



# **Universidad de Valladolid**

FACULTAD DE EDUCACIÓN DE SEGOVIA

**GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

Didáctica de las operaciones básicas de la aritmética. Comparación estructural y curricular de los modelos americano y español



**Autora: Adrián Ledesma Martín**

**Tutor académico: Matías Arce Sánchez**

# RESUMEN

La enseñanza de las operaciones básicas de la aritmética ocupa gran parte de los currículos de matemáticas de la educación básica. Durante los primeros años de escolarización los alumnos aprenden estas cuatro operaciones elementales unidas intrínsecamente al desarrollo del sentido numérico, que posteriormente usarán el resto de su vida.

En este trabajo se realizará una comparación de las estructuras y currículos de la educación básica española y americana, haciendo hincapié en la enseñanza de las cuatro operaciones, suma, resta, multiplicación y división.

Además, se analizarán y compararán dos propuestas específicas de enseñanza; el método ABN cada vez más presente en el sistema español y la propuesta de Pearson cuyas bases se asientan en los Common Core State Standards for Mathematics. Teniendo en cuenta la estructura CPA (Concreto-pictórico-abstracto) y el desarrollo del sentido numérico.

**Palabras clave:** Educación básica matemática, operaciones básicas de la aritmética, sentido numérico, CPA, ABN, CCSSM.

# ABSTRACT

The teaching of the basic arithmetic operations is relevant during the elementary school. When the students learn arithmetic operations, they build the number sense.

The following document compares the Spanish and American education structure and their curriculum.

Moreover, this document will analyze two different teaching methods to explain the basic arithmetic operations: ABN Spanish method and the specific Pearson's proposal based in Common Core State Standards for Mathematics; through the CPA structure and the number sense.

**Keywords:** Mathematics teaching, basic arithmetic operations, number senses, CPA, ABN, CCSSM.

# ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. OBJETIVOS.....	1
1.2. COMPETENCIAS DEL TÍTULO .....	2
2. MARCO TEÓRICO: DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS .....	3
3. ESTRUCTURA Y CURRÍCULO DE LA EDUCACIÓN AMERICANA .....	7
4. CURRÍCULO AMERICANO: NTCM Y CCSSM .....	10
5. COMPARACIÓN DEL BOCYL Y CCSSM .....	16
6. PRESENTACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN. PROPUESTA PEARSON BASADA EN LOS CCSSM.....	28
6.1 SUMA.....	28
6.2 RESTA .....	33
6.3 MULTIPLICACIÓN .....	39
6.4 DIVISIÓN .....	43
7. MÉTODO ABN .....	46
7.1 SUMA.....	47
7.2 RESTA .....	48
7.3 MULTIPLICACIÓN .....	50
7.4 DIVISIÓN .....	51
8. COMPARACIÓN DE ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA DE LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS DE LA ARITMÉTICA. ....	51
8.1 SUMA Y RESTA .....	52
8.1 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN .....	53
9. CONCLUSIÓN .....	55
10. BIBLIOGRAFÍA.....	58

# ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

FIGURA 1. DISTRIBUCIÓN GENERAL DE ETAPAS DEL SISTEMA EDUCATIVO AMERICANO .....	9
FIGURA 2. LIBRO PEARSON .....	14
FIGURA 3. SESIÓN PEARSON .....	14
FIGURA 4. CCSSM EN PEARSON .....	15
FIGURA 5. UNIDAD DIARIA PEARSON .....	15
TABLA 1. COMPARACIÓN ENTRE EL BOCYL Y LOS CCSSM EN LA TEMÁTICA DE LA MULTIPLICACIÓN .....	18
TABLA 2. ESTRUCTURACIÓN DE CONTENIDOS .....	20
TABLA 3. SENTIDO NÚMÉRICO EN EL BOCYL.....	24
TABLA 4. SUMA Y RESTA EN CCSSM Y BOCYL.....	25
TABLA 5. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN CCSSM Y BOCYL.....	26
TABLA 6. COMPARACIÓN DE CURRÍCULOS EN TEMÁTICA DEL DINERO....	26
FIGURA 6. MATERIALES MANIPULABLES .....	29
FIGURA 7. MATERIALES MANIPULABLES BASE 10.....	30
FIGURA 8. RESUMEN SISTEMA POSICIONAL .....	30
FIGURA 9. ESTRATEGIAS DE SUMA POR VALOR POSICIONAL .....	31
FIGURA 10. DIFERENTES ESTRATEGIAS DE SUMA USANDO EL VALOR POSICIONAL. ....	32
FIGURA 11. ESTRATEGIAS DIFERENTES DE SUMA .....	32
FIGURA 12. ALGORITMO TRADICIONAL DE SUMA .....	33
FIGURA 13. REPRESENTACIÓN PICTÓRICA RESTA .....	35
FIGURA 14. RECTA RESTA .....	35
FIGURA 15. RECTA RESTA .....	35
FIGURA 16. RECTA RESTA-SUMANDO.....	35
FIGURA 16. RECTA RESTA-SUMANDO.....	35
FIGURA 17. TABLA DE EQUIVALENCIAS PICTÓRICAS .....	36
FIGURA 18. RESTA VALOR POSICIONAL.....	36
FIGURA 19. RESTA VALOR POSICIONAL.....	36
FIGURA 20. RESTA VALOR POSICIONAL CENTENAS. ....	37
FIGURA 21. SUMAR PARA RESTAR.....	37
FIGURA 22. SUMAR PARA RESTAR.....	37
FIGURA 23. RESTA VALOR POSICIONAL.....	37
FIGURA 24. AJUSTE Y RESTA .....	37

FIGURA 25: ALGORITMO TRADICIONAL DE SUMA .....	38
FIGURA 26. MULTIPLICACIÓN CON MATERIALES MANIPULABLES.....	40
FIGURA 27. MATRIZ COMPLETA .....	40
FIGURA 28. MATRIZ VACÍA Y UTILIZACIÓN DE MATRIZ PARA MULTIPLICAR .....	31
FIGURA 29. MATRIZ CON MULTIPLICACIÓN.....	31
FIGURA 30. DIFERENTES FORMAS DE AFRONTAR UNA MULTIPLICACIÓN	42
FIGURA 31. DIFERENTES ESTRATEGIAS DE MULTIPLICACIÓN .....	42
FIGURA 32. REPRESENTACIÓN DE LA DIVISIÓN EN UNA MATRIZ .....	45
FIGURA 33. MULTIPLICAR PARA DIVIDIR .....	45
FIGURA 34. ESTRATEGIA ABN SUMA.....	47
FIGURA 35. ESTRATEGIA DE RESTA POR DETRACCIÓN .....	48
FIGURA 36. RESTA ABN DE ESCALERA ASCENDENTE .....	49
FIGURA 37: RESTA ABN DE ESCALERA DESCENDENTE .....	49
FIGURA 38. MULTIPLICACIÓN ABN .....	50
FIGURA 39. DIVISIÓN ABN .....	51

# 1. INTRODUCCIÓN

El área de las matemáticas es crucial en el desarrollo del alumno de educación primaria, dado que el éxito o el fracaso durante los primeros años va a impactar directamente en la educación posterior y la va a marcar. Es difícil que un error en el aprendizaje en esta área se solucione fácilmente en niveles superiores, por tanto, la labor del maestro es de vital importancia.

Durante mi formación académica los docentes que me han formado en esta área se han afanado en romper con la enseñanza que he recibido durante los años de la escuela. Una enseñanza académica basada en la rotura de mis esquemas previos, donde la enseñanza de las matemáticas se basa en la memorización y aprendizaje de algoritmos. Es un proceso complicado dado que el estudiante de educación primaria ya tiene unos conocimientos previos del sistema educativo ya que ha vivido en él gran parte de su vida. Muchos de los estudiantes de este grado muestran problemas con los conceptos matemáticos, alumnos que han superado el bachillerato y que se supone que no deberían de tener ningún problema. Es la constatación de que el sistema de enseñanza de las matemáticas debe revisarse y esto pasa por formar maestros competentes en la enseñanza de las matemáticas.

Tuve la oportunidad de participar en el programa de intercambio Amity, por lo que pude vivir durante un año en Estados Unidos y trabajar en un colegio de inmersión, más concretamente en el colegio Sonia Sotomayor en Dakota del sur, donde pude enseñar mi lengua materna y matemáticas. Mi experiencia en el sistema educativo americano me ha brindado la oportunidad de entrar en contacto con un sistema totalmente diferente de impartir las matemáticas en Educación Primaria. Un sistema en parte parecido al exitoso método singapur y basado en el modelo CPA (Concreto-pictórico-abstracto). Un sistema que rompió mis esquemas de enseñanza y obligó a recomponerlos de una forma más eficaz, que empoderaba mi capacidad de enseñanza de las matemáticas.

## 1.1. OBJETIVOS

El objetivo principal del este documento es el de analizar y comparar la estructura y el currículo de los sistemas educativos de España y Estados Unidos, centrado en la

enseñanza de las cuatro operaciones básicas de la aritmética. Como objetivos específicos, estudiar la estructura de enseñanza de las cuatro operaciones básicas de la aritmética, propuesta por la editorial Pearson basada en los *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM) y comparar esta estructura con el método del Algoritmo Basado en Números (ABN).

## **1.2. COMPETENCIAS DEL TITULO**

Durante la elaboración de este documento ha sido necesario el desarrollo de varias competencias del Grado de Educación Primaria, además de generales también específicas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio –la Educación- que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio. (Universidad de Valladolid, 2009, p.1)

Indispensable ha sido el uso fluido de la terminología educativa a la hora de realizar este documento e igual de importante el uso eficaz del currículo y las estructuras del sistema educativo. Además, el conocimiento de las principales técnicas de enseñanza-aprendizaje han permitido un análisis amplio y justificado en la comparación de sistema educativos y técnicas de enseñanza.

“Que los estudiantes tengan la capacidad de reunir e interpretar datos esenciales (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas esenciales de índole social, científica o ética” (UVA, 2009, p.2). La capacidad de análisis sobre la praxis educativa y la búsqueda de nueva información durante la elaboración de este trabajo es imprescindible para analizar las estrategias usadas en otro sistema educativo y comprender su diseño. Como: “Identificar y comprender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitiendo juicios bien fundamentados y utilizando las matemáticas al servicio de una ciudadanía constructiva,

comprometida y reflexiva” UVA (2009, p.10) dado que sin esta capacidad el análisis de las estrategias matemáticas no podría haber tenido el rigor suficiente.

Transformar adecuadamente el saber matemático de referencia en saber a enseñar mediante los oportunos procesos de transposición didáctica, verificando en todo momento el progreso de los alumnos y del propio proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el diseño y ejecución de situaciones de evaluación tanto formativas como sumativas. UVA (2009, p. 11)

Poder comprender de qué manera se está trabajando las matemáticas y poder verificar la eficacia de dicho método en la enseñanza teniendo en cuenta las principales líneas de desarrollo matemático en los alumnos.

“Conocer en profundidad los fundamentos y principios generales de la etapa de primaria, así como diseñar y evaluar diferentes proyectos e innovaciones, dominando estrategias metodológicas activas y utilizando diversidad de recursos” UVA (2009, p.4). Posibilitando el análisis de las fortalezas y debilidades de las estrategias y estructuras educativas.

Realizar este trabajo ha sido un proceso altamente enriquecedor, me ha posibilitado el aprendizaje de nuevos métodos de enseñanza de las matemáticas y me ha dotado de una base teórica en la que construir en un futuro mi metodología matemática. Dado que estoy finalizando mi grado en educación primaria creo importante el desarrollo de las capacidades anteriormente citadas.

## **2. MARCO TEÓRICO: DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS**

El objetivo de este punto es el de tratar de una manera más profunda la didáctica de la aritmética por lo cual, tenemos que hacer referencia a cuatro puntos fundamentales que la configuran; el sentido numérico, la comprensión relacional e instrumental, la enseñanza-

aprendizaje de las operaciones y el modelo CPA (Concreto-pictórico-abstracto). Todos estos puntos influirán en la forma de trabajar del maestro en la enseñanza de la aritmética.

Si hacemos referencia a la comprensión relacional o instrumental, hablamos de dos formas totalmente diferentes de entender la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas.

Skemp afirma (1976) “Want is some kind of rule for getting the answer. If the teacher asks a question that does not quite fit the rule, of course they will get it wrong” (p.9). En estas dos frases el autor refleja a la perfección qué implica la comprensión instrumental de las matemáticas. El maestro basa la obtención de los conocimientos matemáticos en la memorización de reglas. Importa que el estudiante pueda enfrentarse a los problemas y operaciones satisfactoriamente si están dentro de los tipos estudiados, pero, si topan con alguno que sea ligeramente diferente, el estudiante no va a tener éxito, dado que el alumno realmente se está enfrentando a una actividad diferente que requiere de una comprensión no solo instrumental.

La comprensión relacional basa los aprendizajes del estudiante en la relación de ideas matemáticas, por ejemplo, no se busca el aprendizaje de diferentes ecuaciones para medir todas las áreas que el estudiante puede encontrar en un problema, el objetivo es que el maestro enseñe a sus alumnos a relacionar los procesos de medición de las áreas para que ellos mismo puedan enfrentarse a cualquier área que necesiten medir. Conseguir que el estudiante tenga una visión de conjunto que le permita poder enfrentar diferentes o nuevos problemas sin necesidad de que su maestro deba mostrar ningún patrón de resolución.

Los estudiantes trabajarán durante toda su etapa educativa usando los sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales y reales) por lo tanto, el estudiante deberá aumentar progresivamente la comprensión de los números. Cid, Godino, y Batanero (2004). explican que, en la enseñanza de las operaciones, hay cinco aprendizajes que deben desarrollar los alumnos; 1. El sentido numérico, 2. La sucesión de palabras numéricas. 3. El recuento y el significado del número como cardinal y ordinal, 4. El orden numérico, 5. Sistema escrito de numeración.

El punto uno se desarrollará en el documento más adelante. Con respecto al punto dos, el alumno deberá desarrollar el aprendizaje de las sucesiones numéricas, la capacidad de

comenzar a contar desde cualquier número de la cadena numérica de forma que pueda hacerlo hacia atrás o adelante. Además, el alumno deberá adquirir la capacidad de hacer el recuento y otorgar el significado cardinal y ordinal del número.

