

TESIS DOCTORAL

ESTUDIO ANALÍTICO-GRÁFICO

DE LAS

CORRIENTES ALTERNATIVAS

SIMPLES Y POLIFÁSICAS

POR

D. Juan Marco y Montón

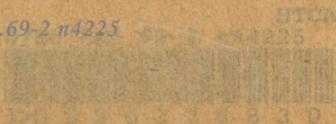


ZARAGOZA

Imprenta de la Viuda de Ariño, Coso, 100
1903.

UVA. BHSC. LEG. 69-2 n4225

4225-leg 69 P. 2^a



Reg. no. 351.

ESTUDIO ANALITICO-GRATICO

ESTUDIO ANALITICO-GRATICO

DE LAS

CORRIENTES ALTERNATIVAS

SIMPLES Y POLIFASICAS

por

D. Juan García y Rodríguez



IMPRESION

Imprenta de la Universidad de Alcala de Henares

1908

CVA. BNSC. LEG. 69-2 44225

ESTUDIO ANALÍTICO-GRÁFICO
DE LAS
CORRIENTES ALTERNATIVAS SIMPLES Y POLIFÁSICAS.



UVA. BHSC. LEG. 69-2 n°4225

HTCA

U/Bc LEG 69-2 n°4225



1>0 0 0 0 2 2 8 8 3 0

ESTUO ANALITICO

OPORTUNIDADES ALTERNATIVAS SIMPLES Y RÁPIDAS

UVA. BHSC. LEG.69-2 n4225

TESIS DOCTORAL.

ESTUDIO ANALÍTICO-GRÁFICO

DE LAS

CORRIENTES ALTERNATIVAS

SIMPLES Y POLIFÁSICAS

POR

D. Juan Marco y Montón.



ZARAGOZA.

Imprenta de la Viuda de Ariño, Coso, 100.

1903.

UVA. BHSC. LEG.69-2 n4225

TESIS DOCTORAL

ESTUDIO ANALÍTICO-GRÁFICO

DE

CORRIENTES ALTERNATIVAS

SIMPLES Y POLIFÁSICAS

DEL

D. Juan Muñoz y González

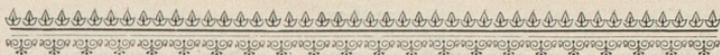


IMPRESA

Imprenta de la Universidad de Sevilla, Sevilla, 1951

(XX)

UVA. BHSC. LEG.69-2 n4225



Señores:

Si el pundonoroso militar descansa de todas las penalidades de la guerra cuando la patria reconocida ciñe con coronas sus sienas victoriosas; y si el apurado marino se olvida de todas las fatigas y riesgos que corrió en la mar en días de borrasca cuando halla el deseado puerto salvador, también siente dilatarse el corazón y experimenta una satisfacción inmensa el que ha seguido una carrera, en la cual hay, sin duda, combates que sostener y riesgos que correr, cuando las ciencias le conceden un asiento respetable en su templo y ennoblecen su cabeza colocando sobre ella la borla de Doctor.

Pero, imponiendo el vigente reglamento de enseñanza á los que aspiran á la honra insigne del Doctorado, el deber ineludible de pronunciar una oración académica sobre un punto, elegido libremente en el ancho y rico campo de la ciencia, incúmbeme, señores, cumplir este deber.

No ha sido, ciertamente, la menor dificultad con que he tenido que luchar, la de elegir el tema á que había de consagrar mi última tarea escolar. *El estudio analítico-gráfico de las corrientes alternas simples y polifásicas*, por el que sentí predilección, tiene para mí la ventaja de que, perteneciendo á las ciencias físicas, reclama constantemente el auxilio de las exactas.

Mas no creais, señores, que satisfecho de mí mismo, y confiado en mis escasas fuerzas, me arroje yo á la arena lleno de esperanzas. Porque, si siempre he procurado ser juez severo é imparcial de mis merecimientos, nunca me han parecido tan escasos como en estos solemnes momentos. Entro pues en materia confiado en vuestra indulgencia, en aquella

indulgencia que acompaña siempre el saber, y que es hija de la ilustración verdadera.

PLAN

Para el mejor desarrollo de la tesis propuesta, he creído conveniente dividir este trabajo en tres partes:

La primera tratará del estudio analítico de las corrientes alternativas simples.

La segunda se ocupará del estudio gráfico de las mismas.

La tercera abarcará simultáneamente el estudio analítico y gráfico de las corrientes polifásicas.



PRIMERA PARTE

Estudio analítico de las corrientes alternativas simples.

a). GENERALIDADES

1). Consideremos un cuadro formado por una ó varias espiras, por una circular para mayor simplicidad, girando con movimiento uniforme alrededor de uno de sus diámetros, en un campo también uniforme, y vamos á ver, que la corriente que este circuito recorra debida á los fenómenos de inducción, es de naturaleza tal, que cambia el sentido de su circulación, es decir, que es alterna ó alternativa.

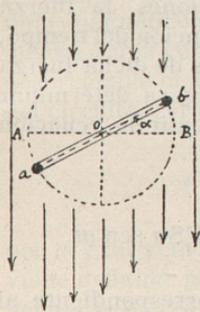


Fig. 1.

Sean (Fig. 1), ab la proyección del circuito en una posición que forma un ángulo α con la posición horizontal AB ; O la proyección del eje de rotación, y supongamos que las líneas de fuerza del campo tengan la dirección que indican las flechas y que el movimiento se verifique en sentido contrario de las agujas de un reloj. Si $\frac{d\alpha}{dt} = a$ es la velocidad angular supuesta constante, el ángulo descrito al cabo de un tiempo t contado desde la posición AB será $\alpha = at$ y el flujo magnético que pase por el circuito en dicha posición, procedente del campo en que está colocado, será el mismo que el que pasa por su proyección AB , es decir,

$$N = S F \cos \alpha$$

siendo S la superficie del circuito, N el flujo magnético que

lo atraviesa y F la intensidad del campo magnético en que el circuito se mueve.

Durante el tiempo dt que sigue á t , el circuito habrá descrito un ángulo infinitamente pequeño $d\alpha$, y el flujo que antes era N habrá disminuido en una cantidad dN , y por causa de esta variación de flujo, se habrá producido una fuerza electromotriz de inducción, cuyo valor será dado por las expresiones:

$$E = - \frac{dN}{dt} = F S a \operatorname{sen} at = F S a \operatorname{sen} \alpha = F S \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

ó bien por las

$$E = F S a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \cdot t = F S a \operatorname{sen} 2\pi nt.$$

en las cuales T representa el período de la corriente, es decir, la duración de una revolución completa de la espira ó circuito, y n la *frecuencia* ó sea el número de períodos por segundo.

Como se ve por las anteriores expresiones, la fuerza electromotriz de inducción viene dada en función del tiempo, y, por tanto, para conocer las variaciones de dicha fuerza electromotriz con las del tiempo, es decir, para determinar la naturaleza de la misma, convendrá discutir la ecuación que la representa.

2). *Discusión de la ecuación; E = F S a sen at.*

Empezaremos por el valor $at = 0$, correspondiente al tiempo cero.

Para este valor el seno se anula, y, por tanto, nula será también la fuerza electromotriz.

Si, $\alpha = at = 90^\circ$, que corresponde al tiempo, $t = \frac{T}{4}$, el valor de la fuerza electromotriz, será designándolo por E_0 .

$$E_0 = F S a.$$

Si $\alpha = at = 180^\circ$, correspondiente á $t = \frac{T}{2}$, el valor de E se reduce otra vez á cero.

Si $\alpha = at = 270^\circ$, ángulo que formará el circuito al cabo del tiempo $t = \frac{3T}{4}$, el valor de E, será,

$$E_0 = -FSa$$

y por último, volverá á anularse para el valor $\alpha = 360^\circ$.

Como se observa por lo dicho anteriormente, esta fuerza electromotriz va tomando valores positivos y crecientes á partir de cero, hasta llegar al valor máximo positivo $E_0 = FSa$; disminuye después hasta llegar á anularse al cabo de un semi-período, y, á partir de este tiempo, vuelve á tomar valores crecientes, pero negativos, hasta llegar á un valor máximo, igual en valor absoluto, pero de signo contrario al que tomó al cabo del tiempo $t = \frac{T}{4}$, volviendo segunda vez á anularse al finalizar el período.

Esta fuerza electromotriz producida por la variación del flujo magnético cortado por el circuito, dará origen en el mismo á una corriente de inducción, cuyo valor, suponiendo despreciable la auto-inducción, y llamando R la resistencia del circuito, será dado por la expresión

$$i = \frac{FSa \operatorname{sen} at}{R} = \frac{E_0 \operatorname{sen} at}{R}$$

por la cual vemos, que la intensidad de la corriente inducida viene definida por una función en todo semejante á la que definía la fuerza electromotriz de inducción, y que tendrá, por tanto, como aquélla, valores máximos, nulos y cambios de signo, cambios que se traducirán por inversión en el sentido de circulación de la corriente, la cual será, por lo tanto, alternativa.

b). ESTUDIO DE ALGUNAS CANTIDADES QUE INTERESA CONOCER EN TODA CORRIENTE ALTERNATIVA.

1). *Intensidad y fuerza electromotriz medias.*

Si designamos por q la cantidad de electricidad que atraviesa el circuito durante un semi-período, esta cantidad tendrá por valor, el dado por la expresión

$$q = \int_0^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{E_0}{R} \int_0^{\pi} \text{sen } at \cdot dt = \frac{E_0}{R} \cdot \frac{2}{a}.$$

Si dividimos, pues, esta total cantidad por el tiempo $\frac{T}{2}$, tendremos la corriente media, que será, designándola por i_m ;

$$i_m = \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} i dt}{\frac{T}{2}} = \frac{q}{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{E_0}{R} = \frac{2}{\pi} \cdot I = 0,64 \cdot I \text{ próximamente.}$$

Por la expresión anterior vemos que la corriente media es próximamente las 64 centésimas de la máxima.

