



Universidad de Valladolid

Facultad de Educación de Segovia

Grado de Educación Primaria
Trabajo de Fin de Grado

LA MEDIDA Y SU DIDÁCTICA. PROPUESTA PARA FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA



Autor: Juan Fraile González

Tutores: Juan José Santa Engracia de Pedro y Belén Palop del Río

RESUMEN

El presente Trabajo de Fin de Grado proporciona una propuesta didáctica para la docencia en el Grado de Educación Primaria. Para su desarrollo, se parte del conocimiento profundo del trabajo de Maestro en Educación Primaria y se analiza, desde una perspectiva de la docencia universitaria, cómo desarrollar en los futuros maestros las competencias que necesitarán para diseñar procesos de enseñanza-aprendizaje para la adquisición en el alumnado de Educación Primaria del Sentido de la Medida, uno de los seis sentidos reflejados en la LOMLOE. Esta propuesta nos anclamos en el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* para trabajar, al mismo tiempo, el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido.

PALABRAS CLAVE: Didáctica de las matemáticas, Sentido de la medida, Educación Primaria.

ABSTRACT

This Final Degree Project provides a didactic proposal for teaching in the Primary Education Degree. For its development, it is based on the deep knowledge of the work of Teacher in Primary Education and it is analyzed, from a university teaching perspective, how to develop in future teachers the competences that they will need to design teaching-learning processes for the acquisition in the Primary Education students of the Sense of Measurement, one of the six senses reflected in the LOMLOE. This proposal is anchored in the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model to work, at the same time, mathematical knowledge and didactic content knowledge.

KEY WORDS: Mathematics Education, Primary school mathematics, Measurement.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	4
2. OBJETIVOS DEL TFG.....	5
3. JUSTIFICACIÓN DE LA TEMÁTICA.....	6
3.1 RELEVANCIA DEL TEMA	6
3.2 JUSTIFICACIÓN EN RELACIÓN CON LAS COMPETENCIAS DEL TÍTULO ..	7
4. MARCO TEÓRICO.....	9
4.1 EL PERFIL DEL DOCENTE	9
4.1.1 Modelo MTSK.....	9
4.1.2 El profesor en la educación matemática.....	12
4.2 BASES PEDAGÓGICAS	13
4.3 DOCENCIA UNIVERSITARIA	16
4.3.1 <i>Flipped classroom</i>	16
4.3.2 Evaluación formativa.....	19
4.4 DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA	20
5. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN.....	21
5.1 CONTEXTO	21
5.2 JUSTIFICACIÓN	22
5.3 COMPETENCIAS.....	23
5.4 OBJETIVOS	24
5.5 METODOLOGÍA.....	25
5.6 DESARROLLO DE LAS SESIONES	26
Sesión 1.....	26
Sesión 2.....	31
Sesión 3.....	35
Sesión 4.....	39
5.7 EVALUACIÓN.....	42
5.8 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD	43
6. CONCLUSIONES.....	44
7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46
8. ANEXOS	50
8.1 ANEXO 1: TEST DE EVALUACIÓN INICIAL.....	50
8.2 ANEXO 2: TEXTO SOBRE MEDIDA.....	51
8.3 ANEXO 3: MATERIALES MANIPULATIVOS PARA EL AULA	51
8.4 ANEXO 4: HOJA CON EJERCICIOS.....	52

8.5 ANEXO 5: TEXTO SOBRE EL USO DE INSTRUMENTOS DE MEDIDA.....	54
8.6 ANEXO 6: TEST PARA LA SESIÓN 2	55
8.7 ANEXO 7: TEST PARA LA SESIÓN 3	57
8.8 ANEXO 8: PRUEBA DE EVALUACIÓN	59

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	26
Tabla 2	31
Tabla 3	35
Tabla 4	39

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.....	9
Figura 2.....	28
Figura 3.....	28
Figura 4.....	29
Figura 5.....	34
Figura 6.....	38
Figura 7.....	41
Figura 8.....	51

1. INTRODUCCIÓN

Las personas realizamos mediciones todos los días en distintos ámbitos de nuestra vida. Calculamos el tiempo que tardamos en llegar al trabajo, la distancia que separa nuestra ciudad de la casa de la playa donde pasamos las vacaciones, el volumen de agua que necesitamos añadir cuando cocinamos o el peso de la carne que compramos en la carnicería. Las matemáticas se han utilizado desde hace milenios para efectuar cálculos y estimaciones de la medida de la longitud, la superficie, la masa o el volumen de objetos que forman parte de la vida cotidiana. En la era digital es de especial relevancia considerar la importancia de fomentar una alfabetización matemática mediante el desarrollo de nuevos métodos de enseñanza y aprendizaje (Kilpatrick, 2001). Esta necesidad de lograr una alfabetización matemática se evidencia al tratar un tema tan presente en la vida real como es la medida de las cosas.

De hecho, este tema tan vasto representa un bloque único en el currículo del área de matemáticas de Educación Primaria. Al haber cursado una asignatura en la que se han trabajado los contenidos correspondientes a dicho bloque del currículo, así como su didáctica, he podido observar las dificultades que afronta el alumnado para adquirir las competencias docentes necesarias en este campo. Parte del alumnado carece de la formación matemática previa necesaria para lograr las competencias de forma satisfactoria. También se ha señalado la falta de interés y motivación hacia las matemáticas, e incluso ansiedad por afrontar una asignatura con la que no logra descubrir el placer y la belleza de las matemáticas. Sin embargo, es complicado que un docente pueda llegar a enseñar bien matemáticas si no se ha sentido cómodo durante su etapa de estudiante (Fernández et al., 2020).

Por todo lo anterior, el presente Trabajo de Fin de Grado (TFG) expone una propuesta educativa para trabajar el bloque de Medida del área de Matemáticas con estudiantes del grado de Educación Primaria, específicamente para las magnitudes de longitud, superficie y volumen. La propuesta parte de una exploración del rol del docente de matemáticas y de las distintas dimensiones que este debe poseer para poder realizar una práctica educativa completa. Se continúa con la presentación de cuestiones pedagógicas fundamentales para llegar a plantear una metodología de enseñanza adecuada a las características del alumnado de la etapa universitaria. Con ello, se pretende proporcionar una propuesta educativa coherente con los fundamentos de la didáctica de la matemática,

que permita al estudiante desarrollar una alfabetización matemática y adquirir las competencias necesarias para ayudar a otros a lograrla.

2. OBJETIVOS DEL TFG

Los objetivos del presente TFG se han dividido en tres tipos diferentes: los objetivos personales, los prácticos y los personales, siguiendo el planteamiento de Maxwell (2008). Los objetivos personales son aquellos que motivan al propio investigador para la realización de la investigación o el trabajo, es decir, este TFG son los siguientes:

1. Profundizar en las investigaciones desde el área de didáctica de la matemática sobre la enseñanza de la medida, en particular, longitud, superficie y volumen.
2. Comprender con profundidad el proceso formativo de un docente.
3. Ser capaz de elaborar una propuesta didáctica para este nivel educativo.

En cuanto a los objetivos prácticos, son aquellos enfocados a lograr un fin, tal como puede ser transformar una situación, o cubrir una necesidad. En este TFG se plantean los siguientes:

1. Crear una propuesta didáctica fundamentada en la literatura para estudiantes de los Grados en Educación Primaria en la que, al mismo tiempo que el alumno desarrolla su competencia matemática, también desarrolle su competencia didáctica para trabajar en el aula las magnitudes de longitud, superficie y volumen.
2. Diseñar actividades en las que el alumnado adquiera las competencias necesarias para impartir la docencia de las magnitudes de longitud, superficie y volumen en aulas de Educación Primaria según el modelo MTSK, cuya definición veremos más adelante.

Por último, los objetivos intelectuales están orientados hacia el entendimiento profundo de los fenómenos estudiados. En este TFG se plantean los siguientes:

1. Investigar cómo se puede abordar la elaboración de una propuesta didáctica sólida desde la perspectiva de las dimensiones que conforman el modelo MTSK.
2. Discriminar las metodologías educativas que facilitan el aprendizaje de las medidas de longitud, superficie y volumen en alumnos universitarios de aquellas que conviene utilizar en alumnos de Educación Primaria.

3. JUSTIFICACIÓN DE LA TEMÁTICA

3.1 RELEVANCIA DEL TEMA

Las sociedades del siglo XXI requieren, por sus características tecnológicas, que cada ciudadano tenga una cultura matemática suficiente, especialmente por sus propiedades formativas y por las capacidades que permiten desarrollar, tanto a nivel racional como en lo que respecta a la capacidad de entender y transformar la realidad (Brousseau, 2000). Las matemáticas son una parte esencial de la vida real y adquirir una base sólida en esta materia puede ser beneficiosa para desempeñar tareas de diversa índole. Se ha señalado que una persona que logra resolver problemas matemáticos siguiendo los razonamientos necesarios para encontrar la respuesta, y que además es capaz de disfrutar del proceso analítico y abstracto, es una persona que está preparada para afrontar y resolver mejor los problemas de la vida cotidiana (Du Sautoy, 2018).

Por ello, esta área exige una práctica sociocultural que debe aprenderse desde la escuela, donde es imprescindible contar con profesionales cualificados en la docencia de la matemática. Sin embargo, en la actualidad gran parte del estudiantado tiene una concepción errónea de las matemáticas, pues abunda la creencia de que su rol en el aprendizaje de estas consiste en memorizar fórmulas y métodos, de manera que el éxito en las matemáticas está directamente vinculado a la memorización (Baeler et al., 2019).

La medida es uno de los elementos de las matemáticas que más aplicación tiene en la vida cotidiana, además de estar estrechamente ligada a otros bloques del currículo escolar como los números, los datos y la geometría, aunque también con el arte, las ciencias sociales y naturales y la música (Van de Walle et al., 2014). Sin embargo, según un estudio de Arce et al., (2017) los estudiantes de Educación Primaria afrontan grandes dificultades en este ámbito de la matemática, en especial en las equivalencias entre las magnitudes y en la interpretación de las medidas. En este contexto, el alumnado que tiene éxito es aquel que percibe la asignatura como un conglomerado de ideas y pensamientos que requieren ser reflexionados profundamente (Baeler et al., 2019).

De esta problemática surge la motivación principal de este TFG: proporcionar un material didáctico útil para ayudar a estudiantes de Educación Primaria a convertirse en docentes competentes en esta área de la matemática. Frente a la creencia popular, el docente de matemáticas no es aquel que sabe ni aquel que sabe enseñar, sino aquel que

es competente en ambos aspectos (Ball et al., 2008). De ahí la dificultad que entraña formar a un futuro maestro, ya que no solo debe adquirir los conocimientos conceptuales necesarios, sino que además debe adquirir competencias didácticas imprescindibles para transmitirlos.

Esta competencia que se espera de quienes ejercen la profesión docente, contrasta con el bajo nivel de conocimientos matemáticos con el que accede el estudiantado a los Grados de Educación Infantil y Primaria y con la escasa valoración social que tienen estos profesionales y su formación para enseñar matemáticas (Muñoz et al., 2015). Dada la importancia que tienen las matemáticas y la Educación Infantil y Primaria, la didáctica de esta área requiere una consideración especial, más aun teniendo en cuenta los factores citados anteriormente. Según Baeler et al., (2019) existen tres enfoques diferentes entre el alumnado de matemáticas: un primer grupo que trata de memorizar métodos que les han explicado; un segundo grupo que trata de relacionar los conceptos nuevos con aquellos que ya posee; y un tercer grupo con gran habilidad de autoaprendizaje, que trata de averiguar lo que necesitan aprender. Por tanto, debe plantearse una propuesta que pueda dar respuesta a toda esta diversidad para que el futuro profesorado de Educación Primaria pueda hacer lo propio cuando ejerza la profesión docente.

3.2 JUSTIFICACIÓN EN RELACIÓN CON LAS COMPETENCIAS DEL TÍTULO

Mediante la realización del presente TFG se pretende alcanzar un desarrollo competencial acorde a lo establecido en la Memoria del plan de estudios del título de Grado de maestro/a en Educación Primaria por la Universidad de Valladolid (2010):

El Trabajo Fin de Grado –que supone la realización por parte del estudiante de un proyecto, memoria o estudio- supondrá, por tanto, la puesta en práctica de una amplia variedad de competencias, tanto generales como específicas, de las que se formulan en este Plan de Estudios. Mediante su realización, el estudiante demostrará la consecución de los objetivos establecidos en el Título, así como su capacidad para ejercer la profesión regulada de Maestro en Educación Primaria. (p. 134).

Las competencias que se deben desarrollar en el Grado de Educación Primaria están reguladas por la *ORDEN ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, agrupando los*

conocimientos, habilidades y competencias que allí se recogen en torno a grandes competencias y organizándolas según los módulos y materias que aparecen en la misma y la ORDEN ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, que regula el Título de Maestro en Educación Primaria. Se espera que el trabajo realizado para la elaboración de este TFG contribuya a adquirir las siguientes competencias que se reflejan en la guía docente del Trabajo de Fin de Grado del Curso 2021/2022.

La realización del TFG puede dividirse en dos partes diferenciadas: una revisión bibliográfica sobre cuestiones relacionadas con la educación y el diseño de una propuesta didáctica fundamentada sobre dicha bibliografía. El desarrollo de cada una de estas partes pretende favorecer y reflejar un desarrollo competencial acorde a lo citado anteriormente. Con carácter general, se espera que la elaboración de una propuesta educativa destinada a estudiantes del Grado de Educación Primaria, contribuya y refleje el aprendizaje tanto de conocimientos relativos a la práctica docente en la etapa de Primaria, como de índole superior.

En primer lugar, se busca la adquisición de conocimientos relacionados con la educación. A fin de fundamentar una propuesta educativa, se realizará una revisión bibliográfica sobre modelos de didáctica de la matemática, pedagogía y metodologías innovadoras. A través de esta búsqueda se busca aprender y aplicar conceptos relevantes de la práctica educativa, conocer características psicológicas, sociológicas y pedagógicas del alumnado de distintas etapas educativas. En esta revisión bibliográfica se incluyen aspectos que se han estudiado en diversas áreas durante el Grado de Educación Primaria, tales como la psicología del desarrollo y del aprendizaje, la didáctica de la matemática y la innovación educativa. De esta forma, se pretende mostrar la capacidad de profundizar en estos conocimientos para aplicarlos de forma apropiada en el diseño de situaciones de aprendizaje, así como en la práctica docente.