El estudiante debe ser capaz de comparar los números cardinales y ordinales (3), es decir, comparación de conjuntos, saber cuánto más tiene un conjunto que otro y poder decir qué número va antes. Por último, el alumno tendrá que aprender el sistema escrito de numeración

“Pero en un primer momento, el desconocimiento de la tabla de sumar y restar impide a los alumnos resolver estas situaciones mediante sumas o restas, necesitando recurrir al recuento” (Cid, Godino, y Batanero, 2004, p.192). Por tanto, el estudiante en tales situaciones utilizará el recuento para averiguar el resultado, cuenta tres objetos, después añade otros tres y vuelve a contar y averigua el total. El alumno empezará a desarrollar otras estrategias aumentando la complejidad de estas, sin necesidad de contar los dos sumando dos veces, eligiendo el mayor sumando y finalmente construyendo una colección de objetos.

En el caso de la resta establece otras estrategias como el recuento hacia atrás tomado como punto de inicio el minuendo, el recuento de la diferencia o del sustraendo hasta el minuendo. El estudiante posteriormente desarrollará el conocimiento de las tablas de suma y resta u otras estrategias más eficientes y rápidas.

El desarrollo de la multiplicación y la división están asociados a un mayor manejo de los números. La multiplicación está ligada a la adición por lo que es importante el aprendizaje correcto de la estructura de la suma. A su vez la división es la antítesis de la multiplicación.

Es necesaria la referencia al sentido numérico (Number sense) y más concretamente en la didáctica que está relacionada con la aritmética:

Sentido intuitivo para los números y sus diversos usos e interpretaciones, como la capacidad para apreciar diversos niveles de exactitud al manejar los números, localizar errores aritméticos, producir estimaciones razonables, saber elegir el

procedimiento de cálculo más eficiente o reconocer modelos numéricos. (Bruno, 2000, p.54)

Según Almeida, Bruno y Perdomo (2014) y Arce, Conejo, y Muñoz (2019) el sentido numérico tiene siete componentes esenciales:

1. comprender el significado del número: entender la organización de la numeración decimal y las múltiples relaciones que se dan entre los distintos conjuntos de números, por ejemplo; comprender al valor posicional.
2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números: Capacidad para reconocer y estimar el tamaño de cualquier número, cantidad o medida. Ejemplo: estimar el mayor resultado entre dos multiplicaciones diferentes.
3. Usar puntos de referencia: Utilización de referentes mentales a la hora de pensar en números y resolver problemas, como ejemplo, el uso de matrices para estimar una multiplicación.
4. Utilizar la composición y descomposición de números: Implica la habilidad para componer y descomponer los números de una forma equivalente, es decir, romper números para realizar operaciones más sencillas.
5. Usar múltiples representaciones de los números y operaciones, por ejemplo; el uso de manipulativos para representar problemas de adición.
6. Comprender el efecto relativo de las operaciones: la habilidad para identificar cómo las diferentes operaciones afectan al resultado final de los problemas numéricos, entender la propiedad asociativa de la multiplicación.

7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta, por ejemplo; representar una suma pictóricamente o utilizar el producto cartesiano para representar una multiplicación.

Por último, tenemos que hacer referencia al modelo CPA cuyo origen se encuentra en el modelo propuesto por Bruner (enactive-iconic-symbolic) y cuyo mayor exponente se encuentra en el modelo de estudio de las matemáticas en Singapur.

En la secuenciación CPA según Yew, Weng y Lu (2015) se plantean niveles de comprensión (Concreto, pictórico, abstracto) que el alumno va alcanzando y superando en el aprendizaje de las matemáticas, con el objetivo final de que el estudiante llegue a poder manejar conceptos matemáticos abstractos. En nivel concreto el alumno utilizará manipulativos, materiales que pueda tocar, por ejemplo, sumar cantidades usando tapones de botella. El alumno manejará representaciones gráficas en el nivel pictórico, es decir, sumar utilizando dibujos y posteriormente solo usará representación simbólica de las cantidades en el nivel abstracto.

El maestro tiene un papel facilitador donde guía al estudiante a través de los niveles de secuenciación. Todo esto basado en el potencial de la representación para comprender los contenidos matemáticos. El alumno puede comenzar escalando en esa secuenciación para asimilar un nuevo concepto, no siempre empezando en lo concreto, pero siempre pudiendo acudir a este primer paso si encuentra problemas.

Flores (2010) apunta lo siguiente “Students with and without disabilities who participated in CRA instruction outperformed their peers who received traditional instruction.” (p.196). Existe un amplio consenso con respecto a las ventajas que tiene el CPA en la enseñanza de las matemáticas, además de multitud de estudios, el éxito del método Singapur, basado en el CPA, evidencia el potencial de aplicar la secuencia CPA en la enseñanza de las matemáticas.

### **3. ESTRUCTURA Y CURRÍCULO DE LA EDUCACIÓN AMERICANA**

The powers not delegated to the United States by the Constitution, nor prohibited by it to the States, are reserved to the States respectively, or to the people. (Amendment X, United States Bill of Rights, 1791)

En el artículo X de la declaración de derechos de los Estados Unidos se especifica que todos los poderes que no están delegados al gobierno de los Estados Unidos de América en la constitución quedan al cargo de los estados y en su defecto al pueblo.

Es por esto, por lo que la mayoría de los estados tienen una legislación diferente, ya que existen una federal que tiene efectos en todo el país y la legislación estatal que solo afecta al estado al que pertenece, un ejemplo: en el estado de California no existe la pena de muerte, en cambio en Dakota del Sur sí.

La educación es uno de los muchos aspectos en los que los estados legislan de forma independiente. En EE. UU la educación pública se establece a nivel federal en 1870 cuando el estado de Pensilvania implantó la educación gratuita, a finales del siglo XIX la mayoría de los estados ofrecían educación pública. La extensión del sistema público por todos los estados se llamó “common school movement”

En 1979 se crea el departamento de educación no comparable con el sistema español de ministerios. El Ministerio de Educación en España es el órgano competente a nivel nacional encargado de la educación. En EE. UU., el departamento de educación tiene un impacto muy reducido en la educación, dado que como se ha explicado antes, la educación es una de las áreas en las que los estados son responsables a la hora de legislar, las funciones del departamento de educación son las siguientes:

1. Establecer políticas relacionadas con ayuda financiera federal para la educación, administrar la distribución de dichos fondos, y monitorear su uso.
2. Recopilar datos y supervisar la investigación relacionada con las escuelas en el país y difundir información al Congreso, educadores y el público en general.
3. Identificar los principales problemas de la educación y centrar una atención nacional en ellos.

4. Hacer cumplir los estatutos federales que prohíben la discriminación en programas y actividades que reciben fondos federales, y garantizar un acceso equitativo a la educación para cada individuo.

(USDOEd, 2010, p.2, traducción personal)

A nivel estatal no se establece ninguna ley que especifique el currículum que deben trabajar los alumnos, esta responsabilidad junto al presupuesto recae en los estados y distritos escolares que son los que diseñan e implementan el currículum.

Cada estado puede tener multitud de distritos escolares, es común que las grandes ciudades constituyan uno.

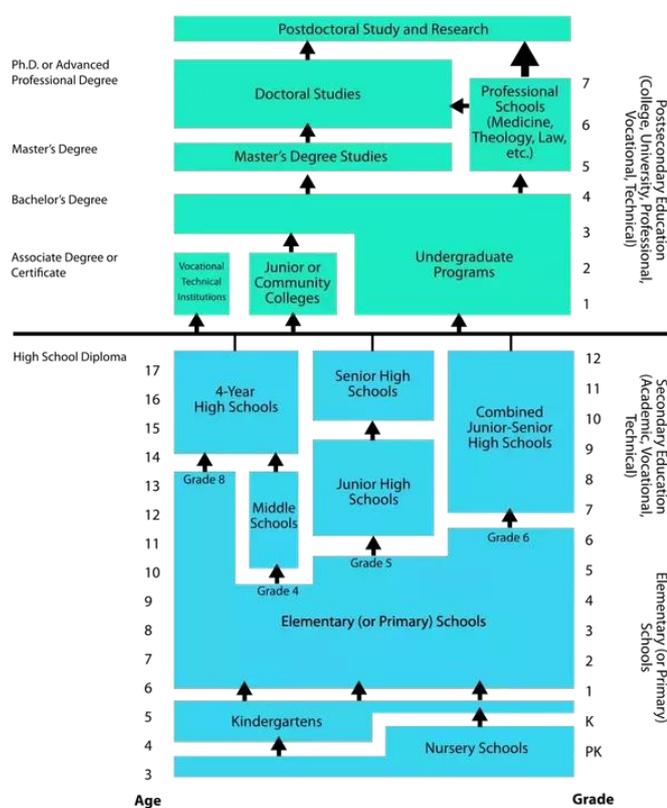


Figura 1. Distribución general de etapas del sistema educativo americano

En la figura 1 podemos observar las etapas que tiene el sistema educativo americano, que no en todos los estados es igual.

En el estado de Dakota del Sur, aquel que va a ocupar este trabajo, la educación primaria o K-12 (El origen de esta abreviación proviene de los años que comprende esta etapa desde Kindergarten -E. Infantil- a los 12 años) engloba desde Kindergarten hasta quinto grado, después las siguientes etapas son Middle School y High School, muy parecidas a la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en España.

Con respecto al horario y asignaturas, en Dakota del Sur, los alumnos en educación elemental tienen como base fundamental el trabajo de las matemáticas, la lectura y escritura, a las que dedican una hora diaria cada una y cuarenta minutos de ciencias sociales y naturales. Además, los alumnos tienen educación física, arte, música y biblioteca una hora a la semana. El horario se completa con una hora que dedican a estudiar idiomas.

Aun así, no se puede generalizar este horario dado que cada distrito escolar es el encargado de diseñar los horarios.

## **4. CURRÍCULO AMERICANO: NTCM Y CCSSM**

*National Council of Teachers of Mathematics* (NTCM) es la primera agencia que en 1989 publica un documento titulado “*Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*” con el objetivo de garantizar el éxito en la educación de los alumnos y poder presentar un documento común con el que los estados puedan diseñar un currículo de matemáticas apropiado. Esta organización a lo largo de los años ha ido publicando documentos fijando los estándares de contenidos y procesos refinando su propuesta curricular.

Según NCTM los estándares en procesos matemáticos que deben adquirir cualquier alumno, son los siguientes:

- 1) Resolución de problemas:
  - a. Desarrollar nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas.
  - b. Resolver problemas que surgen en las matemáticas y en otros contextos.
  - c. Aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas.

- d. Monitorear y reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas matemáticos
- 2) Razonamiento y Prueba:
- a. Reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas.
  - b. Hacer e investigar conjeturas matemáticas.
  - c. Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y pruebas.
  - d. Seleccionar y usar varios tipos de razonamiento y métodos de prueba
- 3) Comunicación:
- a. Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación.
  - b. Comunicar su pensamiento matemático de manera coherente y clara a sus compañeros, maestros y otros.
  - c. Analizar y evaluar el pensamiento matemático y las estrategias de otros;
  - d. Usa el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión.
- 4) Conexiones:
- a. Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas.
  - b. Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen entre sí para producir un todo coherente
  - c. Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos fuera de las matemáticas
- 5) Representación:
- a. Crear y usar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas.
  - b. Seleccionar, aplicar y traducir entre representaciones matemáticas para resolver problemas.
  - c. Usar representaciones para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

(NTCM, 2000, p.28-67, traducción personal)

Aun existiendo los documentos que publica NCTM, las diferencias curriculares entre estados son muy grandes, por este motivo y con el objetivo de cohesionar a los estados

surgieron los CCSSM (*Common Core State Standards for Mathematics*) un documento elaborado por *Council of Chief State School Officers y National Governors Association*.

La principal diferencia que existe entre ambos documentos es que el currículo diseñado por la NCTM tiene un carácter más general, una visión más amplia de las matemáticas escolares, en cambio los CCSSM aporta un currículo con mayor grado de especificación con estándares diferentes en cada grado. Además, la NCTM se basa en los procesos y estándares de contenido, los CCSSM en la práctica, por ejemplo; en el currículo de la NCTM se recoge la resolución de problemas, pero en los CCSSM se especifica qué estándares deben cumplirse para que el alumno trabaje la resolución de problemas.

Los estándares en los que se basa los CCSSM son los siguientes:

- 1) Razón abstracta y cuantitativa: Los estudiantes matemáticamente competentes tienen sentido de las cantidades y sus relaciones en situaciones problemáticas.
- 2) Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los demás: Los estudiantes matemáticamente competentes entienden y usan suposiciones, definiciones y resultados establecidos previamente en la construcción de argumentos. Hacen conjeturas y construyen una progresión lógica de declaraciones para explorar la verdad de sus conjeturas.
- 3) Modelo con matemáticas: Los estudiantes pueden aplicar las matemáticas que conocen para resolver los problemas que surgen en la vida cotidiana, la sociedad y el lugar de trabajo.
- 4) Use las herramientas apropiadas estratégicamente: los estudiantes consideran las herramientas disponibles al resolver un problema matemático. Estas herramientas pueden incluir lápiz y papel, modelos concretos, una regla, un transportador, una calculadora, una hoja de cálculo, un sistema de álgebra de computadora, un paquete estadístico o un software de geometría dinámica.
- 5) Asistir a la precisión: Los estudiantes matemáticamente competentes intentan comunicarse precisamente con los demás.
- 6) Busque y haga uso de la estructura: Los estudiantes miran de cerca para discernir un patrón o estructura. Los jóvenes estudiantes, por ejemplo, pueden notar que tres y siete más son la misma cantidad que siete y tres más, o pueden clasificar una colección de formas de acuerdo con cuántos lados tienen las formas.

- 7) Busque y exprese regularidad en razonamientos repetidos: Los estudiantes matemáticamente competentes miran de cerca para discernir un patrón o estructura, por ejemplo, pueden notar que tres y siete más son la misma cantidad que siete y tres más reconocen el significado de una línea existente en una figura geométrica y pueden usar la estrategia de dibujar una línea auxiliar para resolver problemas
- 8) Busque y exprese regularidad en razonamientos repetidos: Los estudiantes matemáticamente competentes notan si los cálculos se repiten y buscan métodos generales y atajos.

(National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.5-8, traducción personal)

Finalmente, los CCSSM son adoptados por 45 de los 50 estados, Dakota del Sur es uno de ellos.

Una vez que los estados adoptan los CCSSM, los distritos escolares son los encargados de ponerlo en práctica y es aquí donde quizás la situación presenta todavía más diferencias con la de España, dado que no es responsabilidad del docente utilizar el currículo para organizar e implementar una programación y a su vez el diseño de las unidades didácticas.

Este trabajo recae en las editoriales que confeccionan las programaciones y los libros de texto de los alumnos.

En Dakota del Sur, la editorial elegida es Pearson, que se utiliza en el programa de matemáticas en todo el estado

A continuación, tenemos un ejemplo del libro de matemáticas del profesor de la editorial Pearson.

