



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Algunas extensiones del Teorema de Gerschgorin

Autor:

Álvaro Valera Blanco

Tutor/es:

María Paz Calvo Cabrero

Índice general

Introducción	1
1. El Teorema de Gerschgorin original y algunas extensiones	3
1.1. Teorema de Gerschgorin	3
1.2. Primeras extensiones del Teorema de Gerschgorin	5
1.3. Algunas extensiones del Teorema de Gerschgorin	8
1.3.1. Utilizando Teoría de Grafos	8
1.3.2. Utilizando técnicas de Análisis	14
1.3.3. El Teorema de Gerschgorin a partir de normas matriciales	17
2. Los conjuntos de Brauer y de Brualdi	21
2.1. Conjunto de Brauer	21
2.2. El Conjunto de Brualdi	29
3. El conjunto mínimo de Gerschgorin	49
3.1. Definición del conjunto mínimo de Gerschgorin	49
3.2. Comparación del Conjunto mínimo de Gerschgorin y el conjunto de Brualdi	54
Bibliografía	59

Introducción

El Trabajo Fin de Grado que presentamos se dedica al estudio de algunas extensiones del conocido Teorema de Gerschgorin, el cual proporciona un conjunto de discos en el plano complejo que contiene al espectro de una matriz, y que se puede construir a partir de sus coeficientes. El Teorema de Gerschgorin proporciona una herramienta de gran aplicación en distintos campos. Por un lado, permite probar que una matriz es invertible, viendo que el 0 no está contenido en el conjunto de Gerschgorin y que, por tanto, no es autovalor de la matriz. Por otro lado, proporciona cotas superiores para el radio espectral de una matriz, lo que permite garantizar la convergencia de diversos métodos iterativos para la resolución de sistemas lineales. El Teorema de Gerschgorin es el punto de partida de este trabajo y a partir de él, apoyandonos fundamentalmente en los Capítulos 1-4 de [1], se han definido y analizado otros conjuntos que también contienen a los autovalores de una matriz, aunque su construcción es más laboriosa.

En el Capítulo 1 recordamos el resultado original de Gerschgorin y analizamos algunas extensiones de éste utilizando teoría de grafos y técnicas de análisis. También vemos cómo a partir de la definición de norma matricial asociada a una norma vectorial podemos llegar a los mismos resultados con demostraciones alternativas.

En el Capítulo 2 definimos los conjuntos de Brauer y de Brualdi, y estudiamos algunas de sus propiedades. Además, demostramos resultados que comparan los nuevos conjuntos entre sí, y también con el conjunto formado por los discos de Gerschgorin.

En el último Capítulo estudiamos el conjunto mínimo de Gerschgorin y justificamos por qué el calificativo "mínimo" es muy apropiado para dicho conjunto.

Para ilustrar los diferentes resultados de este trabajo consideramos algunas matrices concretas, con las cuales vamos explicando y dibujando en cada Capítulo los correspondientes conjuntos de inclusión de autovalores que se van estudiando.

Capítulo 1

El Teorema de Gerschgorin original y algunas extensiones

En este capítulo recordaremos primero el resultado original de Gerschgorin junto a su prueba, que proporciona un resultado de inclusión de autovalores para cualquier matriz compleja $n \times n$ en términos de n discos del plano complejo obtenidos a partir de los coeficientes de la matriz. Además, veremos algunas extensiones de este teorema utilizando teoría de grafos y otras técnicas de análisis; y cómo a partir de la definición de norma matricial se obtienen demostraciones alternativas de algunos resultados de inclusión de autovalores previos.

1.1. Teorema de Gerschgorin

Lo primero que haremos será ver qué es lo que denotará cada símbolo y definiremos algunos conceptos. Para ello empezaremos denotando por \mathbb{C}^n , para n entero positivo, al espacio vectorial n -dimensional complejo de todos los vectores columna $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, con $x_i \in \mathbb{C} \forall 1 \leq i \leq n$; y por $\mathbb{C}^{m \times n}$ al conjunto de todas las matrices rectangulares $m \times n$ con coeficientes complejos. De hecho, si tenemos una matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, expresamos A como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}], \quad (1.1)$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{C} \forall 1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. (De la misma forma denotamos por \mathbb{R}^n y $\mathbb{R}^{m \times n}$ para el caso real). También utilizaremos I_n , para denotar la matriz identidad $n \times n$.

Ahora recordaremos alguna definición

Definición 1.1. Dada una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definimos **el espectro de A** , como el conjunto de autovalores de A , y lo denotaremos por $\sigma(A)$, esto es

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I_n) = 0\}. \quad (1.2)$$

Definimos también el **radio espectral de A** , que lo denotamos por $\rho(A)$, como

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (1.3)$$

Desde un punto de vista geométrico, el radio espectral de una matriz es el radio del menor disco centrado en el origen que contiene a todos los autovalores de la matriz.

Dado el conjunto de índices $N := \{1, 2, \dots, n\}$.

Definición 1.2. Para cada $i \in N$ se define el **radio del i -ésimo disco de Gerschgorin de A** como

$$r_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \quad (i \in N). \quad (1.4)$$

Por convenio, utilizaremos que $r_1(A) = 0$ si $n = 1$.

A lo largo de este trabajo también usaremos el término "suma de fila i -ésima" para referirnos a $r_i(A)$.

Definición 1.3. Dada una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definimos el **i -ésimo disco de Gerschgorin de A** , $\Gamma_i(A)$, como el disco cerrado en el plano complejo de centro a_{ii} y radio $r_i(A)$, y el **conjunto de Gerschgorin de A** , $\Gamma(A)$, como la unión de los n discos de Gerschgorin. Se trata, por tanto, de un conjunto cerrado y acotado. Estos son

$$\begin{cases} \Gamma_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i(A)\} & (i \in N), \\ \Gamma(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A). \end{cases} \quad (1.5)$$

Podemos ver de esta definición que $\Gamma(A)$ tiene una estructura geométrica muy interesante, pues los autovalores de la matriz pueden estar en el interior de alguno de los n discos de Gerschgorin o caer en la frontera de alguno de ellos, aunque más adelante veremos que si ocurre esto, dicho autovalor tendrá que estar en la frontera común de los n discos; también puede suceder que cada disco contiene a un autovalor, a varios o que alguno de los discos no contenga a ninguno, lo que implicará que otros contengan a más de uno.

A continuación presentamos el resultado original de Gerschgorin.

Teorema 1.4 (Teorema de Gerschgorin). *Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\lambda \in \sigma(A)$. Existe un índice k en N tal que*

$$|\lambda - a_{kk}| \leq r_k(A). \quad (1.6)$$

Es decir, $\lambda \in \Gamma_k(A)$, luego $\lambda \in \Gamma(A)$.

En consecuencia, como esto se cumple para todo $\lambda \in \sigma(A)$, entonces

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A) \quad (1.7)$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(A)$ y $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, un autovector asociado. Esto quiere decir que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, o lo que es lo mismo $\sum_{j \in N} a_{ij} \cdot x_j = \lambda x_i$ para cada $i \in N$.

Como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, hay un índice $k \in N$ para el que $0 < |x_k| = \max\{|x_i| : i \in N\}$. Para este índice k , tenemos que $\sum_{j \in N} a_{kj} \cdot x_j = \lambda x_k$, que es equivalente a poner

$$\sum_{j \in N \setminus \{k\}} a_{kj} \cdot x_j = \lambda x_k - a_{kk} \cdot x_k = (\lambda - a_{kk}) x_k.$$

Tomando valores absolutos en la igualdad anterior y utilizando la desigualdad triangular tenemos:

$$|\lambda - a_{kk}| \cdot |x_k| = \left| \sum_{j \in N \setminus \{k\}} a_{kj} \cdot x_j \right| \leq \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| \cdot |x_j| \leq \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| \cdot |x_k| = |x_k| \cdot r_k(A).$$

Como $|x_k| > 0$, podemos dividir por él obteniendo (1.6). Tenemos pues que, $\lambda \in \Gamma_k(A)$ y en consecuencia $\lambda \in \Gamma(A)$; como esto es válido para cualquier $\lambda \in \sigma(A)$, entonces (1.7) es cierto, concluyendo así la prueba. \square

De este teorema y su demostración podemos ver que operaciones sencillas con los coeficientes de cualquier matriz A en $\mathbb{C}^{n \times n}$ nos dan los radios $\{r_i(A)\}_{i \in N}$ de los n discos de Gerschgorin cuya unión, debe contener a todo el espectro de autovalores de A . Sin embargo estas operaciones tan sencillas puede que nos den información muy poco precisa.

También podemos observar que por el Teorema 1.4 de Gerschgorin tenemos que esta unión de los n discos de Gerschgorin de la matriz A contiene también a los autovalores de cualquier matriz $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que sus elementos diagonales sean iguales a los de A y sus sumas de fila también sean iguales a las de A , es decir, $b_{ii} = a_{ii}$ y $r_i(B) = r_i(A) \forall i \in N$, esto es $\sigma(B) \subseteq \Gamma(A)$.

A continuación veamos una consecuencia muy usada del Teorema 1.4

Corolario 1.5. *Para cualquier matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tenemos*

$$\rho(A) \leq \max_{i \in N} \sum_{j \in N} |a_{ij}|. \quad (1.8)$$

Demostración. Dado cualquier $\lambda \in \sigma(A)$, por el Teorema 1.4, tenemos que existe un índice $k \in N$ tal que $|\lambda - a_{kk}| \leq r_k(A)$.

Usando la desigualdad triangular inversa, tenemos $|\lambda| - |a_{kk}| \leq |\lambda - a_{kk}| \leq r_k(A)$, de donde sacamos

$$|\lambda| \leq |a_{kk}| + r_k(A) = \sum_{j \in N} |a_{kj}| \leq \max_{i \in N} \sum_{j \in N} |a_{ij}|.$$

Como se cumple para cualquier $\lambda \in \sigma(A)$, se cumple para el máximo, el radio espectral. \square

Podemos observar que el lado derecho de (1.8) no es otra cosa que $\|A\|_\infty$ y, por tanto, el Corolario 1.5 da la desigualdad $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$, un resultado bien conocido para cualquier norma matricial derivada de una norma vectorial.

1.2. Primeras extensiones del Teorema de Gerschgorin

Como el Teorema de Gerschgorin puede ser aplicado fácilmente a cualquier matriz cuadrada, podemos sacar de este hecho, lo que sería una primera extensión del Teorema 1.4.

Para ello, tomamos un vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ que satisface $x_i > 0 \forall i \in N$, (lo denotaremos por $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ y diremos que \mathbf{x} es un vector positivo). Definimos ahora la matriz diagonal $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cuyos elementos diagonales son las componentes del vector \mathbf{x} , es decir, $X := \text{diag}[\mathbf{x}] = \text{diag}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Dada una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, la matriz $X^{-1}AX = \left[a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right]$ es semejante a A , y en consecuencia $\sigma(X^{-1}AX) = \sigma(A)$.

Análogamente a las definiciones de la sección anterior, definimos la **suma ponderada de la i -ésima fila** de la matriz A , $r_i^{\mathbf{x}}(A)$, como

$$r_i^{\mathbf{x}}(A) := r_i(X^{-1}AX) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{|a_{ij}| x_j}{x_i} \quad (i \in N, \mathbf{x} > \mathbf{0}), \quad (1.9)$$

y el **i -ésimo disco de Gerschgorin ponderado** y el **conjunto de Gerschgorin ponderado**, respectivamente

$$\begin{cases} \Gamma_i^{r^{\mathbf{x}}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i^{\mathbf{x}}(A)\} & (i \in N), \\ \Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i^{r^{\mathbf{x}}}(A). \end{cases} \quad (1.10)$$

De (1.9), se puede observar que las sumas de filas $r_i^{\mathbf{x}}(A)$ son simplemente sumas ponderadas de los valores absolutos de los coeficientes no diagonales de la fila i -ésima de la matriz A para cada $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^n . También observamos que el i -ésimo elemento diagonal de A y de $X^{-1}AX$ coinciden.

Una aplicación directa del Teorema 1.4 es el siguiente corolario

Corolario 1.6. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ un vector positivo cualquiera de \mathbb{R}^n . Tenemos*

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A). \quad (1.11)$$

Para demostrarlo basta con aplicar el Teorema 1.4 a la matriz $X^{-1}AX$ y tener en cuenta que $\sigma(X^{-1}AX) = \sigma(A)$.

El Teorema 1.4 de Gerschgorin puede ser aplicado a la matriz $X^{-1}AX$ para cualquier matriz no singular $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, para estimar el conjunto de autovalores de A y este corolario es el primer caso especial donde $X = \text{diag}[\mathbf{x}]$, con $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

Este caso es importante ya que determinar estas sumas de fila ponderadas $\{r_i^{\mathbf{x}}(A)\}_{i \in N}$, requiere solo un poco más de esfuerzo computacional que el que necesitábamos para calcular las sumas de fila, $\{r_i(A)\}_{i \in N}$ del Teorema 1.4.

Sin embargo, si X es una matriz no singular llena en $\mathbb{C}^{n \times n}$, aumenta mucho el costo computacional de calcular los radios de los discos de Gerschgorin de la matriz $X^{-1}AX$.

Como se ha dicho anteriormente, cada disco de Gerschgorin puede contener uno, varios o ningún autovalor de la matriz A . Ahora nos vamos a centrar en dar un resultado, una extensión del Teorema 1.4 y del Corolario 1.6, que hace referencia al número de valores propios que se encuentran en cualquier componente conexa (es decir, un subconjunto máximo conexo) de $\Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A)$.

Concretamente, sea $n \neq 2$ y tomamos un subconjunto propio S de N ($\emptyset \neq S \subsetneq N$) y denotamos por $|S|$ a su número de elementos, es decir, el cardinal de S .

Dada cualquier matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y cualquier vector $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^n , escribimos

$$\Gamma_S^{r^{\mathbf{x}}}(A) := \bigcup_{i \in S} \Gamma_i^{r^{\mathbf{x}}}(A). \quad (1.12)$$

Si denotamos por $N \setminus S$ al complementario de S en N y por \emptyset al conjunto vacío, la relación

$$\Gamma_S^{r^{\mathbf{x}}}(A) \cap \Gamma_{N \setminus S}^{r^{\mathbf{x}}}(A) = \emptyset \quad (1.13)$$

establece que la unión de los discos de Gerschgorin con índices pertenecientes a S es disjunta de la unión de los discos restantes.

Apoyándonos en esta relación, tenemos el siguiente resultado que es también muy conocido.

Teorema 1.7. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \neq 2$ y $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^n , tal que la relación (1.13) se cumple para algún subconjunto propio S de N . Entonces $\Gamma_S^{r^{\mathbf{x}}}(A)$ contiene exactamente $|S|$ autovalores de A .*

Demostración. Para $0 \leq t \leq 1$, consideremos el conjunto de las matrices $A(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ donde

$$a_{ii}(t) = a_{ii} \quad \text{y} \quad a_{ij}(t) = t \cdot a_{ij} \quad \text{para } i \neq j \text{ con } i, j \in N.$$

Primero observamos que

$$r_i^{\mathbf{x}}(A(t)) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{|a_{ij}(t)| x_j}{x_i} = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{t |a_{ij}| x_j}{x_i} = t \cdot r_i^{\mathbf{x}}(A) \leq r_i^{\mathbf{x}}(A) \quad (\forall t \in [0, 1]).$$

Como $a_{ii}(t) = a_{ii}$, de la desigualdad anterior y de (1.10), se tiene que $\Gamma_i^{r^{\mathbf{x}}}(A(t)) \subset \Gamma_i^{r^{\mathbf{x}}}(A) \forall t \in [0, 1]$ y $\forall i \in N$.

Estas inclusiones junto con la hipótesis (1.13), implican que

$$\Gamma_S^{r^{\mathbf{x}}}(A(t)) \cap \Gamma_{N \setminus S}^{r^{\mathbf{x}}}(A(t)) = \emptyset \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.14)$$

Por otro lado por el Corolario 1.6 tenemos que

$$\sigma(A(t)) \subseteq \Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A(t)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Tomando $t = 0$, tenemos que $A(0)$ es una matriz diagonal, cuyos autovalores son justamente $\{a_{ii}\}_{i=1}^n$. Luego $\Gamma_S^{r^{\mathbf{x}}}(A(0)) = \{a_{ii} : i \in S\}$ contiene exactamente $|S|$ autovalores de $A(0)$.

Además, los coeficientes de $A(t)$ varían continuamente con t y en consecuencia, sus autovalores lo hacen también continuamente con $t \in [0, 1]$ describiendo en el plano complejo un camino conexo entre un autovalor de la matriz $A(0)$ y el correspondiente autovalor de $A(1)$.

Por lo tanto, como (1.14) se cumple $\forall t \in [0, 1]$, es imposible que al incrementar t continuamente de 0 a 1, $\Gamma_S^{r^{\mathbf{x}}}(A(t))$ gane o pierda ningún autovalor de $A(t)$, lo que implica que $\Gamma_S^{r^{\mathbf{x}}}(A(t))$ contiene exactamente $|S|$ autovalores de $A(t) \forall t \in [0, 1]$.

En conclusión, como $A(1) = A$, entonces $\Gamma_S^{r^{\mathbf{x}}}(A)$ contiene exactamente $|S|$ autovalores de A . \square

A continuación vamos a demostrar que el Teorema de Gerschgorin 1.4 es equivalente a otro resultado, que se conoce como Teorema de la dominancia diagonal estricta. Para ello, necesitamos recordar lo que es una matriz estrictamente diagonalmente dominante.

Definición 1.8. Una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es **estrictamente diagonalmente dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \quad (\forall i \in N), \quad (1.15)$$

es decir, $|a_{ii}| > r_i(A)$ ($\forall i \in N$).

Con esta definición, tenemos

Teorema 1.9. Si $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es estrictamente diagonalmente dominante, entonces A es no singular.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ satisface la hipótesis (1.15) y que es una matriz singular. Esto quiere decir que $0 \in \sigma(A)$.

Utilizando el Teorema 1.4 para $\lambda = 0$ tenemos que existe un número entero $k \in N$ tal que $|\lambda - a_{kk}| = |a_{kk}| \leq r_k(A)$, lo que contradice (1.15). \square

Hemos visto que el Teorema 1.4 implica el Teorema 1.9. Veamos ahora que el recíproco es cierto también. Para ello usaremos de nuevo reducción al absurdo, suponemos que el Teorema 1.9 es cierto y que el Teorema 1.4 no se cumple; es decir, existe una matriz A y un $\lambda \in \sigma(A)$ tal que

$$|\lambda - a_{kk}| > r_k(A) \quad (\forall k \in N). \quad (1.16)$$

Definimos ahora $B := \lambda I_n - A := [b_{ij}]$, que es una matriz singular, (pues 0 es un autovalor de B puesto que λ lo es de A).

Por otro lado de la definición de B obtenemos que $r_k(A) = r_k(B)$ por (1.4) y que $|\lambda - a_{kk}| = |b_{kk}| \forall k \in N$, luego (1.16) se convierte en $|b_{kk}| > r_k(B) \forall k \in N$, es decir, B es una matriz diagonalmente dominante.

Aplicando a la matriz B el Teorema 1.9 tenemos que B es no singular, contradiciendo lo anterior.

En consecuencia, hemos visto que ambos resultados son equivalentes, es decir, que un resultado de inclusión de autovalores (Teorema 1.4) induce un resultado de no singularidad (Teorema 1.9), y viceversa.

1.3. Algunas extensiones del Teorema de Gerschgorin

1.3.1. Utilizando Teoría de Grafos

Nos preguntamos ahora si se puede garantizar que la matriz A es no singular en el caso en el que cambiemos en (1.15) la desigualdad estricta por una igualdad para al menos un índice $j \in N$, es decir, tener unas hipótesis más débiles,

$$|a_{ii}| > r_i(A) \quad \forall i \in N \setminus \{j\} \quad \text{y} \quad |a_{jj}| = r_j(A). \quad (1.17)$$

Vemos con el siguiente ejemplo que esto no siempre es cierto.

Ejemplo 1.10. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

podemos ver que A es no singular mientras que B es singular, cumpliéndose en ambas las hipótesis debilitadas (1.17).

Veamos, utilizando teoría de grafos, qué hipótesis adicional hay que pedir a una matriz para que junto con las condiciones (1.17) se pueda garantizar que la matriz es no singular. Necesitamos algunas definiciones previas.

Definición 1.11. Dada una matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se dice que es una **matriz de permutación** si existe una permutación ϕ (esto es, una aplicación biyectiva del conjunto de índices $N = \{1, 2, \dots, n\}$ en N) tal que

$$P := [\delta_{i, \phi(j)}] \quad \text{donde } \delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} \text{ denota la delta de Kronecker,}$$

En otras palabras, P se obtiene a partir de la matriz identidad $n \times n$ reordenando sus columnas.

Definición 1.12. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, es **reducible** si existe una matriz de permutación $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y un número entero positivo r , con $1 \leq r < n$, para el que se cumple

$$\tilde{P}A\tilde{P}^T = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right], \quad (1.18)$$

donde $A_{11} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ y $A_{22} \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (n-r)}$.

Si tal permutación no existe, entonces diremos que A es **irreducible**.

Para $n = 1$, si el coeficiente a_{11} es nulo la matriz es reducible, y en caso contrario es irreducible.

En el caso en que en (1.18) las matrices A_{11} y $A_{2,2}$ no sean irreducibles, podemos aplicar el algoritmo anterior, a ellas y a sus sucesoras de manera recursiva, hasta que obtengamos la matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y el número entero positivo m , con $2 \leq m \leq n$, tal que

$$PAP^T = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m-1} & R_{1m} \\ 0 & R_{22} & \cdots & R_{2m-1} & R_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & R_{m-1m-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & R_{mm} \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

que se conoce como **forma normal reducida de A** , donde cada matriz R_{jj} con $1 \leq j \leq m$ es tal que

- i) R_{jj} es una matriz irreducible de tamaño $p_j \times p_j$ con $p_j \geq 2$,
 - ó
 - ii) R_{jj} es una matriz 1×1 con $R_{jj} = [a_{kk}]$ para algún $k \in N$.
- (1.20)

Para $n \geq 2$, se puede observar de (1.18), que cualquier elemento no diagonal no nulo de A puede ser reemplazado por cualquier número complejo no nulo dejando invariante la reducibilidad o irreducibilidad de la matriz. Además, los elementos diagonales de A no juegan ningún papel en la reducibilidad o irreducibilidad de esta.