Por otro lado, el diseño de una propuesta didáctica fundamentada del área de matemáticas puede beneficiar la adquisición de competencias de planificación y diseño de buenas situaciones de enseñanza-aprendizaje, a través del conocimiento del currículo y de técnicas de enseñanza-aprendizaje aplicables a diferentes etapas educativas. En concreto, se busca desarrollar la habilidad de transformar el saber matemático en la capacidad de enseñar matemáticas bajo el amparo de dos modelos didácticos ampliamente reconocidos. De esta forma, se espera adquirir un espíritu de iniciativa, innovación y

creatividad en la práctica educativa; lo cual se espera que quede reflejado en el diseño de propuesta didáctica que pueda ayudar al alumnado (universitario) a adquirir las competencias docentes necesarias para impartir la docencia de la matemática.

4. MARCO TEÓRICO

4.1 EL PERFIL DEL DOCENTE

La figura del docente y en particular la del docente de matemáticas, ha sido fruto de investigaciones durante las últimas décadas dada la importancia que este tiene dentro del ámbito de la educación. El presente trabajo se fundamenta en dos enfoques diferentes para buscar definir el perfil de un buen docente de matemáticas: el modelo MTSK y el NCTM.

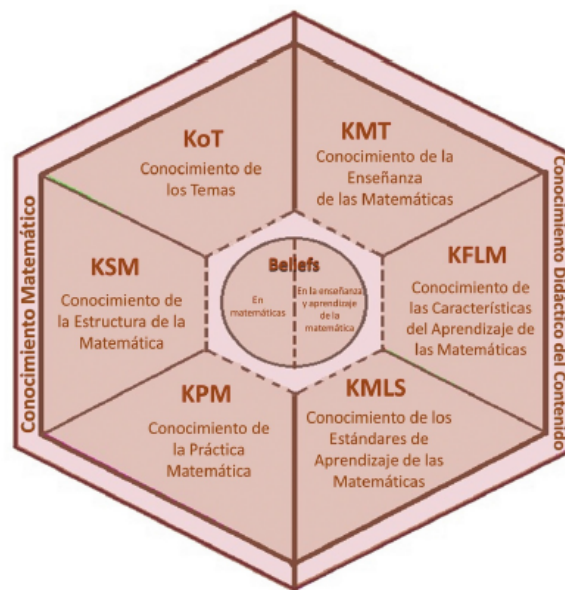
4.1.1 Modelo MTSK

El modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*, de ahora en adelante MTSK, aporta un enfoque nuevo desde el que analizar y construir el conocimiento que el docente de matemáticas posee y muestra (Aguilar et al., 2013). Una fundamentación en este modelo posibilita una comprensión más apropiada sobre qué sabe el docente de matemáticas, cómo lo sabe y qué necesidades conceptuales o didácticas tiene, de manera que las propuestas formativas que se diseñen sean coherentes con dichas necesidades (Muñoz et al., 2015). El modelo MTSK establece dos dimensiones de conocimiento para el docente de matemáticas: dominio del Conocimiento Matemático y Conocimiento didáctico del contenido matemático (Aguilar et al., 2018).

El docente de matemáticas debe ser capaz de acercar a su alumnado a la naturaleza de las matemáticas, enseñando a razonar, conjeturar, representar y ser capaz de emplear los conceptos matemáticos de forma significativa y acorde a la etapa educativa que le corresponde (Muñoz et al., 2015). De esta forma, debe entenderse que un docente de matemáticas no es aquel que solo tiene conocimientos sobre conceptos de matemáticas (MK), sino que además debe saber enseñar matemáticas, es decir, tener conocimientos didácticos del contenido matemático (PCK). Cada dimensión del MTSK se divide a su vez en tres subdominios de conocimiento (ver Figura 1).

Figura 1

Esquema del MTSK con sus respectivos subdominios.



Nota. Muñoz et al., (2015, p. 1808).

Según establecen Muñoz et al. (2015) dentro del MK se establecen los siguientes subdominios:

- **Conocimiento de los temas** que consiste en un conocimiento profundo de los contenidos escolares, incluyendo procedimientos, estándares y relaciones de los conceptos con contextos reales, de forma que el docente debe entender los diversos significados atribuibles al contenido.
- **Conocimiento de la estructura** de la matemática que implica el conocimiento desde la integración y relación de los contenidos con conceptos tanto avanzados como elementales, de manera que el docente pueda desarrollar las matemáticas avanzadas desde una perspectiva elemental y viceversa. Es particularmente relevante ya que permite que el docente entienda las matemáticas de primaria de forma completa, tanto en cantidad de contenido como en la organización de este.
- **Conocimiento de la práctica matemática** que comprende las diferentes formas de hacer y proceder en matemáticas, tales como la demostración y la generalización, incluyendo el manejo con los elementos fundamentales de las matemáticas como las definiciones y los axiomas. También comprende las diferentes formas o heurísticas que pueden emplearse en la resolución de problemas.

Estos tres subdominios abarcan los aspectos de conocimiento matemático que un docente debe poseer, en este caso contextualizados en el nivel de Educación Primaria. Por tanto, se puede afirmar que un docente debe conocer el contenido escolar que va a impartir, saber cómo se articula dentro de una estructura conceptual más avanzada y saber cómo realizar una práctica matemática con esos contenidos desde la perspectiva de la resolución de problemas y la fundamentación conceptual. En cuanto al PCK, Muñoz et al. (2015) establecen los siguientes subdominios de conocimiento:

- **Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas**, que engloba el conocimiento de los métodos, recursos y formas de enseñar matemáticas. El docente que posee este conocimiento es capaz de emplear diversos recursos en su práctica educativa, tales como regletas de Cuisenarie, conocimiento su potencial y sus limitaciones para desarrollar un contenido específico.
- **Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas**, que refleja el conocimiento que posee el docente sobre cómo se aprenden los conceptos matemáticos y sobre cómo sus estudiantes interactúan con ellos. Dentro de este subdominio se engloban las teorías de aprendizaje de las matemáticas y las respuestas habituales que proporcionan los estudiantes ante determinadas preguntas y planteamientos matemáticos.
- **Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas**, que abarca los diversos grados de profundidad en los que se articula el currículo oficial del país en el que realiza su práctica docente.

De estos tres subdominios se extrae la necesidad de que el profesor de matemáticas sea capaz de emplear diversos enfoques metodológicos, recursos didácticos y estrategias educativas que se adapten a las características de aprendizaje de su alumnado, incluyendo su nivel madurativo. Así mismo, debe conocer el currículo oficial del país y del territorio en el que desarrolla su práctica para adaptar sus propuestas educativas a los contenidos establecidos para dicho territorio. Tomando como referencia el modelo MTSK, para realizar una práctica docente beneficiosa para su alumnado el futuro maestro de matemáticas debe adquirir todos estos subdominios de conocimiento relativos al bloque de medida.

4.1.2 El profesor en la educación matemática

El otro ámbito desde el que se fundamenta el perfil del docente en el presente TFG es el modelo que proporciona el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Este establece una serie de estándares relativos al proceso de práctica de la matemática que deben incluirse en una enseñanza de calidad (NCTM, 2000):

- La **resolución de problemas**, que ayuda al alumnado a construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la aplicación y la adaptación de estrategias adecuadas. Para encontrar soluciones se deben aprovechar los conocimientos que se poseen en un ejercicio que exige cierto esfuerzo de pensamiento. (p. 52).
- El **razonamiento y la prueba** implican que el estudiantado investigue diversas conjeturas matemáticas; también supone la evaluación y el desarrollo de varios tipos de estrategias y razonamientos de demostración. Las personas capaces de pensar y razonar de forma analítica son capaces de encontrar patrones y estructuras tanto en situaciones del mundo real como en objetos abstractos. De esta forma se dota al alumnado de una capacidad muy poderosa para descubrir e interpretar la realidad. (p. 56).
- Es fundamental la **comunicación** coherente del pensamiento matemático entre estudiantes y docentes. Debe emplearse un lenguaje adecuado para analizar y evaluar pensamientos y estrategias matemáticas, ya que esta comunicación posibilita que las ideas se transformen en objeto de reflexión, ayudando a construir conocimientos conjuntos. (p. 60).
- Debe fomentarse la capacidad de encontrar y emplear **conexiones** entre ideas matemáticas, entendiendo cómo se construyen e interconectan los conocimientos. De esta forma el conocimiento que alcanza el alumnado es más profundo y duradero. Esta capacidad se traspa además a la vida real, ya que serán capaces de encontrar conexiones también en sus propias experiencias. (p. 60).
- El estudiantado deberá ser capaz de crear y emplear **representaciones** para organizar y comunicar ideas matemáticas, así como para resolver problemas, modelar y representar la realidad. De esta forma, su capacidad de pensar y hacer matemáticas aumentará notablemente. (p. 67).

Estos estándares deben incorporarse a los programas de estudios desde la Educación Infantil hasta la edad adulta, ya que favorecen el desarrollo no solo de habilidades de pensamiento matemático, sino otras competencias igualmente necesarias.

4.2 BASES PEDAGÓGICAS

A fin de establecer un proceso de aprendizaje en el aula es necesario conocer qué elementos forman parte de este, así como las interacciones que se producen entre ellos. Se utiliza el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) para definir un sistema en el cual se identifican como elementos fundamentales de un proceso de aprendizaje al sujeto que aprende, un contenido que es aprendido y un sujeto que enseña dicho contenido (Corral, 2001). En el caso que atañe a este trabajo el sujeto que aprende sería el alumnado de Educación Primaria, el contenido que se aprende correspondería a los contenidos del bloque de medida del área de Matemáticas y el sujeto que lo enseña estaría representado por el docente que impartiría la asignatura de la universidad. El sujeto que enseña actúa como un canal de transmisión del contenido que enseña, que aporta el dominio del contenido y la calidad de la relación que proporciona. No obstante, también es clave la relación interpersonal que se crea entre ambos sujetos, incluido el apoyo emocional y el componente de la motivación que benefician la calidad de todo el proceso (Corral, 2001). Esta interacción en la ZDP se da para Vygotsky a través de actividades prácticas e instrumentales, no tanto individuales, como a través de la interacción y la cooperación social (Álvarez y del Río, 1990).

Otra de las consideraciones pedagógicas más relevantes en los procesos de enseñanza-aprendizaje es la carga cognitiva de las tareas programadas. Esta se define como la magnitud de las demandas de procesamiento que enfrenta la memoria de trabajo durante la operación (realización de la tarea), lo cual incluye los recursos cognitivos que se requieren para aprender o adquirir cierta información (Zambrano, 2018). Por eso es necesario considerar el tiempo y la capacidad de trabajo que tienen las personas a la hora de realizar tareas matemáticas, ya que una actividad excesivamente compleja puede ser perjudicial para lograr un aprendizaje. Este disminuye cuando se ofrece poco tiempo para realizar una tarea compleja y cuando la información que debe aprenderse supera la capacidad de la memoria de trabajo (Zambrano, 2018). Es interesante considerar la reducción de tareas complejas, simplificándolas en bloques de información presentados de manera secuencial. En matemáticas una tarea se considera de alta demanda cognitiva

cuando implica el uso de habilidades cognitivas y de búsqueda de información (no interrelacionadas) que el aprendiz debe relacionar para conseguir resolver la tarea con un alto nivel de exigencia mental y de procesamiento de información (Baldeón et al., 2020).

De este modo, a la hora de diseñar una tarea es imprescindible conocer el conocimiento previo del alumnado y relacionarlo con los objetivos curriculares, ya que ambos factores afectan al nivel de demanda cognitiva de la tarea (Smith et al., 2009). Además, es necesario considerar que la matemática es una tarea particular, ya que exige tanto su resolución como la comprensión de la resolución que se ha realizado, de manera que la reflexión sobre este proceso posibilite plantear nuevas situaciones didácticas al alumnado (García y Benítez, 2013). Stein y Smith (1998) establecen cuatro niveles para clasificar las tareas de matemáticas:

- Memorización (baja demanda cognitiva).
- Procedimientos sin conexiones (baja demanda cognitiva).
- Procedimientos con conexiones (alta demanda cognitiva).
- Trabajar en matemáticas (alta demanda cognitiva).

En el último nivel la información se representa de diversas formas y las conexiones entre estas representaciones benefician el desarrollo de significados y a la comprensión de los conceptos (Stein y Smith, 1998). Además, la provocación de resolución de tareas complejas propias de este nivel se basa en la estabilización cognitiva, lograda mediante el estímulo de los sistemas atencionales para conseguir el disfrute del alumnado cuando realice tareas dinamizadas (Baldeón et al., 2020). De esta forma, el docente puede controlar el desarrollo de habilidades que permiten al alumnado gestionar la desmotivación y el rechazo que sucede cuando la complejidad y la dificultad aumenta en las tareas de alta demanda cognitiva. El placer que se genera en la realización de estas tareas favorece el compromiso del alumnado y aumenta el interés por una actividad que previamente podría considerar aburrida (Baldeón et al., 2020). También se ha señalado la importancia de formular constantemente preguntas al alumnado durante la realización de las tareas, prestando especial atención a sus respuestas para orientarlos hacia la búsqueda de relaciones, explicaciones y significados de forma que se mantenga un alto nivel de demanda cognitiva (García y Benítez, 2013).

En la realización de tareas, así como en todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, la motivación es uno de los aspectos más importantes que un docente debe considerar. Tal

y como señala Dweck (1986) la motivación siempre se focaliza hacia unos objetivos determinados, distinguiendo dos tipos en el contexto del aprendizaje: metas de rendimiento, enfocadas hacia la superación de las tareas académicas; y metas de aprendizaje, centradas en adquirir nuevos conocimientos y habilidades. Si bien en una formación universitaria cabría esperar encontrar un mayor número de estudiantes orientados al aprendizaje, la realidad es que ambas metas no son excluyentes (Pintrich, 2003). A fin de lograr motivar al alumnado es importante considerar la introducción de elementos divertidos, pero manteniendo un estado emocional en un nivel de intensidad moderado para lograr maximizar el aprendizaje. Algunas de las acciones que contribuyen a motivar el interés del alumnado son según Ruiz (2020): facilitar la comprensión de los contenidos que se aprenden, utilizar ejemplos y contextos conectados con el interés del alumnado, mostrar pasión por la materia que se enseña, conectar lo que se aprende con contextos donde se muestre su utilidad, facilitar claves sobre cómo enfrentar las actividades, modular la dificultad de las tareas, proporcionar rúbricas de evaluación y alinear las tareas con esta.