Session Structure		TEN-MINUTE MATH	ACTIVITY	DISCUSSION	MATH WORKSHOP	ASSESSMENT	SESSION FOLLOW-UP
1	1.1 Fractions of an Area: Halves, Fourths, and Eighths	*	*	*			*
2	1.2 Fractions of an Area: Thirds and Sixths	*	*	*			*
3	1.3 Same Parts, Different Wholes	*	*	*			*
4	1.4 Representing Decimals	*	*	*			*
5	1.5 Equivalent Fractions and Decimals	*	*	*	*		*
6	1.6 Finding Equivalent Fractions and Identifying Decimals	*	*	*	*	*	*
7	2.1 Fraction Cards	*	*	*			*
8	2.2 Fraction Cards, continued	*	*	*			*
9	2.3 Capture Fractions	*	*	*		*	*
10	2.4 Comparing Fractions to Landmarks	*	*	*		*	*
11	2.5 Fractions on a Number Line	*	*	*	*	*	*
12	2.6 Comparing Fractions	*	*	*	*	*	*
13	2.7 Decimals on the Number Line	*	*	*	*	*	*
14	2.8 Equivalent Fractions and Comparing Decimals	*	*	*	*	*	*
15	3.1 Decomposing and Adding Fractions	*	*	*			*
16	3.2 Subtracting Fractions	*	*	*			*
17	3.3 Adding and Subtracting Mixed Numbers	*	*	*			*
18	3.4 Adding and Subtracting Fractions and Mixed Numbers	*	*	*	*	*	*
19	3.5 Adding Tenths and Hundredths	*	*	*			*
20	3.6 More Adding Tenths and Hundredths	*	*	*	*	*	*
21	4.1 Multiplying a Fraction by a Whole Number	*	*	*			*
22	4.2 Computation with Fractions	*	*	*	*	*	*
23	4.3 Computation with Fractions, continued	*	*	*	*	*	*
24	4.4 Multiplying, Adding, and Subtracting Fractions	*	*	*	*	*	*

7	2.1 Fraction Cards	*	*	*			*
8	2.2 Fraction Cards, continued	*	*	*			*
9	2.3 Capture Fractions	*	*	*		*	*
10	2.4 Comparing Fractions to Landmarks	*	*	*		*	*
11	2.5 Fractions on a Number Line	*	*	*	*	*	*
12	2.6 Comparing Fractions	*	*	*	*	*	*
13	2.7 Decimals on the Number Line	*	*	*	*	*	*
14	2.8 Equivalent Fractions and Comparing Decimals	*	*	*	*	*	*

Figura 2. Libro Pearson

En la figura 2 podemos apreciar el libro del maestro y más concretamente la estructura de sesiones. En la primera imagen vemos los temas diferenciados por el color de las sesiones. En la segunda imagen se observa las diferentes sesiones que se van a trabajar a lo largo del tema.

**SESSION 1.2 Fractions of an Area: Thirds and Sixths**

**MATH FOCUS POINTS**

- Finding fractional parts of a rectangle
- Identifying relationships between unit fractions when one denominator is a multiple of the other (e.g., halves and fourths, thirds and sixths)
- Identifying equivalent fractions and explaining why they are equivalent

**VOCABULARY**

- thirds
- sixths
- twelfths

---

**TODAY'S PLAN** | **MATERIALS**

**TEN-MINUTE MATH: REVIEW AND PRACTICE** | Teacher Presentation

**Practicing Place Value**

---

**1 ACTIVITY** | Teacher Presentation (or use 558\*)

**Finding Thirds and Sixths** | 558\*  
Colored pencils or crayons (as needed)

---

**2 DISCUSSION** | 558 (from Activity 1)  
Colored pencils or crayons (as needed)  
Chart: "Equivalent Fractions" (from Session 1.1)

**How Are Thirds and Sixths Related?**

---

**3 ACTIVITY** | Teacher Presentation (or use 558\*)

**Finding Twelfths** | 558\*  
Colored pencils or crayons (as needed)

---

**SESSION FOLLOW-UP: REVIEW AND PRACTICE** | Student Activity Book, p. 347

**Daily Practice**

\* See Materials to Prepare in the Investigation 1 Planter.

---

**Common Core State Standards** | **Ten-Minute Math:** 4.NF.A.2, 4.NF.A.3  
**Session:** 4.NF.A.1, 4.NF.A.3a, Supports 4.NF.B.3b | **Daily Practice:** Supports 4.NF.B.3b

© 2014 Pearson Education, Inc. All rights reserved. 33

**TODAY'S PLAN** | **MATERIALS**

**TEN-MINUTE MATH: REVIEW AND PRACTICE** | Teacher Presentation

**Practicing Place Value**

---

**1 ACTIVITY** | Teacher Presentation (or use 558\*)

**Finding Thirds and Sixths** | 558\*  
Colored pencils or crayons (as needed)

---

**SESSION FOLLOW-UP: REVIEW AND PRACTICE** | Student Activity Book, p. 347

**Daily Practice**

Figura 3. Sesión Pearson

En estas fotografías observamos el esquema de la sesión que a su vez está dividida en planes diarios donde se especifica si existe explicación y qué tiempo va a durar, también si hay trabajo por parte de los alumnos y los materiales que se van a necesitar.

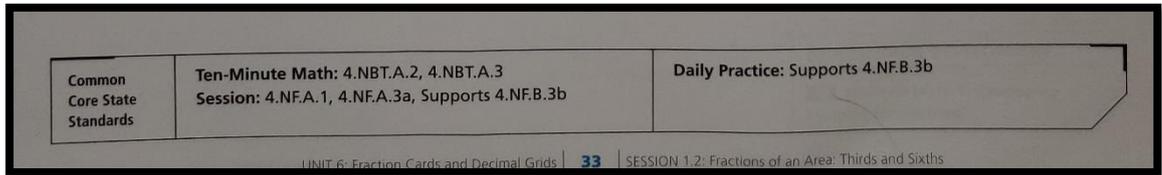


Figura 4. CCSSM en Pearson

En cada sesión se especifica que estándares de los CCSSM se van a trabajar. Cada uno de esos códigos pertenece a un estándar, de esta forma el libro diseñado por Pearson se relaciona con los CCSSM.

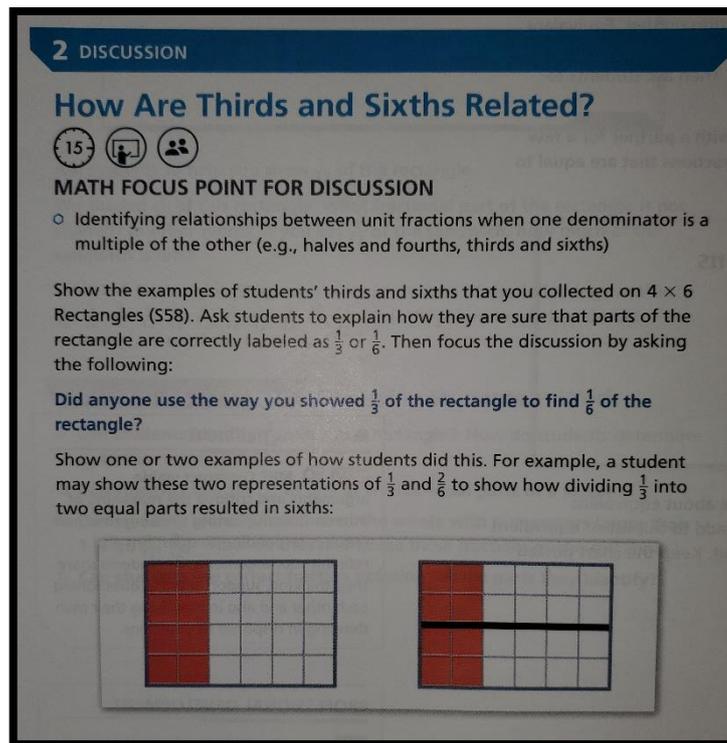


Figura 5. Unidad Diaria Pearson

Para finalizar tenemos un ejemplo de unidad diaria. El maestro tiene escrito todo lo que debe explicar durante la clase. Posteriormente aparece el contenido que tiene que trabajar el alumno.

En este sistema el docente no prepara o diseña las unidades de matemáticas dado que es la editorial la que realiza ese trabajo. Es importante enfatizar, si el docente decide alterar el desarrollo establecido por opinión propia, es necesario que este se lo comunique al encargado del currículo del colegio, figura de gran importancia dentro del centro dado que tomas todas las decisiones con respecto al currículo, y debe ser consensuado por todos los docentes implicados.

## **5. COMPARACIÓN DEL BOCYL Y CCSSM**

En este documento vamos a tratar las operaciones aritméticas básicas de la matemática, a continuación, compararemos el currículo de matemáticas de España, específicamente el de Castilla y León con los CCSSM, dado que es lo más parecido a un currículo oficial que existe en Estados Unidos, además el estado de Dakota del Sur es uno de los que ha adoptado los CCSSM.

Una de las grandes diferencias entre el currículo americano y el español es que el primero está diseñado a través de estándares y el segundo por competencias.

Un currículo basado en estándares permite una gran libertad al que lo implementa, dado que no se especifica en ningún momento los procesos y experiencias de aprendizaje, por los cuales los niños deben de llegar al estándar.

En cambio, el modelo curricular de diseño por competencias:

El modelo educativo por Competencias persigue así una convergencia entre los campos social, afectivo, las habilidades cognoscitivas, psicológicas, sensoriales, motoras, del individuo

El modelo curricular no deja de lado las unidades constitutivas de aprendizaje, pero no las ve como entes aislados que se agregan en una suma cuantitativa, sino como parte de una acumulación cualitativa.

(García Retana, 2011, p.4-7)

Como se recoge en la ley española el currículo pretende potenciar un aprendizaje competencial.

Este real decreto se basa en la potenciación del aprendizaje por competencias, integradas en los elementos curriculares para propiciar una renovación en la práctica docente y en el proceso de enseñanza y aprendizaje. La competencia supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz. (BOE, Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero)

El currículo basado en competencias tiene como objetivo la enseñanza completa del alumno y entiende que es un proceso continuo y global en el que todos los conocimientos están conectados y en el que no solo aparecen los contenidos como matemáticas o lengua, sino que entiende la enseñanza como un proceso en el que están englobados también el campo afectivo, social y motor.

En el caso específico del currículo castellanoleonés el desarrollo curricular curso por curso se organiza de otra manera (contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje).

Se debe tener en cuenta, que el currículo español es mucho más específico dado que desgrana más los conocimientos que el alumno debe de alcanzar, uniéndolo con los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

En la tabla 1 se puede apreciar la comparación del estándar de multiplicación en tercer grado recogido en los CCSSM y los contenidos, criterios de evaluación y estándares de

aprendizaje evaluables que aparecen en el currículo de Castilla y León para la misma temática y edad.

Tabla 1. Comparación entre el BOCYL y los CCSSM en la temática de la multiplicación

<b>BOCYL (2016)</b>	<b>CCSSM (2010)</b>
<b>Contenidos:</b>	<b>Estándar:</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Operaciones con números naturales: adición, sustracción, multiplicación y división entera por un número de una cifra.</li> <li>• Identificación y uso de los términos propios de la multiplicación: factores y producto.</li> <li>• Las tablas de multiplicar. Construcción y memorización.</li> <li>• Propiedades conmutativa y asociativa de la suma y del producto de números naturales.</li> </ul>	<p>Multiplicar números enteros de un dígito por múltiplos de 10 en el rango de 10-90 (por ejemplo, <math>9 \times 80</math>, <math>5 \times 60</math>) utilizando estrategias basadas en el valor posicional y las propiedades de las operaciones.</p>
<b>Criterios de evaluación:</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realizar cálculos numéricos con números naturales con las operaciones de suma, resta, multiplicación e inicio a la división, utilizando diferentes estrategias y procedimientos.</li> </ul>	
<b>Estándares de aprendizaje evaluables:</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construye y memoriza las tablas de multiplicar, utilizándolas para realizar cálculo mental.</li> <li>• Conoce el mecanismo de la multiplicación, sus términos y realiza multiplicaciones de forma correcta.</li> </ul>	

El nivel de detalle es mucho más grande en el BOCYL, algo que facilita y posibilita que el docente pueda realizar sus programaciones personales, algo complicado en el americano, dado que es específico con el objetivo que se debe cumplir, pero apenas hay información sobre otros aspectos importantes para llegar a cumplir el estándar.

Es este uno de los motivos, como explicaré más adelante, por los que las editoriales realizan las programaciones y son los encargados de articular el currículo que utilizará el docente.

En el currículo español se hace hincapié en la relación de las matemáticas con otro tipo de asignaturas como las artes, aspecto que no aparece en los CCSSM.

Vinculando las matemáticas a aspectos humanísticos como el arte y la escultura, se contribuye a que el alumnado tenga una percepción de esta área más rica, útil y cercana, aportándole como ciudadano una parcela formativa e informativa que le será de gran utilidad (BOCYL, Decreto 26/2016, de 21 de julio)

Con respecto al uso de la TIC en la ley española se especifica lo siguiente:

Integración de las TIC en el proceso de aprendizaje para obtener información, realizar cálculos numéricos, resolver problemas y presentar resultados. (BOCYL, Decreto 26/2016, de 21 de julio)

En CCSSM no parece ningún apartado concreto que especifique como estándar el uso de las TIC en las matemáticas.

Otra de las diferencias que se observan al comparar ambos currículos, es que el español tiene un aspecto más social y afectivo en la enseñanza de las matemáticas.

Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de los demás. (BOCYL, Decreto 26/2016, de 21 de julio)

Si analizamos ambos documentos encontramos elementos comunes muy importantes con respecto a la visión que cada uno de ellos tiene sobre la importancia de las matemáticas y sobre el uso de estas en la vida.

Los estudiantes matemáticamente competentes pueden aplicar las matemáticas que conocen para resolver los problemas que surgen en la vida cotidiana, la sociedad y el lugar de trabajo (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers , 2010, p.7, traducción personal)

El aprendizaje de las matemáticas tiene una doble función: por una parte, se aprenden porque son útiles en otros ámbitos (en la vida cotidiana, en el mundo laboral, en otras áreas curriculares, etc.) (BOCYL, Decreto 26/2016, de 21 de julio)

Ambos documentos tienen como objetivo la promoción del aprendizaje matemático como un conocimiento transversal y completo que tiene un alto impacto en la vida posterior de los estudiantes, dado que la enseñanza de la matemática no debe quedar reducido a ese pensamiento generalizado en la sociedad de que solo se enseñan para que los alumnos sepan trabajar con los números, sino que un buen aprendizaje en este campo va a ser muy útil en la vida cotidiana, como queda reflejado en los dos documentos.