Esto indica que el concepto de irreducibilidad de una matriz depende sólo de la estructura del grafo dirigido asociado a ella, como veremos a continuación:

Dada una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, tomamos n puntos distintos $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ que llamaremos **vértices** y para cada elemento no diagonal de A , $a_{ij} \neq 0$ dibujamos un **arco dirigido** $\overrightarrow{v_i v_j}$ que conecta el vértice inicial v_i con el vértice terminal v_j . Para los elementos diagonales $a_{ii} \neq 0$, tenemos un **lazo o bucle** $\overrightarrow{v_i v_i}$.

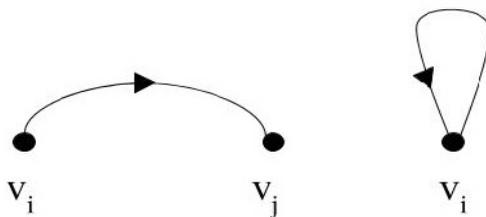


Figura 1.1: Arco y lazo dirigidos

Llamaremos **grafo dirigido de A** , $\mathbb{G}(A)$, a la unión de todos los lazos y arcos dirigidos construidos como se ha indicado anteriormente.

Tenemos también que un **camino dirigido** de $\mathbb{G}(A)$ es una unión de arcos dirigidos contiguos $\overrightarrow{v_{\ell_0} v_{\ell_1}}, \overrightarrow{v_{\ell_1} v_{\ell_2}}, \dots, \overrightarrow{v_{\ell_{t-1}} v_{\ell_t}}$ que conectan el vértice inicial v_{ℓ_0} con el vértice terminal v_{ℓ_t} .

Observemos que tener un camino dirigido como el descrito, implica que en la matriz

A se tiene $\prod_{j=0}^{t-1} a_{\ell_j \ell_{j+1}} \neq 0$.

Definición 1.13. Dada $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, su grafo dirigido $\mathbb{G}(A)$ es **fuertemente conexo** si para cada par de vértices v_i y v_j , con $i \neq j$, existe un camino dirigido en $\mathbb{G}(A)$ con vértice inicial v_i y terminal v_j .

Ejemplo 1.14. Consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & i & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

En la Figura 1.2 están representados los grafos dirigidos de estas dos matrices. El grafo dirigido de la matriz A , $\mathbb{G}(A)$, podemos ver que es fuertemente conexo, mientras que el de la matriz B , $\mathbb{G}(B)$, no lo es, pues no podemos encontrar ningún camino dirigido que conecte, por ejemplo, el vértice v_5 con el vértice v_6 .

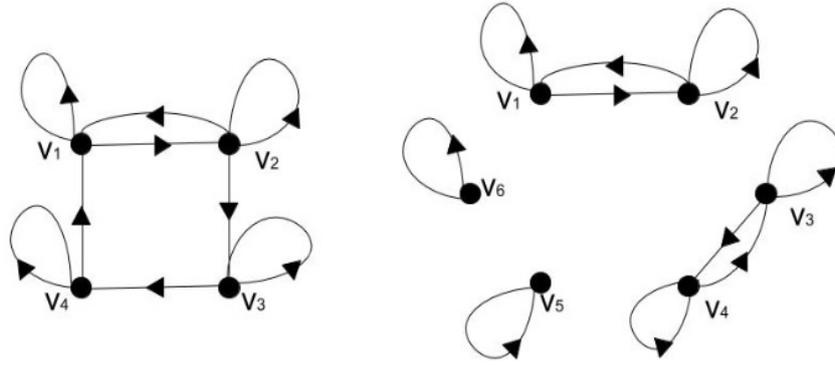


Figura 1.2: Grafos dirigidos $\mathbb{G}(A)$ (izquierda) y $\mathbb{G}(B)$ (derecha)

Observamos que si tenemos una matriz cualquiera A cuyo grafo dirigido $\mathbb{G}(A)$ es fuertemente conexo, entonces los elementos no diagonales de cualquier fila no pueden anularse todos simultáneamente. También vemos que si $\mathbb{G}(A)$ es fuertemente conexo y P es una matriz de permutación arbitraria, entonces $\mathbb{G}(PAP^T)$ también es fuertemente conexo, pues $\mathbb{G}(PAP^T)$ tiene exactamente la misma estructura que $\mathbb{G}(A)$ con los vértices renumerados.

El siguiente teorema relaciona con una equivalencia los conceptos definidos anteriormente.

Teorema 1.15. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. A es irreducible si y solo si, su grafo dirigido $\mathbb{G}(A)$ es fuertemente conexo.*

Demostración. Veamos en primer lugar que si $\mathbb{G}(A)$ no es fuertemente conexo, entonces A es reducible. Que $\mathbb{G}(A)$ no sea fuertemente conexo quiere decir que existen dos índices $i, j \in N, i \neq j$, para los que no es posible encontrar un camino dirigido en $\mathbb{G}(A)$ que comience en el vértice v_i y finalice en el v_j . Consideramos ahora los siguientes conjuntos disjuntos:

$$K = \{k \in N : \text{existe un camino dirigido en } \mathbb{G}(A) \text{ que va de } i \text{ a } k\},$$

$$J = N \setminus K.$$

Tomando la permutación P , que ordena los índices de forma que aparezcan primero los que están en K y a continuación los que están en J , tenemos que

$$PAP^T = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right],$$

lo que prueba que A es reducible como queríamos ver.

Para ver el recíproco, veamos que si A es reducible entonces el grafo asociado $\mathbb{G}(A)$ no es fuertemente conexo. Si A es reducible, existe una matriz de permutación \tilde{P} tal que

$$\tilde{P}A\tilde{P}^T = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right].$$

El bloque de ceros, de tamaño $(n-r) \times r$ indica que todos los elementos (i, j) de dicha matriz con $r+1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq r$ son nulos y, por tanto, no es posible encontrar un camino dirigido en $\mathbb{G}(A)$ que parta de un vértice v_i con $r+1 \leq i \leq n$ y llegue a un vértice v_j cuyo índice j satisfaga $1 \leq j \leq r$, lo que implica que $\mathbb{G}(A)$ no es fuertemente conexo. \square

A continuación, vamos a establecer una extensión importante del Teorema 1.9, debida a Taussky, para la cuál necesitamos definir antes un nuevo concepto.

Definición 1.16. Una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es **irreduciblemente diagonalmente dominante** si cumple las tres condiciones siguientes:

- A es irreducible,
- A es diagonalmente dominante,

$$|a_{ii}| \geq r_i(A) \quad \forall i \in N \tag{1.22}$$

- se da la desigualdad estricta en (1.22) para al menos un índice $i \in N$.

De esta definición vemos que una matriz puede ser irreducible y diagonalmente dominante pero no ser irreduciblemente diagonalmente dominante.

Teorema 1.17. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ irreduciblemente diagonalmente dominante. Entonces A es no singular.

Demostración. El caso $n = 1$ sale directamente de la Definición 1.12. Sea pues $n \geq 2$ y razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que A es singular. Entonces $0 \in \sigma(A)$ y existe un autovector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ no nulo tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como este sistema lineal es homogéneo, podemos normalizar el autovector para que $\max\{|x_i| : i \in N\} = 1$, y definimos el subconjunto S de N como $S = \{j \in N : |x_j| = 1\}$, que es no vacío.

Como $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tenemos que $\sum_{j \in N} a_{kj} x_j = 0 \quad \forall k \in N$, o lo que es lo mismo

$$-a_{kk} x_k = \sum_{j \in N \setminus \{k\}} a_{kj} x_j \quad (k \in N).$$

Ahora consideremos cualquier índice $i \in S$.

Si hacemos $k = i$ en la ecuación anterior, tomando valores absolutos y aplicando la desigualdad triangular tenemos

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| = r_i(A) \quad (i \in S).$$

Además por (1.22), tenemos la desigualdad inversa, luego

$$|a_{ii}| = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \cdot |x_j| = r_i(A) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \quad (i \in S). \quad (1.23)$$

Pero como debe cumplirse la desigualdad estricta para al menos un índice i , por la tercera hipótesis de la Definición 1.16, esto implica que S debe ser un subconjunto propio de N , es decir, $\emptyset \neq S \subsetneq N$.

Por otro lado, para cualquier $i \in S$, los términos de la suma (1.23) no pueden ser nulos todos a la vez, por la irreducibilidad, y podemos elegir algún $j \neq i$ con $a_{ij} \neq 0$. Utilizando las igualdades de (1.23), debe cumplirse que $|x_j| = 1$, lo que significa que j es también un elemento de S .

Como A es irreducible, podemos encontrar un camino dirigido en $\mathbb{G}(A)$ del vértice v_i a cualquier otro vértice v_k , por medio de arcos dirigidos que corresponden a los elementos no diagonales distintos de cero $a_{i_1 i_1}, a_{i_1 i_2}, \dots, a_{i_{r-1} i_r}$ con $i_r = k$. Así, $i_\ell \in S$ $1 \leq \ell \leq r$, y en particular $i_r = k \in S$. Y como habíamos dicho que k era cualquier índice en N , entonces $S = N$, lo que es absurdo. \square

Ahora veremos el resultado de inclusión de autovalores equivalente al teorema anterior.

Teorema 1.18. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ irreducible. Si $\lambda \in \sigma(A)$ esta en la frontera de $\Gamma(A)$, entonces*

$$|\lambda - a_{ii}| = r_i(A) \quad \forall i \in N, \quad (1.24)$$

es decir, λ está en la frontera de todos los discos de Gerschgorin.

Este último teorema, da una condición necesaria para que un autovalor λ de A esté en la frontera del conjunto de Gerschgorin, $\Gamma(A)$, y es que las n circunferencias de Gerschgorin pasen por él.

Pero esta condición necesaria, no es suficiente para asegurar que se trata de un autovalor, esto es, puede que las n circunferencias de Gerschgorin tengan un punto en común $z \in \mathbb{C}$ y que este no sea autovalor de A . También puede suceder que un autovalor esté en la frontera de todos los discos de Gerschgorin y que, sin embargo, no esté en la frontera de $\Gamma(A)$.

En cualquier caso, es interesante ver si es posible encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un autovalor de A se encuentre en la frontera del conjunto de Gerschgorin, $\Gamma(A)$. En los siguientes apartados, veremos alguna otra condición más.

Ejemplo 1.19. Vamos a mostrar ahora un ejemplo en el que se ilustra que el Teorema 1.18 da una condición necesaria pero no suficiente, para lo que representaremos el conjunto de Gerschgorin establecido en el Teorema 1.4.

Para ello tomamos la matriz A de (1.21), que es irreducible por ser su grafo dirigido fuertemente conexo (Teorema 1.15).

Observamos en la Figura 1.3 que el conjunto de autovalores de A , (representado por las 4 cruces de dicha figura), está contenido en $\Gamma(A)$. También tenemos que el punto 0 está en todas las circunferencias de Gerschgorin, $\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| = r_i(A)\}$, y sin embargo, $0 \notin \sigma(A)$, y esto se debe a que $0 \notin \partial\Gamma(A)$.

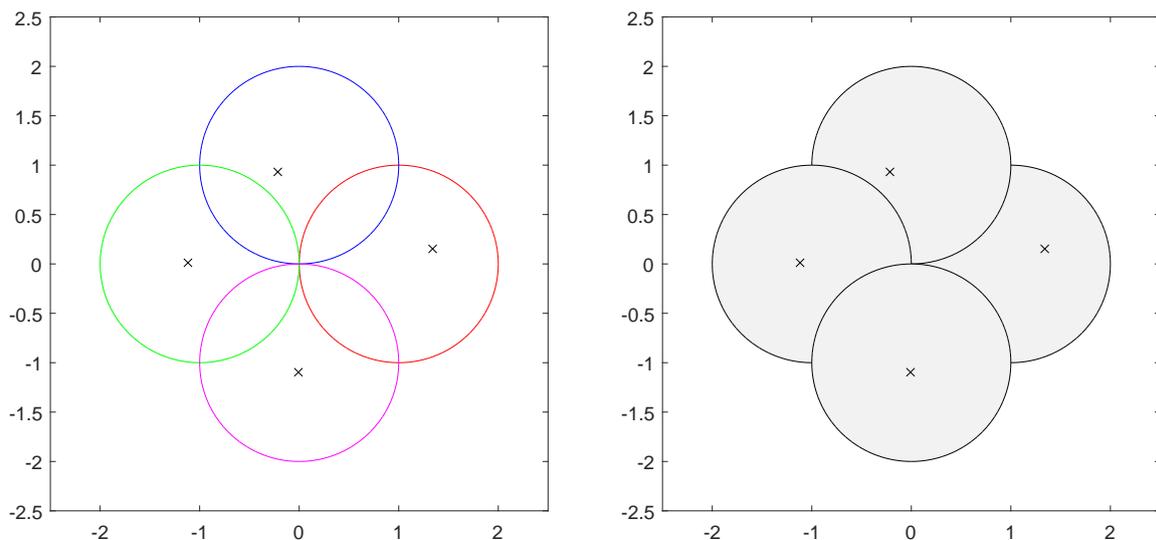


Figura 1.3: Conjunto de Gerschgorin de A , $\Gamma(A)$.

1.3.2. Utilizando técnicas de Análisis

Dada $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, denotamos por $A^T = [a_{ji}]$ a su matriz traspuesta. Es conocido que $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, pues el polinomio característico de cualquier matriz es el mismo que el de su matriz traspuesta, lo que implica que ambas tienen los mismos autovalores. Esto implica que A^T es no singular si y solo si A es no singular.

Aplicando directamente el Teorema 1.4 y el Teorema 1.9 a la matriz traspuesta A^T , y teniendo en cuenta que $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, obtenemos los dos resultados siguientes que también son equivalentes.

Corolario 1.20. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, entonces

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A^T) \quad (1.25)$$

Corolario 1.21. Si $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ satisface

$$|a_{ii}| > \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ji}| = r_i(A^T) := c_i(A) \quad (i \in N). \quad (1.26)$$

Entonces A es no singular

De este último corolario podemos observar que las cantidades $c_i(A) = r_i(A^T)$ de (1.26), dependen de las sumas de columna de A , en lugar de las sumas de fila como ocurre en el Teorema 1.9.

El siguiente teorema proporciona un resultado de inclusión de autovalores más ajustado que surge como consecuencia del Teorema 1.4 y del Corolario 1.20. Para este, definimos $\Gamma(A^T)$ como $\Gamma(A^T) := \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq c_i(A)\}$, donde $c_i(A)$ está definido en (1.26).

Teorema 1.22. Si $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, entonces

$$\sigma(A) \subseteq \left(\Gamma(A) \cap \Gamma(A^T) \right). \quad (1.27)$$

Esta inclusión de autovalores ahora depende de las siguientes $3n$ cantidades, que se obtienen a partir de los coeficientes de la matriz A :

$$\{a_{ii}\}_{i=1}^n, \{r_i(A)\}_{i=1}^n, \{c_i(A)\}_{i=1}^n. \quad (1.28)$$

Puesto que tanto las sumas de fila $\{r_i(A)\}_{i=1}^n$ como las sumas de columna $\{c_i(A)\}_{i=1}^n$ aparecen de manera independiente en condiciones de no singularidad en el Teorema 1.9 y el Corolario 1.21, podemos pensar si ciertas combinaciones de ambas producirán algún resultado semejante de no singularidad. El siguiente teorema, cuya demostración muestra cómo se utilizan algunas herramientas y técnicas del análisis en el álgebra lineal responde a la pregunta anterior.

Teorema 1.23. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y α un número cualquiera real, con $0 \leq \alpha \leq 1$. Suponemos que se cumple*

$$|a_{ii}| > (r_i(A))^\alpha (c_i(A))^{1-\alpha} \quad (\forall i \in N). \quad (1.29)$$

Entonces A es no singular.

Demostración. Si ϕ es cualquier permutación de los índices de N y $P := [\delta_{i,\phi(j)}]$ es la matriz de permutación asociada, tenemos que la matriz $\tilde{A} := [\tilde{a}_{ij}] := P^T A P$ tiene los mismos elementos diagonales y el mismo conjunto de sumas de fila (y columna) que A . Por esto, las desigualdades en (1.29) permanecen invariantes bajo estas permutaciones del conjunto de índices N .

Para el caso $n = 1$, por el convenio usado en la Definición 1.2, de (1.29) obtenemos inmediatamente la no singularidad de A .

Para $n \geq 2$, supongamos que hay algún $r_j(A) = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $j = 1$, pues, de no ser así, usaríamos una permutación adecuada de N y la correspondiente matriz \tilde{A} . Entonces suponemos que $r_1(A) = 0$ y que la matriz A tiene por tanto la siguiente forma

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline a_{21} & \\ \vdots & A_{n-1n-1} \\ a_{n1} & \end{array} \right], \quad \text{donde } A_{n-1n-1} \in \mathbb{C}^{n-1, n-1}. \quad (1.30)$$

Por la hipótesis (1.29), $a_{11} \neq 0$ y de (1.30) tenemos que $\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{n-1n-1})$. Entonces A es singular si y solo si lo es la submatriz principal A_{n-1n-1} .

Si alguna suma de fila de A_{n-1n-1} es cero, la reducción anterior la podemos seguir iterando hasta que o bien consigamos una submatriz principal A_{pp} de A de orden $p \geq 2$, con todas las sumas de fila positivas, o bien A se ha reducido mediante permutaciones adecuadas, a una matriz triangular inferior con todos los coeficientes de la diagonal no nulos, lo cual implicaría directamente que es una matriz no singular.

Para el primer caso, de manera similar a lo anterior, tenemos por construcción que $\det A = \prod_{j=1}^{n-p} a_{jj} \cdot \det A_{pp}$ y de nuevo, A es singular si y solo si, A_{pp} , con sumas de fila positivas, lo es.

Cabe notar que por definición, la suma de fila (o de columna) i -ésima de A_{pp} es menor o igual que la suma de fila (o columna) i -ésima de la matriz A .

Esta reducción nos muestra que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que todas las sumas de fila, $r_i(A)$, de A son positivas. Además los casos especiales $\alpha = 1$ $\alpha = 0$ se han analizado ya en el Teorema 1.9 y el Corolario 1.21 respectivamente.

Suponemos por tanto que $0 < \alpha < 1$ y vamos a aplicar reducción al absurdo, suponiendo que $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ satisface (1.29) con $r_i(A) > 0 \forall i \in N$ y que es singular. Por tanto, tiene que existir un $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es decir, $a_{ii}x_i = - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij}x_j \forall i \in N$.

Tomando valores absolutos y aplicando la desigualdad triangular obtenemos

$$|a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \cdot |x_j| \quad (i \in N).$$

Empleando (1.29) en la parte izquierda de la desigualdad anterior y escribiendo $|a_{ij}|$ como $|a_{ij}| = |a_{ij}|^\alpha \cdot |a_{ij}|^{1-\alpha}$ en la parte derecha, obtenemos

$$(r_i(A))^\alpha (c_i(A))^{1-\alpha} \cdot |x_i| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}|^\alpha \cdot (|a_{ij}|^{1-\alpha} \cdot |x_j|) \quad (i \in N), \quad (1.31)$$

donde la desigualdad estricta se mantiene siempre que $|x_i| > 0$, es decir, para al menos un $i \in N$, pues \mathbf{x} es no nulo.

Aplicando la desigualdad de Hölder a la suma en (1.31) con $p = \frac{1}{\alpha}$ y $q = \frac{1}{1-\alpha}$, ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), obtenemos

$$(r_i(A))^\alpha (c_i(A))^{1-\alpha} \cdot |x_i| \leq \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|^{\alpha p} \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|^{(1-\alpha)q} \cdot |x_j|^q \right)^{1/q} \quad (\forall i \in N). \quad (1.32)$$

Podemos observar que $\left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|^{\alpha p} \right)^{1/p} = (r_i(A))^\alpha$, pues $p = \frac{1}{\alpha}$. Por tanto, al dividir por $(r_i(A))^\alpha > 0$ en ambos lados de (1.32) y elevando a $q = \frac{1}{1-\alpha}$, obtenemos

$$c_i(A) \cdot |x_i|^q \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \cdot |x_j|^q \quad (i \in N),$$

donde la desigualdad estricta se mantiene para al menos un índice $i \in N$.

Sumando todas las desigualdades anteriores para todos los $i \in N$, obtenemos

$$\sum_{i \in N} c_i(A) \cdot |x_i|^q < \sum_{i \in N} \left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \cdot |x_j|^q \right). \quad (1.33)$$

Pero intercambiando el orden de los sumatorios en la doble suma de (1.33), tenemos que esta se reduce exactamente a $\sum_{j \in N} c_j(A) \cdot |x_j|^q$, es decir, llegamos a contradicción. \square

De este teorema podemos sacar algunas consecuencias interesantes. Tomando un vector cualquiera $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] > \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n y estableciendo la matriz diagonal X como $X = \text{diag}[\mathbf{x}]$, obtenemos directamente el siguiente resultado al aplicar el Teorema (1.23) a la matriz $X^{-1}AX = [a_{ij} \frac{x_j}{x_i}]$.

Corolario 1.24. Sean $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n y α un número real con $0 \leq \alpha \leq 1$. Supongamos que se cumple

$$|a_{ii}| > (r_i^{\mathbf{x}}(A))^\alpha (c_i^{\mathbf{x}}(A))^{1-\alpha} \quad \forall i \in N, \quad (1.34)$$

donde $c_i^{\mathbf{x}}(A) = r_i^{\mathbf{x}}(A^T)$.

Entonces A es no singular.

El Corolario 1.24 es equivalente al siguiente resultado de inclusión de autovalores.

Corolario 1.25. Sean $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n y α , con $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces se tiene que

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i \in N} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq (r_i^{\mathbf{x}}(A))^\alpha (c_i^{\mathbf{x}}(A))^{1-\alpha} \right\}. \quad (1.35)$$

1.3.3. El Teorema de Gerschgorin a partir de normas matriciales

El Teorema de Gerschgorin 1.4, o su forma equivalente en el Teorema 1.9 se conocen en la literatura como la derivación clásica.

En esta sección, vamos a obtener el mismo resultado a partir de la definición de una norma matricial asociada a una norma vectorial.

Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y supongamos que $\lambda \in \sigma(A)$. Entonces hay un autovector asociado a él, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Si $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz fija, se tiene,

$$(A - B)\mathbf{x} = (\lambda I_n - B)\mathbf{x}.$$

Si $\lambda \notin \sigma(B)$, entonces $(\lambda I_n - B)$ es no singular y multiplicando por su inversa obtener

$$(\lambda I_n - B)^{-1} (A - B)\mathbf{x} = \mathbf{x}. \quad (1.36)$$

Definición 1.26. Dada una norma cualquiera φ de \mathbb{C}^n y una matriz $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se define la **norma matricial** inducida por φ como

$$\|M\|_\varphi = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\varphi(M\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} = \sup_{\varphi(\mathbf{x})=1} \varphi(M\mathbf{x}).$$

Tomando normas en (1.36) se tiene que

$$\left\| (\lambda I_n - B)^{-1} (A - B) \right\|_\varphi \geq 1 \quad \text{para } \lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma(B). \quad (1.37)$$

Definición 1.27. Dadas dos matrices A y B en $\mathbb{C}^{n \times n}$ se define el conjunto del plano complejo

$$G_\varphi(A; B) := \sigma(B) \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : z \notin \sigma(B) \wedge \left\| (zI_n - B)^{-1} (A - B) \right\|_\varphi \geq 1 \right\}. \quad (1.38)$$

Este conjunto es conocido como **el conjunto de Householder** de A y B . Vamos a demostrar que el conjunto de Householder de A y B es un conjunto de inclusión de autovalores para la matriz A .

Teorema 1.28. Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y φ una norma cualquiera de \mathbb{C}^n , se tiene que

$$\sigma(A) \subseteq G_\varphi(A; B) \quad (1.39)$$

Demostración. Para probarlo, tomamos $\lambda \in \sigma(A)$. Entonces existen dos posibilidades:

- si $\lambda \in \sigma(B)$, entonces por la definición (1.38) se tiene que $\lambda \in G_\varphi(A; B)$.
- si $\lambda \notin \sigma(B)$, utilizando (1.37) obtenemos que λ está contenido en el segundo conjunto que forma parte de $G_\varphi(A; B)$.

Luego $\lambda \in G_\varphi(A; B)$ para cualquier $\lambda \in \sigma(A)$. □

Veamos ahora un par de propiedades del conjunto de Householder.

Proposición 1.29. Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y φ una norma cualquiera de \mathbb{C}^n . $G_\varphi(A; B)$ es un conjunto cerrado y acotado en \mathbb{C}

Demostración. Primero probaremos que es acotado.

Supongamos que $z \in G_\varphi(A; B)$ con $z \notin \sigma(B)$, luego se cumple que $1 \leq \left\| (zI_n - B)^{-1} (A - B) \right\|_\varphi$. Por consiguiente tenemos que

$$1 \leq \left\| (zI_n - B)^{-1} (A - B) \right\|_\varphi \leq \left\| (zI_n - B)^{-1} \right\|_\varphi \cdot \|A - B\|_\varphi.$$

Y esto implica que $\left\| (zI_n - B)^{-1} \right\|_\varphi > 0$. Usando la Definición 1.26 llegamos a

$$\|A - B\|_\varphi \geq \frac{1}{\left\| (zI_n - B)^{-1} \right\|_\varphi} = \inf_{w \neq 0} \left\{ \frac{\varphi((zI_n - B)w)}{\varphi(w)} \right\}.$$

Ahora utilizando la desigualdad triangular inversa y las propiedades de la norma, tenemos que

$$\|A - B\|_\varphi \geq \inf_{w \neq 0} \left\{ \frac{\varphi((zI_n)w) - \varphi(Bw)}{\varphi(w)} \right\} = \inf_{w \neq 0} \left\{ |z| - \frac{\varphi(Bw)}{\varphi(w)} \right\} = |z| - \|B\|_\varphi,$$

de donde

$$|z| \leq \|A - B\|_\varphi + \|B\|_\varphi \text{ para cualquier } z \text{ en } G_\varphi(A; B) \text{ con } z \notin \sigma(B). \quad (1.40)$$

Para el caso restante, en el que $z \in G_\varphi(A; B)$ con $z \in \sigma(B)$, sabemos que siempre se cumple que $\rho(B) \leq \|B\|_\varphi$, por tanto $|z| \leq \|B\|_\varphi$. En consecuencia la desigualdad anterior también se cumple para este caso, luego

$$|z| \leq \|A - B\|_\varphi + \|B\|_\varphi \text{ para cualquier } z \text{ en } G_\varphi(A; B), \quad (1.41)$$

que muestra que $G_\varphi(A; B)$ es acotado.

Para ver que es cerrado, supongamos que $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión de puntos en \mathbb{C} con $\lim_{i \rightarrow \infty} z_i = z$, donde $z_i \in G_\varphi(A; B) \forall i \geq 1$.

- Si $z \in \sigma(B)$, entonces $z \in G_\varphi(A; B)$.
- Si $z \notin \sigma(B)$, entonces $z_i \notin \sigma(B) \forall i$ suficientemente grande, y por tanto

$$\left\| (z_i I_n - B)^{-1} (A - B) \right\|_\varphi \geq 1 \forall i \text{ suficientemente grande.}$$

Sabemos que la norma de una matriz varía continuamente con los coeficientes de la matriz, así que también se tiene $\left\| (z I_n - B)^{-1} (A - B) \right\|_\varphi \geq 1$; por tanto $z \in G_\varphi(A; B)$.

Todo ello implica que $G_\varphi(A; B)$ es un conjunto cerrado. \square

Para ver como se asocia esta sección con el Teorema de Gerschgorin 1.4, consideremos la norma ℓ_∞ de \mathbb{C}^n , que para un vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ se define por

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{i \in N} |x_i|. \quad (1.42)$$

Consideremos además $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, y definimos $\text{diag}[A] := \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$. Entonces si consideramos el conjunto de Householder para la matriz la matriz $B = \text{diag}[A]$ y la norma $\varphi = \|\cdot\|_\infty$, el Teorema 1.28 proporciona exactamente el mismo conjunto de inclusión que el Teorema de Gerschgorin 1.4.

Teorema 1.30. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces*

$$G_{\|\cdot\|_\infty}(A; \text{diag}[A]) = \Gamma(A). \quad (1.43)$$

Demostración. Sea z un punto de $G_{\|\cdot\|_\infty}(A; \text{diag}[A])$, de modo que si denotamos por $B = \text{diag}[A]$, entonces $|z| \leq \|A - B\|_\infty + \|B\|_\infty$ ya sea con $z \in \sigma(B)$ ó con $z \notin \sigma(B)$ y $\left\| (z I_n - B)^{-1} (A - B) \right\|_\infty \geq 1$, por lo visto en la demostración anterior.

- Supongamos que $z \notin \sigma(B)$, es decir, se tiene que

$$\left\| (z I_n - B)^{-1} (A - B) \right\|_\infty \geq 1, \quad (1.44)$$

donde la matriz $(z I_n - B)^{-1} (A - B)$ puede ser expresada de la siguiente forma

$$(z I_n - B)^{-1} (A - B) = [\alpha_{ij}], \text{ donde } \begin{cases} \alpha_{ii} = 0, & i \in N, \\ \alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{z - a_{ii}}, & i \neq j \in N. \end{cases} \quad (1.45)$$

También sabemos que para cualquier $C = [c_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se tiene que

$$\|C\|_\infty = \max_{i \in N} \left(\sum_{j \in N} |c_{ij}| \right). \quad (1.46)$$

Si aplicamos ahora (1.46) a (1.45), junto con (1.44) y (1.4) obtenemos

$$1 \leq \left\| (zI_n - B)^{-1} (A - B) \right\|_\infty = \max_{i \in N} \left(\frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}|}{|z - a_{ii}|} \right) = \max_{i \in N} \left(\frac{r_i(A)}{|z - a_{ii}|} \right).$$

Por lo que existe un $i \in N$ con $|z - a_{ii}| \leq r_i(A)$, esto es, $z \in \Gamma_i(A)$ y en consecuencia $z \in \Gamma(A)$.

- Si $z \in \sigma(B)$, entonces $z = a_{ii}$ para algún $i \in N$, luego $z \in \Gamma_i(A)$ y por lo tanto $z \in \Gamma(A)$.

Esto nos muestra que $G_{\|\cdot\|_\infty}(A; \text{diag}[A]) \subseteq \Gamma(A)$.

Para ver la otra contención, supongamos que $z \in \Gamma(A)$, esto implica que existe algún índice $i \in N$ tal que $z \in \Gamma_i(A)$, es decir cumple que $|z - a_{ii}| \leq r_i(A)$. Definimos como antes $B = \text{diag}[A]$, y tenemos que

- si $z = a_{ii}$, entonces $z \in \sigma(B)$.
- si se cumple que $z \neq a_{ii}$, es decir, $z \notin \sigma(B)$, tenemos que
$$1 \leq \frac{r_i(A)}{|z - a_{ii}|} \leq \max_{i \in N} \left(\frac{r_i(A)}{|z - a_{ii}|} \right) = \left\| (zI_n - B)^{-1} (A - B) \right\|_\infty,$$
lo cual nos quiere decir que z pertenece al segundo conjunto que forma parte de $G_{\|\cdot\|_\infty}(A; \text{diag}[A])$.

Tenemos por tanto $z \in G_{\|\cdot\|_\infty}(A; \text{diag}[A])$ que es lo que queríamos probar. \square

Se tiene también que para cualquier vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] > \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n , si definimos la matriz diagonal X como $X = \text{diag}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, que es no singular, y definimos la norma $\|\mathbf{u}\|_\infty^{\mathbf{x}} = \|X\mathbf{u}\|_\infty$, de \mathbb{C}^n , para cualquier vector $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n] \in \mathbb{C}^n$, el siguiente resultado es equivalente al Corolario 1.6, gracias a aplicar el Teorema 1.28 con la nueva norma definida, $\|\mathbf{u}\|_\infty^{\mathbf{x}}$.

Corolario 1.31. Sean $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n . Entonces

$$G_{\|\cdot\|_\infty^{\mathbf{x}}}(A; \text{diag}[A]) = \Gamma^{\mathbf{x}}(A). \quad (1.47)$$

Capítulo 2

Los conjuntos de Brauer y de Bruualdi

Nuestro objetivo en este capítulo es presentar dos nuevos resultados de inclusión de autovalores, junto con los correspondientes resultados de no singularidad, además de mostrar una comparación entre los nuevos conjuntos que se van a definir y con el conjunto formado por los discos de Gerschgorin. También veremos lo ajustado de las inclusiones establecidas.

2.1. Conjunto de Brauer

Comenzamos esta sección con un resultado de no singularidad de Ostrowski, más fuerte que el Teorema 1.9. De nuevo, $r_i(A)$ denota el radio del i -ésimo disco de Gerschgorin definido en el capítulo anterior como $r_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}|$ para $i \in N$.

Teorema 2.1. Si $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, cumple

$$|a_{ii}| \cdot |a_{jj}| > r_i(A) \cdot r_j(A) \quad (\forall i \neq j; i, j \in N := \{1, 2, \dots, n\}), \quad (2.1)$$

entonces A es no singular.

Demostración. Vamos a razonar por reducción al absurdo. Supongamos pues que $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ satisface (2.1) y es singular. Por tanto existe un vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ de \mathbb{C}^n con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ordenando las componente de \mathbf{x} por valor absoluto, podemos encontrar índices s y t en N con $s \neq t$ tales que $|x_t| > 0$ y

$$|x_t| \geq |x_s| \geq \max \{|x_k| : k \in N \text{ con } k \neq s, k \neq t\}, \quad (2.2)$$

donde el máximo anterior es 0 si $n = 2$.

Entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ implica que $a_{ii}x_i = - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij}x_j \quad \forall i \in N$. Tomando valores absolutos y aplicando la desigualdad triangular,

$$|a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \cdot |x_j| \quad (\forall i \in N). \quad (2.3)$$

Tomando $i = t$ en la desigualdad (2.3) y utilizando (2.2), obtenemos

$$|a_{tt}| \cdot |x_t| \leq \sum_{j \in N \setminus \{t\}} |a_{tj}| \cdot |x_j| \leq \sum_{j \in N \setminus \{t\}} |a_{tj}| \cdot |x_s| = |x_s| \cdot \sum_{j \in N \setminus \{t\}} |a_{tj}| = |x_s| \cdot r_t(A). \quad (2.4)$$

Si $|x_s| = 0$, entonces (2.4) se reduce a $|a_{tt}| \cdot |x_t| = 0$ lo que implica que $|a_{tt}| = 0$, pero esto es contradictorio con el hecho de que $|a_{ii}| > 0 \forall i \in N$, por (2.1).

Por tanto debe ser cierto que $|x_s| > 0$.

Escogiendo $i = s$ en (2.3), obtenemos de manera similar

$$|a_{ss}| \cdot |x_s| \leq \sum_{j \in N \setminus \{s\}} |a_{sj}| \cdot |x_j| \leq \sum_{j \in N \setminus \{s\}} |a_{tj}| \cdot |x_t| = |x_t| \cdot r_s(A). \quad (2.5)$$

Multiplicando las dos desigualdades (2.4) y (2.5) obtenemos

$$|a_{tt}| \cdot |a_{ss}| \cdot |x_t| \cdot |x_s| \leq r_t(A) \cdot r_s(A) \cdot |x_t| \cdot |x_s|,$$

y como $|x_t| \cdot |x_s| > 0$, esto nos da que $|a_{tt}| \cdot |a_{ss}| \leq r_t(A) \cdot r_s(A)$ que contradice (2.1). \square

Como hemos dicho anteriormente, este resultado es más fuerte que el Teorema 1.9, porque toda matriz A estrictamente diagonalmente dominante, satisface (2.1) pero si (2.1) es cierto, entonces se pueden satisfacer todas las desigualdades estrictas de (1.15) excepto una. Este teorema fue descubierto más tarde por Brauer, quien lo utilizó para deducir el siguiente resultado de inclusión de autovalores del tipo Gerschgorin.

Definición 2.2. Dada una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definimos el **(i,j)-ésimo óvalo Brauer-Cassini** de A , $K_{i,j}(A)$, por

$$K_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| \leq r_i(A) \cdot r_j(A)\}, \quad (2.6)$$

y el **conjunto de Brauer**, $\mathcal{K}(A)$, por

$$\mathcal{K}(A) := \bigcup_{\substack{i,j \in N \\ i \neq j}} K_{i,j}(A). \quad (2.7)$$

Teorema 2.3. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$ y $\lambda \in \sigma(A)$. Existen un par de índices i y j de N tales que

$$\lambda \in K_{i,j}(A). \quad (2.8)$$

Como se cumple para todo $\lambda \in \sigma(A)$, entonces se tiene que

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{K}(A). \quad (2.9)$$

Demostración. Vamos a razonar por reducción al absurdo, y para ello nos apoyaremos en el Teorema 2.1. Supongamos que este Teorema 2.3 no es cierto, es decir, existe una matriz A y un $\lambda \in \sigma(A)$, tal que

$$|z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| > r_i(A) \cdot r_j(A) \quad \forall i \neq j; i, j \in N. \quad (2.10)$$

Definimos ahora $B := \lambda I_n - A := [b_{ij}]$, que es una matriz singular, (pues 0 es un autovalor de B ya que λ lo es de A).

Por otro lado, de la definición de B obtenemos que $r_k(A) = r_k(B)$ y $|\lambda - a_{kk}| = |b_{kk}| \forall k \in N$, luego (2.10) se convierte en

$$|b_{i,i}| \cdot |b_{j,j}| > r_i(B) \cdot r_j(B) \quad \forall i \neq j; i, j \in N. \quad (2.11)$$

Aplicando el Teorema 2.1 tenemos que B es una matriz no singular, contradiciendo lo anterior. \square

Si queremos comparar los dos conjuntos del plano complejo que contienen a los autovalores de una matriz, el conjunto de Brauer y el conjunto de Gerschgorin, lo primero que observamos es que hay $\frac{n(n-1)}{2}$ óvalos de Brauer-Cassini en el Teorema 2.3, mientras que solo son n los discos de Gerschgorin del Teorema 1.4. Además tenemos que, mientras cada disco de Gerschgorin es un conjunto conexo, el (i, j) -ésimo óvalo de Brauer-Cassini es un conjunto compacto que puede constar de dos componentes conexas disjuntas como podemos ver a continuación.

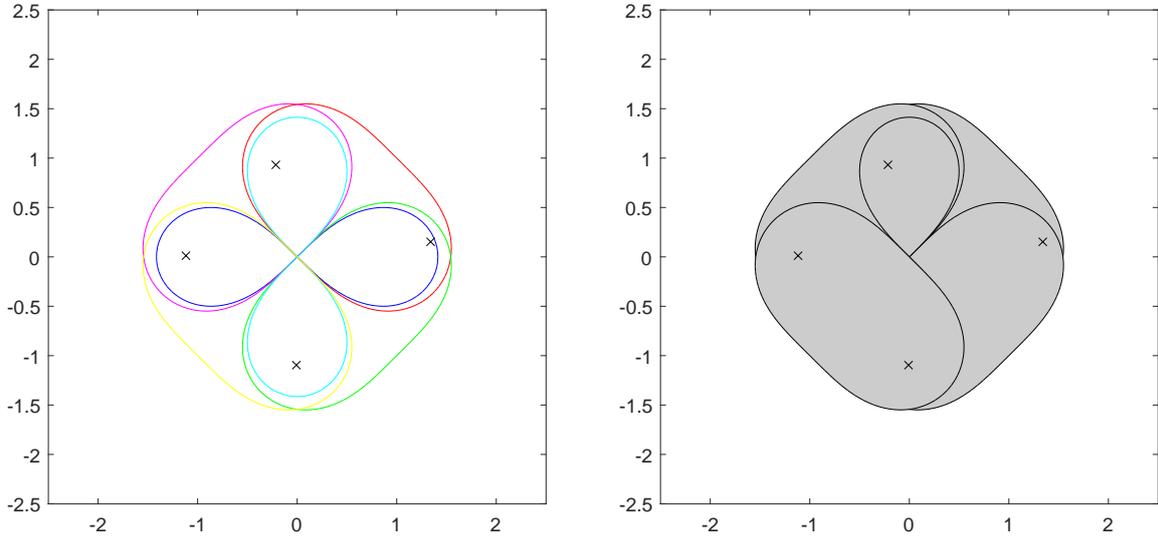


Figura 2.1: Conjunto de Brauer de A , $\mathcal{K}(A)$.

Ejemplo 2.4. Consideremos ahora la matriz

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon & 0 & 0 \\ \frac{\epsilon}{2} & i & \frac{\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Podemos observar que si $\epsilon = 1$, la matriz $A(1)$ coincide con la matriz A de (1.21). En la Figura 2.1 hemos representado el conjunto de Brauer para la matriz A , ilustrando el resultado recogido en el Teorema 2.3, en el que se afirma que el conjunto de Brauer contiene al espectro de la matriz A (representado por las 4 cruces). En la gráfica de la

izquierda se han utilizado colores diferentes para dibujar la frontera de los distintos óvalos de Brauer-Cassini.

En la Figura 2.2 tenemos el conjunto de Brauer para la matriz $A(\epsilon)$, con $\epsilon = 0.9$. En ella se puede observar cómo los óvalos cían y azul oscuro que eran conexos en la Figura 2.1 se convierten en conjuntos con dos componentes conexas disjuntas al cambiar el valor del parámetro ϵ . Este hecho se mantiene también para otros valores de ϵ con $0 < \epsilon < 1$. Además dicho conjunto contiene al espectro de autovalores de la matriz $A(0.9)$, pues como consecuencia del Teorema 2.3 tenemos que $\sigma(A(\epsilon)) \subseteq \Gamma(A(\epsilon))$ para cualquier ϵ .

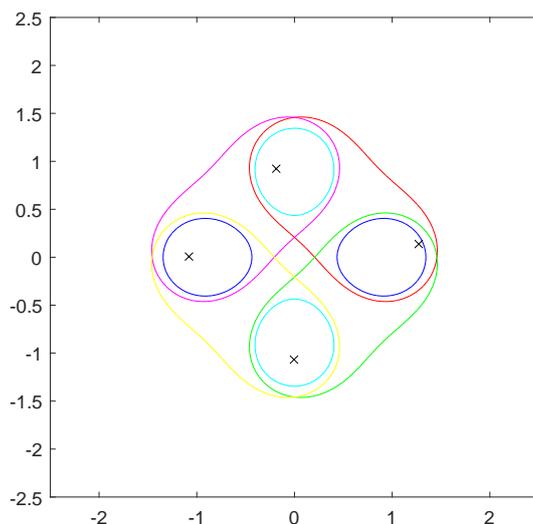


Figura 2.2: Conjunto de Brauer de $A(0.9)$, $\mathcal{K}(A(0.9))$.

Por otra parte, tanto la unión de los n discos de Gerschgorin, $\Gamma(A)$, como la unión de los $\frac{n(n-1)}{2}$ óvalos de Brauer-Cassini, $\mathcal{K}(A)$, dependen de los mismos $2n$ parámetros

$$\{a_{ii}\}_{i=1}^n \text{ y } \{r_i(A)\}_{i=1}^n \quad (2.13)$$

obtenidos a partir de los coeficientes de la matriz A .

Ahora nos debemos de preguntar cual de los dos conjuntos es más pequeño y si uno va a estar enteramente contenido en el otro, pues el que lo sea, dará una mejor aproximación, (más ajustada), al espectro de la matriz.

Como el número de componentes que forman el conjunto de Gerschgorin es de orden n y el de Brauer es de orden n^2 , parecería razonable pensar que el conjunto de Brauer es más grande, y que contiene al conjunto de Gerschgorin. Sin embargo, Brauer estableció un resultado, no muy conocido, que dice que para cualquier matriz A , el conjunto de Brauer es siempre un subconjunto del correspondiente conjunto de Gerschgorin.

Teorema 2.5. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Entonces

$$\mathcal{K}(A) \subseteq \Gamma(A). \quad (2.14)$$

Demostración. Tomamos cualquier par de índices i y j de N y un punto z de $K_{i,j}(A)$. Por (2.6) tenemos que

$$|z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| \leq r_i(A) \cdot r_j(A). \quad (2.15)$$

- Si $r_i(A) \cdot r_j(A) = 0$, entonces $z = a_{ii}$ o $z = a_{jj}$, y como $a_{ii} \in \Gamma_i(A)$ y $a_{jj} \in \Gamma_j(A)$ por (1.5), tenemos que $z \in \Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A)$.
- Si $r_i(A) \cdot r_j(A) > 0$, por (2.15) tenemos que

$$\left(\frac{|z - a_{ii}|}{r_i(A)} \right) \cdot \left(\frac{|z - a_{jj}|}{r_j(A)} \right) \leq 1.$$

Como los factores de la izquierda no pueden ser mayores que la unidad los dos a la vez, entonces al menos uno de ellos es menor o igual que la unidad, y ,por tanto, $z \in \Gamma_i(A)$ ó $z \in \Gamma_j(A)$

Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos, se deduce que $z \in \Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A)$; de modo que

$$K_{i,j}(A) \subseteq \Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A). \quad (2.16)$$

Como (2.16) se cumple $\forall i, j \in N$, con $i \neq j$, vemos de (1.5) y de (2.9) que

$$\mathcal{K}(A) := \bigcup_{\substack{i,j \in N \\ i \neq j}} K_{i,j}(A) \subseteq \bigcup_{\substack{i,j \in N \\ i \neq j}} \{\Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A)\} = \bigcup_{l \in N} \Gamma_l(A) = \Gamma(A),$$

como queríamos probar. □

La igualdad en la inclusión (2.16), $K_{i,j}(A) = \Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A)$, se produce si y solo si $r_i(A) = r_j(A) = 0$ ó si $r_i(A) = r_j(A) > 0$ y $a_{i,i} = a_{j,j}$.

Desde el punto de vista práctico, aunque el conjunto de Brauer da información más precisa sobre los autovalores de una matriz que el conjunto de Gerschgorin, hay que tener en cuenta que también el costo computacional es mayor puesto que el número de óvalos que hay que determinar crece con n^2 mientras que el número de discos es n .

Ejemplo 2.6. Para ilustrar el Teorema 2.5, consideramos la matriz irreducible A de (1.21), cuyas sumas de fila $r_i(A)$ son todas iguales a 1, y representamos en la Figura 2.3 el conjunto de Gerschgorin y el conjunto de Brauer de dicha matriz.

La frontera del conjunto de Gerschgorin, $\Gamma(A)$, es la curva exterior en la Figura 2.3, compuesta por 4 arcos circulares, mientras que el conjunto de Brauer, $\mathcal{K}(A)$, es el conjunto interior coloreado en gris más oscuro. Podemos ver que como indica el Teorema 2.5, $\mathcal{K}(A) \subseteq \Gamma(A)$.

A continuación vamos a hacer un pequeño comentario sobre los conjuntos de Gerschgorin y de Brauer para matrices cuya diagonal principal es constante, es decir, $a_{ii} = \alpha$ para todo índice $i \in N$. Para estas matrices, los centros de los discos de Gerschgorin y el foco de los óvalos de Brauer-Cassini son todos el mismo punto, α , lo cuál implica que el conjunto de Gerschgorin y el conjunto de Brauer consisten simplemente en un unico disco de la forma

$$\Gamma(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| \leq \max_{i \in N} r_i(A)\}$$

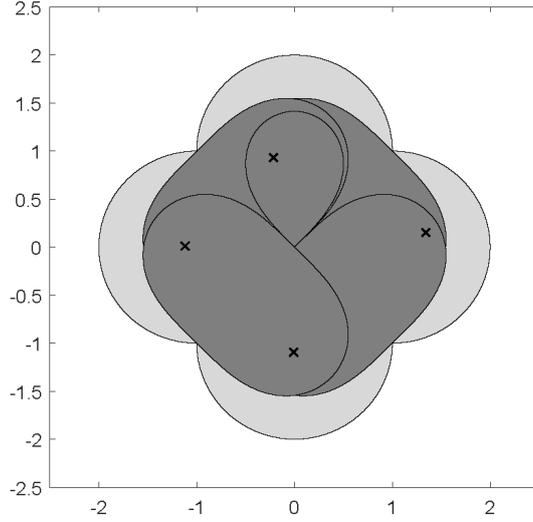


Figura 2.3: Conjunto de Gerschgorin, $\Gamma(A)$, y conjunto de Brauer, $\mathcal{K}(A)$.

y

$$\mathcal{K}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| \leq \max_{\substack{i,j \in N \\ i \neq j}} \sqrt{r_i(A) \cdot r_j(A)}\}.$$

Ambos conjuntos son el mismo cuando hay al menos dos radios máximos de los discos de Gerschgorin que coinciden.

Ilustramos este hecho en la Figura 2.4 tomando la matriz

$$E := \begin{bmatrix} 2 & -1+i & 4 & -2 \\ -3+i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4i \\ -3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

donde el conjunto de Gerschgorin es el disco exterior gris clarito (casi blanco) y el conjunto de Brauer el de color gris oscuro contenido en el conjunto de Gerschgorin.

Como hemos comentado anteriormente, los conjuntos de Brauer y de Gerschgorin dependen del mismo número de parámetros $2n$, (2.13), que se determinan a partir de los coeficientes de la matriz dada A . Existe una familia infinita de matrices que dan lugar a las mismas cantidades de (2.13), o muy relacionadas, y vamos a analizar lo que sucede con los correspondientes espectros y hasta qué punto el conjunto de Brauer da información precisa sobre dichos espectros.

Definición 2.7. Definimos el **conjunto equiradial de \mathbf{A}** como

$$\omega(A) := \{B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{ii} = a_{ii} \text{ y } r_i(B) = r_i(A) \forall i \in N\}. \quad (2.18)$$

Ademas definimos el **conjunto equiradial extendido de \mathbf{A}** como

$$\hat{\omega}(A) := \{B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{ii} = a_{ii} \text{ y } r_i(B) \leq r_i(A) \forall i \in N\}. \quad (2.19)$$

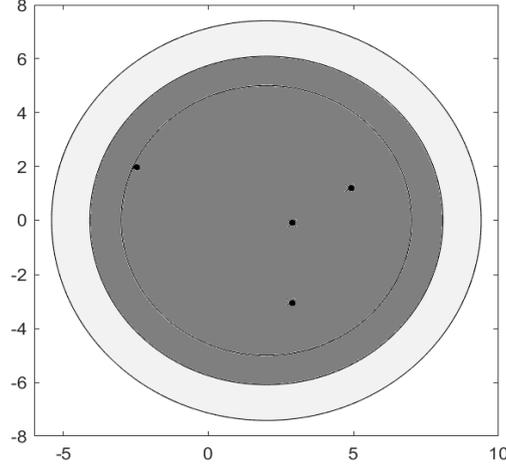


Figura 2.4: Conjunto de Gerschgorin, $\Gamma(E)$, y conjunto de Brauer, $\mathcal{K}(E)$.

De esta definición es claro que $\omega(A) \subseteq \hat{\omega}(A)$.

Observamos de la desigualdad final en (2.6) que la inclusión de autovalores $\sigma(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$ puede extenderse para todas las matrices en $\omega(A)$ y $\hat{\omega}(A)$; esto es, si introducimos las definiciones

$$\sigma(\omega(A)) := \bigcup_{B \in \omega(A)} \sigma(B) \quad \text{y} \quad \sigma(\hat{\omega}(A)) := \bigcup_{B \in \hat{\omega}(A)} \sigma(B), \quad (2.20)$$

se tiene que

$$\sigma(\omega(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}(A)) \subseteq \mathcal{K}(A). \quad (2.21)$$

Estamos interesados en estudiar lo ajustado de las inclusiones establecidas en (2.21) y establecemos para ello el siguiente resultado que obtuvieron Engel y de manera independiente Varga y Krautstengl.

Teorema 2.8. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Entonces*

$$\sigma(\omega(A)) = \begin{cases} \partial\mathcal{K}(A) = \partial K_{1,2}(A), & \text{si } n = 2, \\ \mathcal{K}(A), & \text{si } n \geq 3. \end{cases} \quad (2.22)$$

Y en general para cualquier $n \geq 2$,

$$\sigma(\hat{\omega}(A)) = \mathcal{K}(A). \quad (2.23)$$

Demostración. Vamos a demostrar solo (2.22), pues la prueba de (2.23) es semejante.

Primero supongamos que $n = 2$, entonces cada matriz B en $\omega(A)$, necesariamente es de la forma

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & r_1(A) e^{i\psi_1} \\ r_2(A) e^{i\psi_2} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

con ψ_1 y ψ_2 números reales arbitrarios.

Si $\lambda \in \sigma(B)$, entonces $\det(B - \lambda I) = 0$, y por (2.24) tenemos

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) = r_1(A)r_2(A)e^{i(\psi_1 + \psi_2)}.$$

Por lo que tomando valores absolutos,

$$|a_{11} - \lambda| \cdot |a_{22} - \lambda| = r_1(A) \cdot r_2(A). \quad (2.25)$$

Observamos que (2.25) corresponde al caso de la igualdad en (2.6), lo que significa que $\lambda \in \partial K_{1,2}(A)$. Como esto es cierto para cualquier autovalor λ de cualquier matriz B de $\omega(A)$, y para $n = 2$ se tiene que $K_{1,2}(A) = \mathcal{K}(A)$, se concluye que $\sigma(\omega(A)) \subseteq \partial K_{1,2}(A) = \partial \mathcal{K}(A)$.

Para ver la contención contraria, es fácil de ver que cada punto de $\partial K_{1,2}(A)$ es, para elecciones adecuadas de los números reales ψ_1 y ψ_2 , un autovalor de alguna matriz B de la forma (2.24), así pues llegamos a la primera parte del resultado deseado, $\sigma(\omega(A)) = \partial K_{1,2}(A) = \partial \mathcal{K}(A)$.

Para establecer la segunda parte de (2.22), primero supongamos que $n \geq 4$ y consideremos $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, cuya forma particionada es

$$B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array} \right], \quad (2.26)$$

donde

$$B_{11} = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & s e^{i\psi_1} \\ t e^{i\psi_2} & a_{22} \end{array} \right], \quad (2.27)$$

con $0 \leq s \leq r_1(A)$, $0 \leq t \leq r_2(A)$, ψ_1 y ψ_2 números reales arbitrarios y $b_{jj} = a_{jj} \forall 1 \leq j \leq n$.

Para cualquier elección de s y t con $s \in [0, r_1(A)]$ y $t \in [0, r_2(A)]$, las entradas del bloque B_{12} pueden ser elegidas para que las sumas de fila $r_1(B)$ y $r_2(B)$ en las dos primeras filas de B , sean iguales que las correspondientes sumas de fila de A . De forma similar, las sumas de fila de la matriz B_{22} de (2.26) pueden ser elegidas para ser las mismas que las otras sumas de fila de A .

Así, por esta construcción, la matriz B de (2.26) es un elemento de $\omega(A)$. (Esta construcción no podría hacerse para el caso $n = 3$, a no ser que $r_3(A) = 0$; que veremos luego.)

De la forma particionada (2.26) es evidente que

$$\sigma(B) = \sigma(B_{11}) \cup \sigma(B_{22}). \quad (2.28)$$

Podemos ver por la definición de $K_{i,j}(A)$ en (2.6), que para cada $z \in K_{1,2}(A)$, hay elecciones de los parámetros reales ψ_1 y ψ_2 y de s y t con $0 \leq s \leq r_1(A)$, $0 \leq t \leq r_2(A)$, de modo que z es un autovalor de la matriz B_{11} dada por (2.27). Esto quiere decir que se llena todo $K_{1,2}(A)$ con los dos primeros autovalores de matrices B de $\omega(A)$ de la forma (2.26). Los restantes autovalores de la matriz B (es decir, los de B_{22}), deben estar en $\mathcal{K}(A)$ por (2.21).

Como esto se aplica a cualquier óvalo de Brauer-Cassini $K_{i,j}(A)$ con $i \neq j$, con una permutación adecuada de filas y columnas de la matriz B en (2.26), que lleve la fila i en la 1 y la fila j en la 2, entonces $\sigma(\omega(A)) = \mathcal{K}(A) \forall n \geq 4$.

Para el caso restante $n = 3$, cualquier matriz B de $\omega(A)$ puede ser expresada como

$$B = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & s e^{i\psi_1} & (r_1(A) - s) e^{i\psi_2} \\ t e^{i\psi_3} & a_{22} & (r_2(A) - t) e^{i\psi_4} \\ u e^{i\psi_5} & (r_3(A) - u) e^{i\psi_6} & a_{33} \end{array} \right], \quad (2.29)$$

donde

$0 \leq s \leq r_1(A), 0 \leq t \leq r_2(A), 0 \leq u \leq r_3(A)$ y $\{\psi_i\}_{i=1}^6$ son números reales arbitrarios.

Ahora fijamos cualquier número complejo z perteneciente al óvalo de Brauer-Cassini $K_{1,2}(A)$, es decir, z satisface

$$|z - a_{11}| \cdot |z - a_{22}| \leq r_1(A) \cdot r_2(A). \quad (2.30)$$

- Si $r_1(A) = 0$, entonces $z = a_{11}$ ó $z = a_{22}$.
Por un lado sabemos que $r_1(A) = 0$ implica que la primera fila de B es $[a_{11}, 0, 0]$, luego $a_{11} = z$ es un autovalor de B . Por el otro, si tomamos en (2.29), $t = 0$ y $u = r_3(A)$, como $s = 0$ por ser $r_1(A) = 0$, se tiene que $z = a_{22}$ es autovalor de dicha matriz, pues la segunda columna de esa matriz es $[0, a_{22}, 0]$.
- Para el caso $r_2(A) = 0$ se aplica el mismo argumento.
- Suponemos ahora que $r_1(A) \cdot r_2(A) > 0$ en (2.30). Tomamos s , con $0 \leq s \leq r_1(A)$ tal que $|z - a_{11}| \cdot |z - a_{22}| = s r_2(A)$ y elegimos un número real ψ tal que $(a_{11} - z) \cdot (a_{22} - z) = s r_2(A) e^{i\psi}$.
Para $\alpha = r_2(A) + |a_{22} - z|$, (por tanto $\alpha > 0$), la matriz \tilde{B} , definida por

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & s e^{i\psi} & (r_1(A) - s) \\ r_2(A) & a_{22} & 0 \\ \frac{r_2(A) \cdot r_3(A)}{\alpha} & \frac{(a_{22} - z) \cdot r_3(A)}{\alpha} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

está en el conjunto $\omega(A)$. Además comprobamos que $\det(\tilde{B} - zI) = 0$, luego z es un autovalor de \tilde{B} . Por lo tanto, el z elegido en $K_{1,2}(A)$ es autovalor de alguna matriz B de $\omega(A)$.

Como esta construcción para $n = 3$ puede ser aplicada a cualquier óvalo de Brauer-Cassini $K_{i,j}(A)$ con $i \neq j$, entonces tenemos que $\sigma(\omega(A)) = \mathcal{K}(A)$, como queríamos probar. \square

Vemos de este teorema que el conjunto de Brauer hace un trabajo excelente al estimar el espectro de todas las matrices del conjunto equiradial y del conjunto equiradial extendido de la matriz A , algo que, en general no hace el conjunto de Gerschgorin.

2.2. El Conjunto de Brualdi

En esta sección definiremos las lemniscatas de orden superior y analizaremos una extensión de estas, conocida como el conjunto de Brualdi, que constituye un nuevo conjunto de inclusión para los autovalores de una matriz, y compararemos este conjunto con el conjunto de Brauer.

Definición 2.9. Dada $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, escogemos m índices distintos $\{i_j\}_{j=1}^m$ de $N = \{1, 2, \dots, n\}$, ($n \geq m$).

Definimos la **lemniscata de orden m** asociada a los $\{i_j\}_{j=1}^m$ y a los $2n$ valores $\{a_{ii}\}_{i=1}^n$ y $\{r_i(A)\}_{i=1}^n$, como el conjunto compacto de \mathbb{C}^n dado por

$$\ell_{i_1, i_2, \dots, i_m}(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{j=1}^m |z - a_{i_j i_j}| \leq \prod_{j=1}^m r_{i_j}(A) \right\}. \quad (2.32)$$

A la unión de todas las lemniscatas de orden m posibles, se le llama **conjunto lemniscata de A** y es denotado por

$$\mathcal{L}_m(A) := \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n} \ell_{i_1, i_2, \dots, i_m}(A). \quad (2.33)$$

La unión en (2.33) se hace sobre los $\binom{n}{m}$ posibles conjuntos $\{i_j\}_{j=1}^m$ distintos de N .

Como casos particulares, tenemos los discos de Gerschgorin, que son las lemniscatas de orden 1 y los óvalos de Brauer-Cassini que son las lemniscatas de orden 2; es decir, $\mathcal{L}_1(A) = \Gamma(A)$ y $\mathcal{L}_2(A) = \mathcal{K}(A)$.

Cuando consideramos las demostraciones de los resultados de inclusión de Gerschgorin, $\sigma(A) \subseteq \Gamma(A)$, o de Brauer, $\sigma(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$, tenemos que la diferencia fundamental entre ambas, es que la primera se centra únicamente en una fila de la matriz, mientras que la segunda considera dos filas distintas de la matriz.

La conclusión del Teorema 2.5, $\mathcal{K}(A) \subseteq \Gamma(A)$, puede proporcionar un conjunto de inclusión de autovalores más ajustado al espectro de la matriz. Sin embargo, en general, para $m > 2$, el conjunto, $\mathcal{L}_m(A)$, definido en (2.33), no siempre contiene al espectro de la matriz A , como se pone de manifiesto en el ejemplo que se muestra a continuación.

Ejemplo 2.10. Consideremos la matriz B de (1.21), que es una matriz reducible pues su grafo dirigido no es fuertemente conexo.

Tenemos que $\sigma(B) = \{0, 0, 1, 1, 2, 2\}$, $b_{jj} = 1$, $j \in N$ y $r_j(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ 0 & \text{si } j \in \{5, 6\}. \end{cases}$

Tomando $m = 5$ en (2.32), para cualquiera de las 6 elecciones de los índices $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, el producto va a dar siempre $r_{i_1}(B) \cdot r_{i_2}(B) \cdot r_{i_3}(B) \cdot r_{i_4}(B) \cdot r_{i_5}(B) = 0$, y la correspondiente lemniscata (2.32) asociada a la matriz A , siempre se va a reducir al conjunto de puntos z tal que $|z - 1|^5 = 0$, es decir, $\mathcal{L}_5(B) = \{1\}$, dejando fuera a los autovalores 0 y 2 de la matriz. Igualmente, $\mathcal{L}_6(B) = \{1\}$.

Si para cada matriz A queremos conseguir un conjunto compacto del plano complejo que contenga a todo el espectro de A y que este basado en lemniscatas de orden superior, tenemos que describir una extensión del trabajo realizado por Brualdi, utilizando las propiedades del grafo dirigido de la matriz A y, en particular haciendo uso del concepto de ciclo (aunque él utilizó la palabra *circuito*).

Recordando la definición de grafo dirigido $\mathbb{G}(A)$ de una matriz A y la notación introducida en la Sección 1.3, definimos a continuación los dos tipos de ciclos que existen.

Definición 2.11. Un **ciclo fuerte** γ de $\mathbb{G}(A)$ es una sucesión finita de índices $\{i_j\}_{j=1}^{p+1}$ de N tal que $p \geq 2$, en la que todos los coeficientes $\{i_j\}_{j=1}^p$ son distintos, $i_{p+1} = i_1$ y además $\overrightarrow{v_{i_1} v_{i_2}}, \dots, \overrightarrow{v_{i_p} v_{i_{p+1}}}$ son arcos dirigidos contiguos de $\mathbb{G}(A)$. A este ciclo lo denotamos por $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$.

Un **ciclo débil** γ de $\mathbb{G}(A)$ es un vértice v_i para el cuál no existe ningún ciclo fuerte que pase por él, independientemente de si $a_{ii} = 0$ o no. Lo denotamos simplemente por $\gamma = (i)$.

Podemos observar que si $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$ es un ciclo fuerte entonces los coeficientes $a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_3}, \dots, a_{i_p i_1}$ de la matriz A son todos no nulos.

Decimos que el ciclo fuerte $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$ pasa por los vértices $\{v_{i_j}\}_{j=1}^p$ y que γ tiene longitud p , $p \geq 2$. En el caso del ciclo débil $\gamma = (i)$, decimos que pasa por el vértice v_i .

Observamos que la longitud de un ciclo fuerte tiene que ser como mínimo dos, por lo que los lazos de $\mathbb{G}(A)$ no pueden ser ciclos fuertes.

Definición 2.12. Definimos el **conjunto de ciclos** $\mathcal{C}(A)$, como el conjunto de todos los ciclos fuertes y débiles de $\mathbb{G}(A)$.

De esta Definición 2.12 vemos que para cada vértice v_i del grafo orientado $\mathbb{G}(A)$ siempre hay un ciclo de $\mathcal{C}(A)$ que pasa por ese vértice.

Por ejemplo si tenemos una matriz con $n = 1$, entonces $\mathcal{C}(A) = (1)$, lo que quiere decir, que existe un único ciclo (débil) que pasa por el vértice v_1 .

Supongamos ahora que $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, es reducible, y recordemos la forma normal reducida (1.19)-(1.20) definida en la sección 1.3.

La existencia de un $R_{jj} = [a_{kk}]$ en (1.20 ii)), equivale a decir que por el vértice v_k de $\mathbb{G}(A)$ no pasa ningún ciclo fuerte. De la misma manera, la existencia de una submatriz diagonal $R_{j,j}$ satisfaciendo (1.20 i)), implica que existe al menos un ciclo fuerte que pasa por cada vértice v_k de $\mathbb{G}(A)$ que está asociado a la submatriz irreducible R_{jj} .

Podemos ver también de (1.19) que $\sigma(A) = \bigcup_{k=1}^m \sigma(R_{kk})$, lo que implica que las submatrices de la parte superior de la diagonal, R_{jk} con $j < k \leq m$, no afectan a los autovalores de la matriz A .

Teniendo esto en cuenta, definimos las nuevas sumas de fila $\tilde{r}_i(A)$ de A , como

$$\tilde{r}_i(A) := r_l(R_{jj}), \quad (2.34)$$

cuando la i -ésima fila de A se corresponda con la l -ésima fila de R_{jj} en (1.19).

Si la matriz A es irreducible entonces estas nuevas sumas de fila (2.34), son exactamente las definidas en el Capítulo 1. Además vemos que la definición (2.34) implica que para cualquier vértice v_i correspondiente a un ciclo débil de $\mathbb{G}(A)$ se cumple que $\tilde{r}_i(A) = 0$, que es consistente con el convenio utilizado en (1.4), y $\tilde{r}_i(A) > 0$ para cada fila que se corresponde con la de una matriz irreducible de (1.20 i)).

A partir de estas definiciones y con la notación anterior tenemos la siguiente definición.

Definición 2.13. Dada $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 1$.

Si $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$, con todos los índices $\{i_j\}_{j=1}^p$ de N distintos y $p \geq 2$, es un ciclo fuerte de $\mathbb{G}(A)$, su **lemniscata de Brualdi asociada** de orden p , $\mathcal{B}_\gamma(A)$, es

$$\mathcal{B}_\gamma(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} |z - a_{ii}| \leq \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_i(A) \right\}. \quad (2.35)$$

Si $\gamma = (i)$ es un ciclo débil de $\mathbb{G}(A)$, su **lemniscata de Brualdi asociada**, $\mathcal{B}_\gamma(A)$, es

$$\mathcal{B}_\gamma(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| = \tilde{r}_i(A) = 0\} = \{a_{ii}\}. \quad (2.36)$$

El **conjunto de Brualdi para A** está definido como

$$\mathcal{B}(A) := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{B}_\gamma(A). \quad (2.37)$$

Establecemos a continuación un nuevo resultado de inclusión de autovalores de una matriz, utilizando el conjunto de Brualdi que acabamos de definir.

Teorema 2.14. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\lambda \in \sigma(A)$. Existe un ciclo (fuerte o débil) γ de $\mathcal{C}(A)$ tal que*

$$\lambda \in \mathcal{B}_\gamma(A). \quad (2.38)$$

Por lo tanto,

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{B}(A). \quad (2.39)$$

Demostración. Si $n = 1$, entonces $A = [a_{11}] \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ y $\mathcal{C}(A)$ está formado por un único ciclo débil $\gamma = (1)$. Tenemos por la definición (2.36) que $\mathcal{B}_\gamma(A) = \{a_{11}\}$, y $\{a_{11}\}$ es el único autovalor de A . Luego se tienen (2.38) y (2.39)

Supongamos ahora que $n \geq 2$, y sea λ un autovalor de A .

-Si $\lambda = a_{kk}$ para algún $k \in N$, entonces hay un ciclo (fuerte o débil) γ de $\mathcal{C}(A)$ tal que $k \in \gamma$.

- Si γ es un ciclo débil de $\mathcal{C}(A)$ que pasa por el vértice v_k , entonces $\mathcal{B}_\gamma(A) = \{a_{kk}\} = \lambda$, luego se satisface de nuevo (2.38).
- Si γ es un ciclo fuerte de $\mathcal{C}(A)$ que pasa por v_k , entonces tomando $z = a_{kk}$, en (2.35), vemos que $a_{kk} \in \mathcal{B}_\gamma(A)$ y así $\lambda = a_{kk} \in \mathcal{B}(A)$.

Por tanto, si cada autovalor de A es un elemento de la diagonal de A , los argumentos anteriores nos dan que $\sigma(A) \subseteq \mathcal{B}(A)$, como queríamos ver.

-Supongamos ahora el caso que falta, $\lambda \neq a_{jj} \forall j \in N$.

- Si A es reducible, se sigue de (1.20), que λ debe ser un autovalor de alguna submatriz irreducible R_{jj} de orden p_j con $2 \leq p_j \leq n$.
- De manera similar, si A es irreducible, entonces λ es un autovalor de una matriz irreducible $R_{11} = A$ de orden n .

Para simplificar la notación, suponemos que $A = R_{jj}$ es irreducible, lo cuál significa que usaremos directamente las sumas de fila $r_i(A)$ en lugar de las nuevas $\tilde{r}_i(A)$ de R_{jj} , pues ambas sumas coinciden.

Tenemos que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ con $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \neq \mathbf{0}$. Supongamos que $x_i \neq 0$, entonces $(A\mathbf{x})_i = \lambda x_i$ nos da

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij} \cdot x_j.$$

Como $(\lambda - a_{ii})x_i \neq 0$, los productos $a_{ij}x_j$ en la suma anterior no pueden ser todos cero. Por tanto, hay al menos un índice $k \in N$ con $k \neq i$, tal que

$$|x_k| = \max \{ |x_j| : j \in N \text{ con } j \neq i \text{ y } a_{ij}x_j \neq 0 \}.$$

Así $|x_k| > 0$ y $a_{ik} \neq 0$, y por tanto

$$|\lambda - a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq r_i(A) \cdot |x_k|, \quad \text{con } k \neq i.$$

Tomando $i := i_1$ y $k := i_2$, podemos repetir este proceso empezando ahora con:

$$(\lambda - a_{i_2 i_2})x_{i_2} = \sum_{j \in N \setminus \{i_2\}} a_{i_2 j} \cdot x_j,$$

y hay igualmente un i_3 , con $|x_{i_3}| > 0$ y $a_{i_2 i_3} \neq 0$ tal que

$$|\lambda - a_{i_2 i_2}| \cdot |x_{i_2}| \leq r_{i_2}(A) \cdot |x_{i_3}|,$$

donde $i_3 \neq i_2$ y

$$|x_{i_3}| = \max \{ |x_j| : j \in N \text{ con } j \neq i_2 \text{ y } a_{i_2 j}x_j \neq 0 \}.$$

- Si $i_3 = i_1$, el proceso se termina y se ha conseguido un ciclo fuerte $\gamma = (i_1 i_2)$, pues $i_1 \neq i_2$, $i_3 = i_1$ y $a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_1} \neq 0$.
- Si $i_3 \neq i_1$ se itera el proceso, pero como N es un conjunto finito, el proceso termina cuando se encuentre un $i_{p+1} \in N$ que es igual que alguno de los anteriores i_ℓ .

En cualquiera de los dos casos, hemos construido una sucesión finita de índices distintos de N , $\{i_j\}_{j=\ell}^p$ con $p \geq 2$, con $i_{p+1} = i_\ell$, tal que los coeficientes $a_{i_\ell i_{\ell+1}}, a_{i_{\ell+1} i_{\ell+2}}, \dots, a_{i_p i_\ell}$ son distintos de cero. Tenemos entonces un ciclo fuerte $\gamma = (i_\ell i_{\ell+1} \dots i_p)$ de A . Además se tienen las siguientes desigualdades

$$|\lambda - a_{i_j i_j}| \cdot |x_{i_j}| \leq r_{i_j}(A) \cdot |x_{i_{j+1}}|, \quad j = \ell, \ell + 1, \dots, p,$$

donde $i_{p+1} = i_\ell$ y los x_{i_j} son todos distintos de cero.

Tomando el producto de todas las desigualdades anteriores tenemos

$$\left(\prod_{j=\ell}^p |\lambda - a_{i_j i_j}| \right) \cdot \left(\prod_{j=\ell}^p |x_{i_j}| \right) \leq \left(\prod_{j=\ell}^p r_{i_j}(A) \right) \cdot \left(\prod_{j=\ell}^p |x_{i_{j+1}}| \right).$$

Como $x_{i_{p+1}} = x_{i_\ell}$, entonces $\prod_{j=\ell}^p |x_{i_j}| = \prod_{j=\ell}^p |x_{i_{j+1}}| > 0$, y podemos cancelar ambos productos para obtener

$$\prod_{j=\ell}^p |\lambda - a_{i_j i_j}| \leq \prod_{j=\ell}^p r_{i_j}(A).$$

Utilizando (2.35), vemos que $\lambda \in \mathcal{B}_\gamma(A)$, dándonos (2.38). Como esto es válido para cualquier autovalor λ , entonces tenemos (2.39) como queríamos ver. \square

Ejemplo 2.15. Como aplicación del Teorema 2.14, consideremos de nuevo la matriz B de (1.21), que ya está en forma normal reducida (1.19).

Su conjunto de ciclos está formado por los ciclos fuertes $\gamma_1 = (1\ 2)$ y $\gamma_2 = (3\ 4)$ y los ciclos débiles $\gamma_3 = (5)$ y $\gamma_4 = (6)$. De aquí se sigue por (2.37) que

$$\mathcal{B}(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1|^2 \leq 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z - 1|^2 \leq 1\} \cup \{1\} \cup \{1\}$$

que ahora sí que contiene a $\sigma(B) = \{0, 0, 1, 1, 2, 2\}$, como nos muestra el Teorema 2.14.

Mostramos ahora, aunque sin demostración, el resultado equivalente de no singularidad asociado al teorema anterior y dos resultados para el caso de matrices irreducibles análogos a los Teoremas 1.17 y 1.18.

Teorema 2.16. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\mathcal{C}(A)$ el conjunto de ciclos fuertes y débiles de $\mathbb{G}(A)$. Si se cumple

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{ii}| > \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_i(A) \quad (\forall \gamma \in \mathcal{C}(A)). \quad (2.40)$$

Entonces A es no singular.

Teorema 2.17. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ irreducible. Si se cumple que

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{ii}| \geq \prod_{i \in \gamma} r_i(A) \quad (\forall \gamma \in \mathcal{C}(A)), \quad (2.41)$$

con la desigualdad estricta para algún $\gamma \in \mathcal{C}(A)$. Entonces A es no singular.

Teorema 2.18. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ irreducible. Si $\lambda \in \sigma(A)$ está en la frontera de $\mathcal{B}(A)$, entonces

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{ii}| \geq \prod_{i \in \gamma} r_i(A) \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}(A), \quad (2.42)$$

es decir, λ está en la frontera de todas las lemniscatas de Brualdi $\mathcal{B}_\gamma(A)$, con $\gamma \in \mathcal{C}(A)$.

A la vista de los Teoremas anteriores, nos podríamos preguntar si las lemniscatas de orden superior son un conjunto de inclusión para los autovalores de una matriz si es irreducible. En el siguiente ejemplo vamos a ver que, en general, esto no es cierto.

Ejemplo 2.19. Consideramos ahora una modificación de la matriz reducible B de (1.21), añadiendo un parámetro no nulo ϵ en algunas entradas. Sea pues la matriz

$$D := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ \epsilon & 0 & \epsilon & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

cuyo grafo dirigido es el de la Figura 2.5.

Podemos ver que es fuertemente conexo, lo cuál implica que la matriz D es irreducible.

Tenemos que $\sigma(D) = \left\{0, 2, \frac{1+\sqrt{1+8\epsilon^2}}{2}, \frac{1-\sqrt{1+8\epsilon^2}}{2}, \frac{3+\sqrt{1+8\epsilon^2}}{2}, \frac{1+\sqrt{3-8\epsilon^2}}{2}\right\}$, $d_{jj} = 1$ $j \in N$ y

$$r_j(D) = \begin{cases} 1 + \epsilon, & \text{si } j \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ 2\epsilon, & \text{si } j \in \{5, 6\}. \end{cases}$$

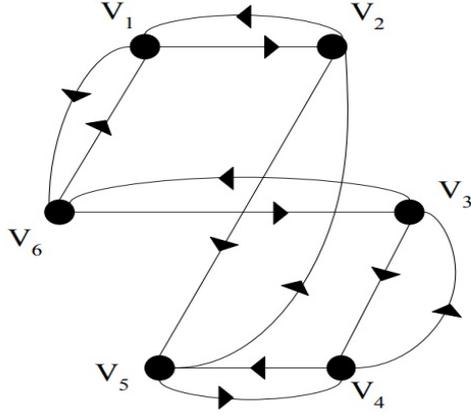


Figura 2.5: Grafo dirigido de la matriz D .

Si consideramos la lemniscata de orden 6 para esta matriz D , se tiene que

$$\mathcal{L}_6(D) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1|^6 \leq (1 + \epsilon)^4 \cdot 4\epsilon^2\} \quad (2.44)$$

Tomando $0 < \epsilon < 1$, hemos comprobado que el espectro de autovalores de la matriz D no está contenido en $\mathcal{L}_6(D)$.

Ahora consideramos la lemniscata de orden 5 para esta matriz

$$\mathcal{L}_5(D) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1|^6 \leq (1 + \epsilon)^3 \cdot 4\epsilon^2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z - 1|^6 \leq (1 + \epsilon)^4 \cdot 2\epsilon\} \quad (2.45)$$

Del mismo modo, tomando $0 < \epsilon \leq 0.41$ en la matriz D , comprobamos que el espectro de la matriz no va a estar contenido en este conjunto.

Con esto probamos que para un m fijado, las lemniscatas de orden superior tampoco contienen, en general, al espectro de una matriz, aunque sea irreducible.

Vamos a mostrar ahora un ejemplo en el que se ilustra que el Teorema 2.18 da una condición necesaria pero no suficiente para que un autovalor λ esté en la frontera del conjunto de Brualdi. Para ello vamos a ver que para cierta matriz existe un punto común a la frontera de todas las lemniscatas de Brualdi, que además pertenece a la frontera del conjunto de Brualdi, pero que no es un autovalor de dicha matriz.

Ejemplo 2.20. Consideramos la matriz irreducible A de (1.21), cuyo conjunto de ciclos es $\mathcal{C}(A) = (12) \cup (1234)$. Si llamamos a los ciclos $\gamma_1 = (12)$ y $\gamma_2 = (1234)$, las lemniscatas de Brualdi de A son:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\gamma_1}(A) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \cdot |z - i| \leq 1\} \\ \mathcal{B}_{\gamma_2}(A) &= \{z \in \mathbb{C} : |z^4 - 1| \leq 1\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Hemos representado en la Figura 2.6 el conjunto de Brualdi de dicha matriz (en la grafica izquierda se ha utilizado color rojo para $\mathcal{B}_{\gamma_1}(A)$ y color negro para $\mathcal{B}_{\gamma_2}(A)$), y observamos en primer lugar que el espectro de A (las 4 cruces) está contenido en $\mathcal{B}(A)$. Además por (2.46) tenemos que $0 \in \partial\mathcal{B}_{\gamma_i}(A)$ con $i = 1, 2$ y $0 \in \partial\mathcal{B}(A)$. Sin embargo, $0 \notin \sigma(A)$.

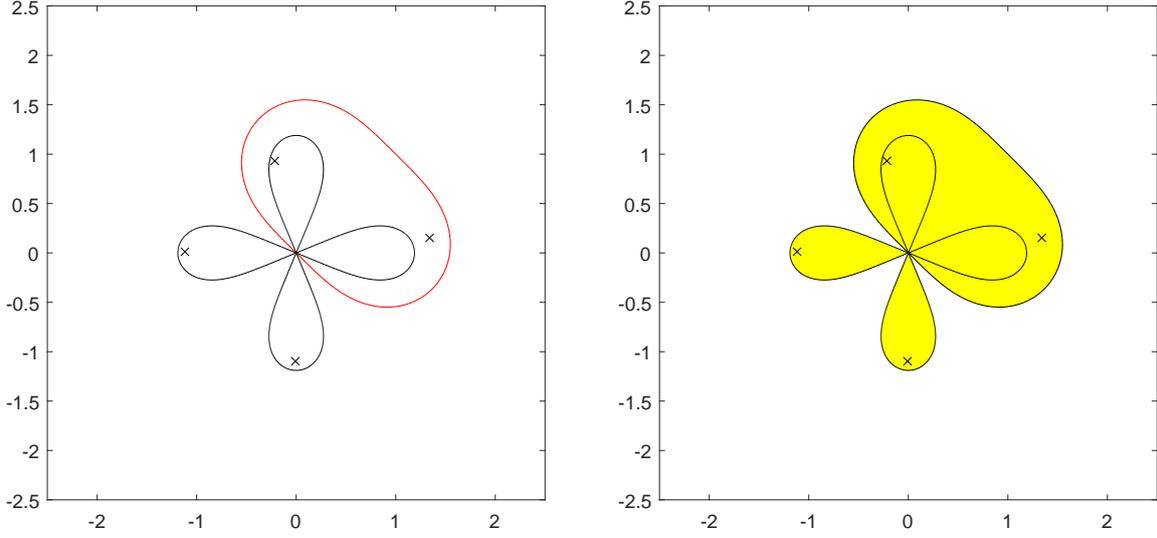


Figura 2.6: Conjunto de Brualdi de A , $\mathcal{B}(A)$.

Se observa que el conjunto de inclusión de autovalores de una matriz A que proporciona el Teorema 2.14 depende ahora de las cantidades

$$\{a_{ii}\}_{i=1}^n, \{\tilde{r}_i\}_{i=1}^n \text{ y del conjunto de ciclos } \mathcal{C}(\mathcal{A}), \quad (2.47)$$

que se obtienen a partir de la matriz A , de su grafo dirigido $\mathbb{G}(A)$ y de su forma normal reducida (1.19).

Igual que hicimos en la sección anterior, nos preguntamos si la unión de los espectros de todas las matrices que comparten con A los datos (2.47), llena por completo o no el conjunto de Brualdi, $\mathcal{B}(A)$, como ocurría con el conjunto de Brauer $\mathcal{K}(A)$.

Es evidente, como sucedía para el conjunto de Brauer, que dada $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existe una familia infinita de matrices B que tiene las mismas cantidades y estructura (2.47) que la matriz A , y por el Teorema 2.14, estas matrices $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tienen también incluido a su espectro dentro del conjunto de Brualdi $\mathcal{B}(A)$.

Con una notación similar al conjunto equiradial y al conjunto equiradial extendido definidos en la sección anterior, definimos

Definición 2.21. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. El **conjunto radial de Brualdi** para la matriz A se define como

$$\omega_{\mathcal{B}}(A) := \left\{ B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{ii} = a_{ii}, \tilde{r}_i(B) = \tilde{r}_i(A) \forall i \in N \text{ y } \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A) \right\}, \quad (2.48)$$

y definimos $\sigma(\omega_{\mathcal{B}}(A)) := \bigcup_{B \in \omega_{\mathcal{B}}(A)} \sigma(B)$.

El **conjunto radial de Brualdi extendido** para A viene dado por

$$\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A) := \left\{ B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{ii} = a_{ii}, 0 \leq \tilde{r}_i(B) \leq \tilde{r}_i(A) \forall i \in N \text{ y } \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A) \right\}, \quad (2.49)$$

con $\sigma(\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)) := \bigcup_{B \in \hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)} \sigma(B)$.

De estas definiciones y del Teorema 2.14 sacamos el siguiente resultado, que es análogo a (2.21),

$$\sigma(\omega_{\mathcal{B}}(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)) \subseteq \mathcal{B}(A). \quad (2.50)$$

Aunque el conjunto de Brauer coincide con el espectro del conjunto equiradial extendido (ver Teorema 2.8), vamos a ver con un ejemplo que esto no sucede para el conjunto de Brualdi con el espectro del conjunto radial de Brualdi extendido.

Ejemplo 2.22. Consideramos de nuevo la matriz irreducible A de (1.21), cuyo conjunto de Brualdi se ha estudiado en el Ejemplo 2.20 y está representado en la Figura 2.6. En el Ejemplo 2.20 veíamos que el punto $z = 0$ es un punto frontera de las dos lemniscatas de Brualdi de A y del conjunto de Brualdi $\mathcal{B}(A)$.

Toda matriz $C \in \omega_{\mathcal{B}}(A)$ puede ser expresada de la siguiente manera

$$C := \begin{bmatrix} 1 & e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ (1-s)e^{i\theta_2} & i & s e^{i\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & e^{i\theta_4} \\ e^{i\theta_5} & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

con $0 < s < 1$ y $\{\theta_i\}_{i=1}^5$ números reales cualquiera. (Observamos que si tomamos $s = 0$ o $s = 1$, estas matrices C no conservarían el conjunto de ciclos de A).

Supongamos que encontramos un valor para s , ($0 < s < 1$) y números reales $\{\theta_i\}_{i=1}^5$ para los que una matriz asociada C tiene autovalor 0. Esto implica que $\det C = 0$, luego $0 = \det C = -1 - e^{i\theta_1} \cdot (i(1-s)e^{i\theta_2} + s e^{i(\theta_3+\theta_4+\theta_5)}) = -1 - i(1-s)e^{i(\theta_1+\theta_2)} - s e^{i(\theta_1+\theta_3+\theta_4+\theta_5)}$,

o lo que es lo mismo

$$1 = -i(1-s)e^{i(\theta_1+\theta_2)} - s e^{i(\theta_1+\theta_3+\theta_4+\theta_5)}.$$

Tomando valores absolutos, y como $0 < s < 1$, tenemos que

$$1 = (1-s) - s = 1 - 2s,$$

que es falso por ser $s \neq 0$. Por tanto $\det C \neq 0$ para cualquier matriz $C \in \omega_{\mathcal{B}}(A)$, es decir $0 \notin \sigma(\omega_{\mathcal{B}}(A))$.

Esto también lo podemos ver de otra manera. Ya sabemos que cualquier matriz $H \in \hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$ se expresa de la siguiente forma

$$H := \begin{bmatrix} 1 & \tau_1 e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ \tau_2(1-s)e^{i\theta_2} & i & \tau_3 s e^{i\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \tau_4 e^{i\theta_4} \\ \tau_5 e^{i\theta_5} & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

donde $0 < \tau_i \leq 1$, $0 \leq \theta_i \leq 2\pi \forall 1 \leq i \leq 5$ y $0 < s < 1$. Hemos generado valores aleatorios de $\{\tau_i\}_{i=1}^5 \in (0, 1]$, de $\{\theta_i\}_{i=1}^5 \in [0, 2\pi)$ y de $s \in (0, 1)$, y mostramos en la Figura 2.7 los autovalores de dichas matrices junto con el conjunto de Brualdi, $\mathcal{B}(A)$.

La Figura 2.7 nos muestra también como hemos dicho antes como el punto 0 no es autovalor de ninguna matriz $H \in \hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$, aunque $0 \in \mathcal{B}(A)$.

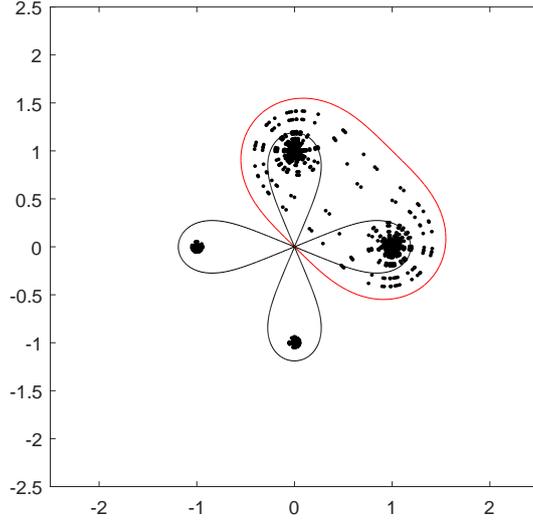


Figura 2.7: Autovalores de matrices aleatorias $H \in \hat{\omega}(A)$.

Con todo esto tenemos que la igualdad en (2.50) no se puede dar, pues $0 \in \mathcal{B}(A)$, por lo tanto,

$$\sigma(\omega_{\mathcal{B}}(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)) \subsetneq \mathcal{B}(A).$$

Para poder encontrar la igualdad, supongamos que se permite tomar $s = 0$, observando que el parámetro s no juega ningún papel a la hora de definir el conjunto de Brualdi de A .

Estableciendo $s = 0$, tenemos la matriz

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ e^{i\theta_2} & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & e^{i\theta_4} \\ e^{i\theta_5} & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que tomando $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, tenemos que $z = 0$ es un autovalor de la matriz \tilde{C} , donde \tilde{C} es el límite de las matrices C cuando $s \rightarrow 0$. Pero observamos del grafo $\mathbb{G}(\tilde{C})$ en la Figura 2.8 que $\mathcal{C}(\tilde{C}) \neq \mathcal{C}(A)$, pues el conjunto de ciclos de \tilde{C} esta formado por el ciclo fuerte $\tilde{\gamma}_1 = (12)$ y los ciclos débiles $\tilde{\gamma}_2 = (3)$ y $\tilde{\gamma}_3 = (4)$. Pero recordemos que $\tilde{C} \in \omega(A)$.

Esto nos sugiere ver que pasaría si tomamos las adherencias de los conjuntos $\omega_{\mathcal{B}}(A)$ y $\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$, con $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 1$,

Definición 2.23.

$$\bar{\omega}_{\mathcal{B}}(A) := \left\{ B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : \text{existe una sucesión de matrices } \{B_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ en } \omega_{\mathcal{B}}(A), \text{ para la que } B = \lim_{j \rightarrow \infty} B_j \right\} \quad (2.53)$$

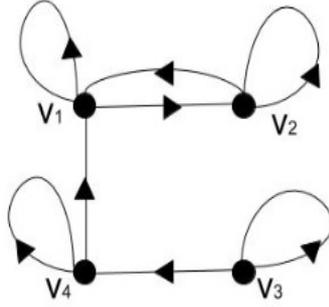


Figura 2.8: Grafo dirigido de la matriz \tilde{C} .

y

$$\overline{\omega}_{\mathcal{B}}(A) := \left\{ B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : \text{existe una sucesión de matrices } \{B_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ en } \hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A), \text{ para la que } B = \lim_{j \rightarrow \infty} B_j \right\} \quad (2.54)$$

Con estas definiciones demostramos a continuación que aunque en (2.50) no se da la igualdad, el espectro de las matrices en $\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$ es denso en $\mathcal{B}(A)$.

Teorema 2.24. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Se tiene que*

$$\partial \mathcal{B}(A) \subseteq \sigma(\overline{\omega}_{\mathcal{B}}(A)) \subseteq \sigma(\widehat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)) = \mathcal{B}(A). \quad (2.55)$$

Es decir, cada punto de la frontera del conjunto de Brualdi es un autovalor de alguna matriz de $\overline{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$ y cada punto del conjunto de Brualdi es un autovalor de alguna matriz de $\widehat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$.

Demostración. Como $\sigma(\omega_{\mathcal{B}}(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A))$ por (2.50), se tiene por tanto que sus adherencias necesariamente satisfacen $\sigma(\overline{\omega}_{\mathcal{B}}(A)) \subseteq \sigma(\widehat{\omega}_{\mathcal{B}}(A))$, dándonos la inclusión del medio de (2.55). Luego es suficiente probar la primera inclusión y la igualdad.

Primero supongamos que γ es un ciclo débil de $\mathcal{C}(A)$, es decir $\gamma = (i)$ para algún índice $i \in N$, y su lemniscata de Brualdi asociada es $\mathcal{B}_{\gamma}(A) = \{a_{ii}\}$. Además por (1.19) y (1.20 ii)), vemos que o $n = 1$ o $n \geq 2$ con A reducible, y $\{a_{i,i}\}$ es un autovalor de A .

Si todos los ciclos γ de $\mathcal{C}(A)$ son ciclos débiles, entonces el conjunto de Brualdi, $\mathcal{B}(A)$, satisface $\mathcal{B}(A) = \bigcup_{i=1}^n a_{ii}$. Como en este caso tenemos que $\tilde{r}_i(A) = 0 \forall i \in N$, entonces por (1.19) y (1.20 ii)) se tiene que cada matriz de $\omega_{\mathcal{B}}(PAP^T)$ y $\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(PAP^T)$ es triangular superior con $\{a_{ii}\}_{i=1}^n$ como elementos diagonales. Por lo tanto

$$\partial \mathcal{B}(A) = \sigma(\omega_{\mathcal{B}}(A)) = \sigma(\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)) = \mathcal{B}(A) = \bigcup_{i=1}^n a_{ii},$$

y se tiene la igualdad en (2.55).

Consideremos ahora cualquier ciclo fuerte γ de $\mathcal{C}(A)$ y lo expresamos como

$$\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p), \text{ con } 2 \leq p \leq n. \quad (2.56)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer después de una permutación adecuada de filas y columnas de A que

$$\gamma = (1 2 \dots p), \quad (2.57)$$

observando que esta permutación deja sin cambios el conjunto de elementos diagonales y a las sumas de fila y de columna de A . Esta matriz permutada, a la que llamaremos también A , tiene la siguiente forma particionada

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1p+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & a_{pp+1} & \cdots & a_{pn} \\ \hline a_{p+11} & \cdots & a_{p+1p} & a_{p+1p+1} & \cdots & a_{p+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & a_{np+1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right], \quad (2.58)$$

(si $p = n$ entonces A_{12}, A_{21} y A_{22} no aparecen en (2.58)).

Además por simplicidad de notación suponemos que $r_i(A) = \tilde{r}_i(A)$ para $1 \leq i \leq p$, lo que significa que cualquier coeficiente de A_{12} , que surge de un bloque triangular superior de la forma normal reducida de A en (1.19), simplemente se establece como cero.

Nuestro objetivo a continuación es construir una matriz especial $B(t) = [b_{ij}(t)] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ cuyos elementos dependan continuamente del parámetro $t \in [0, 1]$, tal que

$$\begin{cases} b_{ii}(t) = a_{ii}, \quad r_i(B(t)) = r_i(A) \quad \forall i \in N, \quad \forall t \in [0, 1], \\ y \\ \mathcal{C}(B(t)) = \mathcal{C}(A) \quad \forall t \in (0, 1]. \end{cases} \quad (2.59)$$

Para ello, escribimos la matriz

$$B(t) = \left[\begin{array}{c|c} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right], \quad (2.60)$$

es decir, las filas $p+1 \leq \ell \leq n$ de $B(t)$ son exactamente las mismas que las de A y por tanto son independientes de t .

Observamos de (2.57), que

$$a_{12} \cdot a_{23} \cdots a_{p-1p} \cdot a_{p1} \neq 0. \quad (2.61)$$

Definimos los coeficientes de las p primeras filas de $B(t)$, $\forall t \in [0, 1]$, satisfaciendo las siguientes condiciones

$$\begin{cases} b_{ii}(t) = a_{ii} \quad \forall 1 \leq i \leq p, \\ \left\{ \begin{array}{l} |b_{ii+1}|(t) = (1-t)r_i(A) + t|a_{ii+1}| \quad \forall 1 \leq i \leq p, \\ |b_{ij}|(t) = t|a_{ij}| \quad (j \neq i, i+1) \quad \forall 1 \leq i \leq p, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} |b_{p1}|(t) = (1-t)r_p(A) + t|a_{p1}|, \\ |b_{pj}|(t) = t|a_{pj}| \quad (\forall j \neq 1, p) \quad \forall 1 \leq i \leq p. \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.62)$$

Por definición, los coeficientes de $B(t)$ son todos continuos con respecto a la variable $t \in [0, 1]$ y $B(t)$ y A tienen los mismos elementos diagonales. Además tienen las mismas sumas de fila para cualquier $t \in [0, 1]$ y como $a_{ij} \neq 0$ implica $b_{ij} \neq 0 \forall 0 < t \leq 1$, entonces $B(t)$ y A tienen los mismos ciclos en sus grafos dirigidos $\forall 0 < t \leq 1$. Tenemos pues, por (2.48), que $B(t) \in \omega_{\mathcal{B}}(A) \forall 0 < t \leq 1$ y por (2.53), $B(0) \in \bar{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$.

Por lo tanto de (2.50) se sigue que

$$\sigma(B(t)) \subseteq \mathcal{B}(A) \quad \forall 0 < t \leq 1.$$

Como $\mathcal{B}(A)$ es un conjunto cerrado y los autovalores de $B(t)$ son funciones continuas de t para $0 \leq t \leq 1$, se cumple también para el caso límite $t = 0$ que

$$\sigma(B(0)) \subseteq \mathcal{B}(A),$$

donde por lo definido en (2.62)

$$B(0) = \left[\begin{array}{c|c} B_{11}(0) & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right], \quad (2.63)$$

con

$$B_{11}(0) = \begin{bmatrix} a_{11} & r_1(A) e^{i\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & r_2(A) e^{i\theta_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p-1,p-1} & r_{p-1}(A) e^{i\theta_{p-1}} \\ r_p(A) e^{i\theta_p} & 0 & \cdots & 0 & a_{pp} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

observamos que los elementos no diagonales de las primeras p filas de $B(t)$ están definidos en (2.62) sólo en términos de los módulos, lo que nos permite fijar los argumentos de los elementos no diagonales distintos de cero en $B_{11}(0)$ a través de los factores $\{e^{i\theta_j}\}_{j=1}^p$, donde $\{\theta_j\}_{j=1}^p$ están en $[0, 2\pi]$.

La forma particionada de $B(0)$ nos da

$$\sigma(B(0)) = \sigma(B_{11}(0)) \cup \sigma(A_{22}), \quad (2.65)$$

y a partir de la forma de $B_{11}(0)$ en (2.64), es fácil de ver que cada autovalor λ de $B_{11}(0)$ satisface

$$\prod_{i=1}^p |\lambda - a_{ii}| = \prod_{i=1}^p r_i(A), \quad (2.66)$$

para todas las elecciones de $\{\theta_j\}_{j=1}^p$ reales en $[0, 2\pi]$.

Combinando (2.66) con la definición de $\mathcal{B}_\gamma(A)$, tenemos que $\lambda \in \partial\mathcal{B}_\gamma(A)$, y como todas las elecciones de los números reales $\{\theta_j\}_{j=1}^p$ para $B_{11}(0)$ en (2.64) nos dan autovalores de $B_{11}(0)$ que cubren toda la frontera de $\mathcal{B}_\gamma(A)$, tenemos

$$\bigcup_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]} \sigma(B_{11}(0)) = \partial\mathcal{B}_\gamma(A). \quad (2.67)$$

Esto lo podemos usar de la siguiente manera. Tomamos un punto cualquiera z de la frontera de $\mathcal{B}(A)$. Como $\mathcal{B}(A)$ es la unión de un número finito de conjuntos cerrados $\mathcal{B}_\gamma(A)$, esto implica que hay al menos un ciclo γ de $\mathcal{C}(A)$, con $z \in \partial\mathcal{B}_\gamma(A)$.

Como el resultado (2.67) es válido para cualquier γ de $\mathcal{C}(A)$, entonces cada punto z de la frontera de $\mathcal{B}(A)$ es un autovalor de alguna matriz en $\overline{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$, es decir,

$$\partial\mathcal{B}(A) \subseteq \sigma(\overline{\omega}_{\mathcal{B}}(A)), \quad (2.68)$$

que es la primera contención deseada.

Para demostrar como los autovalores de las matrices de $\overline{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$ llenan $\mathcal{B}(A)$, vamos a modificar un poco la definición de la matriz $B(t)$ de (2.59).

Sean $\{\tau_i\}_{i=1}^p$ p números positivos tales que

$$0 < \tau_i \leq r_i(A) \quad (1 \leq i \leq p), \quad (2.69)$$

y sea $\tilde{B}(t) = [\tilde{b}_{ij}(t)] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz que tiene la misma forma particionada (2.60) que $B(t)$, con sus coeficientes definidos de la siguiente manera, utilizando los coeficientes $b_{ij}(t)$ de la matriz $B(t)$ definidos en (2.62).

$$\begin{cases} \tilde{b}_{ii}(t) = a_{ii} & \forall 1 \leq i \leq p, \\ |\tilde{b}_{ij}|(t) = \frac{\tau_i}{r_i(A)} \cdot |b_{ij}| & (j \neq i) \quad \forall 1 \leq i \leq p, t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.70)$$

Entonces, $\tilde{B}(t)$ y A tienen los mismos elementos diagonales. Las sumas de fila de $\tilde{B}(t)$ ahora satisfacen $r_j(\tilde{B}(t)) = \tau_j \quad \forall 1 \leq j \leq p$, y $0 \leq t \leq 1$, y $\tilde{B}(t)$ y A tienen los mismos ciclos $\forall 0 < t \leq 1$. Por lo tanto tenemos que $\tilde{B}(t) \in \hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A) \quad \forall 0 < t \leq 1$ y, en consecuencia, $\tilde{B}(0) \in \hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$.

Análogamente a (2.63), tenemos

$$\tilde{B}(0) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{B}_{11}(0) & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right],$$

con

$$\tilde{B}_{11}(0) = \begin{bmatrix} a_{11} & \tau_1 e^{i\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \tau_2 e^{i\theta_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p-1p-1} & \tau_{p-1} e^{i\theta_{p-1}} \\ r_p(A) e^{i\theta_p} & 0 & \cdots & 0 & a_{pp} \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Donde

$$\sigma(\tilde{B}(0)) = \sigma(\tilde{B}_{11}(0)) \cup \sigma(A_{22}). \quad (2.72)$$

De manera similar al caso anterior deducimos que cualquier autovalor λ de $\tilde{B}_{11}(0)$ en (2.71) satisface

$$\prod_{i=1}^p |\lambda - a_{ii}| = \prod_{i=1}^p \tau_i(A), \quad (2.73)$$

para cualquier elección de los números reales $\{\theta_j\}_{j=1}^p$ en $\tilde{B}_{11}(0)$.

Escribimos ahora $\tilde{B}_{11}(0) = \tilde{B}_{11}(0; \tau_1, \dots, \tau_p; \theta_1, \dots, \theta_p)$ para mostrar la dependencia de la matriz respecto de los parámetros τ_i y θ_i , pues $\{\tau_i\}_{i=1}^p$ son números cualesquiera satisfaciendo (2.69) y $\{\theta_i\}_{i=1}^p$ son números reales arbitrarios en $[0, 2\pi]$.

Tenemos el ciclo $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$, que por la definición de $\mathcal{B}_\gamma(A)$ en (2.35), podemos definirlo, para este caso, de manera equivalente como

$$\mathcal{B}_\gamma(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{j=1}^p |z - a_{i_j i_j}| \leq \prod_{i=1}^p \tilde{r}_{i_j}(A) \right\}. \quad (2.74)$$

Por tanto, por la definición de $\mathcal{B}_\gamma(A)$ en (2.74) y por las propiedades de la adherencia, tenemos que todos los autovalores de $\tilde{B}_{11}(0; \tau_1, \dots, \tau_p; \theta_1, \dots, \theta_p)$ llenan $\mathcal{B}_\gamma(A)$, es decir

$$\overline{\left\{ \bigcup_{\substack{\{0 < \tau_i \leq r_i(A)\}_{i=1}^p \\ \{\theta_i\}_{i=1}^p \in [0, 2\pi]}} \sigma(\tilde{B}_{11}(0; \tau_1, \dots, \tau_p; \theta_1, \dots, \theta_p)) \right\}} = \mathcal{B}_\gamma(A). \quad (2.75)$$

Como se cumple para cualquier γ de $\mathcal{C}(A)$ y $\tilde{B}(0) \in \bar{\omega}_B(A)$, tenemos que

$$\sigma(\bar{\omega}_B(A)) = \mathcal{B}(A),$$

como queríamos probar. \square

A continuación mostramos un resultado que compara los conjuntos de Brauer y de Brualdi de una matriz dada, en cuya demostración se hace uso de ideas muy similares a las ya utilizadas en el Teorema 2.5. En este, se establece que el conjunto de Brualdi es siempre un subconjunto de su asociado conjunto de Brauer.

Teorema 2.25. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces*

$$\mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{K}(A). \quad (2.76)$$

Demostración. Consideremos cualquier ciclo γ del conjunto de ciclos $\mathcal{C}(A)$.

Si γ es un ciclo débil, esto es $\gamma = (i)$ para algún $i \in N$, entonces $\mathcal{B}_\gamma(A) = \{a_{ii}\}$. Por otro lado, tenemos que el óvalo de Brauer-Cassini para cualquier $j \neq i$ es

$$K_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| \leq r_i(A) \cdot r_j(A)\}, \quad (2.77)$$

así que $a_{ii} \in K_{i,j}(A)$, luego $\mathcal{B}_\gamma(A) \subseteq K_{i,j}(A) \forall j \neq i$, y por tanto $\mathcal{B}_\gamma(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$.

Ahora supongamos que γ es un ciclo fuerte de $\mathcal{C}(A)$, donde tenemos que las sumas de fila $\{\tilde{r}_i(A)\}_{i=1}^n$ dadas por (2.34) para el caso reducible, y las sumas de fila originales $\{r_i(A)\}_{i=1}^n$, satisfacen

$$0 < \tilde{r}_i(A) \leq r_i(A) \quad \forall i \in \gamma, \quad (2.78)$$

y $\tilde{r}_i(A) = r_i(A) > 0 \forall i \in N$ si la matriz A es irreducible.

-Si el ciclo fuerte γ tiene longitud 2, es decir, $\gamma = (i_1 i_2)$, con $i_3 = i_1$, entonces se tiene que la lemniscata de Brualdi asociada es

$$\mathcal{B}_\gamma(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i_1 i_1}| \cdot |z - a_{i_2 i_2}| \leq \tilde{r}_{i_1}(A) \cdot \tilde{r}_{i_2}(A)\}.$$

Así pues de la desigualdad (2.78) y de la Definición 2.2, tenemos que $\mathcal{B}_\gamma(A) \subseteq \mathcal{K}_{i_1, i_2}(A)$.

-Si el ciclo fuerte γ tiene longitud $p > 2$, es decir, $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$ con $i_{p+1} = i_1$, y las nuevas sumas de fila asociadas, $\{\tilde{r}_{i_j}(A)\}_{j=1}^p$, son todas positivas, la lemniscata Brualdi asociada es

$$\mathcal{B}_\gamma(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{j=1}^p |z - a_{i_j i_j}| \leq \prod_{j=1}^p \tilde{r}_{i_j}(A) \right\}. \quad (2.79)$$

Sea z un punto de $\mathcal{B}_\gamma(A)$, si elevamos al cuadrado la desigualdad anterior, tenemos

$$|z - a_{i_1 i_1}|^2 \cdot |z - a_{i_2 i_2}|^2 \cdots |z - a_{i_p i_p}|^2 \leq \tilde{r}_{i_1}^2(A) \cdot \tilde{r}_{i_2}^2(A) \cdots \tilde{r}_{i_p}^2(A).$$

Como todos los $\tilde{r}_{i_j}(A)$ son positivos, podemos expresar la desigualdad anterior como

$$\left(\frac{|z - a_{i_1 i_1}| \cdot |z - a_{i_2 i_2}|}{\tilde{r}_{i_1}(A) \cdot \tilde{r}_{i_2}(A)} \right) \cdot \left(\frac{|z - a_{i_2 i_2}| \cdot |z - a_{i_3 i_3}|}{\tilde{r}_{i_2}(A) \cdot \tilde{r}_{i_3}(A)} \right) \cdots \left(\frac{|z - a_{i_p i_p}| \cdot |z - a_{i_1 i_1}|}{\tilde{r}_{i_p}(A) \cdot \tilde{r}_{i_1}(A)} \right) \leq 1, \quad (2.80)$$

de donde deducimos que al menos un factor debe ser menor o igual que la unidad, es decir, existe al menos un ℓ con $1 \leq \ell \leq p$ tal que

$$|z - a_{i_\ell i_\ell}| \cdot |z - a_{i_{\ell+1} i_{\ell+1}}| \leq \tilde{r}_{i_\ell}(A) \cdot \tilde{r}_{i_{\ell+1}}(A).$$

De nuevo, usando (2.6) y (2.78), tenemos que $z \in K_{i_\ell, i_{\ell+1}}(A)$.

Por tanto, como z es un punto de $\mathcal{B}_\gamma(A)$, se tiene que

$$\mathcal{B}_\gamma(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^p K_{i_j, i_{j+1}}(A) \quad (\text{donde } i_{p+1} = i_1).$$

De (2.37) y de la inclusión anterior, llegamos a

$$\mathcal{B}(A) := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{B}_\gamma(A) \subseteq \bigcup_{\substack{i, j \in N \\ i \neq j}} K_{i, j}(A) = \mathcal{K}(A),$$

que es lo que queríamos probar. \square

No podemos suprimir la hipótesis de que $n \geq 2$ pues al igual que en el Teorema 2.3, es necesario ponerla para definir correctamente el conjunto de Brauer.

Ejemplo 2.26. Para ilustrar el Teorema 2.25, consideremos de nuevo la matriz A de (1.21). Tenemos que el conjunto de Brualdi, $\mathcal{B}(A)$, está formado por dos lemniscatas de Brualdi (ver Figura 2.5), mientras que el conjunto de Brauer está formado por los 6 óvalos de Brauer-Cassini (ver Figura 2.1). Podemos observar en la Figura 2.9 que el conjunto de Brualdi está contenido en el conjunto de Brauer, es decir, $\mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$, como indica el Teorema 2.25.

Aunque para cualquier matriz $A = [a_{ij}]$ el conjunto de Brualdi esté contenido en el conjunto de Brauer, y tengamos por tanto un conjunto de inclusión más ajustado al espectro de A , el costo computacional para determinar todas las lemniscatas de Brualdi

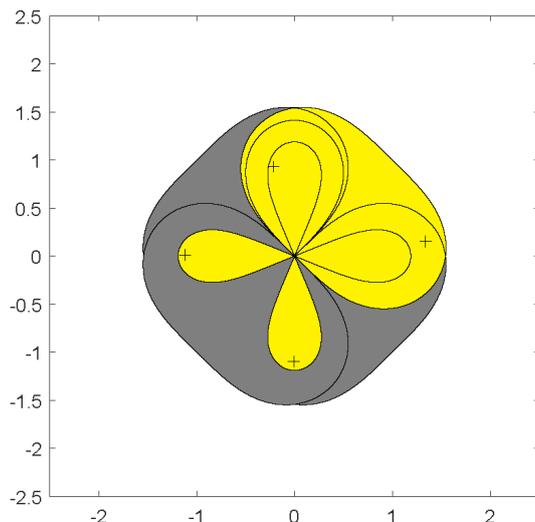


Figura 2.9: Conjunto de Brauer, $\mathcal{K}(A)$ y conjunto de Brualdi, $\mathcal{B}(A)$.

puede ser mucho mayor que el necesario para determinar los $\binom{n}{2}$ óvalos de Brauer-Cassini.

Por otro lado vamos a ver que el conjunto de Brualdi, en general, no es un subconjunto propio del conjunto de Brauer, para lo cual mostraremos que hay muchos casos en los que se da la igualdad del Teorema 2.25.

Consideremos para ello una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con $n \geq 2$ con todos los coeficientes no diagonales no nulos, lo cual implica que la matriz es irreducible. Definimos para $n \geq 2$ el conjunto de todos los ciclos de longitud al menos dos de $N = \{1, 2, \dots, n\}$ y lo denotamos por \mathcal{P}_n .

Es claro que cualquier ciclo fuerte γ de $\mathbb{G}(A)$ puede asociarse con un elemento de \mathcal{P}_n , $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$ con $2 \leq p \leq n$.

Para esta matriz A podemos considerar que cada óvalo de Brauer-Cassini $K_{i,j}$ ($i \neq j$) se corresponde con un ciclo de longitud 2 de \mathcal{P}_n , o mejor dicho con la correspondiente lemniscata de orden 2, que está en $\mathcal{B}(A)$; lo cual nos da que $\mathcal{K}(A) = \bigcup_{\substack{i,j \in N \\ i \neq j}} K_{i,j}(A) \subseteq \mathcal{B}(A)$,

que junto con la otra desigualdad dada por el Teorema 2.25 nos da la igualdad, $\mathcal{B}(A) = \mathcal{K}(A)$.

De este hecho, podemos concluir que para cualquier matriz con todos sus elementos no diagonales distintos de cero, es suficiente considerar la unión de los óvalos de Brauer-Cassini de A , en vez de la unión de todas las lemniscatas de Brualdi. Esto es una reducción muy notable en el costo computacional, pues si consideramos, por ejemplo, una matriz 9×9 , el número de óvalos de Brauer-Cassini que hay que determinar es $\binom{9}{2}$, mientras

que, como el número de elementos de \mathcal{P}_n , es $|\mathcal{P}_n| = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (k-1)!$, para determinar el

conjunto de Brualdi haría falta determinar $|\mathcal{P}_9| = \sum_{k=2}^9 \binom{9}{k} (k-1)! = 125664$ lemniscatas de Brualdi.

Por último, nos preguntamos si dada una matriz irreducible arbitraria, es posible construir el conjunto de Brualdi mediante la unión de un conjunto más reducido de lemniscatas de Brualdi.

Para ello tenemos que definir el conjunto de ciclos reducido, $\hat{\mathcal{C}}(A)$, para una matriz irreducible A , en el que se eliminan ciertos ciclos de orden superior de $\mathcal{C}(A)$, (y las correspondientes lemniscatas de Brualdi asociadas), pero de tal modo que $\bigcup_{\gamma \in \hat{\mathcal{C}}(A)} \mathcal{B}_\gamma(A) = \mathcal{B}(A)$.

Ahora queremos ver qué tiene que cumplirse para poder realizar dicha reducción de ciclos. Denotaremos por $V(\gamma)$ al conjunto de vértices de un ciclo $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$ de $\mathcal{C}(A)$, es decir, $V(\gamma) = \bigcup_{i=1}^p \{i_j\}$; donde observamos que todos los ciclos necesariamente tienen que ser fuertes, pues la matriz es irreducible.

Teorema 2.27. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, una matriz irreducible y $\mathcal{C}(A)$ su conjunto de ciclos, y sean $\{\gamma_j\}_{j=1}^s$, $s \geq 2$ ciclos tales que:*

$$i) V(\gamma_1) = \bigcup_{j=2}^s V(\gamma_j) \quad y$$

ii) existe un número entero positivo m tal que cada vértice de γ_1 aparece exactamente m veces en $\bigcup_{j=2}^s V(\gamma_j)$.

Entonces

$$\mathcal{B}_{\gamma_1}(A) \subseteq \bigcup_{j=2}^s \mathcal{B}_{\gamma_j}(A) \quad (2.81)$$

Demostración. Como A es irreducible por hipótesis, entonces tenemos que $r_i(A) > 0 \forall i \in N$. Podemos, por tanto, expresar para cualquier $\gamma \in \mathcal{C}(A)$ su lemniscata de Brualdi asociada como

$$\mathcal{B}_\gamma(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} \left(\frac{|z - a_{ii}|}{r_i(A)} \right) \leq 1 \right\}. \quad (2.82)$$

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, las hipótesis i) y ii) nos dan directamente que

$$\prod_{k \in \gamma_1} \left(\frac{|z - a_{kk}|}{r_k(A)} \right)^m = \prod_{j=2}^s \left(\prod_{k \in \gamma_j} \left(\frac{|z - a_{kk}|}{r_k(A)} \right) \right). \quad (2.83)$$

Por (2.82), para cualquier $z \in \mathcal{B}_{\gamma_1}(A)$, el producto de la izquierda de (2.83) es como máximo la unidad y en consecuencia, no todos los productos $\prod_{k \in \gamma_j} \left(\frac{|z - a_{kk}|}{r_k(A)} \right)$, para $2 \leq j \leq s$, de la derecha de (2.83), pueden exceder la unidad.

Por tanto, hay al menos un índice i con $2 \leq i \leq s$ tal que $\prod_{k \in \gamma_i} \left(\frac{|z - a_{kk}|}{r_k(A)} \right) \leq 1$, lo que

implica que $z \in \mathcal{B}_{\gamma_i}(A) \subseteq \bigcup_{j=2}^s \mathcal{B}_{\gamma_j}(A)$. □

Esto significa que si se cumplen las hipótesis del Teorema 2.27 podemos eliminar la lemniscata de Brualdi $\mathcal{B}_{\gamma_1}(A)$ del conjunto de Brualdi, y se sigue cumpliendo

$$\bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}(A) \setminus \gamma_1} \mathcal{B}_{\gamma}(A) = \mathcal{B}(A).$$

Además, como la longitud de un ciclo γ de $\mathcal{C}(A)$, coincide con el número de elementos de su conjunto de vértices $V(\gamma)$, obtenemos que generalmente eliminar γ_1 de $\mathcal{C}(A)$ es suprimir una lemniscata de Brualdi de orden superior de $\mathcal{B}(A)$, pues $\text{longitud}(\gamma_1) \geq \text{longitud}(\gamma_j)$ para cada $2 \leq j \leq s$.

Para concluir diremos que desde el punto de vista práctico, el conjunto de Brualdi puede ser más adecuado que el conjunto de Brauer o el conjunto de Gerschgorin, sólo en matrices irreducibles para las que el conjunto de ciclos $\mathcal{C}(A)$, o mejor, el conjunto de ciclos reducido, $\hat{\mathcal{C}}(A)$, tiene pocos elementos.

Capítulo 3

El conjunto mínimo de Gerschgorin

En este capítulo veremos el conjunto mínimo de Gerschgorin y lo relacionaremos con los conjuntos de inclusión de autovalores estudiados en los capítulos anteriores.

3.1. Definición del conjunto mínimo de Gerschgorin

Empezamos recordando que con las definiciones establecidas en (1.9) y (1.10) en la Sección 1.2, obteníamos el Corolario 1.6 que decía que

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A), \text{ para cualquier } \mathbf{x} > \mathbf{0} \text{ de } \mathbb{R}^n.$$

Como la relación anterior se cumple para todo $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n , tenemos además que

$$\sigma(A) \subseteq \bigcap_{\mathbf{x} > \mathbf{0}} \Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A). \quad (3.1)$$

Definición 3.1. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Se define el **conjunto mínimo de Gerschgorin de A** , $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$, como

$$\Gamma^{\mathcal{R}}(A) := \bigcap_{\mathbf{x} > \mathbf{0}} \Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A). \quad (3.2)$$

Este conjunto, que es un subconjunto de cada conjunto de Gerschgorin ponderado, $\Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A)$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n , vemos por (3.1), que proporciona un conjunto de inclusión del espectro de la matriz A , es decir, $\sigma(A) \subseteq \Gamma^{\mathcal{R}}(A)$.

A continuación, definimos dos conjuntos de matrices en $\mathbb{C}^{n \times n}$, cuyos autovalores van a estar contenidos en el conjunto mínimo de Gerschgorin de la matriz A .

Definición 3.2. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Definimos el **conjunto equimodular de A** , $\Omega(A)$, por

$$\Omega(A) := \left\{ B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{ii} = a_{ii} \text{ y } |b_{ij}| = |a_{ij}|, i \neq j; i, j \in N \right\}, \quad (3.3)$$

y el **conjunto equimodular extendido de A** , $\hat{\Omega}(A)$, por

$$\hat{\Omega}(A) := \left\{ B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{ii} = a_{ii} \text{ y } |b_{ij}| \leq |a_{ij}|, i \neq j; i, j \in N \right\}. \quad (3.4)$$

Se pueden observar varias cosas de esta definición. La primera de ellas es que para cualquier matriz B perteneciente a estos conjuntos se cumple que puesto que $r_i^{\mathbf{x}}(B) \leq r_i^{\mathbf{x}}(A)$, se tiene que $\Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(B) \subseteq \Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A)$ y, en consecuencia, el espectro de autovalores de la matriz B estará contenido en el conjunto mínimo de Gerschgorin de A . También vemos que estos conjuntos, $\Omega(A)$ y $\hat{\Omega}(A)$ son más restrictivos, que los conjuntos equiradial, $\omega(A)$, y equiradial extendido, $\hat{\omega}(A)$, respectivamente, definidos en (2.18) y (2.19). En efecto, si $B \in \Omega(A)$ (respectivamente $B \in \hat{\Omega}(A)$) entonces $r_i(B) = r_i(A)$ (respectivamente $r_i(B) \leq r_i(A)$) y, por tanto, $B \in \omega(A)$ (respectivamente $B \in \hat{\omega}(A)$). Sin embargo, las matrices pertenecientes al conjunto equiradial y al conjunto equiradial extendido pueden no cumplir que de manera individual cada elemento no diagonal de la matriz tenga el valor absoluto igual (respectivamente, menor o igual) que el correspondiente elemento no diagonal de la matriz A , por lo que en general no pertenecerán a $\Omega(A)$ (respectivamente a $\hat{\Omega}(A)$).

Utilizando una notación similar a (2.20), definimos

$$\sigma(\Omega(A)) := \bigcup_{B \in \Omega(A)} \sigma(B) \quad \text{y} \quad \sigma(\hat{\Omega}(A)) := \bigcup_{B \in \hat{\Omega}(A)} \sigma(B), \quad (3.5)$$

y tenemos por (3.1), (3.2) y (3.5) que

$$\sigma(\Omega(A)) \subseteq \sigma(\hat{\Omega}(A)) \subseteq \Gamma^{\mathcal{R}}(A). \quad (3.6)$$

Al igual que en los capítulos anteriores, vamos a estudiar a continuación lo ajustado de las inclusiones (3.6), al considerar los conjuntos infinitos de matrices definidos en (3.3) y (3.4).

Presentamos un resultado que es importante en relación con el conjunto equimodular, $\Omega(A)$.

Lema 3.3. Sean $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Se cumple que $r_i^{\mathbf{x}}(B) = r_i^{\mathbf{x}}(A) \forall i \in N$ y $\forall \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T > \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n si y solo si $|b_{ij}| = |a_{ij}| \forall i \neq j \in N$.

Demostración. La implicación inversa es trivial, pues si $|b_{ij}| = |a_{ij}| \forall i \neq j \in N$, entonces por definición de las sumas ponderadas de fila tenemos que $r_i^{\mathbf{x}}(B) = r_i^{\mathbf{x}}(A)$ para cualquier $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

Para probar la implicación directa, usamos el contrarrecíproco y suponemos que $|b_{ik}| \neq |a_{ik}|$ para algún $i \neq k, (i, k \in N)$. Vamos a buscar un vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T > \mathbf{0}$ que no cumpla la igualdad $r_i^{\mathbf{x}}(B) = r_i^{\mathbf{x}}(A)$. Para ello tomamos \mathbf{x} tal que $x_i = 1, x_k = 1$ y $x_j = \epsilon > 0 \forall j \neq i, j \neq k$. Por tanto tenemos que

$$r_i^{\mathbf{x}}(A) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| \frac{x_j}{x_i} = \sum_{j \in N \setminus \{i, k\}} |a_{ij}| \frac{x_j}{x_i} + |a_{ik}| \frac{x_k}{x_i} = \epsilon \cdot \sum_{j \in N \setminus \{i, k\}} |a_{ij}| + |a_{ik}|,$$

y que

$$r_i^{\mathbf{x}}(B) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |b_{ij}| \frac{x_j}{x_i} = \sum_{j \in N \setminus \{i, k\}} |b_{ij}| \frac{x_j}{x_i} + |b_{ik}| \frac{x_k}{x_i} = \epsilon \cdot \sum_{j \in N \setminus \{i, k\}} |b_{ij}| + |b_{ik}|.$$

Hacemos tender $\epsilon \rightarrow 0$ en ambas ecuaciones, lo que cancela ambas sumas y por tanto nos queda que $r_i^{\mathbf{x}}(A) = |a_{ik}|$ y $r_i^{\mathbf{x}}(B) = |b_{ik}|$. Como ambos módulos por hipótesis son distintos, tenemos $r_i^{\mathbf{x}}(A) \neq r_i^{\mathbf{x}}(B)$, como queríamos probar. \square

Gracias a este Lema 3.3, observamos que para definir una matriz $B \in \Omega(A)$, solo podemos modificar los elementos no diagonales no nulos de la matriz A multiplicando cada uno de ellos por un factor $e^{i\theta}$. Esto supone una mayor restricción, que se traduce en un resultado de inclusión de autovalores más estricto, que analizamos a continuación. Para analizar las matrices de $\Omega(A)$ ahora vamos a utilizar herramientas diferentes a las que hemos usado en otros capítulos. Cambiaremos la teoría de grafos dirigidos por la teoría de Perron-Frobenius para matrices no negativas [3].

Para ello, empezaremos tomando una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, fijando un número complejo z y definiendo la matriz $M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como

$$m_{ii} = -|z - a_{ii}|, \quad m_{ij} = |a_{ij}| \quad i \neq j \in N. \quad (3.7)$$

Es evidente que M depende de la matriz A y del valor z y que los elementos no diagonales de M son no negativos.

Definimos ahora la matriz $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cuyos coeficientes vienen dados por

$$b_{ii} = \mu - |z - a_{ii}|, \quad b_{ij} = |a_{ij}| \quad i \neq j \in N, \quad (3.8)$$

con

$$\mu := \max \{|z - a_{ii}| : i \in N\}. \quad (3.9)$$

Vemos que $B > \mathbf{0}$, es decir, solo tiene coeficientes no negativos y además podemos expresar la matriz M en función del valor μ y de la matriz B como

$$M = -\mu I_n + B, \quad (3.10)$$

viendo así, que los autovalores de la matriz M son simplemente los autovalores de la matriz B desplazados todos ellos por $-\mu$.

Utilizando la teoría de Perron-Frobenius para matrices no negativas, tenemos que la matriz M , que denotamos también por $M(z)$, para ver mejor que hay dependencia de esta matriz con el valor z , tiene un autovalor real $\nu(z)$ tal que

$$\operatorname{Re} \lambda \leq \nu(z), \quad (3.11)$$

para cualquier $\lambda \in \sigma(M(z))$ (ver Teorema 2.7 de [3]).

También tenemos que a este autovalor $\nu(z)$ le corresponde un autovector $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^{n \times n}$ no nulo, es decir,

$$M \mathbf{y} = \nu(z) \mathbf{y}, \quad \text{donde } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Además, este autovalor puede ser caracterizado como

$$\nu(z) = \inf_{\mathbf{x} > \mathbf{0}} \left\{ \max_{i \in N} [(M \mathbf{x})_i / x_i] \right\}. \quad (3.13)$$

Por (3.7), podemos escribir lo que está dentro de los corchetes en (3.13) como

$$(M \mathbf{x})_i / x_i = r_i^{\mathbf{x}}(A) - |z - a_{ii}|, \quad \text{para cualquier } i \in N \text{ y } \mathbf{x} > \mathbf{0} \text{ de } \mathbb{R}^n. \quad (3.14)$$

Además, todos los coeficientes de la matriz M son continuos en la variable z y en consecuencia $\nu(z)$, como autovalor de M , es también una función continua de z .

El siguiente resultado muestra la relación existente entre los puntos z del conjunto mínimo de Gerschgorin, $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$, y el autovalor $\nu(z)$ de la matriz $M(z)$ asociada.

Proposición 3.4. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Entonces

$$z \in \Gamma^{\mathcal{R}}(A) \Leftrightarrow \nu(z) \geq 0 \quad (3.15)$$

Demostración. Supongamos que z es un punto arbitrario del conjunto mínimo de Gerschgorin de la matriz A , es decir, que $z \in \Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A)$ para cada $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, para cada $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, existe al menos un índice $i \in N$, (siendo este índice dependiente de \mathbf{x}), tal que $|z - a_{ii}| \leq r_i^{\mathbf{x}}(A)$, o lo que es lo mismo, $r_i^{\mathbf{x}}(A) - |z - a_{ii}| \geq 0$. Pero esto significa por (3.14) que para este índice i se tiene $(M\mathbf{x})_i/x_i \geq 0$. Por lo tanto $\max_{i \in N} [(M\mathbf{x})_i/x_i] \geq 0$ para cada $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, que implica por (3.13) que $\nu(z) \geq 0$.

Para ver el recíproco, supongamos que $\nu(z) \geq 0$. Entonces para cada $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n tenemos de (3.13) que hay al menos un índice $i \in N$, dependiente de \mathbf{x} , tal que $0 \leq \nu(z) \leq (M\mathbf{x})_i/x_i = r_i^{\mathbf{x}}(A) - |z - a_{ii}|$, lo que implica que $|z - a_{ii}| \leq r_i^{\mathbf{x}}(A)$. En consecuencia, $z \in \Gamma_i^{r^{\mathbf{x}}}(A)$ y por tanto $z \in \Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A)$. Como esta inclusión se cumple para cada $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, entonces $z \in \Gamma^{\mathcal{R}}(A)$ como queríamos probar. \square

Si en el plano complejo extendido \mathbb{C}_∞ denotamos por $\partial\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$ la frontera de $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$, definida por $\partial\Gamma^{\mathcal{R}}(A) := \overline{\Gamma^{\mathcal{R}}(A)} \cap \overline{(\Gamma^{\mathcal{R}}(A))^C} = \Gamma^{\mathcal{R}}(A) \cap \overline{(\Gamma^{\mathcal{R}}(A))^C}$, (pues $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$ es un conjunto compacto de \mathbb{C} , y, por tanto, cerrado).

La Proposición 3.4 es equivalente a mostrar que $z \in (\Gamma^{\mathcal{R}}(A))^C \Leftrightarrow \nu(z) < 0$. Gracias a esto y a la continuidad de la función $\nu(z)$ con respecto a z , obtenemos

$$z \in \partial\Gamma^{\mathcal{R}}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} i) \nu(z) = 0 \text{ y} \\ ii) \text{ existe una sucesión de números complejos } \{z_j\}_{j=1}^\infty \text{ con } \lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z, \\ \text{para los que } \nu(z_j) < 0 \forall j \geq 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Establecemos a continuación el siguiente resultado.

Teorema 3.5. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que $\nu(z) = 0$. Existe una matriz $B = [b_{ij}] \in \Omega(A)$ tal que z es un autovalor suyo. En particular, se cumple que

$$\partial\Gamma^{\mathcal{R}}(A) \subseteq \sigma(\Omega(A)) \subseteq \sigma(\hat{\Omega}(A)) \subseteq \Gamma^{\mathcal{R}}(A). \quad (3.17)$$

Demostración. Si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $\nu(z) = 0$, entonces por (3.12), existe un vector $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ de \mathbb{R}^n no nulo tal que $M\mathbf{w} = \mathbf{0}$ o lo que es lo mismo,

$$\sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| w_j = |z - a_{kk}| w_k \quad \forall k \in N. \quad (3.18)$$

Sean $\{\theta_j\}_{j=1}^n$ n números reales tales que

$$z - a_{kk} = |z - a_{kk}| e^{i\theta_k} \quad \forall k \in N. \quad (3.19)$$

A partir de estos, definimos la matriz $B = [b_{kj}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ cuyos coeficientes vienen dados por

$$b_{kk} = a_{kk} \text{ y } b_{kj} = |a_{kj}| e^{i\theta_k} \text{ para } k \neq j \in N. \quad (3.20)$$

Es claro que $B \in \Omega(A)$. Gracias a esto tenemos que

$$(B \mathbf{w})_k = \sum_{j \in N} b_{kj} w_j = a_{kk} w_k + e^{i\theta_k} \left(\sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| w_j \right) \quad k \in N.$$

Despejando a_{kk} de la ecuación (3.19) y sustituyéndolo en la anterior, obtenemos

$$(B \mathbf{w})_k = z w_k + e^{i\theta_k} \left(-|z - a_{kk}| w_k + \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| w_j \right) \quad k \in N.$$

Los términos del paréntesis son cero por (3.18) $\forall k \in N$, luego las n ecuaciones anteriores pueden ser expresadas en forma matricial como

$$B \mathbf{w} = z \mathbf{w}.$$

Como $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, entonces z es un autovalor de la matriz B , y como $B \in \Omega(A)$, llegamos a que $z \in \sigma(\Omega(A))$.

Como cada punto $z \in \partial\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$ satisface $\nu(z) = 0$ por (3.16 i)), entonces $\partial\Gamma^{\mathcal{R}}(A) \subseteq \sigma(\Omega(A))$ como queríamos ver. \square

Observamos que este teorema se cumple para cualquier matriz A , sin que necesitemos la hipótesis de que la matriz sea irreducible. Para entender bien por qué la inclusión (3.17) es válida también para matrices reducibles, supongamos que la matriz A , con $n \geq 2$ es reducible y es de la forma

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \mathbf{0} & A_{22} \end{array} \right], \quad \text{con } A_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m}, A_{22} \in \mathbb{C}^{(n-m) \times (n-m)} \text{ y } 1 \leq m \leq n.$$

Esto implica que $\sigma(A) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{22})$, o lo que es lo mismo, los autovalores de la matriz A no dependen de la submatriz A_{12} . Los coeficientes de A_{12} sin embargo, si que afectan a los radios ponderados de los m primeros discos de Gerschgorin, $r_i^{\mathbf{x}}(A)$, para $1 \leq i \leq m$, pues

$$r_i^{\mathbf{x}}(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| \frac{x_j}{x_i} + \sum_{j=m+1}^n |a_{ij}| \frac{x_j}{x_i} \quad (1 \leq i \leq m). \quad (3.21)$$

Como en la definición del conjunto mínimo de Gerschgorin (y, por tanto, de su frontera $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$) la intersección se hace sobre todos los vectores $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, podemos tomar en particular un vector $\tilde{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$ tal que sus componentes $\tilde{x}_{m+1}, \dots, \tilde{x}_n$ sean arbitrariamente pequeñas aunque positivas y sus componentes $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$ sean muy grandes, lo que hará que la última suma en (3.21) pueda ser arbitrariamente pequeña, por lo que es como si estuviéramos en el caso de dos matrices irreducibles, en este caso A_{11} y A_{22} .

Para finalizar esta sección presentamos un último resultado que establece que $\sigma(\hat{\Omega}(A))$ llena totalmente $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$.

Teorema 3.6. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces*

$$\sigma(\hat{\Omega}(A)) = \Gamma^{\mathcal{R}}(A). \quad (3.22)$$

Demostración. Ya sabemos del Teorema 3.5 que $\sigma(\hat{\Omega}(A)) \subseteq \Gamma^{\mathcal{R}}(A)$, por lo que sólo tenemos que probar la otra contención. Para ello, fijemos un punto $z \in \Gamma^{\mathcal{R}}(A)$, lo que por la Proposición 3.4 implica que $\nu(z) \geq 0$. Por (3.12), existe un vector $\mathbf{w} \geq 0$ de \mathbb{R}^n no nulo tal que $M \mathbf{w} = \nu(z) \mathbf{w}$. Esta última expresión es equivalente a

$$\sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| w_j = [|z - a_{kk}| + \nu(z)] w_k, \quad k \in N. \quad (3.23)$$

Definimos a continuación la matriz $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ de la siguiente forma

$$b_{kk} = a_{kk} \text{ y } b_{kj} = \mu_k a_{kj} \text{ para } k \neq j \in N, \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{cases} \mu_k := \frac{\sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| w_j - \nu(z) w_k}{\sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| w_j}, & \text{si } \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| w_j > 0, \\ \mu_k := 1, & \text{si } \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| w_j = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Por (3.23), (3.25) y el hecho de que $|z - a_{kk}| w_k \geq 0$ y $\nu(z) w_k \geq 0$ se cumpla $\forall k \in N$ tenemos que $0 \leq \mu_k \leq 1 \forall k \in N$, y por (3.24) concluimos que $B \in \hat{\Omega}(A)$ pues se satisfacen las condiciones (3.4).

Por otro lado, podemos verificar por las ecuaciones (3.23), (3.24) y (3.25), que para todo $k \in N$,

$$|z - b_{kk}| w_k = |z - a_{kk}| w_k = \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| w_j - \nu(z) w_k = \mu_k \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| w_j = \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |b_{kj}| w_j.$$

Esta expresión anterior es exactamente de la misma forma que (3.18) en la demostración del Teorema 3.5 pero para la matriz B . Usando la misma prueba que allí, mostramos que existe una matriz $M = [m_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, tal que $M \in \Omega(B)$, con $z \in \sigma(M)$.

En conclusión, como $M \in \Omega(B)$ y $B \in \hat{\Omega}(A)$, entonces $M \in \hat{\Omega}(A)$, lo que prueba que $z \in \sigma(\hat{\Omega}(A))$. □

3.2. Comparación del Conjunto mínimo de Gerschgorin y el conjunto de Brualdi

En esta sección compararemos el conjunto de Brualdi, $\mathcal{B}(A)$, con el conjunto mínimo de Gerschgorin, $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$.

Para ello empezamos con el siguiente resultado.

Lema 3.7. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces*

$$\hat{\Omega}(A) \subseteq \overline{\omega}_{\mathcal{B}}(A). \quad (3.26)$$

Demostración. Vamos a separar la demostración en tres casos. Veamos primero el caso en que A es irreducible y $n \geq 2$. Esto implica que $r_i(A) > 0 \forall i \in N$.

Sea $B = [b_{ij}] \in \hat{\Omega}(A)$, entonces

$$b_{ii} = a_{ii} \quad \forall i \in N \text{ y } 0 \leq |b_{ij}| \leq |a_{ij}| \quad \forall i \neq j \in N. \quad (3.27)$$

Definimos ahora el conjunto

$$S_i := \{j \in N : j \neq i \text{ y } |a_{ij}| > 0\} \quad i \in N, \quad (3.28)$$

que es distinto del vacío para todos los índices $i \in N$ por ser la matriz A irreducible.

Si existe un $j \in S_i(A)$ para el que $b_{ij} = 0$, se tiene que

$$r_i(B) < r_i(A). \quad (3.29)$$

Sea ahora $\epsilon > 0$ y reemplacemos este (i, j) -ésimo elemento nulo de la matriz B por cualquier número, cuyo módulo sea ϵ , y hagamos lo mismo para todos los índices $k \in S_i(A)$ para los que $b_{ik} = 0$, dejando los demás elementos de la fila i -ésima de B sin cambiar. Al hacer esto para todas las filas de B , creamos la matriz $B(\epsilon) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, cuyos coeficientes son continuos en función del parámetro ϵ y para la cuál el conjunto de ciclos de $B(\epsilon)$, $\mathcal{C}(B(\epsilon))$, es el mismo que el conjunto de ciclos de la matriz A , $\mathcal{C}(A)$, para cada $\epsilon > 0$.

Además para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, se tiene de la desigualdad estricta (3.29), que si para algún $j \in S_i(A)$ se tiene $b_{ij} = 0$, entonces

$$r_i(B(\epsilon)) < r_i(A) \quad \forall i \in N. \quad (3.30)$$

En consecuencia tenemos que $B(\epsilon) \in \hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$, $\forall \epsilon > 0$ suficientemente pequeño. De (2.54), vemos que $B(0) = B \in \bar{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$, y como esto es válido para cualquier $B \in \hat{\Omega}(A)$, la inclusión (3.26) es válida para el caso irreducible.

Para el caso $n = 1$, se da la igualdad en (3.26) por definición.

Por último, supongamos que la matriz A es reducible, $n \geq 2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos además que A está en la forma normal reducida (1.19). Entonces, la construcción anterior, para el caso irreducible, puede ser aplicada ahora a las submatrices R_{jj} del caso (1.20 i)), mientras que el caso restante de (1.20 ii)) es inmediato como el caso $n = 1$ anterior, lo que completa la prueba. \square

Gracias al Lema 3.7, el siguiente resultado, que justifica que el calificativo "mínimo" es muy apropiado para el conjunto $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$, tiene una prueba sencilla.

Teorema 3.8. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces*

$$\Gamma^{\mathcal{R}}(A) \subseteq \mathcal{B}(A). \quad (3.31)$$

Demostración. Sabemos del Teorema 3.6 que $\Gamma^{\mathcal{R}}(A) = \sigma(\hat{\Omega}(A))$.

Como $\hat{\Omega}(A) \subseteq \bar{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$, por el Lema 3.7, tenemos $\sigma(\hat{\Omega}(A)) \subseteq \sigma(\bar{\omega}_{\mathcal{B}}(A))$. Además, del Teorema 2.24 sabemos que $\mathcal{B}(A) = \sigma(\bar{\omega}_{\mathcal{B}}(A))$, de donde concluimos $\Gamma^{\mathcal{R}}(A) \subseteq \mathcal{B}(A)$ como queríamos probar. \square

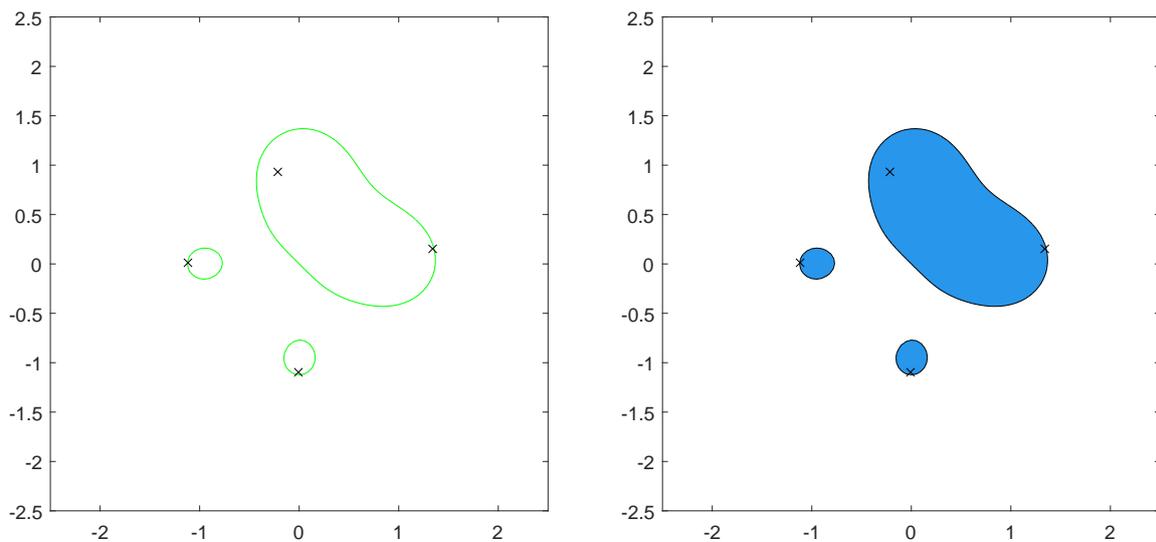


Figura 3.1: Conjunto mínimo de Gerschgorin de A , $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$.

Ejemplo 3.9. Para ilustrar el Teorema 3.8, consideramos la matriz A de (1.21), y calculamos el conjunto mínimo de Gerschgorin de A , $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$, cuya frontera viene dada por

$$\partial\Gamma^{\mathcal{R}}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z^4 - 1| = \frac{1}{2} (|z + 1| \cdot |z + i|) + \frac{1}{2} \right\}.$$

Vemos en la Figura 3.1 que dicho conjunto está formado por tres componentes conexas disjuntas cuya frontera se ha coloreado en verde.

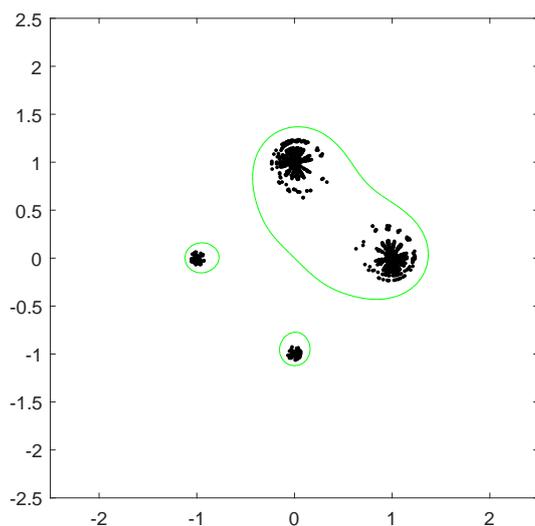


Figura 3.2: Autovalores de matrices aleatorias $F \in \hat{\Omega}(A)$.

A continuación, por (3.4), tenemos que cualquier matriz $F \in \hat{\Omega}(A)$ es de la forma

$$F := \begin{bmatrix} 1 & \tau_1 e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ \frac{\tau_2 e^{i\theta_2}}{2} & i & \frac{\tau_3 e^{i\theta_3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \tau_4 e^{i\theta_4} \\ \tau_5 e^{i\theta_5} & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

donde $0 \leq \tau_i \leq 1$ y $0 \leq \theta_i \leq 2\pi \forall 1 \leq i \leq 5$

Hemos generado valores aleatorios de $\{\tau_i\}_{i=1}^5 \in [0, 1]$ y de $\{\theta_i\}_{i=1}^5 \in [0, 2\pi)$ en la matriz F , y hemos calculado numéricamente los autovalores de dichas matrices. Estos autovalores se han dibujado en la Figura 3.2, y aunque no se llega a ilustrar el resultado recogido en el Teorema 3.6, si que se observa que con los autovalores de las matrices F se va llenando una parte de $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$.

En la Figura 3.3, se muestran el conjunto de Brualdi y el conjunto mínimo de Gerschgorin, y se ve como $\Gamma^{\mathcal{R}}(A) \subsetneq \mathcal{B}(A)$.

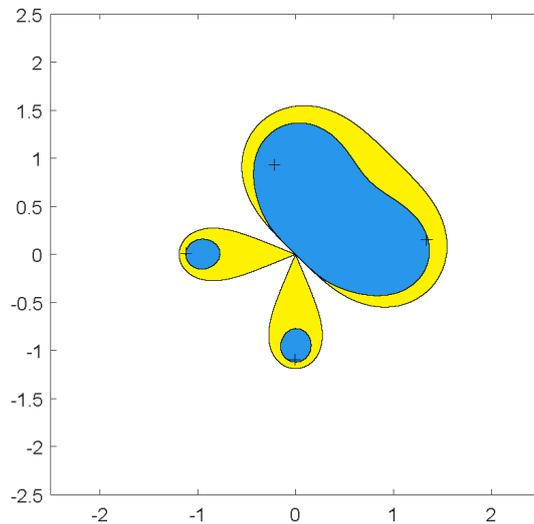


Figura 3.3: Conjunto mínimo de Gerschgorin, $\Gamma^{\mathcal{R}}(A)$, en color azul y conjunto de Brualdi, $\mathcal{B}(A)$, en color amarillo.

Esto se tiene por el hecho de que cada matriz F de (3.32) es necesariamente una matriz H de (2.52), pero no a la inversa.

Este resultado anterior parece contradictorio a primera vista con las inclusiones vistas en los capítulos anteriores:

$$\mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{K}(A) \subseteq \Gamma(A). \quad (3.33)$$

Sin embargo, estos conjuntos no dependen de las sumas de fila ponderadas.

Para concluir esta sección, definimos la versión de sumas de fila ponderadas para los óvalos de Brauer-Cassini y para las lemniscatas de Brualdi.

Definición 3.10. Dado $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ no nulo, definimos

$$K_{i,j}^{r^{\mathbf{x}}}(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| \leq r_i^{\mathbf{x}}(A) \cdot r_j^{\mathbf{x}}(A) \right\}, \quad \text{donde } i \neq j \in N, \quad (3.34)$$

y

$$\mathcal{K}^{r^{\mathbf{x}}}(A) := \bigcup_{i,j \in N} K_{i,j}^{r^{\mathbf{x}}}(A). \quad (3.35)$$

Sea ahora, $\gamma \in \mathcal{C}(A)$ un ciclo de $\mathbb{G}(A)$, definimos

$$\mathcal{B}_\gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} |z - a_{ii}| \leq \prod_{i \in \gamma} r_i^{\mathbf{x}}(A) \right\}, \quad (3.36)$$

y

$$\mathcal{B}^{r^{\mathbf{x}}}(A) := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{B}_\gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A). \quad (3.37)$$

Además definimos

$$\mathcal{B}^{\mathcal{R}}(A) := \bigcap_{\mathbf{x} > \mathbf{0}} \mathcal{B}^{r^{\mathbf{x}}}(A) \text{ y } \mathcal{K}^{\mathcal{R}}(A) := \bigcap_{\mathbf{x} > \mathbf{0}} \mathcal{K}^{r^{\mathbf{x}}}(A). \quad (3.38)$$

De estas definiciones, tenemos el siguiente resultado, que puede parecer sorprendente.

Teorema 3.11. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Entonces

$$\Gamma^{\mathcal{R}}(A) = \mathcal{B}^{\mathcal{R}}(A) = \mathcal{K}^{\mathcal{R}}(A). \quad (3.39)$$

Demostración. Sea X una matriz diagonal tal que $X = \text{diag}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, con $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T > \mathbf{0}$. Aplicando las inclusiones (3.33) a la matriz $X^{-1}AX$, tenemos que

$$\mathcal{B}^{r^{\mathbf{x}}}(A) \subseteq \mathcal{K}^{r^{\mathbf{x}}}(A) \subseteq \Gamma^{r^{\mathbf{x}}}(A), \quad \text{para cualquier } \mathbf{x} > \mathbf{0}.$$

Como es para cualquier $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, de (3.38) tenemos que

$$\mathcal{B}^{\mathcal{R}}(A) \subseteq \mathcal{K}^{\mathcal{R}}(A) \subseteq \Gamma^{\mathcal{R}}(A). \quad (3.40)$$

Del Teorema 3.8 aplicado a la matriz $X^{-1}AX$, junto con la Definición 3.10, tenemos que

$$\Gamma^{\mathcal{R}}(X^{-1}AX) \subseteq \mathcal{B}(X^{-1}AX) = \mathcal{B}^{r^{\mathbf{x}}}(A) \quad \text{para cualquier } \mathbf{x} > \mathbf{0}.$$

Además tenemos que $\Gamma^{\mathcal{R}}(X^{-1}AX) = \Gamma^{\mathcal{R}}(A)$ para cualquier $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, luego $\Gamma^{\mathcal{R}}(A) \subseteq \mathcal{B}^{r^{\mathbf{x}}}(A) \forall \mathbf{x} > \mathbf{0}$, lo que implica $\Gamma^{\mathcal{R}}(A) \subseteq \mathcal{B}^{\mathcal{R}}(A)$.

Por tanto de esta última contención y de (3.40), tenemos $\Gamma^{\mathcal{R}}(A) = \mathcal{B}^{\mathcal{R}}(A) = \mathcal{K}^{\mathcal{R}}(A)$, que es lo que queríamos probar. \square

Bibliografía

- [1] R.S. VARGA, *Gersgorin and His Circles*, Springer Series in Computational Mathematics (2004).
- [2] R.S. VARGA, *Gersgorin-Type Eigenvalue Inclusion Theorems and Their Sharpness*, Electron. Trans. Numer. Anal. **12**, 113-133 (2001).
- [3] R.S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Second Edition, Springer Series in Computational Mathematics (2000).