Aplicando estos principios Sweller et al. (2011) establecen algunos efectos relevantes para diseñar buenas situaciones de aprendizaje:

- Efecto de los ejemplos resueltos: el aprendizaje a través de estos ejemplos hace que el alumnado logre un mejor desempeño porque ayudan a focalizar la atención en la información esencial.
- Efecto de completar problemas: proveen una solución parcial de una tarea que el alumnado debe completar.
- Efecto de la modalidad: el aprendizaje mejora al presentar la información verbal de forma hablada ligada a imágenes relacionadas que no pueden entenderse por separado.
- Efecto de la imaginación: sucede cuando se pide al alumnado que repase mentalmente una información aprendida anteriormente.
- Efecto de la separación de elementos: si el contenido de aprendizaje es muy complejo debe fragmentarse en piezas que puedan aprenderse secuencialmente.
- Efecto de memoria colectiva de trabajo: algunas tareas complejas pueden aprenderse de forma más eficiente en grupo de manera que sus miembros pueden unir sus capacidades de memoria de trabajo y distribuir la carga cognitiva de la

tarea. Para que este efecto ocurra la tarea debe ser lo bastante compleja como para justificar una carga cognitiva cooperativa.

4.3 DOCENCIA UNIVERSITARIA

Una vez asentadas las bases pedagógicas de la docencia universitaria, surge la cuestión de establecer una metodología que beneficie al proceso de aprendizaje del estudiante universitario.

4.3.1 *Flipped classroom*

Según Aguilera et al. (2017) es necesario aplicar de forma adecuada metodologías innovadoras que superen el modelo tradicional de la clase magistral. En este contexto, surge la metodología de aula invertida o *Flipped classroom*. A través de este método de enseñanza el alumnado estudia por sí mismo fuera de clase los contenidos teóricos que les proporciona el docente, aprovechando el tiempo en el aula para resolver dudas y realizar prácticas, debates y otras actividades pertinentes para los contenidos (Aguilera et al., 2017). De esta forma el alumnado se beneficiará de un tiempo de trabajo individual teniendo a su completa disposición las jornadas de trabajo en el aula con el docente como guía del proceso de aprendizaje. Esta metodología puede aplicarse en todos los niveles educativos, desde la Educación Primaria hasta la educación superior y la educación para adultos (Blasco et al., 2016).

En *Flipped classroom* el docente debe ocuparse de analizar las mejores formas de transmitir conocimientos. De esta forma podrá conseguir que sus estudiantes asimilen los contenidos y adquieran las habilidades que se espera, sacando el mayor rendimiento a sus horas de trabajo dentro del aula (Tortosa et al., 2016). Por ello, este modelo proporciona un contexto ideal para que, tanto el profesorado como sus discentes, dispongan del tiempo y el espacio de aprendizaje de la forma más adecuada a sus necesidades. De esta forma, el docente actúa como guía a lo largo del proceso de aprendizaje, otorgando un amplio margen de trabajo autónomo al aprendiz, ya que la comunicación es constante entre ambos (Tortosa et al., 2016).

Para que este método pedagógico sea efectivo el docente debe diseñar situaciones de aprendizaje apropiadas, en las cuales el alumnado tiene la responsabilidad de explorar los materiales que ha recibido de forma asíncrona y así lograr adquirir unos conocimientos básicos antes de acudir a la siguiente clase (Mingorance et al., 2017). Una vez se han

explorado los materiales fuera del aula, se realiza la siguiente sesión presencial con el resto de la clase. En esta sesión se desarrollan los contenidos de manera más profunda, teniendo en cuenta que lo importante es la capacidad de aplicar las competencias adquiridas (fuera del aula) en experiencias prácticas o en la resolución de problemas (Mingorance et al., 2017).

Uno de los pilares de la metodología del aula invertida es el *Peer Instruction* o aprendizaje entre pares (Dai et al., 2018). Su propósito principal es explotar la interacción del alumnado durante las sesiones, enfocando su atención hacia los conceptos subyacentes (Mazur, 2014). De esta forma, en lugar de repetir la información que se recoge en los libros o materiales de lectura, las sesiones presenciales se dedican a presentar brevemente aspectos clave, seguidos de una serie de preguntas cortas (*ConcepTest*) sobre el tema tratado. En primer lugar, se les da tiempo a los estudiantes para plantear respuestas de forma individual, para después, discutir las con sus pares. Este proceso les obliga a pensar a través de los argumentos que están desarrollando, y les proporciona (igual que al docente) una manera de evaluar su comprensión del concepto (Mazur, 2014). Cada *ConcepTest* tiene la estructura general siguiente:

1. Planteamiento de la pregunta
2. Los estudiantes tienen tiempo para pensar.
3. Los estudiantes registran respuestas individuales (opcional).
4. Los estudiantes tratan de convencer a sus pares (*peer instruction*).
5. Los estudiantes registran las respuestas corregidas (opcional).
6. Puesta en común de las respuestas con el docente.
7. Explicación de la respuesta correcta.

Las discusiones que se realizan para convencer a los compañeros incrementan la confianza y mejora el porcentaje de respuestas correctas. Cuando la mayoría del grupo proporciona la respuesta correcta, se avanza hacia el siguiente tema. Si solamente una minoría (menos del 10%) responde correctamente, se debe explicar con detalle el mismo concepto y reevaluar realizando un nuevo *ConcepTest* (Mazur, 2014). Este proceso presenta varias ventajas que mejoran el proceso de enseñanza-aprendizaje. En primer lugar, las conversaciones entre pares que buscan convencerse mutuamente rompen con la monotonía de las lecciones magistrales. Así mismo, los aprendices deben pensar por sí

mismos y transformar sus pensamientos en palabras, en lugar de asimilar pasivamente la información que se les proporciona.

El alumnado del grado de Educación Primaria tiene ritmos de aprendizaje y conocimientos previos diversos. *Flipped classroom* es una herramienta ideal para que este alumnado pueda lograr el aprendizaje requerido, ya que permite enseñarle a un ritmo individual con un alto grado de personalización. De esta forma también se proporciona una mejor enseñanza al estudiantado más avanzado y se desarrolla de forma óptima su talento (Aguilera et al., 2017). En esta línea, Mingorance et al., (2017) señalan algunas de las principales ventajas del *Flipped classroom*:

- Aumenta el compromiso del estudiantado al hacerse más responsable de su proceso de aprendizaje y al participar de forma activa mediante la resolución de problemas en el aula.
- Mejora la atención individualizada del docente y mejora el desarrollo del talento.
- Posibilita que el alumnado aprenda a su propio ritmo, teniendo acceso a los materiales proporcionados por el docente en todo momento.
- Crea un mejor ambiente en el aula, convirtiéndola en un espacio de aprendizaje donde se comparten pensamientos, se trabaja de manera colaborativa y se resuelven dudas relevantes.
- Fomenta el uso de las TIC y conecta con el estudiantado del siglo XXI, acostumbrado al uso de internet para la obtención de información.

En cuanto al rendimiento académico, se ha señalado que *Flipped classroom* mejora las calificaciones del alumnado, disminuye el número de estudiantes que abandonan la materia y mejora la asistencia a las clases, la participación y la interacción durante las sesiones (Mingorance et al., 2017). En esta línea, también se ha señalado que una comprensión más profunda de los conceptos ayuda a mejorar las habilidades de resolución de problemas convencionales (Mazur, 2014). Aunque esta metodología requiere más esfuerzo por parte del alumnado, los resultados académicos muestran que el aprendizaje es más profundo (Aguilera et al., 2017). Pese a la mejora académica y del aprendizaje, para que esta estrategia funcione es necesaria la completa implicación del alumnado, ya que su utilidad es directamente proporcional a ella (Tortosa et al., 2016). Esto hace que sea muy adecuado al contexto universitario, donde el alumnado estudia por

propia voluntad, con plena responsabilidad y donde además se presupone un grado de implicación muy elevado. Esta metodología debe combinarse con una evaluación adecuada para que el alumnado alcance los objetivos establecidos.

4.3.2 Evaluación formativa

En este proceso, por todo lo expuesto anteriormente, es fundamental implementar una buena evaluación formativa, entendida como el proceso empleado por docentes y estudiantes para dar respuesta al estudiante mientras aprende para así mejorar el aprendizaje durante el propio proceso (Barton, 2018). Las *hinge questions* (preguntas bisagra) o *diagnostic questions* son un recurso didáctico muy útil para que el docente pueda proporcionar una evaluación formativa útil. Estas preguntas pueden realizarse en cualquier momento de la sesión y sirven para detectar el nivel de comprensión que tiene el alumnado sobre un determinado tema (William y Leahy, 2015). Al realizar este tipo de cuestiones se puede articular la clase en torno a la respuesta de la clase; si las respuestas demuestran una buena comprensión del contenido se puede avanzar, si revela una comprensión baja el docente deberá revisar el contenido de nuevo.

Este recurso permite estudiar las respuestas erróneas en detalle, realizar planificaciones en base a los errores y diseñar materiales más adecuados para la comprensión de aquellos conceptos que aún no se han comprendido plenamente (Barton, 2018). Para que estas preguntas sean efectivas deben cumplir dos características fundamentales: en primer lugar, debe ser altamente improbable que alguien proporcione la respuesta correcta por un motivo incorrecto; la segunda condición es que debe tratarse de preguntas diagnósticas más que de preguntas de discusión (William y Leahy, 2015). Es decir, deben ser preguntas que no requieran explicaciones profundas por parte del alumnado, ya que estas deben tener su propio tiempo en las sesiones. Para facilitar la labor del docente pueden utilizarse preguntas de respuesta múltiple, ya que se proporciona al alumnado un número pequeño de alternativas, diseñadas para reflejar distintos aspectos del pensamiento y la comprensión (errónea y acertada) que puedan tener respecto al tema (William y Leahy, 2015). De esta forma el docente podrá interpretar cuáles son los errores y las dificultades de su en función de las respuestas.

4.4 DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Para diseñar situaciones de enseñanza-aprendizaje adecuadas al contexto y a las necesidades del alumnado es importante considerar cuestiones relevantes específicas de la didáctica de la matemática.

En este proceso de aprendizaje el alumnado debe aprender matemáticas comprendiendo y construyendo nuevos conocimientos a partir de su experiencia previa (Skempt, 1978). Dicha comprensión puede ser de dos tipos: instrumental o relacional. La instrumental se refiere a la capacidad de resolver tareas matemáticas de forma mecánica, memorizando procedimientos y fórmulas necesitando del docente para seguir todos los pasos. Por otro lado, la comprensión relacional implica no solo saber resolver los problemas, sino también saber explicar cómo se han resuelto. Skempt (1978) señala algunas ventajas relevantes en esta perspectiva relacional: fomenta la adaptación a nuevas tareas al saber relacionar métodos con problemas y cómo adaptarlos; facilita recordar conocimientos al estar estos interconectados, ya que si bien hay más información que aprender las conexiones hacen que sea menos costoso; además, la comprensión relacional puede ser un fin en sí misma, facilitando el ámbito motivacional de la labor del docente.

Sin embargo, dada la dificultad que parte del estudiantado tiene en el área de las Matemáticas, se plantea el uso del enfoque CPA (*concret, pictorial, abstract*). Este enfoque está basado en las ideas de Bruner (1966) sobre la estructura del conocimiento, quien postulaba que cualquier conocimiento puede representarse de tres formas diferentes: con objetos manipulables para conseguir un resultado, con un conjunto de imágenes que representan un concepto sin definirlo plenamente; y un conjunto de proposiciones simbólicas regidas por reglas lógicas. La aplicación práctica de esta estructura consiste en enseñar al estudiante de matemáticas mediante el uso de objetos manipulativos, representaciones pictóricas y finalmente conceptos abstractos (Witzel, 2005). Según Ketterlin, Chard y Fien (2008) una secuencia didáctica que avanza desde el trabajo con materiales manipulativos hacia la representación pictórica, para llegar finalmente al concepto abstracto, beneficia a estudiantes con dificultades. La interacción con material manipulativo incrementa la probabilidad de recordar procedimientos diversos en la resolución de un problema matemático, pudiendo establecer posteriormente una conexión entre estos materiales y una representación pictórica similar que puede emplearse para enfrentar una tarea matemática difícil (Witzel, 2005).

A través de la metodología expuesta anteriormente, se proporcionará un contexto ideal para que el alumnado pueda trabajar en la ZDP, ocupando el docente un lugar privilegiado para proporcionar los materiales y orientar el tiempo del aula hacia la interiorización de los conocimientos que espera que logren sus estudiantes. El proceso de interiorización se optimiza cuando la mediación del docente es escalonada y el alumnado puede adecuarse mejor en función de sus posibilidades (Álvarez y del Río, 1990). Cuando se trabaja con un grupo amplio de estudiantes surge la dificultad de adecuarse a las posibilidades y necesidades de cada uno y así trabajar en su ZDP.

Estas dificultades se deben a sus diferentes necesidades y por ello deberán ser retados con ideas diferentes, para lo cual las tareas *low-floor, high-ceiling* (suelo bajo, techo alto) son muy útiles. En este tipo de tareas todo el alumnado puede comprometerse sin importar sus conocimientos previos, aunque al mismo tiempo está abierta para aquellos estudiantes más avanzados, de forma que todo el grupo encuentra un desafío profundo (Baeler et al., 2019). Empleando este recurso todo el alumnado será partícipe de las actividades, encontrando los más avanzados un espacio sobre el que construir un aprendizaje más profundo, y aquellos con un nivel inicial más bajo, un primer punto de partida desde donde empezar a desarrollar los contenidos. Las matemáticas requieren de un pensamiento lento y profundo que exige un espacio amplio en el cerebro, por lo cual, el estudiantado debe evitar la memorización sin comprensión de los métodos que se aplican en la resolución de las tareas (Baeler et al., 2019). Una gestión adecuada de una tarea de suelo bajo, techo alto proporciona este tiempo a la vez que requiere de un pensamiento profundo sobre el problema que plantea, ya que se están planteando tareas de alta demanda cognitiva.

5. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

LA MEDIDA Y SU DIDÁCTICA. PROPUESTA PARA FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

5.1 CONTEXTO

Esta propuesta didáctica ha sido diseñada para estudiantes de la asignatura Fundamentos de la medida, del tratamiento de la información del azar. Estrategias

didácticas para su enseñanza. Esta asignatura forma parte de los programas del Grado en Educación Primaria (plan 406) y Doble Grado en Educación Infantil y Primaria (plan 553) que se imparten en la Universidad de Valladolid. Como asignatura instrumental, se relaciona con otras asignaturas de la titulación como son *Desarrollo Curricular de las CC. Experimentales*, *Didáctica de las CC. Experimentales*, *Fundamentos Numéricos y estrategias didácticas para su enseñanza* y *Fundamentos de la forma y del volumen y estrategias didácticas para su enseñanza*.