Con respecto a la estructuración de contenidos ambos dividen las matemáticas y los currículos de los grados en temáticas:

Tabla 2. Estructuración de contenidos

<b>Estructura de educación primaria CCSSM, 2010</b>	<b>BOCYL, 2016</b>	
Operaciones y pensamiento algebraico	Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
Número y operaciones en base diez (Kindergarten: Conteo y Cardinalidad)		Números
Número y operaciones — Fracciones (Tercero, cuarto y quinto grado)		
Medición y datos		Medida

		Estadística y probabilidad
		Geometría
Geometría		

Dicha estructuración corresponde a los grados de educación primaria. Con algunas diferencias según los grados, así se podría relacionar ambas estructuras, quizás lo que más llama la atención es la estructuración en los CCSSM por separado de las operaciones y números en base diez y fracciones. Además, dentro de medición y datos en los CCSSM se incluye la medida de datos estadístico, la de figuras geométricas y estimación. Además, algunos de los aspectos del bloque transversal del BOCYL aparecen en las diferentes temáticas en los CCSSM, no aparecen todos.

Otro de los puntos en común implícitos en el estudio de las matemáticas es el rigor con el que se debe trabajar y comunicar en esta área y la importancia de educar en ello, por eso queda reflejado en ambos documentos, como se puede observar a continuación:

Los estudiantes matemáticamente competentes intentan comunicarse precisamente con los demás. Intentan usar definiciones claras en la discusión con otros y en su propio razonamiento. Indican el significado de los símbolos que eligen, incluido el uso del signo igual de manera consistente y apropiada” (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.6, traducción personal)

Se debe favorecer el desarrollo de estas capacidades que facilitarán el razonamiento lógico de tipo inductivo y deductivo, la percepción y visualización espacial y el fomento del rigor y la precisión tanto en la exposición de argumentos como en la valoración de los razonamientos de los demás” (BOCYL, Decreto 26/2016, de 21 de julio)

La importancia del uso de manipulativos también es uno de los puntos comunes que encontramos en ambos documentos.

Los estudiantes más jóvenes pueden confiar en el uso de objetos o imágenes concretas para ayudar a conceptualizar y resolver un problema. (National

Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers 2010, p.6, traducción personal)

La manipulación de materiales en esta etapa es un principio metodológico básico y debe ser una constante en la actividad matemática diaria. La utilización adecuada de algunos recursos didácticos como las regletas, el ábaco, el tangram, el pentominó, los mosaicos, el geoplano y programas informáticos específicos, pueden ser de gran utilidad y emplearse como elementos motivadores. (BOCYL, Decreto 26/2016, de 21 de julio)

Uno de los aspectos comunes en los dos documentos es la construcción del sentido numérico. En el BOCYL aparece recogido en el bloque número dos del currículo de matemáticas:

Permite el desarrollo del sentido numérico, entendido como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se puede expresar en capacidades como la habilidad para descomponer números, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal y utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos. (BOCYL, Decreto 26/2016, de 21 de julio)

En cambio, en los CCSSM no aparecen como tal recogidos en un solo bloque, sino que podemos apreciar el trabajo de los siete componentes del sentido numérico Almeida, Bruno y Perdomo (2014) y Arce, Conejo, y Muñoz (2019) en diferentes estándares que se marcan en cada curso.

- Comprender el significado del número:

El estudiante comprende que los tres dígitos de un número de tres dígitos representan cantidades de centenas, decenas y unidades; por ejemplo, 706 es igual a 7 centenas, 0 decenas y 6 unidades (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.19, traducción personal)

- Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números:  
Identificar si el número de objetos en un grupo es mayor, menor o igual que el número de objetos en otro grupo, por ejemplo, utilizando estrategias de emparejamiento y conteo. (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.12, traducción personal)
- Usar puntos de referencia:  
“Que el estudiante mida la longitud de un objeto usando herramientas apropiadas como reglas, patrones de medida, palos de medición y cintas métricas.” (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.20, traducción personal)
- Utilizar la composición y descomposición de números:  
“Descomponer números menores o iguales a 10 en pares de más de una manera, por ejemplo, mediante el uso de objetos o dibujos, y registre cada descomposición mediante un dibujo o una ecuación (por ejemplo,  $5 = 2 + 3$  y  $5 = 4 + 1$ ). (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.11, traducción personal)
- Usar múltiples representaciones de los números y operaciones:  
“Usar la suma y la resta dentro de 20 para resolver problemas de palabras que involucren situaciones de sumar, tomar, juntar, separar y comparar, con incógnitas en todas las posiciones, por ejemplo, mediante el uso de objetos, dibujos y utilización de símbolos para los números desconocidos cuando se representa un problema. (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p. 15, traducción personal)
- Comprender el efecto relativo de las operaciones:  
“El estudiante debe interpretar una ecuación de multiplicación como una comparación, por ejemplo, interprete  $35 = 5 \times 7$  como una afirmación de que 35 es 5 veces más que 7 y 7 veces más que 5. Debe saber representar en ecuaciones

las declaraciones verbales.” (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.29, traducción personal)

- Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta:  
 “Utilizar el razonamiento para resolver problemas matemáticos y del mundo real, por ejemplo, tablas de razones equivalentes, diagramas de cinta, diagramas de líneas de números dobles o ecuaciones. (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.36 traducción personal)

En el caso del CCSSM los estándares reflejados en este documento son algunos de los que evidencia de forma más clara el desarrollo del sentido numérico, pero no son los únicos, dado que los componentes del desarrollo numérico aparecen en multitud de estándares en casi todos los grados.

En el BOCYL queda reflejado en el bloque dos que después se desarrolla en contenidos, estándares y criterios de evaluación en cada curso. En dicha tabla podemos observar cómo se relacionan los estándares del bloque dos del BOCYL y los siete componentes del sentido numérico. Como se evidencia el sentido numérico aparece en ambos documentos.

Tabla 3. Sentido numérico en el BOCYL

<b>Componentes del sentido numérico</b>	<b>BOCYL</b>
Comprender el significado del número	Descompone números naturales atendiendo al valor posicional de sus cifras
Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números	Ordena números enteros, decimales y fracciones básicas por comparación, representación en la recta numérica y transformación de unos en otros
Usar puntos de referencia	Resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando porcentajes y regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa,

	explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas
Utilizar la composición y descomposición de números	Descompone, compone y redondea números naturales y decimales, interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.
Usar múltiples representaciones de los números y operaciones	Utiliza diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, identificándolos y utilizándolos como operadores en la interpretación y la resolución de problemas
Comprender el efecto relativo de las operaciones	Elaboración y uso de estrategias de cálculo mental.
Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta	Estima y comprueba resultados mediante diferentes estrategias

Algo que se observa muy claramente es la diferencia que existe con respecto a la temática y edad. Analizando los currículos por grados, se vislumbra que en el español los contenidos se adelantan con respecto al americano, esto quiere decir que en el primero hay ciertos conceptos que se estudian antes que, en el segundo, esto sucede en el aprendizaje de las cuatro operaciones básicas.

Tabla 4. Suma y resta en CCSSM y BOCYL

<b>BOCYL, 2016</b>	<b>CCSSM, 2010</b>
Primero de primaria (Contenido)	Primer grado (estándar)
Sumas y resta hasta el 99.	Sumar y restar dentro de 20, el estudiante debe mostrar fluidez en la suma y resta hasta 10.

Como se aprecia en esta tabla, en el currículo de Castilla y León, los alumnos deben sumar y restar cifras hasta el 99 en primero de primaria, en cambio en los CCSSM en el año equivalente solo se exige que los alumnos puedan trabajar situaciones de adición y sustracción hasta el 20.

Tabla 5. Multiplicación y división en CCSSM y BOCYL

<b>BOCYL, 2016</b>	<b>CCSSM, 2010</b>
Tercer grado (Contenido)	Quinto Grado (estándar)
Utilización de los algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división. Automatización de los algoritmos	Multiplicación con fluidez de números enteros de varios dígitos usando el algoritmo estándar.
	Sexto Grado (estándar)
	División con fluidez de números enteros de varios dígitos usando el algoritmo estándar.

Como se observa en lo CCSSM, los alumnos comienzan a utilizar el algoritmo estándar de multiplicación y división en quinto y sexto grado, pero en España, este proceso comienza en tercero de primaria.

Una de las diferencias que existen entre ambos currículos es que en el español aparece como contenido los números romanos, aspecto que no sucede en el americano, seguramente este apartado no aparezca dado que en el primero es un aspecto cultural importante en el contexto histórico europeo.

Además, la temática con respecto al uso y el trabajo de la moneda en el americano solo se estudia en segundo grado, en cambio en el español es uno de los contenidos que podemos encontrar a lo largo de varios cursos.

Tabla 6. Comparación de currículos en temática del dinero

<b>BOCYL, 2016</b>	<b>CCSSM, 2010</b>
--------------------	--------------------

Primer curso (contenido):	Segundo curso (estándar)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Monedas de 10, 20, 50 céntimos y de 1 y 2 euros.</li> <li>• Billetes de 5, 10, 20 y 50 euros.</li> </ul>	Resolver problemas verbales relacionados con billetes de un dólar, monedas de diez centavos, monedas de cinco centavos y centavos, utilizando los símbolos \$ y ¢ de manera apropiada.
Segundo curso (Contenido):	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Billetes de euro.</li> <li>• Monedas de euro y de céntimos.</li> <li>• Manejo de los precios de artículos cotidianos.</li> <li>• Problemas sencillos de céntimos y euros.</li> </ul>	

A modo de conclusión, ambos currículos tienen grandes e importantes semejanzas en la configuración de la enseñanza de las matemáticas con una fuerte presencia del trabajo del desarrollo del sentido numérico, aspecto que remarca la importancia de este aspecto en la enseñanza de las matemáticas. Además, en ambos queda reflejado la importancia de la enseñanza de las matemáticas como un elemento transversal y de alto impacto en el desarrollo del estudiante, y la necesidad de aplicar la enseñanza de área con problemas reales. El rigor como elemento fundamental en el trabajo de esta área y la importancia del uso de manipulativos en los primeros momentos del aprendizaje de las matemáticas para adquirir las bases adecuadas para asentar el resto de los aprendizajes.

También existen diferencias entre ambos documentos, quizás la más llamativa es la diferencia que existe entre niveles, el español exige un nivel de conocimientos mayor a alumnos menores que el americano, un ejemplo: En primero de primaria se exige operaciones de suma y resta con números hasta el noventa y nueve, en cambio en primer grado (sistema americano) solo se exige la adición y sustracción con números hasta el veinte. Este aspecto es muy interesante dado que cabría preguntarse si en un sistema más exigente los alumnos obtienen una mayor competencia o si finalmente va en detrimento de ellos.

En el americano no se hace referencia a ninguna relación de las matemáticas con otras asignaturas como con las artes o las nuevas tecnologías, aspectos cada vez mas presentes en la educación española en la corriente STEAM. Tampoco se hace referencias al nivel social y afectivo de la enseñanza de las matemáticas, no dejamos de ser seres que nos relacionamos en todo momento.

## **6. PRESENTACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN. PROPUESTA PEARSON BASADA EN LOS CCSSM.**

Las estrategias utilizadas en el distrito escolar de Sioux Falls (Dakota del sur) para la enseñanza de las cuatro operaciones tiene como objetivo que el estudiante realice un trabajo previo a la presentación los algoritmos que mayoritariamente se utilizan en la enseñanza tradicional, donde afianzará la comprensión y el sentido numérico y esto favorecerá una enseñanza más comprensiva de los algoritmos. Debemos tener en cuenta que estas estrategias didácticas se circunscriben a la propuesta de Pearson para desarrollar los estándares que aparecen recogidos en lo CCSSM.

Dado que trabajamos en un sistema decimal durante la instrucción se va a tratar de mostrar a los alumnos que tanto el diez, como el 5 (la mitad del primero) son números con los que el trabajo va a ser más sencillo, comúnmente se les denomina “números amigos”.

### **6.1.SUMA**

Cuando hablamos de sumas nos estamos refiriendo a una situación aditiva opuesta a la resta (Añadir – quitar, tomar, juntar, comparar), donde tenemos un numero X que va a aumentar tantas unidades como el numero Y, el resultado será G ( $X+Y=G$ ).

Las propiedades fundamentales de la suma son la siguientes; conmutativa, es decir que el resultado va a ser independiente del orden de la operación ( $X+Y=G$ ,  $Y+X=G$ ), asociativa, si sumas tres o más números da igual el orden de la suma que el resultado no va a variar

El trabajo con la suma comienza en Kindergarten como se especifica en el "Resolver problemas verbales de suma y resta, dentro de 10, por ejemplo, mediante el uso de objetos o dibujos para representar el problema" (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.11, traducción personal).

Es decir, los alumnos deben saber resolver problema de suma y resta con números hasta 10, utilizando materiales manipulativos o representaciones.

En esta etapa los alumnos están aprendiendo los números y todo el rato se trabaja con materiales manipulativos y los problemas que se le plantean al alumno son básicos y nunca escritos.



Figura 6. Materiales manipulables

En primer grado y en los siguientes grados los alumnos que lo necesiten pueden utilizar materiales manipulativos, nunca se van a prohibir, aunque siempre se va a intentar guiar al alumno a estrategias más eficientes.

El paso más importante en la suma se da en segundo grado donde a los alumnos se les enseña a trabajar con bloques de base 10. Comienzan a sumar números con dos cifras como se especifica en el CCSSM: "Suma y resta con fluidez hasta 100 usando estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y/o la relación entre la suma y la resta" (National Governors

Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.19, traducción personal).

El currículo recoge el uso de bloques base diez, así que los estudiantes trabajarán utilizando los manipulables que reflejan el valor posicional.

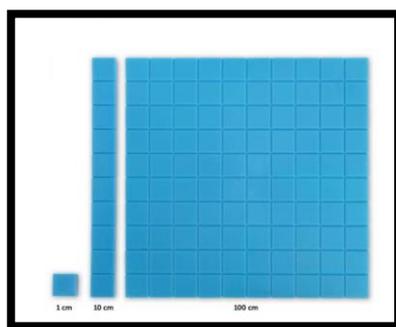


Figura 7. Materiales manipulables base 10

El paso importante es el salto de los manipulables en base diez, a trabajar con la misma teoría, pero de forma figurativa siguiendo una estructura de desarrollo propia del enfoque CPA.

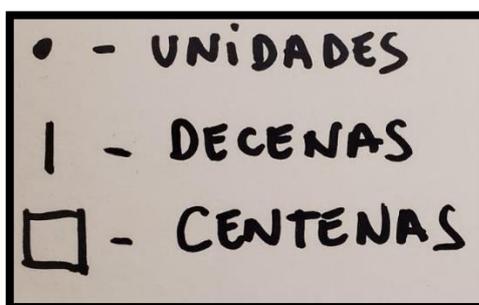


Figura 8. Resumen sistema posicional

Al ser muy visual el paso a lo figurativo es realmente sencillo dado que el alumno puede relacionar el trabajo manipulativo y el figurativo e incluso trabajarlo a la vez en ambos ambientes (Pearson, 2017a).

$$23 + 54 = 70 + 7 = 77$$

$$32 + 25 = 57$$

$$56 + 85 = 141$$

□ = 100 = 10 DECENAS

1 = 10 = :::::

Figura 9. Estrategias de suma por valor posicional

Como podemos observar es la misma teoría que se aplicaría en el trabajo con manipulables, pero de forma figurativa. Al haber dado el salto desde los manipulables, la estrategia no debe de estudiarse ni aprenderse, surge de forma natural sin que el niño requiera una explicación. Como en el último de los casos, donde se convierte diez decenas en una centena y diez unidades en una decena. Se observa que el niño sabe identificar las unidades, centenas y decenas.

A continuación, los alumnos comenzarán a trabajar con diferentes estrategias, sin necesidad de realizar explicaciones complejas, a través del aprendizaje guiado comenzarán a utilizar otras más eficientes basadas en lo ya aprendido.

$$23 + 54 =$$

$$20 + 50 = 70$$

$$3 + 4 = 7$$

$$70 + 7 = 77$$

$$23 + 54 = 77$$

Figura 10. Diferentes estrategias de suma usando el valor posicional.

Como podemos observar el alumno identifica las unidades y decenas y rompe la suma en dos, una estrategia eficaz que facilita el cálculo y es muy visual. Además, el alumno está desarrollando uno de los componentes del sentido numérico, (4) utilizar la composición y descomposición de números (Pearson, 2017b).

$$296 + 468 = 764$$

$$200 + 400 = 600$$

$$90 + 60 = 150$$

$$6 + 8 = 14$$

$$600 + 150 = 750$$

$$750 + 14 = 764$$

$$296 + 468 = 764$$

$$296 + 400 = 696$$

$$696 + 60 = 756$$

$$756 + 8 = 764$$

$$296 + 468 = 764$$

$$300 + 468 = 768$$

$$768 - 4 = 764$$

Figura 11. Estrategias diferentes de suma

Como vemos en las imágenes tenemos tres formas diferentes de hacer la suma con tres dígitos, la primera sería la primera que utilizarían los alumnos de una forma más natural, la segunda sería algo más compleja dado que solo está rompiendo uno de los números. La última, en este caso es la más eficiente dado los números con los que se trabaja, pero es la más compleja ya que tendrían que realizar una estimación y después un reajuste (Pearson, 2017d).

A finales de cuarto grado, los alumnos deben saber utilizar el algoritmo tradicional para trabajar con las sumas como se especifica en los CCSSM: “Suma y resta con fluidez números enteros de varios dígitos usando el algoritmo estándar” (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers , 2010, p.29, traducción personal)

Pero es algo fácil de adquirir dado que el algoritmo estándar utiliza el valor posicional como fundamento de sus estrategias y el alumnado a través de la propuesta de Pearson a desarrollar un esquema CPA que termina en este sistema abstracto. Como se observa en la figura el alumno ha comprendido que cinco unidades más otras cinco, hacen una decena. A la vez, ocho decenas más dos, hacen una centena. La explicación de la “suma con llevadas” se facilita enormemente puesto que el alumno comprende lo que esta sucediendo en todo momento.

$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 285 \\ + 325 \\ \hline 610 \end{array}$$

□□□  
□□□

Figura 12. Algoritmo tradicional de suma

## **6.2.RESTA:**

Cuando hacemos referencia a la resta estamos hablando de una situación de sustracción (Quitar, reducir, separar, tomar, comparar) donde a B se le resta C y como resultado tenemos E.

Dado que la resta es el proceso contrario a la suma, son dos contenidos que tienen mucha relación y que aparecen en los CCSSM constantemente juntos y que comienza a trabajarse desde los primeros años. No obstante, no es hasta segundo grado cuando realmente comienza a estudiarse de una forma más intensa dado que como en la suma, en segundo grado la resta comienza a trabajarse con números hasta la centena lo que implica el conocimiento de estrategias diferentes.

Kindergarten: Representar sumas y restas con objetos, dedos, imágenes mentales, dibujos, sonidos (por ejemplo, aplausos), situaciones reales, explicaciones verbales, o ecuaciones. (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p. 11, traducción personal)

Segundo grado: Usar la suma y la resta dentro de 100 para resolver problemas de uno y dos pasos que involucran situaciones de sumar, tomar, juntar, separar y comparar, con incógnitas en todas las posiciones, por ejemplo, mediante el uso de dibujos y ecuaciones con un símbolo para que el número desconocido represente el problema. (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.19, traducción personal)

Como se ha especificado anteriormente los alumnos siempre pueden comenzar a estudiar un nuevo concepto con el uso de manipulativos, pero la mayoría de los alumnos cuando comienzan en segundo grado a trabajar la resta directamente trabajan con la representación pictórica.

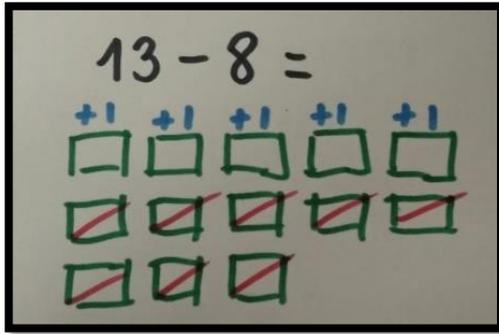


Figura 13. Representación pictórica resta

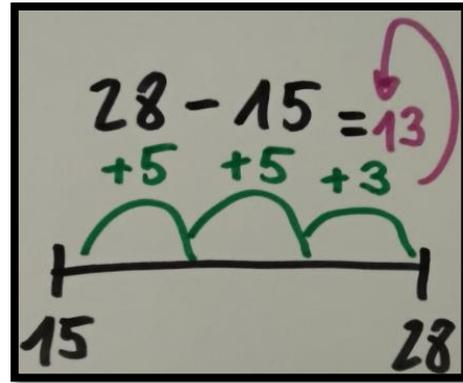


Figura 14. Recta resta

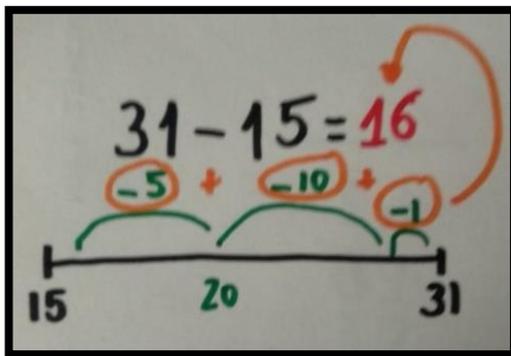


Figura 15. Recta resta

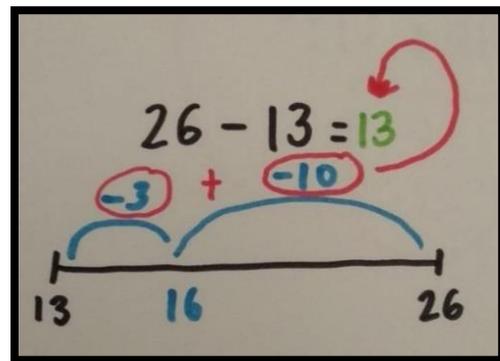


Figura 16. Recta resta-sumando

Como podemos observar en la figura 13, arriba en la izquierda, el alumno hace una representación pictórica de la resta de una manera básica, dado que dibuja la cantidad inicial de objetos y después elimina la cantidad del sustraendo. Esta estrategia pronto será abandonada y es efectiva en los primeros cursos donde se presenta la resta. A continuación, el alumno empezará a utilizar la recta para restar, dado que es una representación gráfica potente, que ayuda a comprender los mecanismos de la resta. En la figura 14, en la parte superior derecha y en la 15 en la parte inferior izquierda, el alumno debe averiguar cuánto tiene que quitar al sustraendo para llegar al minuendo, el estudiante intentará usar los “números amigos” para facilitarle el proceso. En figura 16, el alumno trabaja con la suma, de esta forma averigua cuánto tiene que sumar al sustraendo para llegar al minuendo. Usando la recta numérica comprende la diferencia que existe entre los dos números, además de trabajar uno de los componentes del sentido numérico, (5) usar múltiples representaciones de los números y operaciones.

Continuando con el aprendizaje de la resta, el alumnado posteriormente empezará a trabajar la resta usando el valor posicional, que anteriormente ha utilizado en la suma. Es importante recordar que es uno de los estándares que aparece en los CCSSM.

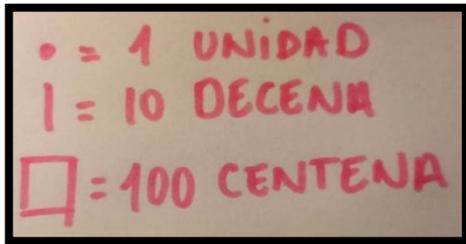


Figura 17. Tabla de equivalencias pictóricas

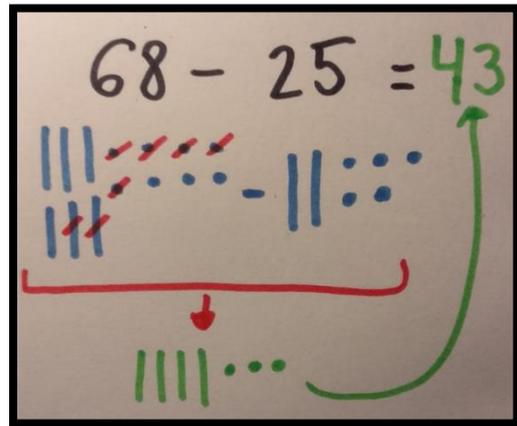


Figura 19. Resta valor posicional

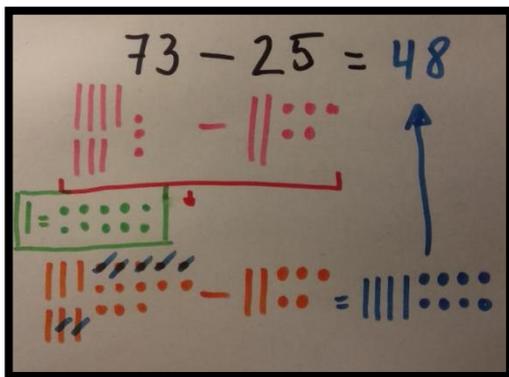


Figura 18. Resta valor posicional

Como observamos en las figuras 17, 18 y 19 los estudiantes están utilizando la estrategia aprendida en la suma y están restando, utilizando el valor posicional. Comienza representando los números con las equivalencias pictóricas que aparecen en la figura 17 para después operar de manera más sencilla. En la figura 18 observamos una operación con una mayor complejidad dado que el estudiante tiene que descomponer una decena en diez unidades para poder trabajar con la resta de manera efectiva y a la vez entendiendo el valor posicional (Pearson, 2017a).

$$343 - 121 = 222$$

Figura 20. Resta valor posicional centenas

El alumno puede dar el paso a operar restas con centenas utilizando el valor posicional, aunque posteriormente empleará otras estrategias más eficientes para operar con números más grandes.

$$38 - 14 = 24$$

$$14 + 6 = 20$$

$$20 + 10 = 30$$

$$30 + 8 = 38$$

$$= 24$$

Figura 21. Sumar para restar

$$63 - 37 = 26$$

$$37 + 3 = 40$$

$$40 + 20 = 60$$

$$60 + 3 = 63$$

Figura 22. Sumar para restar

$$296 - 123 = 173$$

$$200 - 100 = 100$$

$$90 - 20 = 70$$

$$6 - 3 = 3$$

Figura 23. Resta valor posicional

$$(390 + 10 = 400)$$

$$550 - 390 = 160$$

$$550 - 400 = 150$$

$$150 + 10 = 160$$

Figura 24. Ajuste y resta

Estas figuras representan diferentes tipos de estrategias, todas ellas son más abstractas que las primeras. En ella el alumno trabaja con valor posicional o ajuste. En las figuras 21 y 22 observamos que el estudiante está realizando la misma estrategia que cuando utilizaba la recta para llegar del sustraendo al minuendo, pero sin necesidad de una representación. En la figura 23 el alumno a través del valor posicional resta los números rompiéndolos en centenas, decena y unidades. En la 24, el estudiante realiza un ajuste para simplificar los cálculos. En este caso aproxima el sustraendo a 400 y hace la resta. A continuación, realizará un ajuste ya que ha sumado 10 más al resultado dado que aproximó 390 a 400 (Pearson, 2017d).

El objetivo con el que se le enseña al alumno las diferentes estrategias es el de que utilice la óptima para cada caso, siempre atentos a nuevas estrategias que el alumno pueda tomar y reflexionando con él cuál es la más efectiva en ese momento.

Posteriormente en los cursos superiores al estudiante se le introduce el método estándar de resta.

A handwritten subtraction problem on a piece of paper. At the top, the columns are labeled 'C D U' in blue. The numbers are written in black ink: 321 minus 156. A horizontal line is drawn under the numbers. Below the line, the result '155' is written in green. Red ink is used for annotations: a '1' is written above the '2' in the tens column, and another '1' is written above the '1' in the units column. A red checkmark is placed next to the '1' in the units column, indicating a successful borrowing operation.

Figura 25: Algoritmo tradicional de suma

Después de seguir la secuenciación que anteriormente he descrito, la explicación del algoritmo estándar resulta sencillo, dado que, si tenemos que trabajar con resta como la que aparece en la figura, el alumno entenderá perfectamente por qué necesitamos “coger” un uno del número siguiente, ya que como explicamos anteriormente necesitamos romper una decena en 10 unidades y una centena en 10 decenas.

### 6.3.MULTIPLICACIÓN:

La multiplicación se puede definir como el producto de dos números  $B \times V$ , es decir sumar  $V$  un total de veces que  $B$ , o un total de veces igual a  $B$ . También tiene otras definiciones como el número de elementos que tiene el producto cartesiano (Matriz, columnas por filas)

Las propiedades fundamentales de la multiplicación son las siguientes: conmutativa, el orden de los factores no altera el producto; la asociativa si se multiplican tres o más números el orden no altera el resultado y la distributiva, la multiplicación de un número es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número.

En segundo grado se recoge el sentido de multiplicación como agrupación repetida: "Use la suma para encontrar el número total de objetos dispuestos en matrices rectangulares con hasta 5 filas y hasta 5 columnas; escribe una ecuación para expresar el total como una suma de sumandos iguales" (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers , 2010, p.19, traducción personal).

El trabajo de la multiplicación comienza a ser más intenso en tercer grado: "Multiplicar números enteros de un dígito por múltiplos de 10 en el rango de 10-90 (por ejemplo,  $9 \times 80$ ,  $5 \times 60$ ) usando estrategias basadas en el valor posicional y las propiedades de las operaciones. (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p.24, traducción personal)

Se les presenta a los alumnos como la suma repetida, es decir, si tenemos una operación de  $3 \times 4$ , debemos sumar tres veces cuatro o cuatro veces tres. Mas adelante también se les presenta la suma de grupos y cada uno de esos grupos tiene a su vez una cantidad. Primeramente, se hace uso de materiales manipulables.

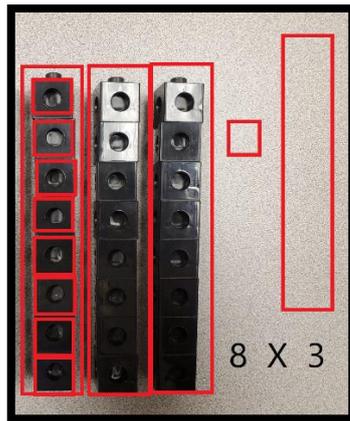


Figura 26. Multiplicación con materiales manipulables

Como podemos observar en la figura tenemos tres filas con ocho bloques, de esta forma con los manipulables, los alumnos pueden representar las multiplicaciones y contar el resultado.

Después a los estudiantes se les presenta las matrices.

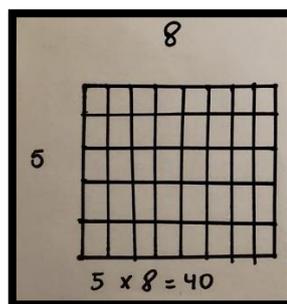


Figura 27. Matriz completa

Al utilizar los materiales manipulables como los que aparecen en la imagen, los alumnos con facilidad van a saber utilizar y entender la representación de la multiplicación a través de las matrices, número de columnas por un número de filas.

El objetivo de utilizar las matrices es el siguiente: Se les presentará a los alumnos la denominada matriz vacía, que simplemente es una matriz que no tiene la medida de los lados y a en la cual puedes representar cualquier multiplicación.

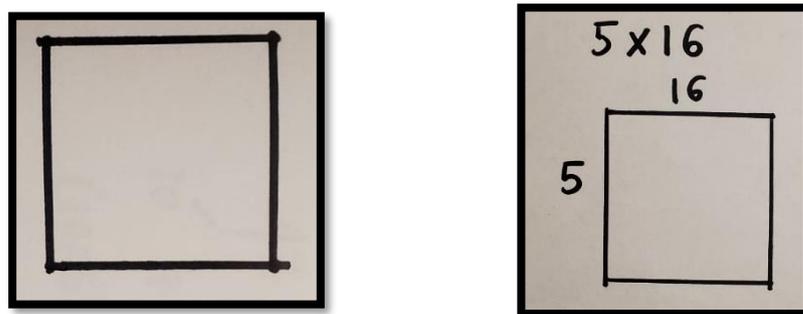


Figura 28. Matriz vacía y utilización de matriz para multiplicar

Dado que realizar todas las filas y columnas de una matriz como la que tenemos a la izquierda no es una estrategia eficiente, vamos a romper los números, gracias a la propiedad distributiva de la multiplicación, de esta forma el estudiante podrá trabajar con dos multiplicaciones más sencillas.

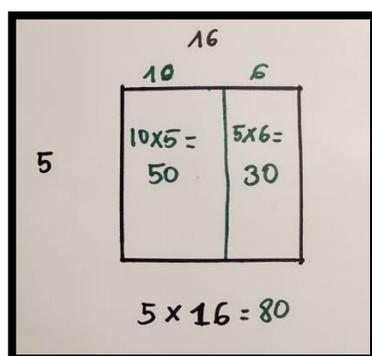


Figura 29. Matriz con multiplicación

Como podemos observar en la imagen el alumno ahora tiene que hacer dos multiplicaciones mucho más sencillas, además al estar representado el proceso realizado en la matriz, el alumno sabe por qué está rompiendo el número, ahora son dos matrices en una, una con 5 filas y 10 columnas y otra con 5 filas y 6 columnas, ambas pertenecen a una mayor que tiene 5 filas y 16 columnas. Además, con esta representación pictórica se visualiza de manera muy clara el cumplimiento justamente de la propiedad distributiva.

Con esta técnica los niños podrán aumentar la complejidad de las multiplicaciones que pueden realizar.

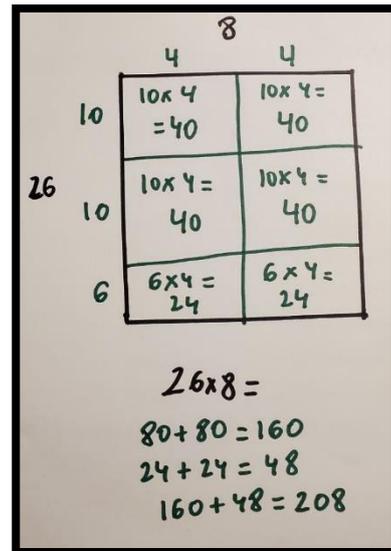
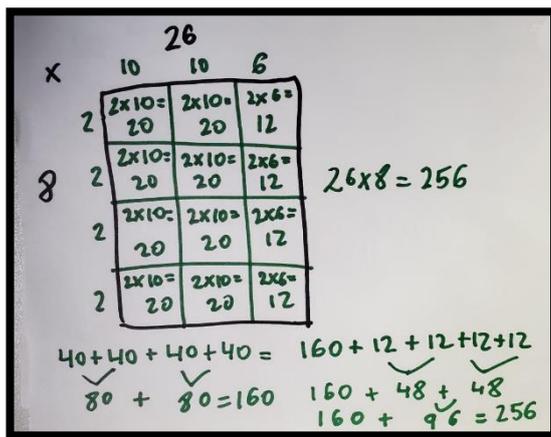


Figura 30. Diferentes formas de afrontar una multiplicación

Como se especifica en los CCSSM, los alumnos de cuarto grado deben manejar estas estrategias u otras, pero no es necesario que utilicen el algoritmo tradicional.

Multiplicar un número entero de hasta cuatro dígitos por un número entero de un dígito, y multiplicar dos números de dos dígitos, utilizando estrategias basadas en el valor posicional y las propiedades de las operaciones. Ilustrar y explicar el cálculo utilizando ecuaciones, matrices rectangulares y/o modelos de área. (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers , 2010, p.30, traducción personal)

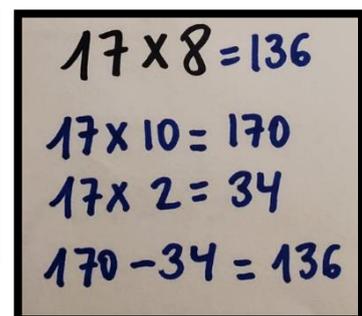
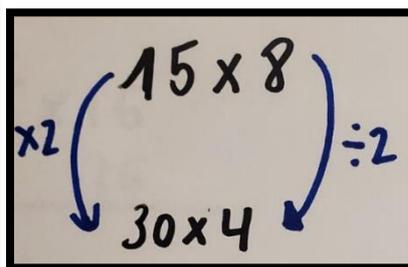
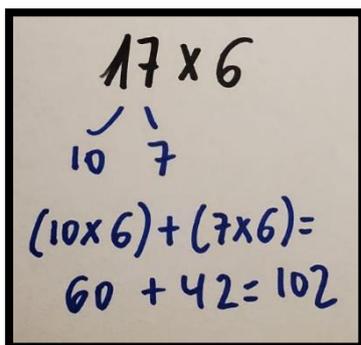


Figura 31. Diferentes estrategias de multiplicación

Estas son algunas de las estrategias que se muestra a los alumnos, se denominan, de derecha a izquierda: descomponer un factor, doble y mitad y redondear y ajustar. El

objetivo es que todos ellos puedan abordar cualquier multiplicación con la estrategia más efectiva para ellos y para la multiplicación a la que se enfrentan.

En la primera figura podemos observar que se rompe uno de los números de la multiplicación, en dos números más pequeños y fáciles para operar, en este caso específico se ha roto el diecisiete en diez y siete, de esta manera solo tenemos que multiplicar a estos por seis, mucho más sencillo que multiplicar el número completo, se finalizará con la suma de las dos operaciones.

En la siguiente se trabaja dividiendo uno de los factores por el mismo número con el cual se multiplica el otro factor, de esta manera podemos crear expresiones aritméticas más sencillas de operar y que tiene el mismo resultado que la original.

La última se trabaja con el redondeo que realizas a uno de los multiplicando, la idea es que llegues a números múltiplos de diez, de esta manera haces la operación, a continuación, multiplicas el multiplicando que nos has redondeado por aquel número que resta del redondeo y el número original, y restas el resultado al de la operación que has hecho con el número redondeado.

## **6.4.DIVISIÓN:**

Un proceso que se trabaja con números naturales y por el cual, A se dividirá por B y el resultado será C si es exacta y R el resto que surge en una división inexacta de números naturales.

La división tiene dos significados, el partitivo; tiene un sentido de reparto y el cuotativo; cuántas veces cabe el divisor en el dividendo.

La división está íntimamente relacionada con la multiplicación, en los primeros años se expone la división como un proceso opuesto a la multiplicación. Como se ha especificado anteriormente, las tablas de multiplicar comienzan a memorizarse en cuarto grado, aun así, la división comienza a trabajarse en tercer grado, pero siempre relacionándolo con las tablas de multiplicación (Pearson 2017c).

Interpretar los cocientes de números enteros, por ejemplo, interprete  $56 \div 8$  como que 56 se reparte por igual entre 8, o que 56 se reparte en grupos de 8 iguales. Por ejemplo, describa un contexto en el que varias acciones o varios grupos se puedan expresar como  $56 \div 8$ . (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p)

A la vez en tercer grado comienza a trabajar las fracciones sin olvidar el sentido cuotativo de la división y así trabajar de forma correcta con los dos sentidos de la división

Aunque se utilizarán manipulativos para dividir para trabajar la división partitiva, el objetivo es que el alumno sea capaz de relacionar que al trabajar con una división como  $45/5$  deben dar la vuelta a la operación y buscar un número que al multiplicar 5 de como resultado 45.

Trabajar con cocientes y restos de números enteros con dividendos de hasta cuatro dígitos y divisores de un dígito, utilizando estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y / o la relación entre la multiplicación y la división. Ilustrar y explicar el cálculo utilizando ecuaciones, matrices rectangulares y / o modelos de área. (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010, p. 30, traducción personal)

El trabajo con la división en operaciones de números que no encontramos en las tablas de multiplicar comienza en cuarto grado, y como se observa en este párrafo es muy importante la relación con la división y la utilización de modelos de matriz que ya se han explicado durante la multiplicación relacionándolo con la división.

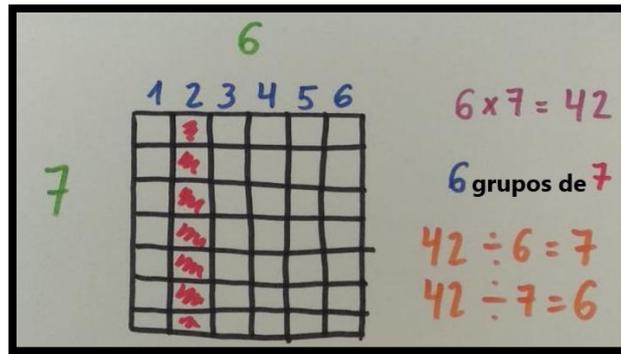


Figura 32. Representación de la división en una matriz.

De esta forma el alumno relaciona las matrices de multiplicación con la división, dado que en la matriz está haciendo grupos que contienen cierto número de objetos.

Como ya he especificado antes en cuarto grado comienza el trabajo de las divisiones y más específicamente las que no son exactas. El proceso de planteamiento inicial para trabajar las divisiones que tienen residuo se realiza a través de problemas matemáticos donde los alumnos deben repartir cantidades que no se ajustan exactamente con el divisor.

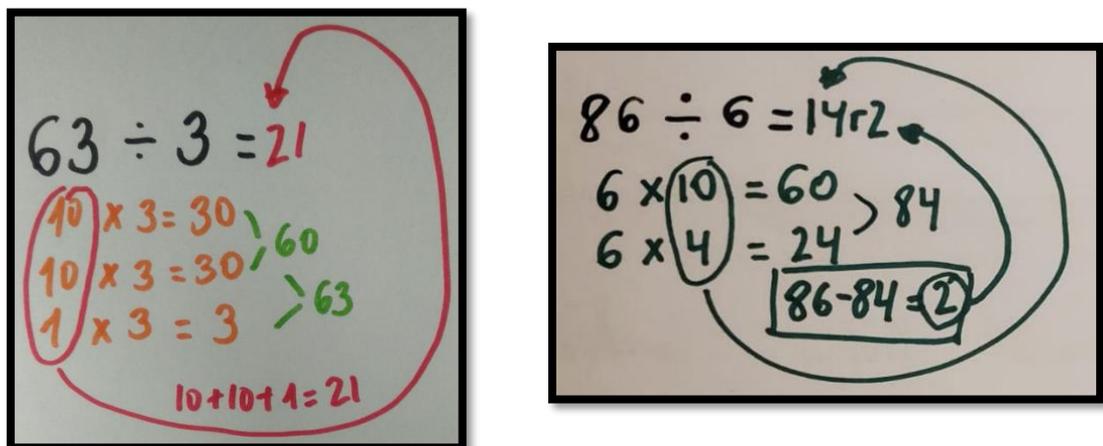


Figura 33. Multiplicar para dividir.

Paralelamente se introduce al estudiante en el uso de la estrategia denominada multiplicar para dividir. El alumno multiplicará el divisor haciendo uso de los números para llegar al dividendo o acercarse lo máximo posible. El estudiante trabajará con el resto en los problemas, por tanto, sabe el significado que tiene “r” en la operación de la derecha.

El trabajo de las fracciones sigue en cuarto grado una vez terminado el de las divisiones (Pearson, 2017e).

