



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**Cálculo plástico de pórticos. Método
Directo. Caso de carga distribuida
uniforme.**

Autor:

Rodríguez Barrocal, Irene

Tutor:

Cacho Pérez, Mariano

**Dpto. Construcciones Arquitectónicas,
Ingeniería del Terreno y Mecánica de los
Medios Continuos y Teoría de estructura**

Valladolid, Julio 2020.

Resumen

Este proyecto se centra en el análisis límite o cálculo plástico de pórticos de barras esbeltas mediante un método directo basado en el Principio de Trabajos Virtuales (PTV). El método consiste en buscar el mecanismo de colapso de la estructura a partir de las ecuaciones de equilibrio planteadas mediante problemas virtuales en desplazamientos. Este tipo de planteamientos es poco sistemático y requiere invertir tiempo en la búsqueda del mecanismo adecuado.

Este proyecto trata de buscar una forma de sistematizarlo gracias a la teoría de mecanismos y a la optimización basada en criterios energéticos para obtener las ecuaciones necesarias en una estructura planteada y que automáticamente sea capaz de resolver el problema planteado. Además se hará uso de las ecuaciones de compatibilidad precisas para conocer los giros en las rótulas plásticas en el momento del colapso de la estructura.

Palabras clave

Optimización

Energía

Cálculo plástico

Mecanismo de colapso

Rótulas plásticas

Abstract

This project focuses on limit analysis or plastic calculation of slender bar frames using a direct method based on the Virtual Works Principle (VWP). The method consists in looking for the mechanism of collapse of the structure from the equilibrium equations posed by virtual displacement problems. Such approaches are piecemeal and require time to find the right mechanism.

This project tries to find a way to systematize it thanks to the theory of mechanisms and optimization based on energy criteria in order to obtain the necessary equations in a proposed structure that will automatically be able to solve the problem posed. In addition, use will be made of the precise compatibility equations to know the rotations in the plastic labels at the moment of the collapse of the structure.

Key words

Optimization

Energy

Plastic calculation

Collapse mechanism

Plastic hinges

Índice

Resumen	3
Palabras clave	3
Abstract.....	4
Key words.....	4
Índice de Figuras	7
Índice de ecuaciones.....	9
Índice de Tablas	10
CAPÍTULO 1	11
1. Introducción.....	12
1.1. Objetivos	12
1.2. Justificación del trabajo	12
1.3. Estructura del documento	13
CAPÍTULO 2	15
2. Marco teórico. Cálculo plástico.	16
2.1. Fundamento histórico.....	16
2.2. Comportamiento de la sección	16
2.3. Hipótesis.....	18
2.4. Sección sometida a esfuerzo axil	19
2.5. Sección sometida a flexión pura	20
2.6. Sección sometida a flexión simple	23
2.7. Sección sometida a flexión compuesta.....	24
2.8. Otros factores	25
2.9. Teoremas fundamentales de análisis plástico	26
2.9.1. Teorema del límite superior.....	26
2.9.2. Teorema del límite inferior	27
2.10. Métodos de resolución	27
2.10.1. Método estático.....	27
2.10.2. Método cinemático.....	28
2.11. Cálculo del grado de hiperestaticidad.....	28
2.11.1. Estructura isostática.....	31
2.11.2. Estructura hiperestática.....	31
2.11.3. Mecanismos	32

2.12.	Rótulas plásticas.....	32
2.13.	Cálculo plástico en estructuras. Caso de cargas puntuales.....	33
2.14.	Cálculo plástico en estructuras. Caso de cargas distribuidas.....	37
CAPÍTULO 3		41
3.	Teoría de mecanismos	42
3.1.	Cinemática directa	43
3.1.1	Matrices de transformación homogéneas	44
3.2.	Aplicación de la teoría de máquinas al cálculo plástico.....	48
CAPÍTULO 4		49
4.	Resultados	50
4.1.	Ejemplo 1. Pórtico biempotrado con carga puntual.	50
4.2.	Ejemplo 2. Pórtico empotrado-apoyado con carga puntual	57
4.3.	Ejemplo 3. Pórtico biempotrado con carga distribuida	59
4.4.	Ejemplo 4. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y cargas distribuidas.....	63
CAPÍTULO 5		66
5.1.	CONCLUSIONES	67
5.2.	LÍNEAS FUTURAS	67
CAPÍTULO 6		70
.....		70
6.	Bibliografía	71

Índice de Figuras

Figura 1. Diagrama tensión-deformación.....	17
Figura 2. Diagrama tensión-deformación simplificado.	18
Figura 3. Esfuerzo axial en sección.....	19
Figura 4. Momento flector en sección.....	20
Figura 5. Hipótesis de Navier	20
Figura 6. Distribución de tensiones	21
Figura 7. Plastificación de una sección sometida a flexión pura.	22
Figura 8. Distribución de tensiones en una sección sometida a flexión compuesta.....	23
Figura 9. Sección sometida a flexión compuesta.	24
Figura 10. Plastificación de una sección sometida a flexión compuesta.	25
Figura 11. Plastificación de una sección sometida a flexión compuesta.	25
Figura 12. Viga biempotrada. Ejemplo cálculo límite superior	26
Figura 13. Viga biempotrada. Ejemplo del teorema de límite inferior.	27
Figura 14. Pórtico empotrado-apoyado	30
Figura 15. Barra empotrada. Caso isostático	31
Figura 16. Barra biempotrada. Caso hiperestático.	31
Figura 17. Barra empotrada con rótula. Mecanismo.	32
Figura 18. Pórtico con carga puntual.	34
Figura 19. Mecanismo de colapso 1 de un pórtico con carga puntual.....	34
Figura 20. Mecanismo de colapso 2 de un pórtico con carga puntual.....	35
Figura 21. Mecanismo de colapso combinado de un pórtico con carga puntual.....	35
Figura 22. Estudio de ángulos de un dintel de un pórtico con carga puntual.....	36
Figura 23. Pórtico con carga distribuida.	37
Figura 24. Mecanismo de colapso de un pórtico con carga distribuida.	38
Figura 25. Mecanismo de colapso en un pórtico con carga distribuida. Aplicación del PTV	38
Figura 26. Mecanismo de 4 barras.	42
Figura 27. Mecanismo de una estructura.	42
Figura 28. Esquema de un robot	44
Figura 29. Robot para el método DH.....	45
Figura 30. Ejes y numeración de eslabones según el método DH.....	45
Figura 31. Situación de los ejes Z en los eslabones según el método DH.....	46
Figura 32. Sistema de referencia en cada eslabón según el método DH	46
Figura 33. Ejemplo 1. Pórtico biempotrado con carga puntual	51
Figura 34. Geometría. Pórtico biempotrado con carga puntual.	52
Figura 35. Grados de hiperestaticidad. Pórtico biempotrado con carga puntual.....	52
Figura 36. Matrices de Teoría de Máquinas. Pórtico biempotrado carga puntual.....	53

Figura 37. Mecanismos propuestos. Pórtico biempotrado carga puntual.	54
Figura 38. Ecuaciones de compatibilidad. Pórtico biempotrado carga puntual.	54
Figura 39. Ecuaciones de energía. Pórtico biempotrado carga puntual.	55
Figura 40. Funciones de compatibilidad. Pórtico biempotrado carga puntual.	55
Figura 41. Mecanismo de colapso. Pórtico biempotrado carga puntual.	56
Figura 42. Ejemplo 2. Pórtico empotrado-apoyado con carga puntual.	57
Figura 43. Geometría. Pórtico empotrado-apoyado carga puntual.	57
Figura 44. Cálculo de GH. Pórtico empotrado-apoyado carga puntual.	58
Figura 45. Ejemplo 3. Pórtico biempotrado con carga distribuida.	59
Figura 46. Diagrama de flujo del código.	60
Figura 47. Datos. Pórtico biempotrado carga distribuida.	61
Figura 48. Valor inicial de x. Pórtico biempotrado carga distribuida.	62
Figura 49. Ejemplo 4. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y distribuidas.	63
Figura 50. Datos. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y distribuidas.	63
Figura 51. Geometría. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y distribuidas.	64
Figura 52. Posición de x. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y distribuidas.	64

Índice de ecuaciones

Ecuación 1. Tensión en una sección.	19
Ecuación 2. Tensión en un punto de una sección.	20
Ecuación 3. Momento elástico que soporta una sección.	21
Ecuación 4. Momento plástico de una sección	22
Ecuación 5. Formación de rótulas debido a la flexión compuesta.....	23
Ecuación 6. Tensión de una sección sometida a flexión compuesta.....	24
Ecuación 7. Relación de grados de hiperestaticidad	29
Ecuación 8. Grado de hiperestaticidad externo.....	29
Ecuación 9. Grado de hiperestaticidad global.	29
Ecuación 10. Grado de hiperestaticidad global. Número de incógnitas.....	29
Ecuación 11. Grado de hiper estaticidad global. Número de ecuaciones.....	29
Ecuación 12. Grado de hiperestaticidad global. Caso específico.	30
Ecuación 13. Numero de ecuaciones de equilibrio.....	33
Ecuación 14. Relación desplazamiento-ángulo	36
Ecuación 15. Principio de Trabajos Virtuales.....	36
Ecuación 16. Matriz homogénea.	47
Ecuación 17. Matriz de transformación	47
Ecuación 18. Matriz de cambio de base para estructuras de 2 dimensiones.	48
Ecuación 19. Matriz de transformación para estructuras en 2 dimensiones	48
Ecuación 20. Restricción de compatibilidad.....	50

Índice de Tablas

Tabla 1. Parámetros a identificar según el método D-H.....	47
Tabla 2. Resultados. Pórtico biempotrado con carga puntual.....	56
Tabla 3. Resultados. Pórtico empotrado-apoyado con carga puntual.....	58
Tabla 4. Resultados. Pórtico biempotrado con carga distribuida.....	62
Tabla 5. Resultados. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y distribuidas.	65

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1. Introducción

1.1. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es la continuación del estudio del cálculo plástico impartido en la asignatura de cuarto curso del grado de ingeniería mecánica, *Estructuras y Construcciones Industriales*. En ella, se adquieren unos conocimientos sobre este campo que alcanzan hasta la capacidad de resolver manualmente mediante el método de combinación de mecanismos posibles el momento de colapso plástico en estructuras sometidas a cargas puntuales, lo que incluye los valores de las cargas límites, los momentos internos, los giros y desplazamientos que se producen en consecuencia.

En este proyecto se profundizará en dichos conocimientos con el fin de obtener una base sólida para poder avanzar hasta obtener un código que sistematice lo más sencillamente posible el cálculo, que antes se realizaba manualmente, de estructuras sometidas a cargas uniformemente distribuidas, cómo puede ser por ejemplo el caso de un pórtico sometido a cargas de viento o de nieve.

El cálculo plástico puede resultar una tarea complicada de resolver a mano por varias razones, la primera de ellas y más importante, que aunque sea una estructura sencilla sin muchos elementos implicados, se pueden obtener numerosos mecanismos posibles de fallo, siendo imprescindibles el estudio de cada uno de ellos y el ensayo posterior de la posibilidad física de estos. Por otro lado se presenta la dificultad de encontrar un PFV adecuado para nuestra estructura estudiada en la obtención tanto del desplazamiento cómo de las fuerzas.

1.2. Justificación del trabajo

Con la creación de un código basándonos en los criterios energéticos y gracias a la teoría de mecanismos, que nos ayuda a plantear las ecuaciones de equilibrio de forma sistemática, aumentamos la rapidez de resolución y la ausencia de posibles errores.

Por lo que la creación de un proyecto de este tipo está completamente justificado, ya que facilita la resolución de estructuras que contengan más elementos complejos asegurándonos de su correcta resolución.

1.3. Estructura del documento

Se ha querido estructurar el proyecto de forma progresiva, comenzando por una base teórica, tanto por la parte del cálculo plástico como por la parte de la teoría de máquinas, seguida por la resolución y explicación de unos casos prácticos en los que se pone en uso la teoría en la cual se basan.

En cuanto al marco teórico del área de estructuras, se ha querido destacar el comportamiento de secciones frente a diferentes esfuerzos que posteriormente servirán para justificar ciertas afirmaciones y simplificaciones. Se continúa con la explicación de los teoremas en los que se basan los criterios de resolución y en los posibles métodos a los que se recurre para su cálculo.

Se ha hecho especial hincapié en el cálculo de grados de hiperestaticidad, ya que es el primer paso para enfrentarse a un problema de cálculo plástico y sin el cual no se podría continuar.

Por último, en este capítulo, se explica la formación de rótulas, las cuales son imprescindibles para la formación de un mecanismo, y se presentan dos formas de resolución, un caso con carga puntual y otro con carga distribuida.

El capítulo 3, se centra en documentar la parte teórica de máquinas, prestando especial interés en la resolución de la cinemática directa y en particular en el método Denavit-Hartenberg, el cual será usado para redactar el código.

El capítulo 4 presenta unos casos prácticos los cuales se han sistematizado mediante un código en *MATLAB*, y por último las conclusiones obtenidas y las líneas futuras en las cuales se podría seguir ampliando el campo de estudio.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO.

CÁLCULO PLÁSTICO.

2. Marco teórico. Cálculo plástico.

2.1. Fundamento histórico.

Se comienza a hablar del concepto de plasticidad en 1713 con Parent, autor de establecer la distribución lineal de tensiones en una sección sometida a un momento flector. Tresca enunciará su criterio de plastificación dando pie a la Teoría de la Plastificación en 1864. Posteriormente autores como von Mises, Levy y Prandtl entre otros, darán forma a este estudio proporcionando teorías y ensayos útiles para la evolución del estudio en este campo. Sin embargo, aportaciones como las de Neal [2] junto a su equipo de estudio de la escuela inglesa de Cambridge en los años 40 sobre el análisis límite es lo que nos introduce a la actual teoría del cálculo plástico.