Para realizar la presente propuesta didáctica es altamente recomendable haber alcanzado los objetivos de aprendizaje de las asignaturas de *Fundamentos Numéricos y estrategias didácticas para su enseñanza* y *Fundamentos de la forma y del volumen y estrategias didácticas para su enseñanza*, impartidas en los cursos primero y segundo respectivamente. En todo caso, se establece como conocimiento mínimo necesario, aquel que corresponde al nivel del cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

5.2 JUSTIFICACIÓN

La propuesta didáctica que se presenta a continuación está diseñada para abarcar una temporalización de veinte horas, repartidas en ocho momentos de trabajo, divididos en cuatro sesiones presenciales (8 horas) y cuatro no presenciales (12 horas). Estas sesiones siguen los principios metodológicos expuestos en el Marco Teórico de este TFG. Tal y como se ha explicado, este enfoque es beneficioso para que un estudiante del grado de Educación Primaria adquiera las competencias didácticas y los conocimientos teóricos necesarios para desarrollar la profesión docente en un aula de Educación Primaria. Las sesiones se han dividido en dos momentos de trabajo siguiendo la metodología *Flipped classroom*, que tal y como se ha expuesto, mejora el rendimiento académico y aumenta la motivación del alumnado. Cada sesión constará de una parte de trabajo no presencial y una parte de trabajo en el aula, teniendo la parte no presencial una carga horaria 1.5 veces mayor a la presencial según lo establecido por la guía docente de la asignatura. En esta segunda parte se implementarán actividades en las cuales cobrará importancia el aprendizaje entre pares, con las ventajas y beneficios que se han expuesto en el marco teórico. De igual modo, se han diseñado tareas *low floor, high ceiling* para proporcionar un entorno de aprendizaje que permita un desarrollo competencial a estudiantes con grandes diferencias en sus conocimientos previos y con ritmos de aprendizaje muy dispares. Todo este proceso será complementado con el uso de las *hinge questions* a lo

largo de todas las sesiones, a fin de proporcionar información útil al docente para adecuar el nivel de las explicaciones a las necesidades de la clase; y también para que este pueda realizar una evaluación formativa apropiada.

A través de estas sesiones se pretende que el estudiantado adquiera las competencias suficientes en los seis subdominios que establece el modelo MTSK (p.). En cuanto al Conocimiento de los temas, adquirirán los conocimientos necesarios relativos a las magnitudes de longitud, superficie y volumen; entre ellos destacan el conocimiento de los procedimientos para realizar cambios de unidades de medida y las estrategias que pueden ponerse en práctica para estimar longitudes, superficies y volúmenes en contextos reales. En cuanto al Conocimiento de la estructura, se estudiará la relación que existe entre estas magnitudes, así como la conexión que existe entre el ámbito de la medida y la geometría. El Conocimiento de la práctica matemática se trabajará realizando actividades que permitan establecer conexiones entre las magnitudes poniendo en práctica estrategias propias de la matemática como la generalización y la demostración.

Así mismo, las sesiones están diseñadas para que se adquieran competencias relativas al Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y al Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas. Ambos subdominios se reflejan en el conocimiento de una secuencia de aprendizaje (para niños) aplicable a todas las magnitudes que se trabajan en la etapa de Educación Primaria. También se incluye el uso de recursos materiales como los bloques multibase, las regletas de Cuisenaire e instrumentos de medida como la regla o la cinta métrica. Se engloba también el conocimiento de las fases de adquisición del proceso de medida de una magnitud en función de la edad del niño. Por último, respecto al Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, se indagará en el currículo oficial para conectar las competencias que deben adquirir los niños (relativas a la longitud, superficie y volumen) con la secuencia didáctica que deben realizar para llegar a comprender plenamente las magnitudes.

5.3 COMPETENCIAS

Con carácter general, el estudiantado del Grado de Educación Primaria debe adquirir la competencia matemática vinculada a la medida, de manera que esté en disposición de resolver problemas de contextos reales relativos a las magnitudes de longitud, superficie

y volumen y de guiar a estudiantes de Educación Primaria en el aprendizaje de la medida. Esta competencia se concreta en los siguientes aspectos, extraídos de la guía docente de la asignatura:

1. Alfabetización matemática concretada en el análisis, razonamiento y comunicación en el proceso de trabajo con problemas de matemáticas.
2. Transmitir conocimientos de matemáticas tanto a expertos como a profanos en la materia.
3. Capacidad para diseñar situaciones de enseñanza-aprendizaje para estudiantes de Educación Primaria relativas a la medida de magnitudes.
4. Conocer y entender el rol que desempeñan las matemáticas en el mundo, siendo capaz de emplearlas como herramienta para fomentar una ciudadanía crítica, comprometida y constructiva.
5. Capacidad para modelizar y resolver problemas de medida de contextos reales.
6. Capacidad para aprender en el aula de forma activa y rigurosa, comprometiéndose con el trabajo cooperativo y el esfuerzo individual.

5.4 OBJETIVOS

A través de esta propuesta se pretende estimular al alumnado para que sea capaz de alcanzar los siguientes objetivos de aprendizaje, los cuales suponen una concreción de las competencias recogidas en el apartado anterior:

- Pensar y reflexionar sobre cuestiones relacionadas con la medida de longitud, superficie y volumen, apreciando su valor como instrumento aplicable en la vida cotidiana.
- Emplear y entender los conceptos de medida, longitud, superficie y volumen de forma correcta, para emplearlos en situaciones de la vida real.
- Conocer el currículo oficial y la secuencia didáctica adecuada para llevar a cabo un proceso exitoso de enseñanza-aprendizaje de la medida de la longitud, la superficie y el volumen en Educación Primaria.
- Adquirir habilidades y conocimientos relativos a la medida como son la estimación, las unidades de medida y los cambios de unidades.

- Comprender las relaciones en base al sistema de numeración decimal que existen entre longitud, superficie y volumen, así como entre sus unidades de medida y su didáctica.
- Resolver problemas de contextos reales relacionados con la medida de la longitud, la superficie y el volumen.
- Trabajar de forma activa y rigurosa para adquirir los conocimientos relativos a la medida de las magnitudes de longitud, superficie y volumen, así como su didáctica.

5.5 METODOLOGÍA

La metodología que se emplea en la propuesta ha sido diseñada teniendo en cuenta los principios metodológicos expuestos en el marco teórico. Estos se asientan sobre una base sólida que permite al alumnado alcanzar las competencias requeridas. Para ello, se fomentará la participación activa en el trabajo que se realizará dentro y fuera del aula. Asimismo, las propuestas se han diseñado con un carácter flexible y adaptable a las situaciones de enseñanza-aprendizaje que puedan darse durante el desarrollo de las sesiones.

Partiendo de la metodología *Flipped classroom*, las sesiones se dividirán en dos partes: una primera parte no presencial y una segunda parte presencial. En la primera, el estudiante recibirá materiales para trabajar de forma asíncrona fuera del aula. En la segunda parte de la sesión, ya en el aula, se profundizará en estos materiales.. En esta parte, se plantearán preguntas o desafíos sobre los que se trabajará siguiendo (de forma flexible) la estructura del *Peer Instruction*. Mientras la clase trabaja en las preguntas, el docente puede observar a los grupos para conocer sus dificultades y estrategias, además de tener la posibilidad de ayudar en aquellas situaciones que lo requieran bajo las directrices del descubrimiento guiado.

Para lograr ayudar al alumnado a adquirir un conocimiento del contenido y de su estructura adecuado, se recurrirá al enfoque CPA, aportando material manipulativo en algunas de las actividades. Los desafíos, tareas y actividades que se han planteado son útiles para que cada estudiante trabaje en su ZDP, permitiendo que el docente se convierta en un guía en su aprendizaje. Estas tareas de suelo bajo, techo alto se introducen varias veces a lo largo de las sesiones, algunas para trabajar en grupos y otras para realizar

individualmente, trabajando de esta forma tanto la autogestión del aprendizaje como el aprendizaje entre pares.

En las sesiones se buscará que el alumnado esté continuamente reflexionando, pensando y participando de forma activa. A fin de maximizar su aprendizaje, se llevará a cabo una evaluación continua y formativa a lo largo de todo el proceso. Así mismo, en este tipo de situaciones en las que el docente se convierte en un guía, es particularmente relevante que sea capaz de detectar las necesidades y los errores para poder proporcionar feedback. Por ello, se utilizarán las preguntas bisagra, que se introducirán bien de forma espontánea, bien como parte de una batería de preguntas de respuesta múltiple que se realizará en algún momento de las sesiones. Por eso, aunque las sesiones plantean una secuencia didáctica, esta es flexible y el orden de algunas de las actividades puede alterarse para adaptarse al flujo natural de la sesión.

5.6 DESARROLLO DE LAS SESIONES

Los momentos de trabajo que se presentan están estructurados según la metodología de *Flipped classroom*. Cada sesión se divide en dos momentos de trabajo: una parte no presencial en la que el alumnado tendrá autonomía para explorar materiales proporcionados por el docente, tales como lecturas, videos y problemas; y un segundo momento presencial en el que se profundizará en el conocimiento previamente trabajado.

Tabla 1

Sesión 1

Sesión 1	
Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none"> ● Introducir la secuencia para trabajar la medida en Educación Primaria. ● Trabajar el concepto de longitud, así como su secuencia didáctica.
Contenidos específicos	<ul style="list-style-type: none"> ● Secuencia didáctica de la medida. ● La medida de la longitud.
Clase invertida	
<p>Actividad 1. Servirá como evaluación inicial y como autoevaluación para el alumnado. En esta primera parte se evaluarán los conocimientos previos que tiene la clase sobre la medida a través de un cuestionario de preguntas tipo test. El cuestionario se realizará de</p>	

forma individual y servirá para que el docente conozca el nivel de partida y las necesidades que tiene la clase. Así mismo, es un instrumento de autoevaluación muy útil para el alumnado porque le permite conocer su nivel inicial y también lo que se espera que sepa al terminar este bloque. Este test cuenta con preguntas sobre longitud, superficie y volumen, relativas al cambio de unidades de medida y a la estimación de longitudes, superficie y volúmenes en contextos de la vida real. En el caso de esta propuesta didáctica se ha utilizado la plataforma Socrative, pero las preguntas podrán emplearse en otro soporte a conveniencia del docente.

Actividad 2. Servirá para introducir la didáctica de la medida. Cada estudiante deberá leer el texto propuesto sobre la medida y las etapas que se deben seguir para trabajar la medida de cualquier magnitud en Educación Primaria.

Materiales

- Socrative de evaluación inicial (ver Anexo 1 o enlace en socrative).
<https://b.socrative.com/teacher/#import-quiz/66597544>
- Texto sobre la medida (ver Anexo 2).

Presencial

Presentación de la sesión: En la sesión presencial se trabajan tanto conocimientos del contenido matemático como conocimientos didácticos de dichos contenidos. En las actividades de esta primera sesión las actividades están principalmente destinadas a trabajar el conocimiento didáctico de la longitud. Sin embargo, en la lectura de la clase invertida se introduce también el contenido de las unidades de medida estándar, tales como el centímetro o el metro.

Actividad 1. (10 minutos). Esta actividad tiene el propósito de presentar la sesión, así como el contenido general de la asignatura que es la medida. Dado el nivel observado durante los últimos años se comenzará preguntando por situaciones de la vida cotidiana en las que se miden. Se conectará de este modo con la lectura para establecer que se va a comenzar trabajando la medida de la longitud.

Actividad 2. (25 minutos). Esta actividad sirve para introducir la medida de la longitud y la secuencia de adquisición de la medida que se pretende trabajar en actividades y sesiones posteriores. Para ello se plantea la siguiente pregunta:

- ¿Es más larga la mesa del alumno o la mochila?

Se escuchan dos o tres respuestas y se recuerda (en base a la lectura previa) que cuando se empieza a trabajar una magnitud el primer paso es identificar el atributo (magnitud), es decir aquello que se va a medir. Se pregunta:

- ¿Qué es la longitud?

Se explica que los niños deben interiorizar, como primer paso, que la longitud es la distancia que hay entre dos puntos. Una vez identificado el atributo

- ¿Cómo podemos saber si es más larga la mesa o la mochila?

Entre las posibles respuestas cabe esperar “utilizando una regla o un metro”, que es la respuesta sobre la que se plantea (en caso de surgir) qué sucede cuando un niño no sabe usar la regla ni consigue entenderla. Aquí se vuelve a conectar con la lectura (si ningún estudiante lo hace) y se explica que la primera fase de aprendizaje de la medida es la comparación directa. Para ello se muestra a la clase dos objetos en los que el atributo es claro, en este caso objetos esencialmente largos, y se compara su longitud. Por ejemplo, se juntan los extremos de un sacapuntas y un lápiz como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Comparación directa de dos objetos



Nota. Elaboración propia

Se aprecia que el lápiz es más largo que el sacapuntas. La clave en este proceso es alinear bien los extremos de los objetos que se están comparando. También es importante asociar vocabulario específico de cada atributo, en este caso, hay que transmitir a los niños que el lápiz es más largo que, no más grande que. Se invita a la clase a que planteen más objetos cuya longitud puedan comparar los niños, y se reflexiona sobre la primera comparación que se planteó (mochila con la mesa) para constatar que no era una buena elección (la longitud no es su principal atributo). También se recalca que es importante emplear objetos cotidianos y de su entorno.

A continuación, con el fin de generar un desequilibrio cognitivo para presentar la siguiente fase de la medida se plantea la pregunta:

- Vamos a comparar dos objetos, que no se pueden unir, tocar o juntar para comprobar cuál es más largo. ¿Qué se puede hacer?

Se escuchan las respuestas de la clase y se vuelve a conectar con la lectura. De esta forma, se introduce la comparación indirecta de objetos, que requiere emplear un objeto cuya longitud sea mayor que la de uno de los objetos que se van a comparar, y menor que la del otro. Un buen ejemplo para comenzar es comparar la puerta con la ventana, ya que es imposible colocar una junto a la otra. La forma de compararlas es utilizar un tercer objeto, por ejemplo, una persona (ver Figura 3).