Utilizando esta estrategia el alumno no necesita utilizar el algoritmo estándar de división, aunque posteriormente en quinto grado se le enseñará dado que esta estrategia (Multiplicar para dividir) es válida, pero conforme aumenta las cantidades pierde gran parte de su eficacia.

## **7. MÉTODO ABN**

Como explica Martínez Montero: “ABN es un método natural en el que los cálculos que se realizan son transparentes con respecto a las manipulaciones reales que se realizarían” (2018, p.53) uno de los éxitos que tiene este nuevo sistema de cálculo es la manipulación de las cantidades usan todo tipo de materiales (gomas para agrupar palillos), además de usar diferentes estrategias (números amigos, casitas).

Surge como un replanteamiento de la enseñanza de las operaciones, dado que el sistema estándar es poco flexible y dificulta la enseñanza de conceptos matemáticos básico y el desarrollo del sentido numérico.

Es un nuevo método natural de cálculo que rompe con el método estándar de enseñanza, que tiene como base la abstracción directa de los cálculos manipulables. El alumno necesita un conocimiento amplio de los sistemas de numeración: “El alumnado de la nueva metodología parte de un conocimiento muy completo del sistema de numeración (de ahí el nombre de “cálculo basado en números”)” (Martinez, 2018, p.53).

Los cálculos son abiertos, es decir, el estudiante puede seguir caminos distintos y teniendo en cuenta sus posibilidades para realizar una operación, además trabaja con los mecanismos de cálculo.

Se hace hincapié en asociar los cálculos matemáticos a problemas que pueden surgir en la vida real del alumno.

## 7.1.SUMA

Este proceso puede relacionarse con una suma de manipulativos en base 10. Como observamos en las columnas de la izquierda, estamos sumando unidades y decenas. Es decir, en la imagen de la derecha la estudiante sumaría cinco grupos de diez palillos y cuatro unidades más dos decenas y siete unidades.

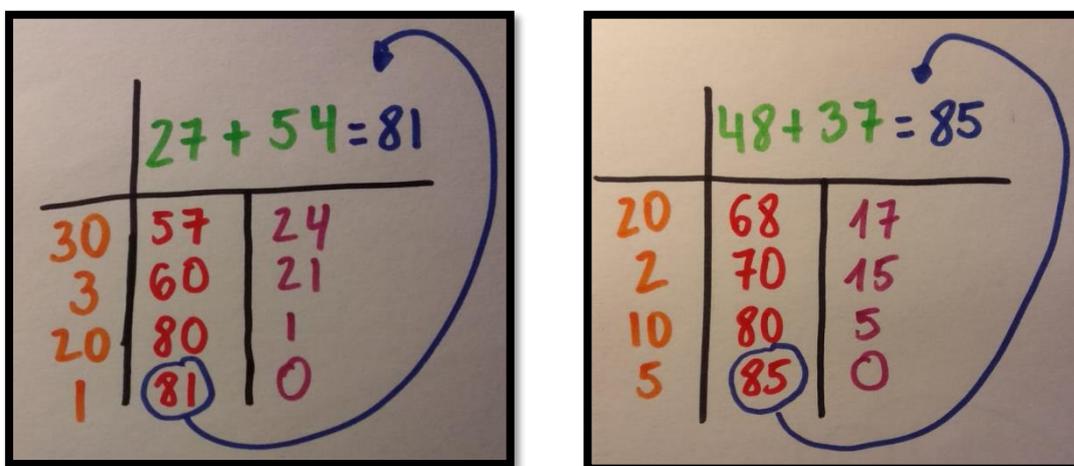


Figura 34. Estrategia ABN suma

En las imágenes de arriba podemos observar el método ABN de suma con números de dos cifras. El objetivo es ir rompiendo números para facilitar la operación. En las columnas de la derecha (morado) observamos el sumando (izquierda) que estamos descomponiendo para ir sumádoselo al otro sumando (derecha). En las columnas del centro (rojo) se anota el resultado de la suma, del sumando (izquierda) que hemos roto con el otro sumando (derecha). Por último, en las columnas de la izquierda (naranja) se anota la cantidad exacta que se quita al sumando que rompemos (izquierda), y que sumaremos al otro sumando (derecha). Una vez que en las columnas de la derecha (morado) lleguemos a cero la suma está terminada dado que hemos sumado todo el sumando (izquierda). Dicha explicación comienza por el sumando de la izquierda, en esta estrategia se puede empezar indistintamente por cualquiera de los dos sumandos.

## 7.2.RESTA

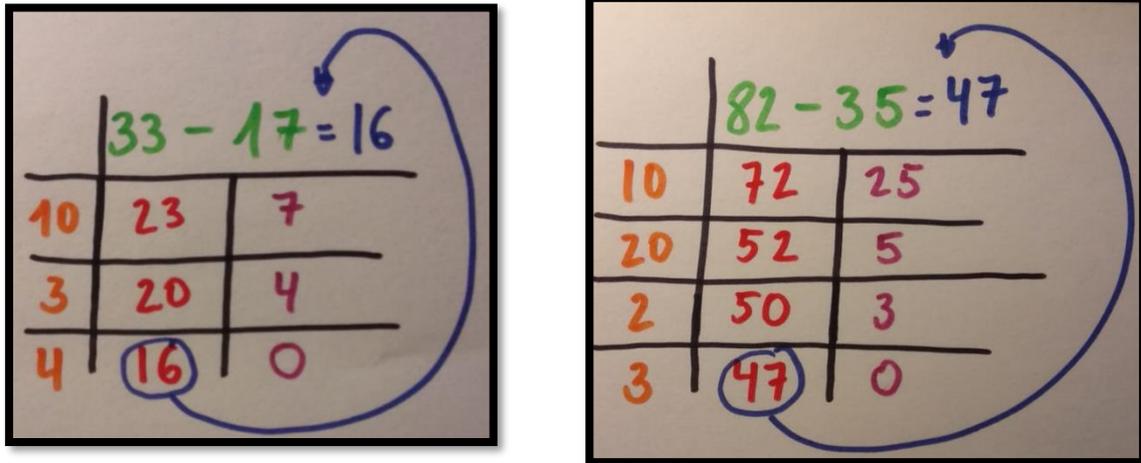


Figura 35. Estrategia de resta por detracción

En estas figuras podemos observar el método ABN de resta con dos dígitos llamado detracción, como en la suma el objetivo es romper los números para poder calcular de forma más sencilla. En las columnas de la derecha (morado) podemos observar el sustraendo, cada vez con números más pequeños dado que se está realizando la operación. En las columnas de la izquierda (naranja) se anota cantidad del sustraendo que se va a restar en cada momento y en las columnas del centro (rojo) se escribe la cantidad de minuendo que sobra después de quitar la parte del sustraendo anotada en naranja.

Como ya hemos evidenciado en la suma, utilizando esta estrategia es muy sencillo establecer relación entre el método ABN y la suma en base diez con manipulativos, puesto que estamos trabajando con unidades y decenas de forma clara.

Existen dos diferentes estrategias más para trabajar la resta, se denominan resta de la escalera ascendente y descendente.

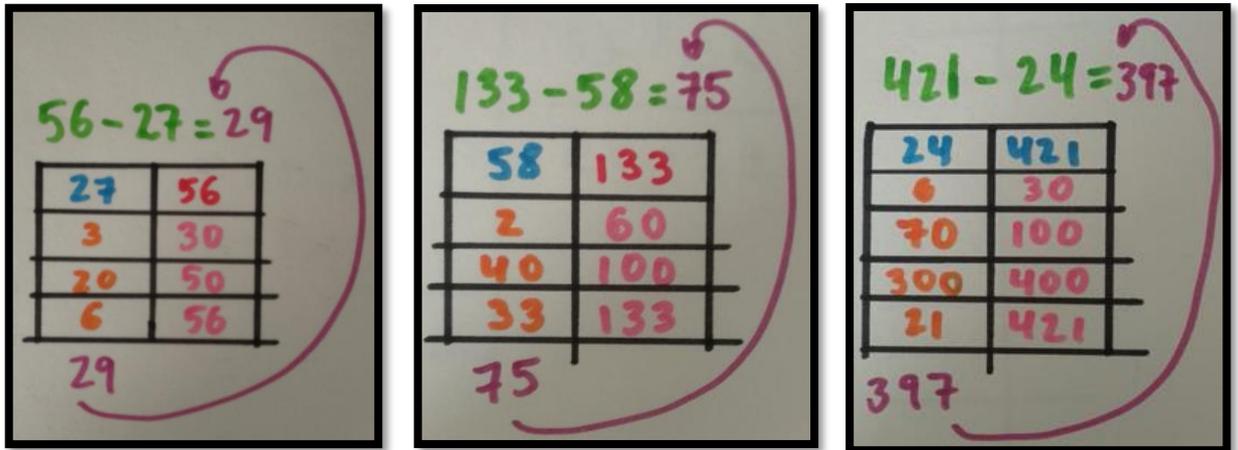


Figura 36. Resta ABN de escalera ascendente

Esta estrategia (ABN de escalera ascendente) consiste en partir del sustraendo para llegar al minuendo y la diferencia que existe entre ambos es el resultado.

En la figura hay dos columnas, en la izquierda se irá anotando el número que se sumará al sustraendo con el objetivo de ir acercándose paulatinamente al minuendo. En la columna de la derecha se anotará en resultado de la suma anterior. Una vez que en la columna de la derecha se llegue a la misma cantidad de minuendo el proceso a terminado, se sumará las cantidades de la columna izquierda y ese será el resultado de la operación.

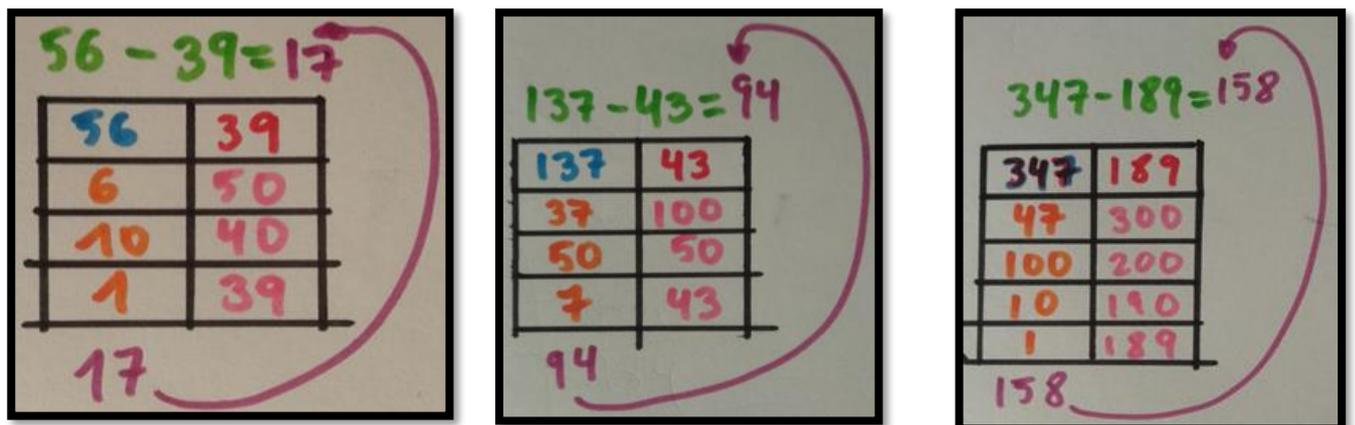


Figura 37. Resta ABN de escalera descendente

En dicha estrategia (ABN de escalera descendente) el objetivo es ir restando pequeñas cantidades al minuendo para llegar al sustraendo, la diferencia es el resultado de la operación. En la figura 37 podemos observar dos columnas. En la de la izquierda el

estudiante escribe las cantidades que va restando al minuendo, en la derecha se anota el resultado de la resta anterior. Cuando en la columna de la derecha se anote la misma cantidad que el sustraendo, la operación ha finalizado, se sumará la columna de la izquierda donde se anota la diferencia y por tanto el resultado de la operación.

### 7.3. MULTIPLICACIÓN

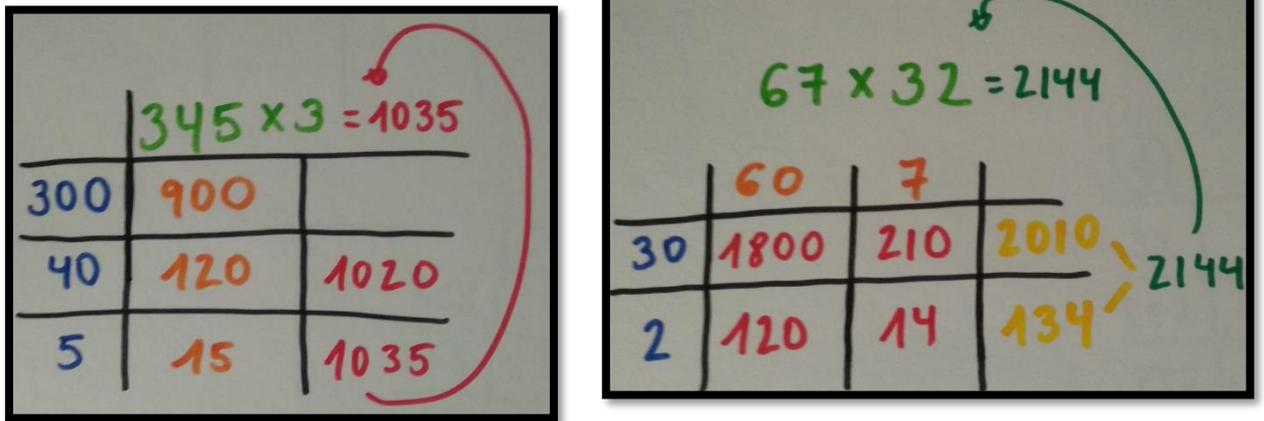


Figura 38. Multiplicación ABN

Como apreciamos en las imágenes el objetivo es romper los números para multiplicar de forma más sencilla, gracias a la propiedad asociativa de la multiplicación; si se multiplican tres o más números el orden no altera el resultado. En la primera operación se utiliza el valor posicional para descomponer uno de los factores y multiplicarlo por el otro, posteriormente se suma y se obtiene el resultado. En la segunda foto descomponemos los dos factores utilizando el valor posicional y multiplicamos decenas por decena, unidades y decenas y unidades por unidades, después sumamos el producto de las multiplicaciones y obtenemos el resultado de nuestra operación.

En ambos sistemas se aprovecha el poder que tiene la operación en base diez para reducir la complejidad de la operación, pero no exige al alumno que lo utilice, puede hacer otras “roturas” que le resulten más útiles o cómodas.

## 7.4.DIVISIÓN

$456 \div 8 = 57$		
456	400	50
56	56	7
		57

$568 \div 3 = 189r1$		
568	300	100
268	240	80
28	27	9
1		189

Figura 39. División ABN

En la figura observamos que se rompe el dividendo en números que resulten sencillos para dividir por el divisor. En la imagen de la izquierda se divide cuatrocientos y posteriormente cincuenta y seis, ambos números sencillos de dividir por ocho, el resultado de esas pequeñas divisiones se suma para obtener el resultado. En la imagen de la derecha se sigue el mismo proceso solo que esta división tiene resto.

Como se ha especificado con anterioridad el método ABN es abierto, la estrategia que se han explicado en este documento son las que se utilizan más habitualmente, no obstante, no son las únicas y pueden adaptarse a las singularidades de las operaciones más avanzadas o en momentos donde el alumno está comenzando a manejar el sistema.

## 8. COMPARACIÓN DE ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA DE LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS DE LA ARITMÉTICA.

En este punto vamos a comparar los diferentes métodos de enseñanza de las cuatro operaciones básicas de la aritmética. Nos centraremos en la propuesta de Pearson y en el

modelo ABN que cada vez más se usa en España y hay estudios sobre la eficacia de su uso.

Los resultados alcanzados por los alumnos ABN en el apartado de las operaciones han sido superiores a lo esperado. A priori, se podría pensar que, dado el exhaustivo tratamiento y el casi completo adiestramiento que los niños CBC tienen con las tablas y las cuentas, estos alumnos podrían estar por encima de los sujetos de la investigación. No ha sido así. (Martínez, 2011, p.107)

Como se ha mencionado con anterioridad hay dos puntos que son de vital importancia en la didáctica de la aritmética, el desarrollo del sentido numérico y el modelo CPA. Modelo que cada vez tiene más aceptación “El logro de la capacidad de representación matemática del estudiante que obtuvo una enseñanza basada de CPA es significativamente mejor que el estudiante que obtuvo una enseñanza y aprendizaje convencionales” (Eka, 2015, p.123, traducción personal)

Por tanto, son dos factores que determinaran si las estrategias didácticas que se emplean en la enseñanza de las operaciones básicas son eficaces o no en su propósito. Entendemos por eficaces aquellos métodos que desarrollen plenamente el sentido numérico en sus estudiantes y que tenga una estructura lógica que facilite su aprendizaje y el factor previamente citado.

Se realizará la comparación analizando los métodos de enseñanza de las cuatro operaciones.

## **8.1.SUMA Y RESTA:**

Si estudiamos la estructura con la que Pearson plantea la enseñanza de la suma y la resta podemos observar cómo sigue la estructura CPA, desde la introducción de los manipulativos, el trabajo pictórico, la utilización del valor posicional, posteriormente la descomposición de los números para calcular de manera más sencilla y facilita el objetivo final, el cual es que el alumno pueda utilizar los algoritmos tradicionales y a su vez tenga muchas otras estrategias para enfrentarse a las operaciones de la suma y resta.

Es aquí donde el modelo ABN y la propuesta de Pearson comparte similitudes, dado que el modelo ABN busca que el alumno descomponga el número y pueda trabajar con él de manera más sencilla que al final es el mismo objetivo que tiene la propuesta de Pearson. Además, el método ABN utiliza manipulativos en las primeras etapas y facilita el paso del manipulativo al pictórico, como la propuesta de Pearson.

Si nos centramos en el desarrollo del sentido numérico, en la propuesta de Pearson observamos varios de los componentes que lo comprenden. Como el desarrollo del significado del número (1) al utilizar el valor posicional. La descomposición y composición de los números (4), dado que busca que el alumno sea capaz de romper el número para operarlo más fácilmente, aspecto que también se recoge en el sistema ABN. El uso de múltiples representaciones gráficas, manipulativas y pictóricas (5), el trabajo de este componente se observa, dado que se utilizan rectas para trabajar y representar las operaciones.

También se observan diferencias, es el caso de la estrategia ABN ascendente y descendente, la propuesta de Pearson tiene un desarrollo más intuitivo al utilizar rectas en la resta, en cambio se aprecia más abstracción en este punto en el ABN. A su vez el ABN no desarrolla el componente (5) el uso de múltiples representaciones gráficas, manipulativas y pictóricas, dado que no utiliza otro tipo de representaciones aparte de las manipulativas.

La propuesta de Pearson prima el uso del valor posicional aspecto que también se recoge en el ABN, pero este último también trabaja con otro tipo de “roturas”. Al mostrar más formas de romper los números facilita al alumno el trabajo y tiene un mayor desarrollo del componente (4) del sentido numérico, la descomposición y composición de los números.

## **8.2.MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN:**

En la comparación de las estrategias de enseñanza de la multiplicación y división compararemos método ABN y la propuesta de Pearson.

Si nos centramos en la estructuración del aprendizaje de la multiplicación y la división la propuesta de Pearson sigue una estrategia lógica CPA. Comienza en el ámbito manipulativo, después pasa al ámbito pictórico representando la multiplicación y la división y posteriormente trabajando en el nivel abstracto con diferentes estrategias.

Aquí ambas propuestas coinciden ampliamente dado que siguen una estructura lógica CPA. El método ABN tiene el objetivo de ser transparente entre los cálculos escritos y los manipulativos.

En el caso del desarrollo numérico se puede apreciar en la propuesta de Pearson algunos componentes. Como el desarrollo del significado del número (1), en la relación que establece el alumno entre un conjunto de números en la multiplicación y división. La composición y descomposición de números (4) en el uso de matrices para multiplicar o en la estrategia multiplica para dividir: “Creemos que el modelo de matriz es una forma muy poderosa para llevar a los estudiantes a una sólida comprensión de no solo el 'cómo' de multiplicación, también el "por qué””. (Lorraine, Derek, 2015, p.23, traducción personal). El uso de múltiples representaciones gráficas, manipulativas y pictóricas (5) con la representación de la multiplicación como el área de un rectángulo. Por último, comprender las operaciones y su efecto relativo (6) explicando a los alumnos que la multiplicación es lo contrario a la división.

El método ABN desarrolla en igual medida la composición y descomposición de números (4), es parte de la naturaleza de este sistema.

Con respecto al desarrollo numérico asociado al método ABN existen algunas diferencias al comparar este método con la propuesta de Pearson. Desarrolla en menor medida el componente (5) el uso de múltiples representaciones gráficas, manipulativas y pictóricas, dado que sí utiliza los manipulables, pero no tanto otras representaciones gráficas. Al no utilizar matrices la comprensión las operaciones y su efecto relativo (6) se trabaja en menor medida

Resumiendo, ambas propuestas tienen un desarrollo lógico basado en el CPA, es parte del “ADN” de método ABN y como queda demostrado está presente en todo el desarrollo de la propuesta de Pearson.

Con respecto al desarrollo del sentido numérico en la propuesta de Pearson se observa una mayor presencia o un trabajo más en profundidad de los componentes del mismo, dado que en el método ABN algunos de ellos se trabajan más superficialmente o de manera menos profunda.

También hay una diferencia notable entre ambos, el método ABN no tiene como objetivo que el estudiante al final de proceso trabaje con los algoritmos estándar, es una estrategia válida en cualquier contexto. En cambio, la propuesta de Pearson, aunque sigue una estructura lógica CPA tiene como objetivo final el aprendizaje de los algoritmos estándar.

## **9. CONCLUSIÓN:**

Las matemáticas para ambos sistemas educativos son de vital importancia en el desarrollo de los estudiantes, como se demuestra en sus documentos de referencia donde aluden a la transversalidad de la materia y la importancia de esta en el futuro de los alumnos.

Aunque en los currículos americano y español podemos encontrar diferencias, tienen un núcleo compartido, aspectos que se recogen en ambos documentos y que son muy importantes en el diseño de la enseñanza de las matemáticas. Como el desarrollo del sentido numérico, la importancia de trabajar las matemáticas en situaciones reales o una estructura que parte de lo manipulativo y termina en lo abstracto. También podemos comprobar como en ambos se utiliza el valor del trabajo con la base diez como elemento facilitador en la enseñanza de las matemáticas.

Existen diferencias, como la disparidad de exigencia que existen en las diferentes etapas donde el sistema americano tiende a construir un progreso más gradual y en cambio el español tiende a pedir más a los alumnos más jóvenes, un ejemplo claro, es la diferencia de edad en la que se aprende el sistema estándar de división.

Por otro lado, tanto el sistema ABN y la propuesta de Pearson basada en los CCSSM han demostrado tener un sistema de enseñanza más robusto y lógico basado en el CPA, dado que sigue una estructura más lógica de enseñanza que facilita la enseñanza de las cuatro operaciones básicas de la aritmética. Un sistema que fomenta la comprensión relacional y el desarrollo del sistema numérico.

Este trabajo tenía un objetivo claro, la comparación de los sistemas educativos español y americano. El análisis de los documentos guía en el aprendizaje de las matemáticas han sido analizados y comparados de manera exhaustiva, además, han quedado plasmadas las diferencias estructurales y legislativas de ambos sistemas.

Con respecto al cumplimiento de los objetivos específicos, han sido logrados. Se han descritos ambas propuestas de enseñanza de las operaciones aritméticas básicas y se han analizado las semejanzas y diferencias.

Analizando las fortalezas de este documento encontramos el contacto directo del autor con la educación americana y el trabajo con dichas estructuras de aprendizaje que favorecen su entendimiento y comprensión, además, de comprobar su eficacia.

También existen limitaciones como la comparación de solo dos sistemas diferentes de enseñanza de las operaciones básicas de la aritmética, además de estudiar ambos sistemas sin un análisis de la puesta en práctica de los mismos en la resolución de problemas.

Podrían formularse varios temas para investigaciones futuras a partir de este trabajo, como los diferentes métodos de enseñanza de las fracciones, temática complicada en su enseñanza debido a los conceptos errores de base que tiene la mayoría de los docentes y alumnos. Las fortalezas y debilidades de ambos sistemas con alumnos con necesidades especiales. Los pros y contras de un sistema educativo más gradual en las enseñanzas, es más eficaz abarcar más en un pocos años o concretar unos pocos conceptos, pero importantes y trabajarlos de manera extensiva durante varios años.

Podría ser de interés afrontar las bajas calificaciones, es estudios mundiales, en matemáticas del sistema español y americano de enseñanza y afrontar el “fracaso” de gran

parte de los alumnos de ambos sistemas o el peso que debería tener en la formación docente el desarrollo de estructuras matemáticas sólidas en los futuros maestros.

Para concluir, valorar el carácter formativo de este trabajo y los aprendizajes significativos en el área de las matemáticas que me ha otorgado realizar este documento.

Un aporte final a mi formación que facilitarán el desarrollo de mi actividad profesional en el futuro.

## 10. BIBLIOGRAFÍA:

- Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo Díaz, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de Las Ciencias*, 32(2), 9–34. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.997>
- Arce, M., Conejo, L. y Muñoz, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis
- Bruno Castañeda, A. (2000). Sentido numérico. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 43–44, 267–270. <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo54.pdf>
- Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Didáctica de los sistemas numéricos para maestros. En J. D. Godino (Coord.), *Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 155-270). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- DECRETO 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León., Boletín Oficial de Castilla y León 14058 (2016). <https://doi.org/10.1128/MCB.00493-06>
- Flores, M. M. (2010). Using the Concrete–Representational–Abstract Sequence to Teach Subtraction With Regrouping to Students at Risk for Failure. *Remedial and Special Education*, 31(3), 195-207. <https://doi.org/10.1177/0741932508327467>
- García Retana, J. A. (2011). Modelo educativo basado en competencias: importancia y necesidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, 11(3), 1-24. <https://www.redalyc.org/pdf/447/44722178014.pdf>

- Hafiziani Eka Putri. (2015). The influence of Concrete Pictorial Abstract (CPA) approach to the Mathematical representation ability achievement of the pre-service teachers at elementary school. *International Journal of Education and Research*, 3(6), 113–126
- Lorraine, D., Derek, H. (2015). An explanation for the use of arrays to promote the understanding of mental strategies for multiplication. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 20 (1), 20-23. [https://researchonline.nd.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1158&context=edu\\_article](https://researchonline.nd.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1158&context=edu_article)
- Martínez Montero, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón*, 63(4), 95–110.
- Martínez Montero, J. (2018). El cálculo ABN. Un enfoque diferente para el aprendizaje del cálculo y las matemáticas. *Padres y Maestros / Journal of Parents and Teachers*, 376, 52–59. <https://doi.org/10.14422/pym.i376.y2018.008>
- National council of teachers of mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National council of teachers of mathematics, Inc. <https://www.nctm.org/>
- National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standards mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers. <http://www.corestandards.org/>
- Pearson (2017a). *Investigation 3 in number, data, space, grade 2: addition and subtraction*. Estados Unidos: Pearson
- Pearson (2017b). *Investigation 3 in number, data, space, grade 3: addition and subtraction*. Estados Unidos: Pearson
- Pearson (2017c). *Investigation 3 in number, data, space, grade 3: multiplication and division*. Estados Unidos: Pearson

Pearson (2017d). *Investigation 3 in number, data, space, grade 4: addition and subtraction*. Estados Unidos: Pearson

Pearson (2017e). *Investigation 3 in number, data, space, grade 4: multiplication and division*. Estados Unidos: Pearson

Real Decreto 126. (2014). De 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE de 1 de Marzo*, 1–58.

Rd, C. (2001). Bill of rights. *Petrophysics*, 42(6), 634. <https://doi.org/10.7748/ns.6.30.56.s62>

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26. <http://www.davidtall.com/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf>

U.S. Department of Education (2010). *An Overview of the U.S. Department of Education*. Recuperado el 20 febrero 2020, de [https://www2.ed.gov/about/overview/focus/what\\_pg2.html](https://www2.ed.gov/about/overview/focus/what_pg2.html)

Universidad de Valladolid (2009). Competencias generales y específicas del Grado en Educación Primaria. Recuperado el 30 de junio 2020, de [http://www.uva.es/export/sites/uva/2.docencia/2.01.grados/2.01.02.ofertaformativagrad os/ documentos/edprimsg\\_competencias.pdf](http://www.uva.es/export/sites/uva/2.docencia/2.01.grados/2.01.02.ofertaformativagrad os/ documentos/edprimsg_competencias.pdf)

Yew Hoong, L., Weng Kin, H., & Lu Pien, C. (2015). Surveying its origins and charting its future. *The Mathematics Educator*, 16(1), 1–19. [http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV16\\_1/TME16\\_1.pdf](http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV16_1/TME16_1.pdf)