De un modo análogo se hallaría la fuerza electromotriz media, que designándola por e_m nos daría

$$e_m = \frac{2}{\pi} E_0 = 0,64 \cdot E_0.$$

2). *Potencia media en circuito sin auto-inducción.*

Consideremos un circuito de resistencia R desprovisto de auto-inducción, en el cual exista una tensión alternativa.

$$e = E_0 \text{ sen } at.$$

Este circuito será recorrido por una corriente alterna

$$i = \frac{E_0}{R} \text{ sen } at.$$

La potencia de la corriente será

$$p = \int e i dt = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{E_0^2}{R} \text{ sen}^2 at dt.$$

Para obtener pues la potencia media, bastará dividir el valor p , por el tiempo $\frac{T}{2}$ correspondiente al semi-período.

Se tendrá para valor de dicha potencia, designándolo por p_m , el siguiente

$$p_m = \frac{\frac{E_0^2}{R} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \text{ sen}^2 at dt}{\frac{\pi}{a}} = \frac{E_0^2 a}{R \pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \text{ sen}^2 at dt.$$

Integrando por partes la expresión del segundo miembro, se tiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} \text{ sen}^2 at dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\cos at \text{ sen } at}{2a} \right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{\pi}{2a}$$

luego,

$$p_m = \frac{E_0^2 \cdot a}{R \pi} \cdot \frac{\pi}{2a} = \frac{E_0^2}{2R}$$

ó, puesto que

$$E_0 = R I$$

se tendrán para la potencia media las expresiones

$$p_m = \frac{E_0^2}{2R} = \frac{R I^2}{2} = \frac{E_0 I}{2}.$$

3). *Intensidad y fuerza electromotriz eficaces.*

Si por medio de un galvanómetro intentamos determinar en un momento dado la intensidad de la corriente alterna, nos encontraremos con que la aguja del mismo no marcará desviación alguna, debido á que el cuadro del aparato, al ser atravesado por una corriente alterna, sobre todo si es de corto período, recibe impulsiones iguales y contrarias.

En la imposibilidad de servirse de este instrumento, se ha recurrido á otros fundados en la acción atractiva ó repulsiva de dos corrientes. Mas como la acción atractiva ó repulsiva de dos corrientes iguales es proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente, tendremos que, para hallar la intensidad por los procedimientos que se fundan en esta acción mutua de dos corrientes iguales, habrá que empezar por hallar el cuadrado medio, por ser variable la corriente, y después extraer la raíz cuadrada de dicho cuadrado medio. Esta raíz cuadrada del cuadrado medio ha recibido el nombre de *intensidad eficaz de la corriente alterna*, llamándose así, porque su valor es el que satisface á la ley de Joule.

Definido este factor importantísimo en el estudio de la corriente alterna, vamos á determinar su valor en función de la intensidad máxima.

Se tiene por definición:

$$i_{ef}^2 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{a}} i^2 dt}{\frac{\pi}{a}} = \frac{I^2 \int_0^{\frac{\pi}{a}} \text{sen}^2 at \cdot dt}{\frac{\pi}{a}} = \frac{aI^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \text{sen}^2 at \cdot dt$$

de donde, integrando por partes, se tiene para i_{ef}^2 , la expresión

$$i_{ef}^2 = \frac{a I^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2 a} = \frac{I^2}{2}$$

siendo, por tanto, la intensidad eficaz

$$i_{ef} = \frac{I}{\sqrt{2}} = 0,71. I \text{ próximamente.}$$

Análogamente hallaríamos para e_{ef} el valor

$$e_{ef} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 0,71. E_0.$$

Si en la expresión que nos da el valor de i_{ef} , ponemos en vez de I su valor, se tiene,

$$i_{ef} = \frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{2}} = \frac{e_{ef}}{R}$$

expresión que nos dice que la intensidad eficaz viene dada por la relación de la fuerza electromotriz eficaz á la resistencia.

En el número anterior, al tratar de la potencia media, obtuvimos para valor de la misma,

$$p_m = \frac{E_0 I}{2} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I}{\sqrt{2}}$$

expresión que, teniendo en cuenta las anteriormente halladas, se transforma en

$$p_m = i_{ef} \cdot e_{ef}$$

que nos dice que la potencia media en un circuito sin auto-inducción es igual al producto de la intensidad eficaz, por la fuerza electromotriz eficaz.

Fuerza electromotriz senoidal en un circuito con resistencia y auto-inducción.

El caso que bajo el epígrafe «generalidades» tratamos

anteriormente, no puede presentarse en la práctica, puesto que, tanto el generador, como los aparatos de utilización, etc., poseen un cierto coeficiente de auto-inducción, y por tanto, además del flujo procedente del campo ajeno al circuito que se mueve en él, será atravesado dicho circuito por el flujo debido á la auto-inducción.

Si pues, N' es el flujo total que atraviesa el circuito en estas condiciones, y L su coeficiente de auto-inducción, se tendrá

$$N' = F. S. \cos at + L i$$

y la fuerza electromotriz producida por la variación de este flujo, será

$$E' = F S a \sin at - L \frac{di}{dt}$$

siendo, por tanto, la corriente que recorra el circuito

$$i = \frac{F. S. a \sin at - L \frac{di}{dt}}{R} = \frac{E_0 \sin at - L \frac{di}{dt}}{R} \quad (\alpha)$$

ecuación que integrada, nos da;

$$(*) \quad i = \frac{E_0}{L \sqrt{a^2 + b^2}} \sin(at - \varphi) \quad (1)$$

siendo φ definido por las relaciones,

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$$

ó bien por las

$$\sin \varphi = \frac{aL}{\sqrt{R^2 + a^2L^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2L^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{aL}{R}$$

(*) La integración de la ecuación (α) la exponemos en una nota al final.

que sólo difieren de las anteriores por haber sustituido en vez de b su valor $\frac{R}{L}$.

Podemos dar á la expresión (1) distintas formas, pues si en vez de a y b sustituimos sus valores, tendremos las expresiones

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + a^2 L}} \operatorname{sen} (at - \varphi) \\ i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{4 \pi^2 L^2}{T^2}}} \operatorname{sen} (at - \varphi) \end{array} \right.$$

y de esta última, por sencillas transformaciones, se saca la

$$i = \frac{E_0 \cos \varphi}{R} \operatorname{sen} (at - \varphi) \quad (2)$$

y observando que el valor máximo de i , es $\frac{E_0 \cos \varphi}{R}$, podremos, designando por I este valor máximo, dar á la expresión de la corriente la forma

$$i = I \operatorname{sen} (at - \varphi)$$

que es como se usa más generalmente.

Si fijamos la atención en el valor máximo que hemos obtenido para i veremos, que dicho valor máximo, que hubiera sido $\frac{E_0}{R}$, si el coeficiente de auto-inducción hubiese sido nulo, es ahora menor por causa de la fuerza electromotriz de auto-inducción, la cual, como lo demuestra claramente el valor obtenido para I , ha producido el efecto de aumentar á la resistencia real, en una cantidad $a L$, que recibe el nombre de *rectancia de auto-inducción*. La rectancia es, como se vé, función de a y de L , y, como á su vez a depende de T , se tendrá que, para corrientes de alta frecuencia, la rectancia será el término predominante de la *resistencia aparente*

ó impedancia del circuito. Si damos á la resistencia aparente ó impedancia otra forma, poniéndola en función de la constante de tiempo, en cuyo caso viene dada por la expresión

$$R \sqrt{1 + a^2 \tau^2}$$

veremos que la impedancia depende esencialmente de la constante de tiempo, y que, por tanto, puede muy bien no producirse más que un pequeño incremento de la resistencia con un gran coeficiente de auto-inducción, con tal que la resistencia real sea considerable.

Volviendo á considerar el valor máximo de i , nos encontramos en el numerador de la fracción que lo expresa con la cantidad $E_0 \cos \varphi$, la cual recibe el nombre de *fuerza electromotriz efectiva máxima*, que vamos á probar resulta de la combinación de la fuerza electromotriz máxima E_0 y de la reacción de auto-inducción.

En efecto, la fuerza electromotriz de auto-inducción que tiene por valor

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

será, poniendo en vez de $\frac{di}{dt}$, su valor sacado de la expresión (2)

$$e = -L \frac{E_0 \cos \varphi}{R} a \cos (at - \varphi) = -E_0 \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi \cos (at - \varphi)$$

ó bien,

$$e = -E_0 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{còs} (at - \varphi)$$

Ahora bien, la fuerza electromotriz de inducción hemos visto que tiene por valor,

$$E = E_0 \operatorname{sen} at$$

por tanto, la fuerza electromotriz efectiva será, llamándola E' ,

$$E' = E + e = E_0 \operatorname{sen} at - E_0 \operatorname{sen} \varphi \cos (at - \varphi);$$

ó bien, por sencillas transformaciones,

$$E' = E_0 \cos \varphi \operatorname{sen} (at - \varphi),$$

cuyo valor máximo se vé claramente que es $E_0 \cos \varphi$, según se quería probar.

Si comparamos las variaciones que sufre la corriente con el tiempo, con las variaciones análogas de la fuerza electromotriz, veremos que los máximos de aquella no coinciden con los de ésta.

En efecto, si consideramos las expresiones

$$\left\{ \begin{array}{l} E = E_0 \operatorname{sen} at, \\ i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + a^2 L^2}} \operatorname{sen} (at - \varphi), \end{array} \right.$$

que dan el valor de la fuerza electromotriz y de la corriente en un momento dado, notaremos que al valor máximo de la fuerza electromotriz, no corresponde el máximo de la corriente, pues la primera es máxima cuando

$$at = \frac{\pi}{2},$$

al paso que la segunda lo es cuando

$$at = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Como se vé, pues, el máximo de la corriente está retrasado con relación al de la fuerza electromotriz en la cantidad φ , por cuya razón á este ángulo se le llama *ángulo de retardo* de la corriente sobre la fuerza electromotriz.

El tiempo que corresponde al retardo lo deduciremos

facilmente por la proporción

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\varphi}{t'};$$

de donde se deduce para valor del tiempo del retardo

$$t' = \frac{\varphi}{2\pi} T.$$

El valor de la intensidad eficaz en este caso será

$$i_{ef} = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{R^2 + a^2 L^2}}, \quad (3)$$

pero como

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}} = e_{ef},$$

se tiene

$$i_{ef} = \frac{e_{ef}}{\sqrt{R^2 + a^2 L^2}};$$

que nos dice, que la relación de la fuerza electromotriz á la intensidad eficaz, es igual á la impedancia del circuito.

La potencia de la corriente ó trabajo por segundo, medida por el calor equivalente en que puede transformarse, es

$$p = R i_{ef}^2.$$

Poniendo en vez de i_{ef} , su valor dado por la (3), se tiene,

$$p = R \cdot \frac{I^2}{2} = I \cdot \frac{I}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}};$$

ó bien

$$(4) \quad p = \frac{I}{\sqrt{2}} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2 L^2}}.$$

Como el último factor es igual al coseno del ángulo de retardo, se tendrá,

$$p = i e_f \cdot e_{ef} \cdot \cos \varphi;$$

expresión por la cual se vé que la potencia es función del retardo; y como éste depende de la auto-inducción, se deduce que la potencia será variable con la auto-inducción, siendo nula cuando $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Máximo de la potencia.

De la ecuación (4) se deduce, poniendo en vez de I su valor,

$$p = \frac{R E_0^2}{2 (R^2 + a^2 L^2)} = \frac{E_0^2}{2 \left(R + \frac{a^2 L^2}{R} \right)}. \quad (5)$$

El denominador de la última expresión es una suma de dos términos, cuyo producto es constante, y, por tanto, su valor mínimo tendrá lugar, cuando sus dos términos sean iguales, es decir, cuando se verifique la condición,

$$\left(R = a L, \text{ ó bien } \frac{a L}{R} = 1 \right);$$

pero como se verifica que

$$\frac{a L}{R} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ será } \operatorname{tg} \varphi = 1 \text{ ó } \varphi = 45^\circ,$$

la condición de mínimo del denominador, y, por consiguiente, la del máximo de la potencia, será que el retardo valga 45° .

Poniendo esta condición de máximo en la (5), se tendrá, para expresión en la potencia máxima

$$p_{mx} = \frac{E_0^2}{4 R}.$$

Fuerza electromotriz senoidal en un circuito con resistencia, capacidad y sin auto-inducción.

Consideremos un circuito recorrido por una corriente alterna originada por una fuerza electromotriz senoidal tal como la $E = E_0 \text{ sen } at$, y supongamos que el circuito tenga intercalado un condensador de capacidad C , siendo nula la auto-inducción y R la resistencia.

A primera vista parece como si el condensador produjese la ruptura del circuito en el lugar en que se halla intercalado, pero no sucede así, puesto que la electricidad positiva, por ejemplo, que sale del generador, carga positivamente una de las armaduras del condensador, esta armadura ejerce influencia sobre la otra y repele la electricidad positiva, de modo que en las dos partes en que el condensador separa el circuito hay circulación de electricidad positiva. En el momento de invertirse la corriente en el generador, se descarga el condensador y vuelve á ser cargado en sentido contrario.

Si designamos por V la diferencia de potenciales entre las dos armaduras del condensador en un momento cualquiera t , la intensidad de la corriente que recorra el circuito en aquel momento será dada por la expresión

$$i = \frac{E_0 \text{ sen } at - V}{R} \quad (6).$$

Ahora bien, siendo Q la carga del condensador en el momento en que la diferencia de potenciales es V , se tiene la relación muy conocida,

$$Q = C V,$$

que diferenciada da,

$$d Q = C d V;$$

expresión de la carga que ha tomado el condensador en el

tiempo dt , que sigue á t . Pero esta carga en función de i sabemos que es

$$dQ = i dt,$$

luego podremos escribir la relación

$$C \cdot dV = i \cdot dt \quad (7).$$

Si ahora diferenciamos, con relación á t la ecuación (6), tendremos,

$$R \frac{di}{dt} = E_0 a \cos at - \frac{dV}{dt};$$

y de ésta y la (7), se sacará la

$$R \frac{di}{dt} = E_0 a \cos at - \frac{i}{C};$$

ó bien

$$\frac{1}{C} i + R \frac{di}{dt} = E_0 a \cos at;$$

ecuación que integrada nos da la expresión

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{a^2 C^2}}} \operatorname{sen}(at + \varphi_1) \quad (8),$$

siendo φ_1 dado por la relación

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{a C R}.$$

El valor máximo de la corriente será,

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{a^2 C^2}}};$$

siendo el valor eficaz correspondiente,

$$I_{ef} = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{E_0}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{a^2 C^2}}} = \frac{E_{ef}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{a^2 C^2}}} < \frac{E_{ef}}{R}.$$

Como se vé por la expresión (8), la capacidad interpuesta en el circuito ha producido el efecto de sumar á la resistencia real R , la cantidad $\frac{1}{aC}$, que recibe el nombre de *reactancia de capacidad*.

Lo mismo en este caso, que en el tratado anteriormente, se observa, que los máximos de la corriente no coinciden con los de la fuerza electromotriz; pero, así como en aquél la corriente iba en retardo con relación á la fuerza electromotriz, en éste sucede todo lo contrario, como ahora probaremos.

En efecto, la tensión alternativa llega al máximo cuando

$$at = \frac{\pi}{2}, \text{ ó sea, cuando } t = \frac{T}{4}.$$

El máximo de i se verifica cuando

$$at + \varphi_1 = \frac{\pi}{2},$$

ó bien, cuando

$$t = \frac{T}{4} - \frac{T}{2\pi} \varphi_1.$$

Se ve, pues, que el máximo de la corriente se verificará antes que el de la tensión, en una cantidad

$$\frac{\varphi_1}{2\pi} T = \frac{\varphi_1}{a},$$

por cuya razón, al ángulo φ_1 se le llama *ángulo de avance*.

Los efectos de la capacidad son, pues, opuestos á los de la

auto-inducción, desde el punto de vista de la diferencia de fases entre la corriente y la tensión.

Si la capacidad es nula, la corriente se anula.

Si es infinita, la corriente se reduce á la

$$i = \frac{E_0 \operatorname{sen} at}{R},$$

es decir, la misma que si el circuito tiene sólo resistencia.

Si fijamos la atención en la fórmula (8), y la comparamos con la análoga que obtuvimos en el caso del circuito con auto-inducción, veremos que se puede pasar de un valor á otro con suma facilidad.

En efecto, si en la fórmula

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + a^2 L^2}} \operatorname{sen} (at - \varphi),$$

ponemos en vez de aL la cantidad $\left(-\frac{1}{aC}\right)$, como la tangente de φ tiene por valor

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{aL}{R},$$

ésta se convertirá, por la sustitución, en

$$-\frac{1}{aCR} = -\operatorname{tg} \varphi_1,$$

es decir, que φ y φ_1 serán iguales y de signo contrario. Como, por otra parte, las impedancias resultarán iguales por dicha sustitución, se vé, que podremos destruir el retardo de la auto-inducción, combinando convenientemente una capacidad.

e). FUERZA ELECTROMOTRIZ EN CIRCUITO CON RESISTENCIA, CAPACIDAD Y AUTO-INDUCCIÓN.

Sea un circuito recorrido por una corriente alterna originada por la tensión $E = E_0 \operatorname{sen} at$, en el cual suponemos

intercalada una capacidad C , siendo R la resistencia del circuito y L su coeficiente de auto-inducción.

Teniendo en cuenta lo dicho hasta aquí, se vé con claridad, que la ecuación que liga las fuerzas electromotrices será

$$i = \frac{E_0 \operatorname{sen} at - L \frac{di}{dt} - V}{R} \quad (9)$$

Por otra parte, siendo Q la carga que toma el condensador, se tiene,

$$Q = C V.$$

Diferenciando estas últimas expresiones y eliminando dV , se tiene,

$$\frac{1}{C} i + R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} - E_0 a \cos at = 0,$$

ó bien

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{CL} i - \frac{E_0}{L} a \cos at = 0,$$

que integrada nos da la expresión

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}} \operatorname{sen}(at - \varphi'), \quad (10)$$

siendo φ' dado por la relación

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{aL - \frac{1}{aC}}{R}.$$

El valor de la intensidad eficaz será, como en casos anteriores,

$$I_{ef} = \frac{E_{ef}}{\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}}.$$

En este caso el circuito tiene una resistencia aparente igual á

$$\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2};$$

siendo $\left(aL - \frac{1}{aC}\right)$ lo que se llama *reactancia general del circuito*.

En el caso particular en que se tenga

$$aL = \frac{1}{aC} \quad \text{ó} \quad a^2 LC = 1,$$

la impedancia se reduce simplemente á la resistencia.

Si $aL < \frac{1}{aC}$ habrá avance de la corriente sobre la tensión, y si $aL > \frac{1}{aC}$ habrá retardo.

Si determinamos las fuerzas electromotrices debidas á la auto-inducción y á la capacidad, hallaremos, llamándolas e_a y e_c respectivamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} e_a = -aL \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}} \cos(at - \varphi'), \\ e_c = \frac{1}{aC} \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}} \cos(at - \varphi'), \end{array} \right.$$

que, como se ve, pueden ser superiores á la fuerza electromotriz senoidal E.



SEGUNDA PARTE

Estudio gráfico de las corrientes alternativas simples.

a). PRELIMINARES

Por todo cuanto llevamos expuesto en la primera parte del trabajo, hemos podido observar que, tanto las tensiones alternativas como las corrientes por ellas originadas, vienen definidas por funciones senoidales del tiempo.

Vamos ahora á estudiar gráficamente cuanto ya hemos expuesto en la primera parte, y, para ello, empezaremos por ver de que modos podremos representar estas funciones, para que, con relativa sencillez y claridad, se puedan realizar las construcciones que nos conduzcan al conocimiento de las propiedades que, por otro medio, hemos determinado anteriormente.

Consideremos la fuerza electromotriz

$$e = E_0 \text{ sen } at;$$

y vamos á ver cómo la representamos gráficamente.

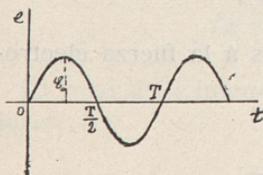


Fig. 2.ª

Para ello, si marchamos sobre una recta con la velocidad a supuesta rectificada, y en cada instante de tiempo levantamos una normal cuyo valor sea en unidades lineales, el que tome la función « $E_0 \text{ sen } at$ » para ese tiempo determinado, tendremos, uniendo los extremos de las normales así trazadas, una curva (Fig. 2), que será la representa-

ción geométrica de la función periódica, y en la cual, OT es el período de la función, E_0 la amplitud y $\frac{T}{2}$ la abscisa correspondiente al cambio de sentido.

Consideremos ahora un vector $OA = E_0$, que gire alrededor del punto O con movimiento uniforme de velocidad angular $a = \frac{2\pi}{T}$ y en sentido inverso de las agujas de un

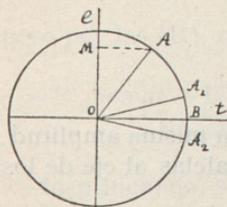


Fig. 3.

reloj; supongamos (Fig. 3), que en el tiempo cero, está el vector en coincidencia con el eje Ot , y que, al cabo de un cierto tiempo t , tenga la posición OA . Si designamos por Oe la normal en O al eje Ot , y proyectamos el vector OA sobre esta normal, se tendrá,

$$OM = OA \text{ sen } AOB = E_0 \text{ sen } at;$$

es decir, que la proyección del vector rotatorio mide en cada instante el valor de la función periódica, viniendo á ser, por lo tanto, dicho vector rotatorio, la representación cinemática de la función senoidal.

Cuando la función senoidal sea de la forma

$$e = E_0 \text{ sen } (at \pm \varphi),$$

su valor, en el instante en que t valga cero, será determinado por las proyecciones de los vectores OA_1 y OA_2 , que forman con Ot los ángulos de avance y retardo respectivamente.

En esta representación cinemática, la amplitud de la función y su fase vienen definidas por la longitud del vector y por el ángulo formado con la dirección fija Ot .

En general usaremos esta representación por ser más clara y prestarse con más facilidad á realizar las construcciones necesarias en cada caso.

Vistos ya los modos de representación de las funciones senoidales, vamos á estudiar, antes de entrar en la consideración gráfica de los casos estudiados en la parte analítica, lo referente á comparación y composición de funciones se-

noidales, así como también el modo de representar las derivadas de una función senoidal, cuyos conocimientos son necesarios para hacer el estudio gráfico que nos proponemos.

b). COMPARACIÓN DE FUNCIONES SENOIDALES.

Sean las funciones

$$\begin{cases} e = E_0 \text{ sen } at, \\ e' = E'_0 \text{ sen } a' t'. \end{cases}$$

Si $E_0 = E'_0$, tendrán las dos funciones la misma amplitud, es decir, sus máximos y mínimos en paralelas al eje de los tiempos.

Si $a = a'$, los períodos serán idénticos, y, como los tiempos empiezan en instantes diferentes, el período de e irá siempre delante ó siempre detrás del de e' . La diferencia $t' - t$ ó $t - t'$, representada por una longitud rectilínea en la representación geométrica y por una longitud de arco en la cinemática, es lo que se llama *diferencia de fase ó decalage* entre funciones del mismo período.

Las funciones senoidales son, en tal caso, de la forma,

$$\begin{aligned} e &= E_0 \text{ sen } at, \\ e' &= E'_0 \text{ sen } a. (t + t') = E'_0 \text{ sen } (at + at'') = E'_0 \text{ sen } (at + \varphi); \end{aligned}$$

donde φ es el ángulo formado entre los dos vectores E'_0 y E_0 .

c). COMPOSICIÓN DE FUNCIONES SENOIDALES
DEL MISMO PERIODO.

Consideremos las fuerzas electromotrices del mismo período

$$(11) \quad \begin{cases} e' = E'_0 \text{ sen } at, \\ e'' = E''_0 \text{ sen } (at + \varphi'); \end{cases}$$

la resultante de estas tensiones será,

$$e = e' + e'' = E_0 \operatorname{sen} (at + \varphi).$$

En efecto, si desarrollamos esta última expresión, se tiene,

$$e = E_0 \operatorname{sen} at \cos \varphi + E_0 \cos at \operatorname{sen} \varphi;$$

pero por las (11), resulta

$$\begin{aligned} e &= E'_0 \operatorname{sen} at + E''_0 \operatorname{sen} (at + \varphi') \\ &= E'_0 \operatorname{sen} at + E''_0 \operatorname{sen} at \cos \varphi' - E''_0 \cos at \operatorname{sen} \varphi'. \end{aligned}$$

Identificando, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} E_0 \cos \varphi = E'_0 + E''_0 \cos \varphi', \\ E_0 \operatorname{sen} \varphi = E''_0 \operatorname{sen} \varphi'; \end{cases}$$

de las cuales se deducen las

$$E_0^2 = E'^2_0 + E''^2_0 + 2 E'_0 E''_0 \cos \varphi',$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E''_0 \operatorname{sen} \varphi'}{E'_0 + E''_0 \cos \varphi'}.$$

Por el sencillo cálculo que precede se vé, que, si consideramos dos vectores

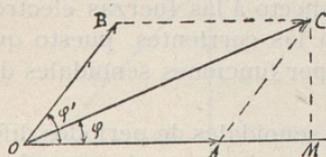


Fig. 4.

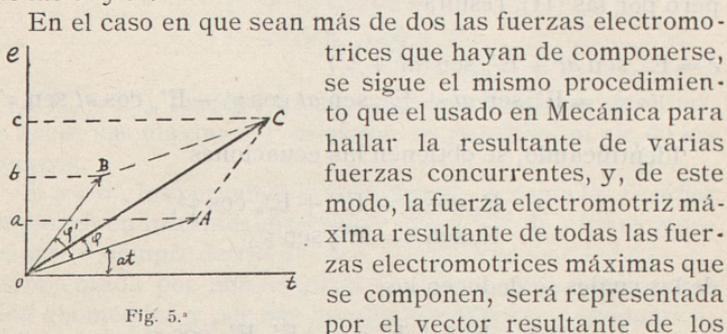
$$OA = E'_0, OB = E''_0,$$

que formen entre sí el ángulo φ' , la diagonal OC del paralelogramo construido sobre OA y OB (Fig. 4), representará la tensión E_0 , resultante de las E'_0 y E''_0 , puesto que se tienen considerando la figura, las relaciones,

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{OC}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 + 2 OA \cdot OB \cos \varphi', \\ \operatorname{tg} COA &= \operatorname{tg} \varphi = \frac{CM}{OM} = \frac{E''_0 \operatorname{sen} \varphi'}{E'_0 + E''_0 \cos \varphi'}. \end{aligned} \right.$$

Como se vé, podemos, por esta sencilla construcción, determinar la fuerza electromotriz máxima resultante y su ángulo de retardo ó avance, y por consecuencia, su fase.

Si hacemos girar alrededor del punto O el paralelogramo OACB (Fig. 5), las proyecciones Oa y Ob de OA y OB , representarán en cada momento las fuerzas electromotrices e' y e'' respectivamente, y la proyección Oc de la resultante OC , representará, para el mismo instante, la tensión e resultante de las e' y e'' .



En el caso en que sean más de dos las fuerzas electromotrices que hayan de componerse, se sigue el mismo procedimiento que el usado en Mecánica para hallar la resultante de varias fuerzas concurrentes, y, de este modo, la fuerza electromotriz máxima resultante de todas las fuerzas electromotrices máximas que se componen, será representada por el vector resultante de los componentes, y su fase, por el ángulo que forma dicho vector con el eje Ot . Proyectando en cualquier momento la resultante hallada sobre el eje que hemos designado por Oe , se tendrá la fuerza electromotriz resultante correspondiente á dicho momento determinado.

Todo cuanto hemos dicho respecto á las fuerzas electromotrices, se aplica lo mismo á las corrientes, puesto que éstas, también vienen definidas por funciones senoidales del tiempo.

La composición de funciones senoidales de períodos diferentes tiene escasa importancia, y sólo se emplea en algunos casos en que hay entre los períodos alguna relación de frecuencia ó pulsación, por lo que, prescindiremos de su estudio, pasando, para terminar estos epígrafes que pudiéramos llamar preparatorios, al estudio de la forma de representación de las derivadas de las funciones senoidales, estudio que lo aplicaremos á la función que representa la intensidad de una corriente senoidal, porque sus derivadas

son las que más se usan, por ser una de estas la que nos da el valor de la fuerza electromotriz de auto-inducción.

d). DERIVADAS DE LA FUNCION SENOIDAL.

De la función

$$i = I \text{ sen } (at - \varphi),$$

se deduce

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di}{dt} = I a \cos (at - \varphi) = I a \text{ sen } \left(at - \varphi + \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{d^2 i}{dt^2} = - a^2 I \text{ sen } (at - \varphi) = a^2 I \text{ sen } (at - \varphi + \pi). \end{array} \right.$$

Si, pues, OA (Fig. 6) es el vector que representa la intensidad

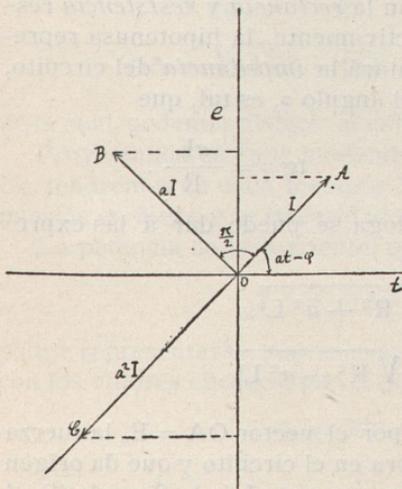


Fig. 6.

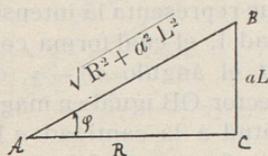
el cual forma con Ot el ángulo $at - \varphi$, el vector OB igual en magnitud á la cantidad $a I$, que forma con OA el ángulo $\frac{\pi}{2}$, representará, al proyectarse sobre Oe , la derivada primera de la intensidad con relación al tiempo, y, del mismo modo, el OC , igual en magnitud á Ia^2 , que forma con OA el ángulo π , representará al proyectarse la derivada segunda.

Vemos, pues, que dado el vector representativo de la intensidad máxima, nos bastará trazar otro que tenga un ángulo de avance igual á $\frac{\pi}{2}$, para tener en dirección el representativo de la primera derivada, y otro que forme con el de la intensidad un

ángulo de avance igual á π , nos dará la dirección del que representa la derivada segunda.

Visto ya por los párrafos que preceden, lo relativo á la representación y composición de funciones senoidales, vamos á pasar al estudio gráfico de cada uno de los casos que consideramos en la parte analítica, y, aunque allí considerábamos primero el caso de un circuito con resistencia y sin auto-inducción, lo omitiremos aquí, porque basta con lo dicho para formarse idea de él.

e). CIRCUITO CON RESISTENCIA, AUTO-INDUCCIÓN
Y FUERZA ELECTROMOTRIZ ALTERNA.



Si construimos un triángulo rectángulo ABC (Fig. 7), cuyos catetos sean la *reactancia* y *resistencia* respectivamente, la hipotenusa representará la *impedancia* del circuito, y el ángulo φ , es tal, que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{aL}{R}.$$

Una representación análoga se puede dar á las expresiones

$$E_0 = I \sqrt{R^2 + a^2 L^2},$$

$$E_{ef} = I_{ef} \sqrt{R^2 + a^2 L^2}.$$

Si ahora representamos por el vector $OA = E_0$ la fuerza electromotriz alterna que obra en el circuito y que da origen á la corriente, tendremos, que, en virtud de la fórmula (1), el vector representativo de la corriente deberá presentar un retardo φ con relación al OA , y podrá, por tanto, representarse por OH (Fig. 8). Ahora bien, por la misma ecuación se observa que la fuerza electromotriz e , es la suma de dos fuerzas electromotrices, la una RI que es la necesaria para vencer la resistencia ohmica y puede representarse por $OB = RI$, y

la otra, $L \frac{di}{dt}$, que es igual á la fuerza electro-motriz cam-

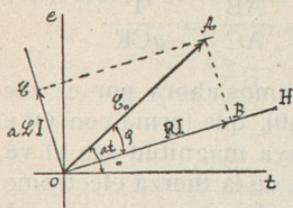


Fig. 8

biada de signo, y que podrá representarse, en virtud de lo dicho en el epígrafe anterior, por el vector $OC = aLI$, que forma con OB un ángulo de avance igual á $\frac{\pi}{2}$.

Siendo, pues, la fuerza electromotriz e resultante de las dos fuerzas electromotrices mencionadas, OA será la diagonal del paralelogramo construido sobre OB y OC .

En efecto, se tiene

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{OB} = \frac{aLI}{RI} = \frac{aL}{R},$$

$$OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = I \sqrt{R^2 + a^2 L^2},$$

de la cual, podemos deducir el valor de la intensidad máxima.

Proyectando en cada momento este paralelogramo sobre Oe , tendremos en cada instante las fuerzas electromotrices puestas en juego y la intensidad de la corriente.

La potencia de la corriente, que es

$$p = e_{ef} \cdot i_{ef} \cdot \cos \varphi,$$

podrá representarse, suponiendo trazada la figura anterior con los valores eficaces, por el producto

$$p = OB \cdot OH.$$

f). CIRCUITO CON RESISTENCIA, CAPACIDAD Y FUERZA ELECTROMOTRIZ ALTERNA.

Siguiendo una marcha análoga á la del caso anterior, si construimos un triángulo rectángulo ABC (Fig. 9), cuyos catetos sean respectivamente R y $\frac{1}{aC}$, la hipotenusa nos re-

presentará la impedancia del circuito, siendo φ_1 definido por la relación

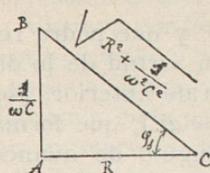


Fig. 9

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{aCR}.$$

Si representamos ahora por el vector OA (Fig. 10), que forma con Ot el ángulo at y cuya magnitud sea el valor máximo E_0 de la fuerza electromotriz alterna $e = E_0 \operatorname{sen} at$, el vector de la corriente, que deberá formar un ángulo de avance φ_1 con relación al OA, en virtud de la ecuación (8), podrá ser representado por el vector OB.

Ahora, por la ecuación

$$E_0 \operatorname{sen} at = RI + \frac{Q}{C},$$

se ve, que la tensión e es resultante de dos; una la RI, necesaria para vencer la resistencia ohmica, y la otra $\frac{Q}{C}$, que es la fuerza electromotriz de la capacidad cambiada de signo.

La magnitud y sentido del vector de esta última, las hallaremos por el sencillo cálculo siguiente;

$$\frac{Q}{C} = \int \frac{idt}{C} = \int \frac{I \operatorname{sen} (at + \varphi_1) dt}{C} = -\frac{I}{aC} \cos (at + \varphi_1),$$

ó bien

$$\frac{Q}{C} = \frac{I}{aC} \operatorname{sen} \left(at + \varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right)$$

que nos dice, que el vector que la represente, debe tener con relación á la corriente un retardo igual á $\frac{\pi}{2}$, y su valor igual á $\frac{I}{aC}$.

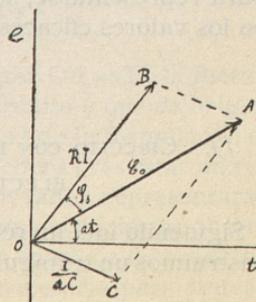


Fig. 10

El vector OA, será la diagonal del paralelogramo construido sobre OB y OC.

En efecto, se verifica en la figura, que,

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{AB}{OB} = \frac{\frac{I}{aC}}{\frac{I}{aCR}} = \frac{1}{aCR},$$

$$OA = \sqrt{OB^2 + OC^2} = I \sqrt{R^2 + \frac{1}{a^2 C^2}},$$

que nos da la intensidad máxima.

Si proyectamos sobre Oe, tendremos en cada momento las fuerzas electromotrices que intervienen y la corriente.

g). CIRCUITO CON RESISTENCIA, CAPACIDAD, AUTO-INDUCCIÓN Y FUERZA ELECTROMOTRIZ ALTERNA.

En este caso, podemos dar una representación parecida á la que utilizamos en los párrafos anteriores, para hallar la impedancia y la fuerza electromotriz total.

En la (Fig. 11) tenemos un cateto R, y el otro BC = BD - CD, que siendo BD = aL

rectancia de auto-inducción, y

CD = $\frac{1}{aC}$ rectancia de ca-

pacidad, tendrá por valor

$aL - \frac{1}{aC}$; y por tanto, la hipotenusa será la impedancia.

El ángulo φ' tendrá por valor

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{aL - \frac{1}{aC}}{R}.$$

Representación análoga podríamos hacer de las fuerzas electromotrices, pero la omitiremos, pues, sólo basta, en la

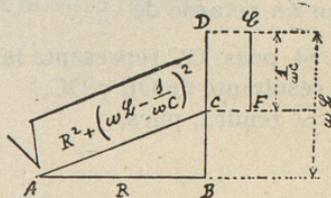


Fig. 11

figura anterior, suponer multiplicadas todas las magnitudes por I .

Sean, (Fig. 12), $OA = E_0$ y HO los vectores que representen la tensión y la corriente respectivamente.

En virtud de la ecuación (9) se tiene,

$$E_0 \operatorname{sen} at = RI + L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C},$$

que nos dice, que la tensión e , es resultado de tres, la primera que representaremos por $RI = OB$; la segunda que, según hemos visto, se puede representar por $OM = aLI$ con un avance

igual á $\frac{\pi}{2}$, sobre la co-

rriente representada por OH ; y la tercera por $ON = \frac{I}{aC}$ con un retardo de $\frac{\pi}{2}$.

Si, pues, OC representa la diferencia $OM - ON$, OA será la resultante de OB y OC .

Se tendrá, pues,

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{AB}{OB} = \frac{aL - \frac{1}{aC}}{R},$$

$$OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = I \sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2},$$

que nos da la intensidad máxima.

El ángulo φ' será de avance sobre la corriente, cuando, como en la figura, se tenga

$$aL > \frac{1}{aC},$$

y de retardo, cuando

$$aL < \frac{1}{aC},$$

no habiendo retardo ni avance, cuando

$$aL = \frac{1}{aC}.$$

Proyectando, como en los casos anteriores, tendremos conocidas las fuerzas electromotrices y la corriente en cada momento.

Dicho ya cuanto nos habíamos propuesto acerca de las corrientes alternativas simples, pasaremos al estudio de las polifásicas. Aun cuando siguiendo el método propuesto debiéramos hacer este estudio separando las partes analítica y gráfica, vamos á tratarlas simultáneamente para no dar excesiva y desusada extensión á nuestro trabajo.

TERCERA PARTE

Corrientes polifásicas

DEFINICIÓN

De un modo general, se designa bajo el nombre de *corrientes polifásicas*, al sistema de varias corrientes alternativas del mismo período, pero cuyas fases presentan entre sí alguna diferencia. Las más usadas en la práctica son las bifásicas y trifásicas que vamos á estudiar.

a) *Corriente bifásica*. Consideremos una tensión alternativa

$$e_1 = E_0 \text{ sen } at,$$

é imaginemos una segunda tensión

$$e_2 = E_0 \text{ sen } \left(at - \frac{\pi}{2} \right),$$

de la misma amplitud y período, pero cuya fase difiera de la anterior en un cuarto de período.

Estas tensiones, obrando sobre dos circuitos, engendrarán dos corrientes alternas del mismo período, con amplitudes que estarán en razón inversa de las impedancias y con fases que dependerán de las constantes de tiempo de los dos circuitos.

Si suponemos que dichas impedancias y constantes de tiempo son iguales, las dos corrientes alternas producidas por las citadas tensiones, serán de la misma amplitud y período, pero sus fases diferirán exactamente en un cuarto de período.

Este sistema formado por dos corrientes alternativas producidas en dos circuitos por tensiones del mismo período y la misma amplitud, pero con fases que difieren en un cuarto de período, es lo que se llama una *corriente bifásica*.

No hay que olvidar que las corrientes no diferirán exactamente en un cuarto de período, ni tendrán la misma amplitud, más que siendo iguales las impedancias y constantes de tiempo de los dos circuitos, es decir, cuando los circuitos tengan la misma resistencia y la misma auto-inducción ó capacidad.

Las dos corrientes alternas que tienen la diferencia de fase igual á $\frac{\pi}{2}$, podrán representarse analíticamente, por las expresiones;

$$i_1 = I \text{ sen } (at - \varphi), \quad i_2 = I \text{ sen } \left(at - \varphi - \frac{\pi}{2} \right),$$

y, gráficamente, por dos vectores rotatorios $OA = OB = I$, que forman entre sí un ángulo

igual á $\frac{\pi}{2}$ (Fig. 13).

También se pueden representar por las curvas de la misma figura.

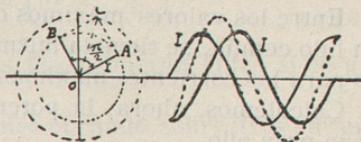


Fig. 17

Claramente se observa, bien por las expresiones anteriormente halladas, bien por las anteriores figuras, que una de las corrientes es nula cuando la otra es máxima.

Para conducir una corriente bifásica del generador al motor, se pueden emplear cuatro hilos de línea, dos por fase, ó bien reunir en uno sólo dos de los conductores.

En el primer caso, dos hilos son atravesados por una corriente

$$i_1 = I \text{ sen } at,$$

y los otros dos, por la corriente

$$i_2 = I \text{ cos } at,$$

que tiene una diferencia de fase igual á un cuarto de período.

En el caso de tener un hilo común, los hilos que están separados, son atravesados por las corrientes i_1, i_2 , siendo el hilo común atravesado por una corriente.

$$i_3 = i_1 + i_2 = I (\text{sen } at + \text{cos } at) = I \left[\text{sen } at + \text{sen} \left(at + \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

ó bien, desarrollando,

$$i_3 = I \cdot \sqrt{2} \text{sen} \left(at + \frac{\pi}{4} \right).$$

Gráficamente está representada esta corriente, en la figura 13, por el vector OC, resultante de los vectores OA y OB y con una diferencia de fase igual á $\frac{1}{8}$ de período, ó bien, por la curva punteada de la misma figura.

El valor máximo de esta corriente es $I \sqrt{2}$, es decir, el máximo de cada una de las corrientes multiplicada por $\sqrt{2}$.

Entre los valores máximos de las tensiones, cuando hay un hilo común, se tiene la misma relación que hemos hallado para las corrientes máximas.

Calculemos, ahora, la potencia de la corriente bifásica. Sean para ello

$$\begin{cases} e_1 = E_0 \text{sen } at, \\ e_2 = E_0 \text{cos } at, \end{cases}$$

las dos tensiones alternativas, que difieren en un cuarto de período, y sean las corrientes á ellas debidas,

$$\begin{cases} i_1 = I \text{sen} (at - \varphi), \\ i_2 = I \text{cos} (at - \varphi); \end{cases}$$

las potencias parciales serán,

$$\begin{cases} e_1 i_1 = E_0 I \text{sen } at \text{sen} (at - \varphi), \\ e_2 i_2 = E_0 I \text{cos } at \text{cos} (at - \varphi), \end{cases}$$

siendo la potencia total,

$$p = e_1 i_1 + e_2 i_2 = E_0 I [\text{sen } at \text{sen} (at - \varphi) + \text{cos } at \text{cos} (at - \varphi)],$$

ó bien,

$$p = E_0 I \cos \varphi$$

es decir, que la potencia total es constante é igual á $E_0 I \cos \varphi$.

Esta potencia expresada en función de la fuerza electromotriz y de la corriente eficaz, será,

$$p = 2 E_{ef} I_{ef} \cos \varphi.$$

b). CORRIENTE TRIFÁSICA.

Sean tres fuerzas electromotrices

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = E_0 \operatorname{sen} at \\ e_2 = E_0 \operatorname{sen} \left(at - \frac{2\pi}{3} \right), \\ e_3 = E_0 \operatorname{sen} \left(at - \frac{4\pi}{3} \right), \end{array} \right.$$

de la misma amplitud, y cuyas fases difieran entre sí en un tercio del período.

Si suponemos estas tensiones obrando sobre tres circuitos, engendrarán tres corrientes alternas, que tendrán la misma amplitud, y sus fases diferirán en un tercio del período, en el caso en que sean iguales las impedancias y constantes de tiempo de los tres circuitos.

Este sistema de tres corrientes alternas producidas por tres tensiones de la misma amplitud y período, y cuyas fases difieran en un tercio del período, es lo que constituye una *corriente trifásica*.

Lo mismo que advertimos al tratar de las corrientes bifásicas, hay que decir de las trifásicas, es decir, que las corrientes debidas á las tensiones alternativas, no diferirán exactamente en un tercio del período, ni tendrán la misma amplitud, más que en el caso de ser iguales las impedancias y constantes de tiempo de los tres circuitos.

Las tres corrientes alternativas cuyo sistema forma la

corriente trifásica, podrán ser representadas analíticamente, por las expresiones

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = I \operatorname{sen} (at - \varphi), \\ i_2 = I \operatorname{sen} \left(at - \varphi - \frac{2\pi}{3} \right), \\ i_3 = I \operatorname{sen} \left(at - \varphi - \frac{4\pi}{3} \right). \end{array} \right.$$

Gráficamente, podremos representarlas por tres vectores $OA = OB = OC = I$, formando entre sí un ángulo de 120° , (Fig. 14), ó bien, por las tres curvas de la misma figura.

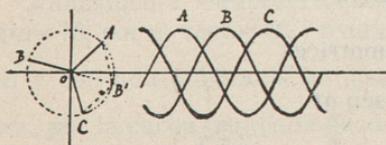


Fig. 14

Como se ve, por la figura, uno de los vectores es igual y de signo contrario á la resultante de los otros dos. Análoga

relación existirá entre las tres intensidades, bien se tomen los valores instantáneos ó los eficaces. Teniendo en cuenta lo que acabamos de decir, se ve que, en vez de emplear seis hilos para estas corrientes, bastará con tres, uno de los cuales sirva de hilo de retorno común á las corrientes de los otros dos.

Sirviéndose de tres conductores, podemos ligar el generador á los aparatos de utilización ó á los motores, de dos maneras distintas: Una, que consiste en unir el fin de cada sección generatriz con el principio de la siguiente, constituyendo el llamado *montaje en triángulo*, y otra, que consiste en reunir las extremidades de todas las secciones generatrices en un punto que se llama *punto neutro*, y las otras tres extremidades unidas á los hilos de la línea, constituyendo el llamado *montaje en estrella*.

1). *Montaje en triángulo.*

Entre los hilos de la línea se tienen las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = E_0 \operatorname{sen} at, \\ e_2 = E_0 \operatorname{sen} \left(at - \frac{2\pi}{3} \right), \\ e_3 = E_0 \operatorname{sen} \left(at - \frac{4\pi}{3} \right). \end{array} \right.$$

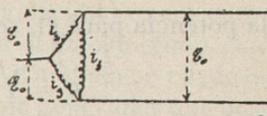


Fig. 15

En cada uno de los circuitos, se tienen las corrientes

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = I \operatorname{sen} (at - \varphi), \\ i_2 = I \operatorname{sen} \left(at - \varphi - \frac{2\pi}{3} \right), \\ i_3 = I \operatorname{sen} \left(at - \varphi - \frac{4\pi}{3} \right), \end{array} \right.$$

y en una de las líneas, la

$$i' = i_1 - i_2 = I \left[\operatorname{sen} (at - \varphi) - \operatorname{sen} \left(at - \varphi - \frac{2\pi}{3} \right) \right],$$

que desarrollando, da

$$i' = I \cdot \sqrt{3} \operatorname{sen} \left(at - \varphi + \frac{\pi}{6} \right). \quad (3)$$

La potencia total será dada por

$$p = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3,$$

que sustituyendo valores y desarrollando, por un cálculo sencillo, se obtiene

$$p = \frac{3}{2} E_0 I \cos \varphi.$$

Si ahora designamos por I_{ef} , E_{ef} los valores eficaces de la intensidad en cada circuito y de la diferencia de potencial entre dos hilos de la línea, se tendrá

$$p = 3 \cdot E_{ef} \cdot I_{ef} \cos \varphi,$$

pero, si I'_{ef} es la intensidad eficaz en un hilo de la línea, se tendrá, en virtud de la relación (β)

$$I'_{ef} = \sqrt{3} \cdot I_{ef},$$

y la potencia para él, será

$$p = \sqrt{3} \cdot E_{ef} \cdot I'_{ef} \cdot \cos \varphi.$$

2). Montaje en estrella.

Si designamos por e_0 la tensión máxima entre el punto neutro y uno de los hilos de línea, se tendrá:

$$\begin{aligned} E &= e_1 - e_2 = e_0 \operatorname{sen} at - e_0 \operatorname{sen} \left(at - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= e_0 \left[\operatorname{sen} at - \operatorname{sen} \left(at - \frac{2\pi}{3} \right) \right], \end{aligned}$$

fórmula análoga á otra hallada anteriormente, y que, como aquella, dará,

$$E = e_0 \sqrt{3} \operatorname{sen} \left(at + \frac{\pi}{6} \right);$$

por tanto, la diferencia de potencial máxima, será

$$E_0 = e_0 \sqrt{3}.$$

Como cada línea tiene la misma corriente que el circuito á que está ligada, se tendrá, para la potencia total,

$$p = \frac{3}{2} e_0 I \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 I \cos \varphi.$$

Esta misma potencia, expresada en función de los valores eficaces, es

$$p = 3 E_{ef} \cdot I_{ef} \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot e_{ef} \cdot I_{ef} \cos \varphi.$$

c) PRODUCCIÓN DE CORRIENTES POLIFÁSICAS.

Las corrientes bifásicas pueden ser obtenidas por medio de dos generadores diferentes, regulados convenientemente el uno con relación al otro, por ejemplo, por medio de dos circuitos, que girando con la misma velocidad en un campo uniforme, sean atravesados, el uno por el flujo máximo, cuando el otro lo sea por un flujo mínimo. También se puede obtener una corriente bifásica, con un solo generador que posea dos enrollamientos dispuestos de manera, que, los flujos que los atraviesan, sean, máximo el uno, al mismo tiempo que nulo el otro.

Las corrientes trifásicas se obtendrán por medio de tres circuitos, que, al girar en un campo uniforme, formen entre sí constantemente un ángulo de 120° .

Podemos obtener una corriente bifásica, por medio de una alternativa, como vamos á ver por los epígrafes siguientes.

1) *División de una corriente alternativa en dos, que tengan una diferencia de fase igual á un cuarto de periodo, sirviéndose de la auto-inducción.*

Supongamos que montamos en serie con una sección de un motor de corriente bifásica una resistencia simple, y con la otra, una bobina que tenga gran coeficiente de auto-inducción.

Sean R y L la resistencia y auto-inducción de la sección del motor que está montada en serie con la resistencia R' ; designemos ahora por R_1 y L_1 la resistencia y auto-inducción de la otra sección, y sean R_2 , L_2 los mismos factores para la bobina.

Llamando φ_1 y φ_2 á las diferencias de fase de cada corriente con relación á la tensión, se tendrán para éstas diferencias de fase, las relaciones;

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = a \frac{L}{R + R'}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = a \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2}$$

siendo, por consiguiente, la diferencia de fases entre éstas corrientes, dada por la relación $\psi_1 = \varphi_2 - \varphi_1$.

Ahora bien, si queremos que la diferencia de fases en las dos secciones sea igual á $\frac{\pi}{2}$, en cuyo caso, el sistema formado por éstas corrientes constituirá una corriente bifásica, será preciso, que se verifiquen las condiciones

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2},$$

lo cual exige, que,

$$(12) \quad \frac{L}{R + R'} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2} = \infty;$$

es decir, que el primer circuito debe tener una débil auto-inducción, con una gran resistencia, al paso que el segundo deberá tener pequeña resistencia y gran auto-inducción.

En la práctica, no es fácil llenar estas condiciones, por lo que, el ángulo ψ , no es nunca igual exactamente á $\frac{\pi}{2}$.

Los valores de las dos corrientes que por este medio se llegan á obtener, serán, llamándoles i_1 , i_2 , dados por las expresiones,

$$i_1 = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(a \frac{L}{R + R'}\right)^2}} \text{sen}(at - \varphi_1),$$

$$i_2 = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(a \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2}\right)^2}} \text{sen}(at - \varphi_2).$$

De manera, que, si hemos elegido las resistencias y auto-inducciones de modo que se cumplan las condiciones (12), las dos corrientes i_1, i_2 formarán un sistema bifásico.

2). *División de una corriente alterna en dos, con diferencia de fase, sirviéndose de capacidad.*

1'). *Derivación que tiene sólo capacidad.*

Sean (Fig. 17) dos conductores A y B, entre los cuales

existe la tensión alternativa

$$(13) \quad e = E_0 \text{ sen } at,$$

y supongamos ligado á estos dos conductores un condensador C.

Si, en un momento dado, suponemos que la corriente en la derivación es i , se tendrá

$$idt = Cde,$$

suponiendo, que, á través del dieléctrico no pasa corriente.

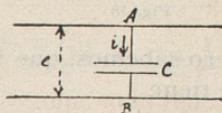


Fig. 17

Diferenciando, con relación á t , la ecuación (13), y sustituyendo en la anterior, se tiene

$$i = Ca E_0 \cos at = Ca E_0 \text{ sen } \left(at + \frac{\pi}{2} \right),$$

que nos hace ver, que la fase de la corriente, tiene un avance sobre la tensión en los bornes del condensador, igual á un cuarto del período.

La intensidad media eficaz de esta corriente, será

$$I_{ef} = aCE = \frac{E}{\frac{1}{aC}},$$

es decir, la misma que hubiéramos obtenido, si se hubiese reemplazado la capacidad por la resistencia $\frac{1}{aC}$.

2') Derivación poseyendo resistencia, capacidad y auto-inducción.

En el número anterior suponíamos que el condensador estaba unido á los conductores, que designábamos por A y B, mediante otros de resistencia despreciable, lo cual, no siempre sucederá, así que, ahora, consideraremos el caso en que haya en la línea una resistencia R, una capacidad C y una auto-inducción L.

Sean, i la corriente en la derivación del condensador en un momento cualquiera, y v la tensión entre las armaduras del condensador en el mismo instante.

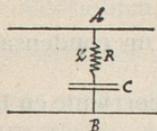


Fig. 18

Se tendrá para cualquier valor de t , la relación

$$e = R i + L \frac{di}{dt} + v, \quad (14)$$

pero sabemos, que si no pasa corriente por el condensador, se tiene

$$dv = \frac{idt}{C},$$

de donde

$$v = \frac{1}{C} \int idt.$$

Pero, por otra parte, se tiene,

$$(15) \quad i = I_{ef} \sqrt{2} \operatorname{sen} at,$$

luego,

$$v = - \frac{I_{ef} \sqrt{2}}{aC} \cos at,$$

y, por tanto, la (14) se reducirá á la

$$e = RI_{ef} \sqrt{2} \operatorname{sen} at + \left(aL - \frac{1}{aC} \right) I_{ef} \sqrt{2} \cos at.$$

Si ahora hacemos,

$$(16) \quad \frac{aL - \frac{1}{aC}}{R} = \operatorname{tg} \varphi,$$

se tendrá,

$$e = RI_{ef} \sqrt{2} \operatorname{sen} at + RI_{ef} \sqrt{2} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \cos at,$$

ó bien,

$$e \cos \varphi = RI_{ef} \sqrt{2} \sin at \cos \varphi + RI_{ef} \sqrt{2} \cos at \sin \varphi.$$

Pero,

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}{R^2}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}},$$

luego,

$$(17) \quad e = I_{ef} \sqrt{2} \sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2} \sin (at + \varphi),$$

cuya media eficaz, será

$$(18) \quad E_{ef} = I_{ef} \sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2} = I_{ef} \sqrt{R^2 + \left(\frac{a^2 LC - 1}{aC}\right)^2} \\ = \frac{I_{ef}}{aC} \sqrt{a^2 C^2 R^2 + (a^2 LC - 1)^2}.$$

El ángulo φ de la expresión (17) representa, como se ve, la diferencia de fase entre la tensión e y la corriente i .

La media eficaz de dicha corriente i , será,

$$(19) \quad I_{ef} = \frac{E_{ef}}{\sqrt{R^2 + \left(aL - \frac{1}{aC}\right)^2}};$$

y como la media eficaz de v es

$$V_{ef} = \frac{I_{ef}}{aC},$$

la (18) se reducirá á la

$$E_{ef} = V_{ef} \sqrt{a^2 C^2 R^2 + (a^2 LC - 1)^2},$$

por consiguiente, la tensión eficaz V_{ef} entre las armaduras del condensador, será,

$$V_{ef} = \frac{E_{ef}}{\sqrt{a^2 C^2 R^2 + (a^2 LC - 1)^2}},$$

que será mayor que la tensión en los bornes de la derivación, cuando la cantidad bajo radical sea menor que la unidad.

En virtud de las relaciones (15), (16) y (17) se ve, que la fase de la corriente en la derivación del condensador, estará en avance ó retardo con relación á e , según que se tenga

$$\frac{aL - \frac{1}{aC}}{R} \begin{matrix} \geq 0, \\ < 0, \end{matrix}$$

teniendo este ángulo de retardo el valor máximo igual á $\frac{\pi}{2}$.

3'). *Circuito que tenga una derivación con resistencia y auto-inducción y otra con resistencia, capacidad y auto-inducción.*

Supongamos que además de la derivación del caso anterior, practicamos otra con una resistencia R' y una auto inducción L' .

La fase de la corriente i' , que pasa por esta segunda derivación, tendrá un retardo, con relación á e , dado por la relación,

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{aL'}{R'}.$$

La diferencia de fases entre las corrientes de las dos derivaciones, será

$$\psi_1 = \varphi' - \varphi$$

que como φ varía de $\frac{\pi}{2}$ á $(-\frac{\pi}{2})$ y φ' de 0 á $\frac{\pi}{2}$, se ve que podremos combinar convenientemente los valores de las

resistencias, capacidad y auto-inducciones de modo que se tenga

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2},$$

en cuyo caso, las dos corrientes i , i' , formarán una corriente bifásica.

4'). *Caso de dos circuitos con resistencia, auto-inducción y capacidad.*

Supongamos que practicamos en el circuito dos derivaciones que contengan resistencia, capacidad y auto-inducción.

Si elegimos las capacidades de tal modo que la fase de la corriente i esté en avance un octavo de periodo con relación á e , y la de i' en retardo el mismo octavo de periodo, las diferencias de fase entre i , i' , serán dadas por las relaciones,

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{aL - \frac{1}{aC}}{R} = -1 \\ \frac{aL - \frac{1}{aC'}}{R} = 1, \end{array} \right.$$

de las cuales se deduce,

$$C = \frac{1}{a(aL + R)}, \quad C' = \frac{1}{a(aL - R)},$$

que como C' ha de ser positiva, dará,

$$aL > R.$$

La corriente eficaz en las dos secciones, será

$$I_{ef} = \frac{E_{ef}}{R\sqrt{2}},$$

como se ve claramente por las (19) y (20).

Si referimos el origen de tiempos al instante en que la tensión e es nula, se tendrán para expresiones de las corrientes i, i' las

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \frac{E_{ef}}{R} \operatorname{sen} \left(at + \frac{\pi}{4} \right), \\ i' = \frac{E_{ef}}{R} \operatorname{sen} \left(at - \frac{\pi}{4} \right); \end{array} \right.$$

siendo la corriente instantánea total,

$$i + i' = \frac{E_{ef}}{R} \sqrt{2} \operatorname{sen} at,$$

cuya fase coincide con la de la tensión e , siendo su media eficaz

$$J = \frac{E_{ef}}{R} = I_{ef} \sqrt{2}.$$

La potencia de cada corriente será,

$$p = E_{ef} \frac{E_{ef}}{R \sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{E_{ef}^2}{2R} = E_{ef} \cdot I \frac{\sqrt{2}}{2};$$

siendo la potencia total en los bornes del motor

$$P = E_{ef} J = E_{ef} I_{ef} \sqrt{2}.$$

d). PROPIEDAD IMPORTANTÍSIMA DE LAS CORRIENTES BIFÁSICAS Y TRIFÁSICAS.

Las corrientes bifásicas y trifásicas poseen la notable propiedad de producir un campo magnético rotatorio, propiedad que sirve de fundamento á los motores de campo rotatorio ó polifásico.

Sean dos bobinas idénticas AB, A'B' (Fig. 19), enrolladas

sobre un cilindro según dos planos que formen entre sí un ángulo de 90° .

Supongamos que lanzamos en la AB una corriente alterna

$$i' = I \text{ sen } at,$$

y en la A' B' la corriente

$$i'' = I \text{ sen } \left(at - \frac{\pi}{2} \right) = -I \text{ cos } at$$

de la misma amplitud y periodo, pero

con una diferencia de fase en retardo igual á $\frac{\pi}{2}$.

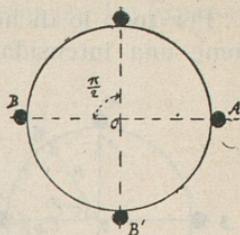


Fig. 19

La primera bobina dará origen á un campo magnético dirigido según la normal á su plano, y cuya intensidad variará proporcionalmente á la intensidad del campo excitador, si la resistencia del circuito magnético es constante.

Si, pues, designamos por H la intensidad máxima del campo producido por cualquiera de las bobinas, los valores de los campos producidos por cada bobina en un momento dado, serán,

$$\left\{ \begin{array}{l} H' = H \text{ sen } at, \\ H'' = H \text{ sen } \left(at - \frac{\pi}{2} \right) = -H \text{ cos } at; \end{array} \right.$$

siendo el campo magnético resultante

$$H_1 = \sqrt{H'^2 + H''^2} = \sqrt{H^2 \text{ sen}^2 at + H^2 \text{ cos}^2 at} = H,$$

expresion por la cual se ve que el valor del campo resultante es en magnitud constantemente igual al valor máximo del campo producido por cualquiera de las bobinas.

En cuanto á la dirección del campo resultante, se observa, que para $at = 0$, H_1 tiene la misma dirección que H'' . Para valores crecientes de 0 á $\frac{\pi}{2}$, el campo resultante gira hasta confundirse con H' cuando $at = \frac{\pi}{2}$. Sigue girando así, hasta

que vuelve á la posición inicial al cabo de un tiempo $at = 2\pi$, es decir, al final del período.

Por todo lo dicho se ve, pues, que el campo resultante tiene una intensidad constante é igual al valor máximo de uno de los campos componentes; gira alrededor del punto O y da una vuelta por período.

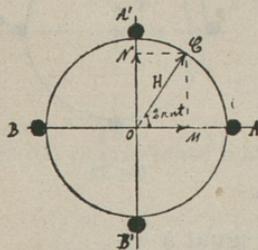


Fig. 20

Gráficamente podemos representar el campo rotatorio originado por la corriente bifásica por medio de un vector giratorio OC (Fig. 20), de longitud igual á la intensidad del campo y que gira con una velocidad angular a .

Este vector rotatorio puede considerarse como resultante de los ON y OM , cuyos valores son:

$$\left\{ \begin{array}{l} ON = OC \operatorname{sen} at = H \operatorname{sen} at, \\ OM = OC \cos at = H \cos at = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - at \right); \end{array} \right.$$

que pueden ser considerados como dos vectores alternativos dirigidos según OA' y OA .

También podremos obtener un campo rotatorio sirviéndonos de una corriente trifásica, como vamos á probar.

Consideremos para ello tres bobinas idénticas AB , $A'B'$ y $A''B''$ (Fig. 21) enrolladas sobre un cilindro, según tres planos que forman entre sí un ángulo de 120° .

Si en estas bobinas circulan tres corrientes alternas, tales como las

$$\left\{ \begin{array}{l} i' = I \operatorname{sen} at, \\ i'' = I \operatorname{sen} \left(at - \frac{2\pi}{3} \right), \\ i''' = I \operatorname{sen} \left(at - \frac{4\pi}{3} \right), \end{array} \right.$$

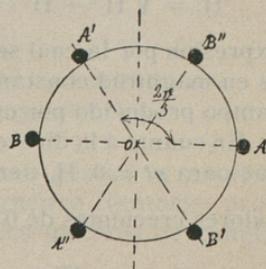


Fig. 21

estas corrientes engendrarán tres campos magnéticos normales cada uno al plano de su bobina, que serán, suponiendo constante la resistencia magnética, dados por las expresiones siguientes:

$$H' = \text{sen } at,$$

$$H'' = H \text{sen} \left(at - \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$H''' = H \text{sen} \left(at - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Consideremos ahora una circunferencia trazada con un radio igual á H (Fig. 22), y sean Oa , Oa' , Oa'' , los tres campos H' , H'' , H''' , producidos por las tres bobinas y que vamos á componer para hallar el valor del campo resultante. Esta resultante será, como se ve por la figura, la recta OC que cierra el polígono de los vectores de los campos componentes.

El valor de OC , si proyectamos el polígono $Oa a' C$ sobre OX y OY , será,

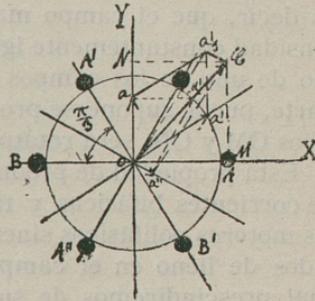


Fig. 22

$$OC = \sqrt{ON^2 + OM^2},$$

pero,

$$ON = H \text{sen } at - H \text{sen} \left(at - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3} \\ + H \text{sen} \left(at - \frac{4\pi}{3} \right) \cos \frac{2\pi}{3},$$

ó, desarrollando y sustituyendo valores,

$$ON = \left(1 + \frac{1}{2} \right) H \text{sen } at.$$

Del mismo modo,

$$OM = -H \operatorname{sen} \left(at - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{6} + H \operatorname{sen} \left(at - \frac{4\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{6},$$

que, desarrollando y sustituyendo valores, nos da,

$$OM = \left(1 + \frac{1}{2} \right) H \cos at.$$

Por consiguiente la resultante será,

$$OC = \sqrt{\overline{ON}^2 + \overline{OM}^2} = \left(1 + \frac{1}{2} \right) H,$$

es decir, que el campo magnético resultante tiene una intensidad constantemente igual á vez y media el valor máximo de uno de los campos componentes, y como, por otra parte, puede suponerse producido por los componentes bifásicos OM y ON, será rotatorio.

Esta propiedad de producir campos rotatorios por medio de corrientes bifásicas y trifásicas, sirve de fundamento á los motores polifásicos sincrónicos y asincrónicos, comprendidos de lleno en el campo práctico del Ingeniero, por lo cual prescindiremos de su estudio, dando por terminado este trabajo que contiene lo más elemental de las «*corrientes alternativas, simples y polifásicas*».

Madrid 20 de Junio de 1902.

Juan Marco Montón.

NOTA

INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN $R i = E_0 \text{ sen } at - L \frac{di}{dt}$.

Quitando denominadores y separando variables, se tiene

$$di + \frac{R}{L} i dt = \frac{E_0}{L} \text{ sen } at dt, \quad (1)$$

ó bien, poniendo $\frac{R}{L} = b$,

$$di + bi dt = \frac{E_0}{L} \text{ sen } at dt. \quad (2)$$

Hagamos ahora

$$i = u \cdot v \quad (3)$$

siendo u y v variables arbitrarias.

Sustituyendo en la ecuación (2) se reducirá á

$$u (dv + bv dt) + v du = \frac{E_0}{L} \text{ sen } at dt. \quad (4)$$

Establezcamos la ecuación de condición

$$dv + bv dt = 0. \quad (5)$$

con lo cual la (4) se reduce á

$$v du = \frac{E_0}{L} \text{ sen } at dt. \quad (6)$$

El problema queda ahora reducido al resolver las ecuaciones (5) y (6).

De la (5) se deduce, por integración, la

$$lv = -bt + l \cdot k$$

$$\text{ó} \quad l \cdot \frac{v}{k} = -bt,$$

de la cual se deduce

$$v = k e^{-bt}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (6) se tiene,

$$k e^{-bt} \cdot du = \frac{E_0}{L} \text{sen } at \cdot dt,$$

$$\text{ó} \quad du = \frac{1}{k} e^{bt} \cdot \frac{E_0}{L} \text{sen } at \cdot dt,$$

ó, integrando,

$$u = k' + \frac{1}{k} \frac{E_0}{L} \int e^{bt} \text{sen } at \cdot dt.$$

Llevemos ahora los valores de u y v á la ecuación (3) y tendremos

$$i = kk' e^{-bt} + \frac{E_0}{L} e^{-bt} \int e^{bt} \text{sen } at \cdot dt.$$

Ahora, puesto que el factor e^{-bt} decrece rápidamente con el tiempo, se ve, que el primer término de la ecuación solo tendrá influencia en los primeros momentos del fenómeno, por lo cual prescindiremos de él, y la ecuación se reducirá á

$$i = \frac{E_0}{L} e^{-bt} \int e^{bt} \text{sen } at \cdot dt. \quad (7)$$

Hallemos ahora el valor de la integral del segundo miem-

bro y tendremos

$$\int e^{bt} \operatorname{sen} at \, dt = \frac{\cos at}{a} e^{bt} + \frac{b}{a} \int e^{bt} \cos at \, dt;$$

pero $\int e^{bt} \cos at \, dt = \frac{\operatorname{sen} at}{a} e^{bt} - \frac{b}{a} \int e^{bt} \operatorname{sen} at \, dt,$

por tanto;

$$\int e^{bt} \operatorname{sen} at \, dt = -\frac{\cos at}{a} e^{bt} + \frac{b}{a^2} e^{bt} \operatorname{sen} at - \frac{b^2}{a^2} \int e^{bt} \operatorname{sen} at \, dt$$

de donde

$$\int e^{bt} \operatorname{sen} at \, dt = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{b}{a^2} e^{bt} \operatorname{sen} at - \frac{\cos at}{a} e^{bt} \right),$$

y, sustituyendo este valor en la (7), se tiene

$$i = \frac{E_0}{L} e^{-bt} \left[\frac{a^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{b}{a^2} e^{bt} \operatorname{sen} at - \frac{\cos at}{a} e^{bt} \right) \right],$$

ó bien

$$i = \frac{E_0}{L} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} at - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos at \right).$$

Ahora podemos hacer

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b},$$

luego $i = \frac{E_0}{L \sqrt{a^2 + b^2}} (\operatorname{sen} at \cos \varphi - \cos at \operatorname{sen} \varphi),$

ó, finalmente,

$$i = \frac{E_0}{L \sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} (at - \varphi).$$

→ FIN ←

El interesado ha sido calificado en el día de la fecha
de

Aprobado por el

Tribunal compuesto por los Señores

Dr. Dn. Francisco de S. Rojas (Presidente)

, , , . Eduardo Lozano (Vocal)

, , , , Francisco Cos (, ,)

, , , , Luis Octavio de Toledo (, ,)

Dr. Antonio Vela (Secretario)

Madrid 9 de Octubre de 1902.

VVA. BHSC. LEG.69-2 n4225

УВА. ВНС. ЛЕГ. 69-2 n4225

VVA. BHSC. LEG.69-2 n4225

УВА. ВНС. ЛЕГ. 69-2 n4225

УВА. ВНС. ЛЕГ. 69-2 n4225