Figura 3

Comparación indirecta de tres objetos



Nota. Elaboración propia

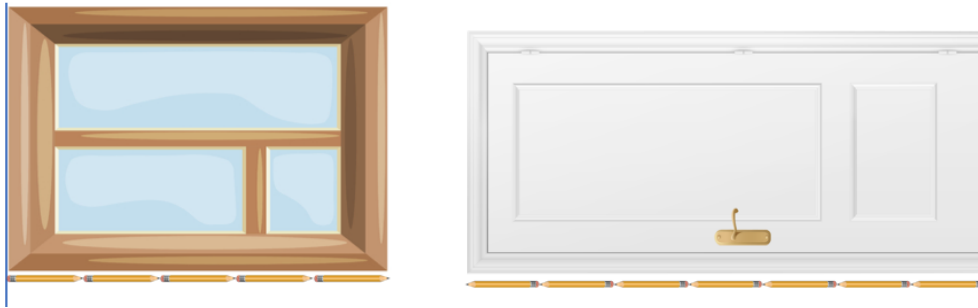
La situación que se muestra en las imágenes se representa en el aula. Se explica que esta idea se sustenta en la propiedad transitiva según la cual, si la puerta es más larga que la persona, y la persona es más larga que la ventana, entonces la puerta es más larga que la ventana.

Actividad 3. (25 min). Esta actividad tiene el propósito de mostrar un contexto real en el que niños realizan un aprendizaje de la medida siguiendo las primeras fases de la secuencia. Para ello, se presentan dos vídeos en los que se aprecia cómo se trabajan estas fases dentro de un aula de Educación Primaria. En grupos de cuatro o cinco tendrán que comprobar qué fases aparecen y si se trabajan de forma adecuada respecto a lo que se ha visto en la sesión. Es interesante comentar la edad de los niños para comenzar a contextualizar las fases. Después de diez minutos se ponen las respuestas en común en gran grupo.

Actividad 4. (25 min). Esta actividad sirve para introducir el uso de las unidades de medida no estándar. Para ello, se trabaja con los mismos grupos que en la actividad 3. En la fase previa (comparación indirecta) se empleó un objeto de longitud intermedia entre los dos que se comparaban, ahora por grupos de cuatro, tendrán que pensar si es más larga la puerta o la ventana (deben utilizarse objetos esencialmente largos), utilizando un lápiz como objeto para comparar. Se dejan diez minutos para pensar y se ponen las posibles ideas en común. En caso de que ningún grupo encuentre una solución se insinúa la posibilidad de contar cuántos lápices caben en el lado de la ventana. A continuación, se realiza el procedimiento, contando cuántos lápices caben en la ventana y cuántos en la puerta (ver Figura 4).

Figura 4

Medida de objetos con unidades no estándar



Nota. Elaboración propia

En la Figura 4 (igual que se haría en el aula) puede contarse que la ventana es tan larga como cinco lápices y que la puerta es tan larga como siete. En este punto se introduce por primera vez el concepto de medir, conectando de nuevo con la lectura:

- **Definición:** medir es un proceso que consta de dos partes: comparar y cuantificar. Primero se compara un objeto con otro, y después se cuantifica cuántas veces está un objeto dentro del otro.

De esta forma, se puede afirmar que la ventana mide cinco lápices y la puerta mide siete. Se recalca que en este punto es cuando los niños han comenzado a medir, habiendo realizado una transición fluida desde la comparación hasta la medición. A continuación, se plantean más ejemplos de tríadas de objetos con los que se puede realizar este procedimiento (en gran grupo).

Actividad 5. (25 minutos). Esta actividad sirve para profundizar en el conocimiento de la didáctica de las unidades de medida no estándar. Para ello, se comienza trabajando individualmente. Se conecta con la lectura para señalar que se está trabajando la fase de unidades de medida no estándar. En el caso de la actividad anterior, la unidad de medida era el lápiz. A continuación, se plantea que cada uno tendrá que medir el largo de la pata de su mesa utilizando el instrumento de medida no estándar que quieran. Una vez han medido se preguntan varios resultados. Por ejemplo, se obtienen cuatro lápices, tres estuches y dos cuadernos.

- ¿Qué significan esas medidas?

La respuesta que cabe esperar es que la pata de la mesa mide cuatro lápices, tres estuches o dos cuadernos. A continuación, se cuestiona cuál de todas esas medidas es la correcta. Se plantea la siguiente cuestión:

- Supongamos que quisiéramos construir una pata igual de larga ¿qué medida le daríamos al carpintero?

Se aprovecha esta pregunta para introducir el uso histórico de las unidades de medida estándar. También es importante profundizar en esta cuestión comparando dos bolígrafos o dos estuches, recalcando que no todos son iguales entre sí. Para trabajar la historia del contenido se presenta un vídeo (opcional si hubiera tiempo). A continuación, se plantea una

<p>reflexión para buscar un entendimiento más profundo sobre la importancia de realizar estas fases:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Para un niño ¿es más sencillo entender que su mesa mide tres estuches de alto, o que su mesa mide 80 centímetros? <p>Esta pregunta se emplea como reflexión final, explicando que en esta sesión se han explicado las etapas (que aparecen en la lectura) de la comparación directa, la comparación indirecta y de la medición con unidades no estándar.</p>
Materiales
<ul style="list-style-type: none"> • Videos para actividad 3. https://www.youtube.com/watch?v=pqnqE7p5KSE https://www.youtube.com/watch?v=ob8Ra-dRWv0 • Video para actividad 5 https://www.youtube.com/watch?v=3n1UcdiYSMY • Bloques multibase. Regletas de Cuisenaire o similar (ver Anexo 3).
Evaluación
<p>En esta sesión se espera que el alumnado sea capaz de:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conocer la secuencia didáctica general para desarrollar la medida de las magnitudes que se trabajan en Educación Primaria. • Entender la secuencia de la medida de la longitud y de realizar razonamientos matemáticos sobre esta magnitud.

Nota. Elaboración propia

Tabla 2

Sesión 2

Sesión 2	
Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none"> • Trabajar las unidades de medida estándar de longitud, así como su didáctica. • Desarrollar todas las etapas de la secuencia didáctica para la medida de la superficie.
Contenidos específicos	<ul style="list-style-type: none"> • Didáctica de las unidades de medida estándar de longitud. • Conocimiento de medida de la superficie y su didáctica en Educación Primaria.
Clase invertida	

Actividad 1. Esta actividad servirá para profundizar en el conocimiento y la didáctica de la longitud. Para ello, se plantean una serie de actividades para practicar tanto el conocimiento del contenido de la longitud como el conocimiento didáctico del contenido. Podrán realizarse en grupo, aunque se recomienda que lo hagan de forma individual en la medida de lo posible.

Actividad 2. Esta actividad sirve para profundizar en la didáctica de la medida de la longitud. Lectura de un texto que presenta una actividad para introducir la medida con la regla y la cinta métrica en Educación Primaria.

Actividad 3. Esta actividad servirá para comenzar a reflexionar sobre la didáctica de la superficie. Trabajando de forma individual o en grupos pequeños, deberán diseñar una secuencia para introducir a los niños en la medida de la superficie, proponiendo actividades en las que se empleen materiales manipulativos. Dichas actividades deberán abarcar desde la introducción del atributo hasta la etapa de medida con unidades no estándar.

Materiales

- Hoja con ejercicios para la actividad 1 (ver Anexo 4).
- Lectura para la actividad 2 (ver Anexo 5).

Presencial

Presentación de la sesión: En la sesión presencial se trabajan tanto conocimientos del contenido matemático como conocimientos didácticos de dichos contenidos. La actividad 1 está enfocada principalmente a trabajar el contenido matemático, la actividad 3 sirve para trabajar la didáctica de las unidades de medida de la superficie; y las actividades 2 y 4 están principalmente enfocadas en trabajar la didáctica de las unidades de medida estándar de la longitud y superficie, aunque también sirve para que el alumnado (universitario) trabaje esos contenidos.

Actividad 1. (40 minutos) Se presenta un conjunto de preguntas tipo test para realizar en clase sobre aspectos trabajados en la sesión anterior y algunos nuevos sobre la superficie. Para ello, el test consta de preguntas para profundizar en las etapas de medida de la longitud, preguntas para reflexionar sobre los cambios de unidades de superficie y la estimación de superficies de la vida real; y actividades para reflexionar sobre la secuencia didáctica apropiada para introducir la superficie en aulas de Educación Primaria. Esta magnitud se trabajará conectando con los conocimientos previos sobre la longitud. Para ello trabajarán en grupos de tres o cuatro. Esta actividad servirá para introducir conceptos relativos a la superficie y para realizar una evaluación formativa sobre la materia trabajada en la sesión anterior. Durante el desarrollo de la actividad el docente podrá detenerse en aquellas preguntas en las que un porcentaje alto de la clase no ha alcanzado los objetivos de aprendizaje. Otras se aprovecharán para introducir contenidos que se van a trabajar en esta

sesión. Por ello, algunas de las que presentan respuesta múltiple han sido diseñadas como *hinge questions*. En el caso de esta propuesta didáctica se ha utilizado la plataforma Socrative para crear el test, pero las preguntas podrán emplearse en otro soporte a conveniencia del docente.

Actividad 2. (30 min). Esta actividad tiene el propósito de mostrar cómo introducir en Educación Primaria el uso de unidades de medida estándar de longitud. Conectando con la lectura y con algunas preguntas del socrative realizado previamente, se explica que la primera unidad de medida que se utiliza en el aula de Educación Primaria es el metro. A continuación, trabajando en grupos de cuatro o cinco tendrán que diseñar una situación de aprendizaje para introducir el metro en un aula. Después de quince minutos se ponen en común las respuestas. Entonces se explica cómo medir la longitud de un lado de la clase, por ejemplo, utilizando el metro de madera. Se muestra que el procedimiento es el mismo que al emplear unidades de medida no estándar. Se coloca la regla sucesivamente contando el número de metros (reglas) que hacen falta para cubrir la longitud. Se pregunta entonces, enlazando con la lectura:

- ¿Qué propiedad de la longitud se está trabajando?

Se muestra entonces en qué consiste la propiedad sumativa y se piden ejemplos sobre cómo puede trabajarse en las fases previas. Una vez se ha medido la clase se concluye que el valor de la medida es de seis reglas más un hueco, es decir seis metros más una parte de metro. Se pregunta entonces:

- ¿Qué quiere decir que mide seis metros más...?

La respuesta que deben encontrar es que el valor de medida realizada representa el número de veces que cabe la unidad de medida en el objeto. Es decir, caben tres estuches en el largo de la pata, y caben seis metros en el lado de la clase.

A continuación, se plantea el problema de cómo medir el trozo en el que no ha cabido un metro entero. De nuevo se recurre a la lectura para recordar la propiedad continua de la medida, según la cual, entre dos valores enteros, por ejemplo, el 0 y el 1, siempre existe un valor intermedio, como el 0,5. Apoyándose en este razonamiento se plantea la cuestión de si es necesario conocer los números decimales para medir ese trozo. En este momento se presentan el resto de las unidades de longitud del sistema métrico decimal.

Se presenta el material manipulativo de los bloques de base 10 o bloques multibase. Se pide a un estudiante que mida la longitud del lado de un bloque de una unidad (1 centímetro). Entonces se plantea a la clase la siguiente pregunta:

- Si el bloque de la unidad mide un centímetro, ¿cuál es la longitud del lado más largo del bloque de la decena?

En caso de que no haya una respuesta correcta mayoritaria (mide diez centímetros o un decímetro) se dedicará un tiempo a recordar las unidades de medida de longitud y sus relaciones. A continuación (ver Figura 5), se mide el hueco empleando las barras que

representan una decena, comprobando que mide ocho decímetros (por ejemplo). De esta forma, el lado de la clase mide seis metros (color marrón en el dibujo) y ocho decímetros (color verde en Figura 5). En caso de que sigan quedando huecos se rellenarían con bloques de la unidad. Es importante incidir que en este paso los estudiantes todavía no han realizado cambios de unidades de medida, solo han medido empleando unidades estándar.

Figura 5

Medida de la clase con unidades estándar



Nota. Elaboración propia

Para terminar, se explica que ya se ha trabajado la secuencia completa de la longitud, recalcando que las fases son idénticas para la superficie y el volumen.

Actividad 3. (30 minutos). Esta actividad tiene el propósito de comenzar a plantear cuestiones didácticas sobre la superficie. Para comenzar, se conecta con las preguntas que se han planteado en socrative relativas a la superficie, así como con el trabajo previo realizado en casa (plantear secuencia didáctica para introducir la superficie). Se plantea que cada grupo de tres o cuatro diseñe una actividad para trabajar cada una de las etapas de la medida de la superficie con niños de Educación Primaria. Se les pedirá que tengan en consideración las cuestiones que han surgido con el Socrative para mejorar o modificar las actividades que plantearon previamente.

Mientras los grupos trabajan el docente elegirá uno o dos ejemplos de cada fase para exponerlos a la clase después y así disponer de un banco de recursos más amplio. Estas actividades se mostrarán a la clase una vez se hayan planteado. Es importante recalcar que al igual que ocurría con la longitud, es importante comenzar a trabajar la superficie utilizando objetos en los que el atributo sea lo más evidente posible, como es la cubierta de un cuaderno o la superficie de una mesa. Así mismo, es necesario introducir vocabulario específico del atributo, en este caso, al comparar una mesa con un cuaderno, se debe afirmar que la primera es más grande que el segundo. Algunas ideas interesantes para completar las actividades diseñadas por la clase pueden ser:

- Comparar la superficie de la pizarra con la de la puerta utilizando un cuaderno
- Medir la superficie de la pizarra utilizando *post-its*.

- Medir la superficie de la mesa utilizando cuadernos.
- Medir la superficie de la clase utilizando las baldosas del suelo.

Actividad 4. (15 minutos). Esta actividad sirve para introducir el uso de las unidades de medida estándar de superficie. Para ello, en gran grupo se plantea la pregunta

- ¿Cuál es la unidad de medida estándar de superficie?

Se espera que alguien responda que se trata del metro cuadrado. Se pregunta entonces:

- Qué es un metro cuadrado?

Es importante anclar el concepto clave a que “un metro cuadrado es un cuadrado que tiene de lado 1 metro”. Entonces se plantea la misma pregunta sobre el centímetro cuadrado y sobre el kilómetro cuadrado. Para terminar, se expone que ya se han terminado las fases de la medida de la superficie a excepción de los cambios de unidades de medida, lo cual se verá en la siguiente sesión.

Materiales

- Test de preguntas para la actividad 1 (ver Anexo 6 o enlace en socrative).
<https://b.socrative.com/teacher/#import-quiz/66608992>
- Bloques multibase. Regletas de Cuisenaire o similar.

