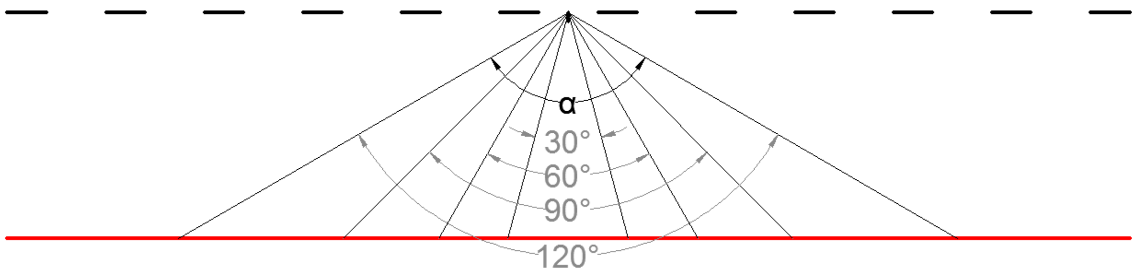
Currículo: bloque de Geometría: Figuras planas y ángulos.

Nivel de la actividad: Bajo nivel de demanda cognitiva: fase de reproducción de problemas y fase de investigación, donde una vez mostrado el funcionamiento de la reflexión, puedan descubrir y llegar a un proceso que potencia la competencia de aprender a aprender.

Texto a exponer:

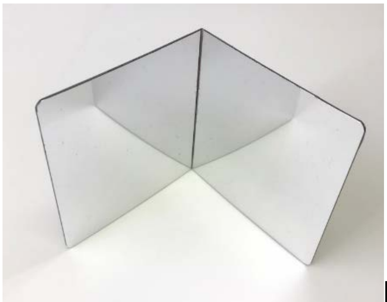
Prueba a colocar el libro de espejos en los ángulos de la plantilla, ¿Qué ocurre?

Dibujo a colocar: Plantilla

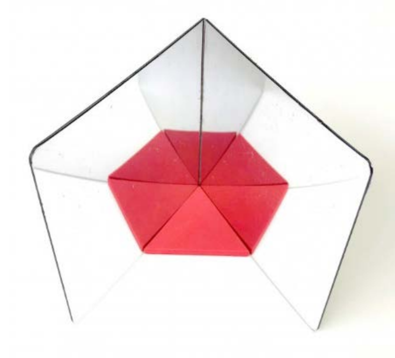


Explicación matemática:

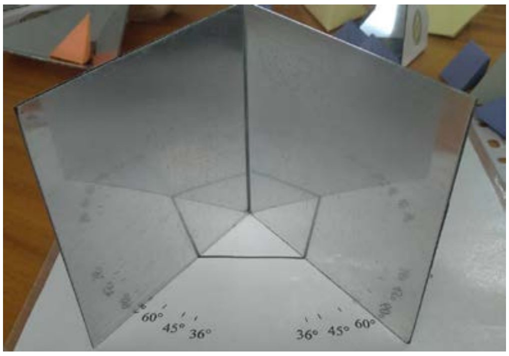
Una imagen que podemos obtener con el libro de espejos, es reflejando una línea, de modo que dependiendo del ángulo obtendremos una figura plana u otra:


[19]

- Si reflejamos un triángulo equilátero, donde sus tres ángulos son de 60º, obtendremos la imagen de un hexágono regular: esto se debe al colocar el espejo en el vértice superior del triángulo, éste tiene una abertura de 60º, y al producirse el reflejo sobre el libro de espejos se crea un polígono de *n* lados =360º/60º = 6 lados. O lo que es lo mismo sería reflejar la línea roja de la plantilla con un ángulo de apertura de los espejos de 60º.


[18]

• Si reflejamos un triángulo isósceles, con un ángulo de 72º grados y dos ángulos iguales de 54º, obtendremos la imagen de un pentágono regular: esto se debe al colocar el espejo en el vértice superior del triángulo, con una abertura de 72º, y al producirse el reflejo sobre los espejos se volverá a crear un polígono de *n* lados =360º/72º = 5 lados. Lo mismo ocurriría si reflejamos la línea roja de la plantilla con un ángulo de apertura de los espejos de 72º.



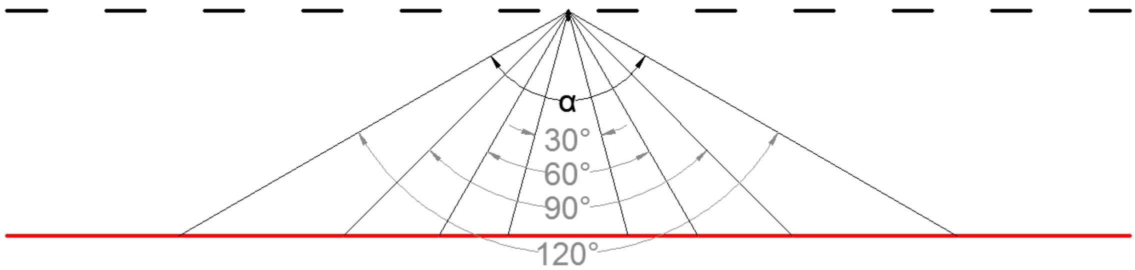
[20]

• Si reflejamos un triángulo rectángulo isósceles, o la línea roja con ángulo de apertura de 90º, cuya característica es que tiene un ángulo de 90 grados y dos ángulos iguales de 45 grados, obtendremos la imagen de un cuadrado: esto se debe a que en el vértice superior donde colocamos el espejo, éste tiene una abertura de 90º, y al producirse el reflejo sobre el libro de espejos se crea un polígono de *n* lados =360º/90º = 4 lados.


[21]

En conclusión, al tener dos espejos unidos, de modo que podamos variar el ángulo de apertura entre ellos, el reflejo de una recta proyectará la imagen de un polígono regular cuyo número de lados n=360º/α. Siendo α el ángulo entre los espejos, $\forall \alpha \leq 180º$.

Si α=180º, se refleja la misma línea recta que usamos como plantilla, y veremos la línea roja, la real, y como reflejo se verá una segunda línea roja, paralela a la anterior.



Si α =120º, se refleja un triángulo equilátero, donde n =360º/120º =3 lados.

Si α =30º, se refleja un dodecágono, donde n = 360º/30º =12 lados.

Y así sucesivamente hasta el polígono de infinito número de lados que verá como el reflejo de una circunferencia.

4.5.3. Actividad 13: Teselaciones

Objetivo: reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante distintos movimientos en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte, etc. Con esta actividad se potencian conocimientos estéticos producidos por la observación y la interacción con objetos que estimulan al alumno en el campo de las matemáticas. Empleando cartulinas o materiales como la goma eva de colores obtendremos un vistoso efecto decorativo.

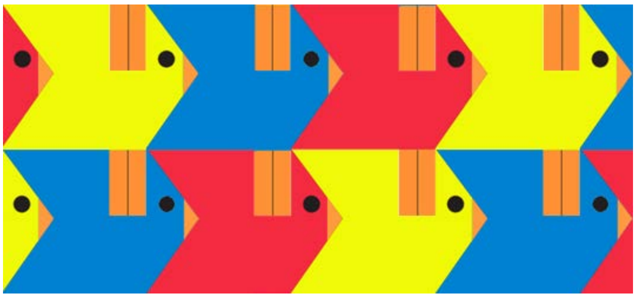
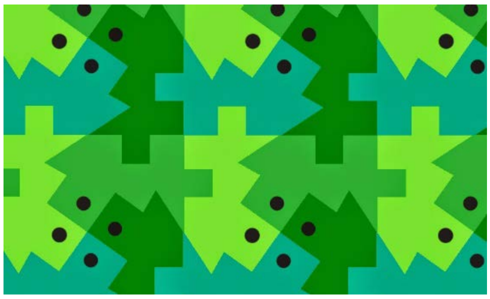
Curso: 3º ESO.

Edad: 14 – 15 años.

Currículo: bloque de Geometría: Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías.

Nivel de la actividad: Bajo nivel de demanda cognitiva: fase de reproducción de problemas, pero que se puede llegar hasta una fase de modelado, ya que una vez asimilado el proceso, la creación de nuevas formas para teselar el plano es muy sencilla. La combinación de geometría y arte contribuye, entre otras, a la competencia básica de conciencia y expresiones culturales.

Dibujos a colocar: [22]

Explicación verbal:

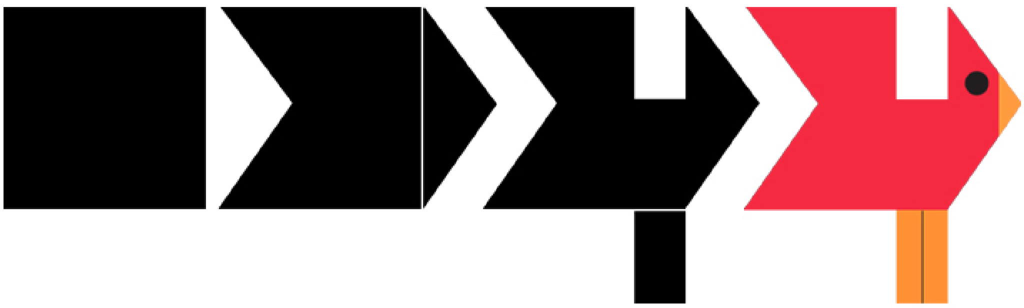
Teselar el plano, en $\mathbb{R}^2$, es cubrirlo completamente sin dejar huecos ni superponer piezas. Emplearemos teselas irregulares en las que emplearemos uno o varios movimientos en el plano. Describiendo cuatro movimientos en el plano, se define la traslación como un movimiento directo sin puntos fijos en el que se conserva la orientación; la reflexión como un movimiento inverso en el que se cambia la orientación con una recta de puntos fijos, una simetría; la rotación o giro es un movimiento directo con un punto fijo, el centro del giro, y un ángulo de giro; y por último la simetría deslizante es un movimiento inverso sin puntos fijos en el que primero se hace la simetría y a continuación la traslación o viceversa, puesto que el resultado final es el mismo.

Explicación de la actividad:

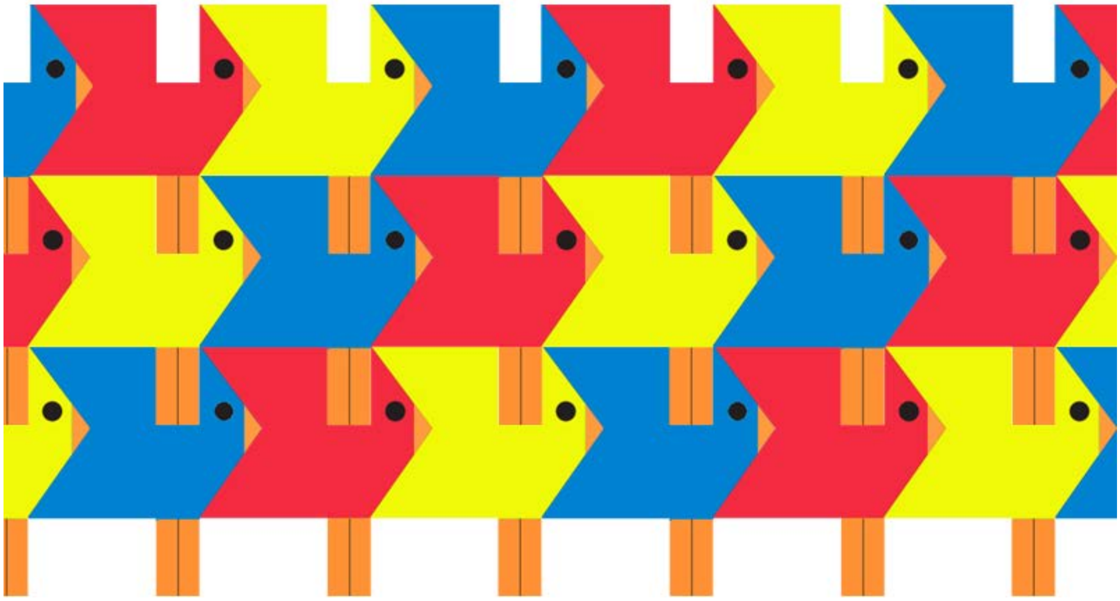
Emplearemos dos teselaciones con movimientos distintos.

Por traslación o deslizamiento: tomando un cuadrado, como figura plana inicial, la realizamos un corte con forma de triángulo isósceles en su lado izquierdo y lo deslizamos horizontalmente hasta el lado derecho. Se puede comprobar que se conserva la orientación de todos sus puntos por tratarse de un movimiento de traslación. Seguidamente recortamos un pequeño rectángulo en la parte superior y lo trasladamos verticalmente a su parte inferior.

Cuadrado inicial → corte + traslación horizontal → corte + traslación vertical → tesela irregular

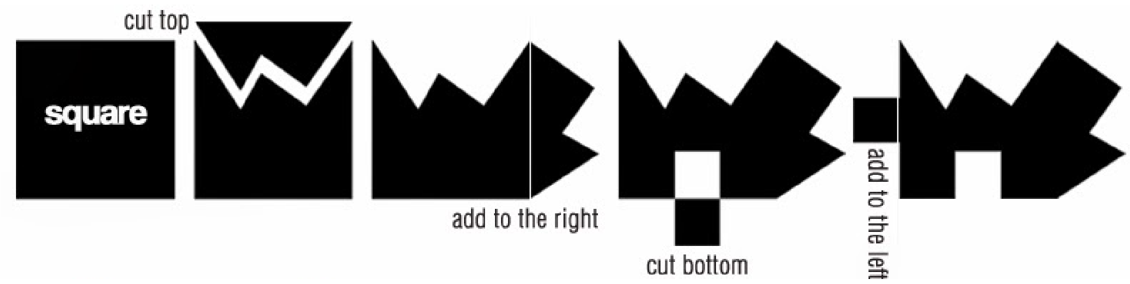


Mosaico resultante simulando una imagen de peces que rellenan el plano, lo teselan por medio de traslaciones en dos direcciones distintas, una vertical y otra horizontal [22]

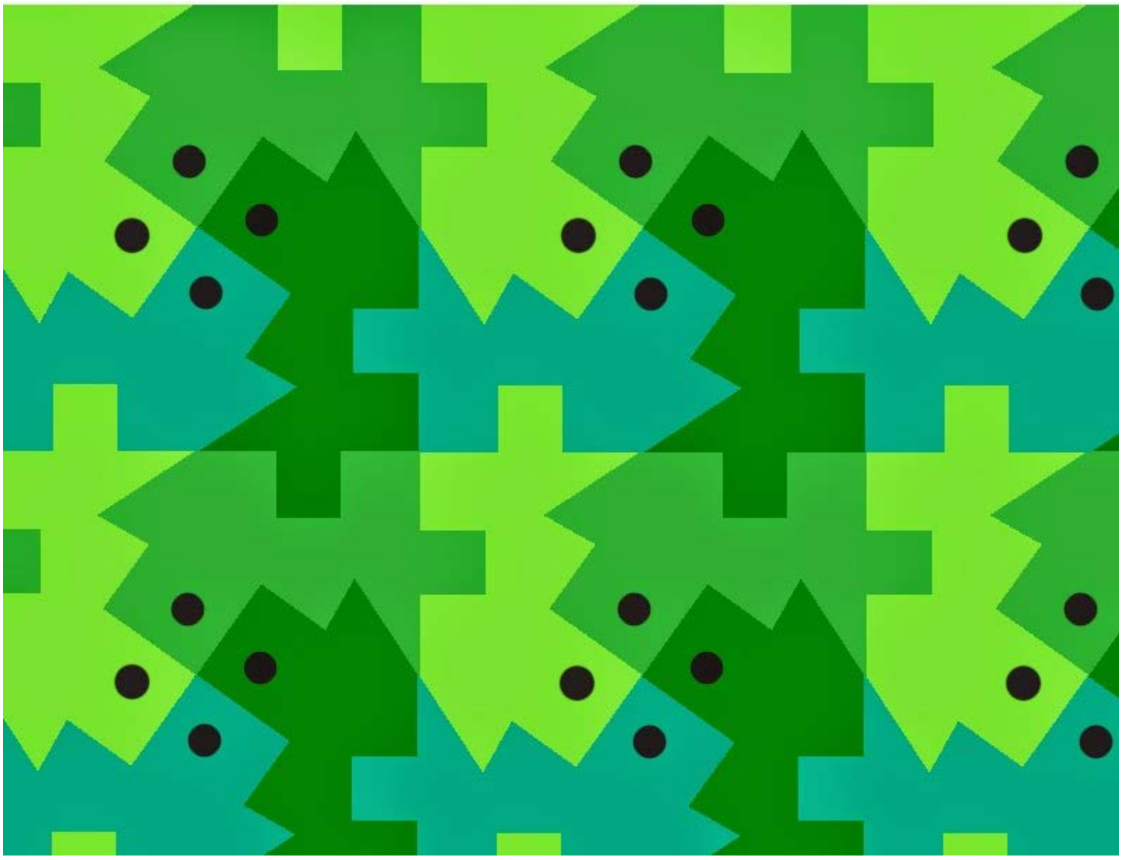


En éste segundo caso de teselación irregular, y tomando también como base un cuadrado, realizamos un corte en la parte superior del mismo y aplicamos un movimiento de rotación con un ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ y tomando como centro de giro el vértice superior derecho del cuadrado, produciéndose un movimiento directo. A continuación hacemos un corte de un pequeño cuadrado en la parte inferior, lo deslizaremos verticalmente hacia abajo y efectuaremos un giro con un ángulo $\theta = -\frac{\pi}{2}$ y con centro de giro el vertice inferior izquierdo del cuadrado inicial.

Cuadrado inicial	→	corte + giro $\theta = \frac{\pi}{2}$	→	corte + traslación + giro $\theta = -\frac{\pi}{2}$	→	tesela irregular



Mosaico resultante simulando una imagen de cocodrilos que completan el plano mediante el empleo de la rotación [[22]]



4.5.4. Actividad 14: Seccionando el cono

Objetivo: emplear una simple cartulina, en la que dependiendo del corte que se realice, se obtendrán distintas secciones cónicas, sus propiedades, cómo se construyen, su uso y la relación que tienen con el entorno.

Curso: 1º Bachillerato.

Edad: 16 – 17 años.

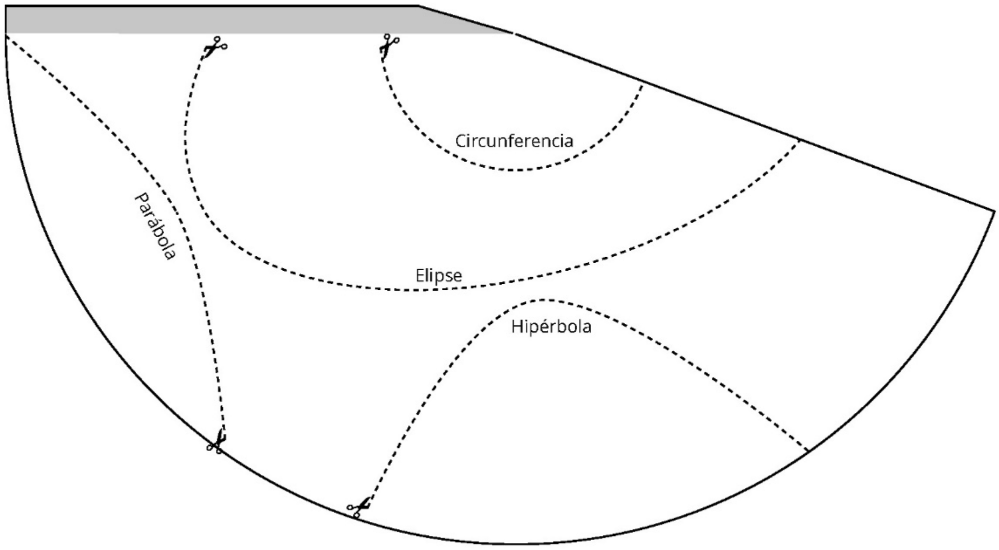
Currículo: bloque de Geometría: Cónicas.

Nivel de la actividad: Bajo nivel de demanda cognitiva: fase de reproducción de problemas, se aumentará el nivel cuando interpreten los distintos cortes que se hacen sobre el cono.

Texto a exponer:

Un cono seccionado

Plantilla a repartir:

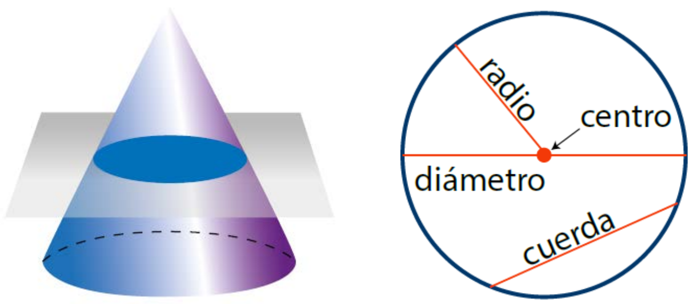


[23]

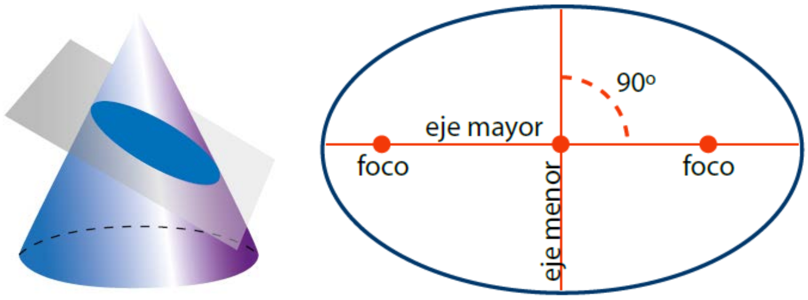
Explicación verbal:

Apolonio, matemático griego de los siglos III y II a.C., realizó un estudio formal sobre las curvas generadas al cortar un cono con un plano, definiendo las *secciones cónicas*: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola [24]. Las *secciones cónicas* son curvas que se obtienen al cortar un cono con planos de distinta inclinación.

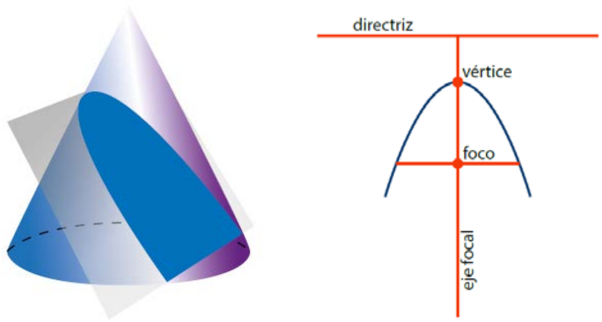
La *circunferencia* es la curva que se obtiene al cortar un cono recto con un plano paralelo a la base, como por ejemplo la silueta de una rueda. Los elementos singulares de una circunferencia son el centro, el radio, el diámetro y la cuerda. [23]



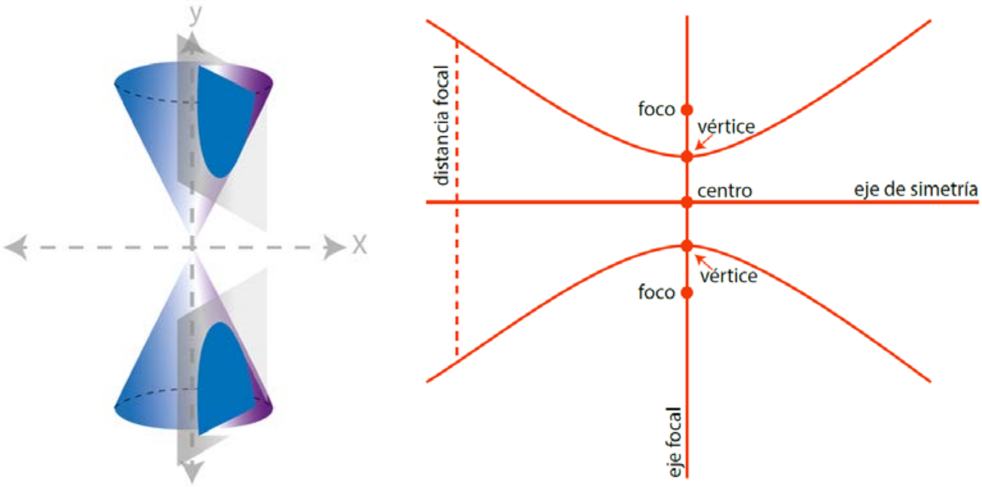
La *elipse* es la curva que se obtiene al cortar un cono recto con un plano inclinado de modo que sea oblicuo con el eje perpendicular a la base y corte a todas las generatrices, como ocurre con la trayectoria, elíptica, que describe la Tierra alrededor del Sol. Algunos de sus elementos singulares son los focos, puntos fijos usados para construir una elipse; la cuerda, como segmento de recta que une dos puntos de la elipse, y tiene un eje mayor, que es la cuerda que pasa por los dos focos, y un eje menor, que es la cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por el punto medio de la distancia focal, siendo esta longitud entre los focos, y el centro, el punto de intersección de los ejes. [23]



La *parábola*, curva que se obtiene si seccionamos un cono recto con un plano inclinado que sea oblicuo con el eje perpendicular a la base y paralelo a una generatriz. Algunos de sus elementos son la directriz, el foco de la parábola, el eje focal, el vértice. [23]



La *hipérbola*, curva que se obtiene al cortar un cono recto con un plano perpendicular a la base y que no pase por el vértice del cono. Enumero algunas partes de la hipérbola como la asíntota, los focos, el eje focal, el eje de simetría, la distancia focal, el vértice. [23]



Explicación matemática:

La *circunferencia*: sea un punto cualquiera $P = (p_1, p_2)$, llamado centro, y una distancia r llamada radio, una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia r de P. Y por lo tanto, sea $M = (x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la circunferencia con centro en (p_1, p_2) y radio r. Por definición, el radio es una constante, por lo que la condición de movimiento de M es

$$MP = \text{constante} = r$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, tenemos

$$MP = \sqrt{(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2}$$

Por lo tanto

$$r = \sqrt{(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2}$$

Es decir:

$$r^2 = (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2$$

A ésta expresión se la conoce como la ecuación canónica o ecuación reducida.

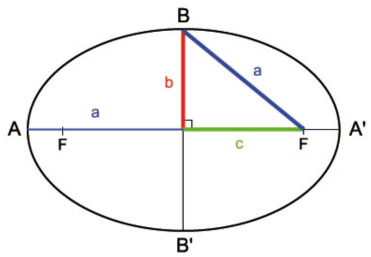
La *elipse*: dados dos números positivos a y b tenemos una elipse (centrada en el origen) como el lugar geométrico dado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si dados dos números positivos a y b, y un punto (x_0, y_0) llamado centro, una elipse es el lugar geométrico dado por la ecuación, canónica o ecuación reducida:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

La distancia focal de una elipse es igual a 2c, donde c es la distancia entre el centro de la elipse y uno de sus focos,



[25]

y la excentricidad e se obtiene del cociente

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

La excentricidad siempre toma valores entre cero y uno de modo que cuanto menor sea la excentricidad, sin llegar a cero, más se aproxima la elipse a una circunferencia, y cuanto mayor sea la excentricidad, sin llegar a uno, más ovalada se vuelve.

La *parábola*: dado un número p positivo o negativo, pero no nulo, una parábola (vertical, con vértice en el origen) es el lugar geométrico dado por la ecuación

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

Si dado un número p positivo o negativo, pero no nulo, y un punto (x_0, y_0) llamado vértice, una parábola (vertical) es el lugar geométrico dado por la ecuación, canónica o ecuación reducida:

$$y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{2p}$$

La *hipérbola*: dados dos números positivos a y b una hipérbola (centrada en el origen) es el lugar geométrico dado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si dados dos números positivos a y b, y un punto (x_0, y_0) llamado centro, una hipérbola (horizontal) es el lugar geométrico dado por la ecuación, canónica o ecuación reducida:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

5. CONCLUSIONES

5.1. Conclusiones

Con las actividades planteadas en este TFM se consigue la incorporación de parte de los contenidos del currículo de ESO y Bachillerato por medio de la modelización, investigación y resolución de diferentes cuestiones que se pueden plantear y reproducir, tanto en el aula, como en el pasillo de un colegio, o como en la sala de cualquier museo.

Debido al carácter manipulativo que tienen todas las actividades propuestas, se ha pensado en materiales cotidianos y de bajo coste, ya que todas se pueden ejecutar con cartón, goma eva, etc, de modo que el deterioro o rotura de cualquiera de los objetos no suponga la eliminación de la actividad por el elevado coste que supondría de la reposición de cualquiera de los elementos, con excepción de las actividades de Tales y Pitágoras, cuya ejecución se propone a gran escala, aunque sigue siendo posible una reproducción a una escala mucho más reducida sin que disminuya el contenido educativo que se pretende abordar.

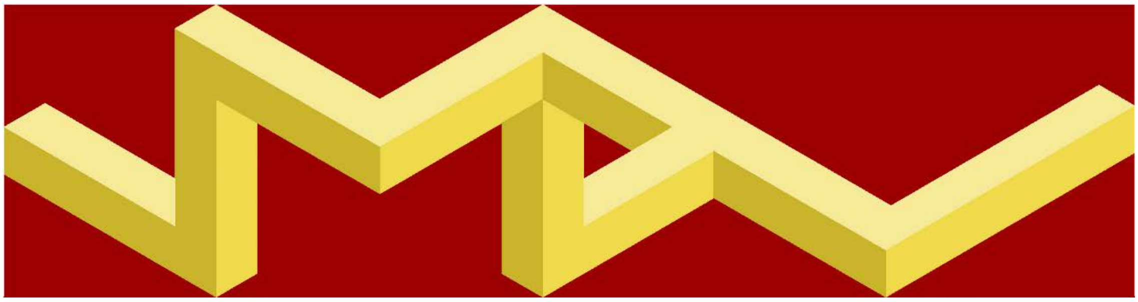
En nuestro país debe hacerse un mayor esfuerzo que permita incluir más exposiciones de divulgación matemática, bien sea en colegios como en museos, y como no, no sólo teniendo en cuenta al público infantil, si no que se debe aspirar a un aumento de los contenidos de ESO y Bachillerato, para que nuestros alumnos perciban mejor la gran importancia y la belleza que poseen las matemáticas.

El efecto que tiene sobre los alumnos cuando se lleva a la práctica cualquier manualidad en las que puedan percibir con sus propios sentidos lo que "cuentan" los libros, hace que los conceptos que se imparten en el aula se afiancen con mayor celeridad. Además, existen razones estéticas o que simplemente atraen curiosidad, al producirse una la observación y la interacción con objetos que han creado ellos mismos y que conseguirán estimular al alumno en el campo de las matemáticas.

5.2. Futuras líneas de estudio/exposición

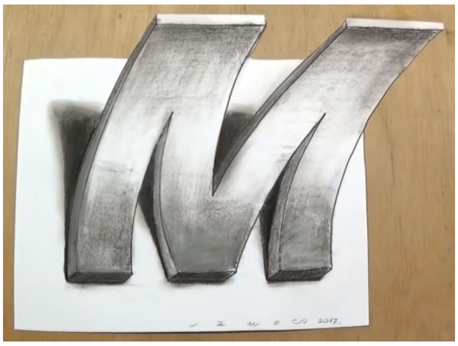
No por el mero hecho de entregar éste TFM finaliza mi investigación sobre posibles actividades manipulativas que fomenten las matemáticas, y es por ello que planteo las siguientes actividades a desarrollar en un futuro.

Recorridos imposibles: haciendo un símil a M. C. Escher, hacer una búsqueda de imágenes que nuestro cerebro interpreta de forma distinta, simplemente por la modificación del punto de vista. Muestro a continuación un diseño que hice años atrás y que acabó siendo la imagen profesional de mi tarjeta de visita



Corresponden a las iniciales de mi nombre JMDV.

Anamorfismos: el efecto óptico que se produce al hacer una deformación de una imagen producida por un procedimiento matemático que hace que el efecto de la perspectiva fuerce a que observador se encuentre en un punto de vista calculado para que perciba una imagen proporcionada y clara.


[[26]]

Fórmula de Herón: fórmula que permite calcular el área de un triángulo con solo saber la longitud de sus lados, actividad que puede completar al bloque de geometría de 2ºESO/3ºESO. Para ello, siendo a, b, c los lados conocidos de un triángulo cualquiera, calcula el perímetro del triángulo (P)

$$P = a + b + c$$

Después obtiene el semiperímetro (p)

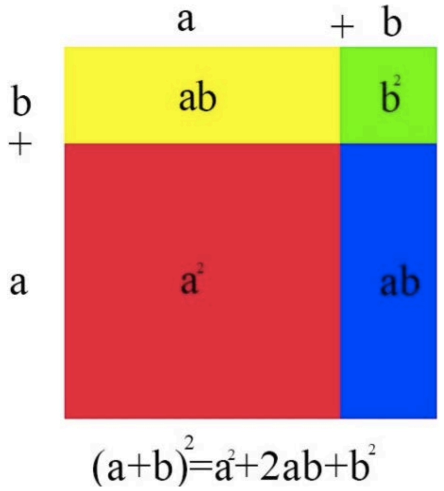
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Y por último, aplicamos la *fórmula de Herón* para calcular el área de un triángulo (A)

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

El cuadrado de un binomio: el cuadrado de una suma de un binomio y el cuadrado de una resta de un binomio son dos identidades notables que aparecen en el currículo de 2º de ESO en el bloque de Números y Álgebra, dentro del apartado de las *expresiones algebraicas*. Expresiones que pueden demostrarse de una forma visual por medio de la interpretación gráfica. [27]

Imagen barandilla de la Plaza del Poniente de Valladolid.



6. BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía:

ARIAS CABEZAS, J. Mª. & MAZA SÁEZ, I. (2008). «Aritmética y Álgebra». En Carmona Rodríguez, Manuel; Díaz Fernández, Francisco Javier. Matemáticas 1. Madrid: Grupo Editorial Bruño, Sociedad Limitada. p. 14. ISBN 9788421659854.

BLANCO MARTÍN, Mª. F. (mayo, 2019). Modelos de Movimientos en La Alhambra. *Asignatura de Modelos matemáticos en educación secundaria*. Máter Universitario de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. Valladolid: Universidad de Valladolid.

GARGALLO LÓPEZ, B. (2000). *Estrategias de aprendizaje. Un programa de intervención para ESO y EPA*. (Investigación educativa). Centro de Investigación y Documentación Educativa (C.I.D.E.). Madrid.

GHYKA, M. (1978). *El número de oro*. Barcelona: Editorial Poseidón.

GHYKA, M. (1979). *Estética de las proporciones en la naturaleza y las artes*. Barcelona: Editorial Poseidón. Recuperado de: https://catedrapernautfadu.files.wordpress.com/2017/04/ghyka-matila-estetica-de-las-proporciones.pdf

HEMENWAY, P. (2005). *Divine Proportion: Phi in Art, Nature and Science*. Editorial: Sterling.

LE CORBUSIER. (1980). *El modulor y modulor 2*. Buenos Aires: Editorial Poseidón.

LE CORBUSIER. (1980). *Mensaje a los estudiantes de arquitectura*. Buenos Aires: Editorial Infinito.

LIVIO, M. (2006). *La proporción áurea*. Madrid: Ariel-Grupo Planeta.

MANDELBROT, B. (1997) *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets Editores.

MARTÍN TOMÁS, B. (Junio 2017). *Aplicación de métodos de enseñanza a una programación didáctica 4º E.S.O. matemáticas orientadas a enseñanzas académicas.* (Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.) Valladolid: Universidad de Valladolid.

MONEREO, C. (1993). *Las estrategias de aprendizaje. Procesos, contenidos e* interacción. Barcelona: Domènech Ediciones.

POBLACIÓN SÁEZ, A. J. (2006). *Las Matemáticas en el Cine*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones y RSME.

SANZ DIEZ, F. (Curso 2008/09). *Seminario de Diseño Curricular, Orientación y Tutoría en la Educación Secundaria.* (Curso de aptitud pedagógica.) Valladolid: Universidad de Valladolid.

OCDE (2012). PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de alumnos. Informe español. Volumen I: resultados y contexto. Disponible en, https://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012lineavolumeni.pdf?documentId=0901e72b81786310

TURRADO LÓPEZ, A.M. & LÓPEZ AGUILAR, E. & BERNABEU MORÓN, N. (2013). *Reflexión sobre las competencias básicas y su relación con el currículo*. Secretaría General Técnica. Centro de Publicaciones. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Centro de Investigación y Documentación Educativa (C.I.D.E.). Madrid.

Artículos:

ARTEAGA, B. (2016, 17 de noviembre). Una visita a los museos de las matemáticas. *UnirRevista. FUNDACIÓN UNIR UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA.* (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de https://www.unir.net/educacion/revista/noticias/una-visita-a-los-museos-de-las-matematicas/549201568697/

AYUSO SANTAMARÍA, J. (2019, 20 de mayo). *Las matemáticas salen a la calle.* Periódico: *Diario de Valladolid.* (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de http://www.diariodevalladolid.es/noticias/valladolid/matematicas-salen-calle_152565.html

CALVO, M. (2005). La divulgación de las Matemáticas. Revista *Matematicalia* (Nº2).

CASANS & DE ARTEAGA, A. (2010, 26 de abril). El número de oro. *Blog de la Biblioteca de Matemáticas, UCM*. (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de https://webs.ucm.es/BUCM/blogs//InfoMat/1628.php

FANCELLI, A. (2006, 18 de abril). Jorge Wagensberg vuelve al aforismo con el libro 'A más cómo, menos por qué'. *El Pais-Cultura*. (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de https://elpais.com/diario/2006/04/18/cultura/1145311204_850215.html

PÉREZ VEGA, A. (2018, 27 de septiembre). El Museo de la Ciencia presenta 'Malditas matemáticas... ¿o no?'. *El Norte de Castilla.* (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de https://www.elnortedecastilla.es/culturas/museo-ciencia-presenta-20180927182602-nt.html

VILLANUEVA, M.J. (2019, 04 de junio). El primer museo de las Matemáticas de Aragón se abrirá en el monasterio de Casbas. ...Solo existen cinco centros de estas características en Europa. *Heraldo*. (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de https://www.heraldo.es/noticias/aragon/huesca/2019/06/04/el-primer-museo-de-las-matematicas-de-aragon-se-abrira-en-el-monasterio-de-casbas-1318515.html?fbclid=IwAR3KiXOyel2rWA3TznJkAxjsDlxsfDJUSS0PQB64FQg2rWmHKnxPUCJEcdg#

Webgrafía:

El hipertexto del caos, Matemáticas en la era de la computadora. (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de http://hypertextbook.com/chaos/

Fuentes documentales de "Planes de Atención a la Diversidad", aprobados por la Junta de Castilla y León. (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de http://www.educa.jcyl.es/es/temas/atencion-diversidad/planes-atencion-diversidad

Libros de matemáticas de ESO y Bachillerato, de LibrosMareaVerde.tk. (Consultada por última vez el 05/07/2019). Recuperado de www.apuntesmareaverde.org.es.

SCPM Isaac Newton. Casa-Museo de la Matemática Educativa, promueve la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas y que cuenta con la colaboración de la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias y del Ayuntamiento de La Laguna. (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de http://www.sinewton.org/web/index.php/actividades-mainmenu-28/casa-museo

Taller-Museo de las Matemáticas π-ensa. (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de https://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas/

UNIVERSUM. Museo de las Ciencias de la UNAM. (Universidad Nacional Autónoma de México). (Consultada por última vez el 05/06/2019). Recuperado de http://www.universum.unam.mx/

Normativa consultada:

REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Revisión vigente desde 04 de junio de 2017.

ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y la evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria y el Bachillerato. (BOE 29-01-2015).

LEY ORGÁNICA 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Revisión vigente desde 11 de diciembre de 2016.

Referencias de Notas al pie:

[1] Arias Cabezas, José María; Maza Sáez, Ildefonso (2008). «Aritmética y Álgebra». En Carmona Rodríguez, Manuel; Díaz Fernández, Francisco Javier. Matemáticas 1. Madrid: Grupo Editorial Bruño, Sociedad Limitada. p. 14. ISBN 9788421659854.

[2] Imagen tomada de la sala '*Malditas Matemáticas… ¿o no?*' del *Museo de la Ciencia de Valladolid*.

[3] Imagen extraída de *apuntesmareaverde* (Consultada por última vez el 01/07/2019) http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/BC2%2010%20Integrales.pdf

[4] Imagen extraída de *Wikipedia* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Monty_hall_solution_expanded_second_version.png

[5] Imágenes extraídas de *El Aula Taller-Museo de las Matemáticas π-ensa* (Consultada por última vez el 07/07/2019) https://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas/

[6] http://www.sinewton.org/web/index.php/actividades-mainmenu-28/casa-museo

[7] Imagen extraída del *blog Demotivation* (Consultada por última vez el 01/07/2019) http://www.demotivation.us/newest/students/trust-me-1273496.html

[8] Imagen extraída del *blog Gaussianos* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://www.gaussianos.com/jerarquia-de-las-operaciones-y-el-sindrome-del-parentesis-invisible/

[9] Imagen extraída del *blog Neerman* (Consultada por última vez el 01/07/2019) http://www.neermanfernand.com/corbu.html

[10] Imagen extraída de *Wikipedia* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Tales

[11] Texto extraído de *Wikipedia* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://es.m.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras

[12] Imagen extraída de la *página oficial del Real Valladolid* (Consultada por última vez el 01/07/2019) http://www.realvalladolid.es/

[13] Imagen extraída del *blog juanicerme* (Consultada por última vez el 01/07/2019) http://juanicerme.blogspot.com/2016/12/funciones-cuadraticas.html

[14] Imagen extraída de la *página oficial del Club Natación Madrid Moscardó* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://www.clubnatacionmadrid.es/Noticias/1028-NO-LO-DEJES-ESCAPAR-Y-APUNTATE-A-LOS-CURSOS-DE-VERANO-2019

[15] Imágenes extraídas de *La web del «un, dos, tres...»* (Consultada por última vez el 01/07/2019) http://undostresweb.16mb.com/ruperta.html

[16] Imagen extraída de *Wikipedia* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo

[17] Imágenes extraídas del *blog Matemática Entre todos* (Consultado por última vez el 01/07/2019) http://matematica-entretodos.blogspot.com/

[18] Se puede ver el fragmento de la película *Jungla de cristal 3: la venganza* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://vimeo.com/85018261

[19] Imágenes extraídas de *El cuadrado mágico* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://www.elcuadradomagico.es/inicio/126-libro-de-espejos-10x10-cm.html

[20] Imagen extraída de *publicinsta de matesbyshey* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://publicinsta.com/media/BySXBR4ibfc

[21] Imagen extraída del *flickr de Arturo Mandly Manso* (Consultado por última vez el 01/07/2019) https://www.flickr.com/photos/arturomandly/6014735119/

[22] Imágenes extraídas del *blog E is for explore* (Consultado por última vez el 01/07/2019) https://2.bp.blogspot.com/-RtNBVaCyhVQ/WZH8_jggpdI/AAAAAAAAVDw/fk_-I1BH2joENuDvFCDi5gL48mH1oRqUgCLcBGAs/s1600/rotation-tessellation.jpg

[23] Imágenes extraídas de los recursos educativos facilitados en la *página del Museo de las Ciencias de la UNAM* (Consultado por última vez el 01/07/2019) http://www.universum.unam.mx/

[24] Apolonio de Pérgamo. VER EECKE, P. (1923). *Les coniques.* Bruges: Desclée de Brouwer. (Consultado por última vez el 01/07/2019) http://simurg.bibliotecas.csic.es/viewer/image/CSIC000061965/1/

[25] Imagen extraída de *Wikipedia* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://es.wikipedia.org/wiki/Elipse#/media/Archivo:Elipse1.0.jpg

[26] Imagen extraída del video *How to Draw 3D Letter M* (Consultada por última vez el 01/07/2019) https://www.youtube.com/watch?v=07il8wZR1Tk

[27] Imagen extraída del *blog YOSOYTUPROFE* (Consultado por última vez el 01/07/2019) https://yosoytuprofe.20minutos.es/2016/01/07/identidades-notables-cuadrado-de-un-binomio/