Cabe destacar la relación íntima del cálculo plástico con la programación matemática, ya que gracias a esta y a su aplicación sistemática a los distintos problemas de esta área se produjo un importante avance en el estudio de la plasticidad y de casos límites. Fourier entre ellos fue un pionero en dicha aplicación.

Posteriormente Doblaré [1] se basará en las teorías anteriormente propuestas para exponer cálculo plástico por flexión, tanto pura como simple y compuesta, en pórticos simples y vigas.

2.2. Comportamiento de la sección

Una sección se puede comportar de forma elástica o de forma plástica, esto depende de la máxima tensión que esté soportando. Si la máxima tensión que soporta es inferior o igual al límite elástico del material del que está formado, se tratará de un comportamiento elástico; si por el contrario, esa máxima tensión supera el valor límite, su comportamiento será plástico. Para obtener esta carga límite se usa el Cálculo Plástico.

Para comenzar detallando el comportamiento de la sección, se hará uso del diagrama tensión-deformación de la figura 1

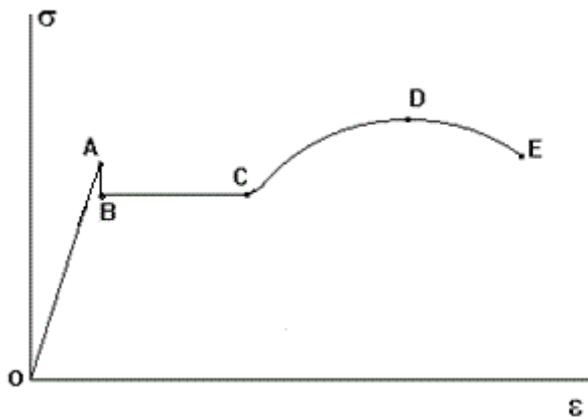


Figura 1. Diagrama tensión-deformación

Este diagrama representa la relación existente entre la tensión aplicada sobre una probeta, por ejemplo, con la deformación que dicho elemento de estudio presenta.

Como anteriormente se ha citado, podemos encontrar dos comportamientos destacados unidos por un tercero. El primero de ellos sería el comportamiento elástico, desde el punto O hasta el A. En este tramo, la probeta es sometida a una tensión máxima que no supera el límite elástico, y por consiguiente cuando este esfuerzo cese, la probeta volverá a su forma inicial. Se puede observar con facilidad que la pendiente es una recta con una inclinación constante, esto quiere decir que la tensión ejercida sobre nuestro objeto de estudio es proporcional a la deformación existente en él. La relación entre ambos se conoce como la constante de proporcionalidad E, o habitualmente llamada *Módulo de Young*.

El tramo de transición entre los dos comportamientos previamente enunciados se conoce como fluencia. Una vez alcanzado el punto A en el diagrama propuesto, se observa una caída de la tensión hasta B. Estos puntos son conocidos respectivamente como límite de fluencia superior y límite de fluencia inferior. En el tramo BC la deformación aumenta considerablemente sin necesidad de aportar una tensión mayor. Este tramo se conoce como fluencia plástica. Las deformaciones comienzan a ser irreversibles.

Tras haber alcanzado el punto C, el material proporciona un endurecimiento por deformación, esto quiere decir que para que la probeta se siga deformando es necesario seguir aplicando tensión. La relación entre los dos parámetros estudiados ya no es lineal y termina al alcanzar el punto D, conocido como tensión última. La tensión de éste punto es la máxima que soporta el material estudiado, y da lugar al último tramo, la estricción de la probeta hasta alcanzar la rotura en E.

En la realidad se efectúan algunas simplificaciones compensándolo posteriormente con factores de error. Entre ellas se encuentran:

- Se ignora el límite de fluencia superior, ya que se encuentra muy próximo al límite inferior.

- Se sustituye el comportamiento no lineal del efecto del endurecimiento por deformación por uno lineal debido a la escasa pendiente del primero.

Se obtiene de esta forma un diagrama como el de la figura 2 mucho más sencillo.

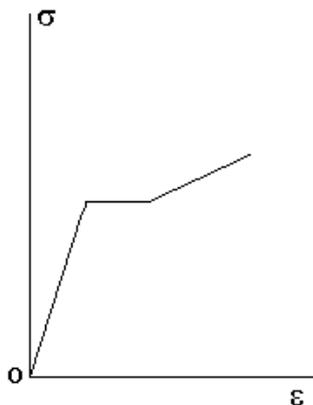


Figura 2. Diagrama tensión-deformación simplificado.

2.3. Hipótesis

Para poder resolver estos problemas se deben asumir ciertas hipótesis con las que se trabajará durante toda la exposición:

- Se asume un material homogéneo e isótropo.
- Se supone la condición de pequeños desplazamientos y deformaciones.
- No se tienen en cuenta los fenómenos de inestabilidad, es decir, el pandeo.
- Se admiten las hipótesis de Navier.
- Se admite un comportamiento elástico-plástico ideal.

- No se tienen en cuenta los efectos de las deformaciones permanentes y de las tensiones residuales.
- Sólo se trabajará con cargas estáticas.

Estas hipótesis serán aceptadas durante todo el proceso de cálculos posteriores.

2.4. Sección sometida a esfuerzo axial

Una sección está sometida a un esfuerzo de tracción o de compresión como se muestra en la figura 3, cuándo sobre sus caras actúan fuerzas iguales en valor pero de sentido contrario y cuya acción pasa por el centro de gravedad de dicha sección.

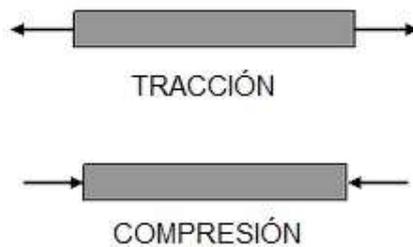


Figura 3. Esfuerzo axial en sección.

Como consecuencia de esto, la tensión existente en cualquier sección será constante, ecuación 1, ya que el valor de la carga y del área estudiada no varía.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Ecuación 1. Tensión en una sección.

Si se aumenta el valor de la fuerza que actúa, la tensión aumentará linealmente hasta que toda la sección alcance el valor de fluencia simultáneamente.

2.5. Sección sometida a flexión pura

Para que una sección esté sometida a flexión pura debe existir un momento flector actuando sobre ella como el que se muestra en la figura 4.



Figura 4. Momento flector en sección.

El estudio de la flexión pura se basa en la hipótesis de Navier, la cual enuncia que:

“Las secciones que son planas y perpendiculares al eje de la viga de estudio antes de producirse la deformación seguirán siendo planas y perpendiculares al mismo eje después de la deformación.”

Este postulado aparece reflejado en la figura 5.

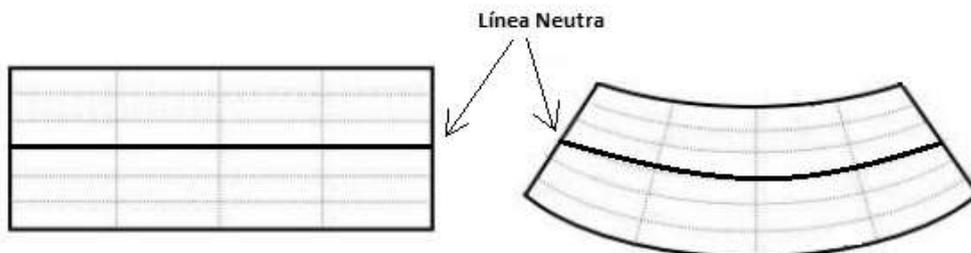


Figura 5. Hipótesis de Navier

Aplicando unos principios básicos de trigonometría se llega a obtener que la tensión en cada punto de la sección sea proporcional a la distancia de la línea neutra como muestra la ecuación 2

$$\sigma = M \frac{z}{I}$$

Ecuación 2. Tensión en un punto de una sección.

Cabe destacar que la tensión en la línea neutra es nula, ya que en dicho punto z es igual a 0. De esta forma, la distribución de las tensiones en la sección tomará la forma reflejada en la figura 6.

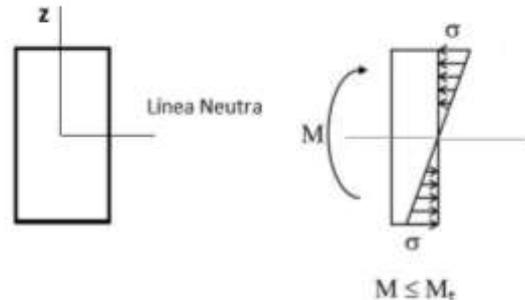


Figura 6. Distribución de tensiones

En los extremos superior e inferior de la sección donde z_{max} , se obtiene un momento elástico correspondiente al obtenido en la ecuación 3 y es el momento máximo que soporta la sección sin que plastifique ninguna zona de la sección.

$$M_{elastico} = \sigma \frac{I}{z_{max}}$$

Ecuación 3. Momento elástico que soporta una sección.

Siendo $\frac{I}{z_{max}} = W$ conocido como módulo resistente.

Si a la sección se le aplica el momento elástico, la distribución de tensiones será la dibujada en la figura 6, pero si dicho momento se va aumentando, las distribuciones de las tensiones tomarán las siguientes distribuciones presentes en la figura 7, pasando primero por una fase elastoplástica y posteriormente produciendo la plastificación de la sección.

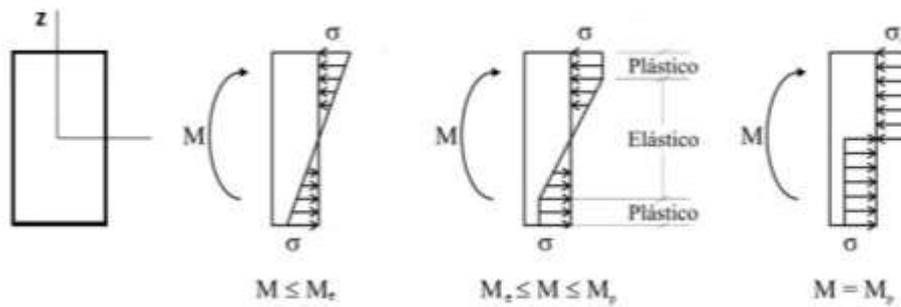


Figura 7. Plastificación de una sección sometida a flexión pura.

En el punto de plastificación se forma cuando el momento aplicado es el momento plástico, ecuación 4.

$$M_p = \sigma S$$

Ecuación 4. Momento plástico de una sección

Siendo S el módulo plástico de la sección.

Este punto de plastificación es de gran importancia en el estudio propuesto de cálculo plástico, ya que, lo que se busca es la rotura de la sección y la plastificación supone un comportamiento muy similar al de una rótula con rozamiento interno. Una vez que se alcanza este valor, la sección tomará el nombre de *rótula plástica*.

Como ocurre normalmente, el valor de M_p es un valor ideal, en la realidad éste valor no se alcanza ya que en la fase elastoplástica la parte elástica debe de estar en equilibrio con la parte plástica, y la primera debe soportar la fluencia de la segunda, lo que crea unas deformaciones que el material no es capaz de soportar, por lo que el valor del momento plástico será menor que el teórico.

Otro factor importante es el factor de forma, se trata de la relación entre el momento plástico y el elástico M_p/M_e , este factor es el incremento resistente a flexión de la sección entre ambas fases, elástica y plástica.

2.6. Sección sometida a flexión simple

Una sección sometida a flexión pura tiene una carga compuesta por un momento flector, mientras que una sección sometida a flexión simple posee un esfuerzo cortante y un momento flector. Esto quiere decir que existirá una tensión normal y además, una tensión tangencial debido al efecto del esfuerzo cortante.

La sección sometida a flexión simple tendrá unas tensiones distribuidas como aparecen reflejadas en la figura 8.

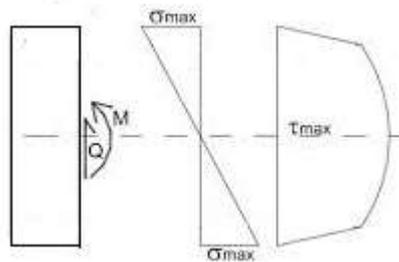


Figura 8. Distribución de tensiones en una sección sometida a flexión compuesta

Se puede observar que para los valores de z mayor, es decir, en los extremos de la sección, la plastificación será causada por la tensión normal, mientras que en la zona de la línea neutra, lo hará la tensión tangencial debida al esfuerzo cortante.

En este caso la formación de una rótula plástica se puede deber al esfuerzo cortante, al momento flector o a ambas. Para saber cuál de ellos será la causa del fallo se usará la ecuación 5.

$$\alpha = \frac{M}{V} = \frac{\sqrt{3}}{4}h$$

Ecuación 5. Formación de rótulas debido a la flexión compuesta

Siendo M el momento flector, V el esfuerzo cortante y h la altura de la sección.

Si el valor de $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{4}h$ quiere decir que la plastificación se producirá en los extremos debida a la tensión normal.

Si el valor de $\alpha < \frac{\sqrt{3}}{4}h$ quiere decir que la plastificación se producirá en el centro de la sección debida a la tensión tangencial.

Si el valor de $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}h$ quiere decir que la plastificación se producirá por ambas tensiones, la tangencial y la normal.

Al igual que en el caso de flexión pura, el valor del momento irá aumentando hasta producir la rótula plástica de la sección.

2.7. Sección sometida a flexión compuesta.

La flexión compuesta se da cuando la resultante de las tensiones normales que actúan sobre la sección no pasa por el centro de gravedad de ésta, figura 9.

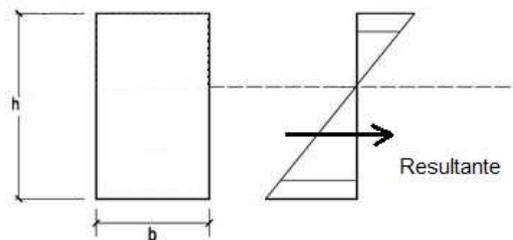


Figura 9. Sección sometida a flexión compuesta.

Para hacer el estudio de la plastificación, se deberá aplicar la ecuación 6, donde N es el esfuerzo axial, A la sección, M el momento que crea la resultante frente al centro de gravedad, I la inercia de la sección y z la distancia presente entre la sección que se estudie y el centro de gravedad.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}z$$

Ecuación 6. Tensión de una sección sometida a flexión compuesta.

La plastificación comenzará a producirse en la línea que soporte mayor tensión e irá progresando hacia el centro según vaya aumentando el valor del axil y del momento hasta alcanzar los valores límites o plásticos de estos.

En el ejemplo de las figuras 10 y 11 se observa cómo aumenta la tensión plástica. Este ejemplo propuesto se encuentra en el documento *Cálculo*

Plástico de Estructuras de Barras: Teoría. de la Universidad de Granada. Ver bibliografía [5].

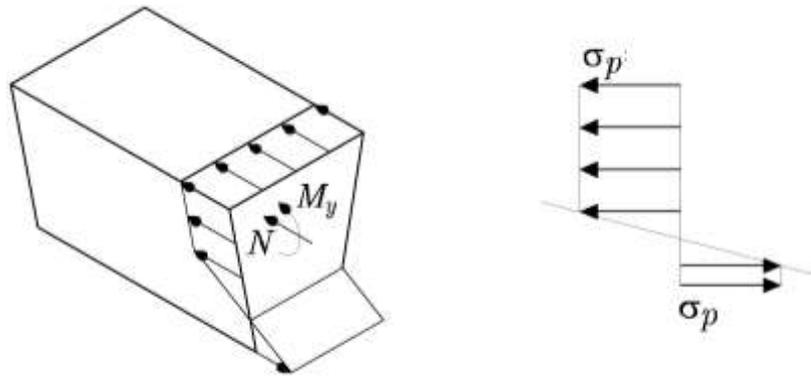


Figura 10. Plastificación de una sección sometida a flexión compuesta.

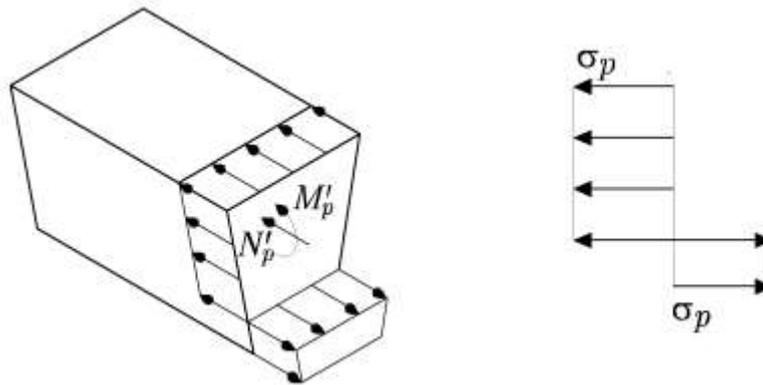


Figura 11. Plastificación de una sección sometida a flexión compuesta.

2.8. Otros factores

Se ha mencionado los casos de flexión pura y flexión simple ya que son las que se verán implicadas a lo largo de este trabajo, pero se ha de tener en cuenta que existen otros casos, como por ejemplo, secciones sometidas a esfuerzo axial, secciones sometidas a flexión compuesta o a torsión.

Además de los esfuerzos que soporta una sección, se han de tener en cuenta otros factores que influyen en el cálculo de la plastificación:

- Deformaciones y tensiones residuales.
- Rigidización tras la deformación.
- Tensiones de contacto.

2.9. Teoremas fundamentales de análisis plástico

Cómo se ha visto anteriormente, el punto de límite elástico se forma al alcanzar una carga y un momento determinado (M_e); y la plasticidad de la sección estudiada se alcanzará con una carga superior y un momento plástico denominado como M_p . A veces es complejo encontrar es carga de colapso, por lo que se opta por acotarlo entre dos valores gracias a dos teoremas fundamentales del cálculo plástico, el teorema del límite superior y el del límite inferior.

El cumplimiento de ambos teoremas proporcionará un valor para la carga de colapso correcta.

2.9.1. Teorema del límite superior

Una carga de P_c la cual provoca un mecanismo de rotura en una estructura será mayor o al menos igual que la verdadera carga de colapso P_p .

$$P_p \geq P_c$$

Este enunciado violaría el cumplimiento anteriormente expuesto de que el momento máximo que puede soportar una sección sea M_p . en el ejemplo de la figura 12.

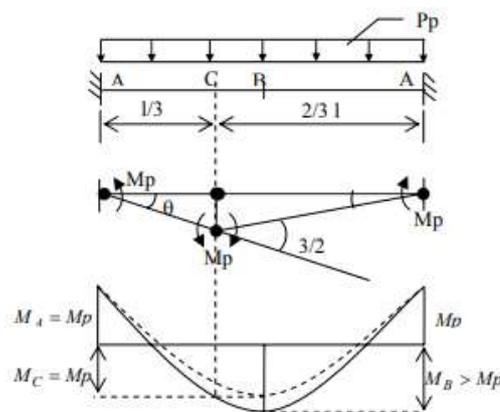


Figura 12. Viga biempotrada. Ejemplo cálculo límite superior

Sólo cuándo se elige el mecanismo verdadero de colapso, se cumplirá la condición de que la carga es igual a la de colapso, es decir $P_p = P_c$.

2.9.2. Teorema del límite inferior

Una carga P_e menor que la carga de colapso P_p , a diferencia del teorema anterior de límite inferior, sí que cumpliría con la condición de que el momento sería inferior o igual a M_p en el punto B, pero al ser una carga menor de la límite, no se alcanzaría a producir la tercera rótula, por lo que no se alcanzaría el estado plástico de la estructura. En la figura 13 se muestra un ejemplo gráfico con una viga biempotrada.

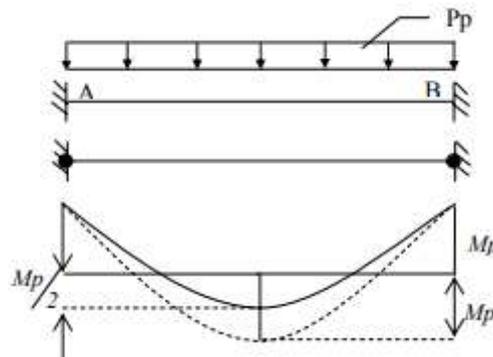


Figura 13. Viga biempotrada. Ejemplo del teorema de límite inferior.

Sólo se podría producir el mecanismo de la viga si la carga P_e es igual a la carga de colapso P_p .

2.10. Métodos de resolución

Para la resolución de estos problemas manualmente se pueden tomar varias opciones, dependiendo de las estructuras que se traten de resolver serán mejores unos que otros.

- Métodos estático
- Métodos cinemático

2.10.1. Método estático

Este método está basado en el método del límite inferior anteriormente presentado. Tomando una estructura cualquiera se comienza por dibujar el diagrama de momentos flectores suponiendo unas cargas hiperestáticas

donde la mayor de ellas será la de colapso. Se deberán identificar los puntos de mayor momento flector, ya que serán los posibles puntos donde se formarán las secciones de rotura.

Partiendo de las ecuaciones de equilibrio e identificando las incógnitas presentes en el problema, se deberán suponer estados de colapso, y comprobar que cumplen las condiciones de plasticidad, $P_{e,i} \leq P_p$ y que $M_i \leq M_p$, siendo M_i el momento en cada sección en el momento del colapso plástico.

2.10.2. Método cinemático

Este método está basado en el método del límite superior anteriormente enunciado. Se deben suponer todos los mecanismos posibles de rotura plástica de la estructura seleccionada y calcular la carga límite o de colapso de cada caso y comprobar que cumple los principios de la plasticidad. Para que esto se dé, la carga de colapso será la menor hallada en los posibles mecanismos, ya que $P_p \leq P_c$.

Este método es el que se va a tratar de sistematizar como objetivo de este proyecto planteado. Los pasos que se deben seguir para resolver un problema con este método son:

- Identificar los puntos donde es más posible que se formen rótulas plásticas (ver apartado 2.12. Rótulas)
- Seleccionar los posibles mecanismos que se pueden formar (ver apartado 2.13 y 2.14)
- Calcular la carga de equilibrio para cada mecanismo gracias al principio de los trabajos virtuales
- Escoger de todas las cargas límites calculadas en el apartado anterior la menor de ellas, ya que esta será la que cumpla los principios plásticos propuestos en el apartado 2.9.1.

2.11. Cálculo del grado de hiperestaticidad

Este cálculo es el primer obstáculo que se debe superar en cualquier problema de resistencia de materiales. Es de vital importancia ya que el valor de este determinará el método de resolución del problema planteado.

Se entiende como grado de hiperestaticidad el número de fuerzas redundantes que posee una estructura, es decir, el número de incógnitas que no pueden ser resueltas por las ecuaciones de equilibrio.

Para realizar el cálculo, primero hay que desglosar el grado de hiperestaticidad en tres; global, interno y externo. Para ello se usará la ecuación 7.

$$GH = GHE + GHI$$

Ecuación 7. Relación de grados de hiperestaticidad

Se comenzará con el *grado externo* (GHE). Su cálculo es muy sencillo, ya que lo que se va a tratar es de ver la estructura como un conjunto valorando sólo los apoyos presentes, de ésta forma la ecuación 8 es la que evalúa este conjunto.

$$GHE = R - 3$$

Ecuación 8. Grado de hiperestaticidad externo.

Siento R la suma de las reacciones que aporta cada apoyo.

Siguiendo con el *grado global*, para su cálculo no existe una ecuación específica, sino que habrá que valorar cada estructura por separado, ecuación 9. Se puede considerar que:

$$GH = I - E$$

Ecuación 9. Grado de hiperestaticidad global.

En este caso, I es el número de incógnitas que se deben calcular, ver ecuación 10, fuerzas existentes y las 6 reacciones de cada barra (3 en cada extremo)

$$I = 6B + R$$

Ecuación 10. Grado de hiperestaticidad global. Número de incógnitas

y E el número de ecuaciones de las que se disponen para dicho cálculo, ecuación 11.

$$E = 3N + 3B + N_d$$

Ecuación 11. Grado de hiper estaticidad global. Número de ecuaciones.

Es decir, 3 ecuaciones por cada nudo (N) debidas al equilibrio de fuerzas de las ecuaciones estáticas, 3 ecuaciones por barra (B) debidas a las fuerzas de equilibrio de cada una de ellas, y por último el número de ecuaciones extra (N_d), estas ecuaciones son las que se obtienen por ejemplo, al encontrar una rótula en la estructura, lo que hace que el momento flector sea nulo; otro ejemplo podría ser una corredera.

Por último el *grado interno*, que se obtendrá restando estos dos anteriormente citados.

Cabe destacar que en muchos problemas, el grado de hiperestaticidad puede ser calculado como muestra la ecuación 12.

$$GH = (R + 3c) - (3 + l)$$

Ecuación 12. Grado de hiperestaticidad global. Caso específico.

Donde R es el número de ecuaciones, c el número de bucles cerrados que se encuentran y l el número de rótulas. Se puede comprobar fácilmente que para la estructura de la figura 14 el grado de hiperestaticidad es:

$$GH = (5 + 3 \times 0) - (3 + 0) = 2$$

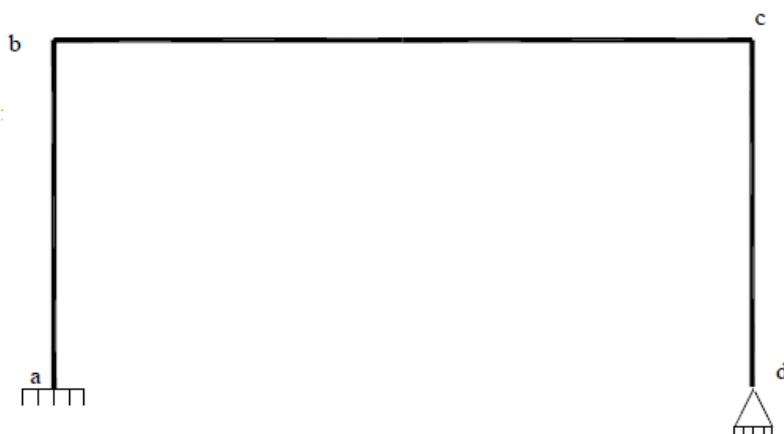


Figura 14. Pórtico empotrado-apoyado

Una vez calculado el grado de hiperestaticidad, se pueden dar tres casos

- GH=0, se trata de una estructura isostática.
- GH>0, se trata de una estructura hiperestática.
- GH<0, se trata de un mecanismo.

2.11.1. Estructura isostática

Cuando la estructura tiene un grado de hiperestaticidad igual a cero, se trata de una estructura isostática, es decir, que el número de reacciones y esfuerzos internos se pueden conocer aplicando solamente las ecuaciones de equilibrio. La estructura de la figura muestra un problema isostático.



Figura 15. Barra empotrada. Caso isostático

En la figura 15, se puede ver con facilidad que el empotramiento proporciona tres incógnitas debido a la naturaleza del apoyo, que serán resueltas gracias a las ecuaciones estáticas, es decir, usando el equilibrio de fuerzas.

2.11.2. Estructura hiperestática

En éste caso, las estructuras tienen un grado de hiperestaticidad mayor que cero, es decir, que poseen más restricciones de las necesarias para que esté en equilibrio. Esto es un problema añadido, ya que con las tres ecuaciones de equilibrio no son suficientes para calcular todas las incógnitas generadas en el problema.

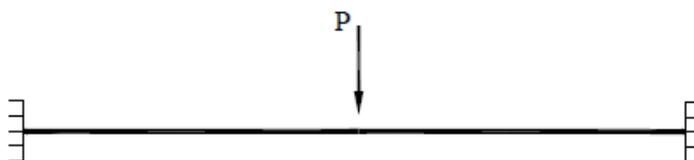


Figura 16. Barra biempotrada. Caso hiperestático.

En la figura 16 se aprecia un caso de una estructura hiperestática, los dos empotramientos añaden 6 incógnitas a resolver, lo cual, con las ecuaciones de equilibrio no son suficientes.

La mayoría de las estructuras con las que se van a tratar van a ser hiperestáticas, y lo que se va a buscar es ir reduciendo estos grados hasta obtener un mecanismo.

2.11.3. Mecanismos

Cuando el grado de hiperestaticidad es menor que cero, se trata de un mecanismo, esto quiere decir que se poseen un número menor del mínimo de reacciones, por lo que la estructura no será estable, como se muestra en la figura 17. Este tipo de estructuras también son conocidas como estructuras hipostáticas.

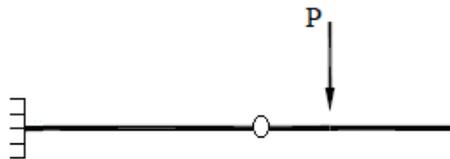


Figura 17. Barra empotrada con rótula. Mecanismo.

2.12. Rótulas plásticas.

Una vez que se conoce el grado de hiperestaticidad, el siguiente paso sería conocer el número de rótulas que se pueden formar y las secciones posibles donde se formen, las cuales pueden ser:

- Zonas de unión de las distintas barras.
- Apoyos empotrados.
- Zonas de aplicación de cargas puntuales o concentradas.
- Secciones intermedias de barras con carga distribuida.
- Zonas con cambio de sección.

En función de las rótulas que se formen en una estructura dada se pueden diferenciar 3 tipos de mecanismos:

- Mecanismo incompleto, se forman menos de $GH+1$ rótulas.
- Mecanismo completo, se forman $GH+1$ rótulas.
- Mecanismo supercompleto, se forman más de $GH+1$ rótulas.

El conjunto de estas secciones en una estructura se denomina *Número de Posibles Rótulas* (NPR) y junto con el grado de hiperestaticidad aplicando la ecuación 13 forman en número de ecuaciones de equilibrio (EQ) que deben ser planteadas.

$$EQ = NPR - GH$$

Ecuación 13. Numero de ecuaciones de equilibrio.

Tras estos cálculos se deben plantear los diferentes mecanismos posibles de la estructura, calculando con ello las cargas de colapso y los momentos plásticos junto con los desplazamientos de los nudos de cada uno de los diferentes mecanismos. Para ello se usarán los problemas virtuales PFV (problema de fuerzas virtuales) y PDV (problema de desplazamientos virtuales).

Por último se deberán comprobar todos los casos estudiados ensayándolos y validándolos.

Como objetivo de este proyecto, anteriormente mencionado, se hará uso de la teoría de los mecanismos para sistematizar este proceso.

2.13. Cálculo plástico en estructuras. Caso de cargas puntuales.

Se ha hablado de secciones y de vigas, pero el caso más común en la realidad es el cálculo de pórticos. En este capítulo ampliaremos el método cinemático para la resolución de un problema plástico a un pórtico como el que se muestra en la figura 18 para abordar algunos aspectos importantes.

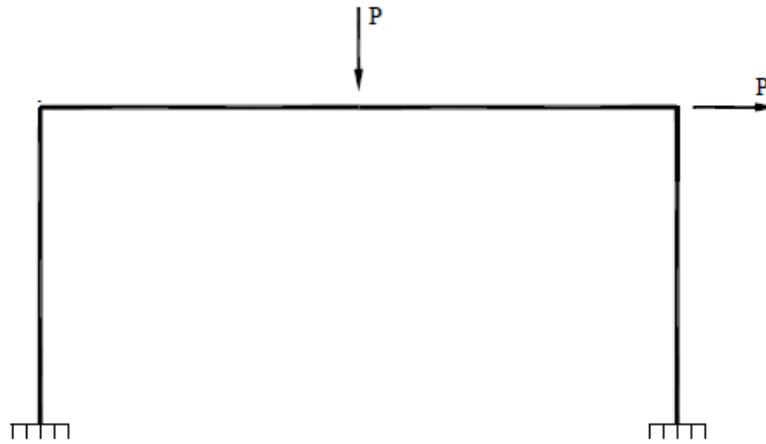


Figura 18. Pórtico con carga puntual.

A la hora de seleccionar los diferentes tipos de mecanismos posibles, se pueden dar casos formados por la combinación de dos mecanismos no lineales, lo que hace que se complique la resolución de estos. Se conoce como mecanismo no lineal aquel que no es posible construir dicho mecanismo con otros más sencillos. Las figuras 19 y 20 muestran dos mecanismos no lineales, mientras que la figura 21 muestra la combinación de las anteriores.

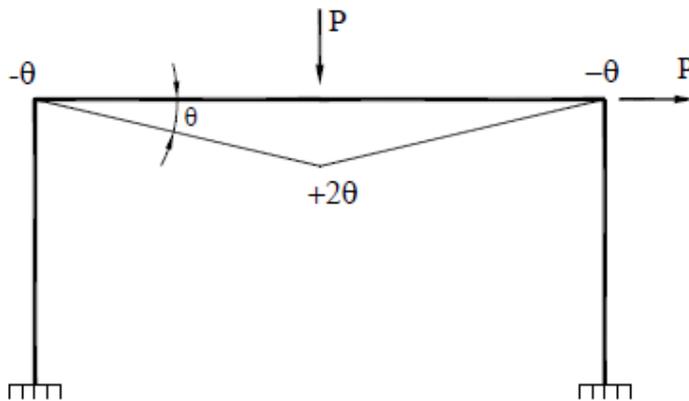


Figura 19. Mecanismo de colapso 1 de un pórtico con carga puntual.

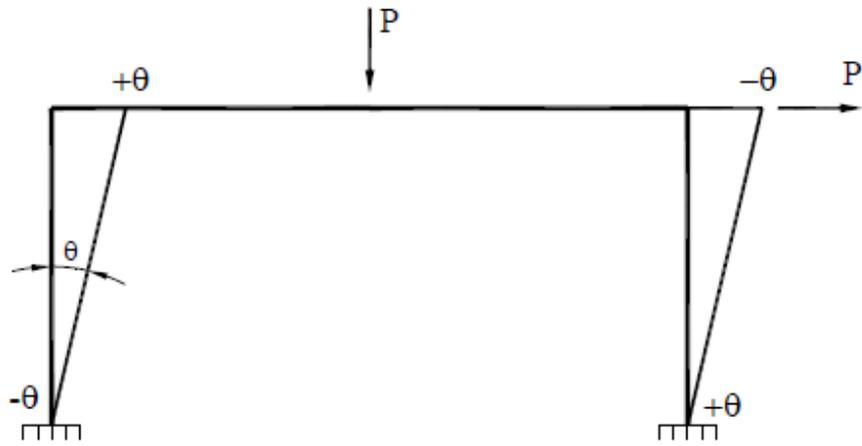


Figura 20. Mecanismo de colapso 2 de un pórtico con carga puntual

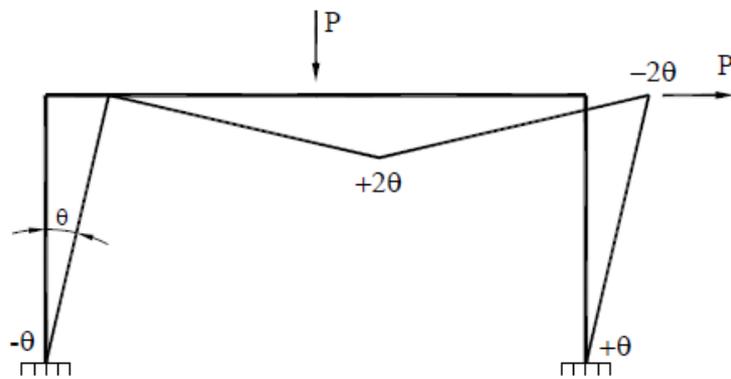


Figura 21. Mecanismo de colapso combinado de un pórtico con carga puntual.

Se observa que en la figura 21 el punto d, extremo superior derecho, tiene un desplazamiento horizontal y vertical.

Una vez que se han identificado las secciones con posibles rótulas y se han planteado los mecanismos que pueden producir el colapso de la estructura, se pasará a desarrollar el estudio de los ángulos gracias a la trigonometría y teniendo en cuenta la hipótesis de pequeños desplazamientos. Por ejemplo, el mecanismo de la figura 19, el punto intermedio del dintel, c, tiene un desplazamiento vertical y hacia abajo que se va a conocer como δ . Separando dicho dintel en dos barras bc y cd como muestra la figura 22, el desplazamiento de ambas es el mismo, por lo que se puede hacer la relación de la ecuación 14:

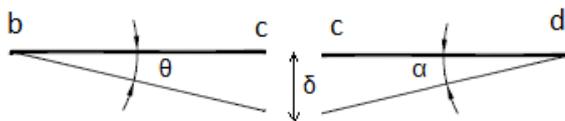


Figura 22. Estudio de ángulos de un dintel de un pórtico con carga puntual

$$\tan \theta = \frac{\delta}{bc}$$

Ecuación 14. Relación desplazamiento-ángulo

Asumiendo la hipótesis de pequeños desplazamientos, obtenemos que $\tan \theta \approx \theta$, por lo que,

$$\theta bc = \delta$$

Análogamente para el otro ángulo

$$\alpha cd = \delta$$

En este caso se cumple que las distancias bc y cd son iguales, por lo que al tener el mismo desplazamiento los ángulos son iguales.

El signo de los ángulos se obtiene dependiendo si desde un punto escogido el ángulo se hace más pequeño o más grande, siendo negativo en el primer caso y positivo en el segundo.

Una vez identificados los ángulos, el siguiente paso es la aplicación del PTV (Principio de Trabajos Virtuales) que relaciona los momentos de las rótulas propuestas y los ángulos de dichas rótulas con los desplazamientos y la carga aplicada en el momento de colapso seleccionado como posible caso de plastificación. Ecuación 15.

$$P\delta = \sum_0^i M_i \theta_i$$

Ecuación 15. Principio de Trabajos Virtuales.

En el caso que se está proponiendo de la figura 19 con los ángulos calculados de la figura 21 se obtendría

$$P\theta bc = M_b(-\theta) + M_c(+2\theta) + M_d(-\theta)$$

$$Pbc = -M_b + 2M_c - M_d$$

Los momentos que se producen son los momentos plásticos en las secciones de rotura, por lo que la carga de colapso del mecanismo estudiado sería:

$$P_c = \frac{4M_p}{bc}$$

Este mismo proceso de cálculo de la carga crítica se haría para cada caso propuesto. La menor carga obtenida será la carga de colapso que hace que la estructura plastifique con el mecanismo que proporciona dicha carga, como se mencionó en el teorema del límite superior (apartado 2.9.1).

2.14. Cálculo plástico en estructuras. Caso de cargas distribuidas.

Si se posee una estructura con una carga distribuida como muestra la figura 23, se añade una nueva incógnita al problema base, que es la posición del punto b, posible rótula para uno de los mecanismos que se pueden plantear.

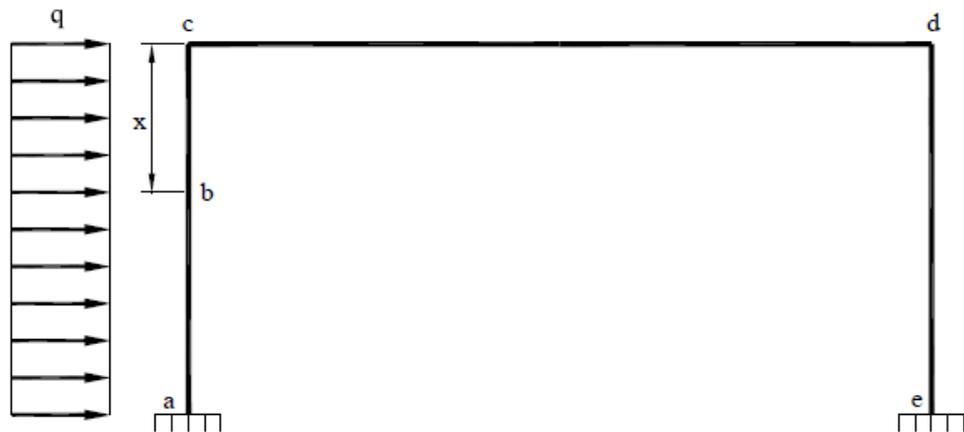


Figura 23. Pórtico con carga distribuida.

La resolución del problema será la misma, solo que se deberá arrastrar la incógnita de la posición del punto b hasta que se plantee el problema de trabajos virtuales donde habrá que minimizar la carga crítica.

Se plantea un mecanismo de colapso en la figura 24, donde está implicada la distancia que se desconoce.

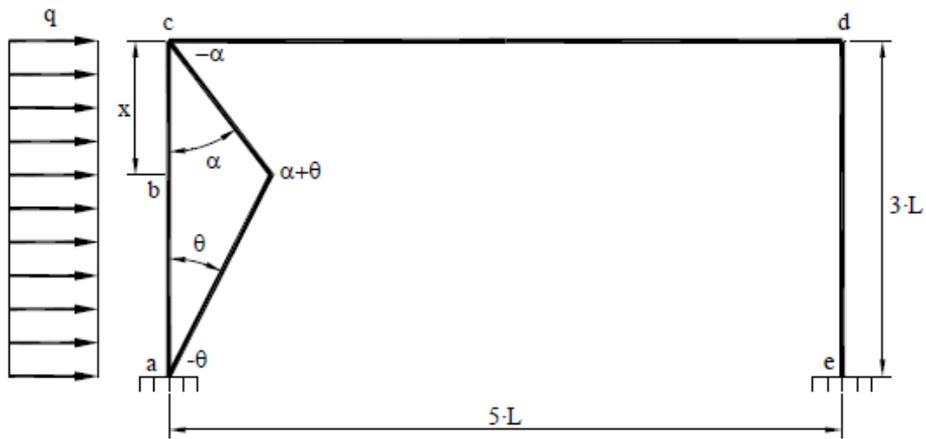


Figura 24. Mecanismo de colapso de un pórtico con carga distribuida.

Se analizarán los ángulos de la misma forma que para el caso de carga puntual,

$$\delta = \theta(3L - x) = \alpha x$$

$$\alpha = \frac{3L - x}{x} \theta$$

Una vez obtenida la relación de ángulos, el siguiente paso será plantear el PTV en función de todas las incógnitas presentes (q_p , x y M_p), para ello se descompondrá la carga distribuida en dos cargas puntuales correspondientes a cada tramo de barra afectado como muestra la figura 25

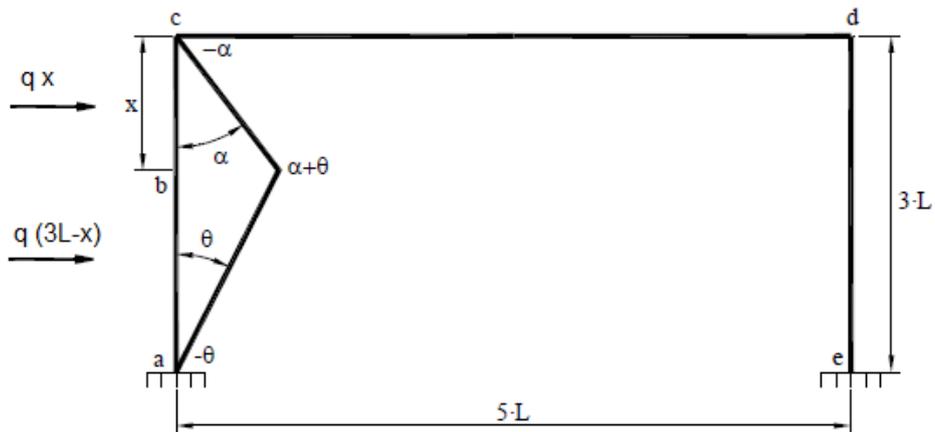


Figura 25. Mecanismo de colapso en un pórtico con carga distribuida. Aplicación del PTV

$$q_p x \frac{x(3l-x)\theta}{2} + q_p(3l-x) \frac{(3l-x)^2\theta}{2}$$

$$= M_a(-\theta) + M_b\left(\frac{3L\theta}{x}\right) + M_c\left(\frac{3L-x}{x}\theta\right)$$

Si este mecanismo fuera de colapso, los momentos en los nudos que poseen rótulas serían momentos plásticos

$$q_p \frac{9L^2 - 3Lx}{2} = \frac{6L}{x} M_p \rightarrow q_p = \frac{4}{3Lx - x^2} M_p$$

Se minimizará la carga de colapso ya que se busca la menor carga

$$\frac{\partial q_p}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{-12L(9L^2 - 6Lx)}{(9L^2 - 3Lx^2)} = 0 \rightarrow 9L^2 - 6Lx = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}L$$

$$q_p = \frac{16}{9L^2} M_p$$

Este proceso habría que realizarlo con todos los mecanismos posibles y elegir la menor carga minimizándola respecto a x y el mayor momento maximizándolo respecto a x también.

CAPÍTULO 3

TEORÍA DE

MECANISMOS.

3. Teoría de mecanismos

En teoría de mecanismos se entiende como mecanismo a el conjunto de elementos mecánicos, uno fijo, conocido como la bancada, que se encuentra en contacto con otros mediante uniones en las que puede haber movimientos relativos entre ellos, figura 26.

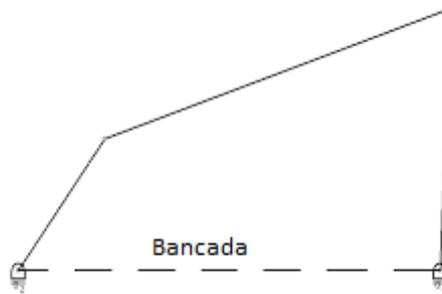


Figura 26. Mecanismo de 4 barras.

Esta definición se puede adaptar al estudio de estructuras y del cálculo plástico, siendo la bancada una barra que uniría los apoyos de la estructura, y las uniones en las que puede haber movimientos serían las rótulas que van plastificando. Por ello es un método útil para la resolución de problemas en los que intervienen estructuras cuyo fin es calcular el mecanismo en el que se van a convertir, figura 27.

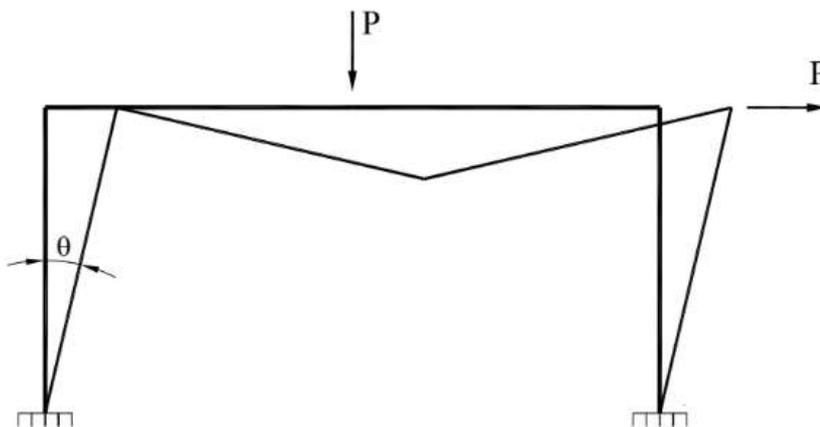


Figura 27. Mecanismo de una estructura.

El estudio de la teoría de mecanismos se divide en dos partes:

- Cinemática, consiste en el estudio del movimiento sin tener en cuenta las causas que lo producen. Dentro de la cinemática se pueden encontrar dos métodos de estudio:

- Cinemática directa, se trata de conocer la localización del objeto de estudio a partir de los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de este.
 - Cinemática inversa, se trata de conocer los parámetros tanto geométricos como de las articulaciones a partir de la localización del robot o de la estructura en el caso aplicado.
- Dinámica, consiste en el estudio del movimiento incluyendo las acciones que lo producen.

Este proyecto usará el cálculo cinemático directo para tratar de sistematizar el cálculo plástico de una estructura dada, ya que lo que se pretende es calcular los desplazamientos producidos.

La teoría de mecanismos es mucho más completa, no sólo es capaz de posicionar un punto determinado, en el caso de la cinemática directa, sino que también es capaz de calcular aceleraciones y velocidades, herramienta que no será de utilidad para este proyecto, ya que como se ha mencionado anteriormente en el apartado 2.3. *Hipótesis*, se asume la premisa de pequeños desplazamientos, por lo que los parámetros de velocidad y aceleración no serán de interés.

3.1. Cinemática directa

A la hora de abordar el problema de la cinemática directa se encuentran varios caminos

- Métodos geométricos, los cuales no son sistemáticos y se basan en la trigonometría y en relaciones geométricas para obtener la posición final del robot o del objeto de estudio. Pueden resultar útiles cuando se cuentan con pocos grados de libertad y con buena visión espacial
- Métodos basados en cambios de sistemas de referencia. Se trata de un método sistemático, el cual usa matrices de transformación homogéneas basadas en el método de Denavit Hatenberg.

En este proyecto se hará uso del segundo método, ya que se busca la sistematización del problema plástico.

3.1.1 Matrices de transformación homogéneas

Se entiende, como ya se ha mencionado, que un robot es una cadena cinemática formada por elementos rígidos, a los que se les denomina eslabones, unidos mediante articulaciones, ver figura 28 .

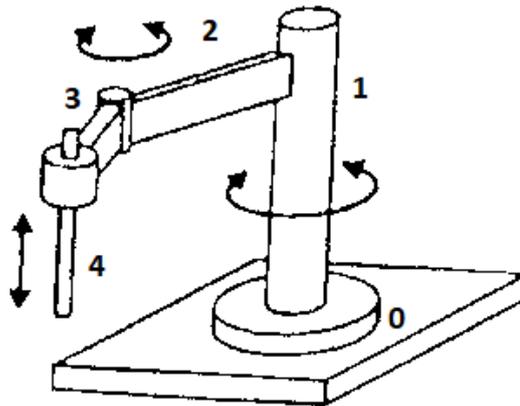


Figura 28. Esquema de un robot

Se plantea un Sistema de Referencia en la base y se sitúan los diferentes puntos de cada eslabón según el SR fijado inicialmente. Estos puntos crean una matriz de transformaciones homogéneas la cual es función de las coordenadas articulares y relaciona el extremo del robot en función del sistema de referencia de la base, el cual se ha implantado inicialmente. Dicha matriz de transformación homogénea se conocerá con el nombre de T .

Para seguir resolviendo éste problema de cinemática directa se deben seguir una serie de pasos que el método *Denavit Hartenberg* logra sistematizar. Para ello se hará un ejemplo práctico con la figura 29 cuyo mecanismo ha sido obtenido de la plataforma **OCW** de la *Universidad del País Vasco* del apartado de *Modelado Geométrico y Cinemático del Robot*, ver bibliografía [12]

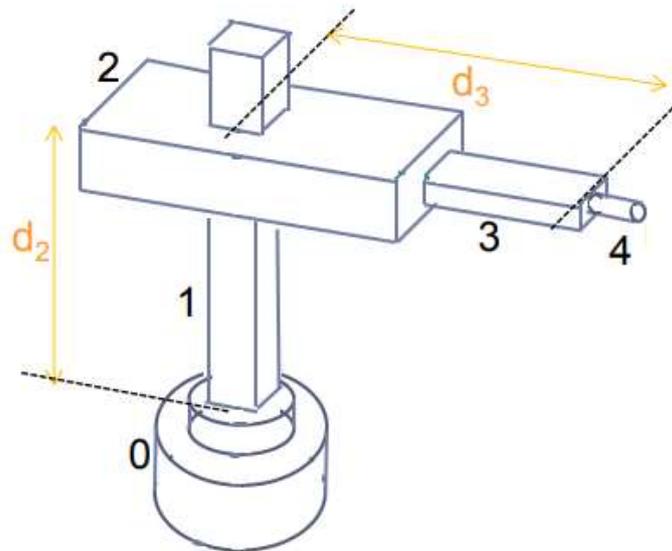


Figura 29. Robot para el método DH.

Asignación de un Sistema de Referencia

1. Numerar los eslabones y las articulaciones, siendo el número 0 la base del robot de estudio.
2. Localizar los ejes de las articulaciones cómo aparece reflejado en la figura 30.

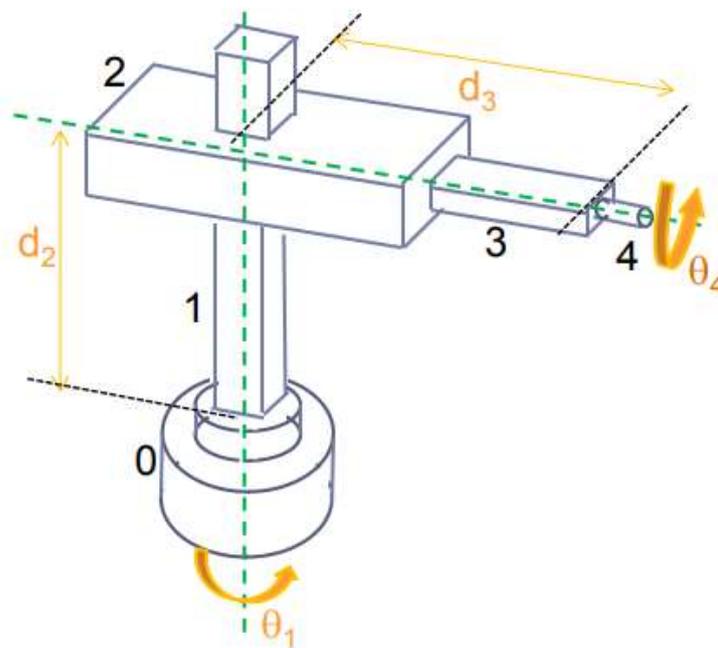


Figura 30. Ejes y numeración de eslabones según el método DH

- Situar el eje Z de cada uno de los eslabones excepto el último, es decir de 0 a $n-1$, siendo n el número total de eslabones. La dirección del eje será el propio de la rotación si es rotativo, y el de desplazamiento si es prismático como se muestra en la figura 31.

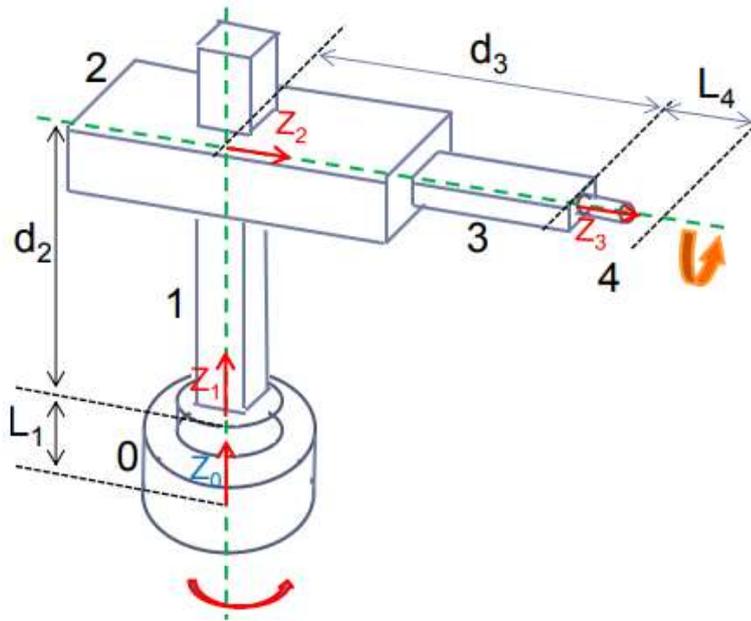


Figura 31. Situación de los ejes Z en los eslabones según el método DH

- Se situarán el resto de coordenadas del sistema de referencia, X e Y, en cada eslabón de la cadena cinemática cómo se muestra en la figura 32.

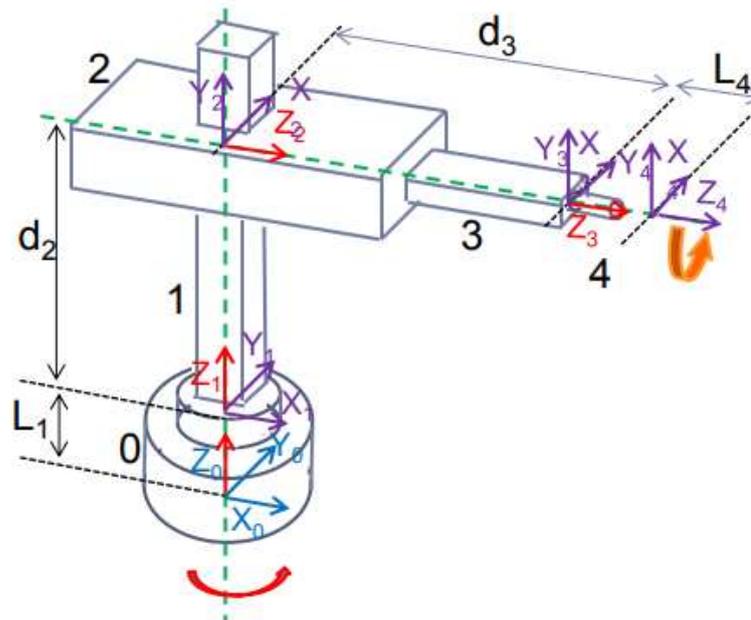


Figura 32. Sistema de referencia en cada eslabón según el método DH

Identificación de los parámetros

5. Este paso consiste en tabular una serie de parámetros presentes en la tabla 1:
- ϑ_i , valor que se obtiene al girar el eje Z_{i-1} para hacer paralelos los ejes X_i y X_{i-1}
 - d_i , valor que se obtiene en el eje Z_i para hacer coincidir dos sistemas de referencia contiguos
 - a_i , valor que se obtiene en el eje X_i para hacer coincidir dos sistemas de referencia contiguos
 - α_i , valor que se obtiene al hacer girar el eje X_i para que coincida el sistema de referencia completo i con el sistema $i-1$.

	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
1	ϑ_1	L_1	0	0°
2	90°	d_2	0	90°
3	0°	d_3	0	0°
4	ϑ_4	L_4	0	0°

Tabla 1. Parámetros a identificar según el método D-H.

Obtención de las matrices homogéneas

6. La matriz homogénea se denomina como A , y tiene la siguiente forma, ecuación 16.

$${}^{i-1}_i A = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 16. Matriz homogénea.

- Creación de matrices de transformación
7. Esas matrices se conocen con el nombre de T , y relacionan el sistema de referencia de la base con el del extremo del robot en función del número de coordenadas que posea como muestra la ecuación 17.

$${}^0_4 T = {}^0_1 A {}^1_2 A {}^2_3 A {}^3_4 A$$

Ecuación 17. Matriz de transformación

3.2. Aplicación de la teoría de máquinas al cálculo plástico.

En el estudio de cálculo plástico en dos dimensiones como se propone en este proyecto, las simplificaciones que puede ofrecer la teoría de mecanismos son de gran importancia y facilitan la resolución de este tipo de problemas.

La matriz homogénea que se ha mencionado en el apartado anterior, pasaría solo a estar compuesta por las variables de las componentes X e Y, siendo todos los elementos referentes al parámetro Z nulos.

La matriz de cambio de base para los casos que sea oportuno tendrá la siguiente forma, ecuación 18:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i & 0 \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 18. Matriz de cambio de base para estructuras de 2 dimensiones.

Siendo los elementos relacionados con z nulos debido a que sólo presenta pares prismáticos, es decir, no hay rotaciones en torno a este eje por estar solo en dos dimensiones. Así mismo, todas las rótulas que se van a considerar van a ser de revolución únicamente, por lo que, sólo al ángulo que se denomina como θ_i va a ser variable a determinar.

Con todo ello, la matriz de transformación que se obtendrá tendrá siempre la misma estructura, ecuación 19,

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i & 0 & O_{x,i} - O_{x,i-1} \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 & O_{y,i} - O_{y,i-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 19. Matriz de transformación para estructuras en 2 dimensiones

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4. Resultados

Una vez que se han establecido las bases teóricas en las que se fundamenta los resultados que se mostrarán a continuación, se van a proponer varios ejemplos que se han resuelto creando un código que sistematice la resolución.

Este proyecto, como se ha mencionado anteriormente, se basará en la cinemática directa de Teoría de Mecanismos para resolver problemas bidimensionales de Cálculo Plástico, es decir, pórticos o estructuras planas, tanto con carga puntual cómo con carga distribuida.

Para sistematizar la resolución de este tipo de problemas, se usan criterios energéticos junto a las técnicas de optimización, y es el propio algoritmo de optimización el que busca el mecanismo de colapso tras imponer las restricciones adecuadas para el problema planteado.

La optimización busca maximizar la energía total del sistema y minimizar la energía disipada, además de cumplir las restricciones de las ecuaciones de equilibrio y de las ecuaciones de compatibilidad incluyendo la compatibilidad de los giros y los momentos acumulados en las rótulas, es decir, que giro y momento tengan el mismo signo, ecuación

$$M \cdot \theta > 0$$

Ecuación 20. Restricción de compatibilidad

Se plantearán 4 ejemplos diferentes, pórtico biempotrado con carga puntual, pórtico empotrado-apoyado con carga puntual, pórtico biempotrado con carga distribuida y por último, un pórtico a dos aguas biempotrado con cargas distribuidas y cargas puntuales.

4.1. Ejemplo 1. Pórtico biempotrado con carga puntual.

La estructura que se va a resolver en el ejemplo 1 es la mostrada en la figura 33. Se trata de un pórtico plano biempotrado con dos cargas puntuales en el centro del dintel y en el extremo derecho de éste.



Figura 33. Ejemplo 1. Pórtico biempotrado con carga puntual

Se trata de una estructura de acero S275 con los siguientes parámetros

$$L = 4m$$

$$P = F = 1000N$$

$$E = \frac{2.1 \times 10^{11}N}{m^2}$$

$$S = 628 \times 10^{-6}m^3$$

Estos parámetros deberán referenciarse al principio del código. A continuación, en la figura 34, se describirá la forma de la estructura, es decir, los puntos de los nodos, las fuerzas que actúan, tanto las conocidas como las que se encuentran presentes en los empotramientos y los valores relacionados con las barras.

```

% Geometría
nodos = {[0, 0], {'Fx', 'Fy', 'Mz'}};
        {[0, L], {0, 0}};
        {[L, L], {0, -F}};
        {[2*L, L], {F, 0}};
        {[2*L, 0], {'Fx', 'Fy', 'Mz'}};
}; % coordenadas / fuerzas
material = {[vE]}; % una lista por material
perfil = {[Iz, Mp]}; % una lista por tipo de perfil
barras = {[1, 2], [1, 1]};
         {[2, 3], [1, 1]};
         {[3, 4], [1, 1]};
         {[4, 5], [1, 1]};
}; % definicion, propiedades(material,perfil)

nd=length(nodos);
nb=length(barras);

```

Figura 34. Geometría. Pórtico biempotrado con carga puntual.

Los valores de nd y nb son respectivamente el número de nodos y el número de barras que contabiliza el programa. Datos que usaremos para el cálculo del grado de hiperestaticidad.

```

NPR=nd;
GH=0;
for i=1:nd
    kk=nodos{i}{2}{1};
    if kk=='Fx'
        GH=GH+1;
    end
end

GH=3*(GH-1);
EQ=NPR-GH;

fprintf('Ecuaciones de equilibrio = %d \n',EQ);
fprintf('Ecuaciones de compatibilidad = %d \n',GH);

```

Figura 35. Grados de hiperestaticidad. Pórtico biempotrado con carga puntual.

Para ello se crea un bucle *for*, el cual recorre todos los nodos (nd) y almacena en la variable kk el valor correspondiente a la fuerza existente, en el nodo estudiado, del eje x . En la figura 35, a la hora de describir los nodos, el programa crea una lista de dos grupos, el primero corresponde a las coordenadas (x, y), y el segundo a los valores de las fuerzas presentes dichos nodos (F_x, F_y, M_z) ya sean conocidos o no. Por lo que en el bucle *for*, lo que

hace es seleccionar nodo a nodo el segundo grupo, el de las fuerzas, y el primer valor presente que corresponde a la fuerza en el eje x.

Una vez almacenado ese valor, el bucle *if* hace una comparación, la cual, si se cumple, añade 1 al valor GH antes de pasar al siguiente nodo. Una vez recorridos todos los puntos, se calculará los grados de libertad y el número de ecuaciones de equilibrio.

En la siguiente parte es dónde se hará uso de la Teoría de Mecanismos. Primero se deberá tener en cuenta la hipótesis de pequeños desplazamientos como se mencionó en el apartado 2.3. *Hipótesis* y posteriormente se describirán todas las matrices que están implicadas, como las homogéneas, las matrices de giros y desplazamientos virtuales, y por último la de momentos reales. Todas ellas serán matrices de ceros, ya que es la forma de inicializar la variable. Ver figura 36.

```
dv=0.0001;
mt=zeros(nd,3,3); % matrices Ti
mmT=zeros(3,3); % matriz T

qi=zeros(EQ,NPR); % giros virtuales
di=zeros(EQ,2,NPR); % desplazamientos virtuales
Mi=ones(1,NPR); % momentos reales
```

Figura 36. Matrices de Teoría de Máquinas. Pórtico biempotrado carga puntual.

Una vez que se tiene todos los parámetros definidos, se comenzará a resolver los mecanismos propuestos gracias a la optimización, ver figura 37. Para ello se propondrán dos mecanismos con unos momentos virtuales iniciales, q_0 , los cuales, una vez resuelto el mecanismo, serán actualizados con los valores que corresponden.

```

% mecanismo (MC1)
q0=[0 1 1 1 0];
options = optimoptions('fsolve','Display','iter','TolFun',1e-30,'TolX',1e-50);
[q,fun]=fsolve(@posicion,dv*q0,options);
qi(1,:)=q;

% desplazamiento de los nodos
di(1,:,:)=delta(q);

% mecanismo (MC2)
q0=[1 1 0 1 1];
[q,fun]=fsolve(@posicion,dv*q0,options);
qi(2,:)=q;

di(2,:,:)=delta(q);

```

Figura 37. Mecanismos propuestos. Pórtico biempotrado carga puntual.

La función *optimoptions*, establece opciones para devolver la visualización iterativa de la función de *fsolve*, la cual resuelve la función posición, ver anejo 1, y devuelve la solución a la variable *q*. Posteriormente, dicha variable será almacenada en la primera fila de *qi*, matriz de los desplazamientos.

Una vez calculados los mecanismos, se plantean las ecuaciones de compatibilidad mediante la aplicación del PFV, figura 38.

```

mi=zeros(GH,NPR); % momentos virtuales
m0=[1 0 0 0 1]; % EC1
[m,fun]=fsolve(@momentosVirtuales,m0,options);
mi(1,:)=m;

m0=[0 1 0 0 0]; % EC2
[m,fun]=fsolve(@momentosVirtuales,m0,options);
mi(2,:)=m;

m0=[0 0 1 0 0]; % EC3
[m,fun]=fsolve(@momentosVirtuales,m0,options);
mi(3,:)=m;

```

Figura 38. Ecuaciones de compatibilidad. Pórtico biempotrado carga puntual.

Para ello, primero se inicializa la variable de los momentos virtuales y gracias a la misma función usada anteriormente, *fsolve*, se resolverán los mecanismos de colapso propuestos gracias a la función *momentosVirtuales*, ver anexo, y se asignarán dichos valores a la variable *mi*.

Por último se plantean las ecuaciones de energía, figura 39. Para ello propondremos unos valores iniciales, *s0*, unos valores mínimos, *lb*, y unos valores máximos, *ub*. Todos ellos tienen una longitud de $1+2*NPR$, que en nuestro caso son 11 valores, de los cuales el primero de ellos está asignado

al valor de lambda, factor por el cual se multiplica la fuerza inicial para obtener la de colapso.

```
s0=zeros(1,1+2*NPR);
s0(1)=100;
s0(2:2+NPR-1)=zeros(1,NPR);
s0(2+NPR:end)=zeros(1,NPR);

lb=zeros(1,1+2*NPR);
lb(2:2+NPR-1)=-1.0;
lb(2+NPR:end)=-50.0;

ub=zeros(1,1+2*NPR);
ub(1)=1000;
ub(2:2+NPR-1)=1.0;
ub(2+NPR:end)=50.0;
```

Figura 39. Ecuaciones de energía. Pórtico biempotrado carga puntual.

Una vez definidos los valores iniciales y los máximos y mínimos, se pasará a resolver la ecuación de la energía, ver anejo 1, gracias a la función *fmincon*, la cual buscará minimizar la energía disipada.

```
options = optimoptions('fmincon','Display','iter','TolFun',1e-30,'TolX',1e-50);
[s,fval]=fmincon(@energia,s0,[],[],[],[],[],lb,ub,@restricciones,options);

lambda=s(1);
M=Mp*s(2:1+NPR);

s0=ones(1,NPR-1);

[s,fval]=fmincon(@energiaDisipada,s0,[],[],[],[],[],[],[],@restricciones2,options);

q=zeros(1,NPR);
q([1 3 4 5])=s(:);
```

Figura 40. Funciones de compatibilidad. Pórtico biempotrado carga puntual.

Una vez ejecutado todo el código, podríamos conocer cualquier valor que fuera de interés para el problema, como pueden serlo la carga de colapso, y los momentos flectores y los giros de las posibles rótulas, tabla 2.

Carga de Colapso	129524,69 N
Momento Flector en "a"	-172700,0 Nm
Momento Flector en "b"	1,27 Nm
Momento Flector en "c"	172700,0 Nm
Momento Flector en "d"	-172700,0 Nm
Momento Flector en "e"	172700,0 Nm
Giro en "a"	0,0 rad
Giro en "b"	0,0 rad
Giro en "c"	0,00656 rad
Giro en "d"	-0,01312 rad
Giro en "e"	0,00656 rad

Tabla 2. Resultados. Pórtico biempotrado con carga puntual.

Se observa que los momentos flectores de los nudos a, c, d y e, son momentos plásticos, por lo que habrá rótulas plásticas en ellos formando el mecanismo de colapso como muestra la figura 41.

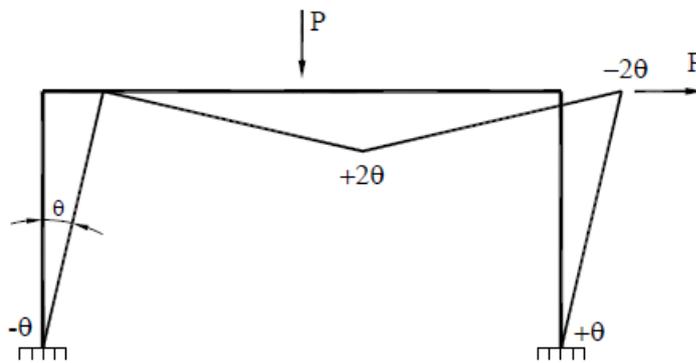


Figura 41. Mecanismo de colapso. Pórtico biempotrado carga puntual.

4.2. Ejemplo 2. Pórtico empotrado-apoyado con carga puntual

La estructura que se va a resolver en el ejemplo 2 es la mostrada en la figura 42. Se trata de un pórtico plano empotrado-apoyado con dos cargas puntuales en el centro del dintel y en el extremo derecho de éste.

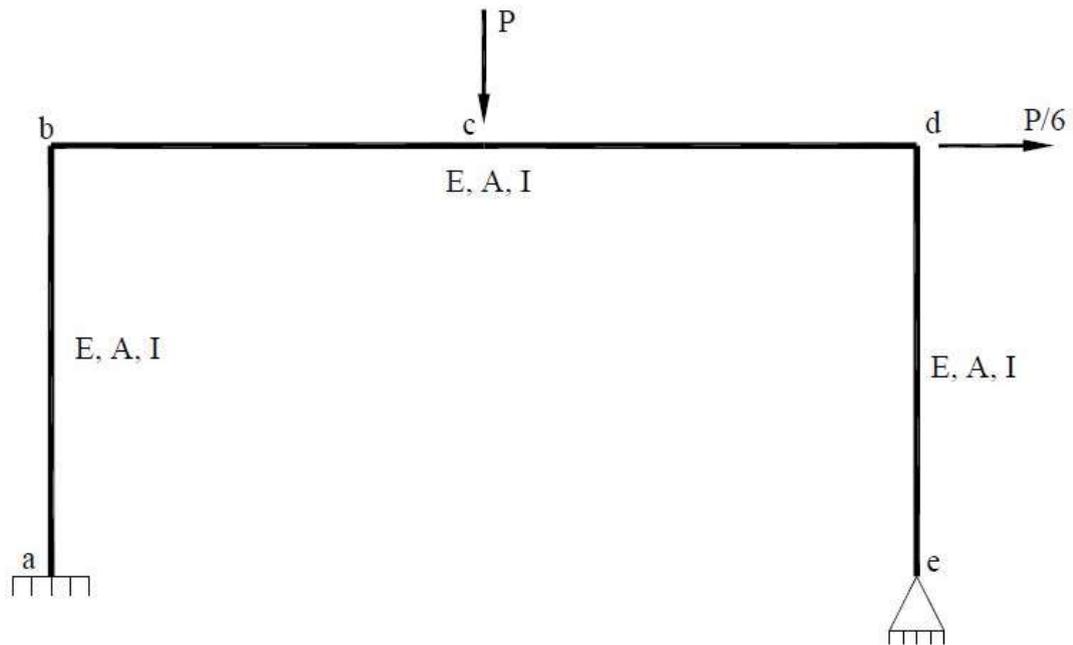


Figura 42. Ejemplo 2. Pórtico empotrado-apoyado con carga puntual.

A la hora de definir la estructura se deberá tener en cuenta el apoyo móvil con las reacciones de éste, por lo que el código se verá como muestra la figura 43.

```
nodos = {[[0, 0], {'Fx', 'Fy', 'Mz'}], % empotramiento
         {[0, L], {0, 0, 0}},
         {[L, L], {0, -F, 0}},
         {[2*L, L], {F/6, 0, 0}},
         {[2*L, 0], {'Fx', 'Fy', 0}} % apoyo fijo
        ]; % coordenadas / fuerzas
```

Figura 43. Geometría. Pórtico empotrado-apoyado carga puntual.

El resto del código se verá igual que el anterior, excepto a la hora de calcular los grados de libertad, se deberá tener en cuenta que los dos apoyos son

diferentes, por lo que en el bucle *for* habrá que añadir una condición adicional. Figura 44.

```

NPR=nd;
GH=0;
for i=1:nd
    kkl=nodos{i}{2}{1};
    kk3=nodos{i}{2}{3};
    if (kkl=='Fx') & (kk3=='Mz')
        GH=GH+3; % empotramiento
    elseif (kkl=='Fx') & (kk3==0)
        GH=GH+2; % apoyo fijo
        NPR=NPR-1;
    end
end

GH=GH-3;
EQ=NPR-GH;

```

Figura 44. Cálculo de GH. Pórtico empotrado-apoyado carga puntual.

La variable de almacenaje *kk1* es la misma que en el caso anterior, guarda el valor de la fuerza en el eje x de cada nodo, mientras que *kk3* almacenará el valor del momento presente en cada nodo. De esta forma, se podrá conocer si es un empotramiento o un apoyo fijo.

Una vez ejecutado todo el código, se obtienen los valores de la tabla 3.

Carga de colapso	172660,0 N
Momento Flector en "a"	-115095,0 Nm
Momento Flector en "b"	-172700,0 Nm
Momento Flector en "c"	172700,0 Nm
Momento Flector en "d"	172700,0 Nm
Momento Flector en "e"	0,0 Nm
Giro en "a"	0,0 rad
Giro en "b"	0,0 rad
Giro en "c"	0,0655616 rad
Giro en "d"	-0,0349461 rad

Tabla 3. Resultados. Pórtico empotrado-apoyado con carga puntual.

4.3. Ejemplo 3. Pórtico biempotrado con carga distribuida

La estructura que se va a resolver en el ejemplo 3 es la mostrada en la figura 45. Se trata de un pórtico plano biempotrado con una carga distribuida en la barra vertical de la izquierda.

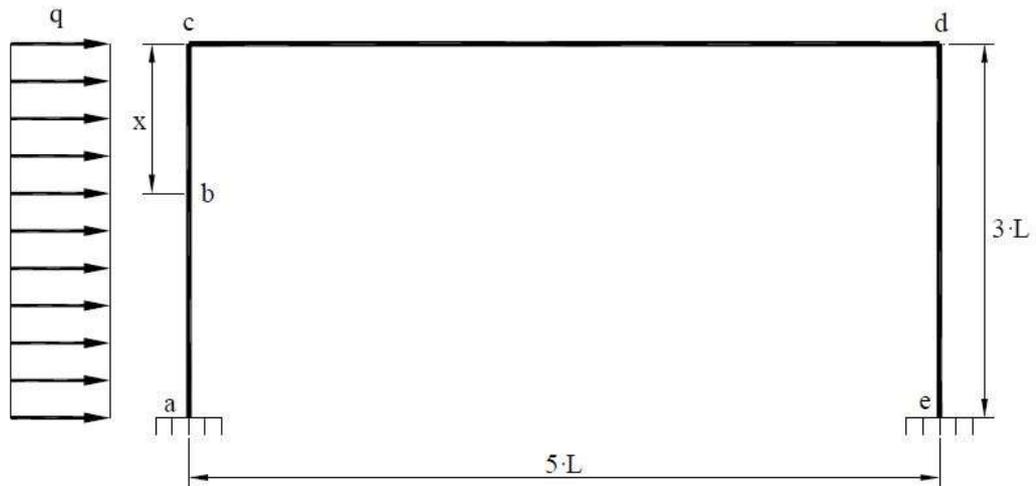


Figura 45. Ejemplo 3. Pórtico biempotrado con carga distribuida.

El caso de carga distribuida añade incógnitas a resolver como la posición de las rótulas plásticas que se forman en el mecanismo, por lo que se deberá tener en cuenta a la hora de crear el código y el algoritmo que resuelva el problema propuesto.

En el siguiente diagrama se muestra la metodología que se ha seguido para crear el código. Figura 46.

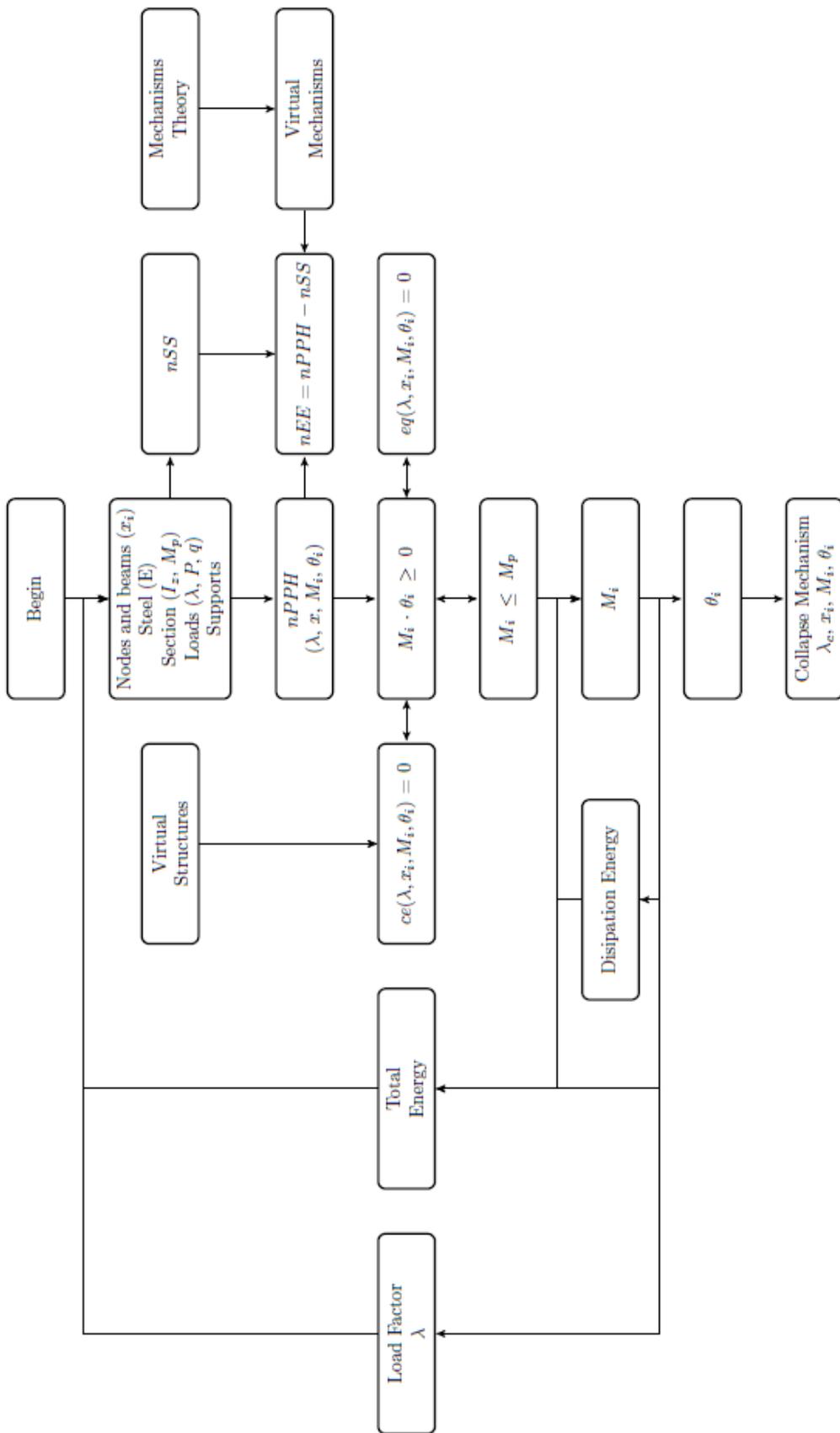


Figura 46. Diagrama de flujo del código.

Se observa en el diagrama de flujo, que el comienzo se basa en recoger los datos de la estructura que se vaya a estudiar, nodos, barras, cargas externas, apoyos y los datos relacionados con el material de construcción. Una vez identificados todos los parámetros, se continuará con el cálculo de los grados de libertad (n_{SS}), el número de posibles rótulas plásticas (n_{PPH}) y como consecuencia de ello, el número de ecuaciones de equilibrio (n_{EE}). Para todo ello se hará uso de la teoría de mecanismos y de los mecanismos virtuales.

Se continúa con las restricciones impuestas, tanto la de concordancia de signo en el giro y en el momento flector de un mismo punto, como el cumplimiento del teorema del límite superior, donde el momento flector en cualquier punto no puede superar el momento plástico.

Finalmente se obtendrán los resultados del momento flector y del giro, siempre y cuando se cumplan las condiciones de energía disipada, la cual debe de ser la mínima, y de energía total, la cual debe de ser máximas. Tras ello se itera el resultado obtenido comenzando todo el proceso para verificar que es el adecuado y entra dentro de los límites de tolerancias impuestos.

Los valores que se van a usar para este ejemplo son los que se muestran en la figura 47.

```
L=1.0;  
F=0*1.0*10^5;  
vE=2.1*10^11;  
Iz=8360.0*10^-8;  
S=628.0*10^-6;  
sigma_F=275*10^6;  
Mp=S*sigma_F;  
p=1000.0;
```

Figura 47. Datos. Pórtico biempotrado carga distribuida.

Se puede observar que el valor de la fuerza puntual F está multiplicada por cero, por lo que en este ejemplo sólo habrá una carga distribuida, pudiéndose adaptar a cualquier tipo de problema que presente ambos tipos de fuerzas.

Se comienza inicializando las variables como en el primer ejemplo, es decir, poniendo todos los valores a cero, y se supone un valor para la rótula que creará la carga distribuida. En este caso se ha supuesto en valor central. Figura 48.

```
x0=0.5*3*L*ones(1,1);

lbl=zeros(1,1);
ubl=3*L*ones(1,1);
```

Figura 48. Valor inicial de x. Pórtico biempotrado carga distribuida.

Los límites entre los que estará comprendido el valor de x, será la longitud de la barra en la cual está aplicada la carga distribuida.

Como se debe cumplir esta condición, se deberá iterar la función *Cargadistribuida*, ver en anexo, cuyo objetivo es identificar la posición de la rótula plástica que se conoce como b probando con puntos iterados hasta cumplir las condiciones establecidas.

Una vez que se conoce dicho punto, y por lo tanto la carga de colapso, el mecanismo de colapso y los momentos flectores, se obtendrán los giros.

Los valores que se obtienen tras ejecutar el programa son los presentes en la tabla 4.

Posición de la rótula “b”	2,17 m
Carga de Colapso	143243,97 N
Momento Flector en “a”	-172700,0 Nm
Momento Flector en “b”	172700,0 Nm
Momento Flector en “c”	126497,93 Nm
Momento Flector en “d”	-172700,0 Nm
Momento Flector en “e”	172700,0 Nm
Giro en “a”	-0,01827 rad
Giro en “b”	0,00004 rad
Giro en “c”	0,0 rad
Giro en “d”	0,0 rad
Giro en “e”	0,01039 rad

Tabla 4. Resultados. Pórtico biempotrado con carga distribuida.

Se observa que los momentos en los puntos a, b, d, e, son los momentos plásticos, lo que quiere decir que el mecanismo de colapso tendrá las rótulas plásticas en dichos puntos.

4.4. Ejemplo 4. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y cargas distribuidas.

Por último, se realizará el ejemplo propuesto en la figura 49 con los datos de la figura 50. Se trata de una geometría más complicada que las anteriores, un pórtico biempotrado a dos aguas, más común en la vida real, que posee dos cargas puntuales y dos cargas distribuidas.

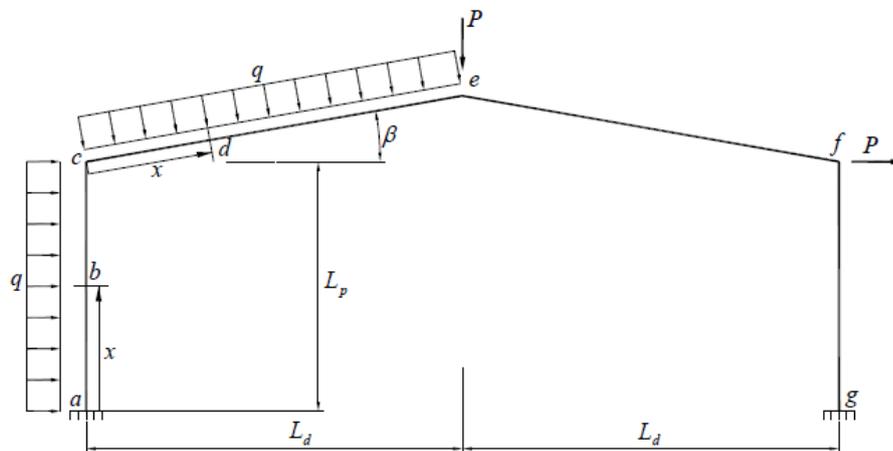


Figura 49. Ejemplo 4. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y distribuidas.

```

Lp=4.0;
Ld=6.0;
F=1.0*10^3;
vE=2.1*10^11;
Iz=8360.0*10^-8;
S=628.0*10^-6;
sigma_F=275.0*10^6;
Mp=S*sigma_F;
p=1000.0;
alpha=10.0*pi/180; % grados

```

Figura 50. Datos. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y distribuidas.

A la hora de describir la geometría del pórtico se deberá tener en cuenta el ángulo que forman las dos barras superiores. Figura 51.

```

nodos = {[0, 0], {'Fx', 'Fy', 'Mz'}}; % empotramiento
        {[0, Lp/2], {0, 0, 0}};
        {[0, Lp], {0, 0, 0}};
        {[Ld/2, (Lp+Ld/2*tan(alpha))], {0, 0, 0}};
        {[Ld, (Lp+Ld*tan(alpha))], {0, -F, 0}};
        {[2*Ld, Lp], {F, 0, 0}};
        {[2*Ld, 0], {'Fx', 'Fy', 'Mz'}}
        ]; % coordenadas / fuerzas
material = {[vE]}; % una lista por material
perfil = {[Iz, Mp]}; % una lista por tipo de perfil
barras = {[1, 2], [1, 1], p};
         {[2, 3], [1, 1], p};
         {[3, 4], [1, 1], p};
         {[4, 5], [1, 1], p};
         {[5, 6], [1, 1], 0};
         {[6, 7], [1, 1], 0};
        ]; % definicion, propiedades(material,perfil)

```

Figura 51. Geometría. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y distribuidas.

Al tener cargas distribuidas, se deberá calcular la posición de las rótulas que se forman en esas zonas. Al igual que en ejemplo anterior, se parte del punto medio de la barra, iterando sucesivamente hasta obtener la posición final. Figura 52.

```

lbl=zeros(1,2);
ubl=[Lp Ld/cos(alpha)];

x0=ubl/2;

```

Figura 52. Posición de x. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y distribuidas.

Una vez ejecutado el programa, los datos que se obtienen tras el colapso de la estructura son los que aparecen en la tabla 5.

Posición del punto "b"	2,0 m
Posición de la rótula "d"	4,2978 m
Factor de carga de colapso	26,65
Momento flector en "a"	-172700,0 Nm
Momento flector en "b"	-75867,11 Nm
Momento flector en "c"	-85590,12 Nm
Momento flector en "d"	172700,0 Nm
Momento flector en "e"	134895,97 Nm
Momento flector en "f"	-172700,0 Nm
Momento flector en "g"	172700,0 Nm
Giro en "a"	-0,00615 rad
Giro en "b"	0,0 rad
Giro en "c"	0,0 rad
Giro en "d"	0,0 rad
Giro en "e"	0,0 rad
Giro en "f"	-0,0231 rad
Giro en "g"	0,0200 rad

Tabla 5. Resultados. Pórtico a dos aguas biempotrado con cargas puntuales y distribuidas.

Se observa que las rótulas aparecen en los puntos donde el momento es igual al momento plástico, como en los ejemplos anteriores, que son los dos empotramientos, el punto d, que corresponde al punto medio del dintel con la carga distribuida y el punto f, que corresponde a extremo superior derecho.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y

LÍNEAS FUTURAS

5.1. CONCLUSIONES

El objetivo de este proyecto buscaba crear un código que sistematizara un proceso de cálculo, el cual, manualmente puede llegar a ser largo y tedioso. Para cumplir dicho objetivo han hecho falta numerosos conocimientos que se van adquiriendo a lo largo de la carrera de Ingeniería Mecánica.

En la asignatura de *Estructuras y Construcciones Industriales* gracias a la aplicación del Principio de las Fuerzas Virtuales (PFV) y las ecuaciones de equilibrio, obtenidas gracias al PTV, se consigue encontrar el mecanismo de colapso que hace que la estructura deje de ser útil.

Gracias a este proyecto, se ha conseguido implementar un código en *MATLAB*, el cual sistemáticamente obtiene las ecuaciones de equilibrio necesarias para la resolución además de las ecuaciones de compatibilidad, las cuales proporcionarán los giros de las rótulas creadas tras el colapso.

Para la resolución, además se hace uso de la optimización basada en los criterios energéticos citados anteriormente, los cuales hacen que los mecanismos no se resuelvan mediante el ensayo error de todos los posibles casos.

La motivación para realizar este proyecto ha sido la capacidad de poder crear una forma más eficaz de resolver problemas de cálculo plástico planos usando herramientas de otro campo de la ingeniería que a priori se pueden considerar independientes entre ellas, pero que de forma adecuada logran solucionar el problema con el que se estaba tratando. Además la aplicación directa a la resolución de estructuras como naves industriales, hace que el problema planteado se pueda plasmar a un caso real.

5.2. LÍNEAS FUTURAS

Este trabajo se ha centrado en pórticos planos con barras esbeltas, sobre dos apoyos, por lo que se crea un bucle cerrado (teniendo en cuenta la bancada que forma una línea imaginaria que uniría los dos apoyos), y con cargas puntuales y/o cargas distribuidas.

Si se pretende resolver una estructura que no cumpla las siguientes condiciones se debería implementar el código para cumpliera los nuevos requisitos propuestos.

Alguna de las posibles modificaciones en las que se podría trabajar son:

- Apoyos de la estructura. Ampliar el número de apoyos de la estructura, creando por ejemplo bucles abiertos.
- Barras que componen la estructura. Se trata de implementar el código para que sea capaz trabajar con voladizos, por ejemplo.
- Dimensiones de la estructura. Se ha trabajado con pórticos planos, es decir, en dos dimensiones. El objetivo de ampliar este proyecto para estudiar el cálculo plástico de estructuras en tres dimensiones es ambicioso, ya que supondrá una tarea compleja.

CAPÍTULO 6

BIBLIOGRAFÍA

6. Bibliografía

- [1] Doblaré, M., García, L., Cálculo Plástico de Estructuras. Copycenter, 1988.
- [2] Neal, B.G., The Plastic Methods of Structural Analysis. Chapman & Hall, 1985.
- [3] Rus, G., Cálculo plástico de estructuras de barras: Teoría. Universidad de Granada
- [4] Guardiola, A., Cálculo plástico y cálculo elástico de vigas de acero solicitadas a flexión. Universidad de Valencia
- [5] Análisis plástico de estructuras. Universidad Nacional del Nordeste. Disponible en:
http://ing.unne.edu.ar/pub/e3_cap5.pdf
- [6] Basset, L., Clasificación estática de las estructuras. Universidad Politecnica de Valencia. Disponible es:
<https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/16447/Clasificaci%C3%B3n%20est%C3%A1tica%20de%20las%20estructuras.pdf?sequence=1>
- [7] Mecánica de medios continuos. Tema 6b. Análisis de vigas y pórticos en régimen plástico. Universidad da Coruña. Disponible en:
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/master_iccp/miccp512/contenido_publico/recursos/tema06b.pdf
- [8] Martija, I., Loizaga, M., Conceptos básicos sobre Mecanismos y Máquinas. OCW/EHU. Disponible en:
https://ocw.ehu.eus/pluginfile.php/13218/mod_resource/content/0/T1_Conceptos%20b%C3%A1sicos%20sobre%20mecanismos%20y%20m%C3%A1quinas.pdf
- [9] Cinemática directa e inversa. Universidad de Castilla la Mancha. Disponible en:
<https://www.esi.uclm.es/www/cglez/fundamentos3D/04.05.FKIK.html>
- [10] Modelado Geométrico y Cinemático del Robot. OPW/EHU. Disponible en:
https://ocw.ehu.eus/pluginfile.php/15326/mod_resource/content/8/T5%20CINEMATICA%20OCW_Revision.pdf

[11] UNE-ISO 690. Cómo citar Bibliografía. 2013

[12] Carretero, J., Cálculo plástico. Método directo sistemático mediante teoría de mecanismos. 2019