Evaluación

En esta sesión se espera que el alumnado sea capaz de:

- Entender la secuencia de la medida de la superficie y realizar razonamientos matemáticos sobre esta magnitud.
- Plantear situaciones de enseñanza-aprendizaje para trabajar la medida de la longitud y superficie en Educación Primaria.

Nota. Elaboración propia

Tabla 3

Sesión 3

Sesión 3	
Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none"> ● Trabajar los cambios de unidades de medida estándar de longitud, superficie y volumen. ● Desarrollar todas las etapas de la secuencia didáctica para la medida del volumen.
Contenidos	<ul style="list-style-type: none"> ● Cambios de unidades de medida de longitud, superficie y volumen.

específicos	<ul style="list-style-type: none"> • Conocimiento de medida del volumen y su didáctica en Educación Primaria.
Clase Invertida	
<p>Actividad 1. Esta actividad servirá para comenzar a reflexionar sobre la didáctica de los cambios de unidades de medida. Se propone plantear una secuencia didáctica para trabajar el cambio de unidades de medida estándar de longitud y superficie desde un enfoque o bien pictórico o manipulativo. Se invita a utilizar bloques multibase, regletas de cuisenaire y a apoyarse en el modelo de barras. Como material complementario cuentan con un video que muestra el modelo de barras.</p> <p>Actividad 2. Esta actividad servirá para comenzar a trabajar la secuencia didáctica del volumen conectando con el trabajo previo realizado sobre la longitud y superficie. Trabajando de forma individual o en grupos pequeños, deberán diseñar una secuencia para introducir a los niños en la medida del volumen, proponiendo actividades en las que se empleen materiales manipulativos. Dichas actividades deberán abarcar desde la introducción del atributo hasta la etapa de medida con unidades estándar.</p>	
Materiales	
<ul style="list-style-type: none"> • Video complementario para actividad 1. https://www.youtube.com/watch?v=7mNkIM5BUdw 	
Presencial	
<p>Presentación de la sesión: En la sesión presencial se trabajan tanto conocimientos del contenido matemático como conocimientos didácticos de dichos contenidos. La actividad 1 está enfocada principalmente a trabajar el contenido matemático, la actividad 2 sirve para trabajar la didáctica del volumen, y la actividad 4 está diseñada para trabajar tanto el contenido como la didáctica de los cambios de unidades de medida de volumen y superficie.</p>	
<p>Actividad 1. (40 min). Se presenta un conjunto de preguntas tipo test para realizar en clase sobre aspectos trabajados en la sesión anterior y algunos nuevos sobre el volumen. Esta magnitud se trabajará conectando con los conocimientos previos sobre la longitud y la superficie. El test consta de preguntas para profundizar en los cambios de unidades de medida de longitud, superficie y especialmente volumen; preguntas para reflexionar sobre la didáctica del volumen en el aula de Educación Primaria; y la estimación de volúmenes de objetos de la vida real.</p> <p>Para ello trabajarán en grupos de tres o cuatro. Esta actividad servirá para introducir conceptos relativos a la superficie y para realizar una evaluación formativa sobre la materia trabajada en la sesión anterior. Durante el desarrollo de la actividad el docente podrá detenerse en aquellas preguntas en las que un porcentaje alto de la clase no ha alcanzado los</p>	

objetivos de aprendizaje. Otras se aprovecharán para introducir contenidos que se van a trabajar en esta sesión. En el caso de esta propuesta didáctica, se ha utilizado la plataforma Socrative para crear el test, pero las preguntas podrán emplearse en otro soporte a conveniencia del docente. En la primera pregunta puede realizarse una explicación complementaria en el utilizando material manipulativo:

- Colocar sobre un metro 10 barras de una decena → un metro equivale a diez decímetros. Colocar sobre cada decímetro diez bloques de la unidad, de un centímetro de lado. Como en cada decena caben diez centímetros, en un metro caben diez veces diez centímetros. La clave de este razonamiento es que en cada unidad caben diez unidades de la anterior. Se explica también, que este razonamiento se va a emplear en los cambios de unidades de superficie y de volumen. Así mismo, se conecta con el conocimiento de la estructura matemática, ya que el cambio de unidades se basa en el uso del sistema decimal.

Actividad 2. (40 minutos) Esta actividad tiene el propósito de comenzar a plantear cuestiones didácticas sobre la medida del volumen. Para comenzar, se conecta con las preguntas que se han planteado en la actividad anterior relativas al volumen, así como con el trabajo previo realizado en casa (plantear secuencia didáctica para introducir el volumen). Se plantea que cada grupo de tres o cuatro diseñe una actividad para trabajar cada una de las etapas de la medida de la superficie con niños de Educación Primaria. Se les pedirá que tengan en consideración las cuestiones que han surgido en la actividad anterior para mejorar o modificar las actividades que plantearon previamente.

Mientras los grupos trabajan el docente elegirá uno o dos ejemplos de cada fase para exponerlos a la clase después y así disponer de un banco de recursos más amplio. Estas actividades se mostrarán a la clase una vez se hayan planteado. Las cuestiones relativas al vocabulario y al proceso de medida son las mismas que se explicaron en las sesiones anteriores.

Actividad 3. (40 min). Esta actividad sirve para trabajar la didáctica del cambio de unidades de medida a través de problemas de contexto real. Para ello, plantea el siguiente problema:

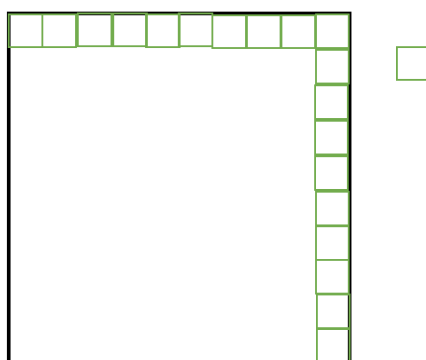
- Una alumna de sexto de primaria afirma que su casa mide 1000 metros cuadrados, lo cual equivale a un cuadrado de 1 km de lado. ¿Tiene razón? ¿Cómo podrías ayudarla a entenderlo utilizando un enfoque pictórico o manipulativo?

Los estudiantes tendrán primero un tiempo para trabajar de forma individual. Después discutirán sus ideas en pequeño grupo y se pondrán en común con la clase. Este problema tiene una parte que consiste en resolverlo a nivel de Educación Primaria, y otra que consiste en utilizar estrategias didácticas para ayudar a la alumna a entenderlo. En la puesta en común, lo primero que se comprobará es si tienen asentando el concepto de metro cuadrado.

A continuación, se explicará que no es necesario construir un kilómetro cuadrado (con objetos) para trabajar el cambio de unidades de medida. Puede hacerse con cierto nivel de abstracción trabajando en la pizarra o con bloques multibase (ver Figura 6). Para ello, puede representarse en la pizarra un cuadrado cuyo lado sea (hipotéticamente) un kilómetro. La clave es entender que dentro de ese cuadrado caben, sin necesidad de representarlos, 100 cuadrados de lado 1 hectómetro. De esta forma, el razonamiento puede extenderse para ilustrar que en cualquier unidad de medida de superficie (sistema decimal) caben cien unidades de la unidad anterior. Esta misma puede realizarse utilizando los bloques de base multibase, estableciendo que la superficie del bloque de la centena representa un kilómetro cuadrado.

Figura 6

Representación pictórica del cambio de unidades de superficie



Nota. Elaboración propia

Una vez resuelto el problema en gran grupo se plantea la pregunta, se presenta el siguiente problema, que se resolverá siguiendo la misma secuencia que el anterior.

- Un alumno de sexto de primaria afirma que 3 metros cúbicos equivale a un cubo de tres metros de lado, o también a 27000 bloques de unidad de millar de los bloques de base 10. ¿Tiene razón? ¿Cómo podrías ayudarlo a entenderlo utilizando un enfoque pictórico o manipulativo?

En la puesta en común de este problema es importante recalcar el concepto de “1 metro cúbico”, como un cubo de lado un metro. De igual modo, el razonamiento para explicárselo al niño de Primaria debe partir de una cierta abstracción. Puede suponerse (hipotéticamente) que el cubo de la unidad de millar de los bloques multibase representa un metro cúbico. De esta forma, se aplica el mismo razonamiento que en el problema anterior.

Para terminar la sesión, se explica que ya se han trabajado todas las etapas/fases de la medida de la longitud, superficie y volumen, así como los cambios de unidades de las mismas.

Materiales

<ul style="list-style-type: none"> ● Socrative para la actividad 1 (ver Anexo 7 o enlace en socrative). https://b.socrative.com/teacher/#import-quiz/66859395 ● Bloques multibase. Regletas de Cuisenaire o similar.
Evaluación
<p>En esta sesión se espera que el alumnado sea capaz de:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Entender la secuencia de la medida de volumen y realizar razonamientos matemáticos sobre esta magnitud. ● Conocer estrategias didácticas para trabajar la resolución de problemas de medida de volumen y superficie en Educación Primaria.

Nota. Elaboración propia

Tabla 4

Sesión 4

Sesión 4	
Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none"> ● Analizar el desarrollo de la medida de la longitud, superficie y volumen en el currículo oficial. ● Trabajar los conceptos de precisión y exactitud asociados en relación con la medida de la longitud, superficie y volumen.
Contenidos específicos	<ul style="list-style-type: none"> ● Longitud, superficie y volumen en el currículo oficial. ● Precisión y exactitud en la medida de la longitud, superficie y volumen.
Clase invertida	
<p>Actividad 1. Servirá para trabajar el conocimiento del currículo de la medida. Análisis sobre el desarrollo de la longitud, la superficie y el volumen por cursos en el currículo oficial. Buscar en qué curso se inicia cada una y cómo se profundiza a lo largo de los cursos de Educación Primaria.</p> <p>Actividad 2. Servirá para introducir los conceptos de precisión y exactitud en la medida. Para ello, deberán ver un video y responder de forma reflexiva y justificada a la siguiente pregunta: ¿En cuáles de estas situaciones se obtienen medidas exactas y/o precisas?</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Pesamos a un niño con una báscula que no está calibrada. ● Medimos con una cuerda elástica el alto de la puerta. ● Diferentes medidas de un instrumento dan resultados erróneos similares. ● Todos los niños de la clase miden la pata de su mesa con la regla. 	

- Al estimar la distancia entre Madrid y Segovia (96 Km), cuatro amigos proporcionan los siguientes resultados: 93, 100, 92, 99 Km.

Materiales

- Video sobre precisión y exactitud <https://ed.ted.com/lessons/what-s-the-difference-between-accuracy-and-precision-matt-anticole>

Presencial

Presentación de la sesión: En la sesión presencial se trabajan tanto conocimientos del contenido matemático como conocimientos didácticos de dichos contenidos. La actividad 1 está diseñada para trabajar la didáctica de la medida, en particular el conocimiento del currículo. Las actividades 2 y 3 servirán para trabajar contenidos matemáticos, en particular la estimación de medidas y el error en la medida.

Actividad 1. (30 minutos). Esta actividad tiene el propósito de reflexionar sobre la relación de los contenidos trabajados en la asignatura con el currículo de Educación Primaria. La tarea consistirá en resolver los problemas a nivel de Educación Primaria y explicar para que curso los consideran apropiados, identificando criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables. También deberán señalar los conocimientos necesarios para resolver ambas tareas.

1. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra se necesitan para cubrir un jardín que tiene 3 metros de ancho y 2 decámetros de largo con 8 centímetros de tierra? ¿Se puede calcular la cantidad de tierra multiplicando $2 \times (8 \times 3)$?
2. En un cubo de un centímetro de lado caben 50 granos de sémola de trigo. Describe el contenedor o recipiente que utilizarías para guardar 1 millón de granos de sémola. Describe su tamaño comparándolo con objetos de la vida cotidiana.

Primero deberán resolver la tarea de forma individual, después ponerla en común en grupos de cuatro o cinco. Finalmente se pondrá en común en gran grupo.

Actividad 2. (40 min). Esta actividad servirá para trabajar la estimación del volumen de un objeto real utilizando diversas estrategias adecuadas al nivel de Educación Primaria. Para comenzar se plantea el reto de calcular el volumen que ocupa el tramo del acueducto visible de Segovia. En grupos de cuatro deberán diseñar una actividad/secuencia de actividades para trabajar la estimación del volumen en Educación Primaria utilizando como recurso el Acueducto. Deberán indicar el curso en el que ubican la actividad, así como los estándares de aprendizaje que se trabajan con ella. Por último, deberán resolver la tarea utilizando estrategias de Primaria. Las medidas necesarias para realizar la tarea podrán buscarse en internet.

Una vez hayan terminado, se pondrán en común algunas de las actividades y se registrarán todas las estimaciones. Estas últimas se aprovecharán para trabajar los conceptos de precisión y exactitud.

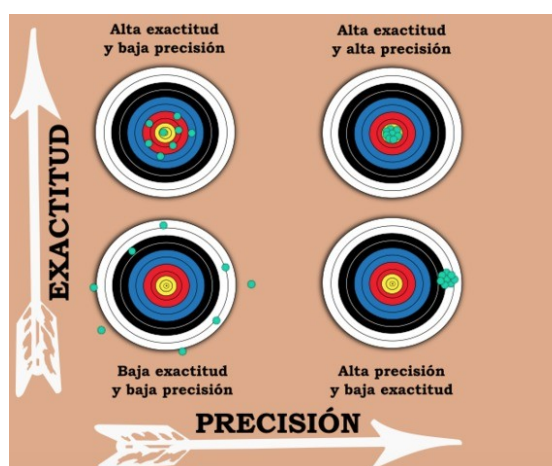
Actividad 3. (40 minutos). Esta actividad servirá para trabajar los conceptos de precisión y exactitud conectando con la lectura realizada fuera del aula. Para comenzar, se preguntará a la clase:

- Las medidas que habéis estimado del volumen del acueducto ¿son precisas? ¿Y exactas?

Se conecta con la lectura para explicar la diferencia que existe entre ambos conceptos, haciendo notar que las estrategias que han seguido no permiten proporcionar una medida exacta (posiblemente ni siquiera cercana), aunque dado que todos han seguido estrategias similares, es posible que el conjunto de todas ellas sí que sea preciso. Se mostrará la siguiente imagen (Figura 7) para apoyar la explicación:

Figura 7

Diagrama que ilustra la relación de precisión y la exactitud



Nota. Imagen obtenida de: <https://n9.cl/smzpl>

Se plantea entonces la cuestión de qué errores han podido cometer en la medida del acueducto, asumiendo que los datos que han obtenido eran correctos. En caso de que no surjan ideas se puede plantear si todas las piedras son iguales, si las piedras están completamente unidas o si quedan rendijas, si todos los arcos tienen la misma altura y el mismo número de piedras.

Entonces se plantea a los grupos que empleen las estrategias que consideren oportunas para considerar estos y otros aspectos y así poder proporcionar una medida más exacta. No se trata tanto de calcular la media concreta como de modelizar el problema y de plantear las estrategias a nivel de Educación Primaria.

Actividad 4. (10 minutos). Esta última actividad sirve como cierre de todo el proceso

<p>de medida de las tres magnitudes. Se expone a modo conclusión que se han trabajado tres magnitudes aplicables en la vida cotidiana y estrechamente relacionadas entre sí. Se plantea también que se ha ubicado su desarrollo en los cursos de Educación Primaria según el currículo oficial, así la relación de estos contenidos con otros bloques, especialmente el de geometría.</p>
<p>Materiales</p>
<ul style="list-style-type: none"> ● Bloques multibase. Regletas de Cuisenaire o similar.
<p>Evaluación</p>
<p>En esta sesión se espera que el alumnado sea capaz de:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Conocer el currículo de la medida y diseñar situaciones de aprendizaje acorde a los diversos cursos de Educación Primaria. ● Entender la diferencia que existe entre los conceptos de precisión y exactitud en el ámbito de la medida y utilizar ambos conceptos en situaciones de la vida cotidiana.

Nota. Elaboración propia

5.7 EVALUACIÓN

La propuesta que se ha presentado forma parte de una asignatura en la que se imparten otros bloques de contenidos. Por ello, se ofrece un modelo de evaluación para la presente propuesta, sin considerar el proceso de evaluación de dichos bloques.

En esta propuesta didáctica se entiende la evaluación como un proceso estructurado que implica la recogida de información sobre situaciones que se producen en la práctica educativa, con la finalidad de valorarlos y de tomar decisiones en base a la valoración realizada (Rosales, 2014). Esto se concreta en la realización de un proceso de evaluación continua y formativa que busca maximizar el aprendizaje del alumnado para que alcance los objetivos de aprendizaje establecidos.

Tal y como se ha expuesto en el marco teórico, la evaluación formativa que se realiza durante las sesiones permite ajustar las situaciones de enseñanza-aprendizaje y ayudar al alumnado proporcionándole feedback útil. Para ello, se han introducido *hinge questions* durante las sesiones, las cuales pueden aparecer de forma espontánea o como parte de los Socrative que se emplean como recurso didáctico en algunas actividades. El docente deberá servirse de la observación directa para detectar aquellas cuestiones en las que el alumnado presenta más dificultades a fin de reforzar sus explicaciones. De esta forma, se

favorece que cumpla con los criterios de evaluación que se establecen en cada una de las sesiones.

Respecto a la regularidad de la evaluación, se establecen los siguientes tipos:

- **Evaluación inicial:** el alumnado realizará un Socrative en la primera sesión que tendrá la doble función de informar al docente sobre el nivel inicial del alumnado, y a este como autoevaluación.
- **Evaluación formativa:** tal y como se ha mencionado, se realizará durante toda la propuesta con la finalidad de mejorar el proceso de aprendizaje del alumnado. Una vez terminada la propuesta se realizará una prueba escrita que servirá para evaluar el nivel de aprendizaje individual del alumnado. Esta prueba podrá ser utilizada como un instrumento de evaluación sumativa si el docente lo considera oportuno (ver Anexo 8).

5.8 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

En los estudios universitarios la diversidad natural del aula es considerablemente más homogénea que en las etapas formativas previas. Esto se debe a que el alumnado que accede a estudios avanzados presenta unas características cognitivas, personales y motivacionales similares al haber cursado de forma voluntaria o bien Bachillerato, o bien un Ciclo Formativo de Grado Superior. Por ello, en caso de matricularse un estudiante con una necesidad educativa específica, se realizarán las adaptaciones pertinentes en base a dicha necesidad. Con carácter general e inclusivo, los materiales creados *exprofeso* para esta propuesta están escritos con una tipografía adecuada para personas con dislexia.

En todo caso, las situaciones de aprendizaje que se han planteado, así como las metodologías de enseñanza que se emplean, pretenden dar respuesta a los distintos ritmos de aprendizaje del alumnado universitario. Este accede a la universidad con una base de matemática diversa, lo cual hace que sea necesario plantear actividades inclusivas y motivadoras tanto para los más avanzados como para aquellos con un conocimiento menos formado. Esto se ha concretado en la propuesta de actividades de suelo bajo, techo alto a lo largo de todas las sesiones. Así mismo, el uso del enfoque CPA y las múltiples representaciones que se presentan de cada objeto matemático son adecuadas para trabajar con personas con discalculia.

6. CONCLUSIONES

La realización del presente Trabajo de Fin de Grado ilustra la aplicación de conocimientos sobre educación relativos a la etapa de Educación Primaria, incluidos contenidos curriculares, criterios de evaluación, técnicas de enseñanza-aprendizaje y características del alumnado. La propuesta didáctica que se expone en el presente trabajo expone una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de Educación Primaria que incluye aspectos relativos al currículo, la evaluación, la metodología y las características del alumnado en el área de Matemáticas. Así mismo, ilustra una capacidad de planificar buenas prácticas de enseñanza-aprendizaje y de integrar información y conocimientos para resolver problemas educativos, en este caso, proporcionar una propuesta didáctica que sea útil para futuros estudiantes del bloque de Didáctica de la medida.

La labor realizada en este TFG muestra la capacidad de reunir e interpretar datos esenciales, incluyendo las estrategias de búsqueda de información. Todo ello se realiza ampliamente mediante una revisión bibliográfica de diversos aspectos relativos a la didáctica en general y de la didáctica de la matemática en particular, tales como el modelo MTSK, la teoría de la carga cognitiva o la zona de desarrollo próximo. Se han consultado diversas fuentes de información, priorizando las distintas bases de datos relacionadas con las Educación (Web of Science, Scopus, ERIC) y buscando siempre las referencias más pertinentes para la propuesta. De forma análoga, se han realizado las consultas necesarias a docentes expertos en el ámbito del trabajo. De esta forma también se ilustra la adquisición de capacidad de iniciarse en actividades de investigación y el conocimiento de estrategias y metodologías de autoaprendizaje.

En cuanto a las competencias que se esperan adquirir en el área de Matemáticas, el presente trabajo muestra la adquisición de conocimientos matemáticos básicos, en especial del bloque de media, aunque también de cálculo, geometría, estimación y representación espacial. Además, se plantea una propuesta matemática que incluye una parte de resolución de problemas relacionados con la vida real. Cabe destacar también la modelización de situaciones de la vida cotidiana a través de la matemática, particularmente en la estimación de la medida de algunas magnitudes en contextos reales. Por último, se demuestra la capacidad de transformar un saber matemático en un saber enseñar, en tanto el planteamiento de situaciones didácticas para futuros docentes de educación implica no solo el conocimiento del contenido matemático, sino también el de

su didáctica, fundamentada en el modelo MTSK de enseñanza de las matemáticas. De esta forma queda integrado el currículo escolar de Educación Primaria, así como la evaluación más adecuada a aquellos contenidos que se desarrollan.

Así mismo, hay que destacar la competencia general sobre los procesos y contextos educativos, ya que se demuestra un conocimiento acerca de la práctica docente, las metodologías activas, el trabajo en equipo, el uso adecuado de tiempos, espacios y agrupamientos, el diseño, planificación y evaluación docente en el aula y el diseño de un proyecto de innovación educativa. La propuesta planteada cumple con estas competencias y a su vez está diseñada para que el alumnado que la siga pueda también desarrollarlas.

Por otro lado, la propuesta diseñada está basada en el uso de metodologías de innovación y se asienta en el principio fundamental de la evaluación formativa. Tanto el modelo del *Flipped classroom* como el uso de las preguntas bisagra han mostrado una mejora sustancial en los procesos de aprendizaje y en el rendimiento académico en la formación universitaria. Cabe destacar el uso de las preguntas bisagra durante las sesiones como herramienta para que el docente pueda hacer un seguimiento adecuado del aprendizaje de su alumnado. También es especialmente útil la presentación de materiales elaborados *exprofeso* para esta unidad didáctica, los cuales siguen la línea de enseñanza establecida en el marco teórico.

A modo de conclusión, se consideran cumplidos todos los objetivos del presente TFG. Respecto a los objetivos personales, siguiendo las líneas ya expuestas en este apartado, tanto el marco teórico como la propuesta didáctica ilustran la capacidad de comprender el proceso formativo de un docente, realizar un análisis profundo de la didáctica de la matemática sobre la enseñanza de la medida, así como elaborar una propuesta didáctica para el nivel educativo de la universidad. En cuanto a los objetivos prácticos, considero que la propuesta didáctica diseñada está adecuadamente fundamentada, a tenor de haber logrado cumplir con los objetivos personales. De igual modo, considero que las actividades diseñadas benefician la adquisición de las competencias necesarias para impartir la docencia de las magnitudes trabajadas. Por último, una visión conjunta del marco teórico y de la propuesta didáctica permite discernir que la investigación realizada conduce a una propuesta didáctica sólida. En ella, se aprecia la diferencia entre las metodologías educativas beneficiosas para el alumnado universitario, y aquellas que conviene emplear en Educación Primaria.

Cabe señalar como posibilidad de ampliación de este trabajo, la realización de una propuesta educativa en la que se desarrolle la didáctica del resto de magnitudes que figuran en el currículo de Educación Primaria. Dado que ya se han establecido unos principios metodológicos adecuadamente fundamentados, el siguiente paso consistiría en diseñar actividades para que el alumnado universitario fuese capaz de impartir la misma secuencia didáctica respecto a las magnitudes de capacidad, masa, tiempo y ángulos. Por eso, uno de los aspectos más interesantes del presente trabajo radica en que muchas de las actividades diseñadas son adaptables a estas otras magnitudes.

Finalmente, me gustaría destacar la gran satisfacción que ha supuesto realizar este TFG porque me ha permitido asumir el riesgo de realizar una programación para futuros docentes. Esto ha requerido ampliar mi visión, investigar y reflexionar desde una perspectiva nueva y más amplia. Todo ello ha supuesto un final muy provechoso a esta etapa de mi formación y quizá haya abierto la vía de un nuevo camino.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. & Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, VII CIBEM* (pp. 5063-5069). Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguay.
- Aguilar, A., Muñoz, C., Carrillo, J., & Rodríguez, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas?. *PNA*, *13*(1), 41-61.
<https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/190041>
- Álvarez, A. & Del Río, P. (1990). Aprendizaje y desarrollo: la teoría de la actividad y la Zona de Desarrollo Próximo. En C. Coll, J. Palacios & A. Marchesi (Eds.). *Desarrollo psicológico y educación. II. Psicología de la Educación* (93-119 pp). Alianza Editorial.
- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). *Content knowledge for teaching: What makes it special?* *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.
<https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/17679>

- Barton, C. (2018). On Formative Assessment in Math: How Diagnostic Questions Can Help. *American Educator*, 42(2), 33-38. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1182085>
- Baldeón, M., Alvarez, J. A. H., & Córdova, G. M. V. (2020). Provocación por desafíos: Experiencia optimizadora del abordaje de tareas matemáticas con alta demanda cognitiva. *Revista Electrónica Educare*, 24(3), 2-29. <http://dx.doi.org/10.15359/ree.24-3.9>
- Beckmann, S. (2018) *Mathematics for Elementary Teachers: with Activities* (5th ed). Pearson Education.
- Blasco, A., Lorenzo, J., & Sarsa, J. (2016). La clase invertida y el uso de vídeos de software educativo en la formación inicial del profesorado. Estudio cualitativo. *Revista d'innovació educativa*, 17(5), 12-20.
- Boaler, J., Munson, J., & Williams, C. (2019). *Mindset Mathematics: Visualizing and Investigating Big Ideas, Grade 7*. Jossey-Bass.
- Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, 12(1), 5-38.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- Dai, Y., Li, T., Liu, A., & Lu, S. (2018, June), *P2P Platform for Peer Instruction in Flipped Classroom* [Presentación de paper]. ASEE Annual Conference & Exposition. Salt Lake City, USA. <https://peer.asee.org/30854>.
- Du Sautoy, M. (2020). *Programados para crear: Cómo está aprendiendo a escribir, pintar y pensar la inteligencia artificial*. Acantilado.
- Dweck, C. S. (1986). Motivational process affecting learning. *American Psychologist*, 41(10), 1040-1048. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.41.10.1040>.
- Fernández, R., Hernández, C. A., Prada, R., & Ramírez, P. (2020). Creencias y ansiedad hacia las matemáticas: un estudio comparativo entre maestros de Colombia y España. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(68), 1174-1205.
- García, M., & Benítez, A. (2013). Desempeño de los estudiantes en tareas matemáticas que hacen uso de diferentes representaciones. En R. Flores, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (pp. 907-915). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Ketterlin, L. R., Chard, D. J., & Fien, H. (2008). Making connections in mathematics: Conceptual mathematics intervention for low-performing students. *Remedial and Special Education, 29*(1), 33-45.
- Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: *The contribution of research. Educational studies in mathematics, 47*(1), 101-116.
- Mazur, E. (2014). *Peer Instruction: A user's Manual*. Pearson.
- Maxwell, J. A. (2008). Designing a qualitative study. En L. Bickman & D. J. Rog (Eds.), *Handbook of Applied Social Science Research Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Memoria del plan de estudios del título de Grado de maestro/a en Educación Primaria por la Universidad de Valladolid (23 de marzo de 2010). [http://www.feyts.uva.es/sites%5Cdefault%5Cfiles/MemoriaPRIMARIA\(v4,230310\).pdf](http://www.feyts.uva.es/sites%5Cdefault%5Cfiles/MemoriaPRIMARIA(v4,230310).pdf).
- Muñoz, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18*(3), 1801-1817.
- National Research Council (NRC). (2000). *Inquiry and the national science education standards: A guide for teaching and learning*. National Research Press.
- Pintrich, P. R. (2003) A motivational science perspective on the role of student motivation in learning and teaching contexts. *Journal of Education Psychology, 95*(4), 667-686.
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*(1), 44-49.
- Rosales, M. (noviembre, 2014). *Proceso evaluativo: Evaluación sumativa, evaluación formativa y assesment. Su impacto en la educación actual*. [Presentación de paper]. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, Buenos Aires, Argentina. www.oei.es/congreso2014/memoriactei/662.

- Ruso, R. C. (2001). El concepto de zona de desarrollo próximo: una interpretación. *Revista cubana de psicología*, 18(1), 72-76.
- Smith, M., & Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical task: From research to practice, *Teaching mathematics in the Middle School* 3(5), 344-350.
- Stein, M., Smith, M., Henningsen, M., & Silver, E. (2009). *The mathematical task framework. Implementing standards based mathematics instruction* (pp. 1-13). USA: NCTM.
- Sweller, J. (2011). Cognitive load theory. *Psychology of learning and motivation*, 2(55), 37-76.
- van de Walle, J. A. (2014). *Teaching Student-Centered Mathematics Vol. I: Developmentally Appropriate Instruction for Grades Pre-K-2*. Pearson.
- William, D., & Leahy, S. (2016). *Embedding formative assessment*. Hawker Brownlow Education.
- Witzel, B. S. (2005). Using CRA to teach algebra to students with math difficulties in inclusive settings. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 3(2), 49-60.
- Zambrano, J. (abril, 2018). *Enseñar considerando la carga mental del aprendizaje: la teoría de la carga cognitiva*. [Presentación de paper]. IV Congreso Internacional de Ciencias Pedagógicas de Ecuador, Guayaquil, Ecuador.

8. ANEXOS

8.1 ANEXO 1: TEST DE EVALUACIÓN INICIAL

Evaluación inicial

1. 200 cm son aproximadamente

- (A) la longitud de un coche grande
- (B) la longitud de una cama
- (C) la altura de una mesa
- (D) la altura de un vaso de caña

2. 100 dm equivalen a 1 dam

- (T) True
- (F) False

3. En un cubo de un metro de lado caben...

- (A) 10000 centímetros cúbicos
- (B) 1 tonelada de agua
- (C) 100 litros de agua
- (D) 100 decímetros cúbicos

4. 100 metros cuadrados equivalen a

- (A) 10 decámetros cuadrados
- (B) 1 hectómetro cuadrado
- (C) 1 decámetro cuadrado
- (D) 1 kilómetro cuadrado

5. En una jeringuilla caben unos pocos centímetros cúbicos

- (T) True
- (F) False

- 6.** Desde Girona hasta Huelva hay unos...
- (A) 2400 km
 - (B) 300 km
 - (C) 600 km
 - (D) 1300 km
- 7.** Un camión grande (trailer) ocupa más volumen que media piscina olímpica
- (T) True
 - (F) False
- 8.** Cuando caminas cinco minutos a paso ligero estas recorriendo aproximadamente
- (A) 1,5 Km
 - (B) 100 metros
 - (C) 600 metros
 - (D) 2 Km

8.2 ANEXO 2: TEXTO SOBRE MEDIDA

El siguiente enlace permite acceder al texto sobre medida que se leerá en la sesión 1.
<https://n9.cl/a6z0a>

8.3 ANEXO 3: MATERIALES MANIPULATIVOS PARA EL AULA

Figura 8

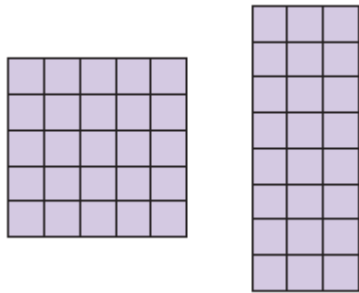
Bloques multibase y regletas de cuisenaire



8.4 ANEXO 4: HOJA CON EJERCICIOS

Actividades sesión 2

1. María dice que el rectángulo de la izquierda es más largo que el de la derecha. Jorge dice que el rectángulo de la derecha es más largo que el de la izquierda. Explica quién tiene razón y porqué.

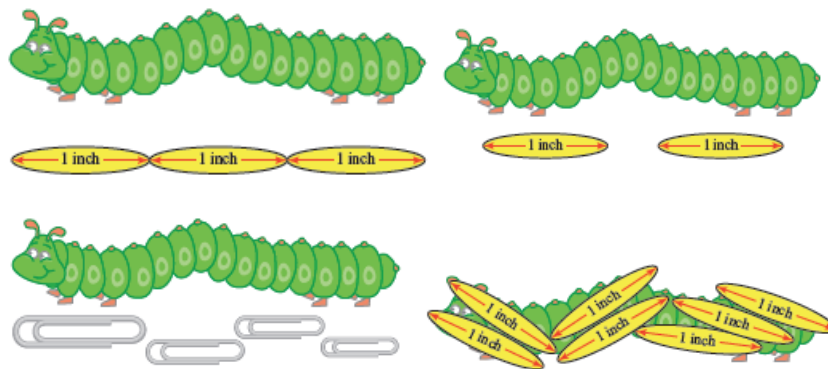


2. ¿Es más largo el acueducto (zona azoguejo) en la parte superior o a la altura del suelo? ¿cómo proporcionarías una estimación? Diseña una actividad que pueda realizarse con niños de 4º para averiguarlo detallando materiales, contenidos y criterios de evaluación que lo justifiquen. Utiliza una cuerda como material manipulativo para apoyar tu explicación.



3. Tomando como respuesta correcta la primera imagen en la que se ha medido la longitud del gusano utilizando una unidad de medida no estándar (ignorar inch), ¿Qué errores ha cometido se

han comedido en las siguientes imágenes y cómo ayudarías al niño a entenderlo?



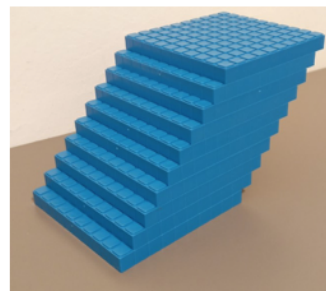
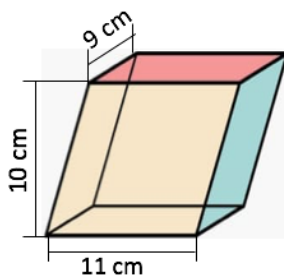
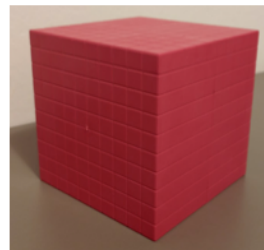
4. Sophie dice que su habitación tiene forma de rectángulo y sus lados miden tres y cuatro metros respectivamente. Por eso, según ella su habitación mide 14 metros de largo. ¿Tiene razón? ¿Qué propiedades de la longitud está empleando? En caso de que no tenga razón, ¿cómo podrías ayudarla a entenderlo?

5. Un kilómetro son mil metros. ¿Implica esto que 1 km^2 son 1000 m^2 ? Si no, ¿cuántos metros cuadrados son 1 km^2 ? Explica cómo podrías trabajar esta relación en E.P. utilizando material manipulativo pictórico.

6. Ada va a dar una cena en su casa para su familia, pero solo tiene una mesa. La superficie de la mesa es un círculo con un diámetro de 2 metros. Según un renombrado portal de internet el ancho óptimo para que una persona coma cómodamente en la mesa es de unos 76,2 cm, siendo 61 cm el espacio mínimo que ha de tener cada persona. Y el largo óptimo y mínimo para el servicio de cada persona es de 45,7 y 40,6 cm, respectivamente.

Teniendo en cuenta estas medidas ¿a cuánta gente podría invitar a la fiesta?

7. ¿Cuál de las siguientes imágenes es diferente a las demás? Encuentra argumentos basados en la longitud, superficie y volumen.



8.5 ANEXO 5: TEXTO SOBRE EL USO DE INSTRUMENTOS DE MEDIDA

El siguiente enlace permite acceder al texto sobre medida que se leerá en la sesión

<https://n9.cl/xlrb4>

8.6 ANEXO 6: TEST PARA LA SESIÓN 2

Sesión 2

Score ___

1. En 3oInf o 1oPrim podríamos introducir las unidades de medida de longitud
 - (A) explicándoles cómo se mide con una regla
 - (B) llevando metros de madera para que los manipulen
 - (C) pidiendo que midan una cuerda con palillos de dientes y con palillos chinos
 - (D) manipulando las unidades: "Mide tu mesa en palmos"

2. En 3oPrim se pueden trabajar los cambios de unidades de longitud a metros
 - (A) pidiendo que multipliquen x10 para pasar de hectómetros a kilómetros
 - (B) es demasiado pronto para trabajar cambios de unidades de longitud
 - (C) utilizando material manipulativo o pictórico con cierto nivel de abstracción
 - (D) midiendo con objetos largos con metros de madera

3. En un metro cuadrado caben 10 bloques multibase de la centena
 - (T) True
 - (F) False

4. Para pasar de kilómetros cuadrados a hectómetros cuadrados
 - (A) multiplicamos por 10
 - (B) multiplicamos por 100
 - (C) necesito una calculadora
 - (D) dividimos entre un múltiplo de 10

5. 3 dm^2 equivalen a
 - (A) 30 m^2
 - (B) $0,3 \text{ m}^2$
 - (C) $0,03 \text{ m}^2$
 - (D) 30 cm^2

6. El suelo de una habitación tiene una superficie de 28 metros cuadrados. ¿Cuál es el área de esta habitación en cm^2 ?

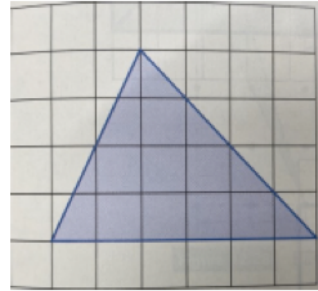
7. 10 metros cuadrados es una superficie...

- A** equivalente a un cuadrado de 10 metros de lado
- B** que podría cubrir con (aprx.) 300 folios A4
- C** equivalente (aprx.) a una plaza de aparcamiento estándar
- D** que corresponde exclusivamente a un cuadrado de lado $\sqrt{10}$

8. En 4oPrim se puede introducir la superficie

- A** midiendo la superficie de la pizarra con el metro
- B** explicando la fórmula del área de figuras sencillas como el cuadrado dibujando ejemplos en la pizarra
- C** comparando la superficie de una mesa con la de un libro

9. Usando como unidad de medida los cuadrados de la trama y sin utilizar ninguna fórmula ¿cuál es la superficie de este triángulo?



10. ¿Cómo trabajarías la iniciación en la medida de la superficie de un rectángulo utilizando regletas de cuisenaire u otro material similar?

11. Es imposible medir la superficie de esta figura utilizando regletas de cuisenaire

- T** True
- F** False



8.7 ANEXO 7: TEST PARA LA SESIÓN 3

Sesión 3

Score _____

- 1.** Para trabajar los cambios de unidades de longitud es importante
 - (A) saber cuando multiplicar o cuando dividir
 - (B) saber que para subir en la escalera se divide entre 10 y para bajar se multiplica por 10
 - (C) saber que en un metro caben 10 decímetros
 - (D) hacer muchas operaciones para entender bien el proceso

- 2.** Para trabajar los cambios de unidades de superficie es importante
 - (A) trabajar de forma manipulativa el cambio de unidades de kilómetros cuadrados a metros cuadrados
 - (B) combinar el uso de manipulativos con razonamientos abstractos
 - (C) entender que en cada unidad de medida caben 100 unidades de la anterior
 - (D) apoyarse en el concepto de metro cuadrado

- 3.** ¿Cuál de las siguientes tiene el mismo área o mide lo mismo que 3 cm^2 ?
 - (A) Un cuadrado de 3 cm de lado
 - (B) 3 cm x 3 cm
 - (C) 3 cuadrados de un centímetro de lado
 - (D) Un cuadrado de 30 mm^2

- 4.** En un metro cúbico caben 1000 bloques multibase de la unidad de millar
 - (T) True
 - (F) False

- 5.** Para pasar de decímetros cúbicos a metros cúbicos
 - (A) multiplicamos por 1000
 - (B) multiplicamos por 100
 - (C) dividimos por 1000
 - (D) no tengo claro si hay que dividir o multiplicar

6. 4 cm^3 equivalen a

- (A) 4000 mm^3
- (B) $0,004 \text{ dm}^3$
- (C) 4 ml
- (D) cuatro cubos de lado 1 cm

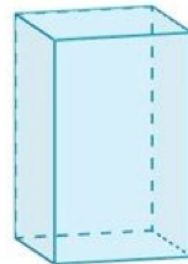
7. 3 metros cúbicos es un volumen

- (A) equivalente a un cubo de 3 metros de lado
- (B) similar a la cantidad de agua que cabe en una bañera pequeña
- (C) similar al volumen del maletero de un coche
- (D) equivalente a tres mil bloques multibase de la unidad de millar

8. En 6oPrim se puede introducir el volumen

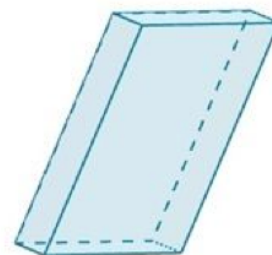
- (A) calculando el volumen de un prisma recto multiplicando sus lados
- (B) explicando la fórmula para calcular volúmenes de figuras sencillas como prismas
- (C) experimentando con material manipulativo para comparar el tamaño de dos objetos

9. ¿Cómo trabajarías la iniciación a la medida del volumen de un prisma recto utilizando regletas de cuisenaire u otro material similar?



10. Para calcular el volumen de este prisma

- (A) Puede hacerse con material manipulativo aplicando propiedades del volumen
- (B) Es necesario utilizar la fórmula del volumen de un prisma
- (C) No puede hacerse con material manipulativo



11. En una obra de construcción se necesitan 40 metros cúbicos de hormigón. ¿Qué significa "40 metros cúbicos de hormigón"?

8.8 ANEXO 8: PRUEBA DE EVALUACIÓN

Prueba de evaluación competencias docente en medida

1. ¿Cuántas losetas cuadradas de 40 cm de lado se necesitan para recubrir las caras de una piscina de 15m de largo por 5 m de ancho y de 2 m de profundidad?. Explica el razonamiento que sigues a nivel pictórico.
2. Al calcular el volumen de agua que cabe en la piscina del problema anterior en una clase de Primaria, un alumno plantea que el volumen de agua que cabe en la piscina equivale a 150 bloques multibase de la unidad de millar, ya que en cada uno cabe un litro. ¿Tiene razón? En caso contrario, explica cómo podrías ayudarlo a entenderlo utilizando un enfoque pictórico o manipulativo. ¿En qué curso de Educación Primaria podría realizarse este problema? Justifica tu respuesta.
3. Indica los motivos por los que un alumno podría realizar esta actividad sin llegar a tener una comprensión profunda de las unidades de medida:

