Universidad de Valladolid

Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática

Planificación y diseño de una propuesta didáctica fundamentada para trabajar comprensivamente el límite de una función en Bachillerato

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas

Especialidad en Matemáticas

Alumno: Alejandro Granado González

Tutor: Dr. Matías Arce Sánchez

Valladolid, Julio de 2022

Índice general

Índice de Figuras

Índice de Tablas

1. Introducción

El concepto de límite se manifiesta a día de hoy como uno de los más controvertidos de todas las matemáticas que se abordan en Bachillerato: podemos comprobar a pie de aula, en cualquier centro educativo, que son muchos los docentes que tratan de evitar dar una explicación que arroje luz sobre su significado preciso. No cabe duda de que se trata de un concepto complejo, para nada fácil de entender, como así muestra el largo periodo histórico que ha sido necesario hasta llegar a su conceptualización actual. Los intentos por hacérselo llegar a los alumnos han fracasado en general, especialmente cuando se les presenta una definición formal como la siguiente sin realizar ningún trabajo previo:

> La función f tiende hacia el límite L cuando x tiende hacia a si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x con $0 < | x - a | < \delta$, estando f definida en x, se verifica que $| f(x) - \mathrm{L} | < \varepsilon$.

Como indica Durán (1996), “esta definición que hoy en día se utiliza sorprende por su complicación conceptual y formal, caracterizada por un enunciado aparentemente indescifrable” (p. 53). La evidente complejidad que encierra provoca que, en muchas ocasiones, el trabajo del concepto de límite en las aulas de Bachillerato se dirija casi exclusivamente hacia la adquisición de procedimientos y reglas de cálculo (operaciones con infinito, cálculo de indeterminaciones, regla de L’Hôpital…) sin sentar las bases necesarias para desarrollar progresivamente su comprensión. A esto se le suma el carácter propedéutico que han adquirido estas enseñanzas como una preparación para las Pruebas de Acceso a la Universidad, en las que se evalúan mayormente aspectos procedimentales frente a los conceptuales. El sistema de representación que se utiliza es casi exclusivamente el algebraico, dejando de lado los registros numérico-tabulares y gráficos que bien sirven para entender las ideas de aproximación subyacentes en él. Con todo ello, son habituales los errores y persistentes los obstáculos, que encuentran su causa en la poca comprensión general de su significado.

En este Trabajo Final de Máster se realiza la planificación y el diseño de una propuesta didáctica que tiene por objetivo principal el proporcionar oportunidades de aprendizaje adecuadas para el desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. En efecto, la idea de límite es central en el bloque curricular de Análisis Matemático, ya que en torno a él se construyen otros conceptos como el de continuidad, el de derivada o el de integral definida de una función. Una buena comprensión del primero proporcionará una base sólida y estable para poder entender y trabajar con el resto. Por lo tanto, este trabajo surge con la idea de mejorar la práctica docente en torno a un concepto que resulta complicado tanto a profesores como a estudiantes.

Antes de ello, vemos necesario realizar una contextualización del concepto de límite – desde un punto de vista tanto matemático como didáctico – para poder sentar un punto de referencia sobre por qué la enseñanza de este se lleva a cabo de la manera actual. Comenzaremos el capítulo 3 con un recorrido histórico sobre las distintas conceptualizaciones que ha tenido. Tras ello, veremos como el formalismo en torno al límite ha ido disminuyendo con las sucesivas leyes educativas del sistema español, fomentándose el uso de algoritmos frente a la comprensión (aunque la inminente LOMLOE hace un tratamiento completamente contrario en cuanto a estos aspectos). Lo anterior se evidencia en los libros de texto de las distintas épocas, en los cuáles podemos apreciar el papel que se le da al alumno y el tratamiento que se hace del concepto. Por último, vincularemos el modo de trabajo actual sobre el límite en el aula con el efecto perverso que tienen las pruebas EBAU en el Bachillerato.

Una vez fijado el punto de partida, estudiaremos en el capítulo 4 cuáles son los aspectos en los que debería basarse una propuesta didáctica que conduzca a tratar el límite de una manera comprensiva. Las distintas investigaciones en Didáctica de la Matemática nos muestran las respuestas que necesitamos: la definición de límite usual se plantea en términos demasiado estáticos, que no están de acuerdo con las ideas dinámicas que se les presentan a los estudiantes al introducir el concepto de límite. Es por ello que Blázquez y Ortega (2001, 2002) crearon una nueva definición de límite como aproximación óptima, la cual es igual de rigurosa y prescinde de los aspectos formales que tan complicados les parecen. Se debe partir de crear una imagen en la estructura cognitiva de los estudiantes sólida y variada, con situaciones no prototípicas que les hagan reflexionar. En esto resulta fundamental el uso de las representaciones numérico-tabular y gráfica más allá de la algebraica, que apoyan el concepto y muestran este carácter dinámico que lo caracteriza. Las investigaciones también nos indican cuáles son los obstáculos y las ideas erróneas que habitualmente desarrollan, las cuales tendremos en cuenta para tratar de evitarlas o solucionarlas.

En el capítulo 5 se ilustra a través de lo vivido en las prácticas del máster que todo lo que se ha comentado anteriormente sucede verdaderamente en un centro educativo cuando se aborda el concepto de límite en Bachillerato.

El capítulo 6 recoge finalmente la propuesta didáctica que se ha elaborado para trabajar el concepto de límite de una manera comprensiva. Sus puntos fuertes son: la introducción de metodologías activas a través del aula invertida o *Flipped Classroom*, la inclusión del software GeoGebra para representar funciones y analizar la existencia de límites (tanto de manera gráfica como tabular) y el cambio de perspectiva en cuanto al modo de tratar el concepto de límite. Se incluye además su temporalización y las actividades que se realizarán en cada sesión. La implementación no pudo ser llevada a cabo, por lo que en el capítulo 7 se hace un análisis de cómo podría haber sido esta hipotéticamente. El trabajo se cierra con la conclusión y unas reflexiones finales en el capítulo 8.

2. Justificación y objetivos del TFM

Este Trabajo Fin de Máster está incluido dentro del *Módulo Prácticum*, el cual es un módulo de desarrollo profesional que consta de dos asignaturas: por un lado, las prácticas en un centro de Enseñanza Secundaria Obligatoria (10 ECTS) y en segundo lugar un Trabajo Fin de Máster (6 ECTS). Junto al Módulo General, en el que se abordan asuntos de pedagogía, sociología y psicología, y al Módulo Específico, dedicado a aspectos propios de las matemáticas como disciplina y de su didáctica, los 3 conforman la totalidad del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas en la especialidad de Matemáticas.

La formación que me ha aportado este máster ha cambiado ligeramente mi punto de vista sobre la enseñanza de las Matemáticas, haciendo sobre todo que me interese más por aspectos referentes a su Didáctica. Esta es una formación que no adquirí durante mis estudios previos en el Grado en Matemáticas, en los cuales pude ver que es una disciplina sólida sentada sobre unos pilares fijos llamados axiomas, de los que se derivan todos sus resultados a través de la lógica. Sin embargo, este punto de vista no es el que ha de tenerse en cuenta como docente en la Educación Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato: los estudiantes han de familiarizarse con los conceptos a través de la manipulación, la experimentación, la intuición, la indagación, la formulación de hipótesis, la detección y conjeturación de propiedades y fenómenos... Esta forma de aprender es mucho más útil, lejos de proporcionar un conocimiento construido y cimentado.

Esta perspectiva es la que he decidido aplicar en este TFM: en relación al concepto de límite, no se les puede enseñar a los alumnos una definición que sintetiza todo un proceso histórico de refinamiento producido a lo largo de muchos siglos. Hay que fomentar que el alumno construya su propio aprendizaje, ayudándole a fijar sus cimientos para que sea él quien llegue a establecer resultados. Cuando el docente ve que existe un problema, como el referente a la comprensión del límite, tiene dos opciones: o ignorarlo y evadirse, o replantearse su rol como docente. Es por ello que esta propuesta se basa en la innovación: el uso de softwares como GeoGebra que permiten la manipulación y el desarrollo de metodologías activas en el aula aumentan la motivación por el aprendizaje, lo que esperablemente mejorará la comprensión en torno al límite.

2.1. Aportaciones del máster al TFM

Las asignaturas que se han cursado durante este máster han influido notablemente (algunas más que otras) en el desarrollo de este TFM. Más en detalle:

- **Innovación docente en Matemáticas**: me ha permitido acercarme a nuevas metodologías como el Flipped Classroom y conocer algunas de las potencialidades del software GeoGebra.

- **Prácticas externas**: el periodo de prácticas que realicé en el IES "La Merced" de Valladolid me hizo ponerme en la situación de un verdadero docente: conocí la realidad cercana que se vive en el aula, los problemas habituales (y persistentes) a los que se enfrentan los alumnos y comprobé cómo es la enseñanza que se lleva a cabo en cuanto a límites.

- **Diseño curricular en matemáticas**: aunque esta asignatura no ha contribuido todo lo que quisiera a mi formación como docente, sí que me ha servido para conocer cómo elaborar una propuesta didáctica referida al tema de límites.

- **Iniciación a la investigación educativa en matemáticas**: en ella adquirí los conocimientos necesarios para realizar búsquedas científicas de información, así como la manera de llevar a cabo una investigación para poner a prueba una propuesta didáctica como la presente (algo que podría suceder en un futuro).

- **Ideas y conceptos matemáticos a través de la historia**: esta asignatura me permitió conocer la evolución del concepto de límite a lo largo de la historia, algo que fomentó mi curiosidad y mi motivación para llevar a cabo este TFM.

- **Didáctica de la matemática**: aunque no pudimos abordar el tema de los límites en detalle, sí que pude conocer algunas de las teorías de aprendizaje que existen en matemáticas, influyendo esto en el desarrollo de este trabajo.

- **Procesos y contextos educativos**: esta asignatura me permitió conocer cómo se organiza el sistema educativo español y las distintas leyes educativas que se han ido promulgando a lo largo de la historia.

2.2. Objetivos del TFM

Se fijan los siguientes objetivos personales, prácticos e intelectuales que se pretenden alcanzar con el desarrollo de este TFM:

Objetivos personales:

- Devolver el protagonismo al concepto de límite dentro de las matemáticas de Bachillerato frente a los aspectos procedimentales.

- Conseguir que toda la diversidad del alumnado se interese por aprender asumiendo un rol activo y a través del uso de softwares informáticos.

Objetivos prácticos:

- Realizar una búsqueda bibliográfica que permita entender la situación actual respecto a la enseñanza del concepto de límite.
- Crear una propuesta didáctica que incluya oportunidades de aprendizaje adecuadas para desarrollar una comprensión del concepto de límite.

Objetivos intelectuales:

- Reflexionar sobre cuál es el mejor modo de evitar los obstáculos relacionados con los límites a la hora de elaborar una propuesta didáctica.

3. Contextualización del concepto de límite

En este primer capítulo haremos un estudio profundo sobre **cómo se ha llegado al concepto de límite que se les transmite a los estudiantes de Bachillerato y sobre cómo se aborda actualmente en el aula**. Para ello, es necesario conocer en primer lugar cómo ha sido el **proceso histórico** que ha llevado a formular el concepto de límite en la manera en que se hace hoy en día: desde las primeras apreciaciones de aproximación que emplearon los matemáticos griegos, el límite ha permanecido escondido detrás de las ideas del análisis hasta el siglo XIX. Veremos cómo inicialmente estaba muy vinculado a nociones geométricas para finalmente pasar a tener su fundamentación en la aritmética, en los números, evolucionando de concepciones dinámicas (aproximaciones *tan buenas como se quiera*) a estáticas (en términos de épsilon-delta). En segundo lugar, haremos un breve recorrido de cómo ha sido la **evolución curricular** que involucra al concepto de límite a lo largo de los distintos planes de estudio españoles: desde su entrada en el currículo en 1934, su enseñanza ha variado enormemente en cuanto a las definiciones utilizadas, a las representaciones empleadas, a la metodología elegida por los libros de texto… Finalmente, lo situaremos dentro del currículo actual de la LOMCE, vigente hasta este curso 2021/2022 en los centros educativos, lo relacionaremos con su presencia en las pruebas de acceso a la universidad y veremos su influencia en el Bachillerato.

Esto nos permitirá **contextualizar por qué la enseñanza del límite se efectúa actualmente en la manera en que se hace**, dándonos algunas ideas sobre cómo deberíamos enfocar nuestra propuesta didáctica para lograr tratar el límite de una manera comprensiva dentro de un aula de Bachillerato. Hay que destacar que dichas conclusiones obtenidas están muy de acuerdo con el modo de tratar las matemáticas que tiene la nueva ley de educación, la LOMLOE, que da una **gran importancia a afianzar los conceptos matemáticos frente a los métodos procedimentales y algorítmicos**. Este proceso de indagación que hemos realizado es muy importante, ya que según López-Esteban (2019),

> El análisis de la historia del límite y de la evolución de su enseñanza facilita la reconstrucción de los conceptos, ayuda a contextualizarlos y a conocer los diversos acercamientos a lo largo de la historia, permite interrogar sobre la validez de las formas de argumentar vigentes en otras épocas y buscar los fundamentos de las formas actuales (p. 99).

3.1. El límite desde una perspectiva histórica

El primer hecho que merece ser destacado es que **la organización didáctica** “normalizada” del bloque curricular del Análisis Matemático (límite, continuidad, derivada e integral de una función, habitualmente en este orden) **sigue un camino inverso con respecto a su desarrollo histórico** (López-Esteban, 2019). Estos conceptos surgieron históricamente motivados por la resolución de varios problemas del mundo físico y de la geometría (Blázquez y Ortega, 2002; Sánchez-Matamoros, 2004):

1. Cálculo de **áreas** acotadas por curvas y de **volúmenes** acotados por superficies (un tema que ya intrigó a los matemáticos griegos, relacionado con la integral definida);
2. Dada la posición de un cuerpo a lo largo del tiempo, obtener la **velocidad y aceleración** en cualquier instante o recíprocamente, determinar la fórmula del espacio a partir de la aceleración o la velocidad (lo que involucra la derivada y la integral indefinida, en ocasiones llamada *antiderivada* dada su conexión a través del teorema fundamental del cálculo);
3. Obtención de la **recta tangente a una curva** en un punto (enfocado inicialmente de manera geométrica, y posteriormente mediante problemas físicos estudiando la pendiente de dicha recta dando lugar a la derivada);
4. Estudio de los **extremos (máximos y mínimos)** de una función (íntimamente ligado con la derivada y la posición de la recta tangente en estos puntos);
5. Cálculo de **longitudes de curvas** (por ejemplo, para encontrar las distancias recorridas por un planeta o sus órbitas), centros de gravedad de cuerpos, atracciones gravitatorias…

El concepto de límite aparece vinculado a todos estos problemas como trasfondo en las ideas que manejaban, aunque **inicialmente no tuvo una formalización** pues no fueron conscientes de su necesidad. La evolución se suele dividir en **cuatro etapas** diferenciadas según la conceptualización utilizada en cada momento (Blázquez y Ortega, 2002). Aparece por vez primera – no de forma explícita – en la matemática griega, y se continuó utilizando **implícitamente** en los métodos desarrollados para resolver los problemas anteriores hasta su institucionalización en el siglo XIX.

3.1.1. Los métodos infinitesimales (siglo IV a. C. – primera mitad del siglo XVIII d. C.)

Los **matemáticos griegos** fueron los primeros en utilizar la idea de límite de una manera intuitiva basándose en **aproximaciones sucesivas,** sin establecer un concepto preciso que le diera sentido ni que cuantificara el nivel de precisión en la aproximación. En esta época aparece ligado a numerosos problemas de los citados anteriormente, asociados al cálculo – tal y como hoy se conocen – de derivadas e integrales (definidas e indefinidas). **La formulación era de tipo geométrico**, así como las demostraciones que se realizaban, basadas en figuras, polígonos, la recta secante…

Eudoxo de Cnido (c. 390 a. C. – c. 337 a. C.) desarrolló el **método de exhausción** (posteriormente utilizado por Arquímedes y que inspiró a muchos otros matemáticos modernos) para el cálculo de áreas de figuras planas, volúmenes de cuerpos geométricos, longitudes de curvas… Lo que se busca es **aproximar la figura deseada por otras más sencillas en las que se pueda medir fácilmente la correspondiente magnitud** (área, volumen, perímetro, longitud…), de modo que esta va aproximándose (de manera monótona) a la magnitud real que se quiere medir. Este método puede considerarse como un **antecedente del cálculo integral** tal como lo entendemos hoy en día (López-Esteban, 2019).

La idea de *agotar* la figura se justifica gracias a la **Proposición X.1**. de los *Elementos* de Euclides (recogida por este pero debida a Eudoxo), en la que aparece implícita la idea de límite:

> Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad **y así sucesivamente**, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada (González, 2008).

Basándose en el Axioma de Eudoxo-Arquímedes (también conocido como propiedad arquimediana[1], el cual nos permite afirmar que si la magnitud mayor mide x y la menor ε, entonces existe un múltiplo de ε que supera a x, es decir, $n \cdot \varepsilon > x$) se consigue llegar en un número finito de pasos a la proposición anterior (González, 2008). En ella también está implícito el hecho de poder hacer un número *tan pequeño como se quiera* siguiendo un **proceso infinito**, como en este caso la diferencia entre la figura original y sus aproximaciones sucesivas.

El método de exhausción fue utilizado por **Arquímedes** (c. 287 a. C. – c. 212 a. C.) para encontrar **aproximaciones del número π**, razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. De acuerdo con Eudoxo, la longitud de la circunferencia ha de ser *muy similar* a la longitud de un polígono inscrito (o circunscrito) a la misma, y según va aumentando el número de lados *más preciso* es este valor y mejor es la aproximación (Blázquez y Ortega, 2002). También tiene sentido hacerlo con el área. En términos actuales, dado $\varepsilon > 0$ existe un polígono de n lados de tal manera que la diferencia entre las áreas del círculo y del último polígono construido es menor que ε.

Resulta interesante echar un vistazo a **su demostración**, pues **contrasta con los procesos infinitos que aparecen en torno al límite en la matemática moderna**. Arquímedes inscribió en primer lugar un cuadrado en una circunferencia de radio 1: el área del cuadrado inscrito es igual a

[1] En su día, Arquímedes lo consideró como un axioma, afirmando que dos magnitudes *guardan una razón* entre ellas si, multiplicadas, pueden excederse mutuamente. Un dato curioso es que dicha propiedad arquimediana fue el primer teorema que mi profesor Javier Sanz demostró (es decir, sin tomarlo como un axioma) en la asignatura de Cálculo Infinitesimal, y el primero en el grado en Matemáticas. Precisamente permite demostrar el valor de varios límites, como que $\frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$: dado cualquier $\varepsilon > 0$, puede encontrarse un múltiplo de ε suficientemente grande tal que $n \cdot \varepsilon > 1$, es decir, $\frac{1}{n} < \varepsilon$. También justifica otros procesos donde aparecen sucesiones y límites, como la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

la mitad del circunscrito. De la ilustración a la izquierda en la Figura 1 se deduce que el área del cuadrado inscrito ($A_{\square}$, en rojo, igual al área del rectángulo azul) es mayor que la mitad del área del círculo ($A_{\circ}$): $\boldsymbol{A_{\square} > A_{\circ}/2}$. Por lo tanto, $A_{\circ} - A_{\square} < A_{\circ} - A_{\circ}/2 < A_{\circ}/2$. A continuación, Arquímedes biseca el arco cuya cuerda es cada lado del cuadrado construyendo cuatro triángulos isósceles, con lo que obtiene un octógono regular circunscrito en la circunferencia. De una manera análoga al cuadrado, en la ilustración a la derecha en la Figura 1 puede verse que el área del triángulo isósceles azul (A_T) es la mitad del área del rectángulo verde, por lo que A_T es mayor que la mitad del área del segmento circular (A_S) formado por el lado del cuadrado y el círculo: $\boldsymbol{A_T > A_S/2}$. Por tanto, la diferencia entre cada segmento circular y el triángulo isósceles anterior es menor que la mitad del segmento circular, por lo que la aproximación del polígono al círculo mejora.

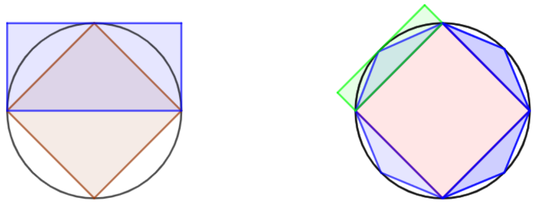


Figura 1. Método de exhausción de Eudoxo para aproximar una circunferencia a través de polígonos. Adaptado de Adaptado de González (2008, p. 119) utilizando GeoGebra.

Nota: En las figuras se ve cómo el área de los polígonos inscritos se aproxima sucesivamente al área del círculo y los perímetros cada vez están más próximos a la longitud de la circunferencia, según aumenta el número de lados.

Este proceso de bisección se puede **reiterar** obteniendo en cada paso un polígono inscrito con el doble de lados, restando a una cantidad otra superior a su mitad (primero al círculo el cuadrado inscrito, segundo a los segmentos circulares los triángulos isósceles que determinan el octógono… y así sucesivamente). En cada uno de ellos, se tiene que **el área de cada triángulo isósceles es mayor que la mitad del área del segmento circular comprendido entre el lado del polígono anterior y la circunferencia**. Por tanto, de acuerdo con la proposición X.1., se puede construir un polígono inscrito de área tan próxima cuya diferencia con el círculo es ***tan pequeña como se quiera***[2]. En este caso, las dos magnitudes que aparecen en la proposición son el área del círculo (que se pretende aproximar) y un ε que constituye la diferencia entre el círculo y los polígonos.

[2] Este tipo de frases (*tan pequeña* o *tan cerca como se quiera*) al hablar de límites fueron introducidas por Cauchy en el siglo XIX al plantear el concepto de límite, y siguen siendo utilizadas habitualmente en las aulas de Secundaria. Sin embargo, suele representar un obstáculo en su enseñanza, pues los alumnos no suelen identificarlo con la existencia de un *épsilon* que cuantifica el grado de aproximación.

Como podemos apreciar, detrás de este método están presentes las ideas de **convergencia**, de **tendencia** (monótona, en este caso) y de **límite** de una sucesión. Sin embargo, los matemáticos griegos no consideraban la construcción *infinita* de polígonos que se aproximan al círculo, sino que a través del Axioma de Eudoxo-Euclides conseguían que la diferencia fuera *pequeña* en un número finito de pasos (Cornu, 1991). No existía una formalización como la que conocemos ahora en términos de ε, utilizando además una aproximación geométrica en lugar de aritmética. De manera iterativa, a través de aproximaciones sucesivas, se obtienen valores cada vez más precisos (más cercanos al límite que constituiría el círculo – geométricamente – y el valor de su área / longitud – numéricamente). También se encuentra implícita la integral definida (que necesita al límite para definirse) al ir agotando el área.

Esta misma idea de límite fue utilizada también por Arquímedes para determinar el **área del círculo** si lo dividimos en sectores circulares *cada vez más delgados*. Una vez determinada la longitud de una circunferencia ($l = 2\pi r$) tras el cálculo de π con el método de exhausción, Arquímedes dividió el círculo en sectores circulares iguales como se muestra en la Figura 2. Al reagrupar estos triángulos como en la ilustración de la derecha se forma una figura *similar* a un paralelogramo, cuya altura es el radio de la circunferencia y cuya base es la mitad de la longitud (al disponer de la mitad de triángulos). Por lo tanto, su área debería ser πr^2, que ha de ser igual al área del círculo. Arquímedes introduce el límite al considerar sectores circulares con base cada vez más pequeña, por lo que al aumentar el número de triángulos necesarios para cubrir el círculo (de 8 pasa a 16, a 32…) la figura resultante se parece cada vez más a un paralelogramo. En el límite, el rectángulo resultante tiene justamente base l y altura r, obteniendo de este modo el área del círculo.

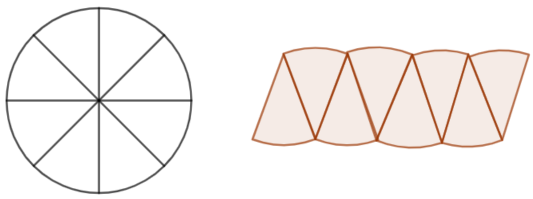


Figura 2. Método de Arquímedes para calcular el área de un círculo. Elaboración propia utilizando GeoGebra.

Tanto el método de exhausción como la demostración del área del círculo son a menudo introducidos en **Secundaria** para justificar los contenidos que se abordan en Geometría, como la obtención de decimales en la aproximación del número π. Sin embargo, el concepto de límite formal no se introduce hasta Bachillerato, aunque se les hace entender a los estudiantes que se llegaría a él si el proceso se continuara *hasta el infinito*. Constituye, por tanto, una introducción al concepto, siempre que se muestre al límite como una aproximación y destacando que esta ha de ser mejor que cualquier otra.

Arquímedes dio inicio a una serie de **métodos infinitesimales** para el cálculo de áreas y volúmenes, redescubiertos por los matemáticos modernos en el **Renacimiento**. **Kepler** (1571-1630) pensó que todos los cuerpos se pueden descomponer en infinitas partes, infinitamente pequeñas, de áreas o volúmenes conocidos, y lo utilizó para calcular volúmenes y áreas (conocido como **método de los infinitésimos**, entendidas hoy en día como cantidades que tienden a 0). Por su parte, **Cavalieri** (1598-1647) desarrolló el **método de los indivisibles**, pensando en los objetos como superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor (Rey Pastor y Babini, 1985). La idea de Kepler influyó en el desarrollo de la integral definida como **área bajo una curva**, concebida al partir la figura resultante en rectángulos verticales cada vez más pequeños y considerar la suma de sus áreas (tanto inferior como superior, que coinciden en el límite). Justamente es en este paso donde aparece este concepto, aunque ni Kepler ni Cavalieri lo consideraron en su momento (solamente dieron por hecho que la aproximación mejoraba al descomponer en partes cada vez más pequeñas).

La introducción de la geometría analítica en el **siglo XVII** (gracias a Descartes y Fermat, quienes dieron coordenadas a los puntos) facilitó el estudio de las curvas a través de ecuaciones. **Fermat** (1601-1665) fue el primero en explorar el concepto de **derivada** para estudiar máximos y mínimos, aunque él se interesaba por las cantidades pues no existían todavía las funciones. Cerca de la *cumbre* o del *valle* de una curva, si E es una cantidad pequeña, los valores $f(x)$ y $f(x+E)$ están tan próximos que se pueden considerar *iguales*: $f(x) = f(x+E)$. Dividiendo ambos lados entre E y tomando $E = 0$, Fermat obtenía las abscisas de los puntos de los extremos. Como puede verse, todavía no está presente el concepto de **límite** (que se obtendría al restar $f(x+E)$ menos $f(x)$, hacer el cociente por E y tomando $E \to 0$ en lugar de suponerlo igual), aunque sí hay una cierta idea de aproximación y de cociente incremental (Blázquez y Ortega, 2002).

Descartes (1596-1650) desarrolló el **método de las tangentes** para resolver el problema de encontrar la recta tangente a una curva en un punto. Utilizando criterios de semejanza de triángulos, calculaba la tangente identificándola con la **secante** al considerar otro punto cercano al de tangencia, considerándolos después iguales. En este caso tampoco aparece explícitamente el proceso de paso al límite, que volvería a considerarse como una identificación de dos puntos cercanos ($x \to x_0$).

Todos estos métodos, ideados para resolver los problemas comentados al inicio del capítulo, funcionaban de manera separada, sin tener conciencia alguna de su generalidad (Blázquez y Ortega, 2002; Sánchez-Matamoros, 2004). **Ninguno de ellos percibió la idea subyacente de límite** en todos los casos, dando por hecho la convergencia. La siguiente generación de matemáticos (fundamentalmente Newton y Leibniz, los inventores del cálculo infinitesimal) se dieron cuenta de que **los 5 problemas principales se resumen en dos**:

- **diferenciación** (relacionado con los cambios en las magnitudes, que aglutina el cálculo de las tangentes, máximos y mínimos y dará lugar a la derivada y al cálculo diferencial);
- **antidiferenciación** (cálculo de áreas, longitudes o volúmenes descomponiendo figuras o acumulando una parte de la magnitud, dando lugar a la integral y al cálculo integral).

Más tarde, Barrow fue quien además vio que **estos problemas eran uno inverso del otro**.

En relación a la derivada, **Newton** (1648-1727) creó el **método de las fluxiones**: llamó **fluentes** a las *cantidades* que variaban en función del tiempo (pasando a considerar las magnitudes como variables en lugar de estáticas), y **fluxiones** a la velocidad de la corriente de los fluentes (es decir, las derivadas con respecto al tiempo). En este caso, los métodos que utilizaba estaban basados en el uso de **cantidades infinitamente pequeñas que *se desvanecían*.** De hecho, intuye que detrás de estas fluentes y fluxiones hay un concepto de límite implícito (habla de **razones últimas**, una visión muy parecida a la de los matemáticos griegos, alcanzándose en tiempo finito):

> Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales (Durán, 1996, p. 54).

Por su parte, **Leibniz** (1646-1716) es el creador de la **teoría sobre las diferenciales**. Se dio cuenta que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas al hacerse **infinitamente pequeñas**. En relación al cálculo integral, también afirmó que el área bajo una curva depende de la suma de las áreas de los rectángulos **infinitamente estrechos** que constituyen dicha área, inspirado por sus predecesores.

Una característica común de todos estos **métodos infinitesimales** es que trabajan con un concepto implícito de **límite de tipo geométrico** debido al carácter de los problemas: se consideraban magnitudes (áreas, volúmenes…), no números. A pesar de que no existía una definición formal, se aprecia también una evolución: desde los métodos de los matemáticos griegos que buscaban aproximaciones suficientemente buenas (obtenidas con un número finito de pasos) hasta llegar a **procesos infinitos**, considerando diferencias *infinitamente pequeñas* (es decir, cantidades que tienden a 0). Sin embargo, no basta con hacer un proceso iterativo para definir el límite. Como indican Blázquez y Ortega (2002), "tiene que existir la posibilidad de tomar aproximaciones cada vez mejores, … los objetos se han de aproximar *más que cualquier diferencia dada*, lo cual implica que **el límite debe ser la mejor de todas las aproximaciones posibles**" (p. 8).

Como veremos más adelante, existe una diferencia entre los términos **aproximación** y **tendencia** (Arce, Conejo y Muñoz, 2019): mientras que la aproximación significa acercamiento, disminución de la distancia al límite, la tendencia implica que estas distancias son cada vez más próximas a cero. Es necesario dejar claros estos dos conceptos a los alumnos de Bachillerato para evitar obstáculos e ideas preconcebidas erróneas, especialmente en la concepción dinámica.

3.1.2. Transformación de los fundamentos del cálculo infinitesimal (segunda mitad del siglo XVIII)

Una vez superada la geometría descriptiva y asimilada la geometría analítica al introducir los métodos algebraicos en esta, en el siglo XVIII surgió un gran interés por fundamentar las bases de estos métodos analíticos. Sin embargo, los matemáticos de esta época no consiguieron crear unas matemáticas desligadas del álgebra ni de la metafísica. Al igual que sus predecesores, **tampoco fueron conscientes de la idea de límite subyacente** en todos estos procesos.

Euler (1707–1783) dio comienzo al cálculo infinitesimal con su obra *Introductio in analysin infinitorum*[3] (1748), inspirado por los trabajos de Leibniz y Newton. En ella, Euler sentó las bases del análisis, disciplina que estudia los **procesos infinitos** (Rey Pastor y Babini, 1985). En primer lugar, introduce el término ***magnitud*** como un **concepto *numérico* y variable**, dejando de lado las interpretaciones físicas. En segundo lugar, inspirado por Johann Bernoulli, define con precisión el concepto de ***función*** *de una magnitud variable* como una **expresión analítica** construida, de alguna manera, con esa misma magnitud variable y con números o magnitudes constantes. Con ello, rompe la relación entre el análisis y la geometría. A diferencia de sus predecesores, **Euler rechaza los infinitésimos**, basando su obra en desarrollos en series infinitas y tratando el análisis en términos puramente algebraicos, sin entrar en cuestiones sobre números infinitamente grandes o infinitamente pequeños. Más adelante, **Lagrange** (1736–1813) continuó su trabajo desarrollando las funciones en series de potencias. Ninguno de los dos se dio cuenta de que estos métodos también necesitaban del concepto de límite para estudiar la convergencia de dichas series, por lo que **el análisis no podía prescindir de ningún modo de los métodos infinitesimales** (Blázquez y Ortega, 2002).

En este mismo periodo surge la **primera definición histórica de límite**, atribuida a **D'Alembert** (1717–1783) e inspirado por Newton:

[3] Carl Boyer comparó en 1950 la obra de Euler con los *Elementos* de Euclides: mientras que estos fueron considerados como la mayor obra de los tiempos antiguos al aglutinar toda la geometría del momento, Euler hizo lo propio con todo el conocimiento existente en los tiempos modernos sobre el cálculo infinitesimal.

Definición de límite, D'Alembert:
Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se le pueda suponer, sin que, no obstante, la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente insignificable (Blázquez y Ortega, 2001, p. 10).

A pesar de suponer todo un avance al **formalizar** un concepto al cual se ajustan todos los métodos expuestos hasta ahora (desde el método de exhausción de Eudoxo y Arquímedes, los métodos de los infinitésimos de Kepler o de los indivisibles de Cavalieri, hasta el cálculo diferencial de Leibniz o las fluxiones de Newton), solo responde a un número limitado de casos. En primer lugar, supone que **las variables son monótonas** (cantidades que van creciendo, como los polígonos inscritos hacia el círculo). En segundo lugar, solo se tiene una concepción de **límite unilateral** (suponiendo el límite como una cota superior que además nunca se sobrepasa, pudiendo darse en realidad el caso de que sí). Asimismo, aunque se define el límite como la mejor de todas las aproximaciones, **no permite tener un control completo** al no especificar el significado de que la diferencia sea *absolutamente insignificable* (un *épsilon*, en términos modernos).

Como veremos más adelante, esta definición de límite tiene algunas ventajas al presentar el concepto de una manera dinámica. Sin embargo, recoge algunos de los **obstáculos didácticos** que hay que evitar en el proceso de enseñanza de límite: muchos estudiantes ven el límite como una aproximación monótona, siendo el límite una cantidad que no se puede alcanzar ni sobrepasar, algo que se refuerza por el propio significado cotidiano de la palabra límite. Si solamente se presentan ejemplos de este tipo, los estudiantes interiorizarán que es válido para todos los casos (Cornu, 1991).

Blázquez y Ortega (2001), Durán (1996) y López-Esteban (2019) destacan el gran desarrollo que tuvo el análisis matemático en esta época aunque tuvo un **enorme carácter algorítmico** al tratarlo de manera algebraica, sin darle importancia al aspecto conceptual ni al rigor. Por esta razón, los contemporáneos de D'Alembert no apoyaron su idea de límite, basado nuevamente en ideas de aproximación. Al darle al análisis un enfoque completamente algebraico, los problemas de paso al límite se resolvían con manipulaciones de expresiones algebraicas de funciones o de sus desarrollos en serie. Esta visión, alejada propiamente del análisis, sigue vigente hoy en día en Secundaria.

3.1.3. Aritmetización del análisis (siglo XIX y principios del siglo XX)

Los trabajos de Euler y Lagrange supusieron un gran desarrollo en el análisis. Sin embargo, al trabajar de manera algebraica le dieron carácter puramente formal y algorítmico, sin tener unas bases rigurosas que lo sentaran al ser necesario el concepto de límite. Los matemáticos del siglo XIX encontraron su **fundamentación en la aritmética**, dejando a un lado la metafísica a la que se solía aludir como justificación (Rey Pastor y Babini, 1985). De este modo, Cauchy, Bolzano y Weierstrass consiguieron crear una matemática rigurosa y fundamentada. Además, crearon una **nueva operación** que se incorporaba a las ya existentes: **el paso al límite**.

Cauchy (1789–1857) dio inicio a este proceso de *aritmetización* del análisis tomando como punto de partida el concepto de límite de D'Alembert. Introduce nuevas definiciones de infinitésimo, función, límite y continuidad basadas en **argumentos de tipo aritmético en lugar de geométrico** o físico. En 1821, define el concepto de límite como sigue:

Definición de límite, Cauchy:
… cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él **tan poco como queramos**, este último valor se llama el límite de todos los demás (Blázquez y Ortega, 2004, p.11).

Esta definición supone un avance frente a la de D'Alembert al plantearse de una manera más rigurosa. Sin embargo, Blázquez y Ortega (2004) indican que **es todavía imprecisa** y no del todo objetiva al aparecer en ella el término "tan poco como queramos".

Un hecho bastante importante es que, a diferencia de sus predecesores Euler y Lagrange, **Cauchy fundamenta todo el análisis en el concepto de límite**: los infinitésimos son *variables* que **convergen** a cero; la continuidad basada en los **límites laterales** (desarrollada de manera paralela a Bolzano); la función derivada es el **límite** del cociente incremental cuando el incremento de x tiende a 0; incluso recupera la integral como **límite de sumas** (siguiendo al método de exhausción de Eudoxo y a Kepler) y no como operación inversa de la diferencial (Blázquez y Ortega, 2004; Durán, 1996; Rey Pastor y Babini, 1985; López-Esteban, 2019). Además, fundamenta las **funciones** sobre la noción de **correspondencia** y no como una expresión algebraica. También da criterios sobre series para establecer su convergencia o no a través de límites, expulsando a las divergentes del análisis.

La **definición actual** que conocemos y utilizamos de límite de una función en un punto se debe a **Weierstrass** (1815–1897), quien eliminó las imprecisiones anteriores (como por ejemplo que una *variable* se acerque a un límite, que da una idea de tiempo y movimiento). Para él, una variable era una simple letra que representaba a un conjunto de valores **numéricos**. Definió límite como sigue:

Definición de límite, Weierstrass:
Si, dado cualquier ε, existe un η_0, tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$ (Blázquez y Ortega, 2004).

Esta definición, planteada **en términos métricos** y **de una manera estática**, completa la aritmetización del análisis al suponer un paso hacia la objetividad desde la definición de Cauchy. Al introducir un *épsilon*, la aproximación queda cuantificada de una manera precisa, superando el proceso subjetivo de *acercarnos tanto como queramos* o de *hacer la diferencia insignificable.* Comparado con sus antecesores, se basa únicamente en ideas de tipo aritmético, superando definitivamente la etapa geométrica y vinculada al mundo físico. Posteriormente, se sustituyó el proceso de encontrar el valor η_0 por otra condición más de tipo métrico (introduciendo un *delta*[4]) en las abscisas: $0 <|x-x_0|< \delta$.

Sin embargo, a pesar de haber conseguido una definición rigurosa sobre la que en la actualidad se construye todo el análisis, el precio a pagar es que **resulta complicada de entender y de aplicar en la práctica**, **sobre todo en los contextos escolares debido al formalismo simbólico**.

3.1.4. Nuevas conceptualizaciones de límite (siglo XX)

Con el desarrollo del análisis a espacios y conjuntos cada vez más abstractos, no solamente numéricos (estudiados por una nueva rama de las matemáticas, la topología), se necesitó desarrollar *funciones* más generales entre espacios (aplicaciones) para estudiar sus propiedades (normalmente, intentando identificarlos con espacios ya conocidos). Para ello también fue preciso generalizar otros conceptos propios del análisis, como los de límite o continuidad, dando lugar a una cuarta etapa en su desarrollo protagonizada por **Cantor** (1845 – 1918) y **Hausdorff** (1868 – 1942). Al prescindir de una métrica, no se puede definir el límite en términos de distancias, por lo que se recurre a entornos del punto (basados en conjuntos abiertos). Así, L es el límite de una función f en a si para todo entorno B de L se puede encontrar un entorno reducido de a, $A_0 = A - \{a\}$, de modo que $f(A_0) \subset B$.

Esta parte de la evolución del concepto de límite no nos interesa, pues es más propia de contextos universitarios que escolares. Sin embargo, es necesario mencionarla ya que **durante una parte del siglo XX se utilizó la definición topológica de límite en los planes de estudios del sistema educativo español**, influidos por una nueva corriente pedagógica que pretendía hacer las matemáticas más generales, precisas y rigurosas, como veremos en la siguiente sección.

3.1.5. Reflexiones a partir de la evolución histórica

A la vista de todo el recorrido histórico que se ha producido hasta llegar a la definición actual de límite, podemos obtener algunas ideas sobre el concepto que nos pueden servir a la hora de elaborar la propuesta didáctica:

---

[4] Weierstrass utilizó en su día la letra griega η en lugar de δ. Esta definición no la incluyó en sus publicaciones sino que fue dada a conocer a través de sus alumnos (Heine, en particular) cuando fue profesor de la Universidad de Berlín (Durán, 1996).

- Históricamente, el concepto ha evolucionado **desde una concepción geométrica-dinámica a una concepción estática** (López-Esteban, 2019). Además, presenta un papel central en el análisis que organiza todos los conceptos que aparecen: continuidad, derivada, integral… Sin embargo, cuando se les presenta el concepto a los alumnos solamente se les da la definición estática de Weierstrass en términos de ε - δ, que contiene todo el rigor propio del concepto, pero que resulta demasiado formal. De hecho, distintas investigaciones (Artigue, 1995; Blázquez, 1999; Blázquez et al., 2006; Cornu, 1991; Fernández-Plaza et al., 2013, 2015; Tall y Vinner, 1981; Valls et al., 2011, 2012) demuestran que no todos los estudiantes de Bachillerato la entienden. En este nivel "parece más útil definir límite funcional de manera similar a como lo hizo D'Alembert considerando este como una **aproximación**, pero de tal manera que ésta sea **mejor que cualquier otra**, que se aproxime más que cualquier magnitud dada" (Blázquez y Ortega, 2002, p. 13). Esta visión dinámica del concepto como aproximación óptima es más sencilla, sobre todo si se utilizan recursos adecuados como GeoGebra y las distintas representaciones del límite (no solamente la algebraica, también la gráfica, la tabular…).

- Euler y Lagrange basaron el proceso de paso al límite en la manipulación de expresiones algebraicas en lugar de manejar infinitésimos, por lo que el análisis adquirió un carácter mayormente **algorítmico** obviando lo conceptual. Este es otro de los problemas que tiene el concepto de límite en Bachillerato (Arce, Conejo y Muñoz, 2019; Blázquez y Ortega, 2002; Cornu, 1991): **su enseñanza no conduce a la comprensión sino al desarrollo de una serie de métodos algebraicos para el cálculo de límites de funciones** (y la resolución de indeterminaciones). Se presta más atención a las reglas de cálculo que a la utilización del concepto para resolver problemas, fomentando (como veremos más adelante) una comprensión instrumental en lugar de relacional. Además, generalmente el algebraico es el sistema de representación que más se utilizaba en estas épocas y también actualmente en Bachillerato, obviando otros igualmente útiles.

- López-Esteban (2019) señala que la manera en que se organizan los contenidos en el análisis (límite - continuidad - derivada - integral), contraria a su desarrollo histórico, provoca que estos **conceptos** aparezcan **descontextualizados en Bachillerato**. Así, cuando se llega al tema de límites, se suele introducir a veces de manera dinámica a través de sucesiones o directamente con la definición. Durán (1996) propone introducir el límite a partir de la derivada, estudiando un incremento de velocidad en un intervalo de tiempo finito $[a, x]$ y viendo qué ocurre al hacer tender uno de sus extremos al otro: $x \to a$. Sin embargo, esto le resta importancia al concepto de límite *per se*, centrándose en la derivada.

- El concepto de límite **se puede introducir** de manera implícita en los cursos de la **Educación Secundaria Obligatoria**: por ejemplo, los fractales; el método de exhausción y la división de figuras curvas en otras más sencillas resultan útiles para demostrar algunos resultados de geometría como las fórmulas de las áreas. Sin embargo, pueden resultar un **obstáculo** al presentar al límite como una aproximación monótona y unilateral, además de presentar al infinito de una manera *potencial*. Para evitarlo, se pueden realizar aproximaciones por defecto y por exceso con distintos tipos de figuras. Además, dado que esto sería solamente una introducción, cuando se llegue a Bachillerato se deberán presentar ejemplos de funciones que les hagan perder algunas ideas erróneas de vista (como que las aproximaciones no pueden sobrepasar al límite, la monotonía…). El objetivo es **crear una visión mucho más rica en torno al límite**, que no se estudia hasta esta etapa.

3.2. El límite desde una perspectiva curricular: evolución de su enseñanza en los distintos planes de estudio españoles

A la hora de elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza del límite en Bachillerato, resulta interesante conocer también cómo ha evolucionado este contenido en los planes de estudios del sistema educativo español a lo largo del tiempo. Según Schubring (1987, citado en Conejo, 2015),

> "los libros de texto, en la práctica, determinan la enseñanza de un país más que los decretos de los distintos gobiernos, ya que considera que tienen mayor influencia en la práctica educativa que los currículos educativos promulgados por las órdenes ministeriales" (p. 1).

Tras el proceso de institucionalización del análisis en el siglo XIX, Cauchy sentó todas sus bases sobre el concepto de límite, otorgándole el rigor que necesitaba. Comenzó entonces a expandirse la enseñanza del análisis como hoy se conoce a través de las universidades europeas. También se incluyó en los planes de estudios de Bachillerato, llegando a España en **1934** (López-Esteban, 2019).

Varias investigaciones (López-Esteban, 2019; Sierra et al., 1999) hacen un **análisis de los libros de texto utilizados en Bachillerato para ver cómo se ha reflejado la enseñanza del límite a lo largo de distintos periodos**. Estos libros estaban adaptados al marco curricular vigente en cada etapa, por lo que recogen una gran cantidad de información útil para averiguar cómo ha sido su evolución. Los autores realizan un **análisis conceptual** (definición de límite, cómo se utiliza, ejemplos y actividades, las representaciones que aparecen), **didáctico-cognitivo** (objetivos de aprendizaje planteados, teorías de enseñanza-aprendizaje utilizadas, capacidades cognitivas a desarrollar) y **fenomenológico** (situaciones propuestas para entender el concepto, tanto matemáticas como de otras ciencias y de la realidad). Por su parte, Conejo (2015) hace también un análisis histórico sobre cómo se aborda la demostración matematica de los teoremas sobre límites en los libros de texto. Se distinguen cuatro etapas según la corriente pedagógica y la ley vigente:

3.2.1. Inicios y primeros desarrollos (1934-1967)

En el Nuevo Plan de Estudios de Bachillerato[5] (1934) se fijó un **nuevo currículo** para la asignatura de Matemáticas, el cual es **prácticamente igual al que se propone en la actualidad**. En los libros, los conceptos se presentan de una manera **instrumental**, fundamentalmente a través de procedimientos. López-Esteban (2019) destaca que "la idea que subyace es la de una matemática ya hecha, que el **alumno debe memorizar y practicar**, resolviendo ejercicios" (p. 109).

En **1953** se estableció una **nueva Ley de Educación**[6]. El **concepto de límite aparece unido al de sucesión**. En los libros está basado en la idea de infinitésimo, afirmando que "una *variable* tiene límite si, en la sucesión de sus valores, se verifica que a partir de uno de ellos la diferencia entre los demás y el límite es, en valor absoluto, *tan pequeña como se quiera*" (Sierra et al., 1999, p. 466). Si comparamos con el desarrollo histórico podemos notar un cierto paralelismo con la definición de Cauchy, al hablar de variable que tiende a un límite y sin cuantificar cómo de pequeña se hace tal diferencia. El **límite de una función también se plantea con sucesiones**: "una función $f(x)$ tiene límite b cuando la variable x tiende a a cuando eligiendo cualquier sucesión de valores $x_1,x_2,...,x_n$ que tienen límite a; los correspondientes valores de $f(x)$: $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$ tienen por límite b" (Sierra et al., 1999, p. 466). La definición, que prescinde de entornos, puede dar lugar a confusión, ya que el alumno puede pensar en las sucesiones como monótonas y al límite como unilateral. No obstante, es una definición dinámica, basada en aproximaciones, que da una idea mucho más intuitiva al estudiante, aunque todavía imprecisa y subjetiva al no acotar la diferencia entre el límite y los términos de la sucesión. En los libros de texto se utilizaban representaciones gráficas que acompañan a la definición y contraejemplos sobre la existencia de límite. López-Esteban (2019) señala que el desarrollo de las explicaciones en los libros es secuencial y formal, buscando **que el alumno memorice definiciones y propiedades y practique de forma algorítmica**. **La fenomenología es escasa**: el límite se concibe como una preparación para la derivada, algo similar a la manera en que se plantea en el currículo actual (al menos en el Bachillerato de Ciencias).

---

[5] Este plan de estudios, conocido como *Plan Villalobos*, se promulgó durante la Segunda República. Tenía una duración de 7 cursos y accedían a él estudiantes mayores de 10 años, teniendo en cuenta que en aquel entonces la educación secundaria no era obligatoria (El nuevo plan de estudios del bachillerato, 1934).

[6] La Ley de Educación de 1953 reconoce la escolaridad obligatoria hasta los 14 años. Contaba con cuatro cursos de Bachillerato elemental, dos de superior y un curso preuniversitario.

3.2.2. Influencia de la matemática moderna (1967-1975)

En los años 60 se impuso la corriente didáctica de la "**matemática moderna**"[7], que (supuestamente) proporcionaba esquemas más sencillos para entender las matemáticas en Bachillerato. En su formulación, se buscaba que el alumno pudiera llegar a pensar con más precisión y claridad, ya que la matemática sirve para estructurar el pensamiento y es el lenguaje de la ciencia (Sorando, 2002). Según indican Sierra et al. (1999), "**sus cimientos son la teoría de conjuntos y las estructuras de las matemáticas en sentido bourbakista**, es decir, las estructuras algebraicas, de orden y topológicas" (p. 468). Así, el concepto de límite y el de función continua se proponen desde un punto de vista topológico, muy formal:

> diremos que una función $f(x) = y$ tiene por límite b para $x = a$, cuando para todo entorno E_b del punto b, se verifica $f^{-1}(E_b) = E_a - a$, o bien $f^{-1}(E_b) = E_a$. En el segundo caso, además de tener límite la función en $x = a$, diremos que es continua en dicho punto (Sierra et al., 1999, p. 468).

Introducir esta definición en las enseñanzas de Bachillerato, propia de un curso universitario de topología y de estudios superiores, puede resultar algo excesivo: si ya existen problemas para que los alumnos comprendan y utilicen la definición actual en términos de $\varepsilon - \delta$, la anterior que utiliza entornos e imágenes inversas es todavía más compleja. Otro inconveniente es que plantear las matemáticas desde este punto de vista deja de lado el "hacer matemáticas": intuir, conjeturar, generalizar… (Sorando, 2002). También se daba importancia al desarrollo de algoritmos y reglas para calcular límites a partir de expresiones algebraicas, contribuyendo a desarrollar las habilidades necesarias para manipularlas. **No hay fenómenos ni ejemplos fuera de las matemáticas**: los libros en este periodo son "teóricos, de perfil expositivo, … con unos enunciados sumamente rigurosos, utilizando una simbología de gran nivel de abstracción" (López-Esteban, 2019). En todos ellos se les daba una gran importancia a las demostraciones (Conejo, 2015).

3.2.3. Implantación y desarrollo del BUP (1975-1995)

En **1970** se procede a reformar todo el sistema educativo español a través de la **Ley General de Educación** (LGE), que lo estructura por vez primera: incorpora la Educación General Básica (EGB) hasta los 14 años, el Bachillerato Unificado Polivalente (BUP) con tres cursos y varias ramas

---

[7] Esta corriente pedagógica surgida en Estados Unidos supuso un cambio breve aunque total en la manera en que se planteaban las matemáticas. Pretendía crear una disciplina constructiva en lugar de deductiva, partiendo de los axiomas y las definiciones a edades tempranas para construir sobre estas el conocimiento. Sin embargo, el error está en que se ofrece una versión última y perfecta de los resultados, cuando las matemáticas se basan en intuiciones, intentos, aproximaciones, fracasos… (Sorando, 2002)

hasta los 17 y el Curso de Orientación Universitaria (COU) de un año. En 1975 se estableció el currículo de Bachillerato, incluyendo el concepto de límite y **sugiriendo volver a la formulación métrica en lugar de la topológica**, reduciendo además el **cálculo de límites a casos sencillos** (Conejo, 2015; Sierra et al., 1999). Existe también un cambio en los libros de texto: mientras que anteriormente se seguían los mismos en todas las instituciones, considerados como libros de autor y que tenían que estar aprobados por el Ministerio (Conejo, 2015, p. 32), a lo largo de este periodo surgen los libros de texto comerciales de las editoriales como hoy los conocemos (López-Esteban, 2019). En este periodo las demostraciones son abundantes, un hecho que se reducirá en las siguientes leyes de educación y en los manuales de generaciones posteriores. (Conejo, 2015, p. 223).

En los libros se comienza a hablar de los **límites laterales en un punto**, cuando nos acercamos por valores a la izquierda y a la derecha de este. Se definen estos en términos de $\varepsilon - \delta$, estableciendo que el límite general en un punto existe si son iguales los dos límites laterales. También se pone el acento en destripar todos los casos posibles de límite y en los **límites en el infinito**. Los sistemas de representación aumentan considerablemente respecto a las épocas anteriores, utilizando gráficas y tablas de valores. Poco a poco se ve también cómo el simbolismo se va simplificando, volviendo a expresiones subjetivas del tipo "muy próximo a", "por grande que sea",…

En esta época influyen enormemente las corrientes didácticas y pedagógicas: la idea consiste en presentar unas matemáticas rigurosas pero sin una formalidad excesiva, la cual desciende notablemente de la LGE a la posterior LOGSE (Conejo, 2015). Se ponen muchos ejemplos y ejercicios intercalados con la explicación, diferenciados entre ejercicios de revisión, de recapitulación y de ampliación. Aparecen también otros complementarios al final de cada unidad. Respecto al modo de presentar los contenidos, se realiza una motivación anterior, en ocasiones de tipo histórico o sobre sus aplicaciones, y se presenta el concepto de manera intuitiva antes de desarrollarlo formalmente. Se conectan los conceptos con la realidad y otras ciencias, se practica la **resolución de problemas** y se incluyen otros **apoyos didácticos**: uso de calculadora, incipientes softwares informáticos, juegos y acertijos… (López-Esteban, 2019; Sierra et al., 1999). Los libros ya no solamente plantean una enseñanza memorística y procedimental, **se quiere que el alumno tenga un papel más activo en su aprendizaje**. Se fomenta también el **aprendizaje por descubrimiento** (teoría debida a Bruner): se pretende que el alumno relacione conceptos, busque los conocimientos por su cuenta y la incorpore de este modo en su estructura cognitiva sobre los ya existentes. No se muestran en su manera final, sino que el alumno construye su propio aprendizaje. También la **fenomenología** del concepto aumenta sustancialmente, vinculando el límite a situaciones geométricas (método de exhausción para el cálculo de áreas) o de la vida cotidiana (Sierra et al., 1999).

3.2.4. Implantación de la LOGSE (1995-2006) y entrada en el siglo XXI

Tras 20 años en vigor, la **Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE)** sustituyó en 1990 a la LGE, estableciendo la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) hasta los 16 años y el Bachillerato durante dos años más, con varias modalidades. Se implantó durante los 5 años siguientes de manera progresiva. **La nueva ley plantea las matemáticas como una asignatura instrumental**, en la que "el conocimiento consiste, más que en la posesión de los resultados finales de esta ciencia, en el dominio de su forma de hacer" (Sierra et al., 1999, p. 472). Los contenidos del bloque del análisis matemático no varían y se distribuyen de la misma manera que actualmente, y tampoco cambia la manera en la que los libros de texto los presentan. **El modelo de enseñanza era más abierto y flexible,** dando más libertad a los docentes en el modo de enfocar sus clases. Las teorías sobre el aprendizaje siguen influyendo en su creación, como la del **aprendizaje significativo** de Ausubel: es necesario activar los conocimientos previos de los que ya dispone el alumno para construir sobre ellos nuevas teorías que encajen en lo que ya se sabe. De esta manera, los conceptos son más estables y completos. López-Esteban (2019) destaca también que aumenta la cantidad de ejercicios de aplicación para practicar las definiciones y las reglas de cálculo: ya no se trata de encontrar el δ que acompaña al ε sino que son ejercicios rutinarios basados en sustituir, calcular y manipular.

Las **nuevas leyes de educación** posteriores no supusieron una revolución como la LOGSE, sino que más bien fueron unas reformas que incidieron en otros aspectos (por ejemplo, sobre cómo enfocar los contenidos). Respecto a las matemáticas, Conejo (2015) señala que **el formalismo matemático disminuye enormemente de la LOGSE a la LOE**: "muchas veces se les intenta convencer a los alumnos desde la intuición antes que el razonamiento matemático" (p. 194). Indica que una de las posibles causas es la dificultad de los alumnos para entender el concepto de límite.

Los cambios que introdujo en **2006** la **Ley Orgánica de Educación (LOE)** tenían como fin desarrollar la personalidad y las capacidades de los alumnos transmitiendo valores como la tolerancia, la responsabilidad… Se redujo el número de Bachilleratos a los 3 actuales, aunque **en matemáticas se eliminó el bloque transversal de resolución de problemas**. El resto sigue igual.

Por su parte, la **Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)**, aprobada en **2013** y que modifica la anterior LOE, pretendió mejorar algunos aspectos de tipo social: disminuir la tasa de abandono, de repetición, de fracaso escolar… y garantizar una educación inclusiva. Respecto a las matemáticas, no se producen tampoco cambios en cuanto a contenidos acerca del límite, sí en cuanto a la introducción de los denominados **estándares de aprendizaje** a la hora de evaluar. De este modo, **la libertad del profesor para dar sus clases está más controlada**, aunque es él quien elige el modo de dar las clases. Además se incluye un **nuevo bloque sobre los procesos,**

métodos y actitudes en matemáticas, vertebrador de todos los demás para enfocar cómo trabajar los contenidos en el aula: resolución de problemas, proyectos de investigación, procesos de modelización matemática, actitudes propias del trabajo científico y uso de medios tecnológicos. Precisamente es este último aspecto el más novedoso debido al avance de la informática: en la actualidad existe una gran cantidad de recursos que se pueden utilizar en el aula para la enseñanza del análisis, como los softwares de geometría dinámica (GeoGebra). Veremos en la siguiente sección cómo enfoca esta ley la enseñanza del concepto de límite en Bachillerato con más detalle.

En diciembre de **2020** se aprobó una nueva ley educativa, la **Ley Orgánica por la que se modifica la LOE de 2006 (LOMLOE)**, en sustitución de la LOMCE. En ella se destaca que el objetivo es aumentar las oportunidades educativas de la población contribuyendo a mejorar los resultados educativos y luchando por una educación de calidad para todos. Aunque se tiene previsto iniciar su implantación en el curso 2022/2023, el 5 de abril de 2022 se publicó el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, que establece la ordenación y las enseñanzas mínimas en Bachillerato. En él, aparece un nuevo tipo de bachillerato denominado "general", que también incluyen una asignatura de "Matemáticas Generales". Los cambios más grandes en el currículo de matemáticas son la desaparición de los estándares de aprendizaje, la inclusión de "situaciones de aprendizaje" (experiencias prácticas de aplicación en el aula) y la sustitución de "contenidos" por "**saberes básicos**" (aunque el último borrador del currículo en Castilla y León sigue llamándolos contenidos), dándole un enfoque más competencial. Estos se agrupan en bloques denominados "**sentidos**", y abarcan el dominio de las matemáticas en contextos de contenidos numéricos, métricos, geométricos, algebraicos, estocásticos y **socioafectivos**[8]. Desaparece, por tanto, el bloque de procesos, métodos y actitudes en matemáticas, que se integra a través de las denominadas **competencias específicas**. Estas últimas difieren de las competencias clave que se recogían en la LOMCE (las cuales tenían un propósito general) ya que ahora se proponen vinculadas con los contenidos y los criterios de evaluación. Se podrían definir como desempeños que el alumno ha de poner en marcha para abordar situaciones o actividades que requieren utilizar los saberes básicos.

La nueva ley le da una gran importancia al uso de **herramientas digitales** en matemáticas:

> Procesos y operaciones que requerían métodos sofisticados de solución manual, pueden abordarse en la actualidad de forma sencilla mediante el uso de calculadoras, hojas de cálculo, programas de geometría dinámica y otras herramientas digitales. Esta

[8] Este último sentido, nunca visto en ninguna ley educativa hasta ahora, plantea manejar las emociones que aparecen el proceso de aprendizaje y fomenta el trabajo en equipo. Se muestra como un bloque transversal a todos los demás sentidos, que recogen los contenidos tradicionales del álgebra, análisis, geometría, estadística y probabilidad aunque con otra distribución.

> posibilidad hace que la enseñanza pueda centrarse en el afianzamiento de los conceptos y actitudes básicas de la materia, y en la profundización en el uso de las matemáticas para interpretar y analizar situaciones, resolver problemas en diferentes contextos y utilizar instrumentos sencillos de cálculo y medida, prestando menor atención a los procedimientos manuales y repetitivos. En este sentido, el aprendizaje debe orientarse preferentemente hacia la interpretación y el análisis de fenómenos y la adquisición del razonamiento matemático, huyendo de prácticas que conlleven aprendizajes memorísticos y rutinarios. (Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, p. 46360).

Este contexto es precisamente el que se necesita para elaborar una propuesta didáctica dirigida a la comprensión del concepto de límite, alejada de la enseñanza actual donde se ignora la utilidad del concepto y se dedica el tiempo a la resolución de indeterminaciones y a la manipulación algebraica.

Respecto al **concepto de límite**, en la nueva ley se incluye dentro del **sentido de la medida**, involucrando **situaciones de cambio** (pues desaparece el antiguo bloque del Análisis Matemático). Se destaca en 1º de bachillerato la estimación y el cálculo de límites a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica, favoreciendo el uso de varias representaciones para una misma función (donde puede dar mucho juego el uso de dichas herramientas digitales). También se propone en 2º su aplicación a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones. No aparece, sin embargo, en la nueva asignatura de Matemáticas Generales, aunque sí lo hacen las derivadas, que se proponen introducir a partir de situaciones de cambio.

Los criterios de evaluación en Bachillerato ya no son tan cerrados como en las anteriores leyes ni tan centrados en los contenidos, proponiendo verificar que el alumno ha adquirido las distintas competencias específicas que se proponen. De este modo, se conectan saberes básicos, criterios y competencias específicas. Con todo ello, se le devuelve una mayor autonomía al profesor para impartir sus clases, al no estar además tan vinculadas a aspectos procedimentales.

3.2.5. Reflexiones a partir de la evolución curricular en el proceso de enseñanza - aprendizaje del límite

Desde la implantación de la enseñanza del límite en los planes de estudios españoles en 1934, podemos observar una serie de características que ha tenido su evolución y que tomaremos en cuenta para elaborar nuestra propuesta didáctica:

- Las distintas etapas educativas han tenido una concepción distinta sobre como enfocar el concepto de límite (y, en general, todos los que aparecen en matemáticas). **Al principio se planteaba su enseñanza desde un punto de vista conceptual**, donde el alumno debía entender – o, mejor dicho, memorizar – dicha definición y saber utilizarla en las distintas tareas que se planteaban. **La LOGSE les dio a las matemáticas un sentido más instrumental**: lo importante es saber aplicarlas en distintos contextos más que conocer el concepto en sí mismo. El formalismo, como confirma la hipótesis de Conejo (2015, p. 305), ha ido descendiendo, al igual que la demostración, que ha pasado a un segundo plano frente al avance la *intuición.* Sin embargo, parece ser que **las últimas leyes de educación, en especial la LOMLOE, las devuelve ese sentido conceptual**: lo esencial es lograr su entendimiento utilizando todas las herramientas que estén a su alcance, evitando todo lo mecánico y algorítmico (y esto, desafortunadamente, es algo que domina actualmente la enseñanza del límite en las aulas de los centros educativos).

- A pesar de haberle restado peso a la importancia de entender el concepto, **los contenidos acerca del límite han cambiado muy poco en los últimos 88 años** (López-Esteban, 2019): en todos los casos se parte de la definición – ya sea esta introducida de una manera más intuitiva o directamente formal – para proceder inmediatamente a su aplicación a través del cálculo (rutinario) de límites.

  La peculiaridad es que estos **siempre se tratan utilizando su representación simbólico-algebraica** (Conejo, 2015): a partir de su expresión algebraica, se enseñan una serie de manipulaciones (que no consisten en aplicar la definición de límite, la cual aparece solamente de manera ilustrativa) que permiten determinar su existencia o no existencia y en el primer caso su valor. Y aunque en los libros aparecen las representaciones gráficas y tabulares que acompañan a la definición, estas apenas se utilizan para el cálculo de límites, siendo todos ellos ejemplos prototípicos de funciones continuas (Conejo, 2015). Por lo tanto, **únicamente se consigue que el alumno desarrolle habilidades de manipulación algebraica, que no significan que esté entendiendo ni el concepto de límite ni el proceso de cálculo** (Blázquez y Ortega, 2002; Cornu, 1991).

  Además, **la fenomenología utilizada para darles sentido es escasa** fuera del ámbito matemático, sin apenas situaciones reales que demuestren su posibilidad de aplicación. Modelizar la realidad mediante la obtención de funciones le podría dar un cierto sentido a la abusiva explotación del registro simbólico-algebraico y, aunque la modelización matemática aparece en el currículo, apenas se lleva a cabo en las aulas.

- **Continuar con la enseñanza de los límites en el sentido tradicional**, *como siempre se ha hecho*, **tendría sentido en un contexto donde no existen otras herramientas para hacerlo**. Sin embargo, la evolución de la informática y los ordenadores ha permitido el desarrollo de numerosos **softwares matemáticos** para que realicen por nosotros todo el trabajo manual. Por ejemplo, con **GeoGebra** se puede dibujar la gráfica de cualquier función que se desee, por lo tanto podemos explotar la representación gráfica del límite tanto para entender el concepto como para el cálculo de límites. Con las **hojas de cálculo** (Excel) se pueden hacer tablas de valores que involucren la expresión algebraica de la función, utilizando de este modo la representación tabular del límite. En consecuencia, su enseñanza ya no solamente se reduce a realizar manipulaciones algebraicas, como se lleva haciendo en los últimos 88 años. **La combinación de las 3 representaciones (simbólico-algebraica, gráfica y tabular) junto al registro verbal permite entender más fácilmente el concepto de límite**, y al parecer, es a lo que va enfocada la nueva LOMLOE.

- **La manera de introducir el concepto de límite también ha cambiado a lo largo del tiempo**: en sus inicios se optaba por definiciones de tipo dinámico como la de Cauchy, con un lenguaje menos preciso (aproximar *tanto como se quiera*). La influencia de la *matemática moderna* hizo que las matemáticas tornaran a un escenario mucho más formal y riguroso, llegando a definir el límite en su sentido topológico, el más general posible, y que muy probablemente los alumnos ni siquiera entendiesen (desafortunadamente, no hay datos cuantitativos que lo demuestren). Debido a su fracaso, las leyes posteriores decidieron dar una definición intermedia, que es la actual en términos de ε-δ debida a Weierstrass y de tipo estático.

  Distintas investigaciones (Artigue, 1995; Blázquez, 1999; Blázquez et al., 2006; Cornu, 1991; Fernández-Plaza et al., 2013, 2015; Valls et al., 2011, 2012) nos muestran que, aún con esta definición, **los alumnos muestran dificultades para comprender el concepto de límite**, lo que provoca que muchos docentes no le den importancia y prefieran centrarse en lo procedimental, es decir, en el cálculo de límites y en la resolución de indeterminaciones). Otros docentes pretenden convencer desde la intuición en lugar del razonamiento, lo cual no está de acuerdo con los objetivos del currículo actual de la LOMCE (Conejo, 2015, p. 306). Por ello, **Blázquez y Ortega (2002) han elaborado una nueva definición de tipo dinámico** que proponen introducir en Bachillerato, y que facilita la comprensión del concepto al utilizar las varias representaciones del límite.

- **Las corrientes pedagógicas y didácticas han influido mucho en la elaboración de los libros de texto**, evolucionando desde posiciones pensadas para que el alumno adquiriera los conocimientos de una manera pasiva (memorizando y aplicando rutinariamente) a otras en las que lo construye de manera activa. Actualmente se le da más importancia a que los alumnos aprendan a pensar por sí mismos, presentando los conceptos conectados a situaciones que les den un sentido (Sierra et al., 1999). Las actividades en los libros también han variado, fomentando el uso de recursos manipulativos y tecnológicos. Sin embargo, en la práctica podemos ver cómo **muchos profesores aún basan su docencia en seguir al pie de la letra lo que se dice en el libro de texto**, determinando este el proceso de enseñanza del límite, los registros que se utilizan y las actividades que se realizan. Proporcionan un conocimiento ya construido, formalizado, sin que el alumno pueda ni intuir ni construir por sí mismo los conceptos que aparecen en el currículo. Siguiendo las corrientes del aprendizaje por descubrimiento y el aprendizaje significativo, fundamentaremos en estas teorías nuestra propuesta didáctica dejando los libros de texto convencionales aparte.

- Otro aspecto que también se vislumbra es el **aumento del interés por la atención a la diversidad** del alumnado: inicialmente era el alumno el que se tenía que adaptar al sistema, el cual era *de talla única* (por lo tanto, quien no se acomodaba a sus exigencias se enfrentaba al denominado fracaso escolar). El caso más ilustrativo lo tenemos con el planteamiento por parte de la "matemática moderna" en los años 60. Poco a poco los contenidos se fueron planteando de una manera más didáctica dando **un papel activo al estudiante**, a la vez que se fueron adaptando a las respuestas que observaban. Las últimas leyes desde la LOE le dan una importancia clave, hasta el punto en que la LOMCE parte de mejorar la educación para reducir el fracaso. La LOMLOE sigue también en esta línea, incluyendo un sentido socioafectivo referente a las matemáticas.

- **La autonomía que se le da al docente para elaborar sus propuestas didácticas ha ido descendiendo con cada ley educativa**: los currículos cada vez se han hecho más cerrados y precisos, marcando con todo detalle los aspectos que se deben abordar dentro de las aulas (Conejo, 2015). Tal es el punto que la LOMCE determina hasta el modo de evaluar, fijando unos estándares de aprendizaje que recogen los conocimientos (conceptuales y procedimentales) esperados. Esto puede ser un impedimento para el desarrollo de las sesiones, al tener los contenidos un carácter tan marcado.

3.3. El límite desde una perspectiva curricular: marco legislativo actual dentro de la LOMCE

A pesar de que **la enseñanza del concepto de límite encaja perfectamente dentro del contexto de la nueva ley educativa**, la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre (LOMLOE), a día 1 de julio de 2022 todavía no se ha publicado la concreción del currículo de Bachillerato en Castilla y León (aunque sí han aparecido una serie de borradores que difieren muy poco del Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato). Por lo tanto, **nos restringiremos a la última ley educativa que hasta este curso 2021/2022 se aplicaba en los centros educativos de la comunidad, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre (LOMCE)**. No obstante, la propuesta estará especialmente pensada para poder adaptarse a la nueva ley tras su implantación en los centros.

Este documento regulaba hasta este año los aspectos básicos generales de la Educación a todos los niveles, incluyendo la ESO y Bachillerato (para el curso 2022/2023 se pondrá en funcionamiento la nueva LOMLOE en los cursos impares). La LOMCE fija su currículum en el **Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato**. Debido a que las competencias en Educación en España están compartidas entre el Ministerio de Educación y Formación Profesional y las Consejerías de Educación de cada Comunidad Autónoma, el Real Decreto anterior se concreta en Castilla y León a través de la **ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León**.

Figura 3. Esquema de los documentos legislativos e institucionales ordenados de manera descendente que regulan la docencia en los centros educativos de Castilla y León. Elaboración propia.

Posterior a estos, la siguiente institución que aparece en orden descendente es el Centro Educativo, en nuestro caso los institutos de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, quienes han de concretar el currículum oficial a través del Proyecto Educativo de Centro y la Programación General Anual. El siguiente eslabón de la cadena es el Departamento de Matemáticas de cada centro, quien ha de elaborar una Programación Didáctica conjunta para todas las asignaturas que imparte. En último lugar está el propio docente de la materia, que ha de condensar todo lo que contienen los documentos legislativos e institucionales anteriores en su Programación Didáctica de aula, recogiendo todas las Unidades Didácticas que va a impartir. En este punto es donde entra la Propuesta Didáctica que elaboraremos en este TFM, dirigida a la enseñanza del límite de una función. En la Figura 3 puede verse todo este camino que se sigue desde la LOMCE y que culminaría con el desarrollo curricular en el aula de la materia correspondiente.

La enseñanza del límite se enmarca dentro del Bachillerato, tanto en el de Ciencias (Matemáticas I y II) como en el de Humanidades y Ciencias Sociales (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II). En todas las asignaturas se incluye **dentro del bloque del Análisis Matemático**, aunque se le dan **distintas visiones** dependiendo del bachillerato: el de Ciencias se focaliza en el estudio local y global de las regularidades de las funciones (existencia de límites, continuidad, derivabilidad), en su representación gráfica y en una introducción a las integrales definidas e indefinidas (ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo, p. 32768), mientras que el de Humanidades y Ciencias Sociales utiliza el estudio de las funciones para resolver problemas contextualizados, para describir, interpretar, predecir o explicar situaciones en contextos físicos, económicos, sociales o naturales (p. 32753). Proponen, por tanto, puntos de vista distintos: **en el bachillerato científico se propone una enseñanza más técnica**, centrada en los conceptos y sus propiedades. En cambio, **el bachillerato humanístico da más importancia a la aplicación de los contenidos** y a la resolución de problemas que propongan situaciones en contextos reales.

La ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo, propone para cada uno de los contenidos una serie de **criterios de evaluación**, que se concretan a su vez a través de los **estándares de aprendizaje**. Estos constituyen un conjunto de indicios que le permiten saber al docente si un estudiante ha adquirido los conocimientos suficientes sobre ese contenido, a la vez que determinan en qué dirección ha de enfocarlos. En definitiva, suponen en cierto modo una restricción sobre los contenidos mínimos que ha de transmitir en sus clases, pues recogen cuáles serán los resultados de aprendizaje.

Los aspectos relativos al límite de una función en cada una de las asignaturas de Bachillerato son los siguientes:

Tabla 1. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje en la asignatura de Matemáticas I referentes al límite (tomado de la ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo)

Matemáticas I (Bachillerato de Ciencias)		
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje**
Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Cálculo de límites. Límites laterales. Indeterminaciones. Comportamiento asintótico de una función: asíntotas y ramas infinitas. **Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades.**	**2.** Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.	**2.1.** Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones. **2.2.** Determina la continuidad de la función en un punto a partir del estudio de su límite y del valor de la función, para extraer conclusiones en situaciones reales. **2.3.** Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.

Nota: elaboración propia.

En este punto es necesario realizar una apreciación: en el 1º curso del Bachillerato de Ciencias también aparece una referencia al concepto de límite dentro del bloque de "**Números y Álgebra**", vinculado al caso de las **sucesiones numéricas**. Los contenidos están relacionados con transmitir una **idea intuitiva de límite finito e infinito**, siendo el objetivo de este estudio la introducción del número e como el límite cuando $n \to \infty$ de la sucesión $(1+1/n)^n$. Blázquez y Ortega (2002) también hacen referencia a una definición de límite como aproximación óptima para el caso de sucesiones, que se podría explicar perfectamente en este punto y que es paralela a la definición de límite funcional que dan. De hecho, muchos docentes deciden reestructurar los contenidos y explicar el límite de una sucesión al abordar los contenidos del bloque de "Análisis" en lugar del de "Números y álgebra".

Tabla 2. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje en la asignatura de Matemáticas II referentes al límite (tomado de la ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo)

Matemáticas II (Bachillerato de Ciencias)		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
Límite de una función en un punto y en el infinito. Continuidad de una función en un punto. Tipos de discontinuidad.	**1.** Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello.	**1.1.** Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.
La regla de L'Hôpital. Aplicación al cálculo de límites.	**2.** Aplicación de la derivada … al cálculo de límites.	**1.2.** Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas

		relacionados, a la resolución de problemas. **2.1.** Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites.

Nota: elaboración propia.

Tabla 3. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las CC.SS. I referentes al límite (tomado de la ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo)

Matemáticas aplicadas a las CC.SS. I (Bachillerato de H. y CC.SS.)		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
Idea intuitiva de límite de una función en un punto. Límites en el infinito. Cálculo de límites sencillos. El límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función. Tipos de discontinuidades. Aplicación al estudio de las asíntotas. Ramas infinitas.	**3.** Calcular límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias. **4.** Conocer el concepto de continuidad y estudiar la continuidad en un punto en funciones polinómicas, racionales, logarítmicas y exponenciales.	**3.1.** Calcula límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias de una función. **3.2.** Calcula, representa e interpreta las asíntotas de una función en problemas de las ciencias sociales. **4.1.** Examina, analiza y determina la continuidad de la función en un punto para extraer conclusiones en situaciones reales.

Nota: elaboración propia.

Tabla 4. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las CC.SS. II referentes al límite (tomado de la ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo)

Matemáticas aplicadas a las CC.SS. II (Bachillerato de H. y CC.SS.)		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
Aproximación al concepto de límite. Técnicas elementales de cálculo de límites en un punto y en el infinito. **Continuidad. Tipos de discontinuidad. Estudio de la continuidad en funciones elementales y definidas a trozos.**	**1.** Analizar e interpretar fenómenos habituales de las ciencias sociales de manera objetiva traduciendo la información al lenguaje de las funciones y describiéndolo mediante el estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características.	**1.1.** Modeliza con ayuda de funciones problemas planteados en las ciencias sociales y los describe mediante el estudio de la continuidad, tendencias, ramas infinitas, corte con los ejes, etc. **1.2.** Calcula las asíntotas de funciones racionales, exponenciales y logarítmicas sencillas.

Asíntotas y comportamiento asintótico de una función.	**1.3.** Estudia la continuidad en un punto de una función elemental o definida a trozos utilizando el concepto de límite.

Nota: elaboración propia.

La primera característica que podemos apreciar es la **existencia de un currículum *en espiral* también en Bachillerato**: en el segundo curso se repasan los contenidos que se ven en primero, aumentando la complejidad de manera progresiva (que se traduce en la práctica en estudiar un rango de funciones más amplio) y construyendo el conocimiento sobre los contenidos que ya se han estudiado en los cursos anteriores. Además, los contenidos que se ven en el bloque de Análisis en Bachillerato suponen una continuación de los que ya se vieron en la ESO: la ORDEN EDU 362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, también incluye un bloque de Análisis Matemático en el que desde 1º de ESO se empiezan a estudiar las funciones y sus características. Por lo tanto, dado que 2º de bachillerato supone una continuación sobre lo que ya se ha comenzado a explicar en 1º, **la propuesta didáctica que elaboraremos estará centrada en el concepto de límite en 1º de bachillerato**, dado que es el primer curso en el que se estudia. Si conseguimos que los comprendan en este curso, el camino ya estará encauzado para el siguiente. Además en 2º curso el método más utilizado para resolver límites es la Regla de L'Hôpital (Tabla 2), que para nada tiene relación con el concepto de límite sino con el de derivada.

En segundo lugar, a partir de los contenidos se puede observar de nuevo lo que ya avanzábamos anteriormente: **en el bachillerato de Ciencias se estudian los límites desde una perspectiva más *formalista* que en el de CC.SS**. En el primero se propone directamente el estudio del concepto de límite de una función en un punto y en infinito, como se ve en la Tabla 1 y Tabla 2 (es decir, a partir de la definición habitual en términos de ε-δ o de la definición como aproximación óptima). En cambio, en el segundo se plantea como una *idea intuitiva* o *aproximación* al límite, como se recoge en la Tabla 3 y Tabla 4 (por ejemplo, a través de sus límites laterales, o utilizando la definición de Cauchy a través de *aproximarnos tanto como queramos*). Por ejemplo, en el Prácticum de este máster he podido comprobar cómo los docentes no presentan la definición formal de límite en el bachillerato de CC.SS., ya que esta ni siquiera viene en los libros de texto que utilizan. Además, **este carácter aplicado se hace notar también a través de los criterios de evaluación**, en los que se pide analizar e interpretar situaciones reales mediante el estudio de funciones (es decir, enfocarlo hacia la modelización o a la resolución de problemas). A pesar de ser una idea intuitiva lo que aparece en el currículo oficial, la definición que plantean Blázquez y Ortega (2002) permite comprender perfectamente el concepto de límite a través de aproximaciones, lo cual se basa en la intuición. Parece ser una buena idea utilizar esta definición para introducir también el límite aquí.

Por último, al impartir la **Unidad Didáctica sobre límites se suele proceder casi siempre del mismo modo en todos los cursos**: primero se parte del **concepto** de límite en un punto y en el infinito (definición introducida de una manera más o menos intuitiva según el caso). Posterior a esto se procede al **cálculo** de límites (incluyendo en este caso los límites laterales) a través de *técnicas elementales* (que se suele traducir en estudiar los límites únicamente a partir de su expresión algebraica). Dentro de este apartado se incluiría la resolución de **indeterminaciones**, reducidas a una serie de manipulaciones algebraicas para determinar la existencia o no de límite de una función y calcular su valor. A continuación se propone aplicar el límite como herramienta para estudiar la **continuidad** de una función, viendo cuál es la definición de función continua y en general determinando que es continua en un punto si coinciden los límites laterales con el valor de la función en ese punto. Finalmente, se utilizan los **límites** como herramienta para calcular las **asíntotas** de la función y las ramas infinitas.

Si comparamos con lo que hemos estudiado en la sección anterior, este desarrollo es el mismo que el que lleva planteado en los distintos planes de estudios a través de todas las leyes educativas del sistema educativo español. Es decir, **en cuanto a contenidos la enseñanza del límite no ha cambiado en los últimos 88 años**; sí que lo ha hecho el modo de tratar los contenidos: ahora se plantean *aproximaciones* o *ideas intuitivas* del concepto de límite, aunque en la práctica se le da muy poca importancia al concepto de límite *per se*: **los estándares de aprendizaje nos muestran que la enseñanza del límite ha de ser instrumental**. Únicamente aparecen verbos como *calcula*, *aplica*, *realiza (operaciones)*... Más que una enseñanza comprensiva, parece ser que el objetivo último de aprendizaje es calcular límites, para lo cual es ni necesario conocer en profundidad la definición.

Un inconveniente de tener un programa tan cerrado en Bachillerato (dado que los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje aparecen detallados de manera muy precisa) es que **el profesor tiene al final poca libertad a la hora de elaborar los itinerarios didácticos sobre cómo abordar el límite**. Sobre la metodología, la ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato nos muestra que el profesor debe utilizar un método que favorezca el desarrollo competencial de los alumnos y alumnas, el cual debe ajustarse a su nivel competencial inicial. De acuerdo con esta ha de estar, además, la evaluación, que debería estar basada también en las competencias.

3.3.1. Los efectos de la EBAU sobre la enseñanza del límite

Existe otro efecto – en muchas ocasiones no considerado – que hace que la enseñanza del límite actualmente en Bachillerato sea en la práctica tan procedimental: la **Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad** (EBAU), antes considerada como Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU). Zamora (2014) realiza en su tesis doctoral un análisis exhaustivo de los enunciados de estas pruebas de acceso en Castilla y León entre 1995 y 2009, atendiendo a su relación y su influencia en el currículo de Bachillerato (especialmente el de segundo curso). En primer lugar, se confirma una de sus hipótesis: en dichas pruebas **no se evalúa todo el conocimiento** que se debería abordar en segundo de bachillerato, **disminuyendo además la dificultad** de los enunciados a lo largo de los años. Por ejemplo, en los ejercicios referentes al bloque de "Análisis Matemático" los ejercicios de reflexión se presentan en muy escasas ocasiones (p. 241), mientras que los de reproducción son los que más se repiten en un análisis llevado a cabo en un conjunto de pruebas de 15 años:

> abundan los ejercicios en los que se pide el cálculo de un límite (21 cuestiones) y dado que el alumno no utiliza más método que la regla [sic] de L'Hôpital, al haber sido eliminado del currículo los infinitésimos equivalentes, son meras representaciones de problemas comunes que se resuelven con la aplicación de destrezas técnicas y algoritmos habituales (Zamora, 2014, pp. 241-242).

De nuevo, podemos apreciar cómo también **en las pruebas EBAU abunda el conocimiento de tipo procedimental frente al conceptual**: no aparece ningún ejercicio que demuestre que el alumno ha comprendido el concepto de límite, ya que este ni siquiera se requiere para resolver los que aparecen. Por lo tanto, esto genera una razón más para que los profesores de secundaria traten el límite de este modo en Bachillerato. Sumado a esto encontramos la **alta frecuencia con la que se repiten los ejercicios de cálculo de límites** (todos ellos basados en su representación simbólico-algebraica), lo que refuerza el hecho de que se considere únicamente de una manera mecánica basada en la manipulación algebraica. Otro de los problemas que genera es que este modo de trabajar se está extendiendo de 2º a 1º de bachiller, un curso en el que no existe tanta presión por la EBAU. El efecto es bastante pernicioso:

> Esta situación favorece una docencia basada en una preparación para que los alumnos superen una prueba de este tipo y, por tanto, condiciona a que los estudiantes realicen principalmente ejercicios con un requerimiento cognitivo inferior (el nivel de reproducción), y para los que es incierto que adquieran procesos apropiados a la actividad matemática de un nivel superior, tales como reflexión, abstracción, generalización, análisis y síntesis (Zamora, 2014, p. 440).

Lo que **no se debería admitir** de ninguna manera es **que la docencia en Bachillerato se deje influenciar por el tipo de ejercicios que se suelen preguntar en las pruebas de acceso a la universidad**: los alumnos han de adquirir una serie de saberes y contenidos mínimos recogidos en el currículo educativo, no solamente de tipo procedimental. **Los razonamientos lógico-formales, de argumentación o demostración apenas están presentes** detrás de los enunciados que se proponen, algo que no está de acuerdo con los objetivos del Bachillerato que aparecen en las leyes educativas de estos años (Zamora, 2014). Es por ello que en sus conclusiones propone incorporar ejercicios de cálculo de límites en los que no sea preciso utilizar técnicas algorítmicas ni basados en la regla de L'Hôpital, "ejercicios en los que haya que aplicar conceptos y procedimientos de límites en la resolución razonada de problemas procedentes de actividades cotidianas" (p. 447). Han de entender también los conceptos que aquí aparecen recogidos, y que les serán útiles de cara a su formación universitaria futura. Es decir, **el fin del Bachillerato no ha de ser la EBAU, sino que ha de servir como una preparación para la universidad**. Por lo tanto, es esta prueba la que debería readaptarse al Bachillerato.

En este sentido, de cara a los próximos cursos puede resultar interesante ver cómo serán las futuras pruebas EBAU tras la puesta en funcionamiento de la nueva LOMLOE en el curso 2022/2023. Dado que esta ley propone despojar a las matemáticas de su tratamiento algorítmico y mecánico para pasar a poner el enfoque en la comprensión y en el uso de las tecnologías, los exámenes de acceso a la universidad deberían ir en la misma dirección. Mientras estos no cambien tampoco lo hará la docencia en las aulas de Secundaria, por lo que la nueva ley quedaría como una – desafortunada – utopía.

3.4. Conclusiones

Como bien hemos podido comprobar a lo largo de todo el capítulo, existen múltiples factores que hacen que **la enseñanza del límite de una función en bachillerato se enfoque de una manera procedimental**:

- El **concepto de límite** que se imparte actualmente en Bachillerato, debido a Weierstrass, resulta demasiado formal para abordarlo en un contexto escolar: al plantearlo de una manera estática, a través del ε y el δ, no se pone énfasis en los procesos de aproximación que existen en torno a él. Al no ser tan visual, los estudiantes no lo comprenden, por lo que muchos docentes deciden centrarse en otras conceptualizaciones de tipo intuitivo en las que se propone al límite como una aproximación a la que podemos acercarnos *tanto como queramos*, siguiendo los pasos de Cauchy y perdiendo la precisión del concepto. El recorrido histórico del límite nos muestra cómo inicialmente se trataba de una manera dinámica a pesar de que no existiera una formalización, resultando este la mejor de todas las aproximaciones. En este sentido, Blázquez y Ortega (2002) proponen una definición de límite que toma como inspiración la propia de D'Alembert.

- El **currículo** está planteado de una manera tan precisa que obliga a que el profesor siga una serie de instrucciones sobre cómo proceder con su docencia (especialmente tras la introducción de los estándares de aprendizaje en la LOMCE, los cuales se basan en el cálculo algorítmico de límites). No da pie a la innovación y a la creatividad, por lo que resulta difícil construir secuencias de aprendizaje que permitan abordar el límite de una manera comprensiva. Esto es algo que parece mejorar con la futura ley, la LOMLOE, especialmente a través de las competencias específicas.

- Las **distintas leyes de educación** (desde la LGE hasta la actual LOMCE) han ido restándole peso a tratar el límite desde un punto de vista formal y riguroso. Sin embargo, una mayor influencia sobre cómo se ha enfocado históricamente la enseñanza del límite la tienen los **libros de texto**: los contenidos matemáticos se han ido relajando con el paso del tiempo, reduciéndose el número de demostraciones y abriendo paso a interpretaciones cada vez más intuitivas del concepto de límite. Las representaciones aparte de la simbólica-algebraica son escasas: el registro tabular y el gráfico solo están presentes en las explicaciones, los cuales recogen ejemplos prototipo de funciones continuas. Además, las actividades que se proponen actualmente van dirigidas al desarrollo de habilidades algebraicas cuando se procede a calcular un límite (indeterminaciones) en lugar de fomentar la reflexión y el uso de otras representaciones.

- Las **pruebas de acceso a la universidad** tratan el concepto de límite de una manera procedimental, ya que sus enunciados están basados únicamente en la reproducción: en los últimos 15 años se ha llegado a proponer el cálculo de 21 límites (los cuáles se podían resolver con la regla de L'Hôpital o con manipulaciones algebraicas, sin que aparezca el concepto por medio). Esto está influenciando el modo en que se abordan los límites en Bachillerato, restándole importancia a entender el concepto y a realizar otras tareas como razonar, intuir, argumentar, demostrar, generalizar…

La **propuesta didáctica** que se construye en este TFM acerca del límite de una función pretende lograr una comprensión del concepto en cuestión. Dado que los alumnos no llegan a entender este concepto debido a la complejidad que muestra la definición de Weierstrass en términos de ε-δ (Blázquez et al., 2006), la plantearemos a partir de la definición que dan Blázquez y Ortega (2002) basada en tomar al límite como aproximación óptima.

Antes de ello, si queremos construir una secuencia que muestre al límite de una manera comprensiva tenemos que averiguar cuál es la mejor manera de hacerlo. Es por ello que en el siguiente capítulo investigaremos sobre algunas teorías en Didáctica de la Matemática que nos darán las respuestas que necesitamos.

4. Marco teórico: teorías e investigaciones en Didáctica de la Matemática acerca de la enseñanza del límite

Las Matemáticas se caracterizan precisamente por su formalismo. Son una disciplina con una fuerte fundamentación, basada en axiomas y definiciones sobre las que se construyen a través de la lógica todos los resultados. Además, cualquier concepto matemático que se precie (véase en este caso el de límite) lleva detrás una evolución histórica que hace que lo veamos de una manera terminada, perfeccionada. Observar este proceso en detalle (como hicimos en el capítulo anterior) hace que nos demos cuenta de que hubo un momento en que las definiciones no fueron así, pasando por varios estadios hasta su institucionalización final, donde el grado de dificultad va incrementándose.

A pesar de que todo concepto tiene una fundamentación matemática e histórica que le dan su sentido, en general no constituyen un buen punto de partida a la hora de diseñar una propuesta didáctica que plantee su aprendizaje de una manera comprensiva (Cornu, 1991; Tall, 1992). El objetivo de la Secundaria no es presentar una teoría matemática completa y rigurosa, **sino sentar las bases para aprendizajes posteriores** (Conejo, 2015). Cuando se entra en contacto con un nuevo concepto matemático, antes de ser definido formalmente (e incluso de ser entendido de esta manera en nuestra mente) es necesario generar una **base cognitiva** sobre la que poder darle sentido. La generalidad y sutileza de algunas definiciones matemáticas como la de límite son habitualmente excesivas para que la mente de un estudiante las asimile de primeras por completo sin que se genere ningún conflicto cognitivo y sin que haya obstáculos en su aprendizaje. A este respecto, es tarea del docente satisfacer las demandas y necesidades que tiene la **diversidad** de su alumnado, por lo que ha de interesarse por conocer cuál es el mejor modo de transmitir los conceptos matemáticos.

En este capítulo abordaremos algunas **teorías e investigaciones desarrolladas por expertos en Didáctica de la Matemática** en torno a la enseñanza del Análisis y del límite de una función en Bachillerato. Es un concepto especialmente relevante ya que inicia una nueva manera de ver los objetos y de razonar en Matemáticas: no se puede acceder a él de manera tangible, sino que requiere desarrollar un tipo de pensamiento más avanzado, construido sobre otros objetos. Para tratar de entender cómo es el proceso de construcción de los conceptos matemáticos en la mente de los alumnos, estudiaremos en primer lugar algunas teorías sobre cómo es el aprendizaje en matemáticas y sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje propios del bloque de Análisis Matemático. Posteriormente mostraremos algunos de los obstáculos que se desarrollan habitualmente en torno al límite, concepto que ya les resulta complejo de por sí: los estudiantes presentan problemas con el lenguaje que aparece en torno al concepto de límite debido al significado cotidiano de muchos de los términos que aparecen. El uso de varios sistemas de representación contribuye a entender el concepto aunque tampoco está libre de obstáculos, dado que no suelen ser capaces de transformar unos en otros.

Este estudio nos llevará a considerar cuál es el mejor modo de introducir el concepto de límite en Bachillerato, lo cual nos permitirá crear una propuesta didáctica para abordarlo de una manera comprensiva tratando de evitar los obstáculos y errores habituales.

4.1. La transición al pensamiento matemático avanzado

En los años 90 se inició en la Didáctica de la Matemática una nueva corriente denominada "**Pensamiento Matemático Avanzado**" (de aquí en adelante PMA), que pretendía marcar una diferencia con otro tipo de pensamiento calificado como "**elemental**". Tall (1991), el iniciador de este movimiento, muestra que el PMA tiene dos características que lo diferencian del anterior: en él se incluyen **definiciones matemáticas precisas** (como son las propias del análisis matemático: límite, continuidad, derivada, integral…) y **se utilizan deducciones lógicas para formular teoremas y resultados** construidos sobre los conceptos. Arce, Conejo y Muñoz (2019) añaden que en el PMA "la atención se centra en contenidos propios de matemáticas superiores … así como en procesos matemáticos de mayor complejidad, como pueden ser los de definir, generalizar, abstraer y razonar deductivamente" (p. 302).

A partir de lo anterior, se puede afirmar que el pensamiento matemático elemental involucra aquellas etapas donde los estudiantes entran en contacto con los conceptos básicos de las matemáticas, algo que tiene lugar fundamentalmente a lo largo de la Enseñanza Primaria y parte de la Secundaria. **El conocimiento en matemáticas suele evolucionar de objetos tangibles**, propios de la realidad e identificables rápidamente a través de los sentidos (como los números naturales, las figuras geométricas o las gráficas) **a objetos cada vez más abstractos**. De hecho, estos primeros pueden definirse fácilmente a partir de representaciones de los objetos (gráfica, verbal… siendo conveniente proporcionar una variedad de registros y ejemplos no prototípicos) e incluso pueden deducirse propiedades de ellos sin recurrir al formalismo. Sin embargo, **conceptos como los de función, límite, continuidad... ya no son directamente accesibles**, además de que requieren manejar un razonamiento deductivo y riguroso para poder trabajar con ellos. Precisamente puede observarse que a lo largo de la Educación Secundaria (y fundamentalmente en Bachillerato) el nivel de abstracción se hace cada vez más presente, iniciándose con el paso de la aritmética al álgebra o de la geometría descriptiva a la analítica, y culminando en conceptos como los propios del análisis.

Tall (1991) y Arce, Conejo y Muñoz (2019) hacen un especial hincapié en la **transición del pensamiento elemental al PMA**, dada la dificultad que presenta este proceso en los estudiantes. La enseñanza en Secundaria evoluciona de una posición donde los conceptos tienen una base intuitiva fundamentada en la experiencia a otra en la que se establecen los conceptos a través de definiciones formales, y cuyas propiedades se deducen a partir de estas. "[Se pasa] de describir a definir, de convencer a probar de una manera lógica basada en esas definiciones" (Tall, 1991, citado en Arce, Conejo y Muñoz, 2019). Esto, como señala Tall, suele generar en los estudiantes un **conflicto cognitivo** a la hora de encajar el nuevo conocimiento y el modo novedoso de trabajar, y puede llegar a ser un obstáculo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los nuevos conceptos. Uno de los problemas que tiene en particular el límite es que nunca antes, en ninguna etapa anterior, los alumnos han entrado en contacto con procesos de aproximación ni procesos infinitos, por lo que no existe una base intuitiva previa al Bachillerato más allá del estudio de las funciones. Esta base intuitiva, según Tall (1992) pasa por **generar suficientes (y variadas) imágenes del concepto** que permitan tener distintas visualizaciones, para así poder formalizarlo y unificarlo en nuestra estructura cognitiva.

En este sentido, es necesario entender cómo se produce la construcción de los conceptos matemáticos en la mente de los estudiantes, con lo cual podremos considerar posteriormente cuál es el mejor modo de hacérselos llegar.

4.2. La construcción de conceptos matemáticos: cómo se produce el aprendizaje en Matemáticas

El proceso de construcción de los conceptos que aparecen en matemáticas, como es el caso particular del límite, presenta algunas características especiales. Tal y como indican Arce, Conejo y Muñoz (2019), no es un aspecto **ni dicotómico ni lineal**: no se puede establecer si hay comprensión de un concepto o no por completo, sino que el alumno va pasando gradualmente por varias fases hasta que lo entiende. Además, a lo largo de este proceso puede tener tanto avances como retrocesos, que se producen de manera diferente de unas personas a otras (es decir, no se puede establecer algo general que pronostique el aprendizaje de todos los alumnos, aunque sí pueden detectarse algunos momentos importantes que atraviesan).

4.2.1. Características propias de un concepto matemático: aspectos conceptuales y aspectos procedimentales

Todo concepto matemático tiene, por su parte, dos perspectivas distintas intimamente dependientes (Arce, Conejo y Muñoz, 2019):

- Los ***aspectos conceptuales***, relacionados con los términos, las notaciones, los convenios, las relaciones entre conceptos, las estructuras matemáticas subyacentes, las generalizaciones…
- Los ***aspectos procedimentales***, relacionados con las acciones y manipulaciones para realizar una tarea, las operaciones, los algoritmos, las estrategias…

En el caso del límite, los **aspectos conceptuales** involucran todo aquello *de carácter teórico*: la propia definición de límite de una función en un punto (en este caso una de ellas, como vimos en el apartado anterior) y en el infinito, su concepción dinámica y/o estática, las notaciones para el límite (tanto la general como la de límite por la izquierda y por la derecha del punto), las distintas representaciones y la conexión entre ellas, su relación con la continuidad, con las asíntotas y con el comportamiento de la función, los términos que se utilizan (aproximar, tender…), el proceso de aproximación, el significado de acotar el error de aproximación…

En cuanto a los **aspectos procedimentales**, se basan en el saber hacer y en la aplicación del conocimiento, incluyendo las destrezas, las manipulaciones, las reglas de operar, la heurística… es decir, la parte práctica a la hora de enfrentarse a un ejercicio, una tarea, una cuestión o un problema. Pueden tener un carácter algorítmico (una rutina que proporciona la solución, utilizados habitualmente en niveles bajos para familiarizarse con el concepto), operativo (mediante la explotación del concepto a través de diversas reglas de cálculo, como la resolución de indeterminaciones) o de abstracción y generalización (donde ya no existe un algoritmo marcado, sino que el alumno debe utilizar el razonamiento o aplicar una serie de estrategias, y que requiere generalmente una comprensión profunda del concepto).

A la vista de lo estudiado en el capítulo anterior, es evidente que **la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre (LOMCE) aborda los contenidos sobre límites en sus estándares de aprendizaje dando una mayor importancia a los aspectos procedimentales**, así como las pruebas EBAU, y esto es algo que se pone especialmente en relieve a la hora de evaluar. Sin embargo, es esencial adquirir una serie de aspectos conceptuales previos para lograr la comprensión del concepto y poder trabajar con él de manera eficiente. Transmitir únicamente los aspectos procedimentales lo apartan de su significado verdadero, le quitan el sentido que tiene. Es útil cuando se realizan tareas de reproducción (ejercicios de tipo mecánico, para los que hay que conocer solamente las reglas o los algoritmos), pero se necesitan los aspectos conceptuales para realizar tareas de mayor nivel cognitivo.

En ambos bloques pueden diferenciarse a su vez **3 niveles de complejidad creciente**: *i)* las unidades de información; *ii)* la abstracción, relación y generalización de dichas unidades de información y *iii)* las estructuras.

Al igual que se hace en (Arce, Conejo y Muñoz, 2019, p. 85), la Tabla 5 recoge las categorías dentro de cada nivel para los aspectos conceptuales junto con algunos ejemplos en el caso del límite, y la Tabla 6 hace lo mismo para los aspectos procedimentales.

Tabla 5. Niveles y categorías para los aspectos conceptuales del límite de una función

Niveles	*Categorías*	*Algunos ejemplos*
***Primer nivel:* unidades de información**	Términos	Tendencia, aproximación, límite, sucesión, función, aproximación óptima, entorno, imagen de una función en un punto, infinito
	Notaciones	x_n (sucesión), f (función), x (variable independiente), $x \to a$ (x tiende a a), $x \to a^-$ (x tiende a a por la izquierda), $x \to a^+$ (x tiende a a por la derecha), $\lim_{x\to a} f(x)$, $\pm\infty$ (infinito)
	Convenios	$\lim_{x\to a} f(x)$ se lee "límite cuando equis tiende hacia a de la función efe de equis"; para estudiar el límite de una función en un punto me acerco (si es posible) por su izquierda y su derecha; acercarnos *tanto como queramos*
	Resultados	El límite es la mejor aproximación; el límite, si existe, es único; para que una función sea continua en un punto han de coincidir los límites laterales (*la gráfica se une*) y el valor de la función
***Segundo nivel:* abstracción, relación y generalización de unidades de información**	Conceptos	Límite de una función en un punto, límite de una función en infinito, continuidad, discontinuidad, indeterminación, asíntota
	Relaciones entre conceptos	Existe una coordinación entre las aproximaciones en el dominio (hacia a) y en la imagen de la función (a L) La derivada es el límite del cociente incremental

***Tercer nivel:* estructuras**	Estructuras matemáticas	Una función es continua en un punto a si *i)* existe $f(a)$; *ii)* existe $\lim_{x\to a} f(x)$ $(= \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x))$; *iii)* $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

Nota: elaboración propia.

Tabla 6. Niveles y categorías para los aspectos procedimentales del límite de una función

Niveles	***Categorías***	***Algunos ejemplos***
***Primer nivel:* unidades de información (destrezas)**	Operaciones	El límite en un punto de la suma/resta/producto de dos funciones es la suma/resta/producto de los límites de ambas funciones en el punto
	Reglas	Para saber si existe el límite de una función en un punto a partir de la gráfica compruebo si al acercarme por la izquierda y la derecha los límites laterales coinciden; indeterminaciones (por ejemplo, si al calcular el límite en un punto obtengo 0/0, factorizo numerador y denominador y cancelo factores); Regla de L'Hôpital
	Algoritmos	Cálculo de límites a partir de la expresión algebraica: se sustituye el punto en la expresión, se opera y se obtiene el valor del límite; cálculo de asíntotas (A.H. si la función tiene denominador, A.H. calculo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, A.O. calculo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$)
***Segundo nivel:* abstracción, relación y generalización de unidades de información**	Razonamientos	Dibujar la gráfica de una función cuyo límite en infinito sea un determinado número real; dibujar la gráfica de una función cuyos límites laterales en un punto sean finitos pero distintos; demostrar que una función no puede tener simultáneamente asíntotas horizontales y oblicuas en $+\infty$ o en $-\infty$; reconocimiento de discontinuidades al calcular límites
***Tercer nivel:* estructuras**	Estrategias	Utilizar el sistema de representación de la función más conveniente para encontrar el valor del límite en un punto (gráfico, simbólico-algebraico, numérico-tabular…); resolver un límite a partir de la expresión algebraica utilizando órdenes de infinitud; demostrar el valor de un límite utilizando la definición; utilizar los límites para estudiar la continuidad de una función a trozos

Nota: elaboración propia.

Cabe destacar que como docentes **tampoco podemos aspirar** dentro del contexto escolar (en nuestro caso, Bachillerato) **a una comprensión total del concepto**: bastará con que el alumno sea capaz de producir evidencias de que lo ha entendido y sabe utilizarlo, algo que deberemos tener en cuenta adicionalmente a la hora de evaluar (Arce, Conejo y Muñoz, 2019). Sin embargo, la enseñanza de un concepto como el límite no debe quedarse solamente en transmitir las unidades de información, ausentes de conexiones, ni el uso de procedimientos y operaciones como si los estuviera resolviendo un autómata. Se deben evitar los enfoques estandarizados y algorítmicos pues, como indica Zamora (2014), de este modo la oportunidad de tener un aprendizaje significativo desaparece.

Además, también es necesario destacar que los aspectos que el docente quiere transmitir a sus alumnos sobre un concepto han de estar siempre de acuerdo con el **modo de evaluar**: si únicamente se cuestionan los aspectos procedimentales, los alumnos lo entenderán como el único conocimiento útil, dando una menor importancia a los conceptuales. Y si solamente se demandan tareas de primer nivel, basadas en las unidades de información (ejercicios mecánicos en los que se aplican reglas y algoritmos), entonces será lo único que practicarán. Esto está muy vinculado al tipo de docencia que el profesor imparte en el aula, ya que basará sobre esta la evaluación que realice. Por tanto, ha de elegir previamente el **tipo de tareas** que va a desarrollar así como los **objetivos de aprendizaje**, que no tienen por qué ir únicamente paralelos a los estándares evaluables que marca el currículo.

En las dos tablas anteriores podemos ver una **gran diversidad de aspectos indicadores de que un alumno ha comprendido un concepto**, y que no se reducen simplemente a memorizar la definición sin darla un sentido. Del mismo modo, los aspectos procedimientales nos muestran que **la enseñanza del límite no se reduce únicamente al cálculo de límites** a partir del registro simbólico-algebraico y a la resolución de indeterminaciones; también se pueden explotar los otros sistemas de representación utilizando, por ejemplo, *softwares* de geometría dinámica y hojas de cálculo. Hay que ofrecer al alumno la oportunidad de resolver problemas con demanda cognitiva de alto nivel, a su alcance, que les permitan desarrollar destrezas como la reflexión, la generalización, el análisis y la síntesis (Zamora, 2014). Esto también debería aplicarse para las pruebas EBAU, basadas actualmente en ejercicios repetitivos donde sólo se incluyen los aspectos procedimentales (raras veces conceptuales) de primer nivel.

4.2.2. Perspectivas en la comprensión de un concepto matemático: comprensión relacional y comprensión instrumental

En una línea similar a la anterior donde distinguíamos los aspectos conceptuales y procedimentales propios de un concepto matemático, Skemp (1976) hace una distinción entre **dos tipos de comprensión de un concepto matemático**:

- La ***comprensión relacional*** implica conocer el significado de un concepto, lo que representa, emplearlo en distintos contextos y saber por qué funciona y tiene validez. Es un conocimiento global, conectado, que se aplica en múltiples contextos y es extrapolable a otros.

- La ***comprensión instrumental*** tiene que ver con el uso del concepto para resolver situaciones concretas en las que aparece. Implica el saber utilizarlo y manejarlo eficazmente y con fluidez al operar, conocer reglas y algoritmos y ser capaz de aplicarlos (incluso sin saber por qué razón son válidos).

A lo largo de la Educación Secundaria, son muchos los docentes que solamente se quedan en la comprensión instrumental de los conceptos que aparecen: por ejemplo, a la hora de resolver una ecuación de primer grado, hay quienes emplean la frase "lo que está sumando, pasa restando" para despejar al otro miembro, por lo que los alumnos adquieren una comprensión instrumental del concepto (no se les está dando ninguna razón de por qué funciona). La cosa cambia cuando se les explican las ecuaciones como si fueran una *balanza*: si queremos quitar algo a un lado tenemos que quitarlo también al otro para que quede balanceada (esto es, restar ese número en ambos miembros). Procediendo de este modo, los estudiantes consiguen tener una visión relacional que les va permitir además extrapolarlo a otras situaciones (ecuaciones de segundo grado, sistemas…) y crear conexiones entre bloques aparentemente aislados. La diferencia puede verse de manera más clara en la Figura 4.

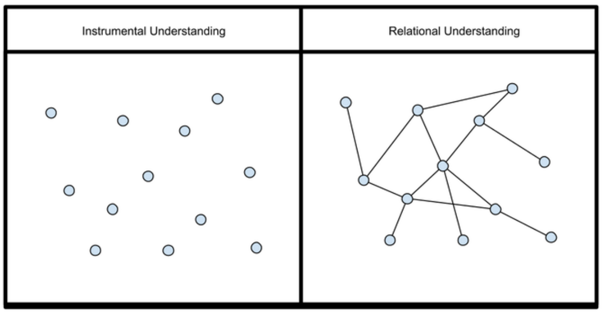


Figura 4. Representación de la diferencia entre comprensión instrumental y comprensión relacional. Imagen tomada de Wees (2015).

Nota: El conocimiento relacional crea conexiones entre áreas y bloques aparentemente aislados, permitiendo razonar en situaciones que no son familiares. En cambio, el conocimiento instrumental propone una serie de reglas útiles en situaciones concretas, sin justificación, que dan la respuesta buscada sin una reflexión previa. El peligro que puede ocurrir es que piensen que son ciertas en otros contextos donde no se pueden aplicar, debido a que no serán conscientes de ello.

Según Skemp (1976), **en las aulas de Secundaria se debe de priorizar la comprensión relacional**, a pesar de que "en la actualidad existen un gran número de profesores con experiencia y abundantes libros de textos pertenecientes a la corriente contraria [instrumental]" (p. 21). No es necesario dar métodos para resolver casos particulares, sino **abordar los conceptos de una manera comprensiva y justificada**. Esto hace realmente complicado un cambio de tendencia, dada la dificultad de reestructurar los esquemas ya existentes en la mente de los docentes y que vienen heredados de la enseñanza tradicional. En realidad, transmitir una comprensión puramente instrumental hace que muchos alumnos no entienden lo que están haciendo al resolver una determinada tarea, algo que sin duda constituye un obstáculo en su aprendizaje. Por ejemplo, cuando cambian las condiciones de una determinada situación a la que se habían enfrentado previamente, en general se pierden y no saben cómo proceder.

Del estudio que hemos efectuado en el capítulo anterior se deduce que la enseñanza en torno al concepto de límite de una función **se aborda profundamente de manera instrumental** (probablemente el que más dentro del currículo de Bachillerato). Rara vez se explota la comprensión relacional del concepto, no se cuestiona por qué funciona, por qué es como es ni la razón que tiene al aplicarlo en la práctica. Por ejemplo, para calcular el límite cuando $x \to 2$ de $f(x) = x^2$ sustituyen directamente en la función, pero no son conscientes de que pueden hacerlo porque es continua en dicho punto. Los **libros de texto** lo abordan a través de ejercicios en los que solo se practican habilidades de manipulación algebraica (Conejo, 2015), sin darlas ningún sentido ni justificación sobre lo que se está haciendo. Solamente presentan reglas sin explicación que, siguiéndolas, dan el resultado final. No se explotan los conceptos de aproximación que están alrededor del límite, y los profesores no lo hacen muchas veces ya sea por falta de tiempo, por la dificultad que les entraña a los alumnos comprender el concepto o "porque no se pregunta en la EBAU". Pero la culpa no es solamente de los docentes: en el **currículo oficial** de Bachillerato se recoge como contenido el límite de una función, pero se centra sobre todo en las técnicas elementales de cálculo de límite y su aplicación (por ejemplo, para determinar el comportamiento asintótico de una función). Con esto lo que se fomenta es una comprensión instrumental del concepto, que funciona incluso sin saber en qué consiste el concepto de límite.

En Skemp (1976) y en Arce, Conejo y Muñoz (2019) se muestran varias **razones por las que se sigue con una enseñanza instrumental**:

- Las matemáticas instrumentales son mucho más sencillas de captar, ya que proporcionan **recetas** que si se siguen dan la solución – en general, inmediata – al problema. Conceptos como el de límite son difíciles de comprender por los estudiantes, por lo que se prefieren dar **reglas y algoritmos** para proceder a su cálculo, que funcionan incluso sin saber por qué se está haciendo eso. Y muchas veces esto les es suficiente a los alumnos dado que se guían por lo que normalmente se les pregunta en el examen, que suele ser similar a lo que se ha hecho en clase.

- Las **recompensas** de resolver un ejercicio instrumental son mucho más **inmediatas** y más evidentes, generando una satisfacción en el alumnado. Aunque esto es beneficioso para su autoestima, no les permitirá enfrentarse a problemas donde no haya un algoritmo o un camino claro de cómo proceder, generándoles una cierta ansiedad.

- **No es necesario llegar a entender el concepto** ni por qué funciona, si se siguen unos determinados pasos se consigue encontrar la solución. Es decir, se opta por unas matemáticas utilitarias, en las que hace falta menos cantidad de conocimientos.

- En el pasado, cuando no había herramientas que calcularan aproximaciones, era necesario conocer fórmulas y hacer transformaciones para poder encontrar su valor (por ejemplo, con los logaritmos, las razones trigonométricas o las indeterminaciones). Tampoco existían **calculadoras gráficas**, ***softwares* de geometría dinámica** u **hojas de cálculo**, por lo que el cálculo de límites se centraba exclusivamente en lo algebraico (que siempre proporciona una solución exacta y no aproximada). Sin embargo, y a pesar de que hoy en día las tenemos, se siguen haciendo ejercicios de este tipo, que no tienen más utilidad que desarrollar la habilidad de transformar expresiones algebraicas.

La **comprensión relacional** presenta por su parte algunas **ventajas**:

- Permite crear un **aprendizaje significativo y duradero**, que el alumno recordará a largo plazo. Los algoritmos y las reglas se olvidan fácilmente, por lo que proporcionar una explicación constructiva favorece que se pueda volver a recuperar fácilmente. Sin embargo, esto suele llevar asociada una carga de tiempo mayor.

- Proporciona un conocimiento que se puede aplicar a un rango más grande de problemas. Si se les explica por qué los conceptos/procedimientos funcionan de una determinada manera, el alumno será capaz de extrapolarlos a otras situaciones que no le sean familiares y de determinar si es posible o no extrapolarlos.

Existen muchas formas de **dar el paso hacia una comprensión relacional de los conceptos**. Para Skemp (1976) es fundamental incluir las dos dimensiones en una, dando unos **pocos principios** que se puedan aplicar en contextos generales en lugar de múltiples reglas particulares. Si desde el principio se les enseña a asociar los conceptos y a experimentar con ellos (pudiendo apreciar además una analogía en ellos) conseguirán recordarlos durante más tiempo. Después de su comprensión, el alumno estará preparado para proceder a resolver un tipo de problemas más amplio donde aparezcan, en este caso sin hacerlo de manera algorítmica[9]. Aunque al principio el cambio puede no encajar bien entre los docentes debido a la tradición instrumental actualmente impuesta, aquí es donde entra el papel de la **innovación educativa**: Arce, Conejo y Muñoz (2019) también apoyan el desarrollo de una comprensión relacional utilizando, por ejemplo, herramientas y *softwares* de cálculo, a lo que se podrían sumar otros recursos de tipo manipulativo que den al alumno un papel más protagonista en el aula. Esto no quiere decir que haya que eliminar el cálculo de límites para centrarse solo en el concepto, sino ampliar el rango de técnicas más allá del registro simbólico-algebraico y tratar de unificar las reglas a la hora de resolver indeterminaciones (por ejemplo, aprendiendo a interpretar los órdenes de infinitud entre funciones). **Hay que dar un sentido al concepto de límite**, mostrar su utilidad y vincularlo con otros conceptos, como el de continuidad y asíntota.

4.2.3. Perspectivas en el aprendizaje de un concepto matemático: definición conceptual e imagen conceptual

A nivel cognitivo, Tall y Vinner (1981) distinguen dos perspectivas en el aprendizaje de un concepto matemático: según ellos, existe una **diferencia entre el concepto matemático definido formalmente y los procesos cognitivos que se desarrollan alrededor de él**: en la mente de cada persona existe una estructura cognitiva compleja, que proporciona una diversidad de imágenes mentales cada vez que se encuentra con el concepto. Entre estas imágenes mentales puede incluso suceder que no exista una definición rigurosa: habitualmente se aprenden a reconocer estos objetos a partir de la experiencia y el uso en contextos apropiados. Durante todo el proceso de aprendizaje su significado se va poco a poco refinando y el nivel de interpretación es cada vez más sutil, ya se disponga de la definición precisa en ese momento o no.

Las dos perspectivas que se diferencian en el aprendizaje de un concepto matemático son las siguientes (Arce, Conejo y Muñoz, 2019, p. 304; Tall, 1992, p. 3; Tall y Vinner, 1981, p. 152):

- **Definición conceptual:** secuencia de palabras que se utiliza para especificar un concepto. Se distinguen dos tipos: *personal*, propia de cada persona (y que ser distinta dependiendo del momento), o *formal*, formulada por una comunidad de matemáticos y aceptada como universal a la hora de definir dicho concepto. La formal tiene un carácter inequívoco, conciso, exacto; la personal suele mostrar más los aspectos subjetivos de su comprensión.

[9] En este enfoque se basa el famoso Método Singapur, que parte de aprender a desarrollar habilidades sencillas para lograr una comprensión profunda y verdadera a través de la resolución de problemas.

- **Imagen conceptual**: está formada por toda la estructura cognitiva que una persona asocia y desarrolla alrededor de un determinado concepto. En esta se incluyen una serie de elementos muy variados: hechos, ejemplos, imágenes mentales, representaciones, procesos, propiedades, relaciones… que pueden no estar conectados de manera coherente. Cada persona construye la suya propia, de manera consciente o inconsciente, a través de las distintas experiencias que tiene con el concepto. La definición conceptual puede (o no) estar dentro de la imagen conceptual o puede ayudar a generar parte de esa imagen.

La idea de Tall y Vinner se ve clara con los conceptos propios del pensamiento matemático elemental. Por ejemplo, en la educación infantil no se les introduce a los alumnos un triángulo directamente como un polígono de 3 lados, sino que a través de varias representaciones (gráfica, verbal,…) y ejemplos (de la realidad, la vida cotidiana o su entorno) se les enseña cómo se puede idenficar y distinguir del resto. Superado este primer paso, los alumnos comienzan a obtener propiedades de estos, introduciendo nuevo vocabulario: lados, ángulos… En este proceso es muy beneficioso que el alumno aprenda a través del descubrimiento, permitiendo que intuya, interprete, generalice e incluso que se equivoque. Cuando ya lo tiene asumido, el último paso es institucionalizar el concepto, definiendo con ayuda de los estudiantes el triángulo como el polígono de 3 lados. Sin embargo, y aún teniendo la definición formal, cada vez que el alumno entre en contacto con el concepto de triángulo también evocará todas las imágenes mentales que tenga asociadas a este, como la representación gráfica de la figura, el número de ángulos, ejemplos o situaciones reales donde aparezca, propiedades… **La estructura cognitiva que tiene construida alrededor del concepto va mucho más allá de la propia definición, y cuanto más variada sea la imagen conceptual, mejor será la adaptación del concepto a otras situaciones no familiares**.

Este proceso de creación y de formalización lo podemos apreciar de hecho en la **evolución histórica** de cualquier concepto matemático, incluidos los del PMA, y puede sernos útil en el proceso de transposición didáctica para hacérselo llegar a los alumnos. En el caso del límite, como vimos, los matemáticos griegos lo utilizaban en el método de exhausción sin considerar ninguna definición formal, suponiendo que existían cantidades infinitamente pequeñas. Tampoco lo utilizaron de una manera rigurosa ni Newton ni Leibniz al estudiar el concepto de derivada, aunque el primero ya intuyó la necesidad de justificar que había cantidades que *desaparecían*, es decir, que tendían a cero. Al vincular el límite a la aritmética en lugar de a la geometría y a la física D'Alembert se dio cuenta de la existencia de un proceso de aproximación, cantidades que se van acercando cada vez más a otras. Esto pasó a un proceso intuitivo, en el que Cauchy afirmó que podemos acercarnos *tanto como queramos.* Finalmente la formalización del concepto llegó con Weierstrass al apartar la subjetividad y cuantificar la acotación de la diferencia entre la función y límite.

En el caso del límite, partiendo de **ideas mentales e intuitivas**, los matemáticos fueron identificando su existencia detrás de la derivada y la integral, para posteriormente pasar a ponerlo en relieve como eje central del análisis. Si el docente construye de una manera análoga el concepto de límite en Bachillerato, haciendo uso además de **múltiples ejemplos** y **varias representaciones**, el alumno será capaz de generar una imagen conceptual rica en torno al límite. En este proceso el estudiante puede incluso llegar a generar una definición conceptual propia, la cual es importante que esté de acuerdo con la definición conceptual formal (Cornu, 1991).

Sin embargo, **la realidad en las aulas es bastante distinta**. Arce y Conejo (2017) señalan que en general la imagen conceptual de los alumnos respecto al concepto de límite es muy heterogénea, presentando poca variedad de ejemplos y situaciones. La definición conceptual por su parte es débil y poco operativa: cuando se introduce la definición formal de límite, se hace sin mostrar su necesidad y sin darle el significado ni la importancia que tiene, así que los estudiantes no la asocian con el concepto. Suelen hacerlo de una manera dinámica, utilizando representaciones gráficas y raramente numérico-tabulares, indicando que si la variable x se acerca a a, entonces $f(x)$ se acerca a L (lo cual suele generar bastantes obstáculos, como veremos en la siguiente sección). La poca significación que se le da al concepto de límite hace que la enseñanza se base únicamente en el cálculo de límites, poniendo el foco en las manipulaciones algebraicas en las habilidades de cálculo.

Una parte importante de este proceso de institucionalización, relacionada con el paso del pensamiento matemático elemental al PMA, es la consideración de los **conflictos cognitivos** que se pueden producir en el paso de la imagen conceptual a la definición conceptual. De acuerdo con Tall (1992), se forma nuevo conocimiento cuando aparecen ciertas contradiciones frente al que ya se posee. Es de especial interés el momento en que en la mente de un estudiante entran en contacto las imágenes conceptuales previas, basadas en experiencias anteriores, con nuevas ideas basadas en definiciones y deducciones (el modo propio de trabajo del PMA). La oposición entre *describir* y *definir* genera conflictos cognitivos en los alumnos, especialmente si la imagen conceptual que poseen es débil. Por lo tanto, **el aprendizaje de un concepto del PMA** – como el de límite – **ha de partir de crear una imagen conceptual amplia y variada**, con suficientes ejemplos y experiencias, para que las definiciones encajen con una mayor naturalidad. Tall y Vinner (1981) señalan que si todos los ejemplos van en una misma dirección (como suele ser el caso de utilizar continuamente la representación simbólico-algebraica) la imagen conceptual será más restringida, lo que ocasionará ciertos obstáculos al conocer otras visiones distintas del concepto.

En relación al **concepto de límite**, este es el primero con el que se encuentran los estudiantes entre los pertenecientes al PMA. Una buena secuencia didáctica no debería comenzar con definiciones formales, sobre todo si contiene elementos poco familiares – como la que se viene dando tradicionalmente en términos de ε y δ. Es preferible intentar encontrar una aproximación construida sobre otros conceptos que les sean más familiares y que les permitan formar una base sobre la que desarrollarlo. Tall (1992) denomina a esta base como **raíz cognitiva**, la cual es totalmente distinta de la **fundamentación matemática** del concepto: la primera ha de verse desde un punto de vista curricular y didáctico, mientras que la segunda tiene que ver con el desarrollo lógico propio de las matemáticas como disciplina. **Las distintas investigaciones** (Blázquez y Ortega, 2002; Cornu, 1991; Fernández-Plaza et al., 2013, 2015; Valls et al., 2011, 2012), **permiten conocer cuáles son las distintas raíces cognitivas a tomar como punto de partida en el aprendizaje del límite**: es necesario comenzar con una idea dinámica, de aproximación, intentando disipar ciertas ideas preconcebidas de los estudiantes. Cuando se llegue a la definición formal, la comprensión será mucho mayor si también se presenta en términos dinámicos en lugar de estáticos, al contrario de como se suele hacer habitualmente en las aulas.

Una dificultad que surge en el aprendizaje del análisis, y que difiere de otros bloques como la geometría o el álgebra, es que **los conceptos propios del análisis** (infinito, límite, convergencia…) **no se les introducen a los alumnos hasta que no llegan a Bachillerato**, por lo que en la mayoría de los casos no han oído hablar anteriormente de ellos. Por tanto, no existe un conjunto previo rico en experiencias que los involucren, no tienen una imagen conceptual suficiente a la hora de definirlos (López-Esteban, 2019). Esto se podría evitar parcialmente si durante la Educación Secundaria Obligatoria se introducen mezclados con otros conceptos. Por ejemplo, en 3º de ESO se introducen las **sucesiones**, que muchos docentes reducen únicamente al estudio de las de tipo aritmético y geométrico. Es un buen momento para introducir el *infinito* a través de sucesiones como la de los naturales (1,2,3…) o la armónica ($1/n$), en la que se les puede preguntar qué es lo que sucedería si se continuase el proceso de calcular términos indefinidamente. Puede utilizarse además para **evitar algunos de los obstáculos** que veremos en la siguiente sección, relacionados con ideas preconcebidas sobre la idea de límite. Si se incluyen también otros tipos de sucesiones, incluso que no sean numéricas, se puede comenzar a crear una imagen conceptual alrededor de límite que se completará en el Bachillerato a través de las funciones. Incluir procesos como el **método de exhausción** (una sucesión de polígonos que *tiende* al círculo, por dentro y por fuera) también es buena idea para que vean como se aproximan también sus áreas a la del círculo, un aspecto relacionado con la obtención del número π. No obstante, **podemos caer en el uso de ejemplos prototípicos**, casos donde las sucesiones son siempre monótonas, por lo que también se pueden considerar otros ejemplos menos ordinarios como $(-1/2)^n$ que oscila alrededor de 0 pero que se acerca a este valor.

Por su parte, la **definición conceptual** también es un aspecto por el que el docente ha de preocuparse. Tras crear una imagen conceptual suficiente y variada del concepto de límite (usualmente basada en ideas de tipo dinámico) llega el momento de institucionalizarlo a través de una definición. En este punto es cuando entra en juego la definición conceptual **formal**, la que es aceptada como universal por la comunidad matemática, siendo fundamental que esta encaje con la imagen conceptual ya creada a su alrededor. Si los ejemplos y las experiencias que se han proporcionado han ilustrado todos los aspectos del concepto, los alumnos no tendrán ningún problema en asimilarla (Cornu, 1991). Es muy posible incluso que el alumno ya haya creado una definición conceptual **personal** a partir del proceso anterior. Si se ha ejecutado de una manera constructiva, el conflicto cognitivo para comprenderla se resolverá más fácilmente.

Una cuestión que puede ser interesante es conocer **qué tipo de definición conceptual personal tienen los alumnos sobre el límite de una función** después de haberlo estudiado. En Tall (1992) encontramos una investigación llevada a cabo por Robert (1982) sobre cómo 1380 estudiantes explicarían con sus palabras la noción de sucesión convergente a otro de 14-15 años (pregunta que probablemente active más su imagen conceptual que la propia definición conceptual). Un **35% dieron respuestas de tipo dinámico** (basadas en aproximaciones), un **13% dieron respuestas de tipo estático** (basadas en entornos), un 12% solo consideraron el caso monótono y solo un 4% dieron la definición formal ε-δ (el resto no contestaron o fueron incorrectas). En otra investigación, Tall y Vinner (1981) preguntaron a 70 estudiantes universitarios de primer curso por su definición de límite, recibiendo 18 respuestas de tipo estático (4 correctas, 14 incorrectas) y 31 de tipo dinámico (27 correctas, 4 incorrectas); el resto no contestaron. Todo esto demuestra que **la concepción dinámica del límite se recuerda con mayor facilidad que la estática y que perdura más en su memoria, además de que también es menos probable que cometan fallos**.

4.3. Obstáculos en el aprendizaje del límite

La Didáctica de la Matemática también dedica parte de sus investigaciones a detectar, caracterizar e interpretar **errores habituales** que se producen en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Brousseau (1999, citado en Arce, Conejo y Muñoz, 2019, p. 94) diferencia tres tipos de obstáculos que pueden dar lugar a errores dependiendo del origen o la causa que lo explique:

- **Obstáculos epistemológicos**: se producen cuando un conocimiento que es válido en un cierto contexto se aplica en otro inadecuado, originando respuestas incorrectas, y se deben a la naturaleza propia de los conceptos por sí mismos. Arce, Conejo y Muñoz (2019) destacan que suelen ser persistentes, al ser conocimientos con un determinado dominio de validez.

- **Obstáculos ontogenéticos**: debidos a las limitaciones y a las características propias del desarrollo cognitivo del estudiante. Arce, Conejo y Muñoz (2019) ponen como ejemplo la introducción temprana de la definición estática de límite, cuando los alumnos tienen todavía una concepción dinámica de este. Cornu (1991) indica que es necesario identificarlos para buscar estrategias más adecuadas para transmitir esos conocimientos.

- **Obstáculos didácticos**: se deben a las elecciones que realiza el docente o una institución educativa cuando se plantea la enseñanza de un determinado conocimiento matemático. Por ejemplo, la utilización únicamente del sistema simbólico-algebraico para el cálculo de límites de una función hace solo sepan trabajar con el concepto en este registro.

En las siguientes subsecciones recogemos una serie de dificultades comunes e ideas erróneas que los alumnos desarrollan durante el proceso de aprendizaje del límite.

4.3.1. Obstáculos relacionados con el lenguaje

Cuando los alumnos de bachillerato estudian el concepto de límite de una función en un punto, existen una serie de **concepciones previas** que pueden dificultar este aprendizaje. Una de estas dificultades de los estudiantes tiene que ver con la influencia del **lenguaje**: la palabra "**límite**" contiene por sí mismo numerosas connotaciones relacionadas con la vida cotidiana que para nada tienen que ver con el concepto matemático en sí. Habitualmente representa algo que no puede superarse, como el límite de velocidad en carretera (Tall, 1992) o una frontera (Fernández-Plaza et al., 2013), por lo cual los estudiantes lo entienden como **algo que no se puede ni sobrepasar ni alcanzar**. Supone, por tanto, un obstáculo epistemológico, al asociar el concepto de límite con el significado literal de la palabra.

Cuando se introduce el concepto de límite utilizando una idea dinámica aparecen alrededor del concepto de límite otros términos como "**tender hacia**" , "**aproximarse**" o "**acercarse a**", los cuáles también tienen otros significados coloquiales totalmente distintos al uso que se les da en matemáticas (Cornu, 1991). Estos suelen llevar a los alumnos a pensar que **si una sucesión se aproxima a un límite, entonces nunca puede ser igual a este** (Fernández-Plaza et al., 2013; Tall y Vinner, 1981; Tall, 1992). Incluso si se tratan otros ejemplos basados en sucesiones no dadas por un término general concreto, como por ejemplo la sucesión 1, 0, ½, 0, ⅓, 0… en la que los términos pares son iguales al límite, probablemente los obstáculos sigan ya que los estudiantes pensarán que son dos sucesiones en lugar de una (Tall, 1992). Se trata nuevamente de un obstáculo de tipo epistemológico. Arce y Conejo (2017) muestran también como algunos docentes tampoco tienen claras estas ideas: "definen tender como "estar cada vez más cerca de", (identificándose erróneamente tendencia con aproximación monótona)" (p. 161).

Esta concepción dinámica del límite también trae consigo otros problemas: según Tall (1992), **puede desarrollarse la creencia de que una propiedad que es común para todos los términos también lo será para el límite**. Por ejemplo, según estas ideas el límite de la sucesión 0´9, 0´99, 0´999, 0´9999, … debería ser menor que uno, dado que todos los términos son menores que uno. Cornu (1991) lo estudió con mayor profundidad: en la sucesión anterior, los estudiantes suelen pensar que la sucesión tiende a 0´9999… pero que su límite es 1, sin identificar estos números como iguales.

Fernández-Plaza et al. (2013) llevaron a cabo una investigación para conocer el significado que los alumnos les dan a las palabras "aproximarse", "tender", "alcanzar", "sobrepasar" y "límite" a través de varios ejemplos. Identificaron algunas concepciones que tienen para cada uno de los verbos anteriores recogidas en la Tabla 7, y que deberemos evitar si queremos que nuestros alumnos comprendan el concepto de límite.

Tabla 7. Términos matemáticos que aparecen alrededor del concepto de límite e interpretaciones que los alumnos hacen de ellos

Términos específicos	Términos que los alumnos asocian
Aproximarse	Aproximarse
	Dirigirse
	Acercarse
	Moverse, desplazarse
Tender	Tender
Exceder	Rebasar, exceder
	Sobrepasar
	Limitar
	Tope numérico
	Máximo
Alcanzar	Alcanzar
	Llegar
	Tocar
	Exacto

Nota: tomado de Fernández-Plaza et al. (2013).

El lenguaje también es fruto de errores didácticos: **la introducción del concepto de límite de una manera simplificada** a través del **lenguaje corriente** también trae problemas (Tall, 1992). Orton (1980, citado en Tall, 1992) investigó la concepción que tienen los estudiantes sobre el concepto de límite utilizando el ejercicio que aparece en la Figura 5. Para ello, introdujo la expresión "término final" como un intento para ayudar a los estudiantes a entender el concepto de límite, lo que produjo que muchos estudiantes imaginaran la "escalera final" como una con un número infinito de escalones en lugar de un triángulo. Por lo tanto, el intento de simplificar el lenguaje supone también un obstáculo a evitar, en este caso de tipo didáctico al ser el docente el que elige el modo de introducir el concepto.

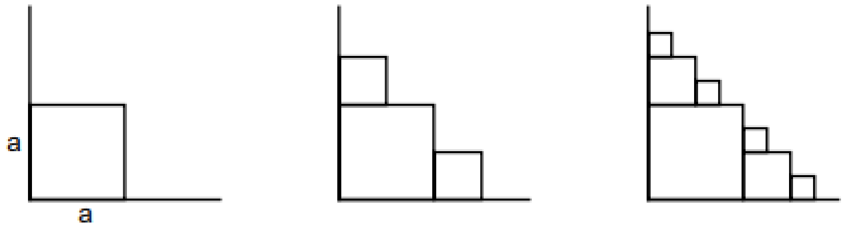


Figura 5. Introducción del proceso de límite a través de una escalera en la que se añaden sucesivamente nuevos peldaños intercalados con la mitad de tamaño que los anteriores. Tomado de Orton (1980), citado por Tall (1992).

Nota: La imagen se incluye en un ejercicio en el que se preguntan tres cuestiones: *i)* el *resultado final* obtenido al repetir el proceso indefinidamente; *ii)* cuántos escalones han de incluirse antes de llegar a este; *iii)* cuál es el área de la figura final en función de *a*.

Aproximación y tendencia

Es muy importante que los alumnos aprendan a distinguir los términos **aproximación** y **tendencia**, erróneamente considerados como sinónimos.

Definición de aproximación
Una variable, que toma sus valores en un conjunto numérico, puede *aproximarse* a un cierto número si los errores absolutos que se cometen, considerando los valores de la variable como aproximaciones del número son cada vez menores. (Blázquez y Ortega, 2002, p. 14).

Definición de tendencia
La variable *tiende* a un número cuando los valores son aproximaciones del número y además se aproximan más que cualquier otro valor, es decir, cualquier aproximación se puede mejorar con valores de la variable. (Blázquez y Ortega, 2002, p. 14).

Pongamos un ejemplo con números para mostrar el significado de ambos términos: la sucesión

4’79, 4’799, 4’7999, 4’79999, …

se aproxima a 5, dado que los errores 0’21, 0’201, 0’2001, 0’20001, … se van haciendo cada vez menores (no necesariamente a 0). También podemos afirmar que se aproxima a 4’9, dado que los errores 0’11, 0’101, 0’1001, 0’10001, … van también disminuyendo. Está claro que los valores de la sucesión anterior son también **aproximaciones** de 4’8 (pues los errores son 0’1, 0’01, 0’001, 0’0001, … y van haciéndose cada vez más pequeños).

Si ahora consideramos la sucesión 4’9, 4’99, 4’999, 4’9999, …, todos sus valores son aproximaciones de 5. Lo que tiene de especial es que **la proximidad que se logra al elegir esta sucesión es mayor que con cualquier número distinto** de 5: dada cualquier aproximación de 5, por ejemplo 5’0000001 (cuyo error es 0’0000001), podemos encontrar un término de la sucesión anterior que mejore la aproximación, como 4’99999999 (donde el error es 0’00000001, es decir, 10 veces menor). Lo anterior obviamente se cumple para los siguientes términos de la sucesión. Por lo tanto, podemos afirmar que los valores **tienden** a 5. En el caso del ejemplo del párrafo anterior, la sucesión además de aproximarse a 4,8 también tiende a este valor.

Posteriormente se pueden considerar otros ejemplos similares para sucesiones definidas por un término general como la armónica, determinando que tiende a 0 (y que, por tanto, ese es su límite). Queda por lo tanto definida lo que es una **sucesión convergente** como aquella en la que se puede mejorar cualquier aproximación con todos los términos a partir de uno en adelante, prescindiendo de la noción estática de entorno:

Definición de límite secuencial (Blázquez y Ortega)

L es el límite de una sucesión si para cualquier aproximación K de L existe un término de la sucesión tal que todos los que siguen están más próximos a L que *[sic]* K (Blázquez et al., 2006).

Para demostrar que 0 es el límite de la sucesión $1/n$: si fijamos cualquier aproximación (por ejemplo, K = 0’05 = 5/100 = 1/20, es claro que a partir del número 21 los términos de la sucesión están más próximos a 0 que 0’05. Se puede mostrar además de manera gráfica para entender su significado gráfico, como se muestra en la Figura 6. En el aula, es importante destacar que lo anterior se ha de cumplir para cualquier aproximación K tomada, aunque el término n_0 cambiará. También se podría haber considerado una aproximación a la izquierda de 0 como K = – 0’05: los términos a partir de 21 siguen estando a distancia menor de 0 que K. Esto es equivalente a la existencia del $\varepsilon > 0$ tal que a partir de un valor n_0 todos los términos siguientes están dentro del intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, que es la definición habitual de límite de una sucesión. La que presentan Blázquez et al. (2006) es por tanto equivalente, con el mismo rigor pero menos formal y más adaptada a los estudiantes. Además, debería incluirse algún ejemplo que no muestre siempre una monotonía, considerando por ejemplo la sucesión $(-1)^n/n$ que es alternada: hay términos a la izquierda y a la derecha de 0. Lo importante es que la distancia a 0 va disminuyendo, que es lo que aparece en la definición de tendencia.

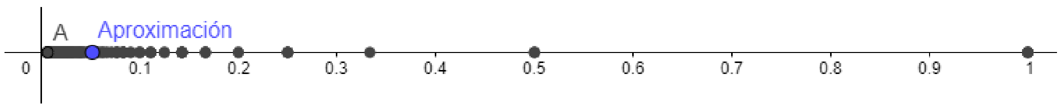


Figura 6. Representación gráfica de los términos de la sucesión 1/n tomando como aproximación K=0'05. Elaboración propia utilizando GeoGebra.

Nota: a partir del término 21, el resto de términos de la sucesión están más próximos a 0 que 0.05.

Cuando se defina el límite, si se quieren evitar obstáculos relacionados con el lenguaje, será preciso definir inicialmente estos dos términos para poder distinguirlos. Además, cuando se proceda a dar una definición de límite (ya sea en su concepción dinámica o estática) deberemos evitar la expresión *f(x) tiende a L*, ya que da una idea de convergencia en el dominio que no siempre es cierta. En cambio, en el dominio sí se puede afirmar que *x tiende hacia a*, ya que estamos eligiendo una sucesión de valores para los que, fijada cualquier aproximación, encontramos términos tal que de ese en adelante la mejoran (Fernández-Plaza et al., 2013).

4.3.2. Dificultades para entender el infinito

El concepto de **infinito** también trae numerosos problemas a los estudiantes (Tall, 1992), sobre todo si nunca lo han visto en los cursos previos. Históricamente, el infinito se ha abordado desde dos perspectivas distintas: infinito *actual* ("hay una cantidad infinita de números enteros") o infinito *potencial* ("siempre existe otro número mayor que cualquier entero"). El estudio de los cardinales en el siglo XIX (atribuido a Cantor) le dio al infinito actual un significado a través del tamaño de los conjuntos. Sin embargo, cuando se abordan los límites, frases como "el límite de una sucesión x_n cuando $n \to \infty$" utilizan una idea potencial del infinito, lo cual suele generar un cierto conflicto cognitivo (Tall, 1992) con otras ideas de infinito presentes al estudiar los conjuntos numéricos y sobre el concepto en sí, al interpretarlo como un objeto que no se puede alcanzar. Para evitarlo, algunos docentes les dicen a sus estudiantes que no lo consideren como un número, aunque luego trabajan con él como si lo fuera para el cálculo de límites.

Sierpinska (1987) realizó una investigación para conocer la **imagen conceptual** que tienen los alumnos alrededor del concepto de infinito: encontró que tienen distintas visiones del concepto. Algunos de ellos lo interpretaron como un número muy grande, identificado como el último término al que se llegaría si se continúa la sucesión de los naturales. Otros creen que es algo complicado de definir considerándolo como un objeto no matemático, alegando que estas solamente se preocupan por los números finitos. Por otra parte están los estudiantes que consideran al infinito conectado con una idea de tiempo: es algo que no se puede alcanzar, a lo que no podemos llegar nunca. Esto suele generar además la idea de que no se puede exceder, muy vinculado al uso continuado de ejemplos monótonos (Fernández-Plaza et al., 2013).

La cuestión del infinito también entra en juego al considerar cantidades *infinitamente grandes* e *infinitamente pequeñas*, presentándose el mismo problema que en la época de Newton y Leibnitz (Cornu, 1991). Como vimos en el primer capítulo, estos suponían que las cantidades infinitamente pequeñas llegaba un momento que se convertían en 0, se *desvanecían*, y suele ser algo que los estudiantes de secundaria también toman como tal. Por lo tanto, es necesario desquitar esta visión especialmente cuando se tratan las **indeterminaciones**. Por ejemplo al considerar la sucesión $1/n$ no podemos afirmar que el resultado del límite cuando $n \to \infty$ sea igual a "$1/\infty = 0$": hay que considerar que cuando $n \to \infty$ los valores de $1/n$ se hacen cada vez más pequeños y próximos a cero, y se aproximan tanto a este que difieren de 0 menos que cualquier cantidad dada. Entender cómo funciona el infinito resulta fundamental para saber cómo trabajar con los límites en la práctica (lo cual no consiste solamente en hacer cálculos mecánicos, sino también en haber comprendido el concepto).

En este sentido, podemos apreciar cómo **la mayoría de los estudiantes tienen una visión potencial del infinito**. Esto suele estar asociado a la consideración de procesos infinitos al aproximar, y puede llevarlos a algunas ideas erróneas como la de dar como resultado de un límite la evaluación de la función en un valor cercano de la variable independiente (Arce, Conejo y Muñoz, 2019). Por ello, es necesario explicar el límite no solo como aproximación (un proceso infinito) sino como **aproximación óptima**: dada cualquier aproximación al límite, siempre la podemos mejorar a partir de un término en adelante (Blázquez y Ortega, 2002).

4.3.3. Obstáculos relacionados con el concepto de límite

Otra fuente de obstáculos está detrás de la **complejidad de la idea de límite**, la cual no puede aparecer directamente en el aula a través de una definición formal y perfeccionada (Tall, 1992). Numerosos autores (Contreras, 2004; Cornu, 1991; Tall y Vinner, 1981; Valls et al., 2011) coinciden en que cuando se presenta el concepto en clase se suele hacer de una manera intuitiva, acompañada de una explicación informal. Esto queda confirmado por Arce y Conejo (2017), quienes analizaron las notas que toman los estudiantes cuando se les presenta por primera vez. De este modo entienden el concepto de límite $\lim_{x\to a} f(x) = c$ como un proceso dinámico, en el que si *x se aproxima hacia a*, entonces *$f(x)$ está cada vez más cerca de c* (lo que suele hacerles creer además que siempre ocurre que $f(x) \neq c$, como D'Alembert pensó en su momento, asimilando esto en su imagen conceptual). Sumado a ello están los problemas del lenguaje que vimos en la subsección anterior, que generan ideas erróneas en los estudiantes. Arce, Conejo y Muñoz (2019) señalan que introducir el concepto de ese modo sirve para transmitir una idea inicial del concepto (si se hace con los términos adecuados) aunque no resulta operativo: encierra una visión potencial del infinito y presentan la aproximación desde un punto de vista subjetivo (*cada vez más cerca*). Tampoco enfatizan el proceso de **coordinación** entre las aproximaciones en el dominio y en la imagen, que normalmente suele ser lo más complicado para entender el concepto (Valls et al., 2011). Todo ello dificulta además la comprensión de la concepción estática del límite.

Arce, Conejo y Muñoz (2019) destacan que **la comprensión de la concepción dinámica** de límite, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, **presenta algunas dificultades** dado que involucra una serie de procesos (p. 319):

- *Acciones*: evaluar la función en puntos cercanos a a, destacando los valores de la variable dependiente e independiente.
- *Proceso*: los valores de la variable independiente se aproximan a a.
- *Proceso*: los valores de sus imágenes por f se aproximan a L.
- Coordinación de ambos procesos de aproximación a través de la función f.

Valls et al. (2011) indican que este **proceso de coordinación** es el que más suele generar problemas a los estudiantes, y muchos docentes no suelen darle la importancia necesaria desde el punto de vista dinámico. Una forma de poder hacerlo es a través de las representaciones numéricas de las funciones mediante su estudio tabular (Contreras, 2004), que permiten hacer aproximaciones en el dominio y en el rango y utiliza la función para coordinarlos. Para comprender el concepto es necesario **cuantificar las diferencias** entre los valores de las aproximaciones y el límite, que igualmente aparecen de manera coordinada, antes de pasar a la definición formal de límite.

Explicar la definición conceptual formal de límite en clase también es habitualmente una fuente de dificultades. Tall y Vinner (1981) señalan que **la definición que se les da a los estudiantes en general no encaja con la imagen conceptual que ellos tienen**. La que se enseña habitualmente en términos de ε-δ no se utiliza en la práctica para calcular límites, ni se inspira en la concepción dinámica que suelen tener asociada a través de aproximaciones (Cornu, 1991). En relación a esto, Artigue (1995) destaca que no suelen darle un significado por su carácter estático y por su excesiva formalidad. Por ello, la definición formal suele quedar como una parte superflua e inoperativa del concepto, dado que no guarda relación con la imagen conceptual que han construido ni se utiliza para operar. Al no estar unificada la idea de límite en su estructura cognitiva solamente se favorece una comprensión de tipo instrumental (Arce, Conejo y Muñoz, 2019), como vimos en la sección anterior.

Cuando se decide introducir la definición formal de límite en términos de ε-δ, los alumnos también suelen tener **problemas con los cuantificadores** “para todo” y “existe” que aparecen en ella, tanto para comprenderlos (pues tienen otros significados diferentes en la vida cotidiana) como para manipularlos (Tall y Vinner, 1981). En este sentido, los alumnos ven el concepto de límite más como un *proceso* que como un *concepto* (Cornu, 1991): en el caso de las sucesiones, los alumnos lo interpretan como el proceso de encontrar el N de la definición a partir del ε dado en lugar de identificarlo como el valor alrededor del cual se produce la aproximación. Esta idea de ver el límite como un proceso también es apoyada por el estudio de Fernández-Plaza et al. (2013), que además revela que los estudiantes suelen confundir el ε y el δ entre sí y que **no saben cómo manejar las desigualdades**.

Blázquez y Ortega (2002) señalan además que **las dificultades con la definición métrica están asociadas con el formalismo** (no entienden los términos que aparecen) **y con las manipulaciones algebraicas**: tienen problemas para evaluar expresiones, para trabajar con el valor absoluto y para acotar el error cuando la función viene dada por su expresión algebraica (hecho que se complica al tomar una letra en lugar de un número). Algunos incluso convierten la desigualdad en una ecuación que intentan resolver, entre otros muchos errores frecuentes debido a la poca comprensión general de los procedimientos algebraicos. Blázquez et al. (2006) también advierten de un error que se repite: la creencia de que el ε depende del δ, cuando en realidad es al revés, y se debe a la definición informal de *si x tiende hacia a, f(x) tiende a L.*

Estos obstáculos (tanto el hecho de encajar la definición conceptual con la imagen conceptual como evitar el excesivo formalismo) **los podemos resolver con la definición de límite que plantean Blázquez y Ortega (2002)**, alternativa a la habitual en términos de ε-δ y que presenta al concepto de una manera rigurosa pero más relajada en cuanto a complejidad. Entienden el límite como la **aproximación óptima**, en el sentido de que cualquier aproximación del límite puede mejorarse por la función en un entorno reducido de $x = a$ (adaptando la definición que dio D’Alembert en su tiempo pero de manera precisa).

Tras trabajar previamente con sucesiones, estableciendo la diferencia entre aproximación y tendencia que vimos en la subsección anterior, dan paso a la definición de límite a partir de las **tendencias** de ambas variables, x e y (valores del dominio y de la imagen), destacando la coordinación entre la tendencia de la variable y la de los valores de la función (además de la que ya existe entre la sucesión x_n en el dominio y la sucesión $y_n = f(x_n)$ en la imagen). Comienzan con la siguiente definición de tipo dinámico para introducir el concepto:

Definición intuitiva de límite funcional (Blázquez y Ortega)

Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se debiera escribir $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si cuando x tiende a a, siendo distinto de a [es decir, x se aproxima a a más que cualquier aproximación], sus imágenes $f(x)$ tienden a L [esto es, se acercan a L más que cualquier otra aproximación **fijada**]. (Blázquez y Ortega, 2002, p. 14).

Para poder entender la definición formal de límite hay que acentuar cómo funcionan las aproximaciones a L y a a: **si L es el límite, a cada aproximación p de L le corresponde una aproximación q de a, de modo que la imagen de todos los puntos que son mejor aproximación de a que q mejoran la aproximación p de L**, idea que queda reflejada en la Figura 7. En términos más formales, primero ha de elegirse una aproximación p de L, a la que le correspondería un entorno reducido de a de modo que las imágenes de todos esos puntos del entorno mejoran la aproximación p.

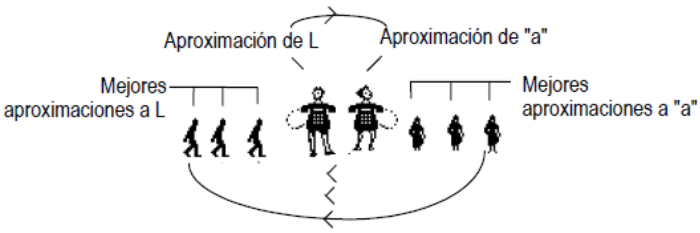


Figura 7. Coordinación entre las aproximaciones en el dominio y en la imagen. Tomado de Blázquez y Ortega (2002, p. 15).

Nota: la Figura ilustra que el concepto de límite parte de elegir una aproximación de L, a la que le corresponde una aproximación de a. Si se toma la imagen de todos los puntos que son mejor aproximación de a que la anterior, estas han de ser también mejores aproximaciones que la que se hizo a L.

Blázquez (1999) elaboró una propuesta didáctica que incluía la definición dinámica anterior y comprobó su utilidad a través de una investigación con estudiantes del Bachillerato de CC.SS. (dado que, como vimos en el capítulo anterior, en el currículo de este solo aparece como contenido el proporcionar una idea intuitiva del límite). En ella, Blázquez muestra que **los alumnos comprenden la diferencia entre aproximación y tendencia**, aunque **el concepto de límite no es entendido en todos los casos**. Además, la definición es útil para probar las propiedades del límite y para ilustrar el concepto al partir de una idea dinámica, con aproximaciones. El hecho fundamental es que **presentar el límite como la aproximación óptima es una mejor opción que a través de la**

definición métrica, en términos de ε y δ: se trabaja con expresiones numéricas en lugar de algebraicas, y dan más pie a la introducción de los sistemas de representación gráfico y numérico-tabular, evitando los obstáculos comentados anteriormente relacionados con el tratamiento algebraico y el manejo de las desigualdades propias de la definición de Weierstrass.

En Blázquez et al. (2006), los autores dan un paso más hacia el rigor a través de las siguientes definiciones, que se acerca más a una **concepción estática** de límite de una función en un punto:

> **Definición de límite como aproximación óptima (Blázquez y Ortega)**
> El límite de la función f en $x = a$ es L si para cualquier aproximación K de L, existe una aproximación H de a, tal que las imágenes de todos los puntos que están más cerca de a que H están más próximas a L que [sic] K (p. 195).

Lo que equivale, introduciendo la noción de entorno reducido, a decir que:

> **Definición formal de límite como aproximación óptima (Blázquez y Ortega)**
> El límite de la función f en $x = a$ es L si para cualquier aproximación K de L, $K \neq L$, existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos están más próximas a L que K (Blázquez et al, 2006, p. 195).

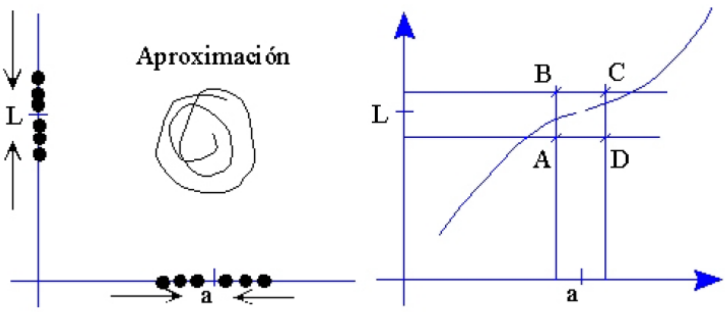


Figura 8. Representación gráfica del significado de las de las definiciones de límite como aproximación óptima. Tomado de Blázquez et al. (2006).

Nota: En el gráfico de la izquierda, puede verse el funcionamiento de las tendencias tanto en el dominio como en la imagen: los puntos en el eje de abscisas y en el de ordenadas se corresponden a través de la función. En el gráfico de la derecha se muestra el significado del límite: cualquier aproximación K a L, $L \neq K$, determina una banda horizontal que contiene a L, y la correspondiente aproximación a a vía f crea una banda vertical que contiene a a. Que el límite exista quiere decir que las imágenes de los puntos en el entorno de a han de estar dentro del entorno de L, luego son mejores aproximaciones a L que K. Esto significa que la gráfica de la función cruza el rectángulo ABCD cortando únicamente los segmentos AB y CD, y también lo cumplen los entornos $(L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$ y $(a - \delta,\ a + \delta)$ propios de la definición de Weierstrass.

Esta última definición puede verse que es equivalente a la métrica de Weierstrass como muestra la correspondencia entre términos recogida en la Tabla 8.

Tabla 8. Correspondencia entre las unidades significantes elementales de las definiciones de Weierstrass y de Blázquez y Ortega

Definición métrica	Definición como aproximación óptima
Para todo $\varepsilon > 0$	Para toda aproximación $K \neq L$
Existe $\delta > 0$	Existe una aproximación $H \neq a$
Los x tales que $0 < \mid x - a \mid < \delta$	Los x que mejoran la aproximación H de a
$\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$	Las imágenes $f(x)$ mejoran la aproximación K de L

Nota: tomado de Blázquez et al. (2006).

Blázquez y Ortega (2002) indican que el **intento de introducir la definición formal de límite en la secuencia didáctica fracasa con los alumnos**, incluso con la última a través de entornos, mostrando que "no es un concepto tan intuitivo como puede parecer" (p. 16). Todo esto empeora cuando se introducen términos algebraicos; en cambio, funciona mejor al trabajar de manera numérica a través de aproximaciones. Señalan además un **inconveniente**: "una interpretación de límite excesivamente dinámica de la definición puede obstaculizar la comprensión del concepto, ya que, en ese caso, los alumnos rechazan lo que les parece demasiado estático" (Blázquez y Ortega, 2002, p. 16).

En nuestra **propuesta didáctica**, encaminada a la comprensión del concepto de límite, utilizaremos las definiciones anteriores de Blázquez y Ortega: partiremos de un punto de vista dinámico y preciso, combinando los distintos sistemas de representación del límite. Posteriormente iremos formalizando los términos hasta llegar a una de las dos últimas definiciones. Al presentar al límite de una manera dinámica, la imagen conceptual que crearemos a los alumnos a través de varios ejemplos estará preparada para entender la definición conceptual formal.

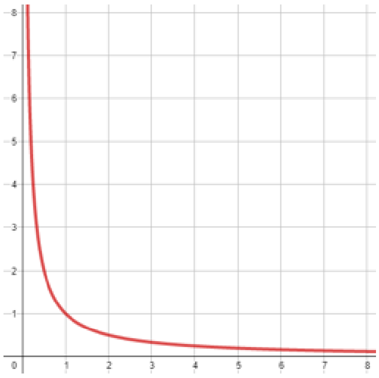
Esto no quiere decir que la definición habitual en términos métricos sea incorrecta, sino que **contiene un grado de formalismo que hace que los alumnos no lo entiendan**. Este hecho se vuelve a confirmar en otra investigación llevada a cabo con alumnos del anterior CAP (formación correspondiente a este Máster actualmente) recogida en Blázquez et al. (2006): en este caso se les pidió que demostraran dos teoremas sobre límites con la definición métrica, y posteriormente se les demostró como se haría con la definición como aproximación óptima. 41 de 47 mostraron una preferencia mayor por la segunda, que consideraron más fácil al ser menos formal y más aplicable. Sin embargo, también aprecian un *efecto túnel* en algunos de ellos ya que defienden que siempre han estado acostumbrados a la definición métrica, por lo que son reacios al cambio.

4.3.4. Obstáculos relacionados con las representaciones del límite

Fernández-Plaza et al. (2015) destacan la importancia de los **sistemas de representación** en la enseñanza de un concepto matemático: "requieren de una variedad de representaciones para su captación, comprensión y estructuración, de ahí la necesidad de establecer relaciones entre distintos sistemas de representación" (p. 215). En el caso particular del límite, Valls et al. (2011) insisten en dar importancia a este proceso de cambio de registros entre representaciones si se quiere fomentar la comprensión, mostrando en todo momento el doble proceso de aproximación que existe (dominio e imagen) y su coordinación a través de la función. Por lo tanto, es necesario presentar ejemplos variados que utilicen distintas representaciones del concepto, e insistir en las analogías que existen entre ellos.

Duval (1999) hace un estudio de los diferentes **registros de representación semiótica**, analizando las transformaciones que se producen entre los mismos, el nivel de comprensión y la preferencia de los estudiantes. Los define como sistemas semióticos de representación que incluyen **tres actividades cognitivas**: han de ser *identificables* (un gráfico, un símbolo, una tabla…), han de *permitir su tratamiento* (poder hacer manipulaciones y transformaciones dentro del mismo sistema) y han de *permitir la conversión* (que existan indicios que posibiliten la conversión de unos en otros).

Respecto al estudio de los límites (y, en general, de las funciones), los registros más utilizados son el **gráfico** (representación de funciones en sistemas de coordenadas y bocetos informales), el **verbal** (que permite hacer descripciones, explicaciones, argumentaciones, deducciones…), el **numérico-tabular** (realizar el estudio a través de tablas de valores que hacen corresponder unos determinados valores en las abscisas con sus respectivas imágenes por la función, y que pueden estar calculadas utilizando la expresión algebraica o no) y el **simbólico-algebraico** (un registro formal, con sus propias leyes y que utiliza sus propios símbolos y notaciones, que puede estar basado en la aplicación de reglas de cálculo o en el razonamiento). Un ejemplo que muestra 4 situaciones equivalentes se puede ver en la Figura 9. La capacidad de **permitir su tratamiento** hace referencia, por ejemplo, a ser capaz de pasar dentro del sistema algebraico de la definición métrica a la definición de límite como aproximación óptima. Es interesante también el **cambio de forma de unos a otros**, dado que requiere de una operación cognitiva compleja (Duval, 1999, Romiti et al., 2014). Este proceso, al que Blázquez y Ortega (2001) denominan *cristalización*, consiste en ser capaz de unir todas las representaciones en un concepto, es decir, de crear una **imagen conceptual coherente**. El paso posterior sería el de *modelización*: ser capaz de elegir el mejor sistema de representación para resolver situaciones reales utilizando el concepto.



1. Sistema gráfico

El límite de la función 1 partido x cuando x tiende a 0 por la derecha vale más infinito

2. Sistema verbal

x	1	0,5	0,2	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
f(x)=1/x	1	2	5	10	100	1000	10000	100000

3. Sistema numérico-tabular

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

4. Sistema simbólico-algebraico

Figura 9. Diferentes sistemas de representación para el límite de una función en un punto. Elaboración propia.

Varios autores (Blázquez y Ortega, 2001; Duval, 1999; Romiti et al., 2014) insisten en que la **transformación** de un sistema de representación a otro o la **puesta en juego simultánea** de varios sistemas de representación en el desarrollo de una clase **no es de ningún modo evidente o espontáneo** para los estudiantes. Tienen una gran dificultad para reconocer el mismo objeto a través de sus representaciones utilizando varios registros semióticos. Esta se aumenta aún más con los conceptos propios del PMA, ya que no son objetos tangibles y están obligados a emplear representaciones de distinta naturaleza.

Existen numerosas investigaciones que tratan de ver qué sistemas de representación son mejores para la enseñanza del concepto de límite y para trabajar con él. En la educación tradicional se les ha dado poca importancia debido a que el sistema algebraico ha predominado siempre sobre los demás (Blázquez y Ortega, 2001), como vimos en su evolución en el capítulo anterior. Sin embargo, "el concepto de límite está basado en los de número y función, es imprescindible que se trate en los cuatro sistemas de representación señalados" (p. 224). Utilizar solamente el algebraico constituye un obstáculo didáctico que hace que no se entienda el concepto por completo. Tampoco se les da a las representaciones la importancia que tienen en el currículo de la LOMCE, aunque parece que sí en la futura LOMLOE.

Contreras (2004) encuentra en los sistemas de representación el modo de dar la definición intuitiva de límite, $\lim_{x \to a} f(x) = L$: hay que tomar dos sucesiones, una creciente a la izquierda de a,

(x_n), que **tiende** hacia a; la otra decreciente, a la derecha de a, (y_n), que también **tiende** hacia a (aunque habitualmente se suele decir que *nos acercamos tanto como queremos hacia a tanto por su izquierda como por su derecha*, lo que hace que se pierda la precisión). A través de la función f se construyen dos sucesiones $f(x_n)$ y $f(y_n)$ que tienden hacia L, o que *se acercan tanto como queramos* (suponiendo, por supuesto, que el límite existe). La noción de convergencia suele quedar clara a través de la representación numérico-tabular; si se realiza la argumentación a través de la gráfica, muchos alumnos no son capaces de ver la tendencia y la coincidencia y coordinación de las aproximaciones. Según Contreras (2004), **desechar la definición de límite** (apartando el hecho de tomar un entorno de L y buscando otro de a cuya imagen esté dentro del primero) **hace que los alumnos se pierdan al introducirlo intuitivamente**:

> ¿Si observo la gráfica cuánto me permitirá esta acercarme a a y a L? ¿Si me acerco a a por su izquierda, necesariamente me acerco a L por su izquierda? ¿es que podría acercarme a a y por el contrario $f(x_n)$ no acercarse a L? ¿Cuánto es mi deseo de acercarme? (Contreras, 2004, p. 54).

Esta concepción dinámica presenta además otro problema frente a la definición estática: en el desarrollo intuitivo se parte de las sucesiones (x_n) y se llega a las sucesiones $f(x_n)$, luego lo lógico podría parecer partir de tomar δ en lugar de ε, como ya comentábamos en la subsección anterior. Sin embargo, la definición de límite de Weierstrass lo plantea justamente al revés: *para todo* $\varepsilon>0$ *existe un* $\delta>0$*…*

Arce y Conejo (2017) detectan otro **obstáculo didáctico**: abusar de representaciones gráficas hace que los estudiantes relacionen el carácter dinámico del límite (las aproximaciones en el dominio y en el rango) con **recorrer la gráfica de la función a través de puntos sobre su grafo**, sin prestar atención al movimiento de sus abscisas y sus coordenadas sobre los dos ejes (ni, por tanto, a la disminución de las distancias que ocurre en ambos respecto al punto y al límite), como puede ocurrir si se utiliza al applet que aparece en la Figura 10. Para que entiendan cómo funciona el proceso de aproximación, Contreras (2004) cree que es mejor comenzar a partir de representaciones numérico-tabulares, en las que la aproximación y la acotación se pueden ver mejor. Actualmente la representación numérico-tabular únicamente se utiliza para calcular límites donde aparecen operaciones prohibidas, como es la división de un número entre 0 ($k/0$) que genera una indeterminación: los alumnos estudian el comportamiento de los límites laterales, y si resultan iguales se establece que existe límite, y si no lo son entonces no existe (Conejo, 2015).

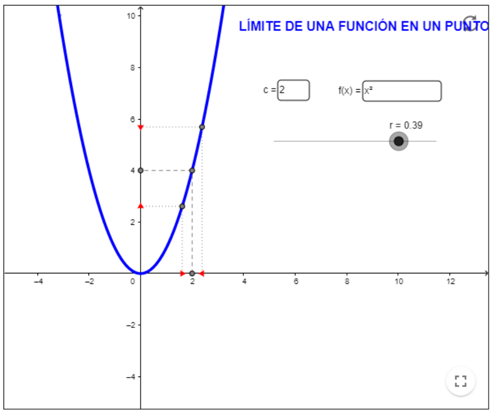


Figura 10. Ejemplo de applet en GeoGebra utilizado habitualmente para transmitir una idea intuitiva del concepto de límite de una función en un punto. Creado por Álvaro Gañán Serrano y Ricardo García Mesa utilizando GeoGebra y disponible en el siguiente enlace: https://www.GeoGebra.org/m/pFHb2KtX.

Nota: En él, ha de introducirse la expresión algebraica de una función $f(x)$ y la abscisa de un punto c en el que calcular el límite. Un deslizador r permite crear dos puntos $a = c - r$, $b = c + r$ alrededor de c y ver cómo sus imágenes $f(a)$ y $f(b)$ se acercan a L si es que existe el límite.

Para la explicación del concepto de límite en el aula utilizando el sistema gráfico es habitual considerar (Fernández-Plaza et al., 2015):

- La gráfica de una función *continua* en un entorno reducido del punto a.
- El comportamiento de la función en a es irrelevante: no importa si está definida en él o no, o incluso si está definida de modo distinto que cualquiera de los límites laterales.
- Un proceso dinámico, para el cual el sistema de representación gráfico es limitado y se necesitan de otros signos externos complementarios, como señales, movimientos de dedo, flechas, herramientas propias de softwares dinámicos… que muestren el movimiento. El applet de la Figura 10 es un ejemplo prototípico de cómo se hace el proceso.

Existen varios **modelos gráficos** que se suelen utilizar en la enseñanza, los cuales aparecen recogidos en la Figura 11. Para presentar la definición formal de límite en el punto se consideran entornos alrededor del límite (eje Y) y entornos reducidos alrededor del punto (eje X).

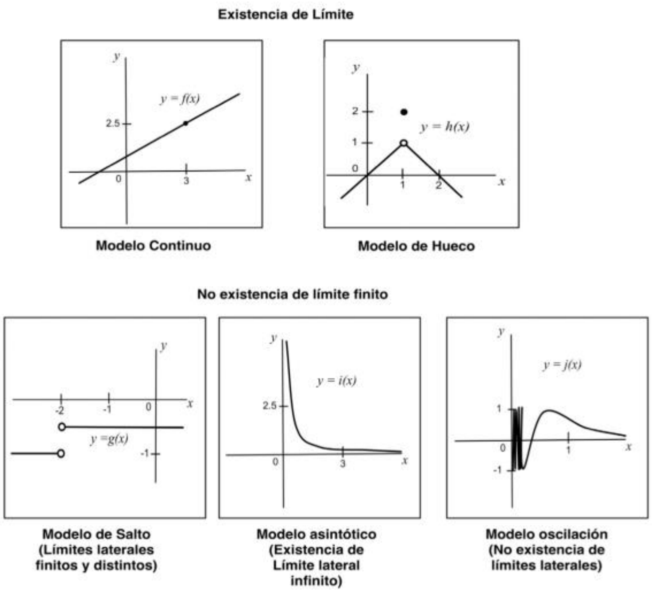


Figura 11. Modelos gráficos de límite de una función en un punto. Tomado de Fernández-Plaza et al. (2015).

Fernández-Plaza et al. (2015) analizaron las concepciones que suelen tener los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto a partir de su representación gráfica, las cuales están relacionadas con la imagen conceptual y la definición conceptual personal que han creado. También prestaron atención a cómo se produce el cambio entre la representación gráfica y la verbal. En el estudio que llevaron a cabo pidieron a un grupo de estudiantes de Bachillerato que definieran con sus palabras el límite de una función en punto y que la aplicaran a varios ejemplos concretos de funciones recogidos en la Figura 11, correspondientes con el modelo continuo, el de hueco y el de salto. La mayoría emplearon como argumento los **límites laterales** y otros aludieron a la **continuidad**. En este proceso pudieron apreciar algunos errores, como la confusión con el papel de las variables, la no alcanzabilidad o la rebasabilidad del límite, **la identificación del límite con el valor en el punto** o un cambio de sentido en las aproximaciones laterales (al confundir la aproximación por la izquierda y por la derecha con la tendencia a - ∞ y $+\infty$). Los autores aprecian que los estudiantes no entienden la coordinación entre la variable independiente y la variable dependiente.

Valls et al. (2011) investigaron el papel de esta coordinación de los **procesos de aproximación de las variables dependiente e independiente** considerando la concepción dinámica y métrica del límite. En este proceso utilizaron los sistemas de representación numérico, gráfico y algebraico e incluyeron problemas que reflejasen estas situaciones. Sus resultados muestran varias ideas: los alumnos no tuvieron dificultades en comprender los límites cuando la representación es tabular (numérica) o gráfica, mientras que no interpretan bien el significado al trabajar de manera algebraica. El registro numérico-tabular es más fuerte que el gráfico, aunque insisten en que

comprender el concepto en una de sus representaciones no implica entenderlo en las demás. El hecho de comprender la aproximación en el dominio y en el rango tampoco implica saber coordinar ambos procesos. Arce y Conejo (2017) muestran cómo los alumnos dan más importancia en sus cuadernos a los movimientos sobre el eje X y el eje Y que a los procesos de aproximación en el dominio y rango y su coordinación, sobre los que apenas hacen anotaciones. Esto dificulta enormemente pasar de la conceptualización dinámica a la estática.

En una investigación posterior, Valls et al. (2012) muestran que las **primeras ideas de límite** que tienen los estudiantes son **vinculadas a las de sucesión**. Normalmente tienen la impresión de que es un proceso monótono en el que necesitan una **fórmula** para trabajar. Además, destacan la importancia de **comprender la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales en el rango** (que se puede acompañar con gráficas y tablas), un elemento fundamental para entender el concepto de límite de una función en un punto.

Nos dan además algunas ideas sobre cómo enfrentar la enseñanza del límite: "el **modo numérico** determina un cauce inicial para el desarrollo del proceso de coordinación en el dominio y en el rango incluso cuando las aproximaciones laterales son diferentes" (p. 331). Respecto al **registro verbal**, hay que **evitar las imprecisiones propias del lenguaje** cotidiano referentes a los términos *límite*, *aproximación*, *tendencia…* También concluyen que no saben controlar las desigualdades propias de la definición algebraica en términos de ε-δ, y si esta se va a introducir en el aula conviene hacer un trabajo previo de manera dinámica (apoyado en otros registros) utilizando ejemplos donde las aproximaciones laterales en la imagen coincidan. No aportan conclusiones sobre el registro gráfico.

Fernández-Plaza et al. (2015) consideran que la definición de límite "debería introducirse con tareas que involucren el análisis y discusión de propiedades de los conceptos en diversidad de sistemas de representación, seguidas de tareas que obliguen a la síntesis de qué propiedades caracterizan al concepto y cuáles son superfluas" (p. 226). Al trabajar de manera constructiva, se evitan las ideas erróneas preconcebidas por los estudiantes y se consiguen superan algunos de los obstáculos asociados (Romiti et al., 2015).

Aparte de esto, también se presentan otros **obstáculos didácticos** en cuanto al modo de utilizar las representaciones en el aula: **hay que evitar emplear únicamente ejemplos prototípicos**. Conejo (2015) destaca que ha de prevenirse el uso continuado de **funciones continuas** en el punto en el que se estudia el límite, ya que inducen la idea de que el límite se alcanza siempre (p. 194). Esto también hace que asocien el valor del límite en un punto con el valor de la función en él, o que directamente consideren que el límite no existe si la función no está allí definida, situación que ocurre cuando hay discontinuidades esenciales o asíntotas verticales (Arce, Conejo y Muñoz, 2019).

Los autores también destacan que utilizar todo el tiempo **funciones monótonas** es igualmente un error, pues motivan la creencia errónea de que la función nunca puede ser igual al valor del límite o que no se puede alcanzar o sobrepasar. Del mismo modo, al tratar las sucesiones no deberían basarse todos los ejemplos en aquellas dadas por un término general (Cornu, 1991). **La sobresimplificación produce problemas** porque los estudiantes no crean una imagen conceptual variada, lo cual generará problemas y obstáculos a largo plazo.

Tall (1992) dan una gran importancia a presentar **ejemplos variados** de funciones en el registro gráfico utilizando softwares informáticos. Para crear una imagen conceptual rica no deberemos buscar únicamente casos típicos de funciones diferenciables en todos los puntos, que si se amplían suficientemente acaban convirtiéndose en rectas. Tall recomienda incluir en la misma explicación funciones diferenciables en todos los puntos, funciones cuya derivada lateral en un punto sea distinta a un lado y a otro (que al ampliar la gráfica se ven como si fueran una esquina), incluso introducir casos *patológicos* donde la regularidad no aparezca nunca al hacer zoom en la gráfica.

Blázquez y Ortega (2001) son partidarios de utilizar la **definición de límite como aproximación óptima** al resultar más intuitiva y menos formal. Ortega (2016) indica que debe hacerse un trabajo previo con sucesiones, introduciendo el límite de manera numérica y discriminando tendencias finitas e infinitas. Plantean introducir el límite funcional (después de mostrar su utilidad como herramienta para resolver problemas) **a través de representaciones numéricas**, al ser estas las que mejor reflejan los aspectos de la aproximación. En él se puede apreciar el **proceso de tendencia** basado en una tabla de valores que incluya también a sus imágenes: cualquier aproximación del límite L, distinta de él, podría mejorarse con las imágenes de valores cercanos al punto a donde se calcula el límite. **Esta se complementa utilizando representaciones gráficas**: el límite se representa como un punto del eje Y, verificando que a toda banda que le contiene le corresponde otra banda alrededor de a cuyas imágenes de sus puntos se proyectan todas ellas dentro de la primera. Finalmente se puede completar dando la definición en términos algebraicos (aunque los autores consideran que no es necesario incluirla en Bachillerato). El dinamismo del límite disminuye al pasar de la representación numérico-tabular a la gráfica, aunque es necesario unirlas para mostrar el proceso de coordinación entre las variables.

Blázquez (2000) analizó en su tesis doctoral el uso de estas representaciones en una propuesta didáctica construida a partir de la definición de límite como aproximación óptima. A través de varias tareas comprobó el nivel de comprensión de los estudiantes y su capacidad para pasar de unos a otros. Sus resultados, incluidos en Blázquez y Ortega (2001), confirman que **el uso de distintas presentaciones favorece el aprendizaje y ayuda a crear una imagen conceptual más rica**, aunque recogen también varios **obstáculos**. Presentar solamente representaciones numéricas no hace que entiendan el concepto ni la coordinación entre variables, además de que existen muchos errores al hacer cálculos numéricos (necesarios para evaluar funciones y para calcular los errores entre las aproximaciones y el límite). Cuando se utiliza el sistema gráfico, los alumnos ven la función de una manera global, lo que dificulta entender el límite en un punto o las tendencias infinitas y asíntotas. Sin embargo, tiene la ventaja de que vincula las tendencias en ambas variables. Respecto a las tendencias infinitas, algunos alumnos asocian el cálculo de los límites laterales a partir de la gráfica con un movimiento en el eje X: por ejemplo, creen que tender por la derecha quiere decir tender a infinito. **Todos estos problemas se pueden evitar si se relacionan la representación tabular con la representación gráfica, y para ello los autores recomiendan enormemente el uso de softwares informáticos**. El concepto de límite, basado en elegir una aproximación del supuesto límite y de los valores en el dominio cuyas imágenes mejoran la aproximación, se comprende bien con representaciones gráficas y tabulares, aunque no en la algebraica, dado que los alumnos huyen del formalismo. La definición métrica en términos de $\varepsilon - \delta$, según ellos, queda relegada a contextos universitarios.

5. Relación con el Prácticum

El *Módulo Prácticum* que forma parte de este máster está formado por dos asignaturas: por un lado, las prácticas en un centro de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato y, por el otro, este Trabajo Fin de Máster. Por lo tanto, este último ha de estar de algún modo vinculado a la experiencia vivida a lo largo de nuestra estancia en los centros educativos.

En mi caso, las prácticas las desarrollé durante 8 semanas en el **IES "La Merced"**, un centro de titularidad pública situado en pleno centro de Valladolid. Este instituto cuenta con enseñanzas de ESO y Bachillerato, este último en tres especialidades: Bachillerato de Ciencias y Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales en su modalidad ordinaria y en la de investigación y excelencia. Gracias a mi tutora de prácticas (profesora en el grupo de Ciencias) y a la jefa del Departamento de Matemáticas (profesora en los dos grupos de Humanidades y CC.SS.) he podido asistir a varias sesiones con los tres grupos, en los cuales se han impartido varias clases dedicadas a **límites**. El tratamiento en cada una de ellas ha sido bastante distinto:

- Con el grupo de **Bachillerato de Ciencias** he podido realizar tanto la fase de observación como la de intervención. Al comienzo de las prácticas le comenté a mi tutora la posibilidad de incorporar la propuesta didáctica que aquí se recoge para desarrollar la unidad didáctica referente a límites, a lo que me respondió afirmativamente con una condición: debía estar más centrada en el cálculo de límites que en entender el propio concepto, ya que esto les serviría de poco y *casi nunca lo comprenden*. La justificación fue que al curso siguiente estarían en 2º de Bachillerato, un curso muy exigente pues al acabar tienen la EBAU, por lo que si 1º les sirve ya como preparación para esta prueba (lo que se traduce en ver contenidos susceptibles de ser preguntados en ella), al curso siguiente tendrían menos trabajo y menos problemas.

Esta visión nos confirma varios de los hechos que hemos comentado hasta ahora. En primer lugar, las enseñanzas de Bachillerato en los centros educativos están muy enfocadas a que los alumnos consigan superar las pruebas de acceso a la universidad, esperando obtener los mejores resultados posibles en esta. De hecho, en esto tienen bastante que ver las familias, ya que confían en el instituto para que sus hijos logren entrar en los grados universitarios que quieren. En segundo lugar, este modo de tratar la enseñanza hace que los docentes se centren más en los aspectos procedimentales que en los conceptuales: los ejercicios que habitualmente se preguntan consisten en la resolución de indeterminaciones, por lo que la enseñanza en torno al límite se basa principalmente en esto. Esto provoca que el único sistema de representación que los alumnos utilizan es el simbólico-algebraico, dejando a un lado los registros numérico-tabular y gráfico. En tercer lugar, en los institutos se apoyan en la creencia de que los alumnos no consiguen entender el concepto de límite, por lo que deciden relegar este a un segundo plano introduciendo una idea intuitiva para proceder rápidamente al cálculo de límites, lo cual confirma de nuevo la mayor relevancia de los aspectos procedimentales. Así, la comprensión que se fomenta es de tipo instrumental, al no existir una idea de límite que unifique todos los métodos. Se dan una serie de instrucciones para resolver las indeterminaciones que aparecen y que los alumnos memorizan sin apenas entender ni siquiera qué es una indeterminación.

Con todo esto, no he podido poner en marcha toda la propuesta didáctica que aquí figura, aunque sí tuve oportunidad de dedicar una sesión completa a que los alumnos pudieran comprender el concepto de límite. Utilizando el método expositivo, la primera parte la dediqué a trabajar con sucesiones y al concepto de **tendencia**. Entendido este, introduje el límite funcional de manera intuitiva a través de una situación real (la que se recoge en la propuesta didáctica) y utilicé **GeoGebra** para poder representar tanto la gráfica de la función como para hacer una tabla de valores en torno al punto de interés. La definición utilizada fue a través de tendencias: la función tiene límite L si cuando x tiende a a, sus imágenes $f(x)$ tienden a L, y lo ilustré con varios ejemplos de funciones: una continua, otra con una discontinuidad evitable, otra a trozos con discontinuidad de salto finito y otra con una asíntota vertical. Traté de explicarles el modo de coordinar ambas aproximaciones, aunque no llegamos a la definición formal. Los alumnos entendieron el concepto, aunque tuvieron varias **dificultades**: cómo podemos acercarnos por la derecha y por la izquierda al punto a o cómo las sucesiones de las imágenes se acercan al límite L (especialmente en el sistema gráfico, ya que al principio pensaban que importaba el movimiento del punto a través de la gráfica en lugar de su coordenada sobre el eje Y). Esto último también hizo que tuvieran varios problemas al trabajar el cálculo de límites a partir del sistema gráfico: sí entienden la tendencia en el eje X pero les resultó difícil en el eje Y, tanto en un punto como en infinito. El resto de sesiones se dedicaron casi en exclusiva a tratar límites de manera algebraica y a la resolución de indeterminaciones (identificación y método de resolución) después de explicarles en qué consisten estas, tomando el libro de texto como un repositorio de ejercicios. El caso de los límites en infinito se trató aparte, así como las *"operaciones"* que se pueden realizar con este y los órdenes de infinitud. También les puse algún límite poco habitual para que utilizaran otros registros aparte del simbólico-algebraico: $\lim_{x\to\infty} \text{sen } x$, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$. No se resolvieron problemas que lo involucrasen, aunque sí utilicé el método de exhausción o el caso de los fractales para ejemplificarlo.

- En ambos grupos del **Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales** participé únicamente como observador durante las explicaciones teóricas. Así, la profesora fue quien introdujo el concepto de límite a través de un ejemplo concreto ($f(x) = x^2$) utilizando los sistemas gráfico y numérico-tabular: se mostró la gráfica de la función señalizando la abscisa $x = 2$ y se acompañó de una tabla de valores eligiéndolos cada vez más próximos a 2 tanto por la izquierda como por la derecha. Con un movimiento con el dedo sobre la gráfica indicó cómo ambas *tienden* a 2 en el eje X y cómo sus imágenes también *tienden* (de manera monótona) a $f(2)=4$ en el eje Y. Destacó que el concepto de límite se basa en *aproximarnos* en ambos ejes, y comenzó a calcular algunos límites utilizando el registro gráfico: hay que ver qué sucede con la gráfica a la izquierda y a la derecha cuando nos acercamos poco a poco al punto. El criterio que se dio es que existieran los límites laterales (introducidos cómo lo que sucede al aproximarse a la izquierda y a la derecha) y que estos fueran iguales. No se dio ninguna definición formal (ni siquiera aparece en su libro) ni se hizo distinción con el infinito. Se procedió al cálculo de límites y a la resolución de indeterminaciones de manera casi inmediata. Nunca más se aludió al concepto de límite, aunque en este bachillerato sí se resolvieron problemas que lo utilizaban como herramienta.

No hay ninguna duda de que el sistema seguido en ambos casos es bueno y útil para conseguir los mejores resultados en la EBAU; sin embargo, **los obstáculos y problemas habituales en torno**

a la comprensión del concepto de límite no se consiguen evitar ni resolver de este modo. Dado que no se insiste lo suficiente en este, muchos alumnos no logran tener una visión unificada: no entienden el vínculo entre las representaciones algebraicas, las gráficas y las tabulares, ni saben cómo proceder para calcular un límite en un ejemplo que no utilice una expresión algebraica (puesto que lo asocian con evaluar directamente en el punto). Cuando aparecen indeterminaciones como "$k/0$" no entienden por qué hay que acercarse por la izquierda y por la derecha con una tabla, y cuando aparecen otras no comprenden la justificación de por qué se utiliza ese método para deshacerla. Incluso a ellos mismos les llegó a parecer algo tedioso, ya que "únicamente se abordan recetas que te dicen cómo proceder". En cambio, se sintieron muy interesados por el uso de GeoGebra y los ejemplos de aplicación del límite en el método de Exhausción para obtener el número π o los fractales.

La experiencia vivida me hace confirmar que el concepto de límite debería volver a tratarse en Bachillerato, aunque de una manera comprensiva en lugar de eludirlo definitivamente. El estudio que hemos llevado a cabo anteriormente nos muestra que la mejor manera de evitar los obstáculos y problemas es crear una imagen conceptual sólida a través de numerosos ejemplos sobre los que introducir la definición conceptual. Es necesario utilizar varias representaciones, y aprender a transformar unas en otras. Si se procede de esta manera, se favorece también el éxito en el proceso de cálculo de límites, ofreciéndoles otras alternativas adicionales aparte del sistema algebraico para encontrar su valor.

6. Propuesta didáctica dedicada a tratar el límite de una función de una manera comprensiva en Bachillerato

A continuación se detalla la propuesta didáctica elaborada para trabajar comprensivamente el concepto de límite de una función en las enseñanzas de Bachillerato. En ella se siguen las orientaciones curriculares que se recogen en la ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo, y su desarrollo puede llevarse a cabo indistintamente con alumnos de 1º de Bachillerato de las modalidades de Ciencias o de Humanidades y Ciencias Sociales. En efecto, el concepto de límite figura como contenido en ambas disciplinas, por lo que el tratamiento que aquí se hace puede contemplarse en ambas (aunque el modo de llevarlo a la práctica como herramienta es distinto de uno a otro).

6.1. Presentación y justificación de la propuesta

La finalidad principal de la misma es adquirir una comprensión mayor del concepto de límite, que tiene un papel articulador en todo el bloque del Análisis Matemático: es la base de otros conceptos como los de continuidad, derivada o integral, los cuales también se abordan durante los dos cursos de Bachillerato. A diferencia del modo de enseñanza tradicional, en el cual se le ha dado poca importancia a los aspectos conceptuales y demasiada a los aspectos procedimentales propios del concepto, el límite se plantea como aproximación óptima, una concepción que reduce el formalismo existente en la definición habitual (en términos de ε y δ) pero con el mismo rigor.

El límite de una función en un punto es un concepto complejo, que habitualmente manifiesta tanto las dificultades de los profesores para su enseñanza como las dificultades de los estudiantes para su comprensión, como así muestran las distintas investigaciones llevadas a cabo por expertos en Didáctica de la Matemática y los numerosos obstáculos que se han detectado. Sin embargo, ¿qué entendemos por comprender un concepto? Según Castro y Castro (1997, citado en Blázquez y Ortega, 2001),

> Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades (p. 103).

Un aspecto que tiene gran trascendencia en este proceso de comprensión es la creación de una imagen conceptual abundante, variada y completa, un conjunto de ejemplos (evitando caer en los prototípicos) que incluyan las partes más significativas y las propiedades del concepto. El uso de representaciones es inevitable cuando nos acercamos al caso del límite, a pesar de que no se le han dado la importancia necesaria a lo largo de las distintas leyes educativas, centradas fundamentalmente en los aspectos algebraicos. Estas son imprescindibles para lograr su comprensión, ya que es un concepto matemático propio de un tipo de pensamiento más avanzado cuyo significado no aparece de manera inmediata. El paso más importante es conectar dicha imagen conceptual con la definición conceptual de límite: si los alumnos han adquirido una visión completa de este a través de distintas situaciones, el nivel de comprensión esperado será alto. La definición de límite como aproximación óptima tiene la ventaja de presentar el concepto de una manera coherente con la idea dinámica subyacente, por lo que las dificultades respecto a la definición métrica habitual planteada en términos estáticos disminuyen. Esta se dejará a un lado para ser abordada en niveles superiores.

6.2. Contextualización

La propuesta didáctica que aquí se recoge está prevista para llevarse a cabo en un centro educativo de la Comunidad Autónoma de Castilla y León, con la finalidad de mejorar la docencia que actualmente se imparte en cuanto al concepto de límite. Aunque no se pudo implementar durante el periodo de prácticas de este máster, se ha supuesto que se llevará a cabo en un instituto de similares características. Es un centro situado en una zona urbana, al que asisten alumnos pertenecientes a clases sociales medias-bajas. La diferencia de nivel entre la ESO y el Bachillerato es notable, ya que en la primera hay muchos alumnos que acuden por obligación hasta que cumplen los 16 años mientras que la mayoría de alumnos de Bachillerato tienen claro que quieren seguir con estudios universitarios. Son alumnos curiosos por las matemáticas y motivados por las nuevas tecnologías, con buenas relaciones entre ellos y a los que les gusta trabajar en grupo. Sin embargo, cuando han de enfrentarse a un problema matemático les cuesta mucho razonar: prefieren que les den un conocimiento ya construido, con fórmulas, teoremas y definiciones que aprenderse, antes de ser ellos los que intenten intuir, conjeturar o generalizar una idea. Para intentar cambiar esto, el profesor se ha propuesto seguir los contenidos de este curso de una manera comprensiva y constructiva, dando más importancia a los conceptos y al razonamiento que a los aspectos procedimentales. En el bloque de Geometría Analítica ya se llevó a cabo una propuesta didáctica para tratar los contenidos de manera comprensiva utilizando la metodología del aula invertida y los resultados fueron buenos. La mayoría de los alumnos prefieren estudiar los conceptos por sí mismos en casa con los vídeos del docente y aprovechar la clase presencial para aclarar sus dudas y practicar con ejercicios. Por lo tanto, ya tienen experiencia con el manejo de la plataforma EdPuzzle y el programa GeoGebra, en su momento utilizado para geometría.

Respecto a los recursos del centro, el Departamento de Matemáticas (integrado con otros de la rama de ciencias) dispone de un ordenador portátil para cada 2 alumnos, con conexión a internet. Es un grupo promedio de 20 alumnos, siendo a veces difícil atender a todos los alumnos con detalle, aunque se suelen ayudar unos a otros. Actualmente está abordando el bloque de Análisis Matemático, en el que figuran las siguientes unidades:

1. Estudio de las funciones elementales: propiedades y representación
2. Límites de sucesiones y funciones
3. Continuidad y asíntotas
4. Derivada de una función: concepto, cálculo e interpretación geométrica
5. Aplicación de las derivadas

Después de haber terminado la unidad sobre funciones elementales, seguirá con la propuesta didáctica que aquí se recoge, destinada a tratar los límites de una manera comprensiva. También tiene previsto realizar una propuesta didáctica similar para las derivadas, dando más importancia al concepto que al cálculo mecánico de estas.

6.3. Objetivos de la propuesta didáctica

Los objetivos que planteamos con esta propuesta (aparte de los propios del Bachillerato y de los generales en las asignaturas de Matemáticas I o Matemáticas Aplicadas a las CC.SS.) son los siguientes:

1. Generar una imagen conceptual variada y completa alrededor del concepto de límite.
2. Manejar un vocabulario preciso y riguroso propio del límite de una sucesión o una función.
3. Diferenciar entre aproximación y tendencia al trabajar con sucesiones.
4. Identificar la coordinación existente entre los procesos de aproximación en el dominio (hacia el punto a) y en el rango (hacia el valor del límite L) al considerar el límite de una función.
5. Justificar la existencia o no de límites de sucesiones y funciones utilizando la definición como aproximación óptima y/o el concepto de tendencia.
6. Conocer la conexión entre los sistemas de representación numérico-tabular y gráfico en relación al límite de una función y ser capaz de transformar uno en otro.
7. Encontrar los límites laterales de una función en un punto y utilizarlos para determinar la existencia o no de límite.
8. Diferenciar el límite de una función en un punto y en infinito, con valor finito o infinito.
9. Emplear herramientas informáticas para el cálculo de límites en un punto y en infinito a partir de las representaciones numérico-tabular y gráfica.
10. Calcular límites de funciones dadas por su expresión algebraica utilizando varios sistemas de representación y/o el más conveniente en cada caso.
11. Desarrollar una comprensión relacional vinculando el concepto de límite con los de continuidad y asíntota.
12. Representar funciones cumpliendo alguna o varias condiciones en relación a sus límites en un punto y/o en infinito.
13. Operar con el infinito y reconocer indeterminaciones del tipo ∞/∞, $0/0$ y $k/0$.
14. Resolver límites en los que se encuentre algún tipo de indeterminación sencilla.
15. Aplicar el límite para resolver problemas que involucren funciones en sus representaciones simbólico-algebraica, gráfica y numérico-tabular.
16. Conocer parte del proceso histórico que existe detrás del concepto de límite y algunas de sus aplicaciones (fractales, cálculo del número π y/o cálculo de superficies).
17. Desarrollar hábitos de trabajo individual, en equipo y de responsabilidad en el estudio, estimulando la autonomía y la iniciativa personal del alumnado.
18. Fomentar el diálogo, el debate, el contraste de ideas y la puesta en común de estas por medio de la argumentación, respetando el orden y los turnos de palabra.

6.4. Contenidos

El orden de contenidos que abordaremos en esta propuesta didáctica es el siguiente:

1. Sucesiones. Límite de una sucesión: conceptos de aproximación y tendencia. Tendencias finitas e infinitas y no existencia de límite. Cálculo de límites de sucesiones. El número e.

2. Límite de una función en un punto. Definición dinámica intuitiva de límite en un punto. Representación numérico-tabular. Representación gráfica. Relación entre ambas representaciones. Importancia de la coordinación en las aproximaciones en el dominio y en la imagen. Límites laterales. Definición de límite como aproximación óptima. Cálculo de límites a partir de varias representaciones. Relación con la continuidad y las asíntotas.
3. Límite de una función en infinito. Definición dinámica intuitiva de límite en el infinito. Representación numérico-tabular. Representación gráfica. Relación entre ambas representaciones. Cálculo de límites en infinito. Relación con las asíntotas y ramas infinitas.
4. Concepto de indeterminación. Órdenes de infinitud. Reconocimiento de las indeterminaciones ∞/∞, $0/0$ y $k/0$ y cálculo de límites sencillos donde aparecen.
5. Aplicación del límite a la resolución de problemas.
6. Otros procesos e ideas relacionados con el concepto de límite.

6.5. Metodologías empleadas

El planteamiento de esta propuesta respecto a la metodología se basa en otorgar un papel activo al alumno en el aula: ha de tener un rol central en el proceso de aprendizaje. El concepto de límite es complejo y requiere de tiempo para entenderlo y practicarlo. Por ello, proponemos las siguientes metodologías:

- **Clase invertida o *Flipped Classroom***: esta metodología supone una inversión del método tradicional. En lugar de asistir presencialmente a las lecciones y realizar tareas en casa, en la clase invertida es el alumno el que estudia por sí mismo los contenidos teóricos que el docente facilita a través de vídeos, lecturas, apuntes… De este modo, el tiempo disponible en clase se aprovecha para resolver dudas, practicar con ejercicios y problemas, debatir sobre cuestiones y/o realizar otras actividades. La gran ventaja es que el alumno puede ver los contenidos todas las veces que quiera, por lo que se adapta enormemente a la diversidad del alumnado. Sin embargo, este puede no disponer de los medios suficientes, que deberían ser aportados por el instituto. Creemos firmemente que esta metodología es útil para explorar el concepto de límite: al fin y al cabo, los contenidos teóricos acerca de este no son muy extensos, aunque sí complejos. El docente elaborará una serie de vídeos en los que reflejará los contenidos de tipo teórico, que serán introducidos de una manera constructiva. El trabajo más importante se llevará a cabo en el aula: después de que los alumnos tengan una idea del contenido a tratar, podrán preguntar todas las dudas que les hayan surgido. Además, dado que lo que se pretende es crear una imagen conceptual extensa y variada, las clases se dedicarán a explorar una serie de ejemplos preparados para ello.

- **Aprendizaje basado en problemas**: al exponer algunos de los contenidos (límites en un punto y límites en infinito) procuraremos introducirlos a partir de situaciones reales, donde los alumnos vean la necesidad de utilizar el límite como una herramienta para resolverlos. Estos nos permitirán introducir las ideas necesarias, que posteriormente iremos formalizando y estabilizando mediante la práctica con ejercicios y problemas.

- **Resolución de problemas y ejercicios**: se llevará a cabo en el aula durante las sesiones, posterior a la visualización de los vídeos. Dado que lo que se pretende es crear una imagen conceptual rica y variada, el docente será el encargado de elegir conjuntos de ejemplos y contraejemplos que muestren la idea de límite en todas sus posibilidades y que eviten a la vez los obstáculos señalados en el capítulo 4. Una vez vistos, los alumnos podrán comparar unos con otros para abstraer propiedades relativas al concepto de límite, lo que permitirá que se conecte la imagen conceptual con la definición conceptual. Además, es posible que el alumno incluso los relacione con otras cuestiones como la continuidad o las asíntotas, logrando una comprensión relacional del concepto y viendo su utilidad para resolver problemas matemáticos.

- **Gamificación**: al comienzo de algunas sesiones, el docente propondrá algunos juegos utilizando la herramienta Kahoot! para que los alumnos puedan comprobar su propio nivel de comprensión. En muchas ocasiones esto les servirá para darse cuenta de los errores que cometen o de las ideas que han adquirido de manera errónea, siendo un buen método para resolverlas.

6.6. Materiales y recursos didácticos

Las sesiones de clase se llevarán a cabo en el aula habitual o, en su defecto, en el aula de informática, si es que no existen ordenadores portátiles o tablets que los alumnos puedan utilizar en el propio aula de referencia. Estos serán necesarios en casi todas las sesiones, debiendo estar conectados a Internet y con acceso a programas y/o webs como GeoGebra, Kahoot o EdPuzzle. El profesor también deberá contar con un ordenador propio con las mismas características, además de un proyector o una pizarra digital para poder exponer algunos contenidos a los alumnos. Si no existieran ordenadores, los alumnos incluso podrían utilizar su propio teléfono móvil, si es que disponen de este, aunque es la opción menos recomendable por el tamaño de la pantalla, la dificultad en cuanto a manipulación del dispositivo y las posibles distracciones.

Respecto a los materiales de los alumnos, cada uno de ellos deberá disponer de útiles de escritura y de un cuaderno para la asignatura de Matemáticas, en el que reflejarán las respuestas a los ejercicios y problemas que se planteen en clase. No es necesario el libro de matemáticas, ya que esta propuesta didáctica está dirigida a tratar el límite de una manera comprensiva en lugar de procedimental, como suelen hacerlo la mayoría de estos. Sí deberán disponer de una calculadora, pues en alguna ocasión necesitarán hacer evaluaciones de funciones a mano, siendo esta la manera más cómoda.

En cuanto a las herramientas informáticas que utilizaremos, destacamos las siguientes:

- **GeoGebra**: es un software de matemáticas dinámicas para la enseñanza y el aprendizaje de estas en todos los niveles. Combina geometría, álgebra, análisis, estadística y probabilidad, ofreciendo varias representaciones que se adaptan a las tareas habituales en matemáticas: vistas gráficas, representación de funciones, organización de datos en tablas… Es un programa gratuito e interactivo, que permite la manipulación y la experimentación con las construcciones realizadas así como obtener resultados y propiedades a partir de la observación directa. Desde el punto de vista del docente, este puede desarrollar applets para que utilicen sus alumnos o usar los que han sido creados por otros, ya que dispone de un banco compartido de recursos. En nuestro caso, utilizaremos esta herramienta para analizar la gráfica de varias funciones y para el cálculo de límites (tanto en un punto como en infinito). Hemos creado el siguiente applet (https://www.GeoGebra.org/m/v4bwxmmd) que permite entender la definición de límite como aproximación óptima, además de que ayuda a que los alumnos comprendan la coordinación entre las representaciones gráfica y numérico-tabular de la función. Tiene tanto versión online como descargable en el ordenador.

- **Kahoot!**: es una herramienta online gratuita que puede utilizarse para crear cuestionarios de evaluación en el aula. El profesor ha de registrarse para poder diseñarlos, aunque existe una versión de pago que permite un rango de actividades más variado y la posibilidad de que se conecten más usuarios a la vez. Una vez creado, basta con proyectar en clase las preguntas del concurso: los alumnos pueden unirse con sus dispositivos móviles o sus ordenadores a través de un código de invitación, contestando la opción que crean correcta. Los resultados de estos cuestionarios con Kahoot no serán utilizados en la evaluación de los alumnos, sino que servirán para que sean conscientes del rendimiento que están teniendo o de si verdaderamente han entendido los conceptos que están estudiando y saben aplicarlos.

- **EdPuzzle**: es una herramienta online gratuita diseñada especialmente para la metodología del *Flipped Classroom* o clase invertida. Se puede crear una secuenciación completa de lecciones online incluyendo vídeos propios o de otros autores, intercalando en cada uno de ellos preguntas (de respuesta abierta, tipo quiz…) para comprobar su nivel de comprensión. El docente comparte sus lecciones con sus alumnos a través de un enlace y una clave personal, y puede ver si estos lo han visualizado, las respuestas que han dado a las preguntas, crea estadísticas… Ofrece además la posibilidad de que los estudiantes vean los vídeos tantas veces como quieran, de que los pausen y también de que los rebobinen si hay algo que no han comprendido bien. Todo esto se complementa con la acción presencial en clase, dedicada a resolver dudas sobre los contenidos visualizados, a insistir sobre los aspectos más complejos, a resolver problemas y ejercicios… El acceso a los vídeos creados puede hacerse a través del enlace https://edpuzzle.com/join/dozumuv (o insertando la clave *dozumuv*).

6.7. Atención a la diversidad

En el diseño de esta propuesta didáctica se ha prestado especial atención a la diversidad del alumnado, así como a los intereses que puedan tener. En primer lugar, se ha elegido una **metodología** que se adapta enormemente al propio ritmo de los estudiantes, dando una vuelta a la enseñanza tradicional: está pensada para que los alumnos puedan participar activamente en clase, preguntando todas sus dudas y aclarando las cuestiones que necesiten. En las sesiones presenciales son los alumnos los que tienen un papel protagonista, dedicándose estas a trabajar los conceptos que previamente han visto en casa en lugar de ser únicamente receptores pasivos de los contenidos. Esto también tiene otro punto a favor: los estudiantes disponen de todas las lecciones en cualquier momento y a cualquier hora, tantas veces como quieran, por lo que si hay algún contenido que no han acabado de entender, pueden volver sobre el mismo y solicitar ayuda el profesor. Es una metodología que permite atender a la diversidad individualmente, fomentando la interacción alumno-profesor de manera continua.

Esta atención a la diversidad también se ha tenido en cuenta en las sesiones presenciales: se ha optado por agrupar a las personas por parejas para la realización de las actividades, lo cual puede ser positivo para aquellos alumnos que tienen dificultades para el aprendizaje. Se fomenta una interdependencia positiva entre los integrantes, ya que el objetivo es que uno se ayude al otro ante los problemas que se les propongan. Esto les permite también impulsar sus habilidades interpersonales y de **trabajo en equipo**, al sentirse más motivados para conseguir resolver la tarea propuesta. Si aún con esto hay algún alumno (o pareja) que sigue teniendo dificultades, se le prestará una atención individualizada mientras el resto de la clase trabaja sobre las mismas. Si existe algún alumno o pareja que va más avanzado que el resto, el profesor lo aprovechará en la sesión siguiente para que trabaje en pareja con otro alumno que presente más dificultades y, si lo desea, se le buscarán actividades adicionales con una mayor complejidad.

Otro elemento que se ha tenido especialmente en cuenta para motivar al alumnado es la **inclusión de las TIC** en el desarrollo habitual del aula: el uso de GeoGebra es algo que les llama especialmente la atención, debido a que pueden interactuar con el contenido y lo entienden de una manera mucho más dinámica. Los cuestionarios a través de Kahoot! al comienzo de la clase se pueden utilizar como calentamiento haciendo que estén mucho más atentos durante el resto de la sesión, además de que pueden comprobar cómo evoluciona su comprensión de la materia autorregulando su aprendizaje.

6.8. Contribución a las competencias clave

En la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación en la Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato. En este documento aparecen las competencias clave del currículo, que son 7, y las hemos integrado en esta propuesta didáctica del siguiente modo:

1. **Comunicación lingüística** (CLing): pondremos especial atención en la utilización precisa del lenguaje matemático, siendo esto obligatorio tanto para entender los conceptos que aparecen como para comunicarse con los demás, utilizando razonamientos propios del nivel. Se pone especial atención a esta competencia dado que los alumnos suelen encontrar obstáculos para entender el concepto de límite y otras palabras asociadas a este (tender, aproximarse, acercarse, sobrepasar…) debido a que tienen otros significados cotidianos que difieren del matemático. Por ello, se comienza estableciendo el significado de ellos para que no los confundan.

2. **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología** (CMatCie): resulta fundamental en una asignatura como matemáticas, siendo transversal a todos los contenidos de esta disciplina. Es necesario utilizar el razonamiento matemático y las herramientas de esta para describir, interpretar y predecir fenómenos propios de la realidad y de las disciplinas científicas y tecnológicas. Se trabajará por medio de la resolución de problemas, algunos de ellos incluidos en contextos científicos.

3. **Competencia digital** (CDig): esta competencia se desarrolla casi de manera continua a lo largo de toda la propuesta: por un lado, la metodología del aula invertida implica que los alumnos vean en sus casas los vídeos propuestos por el profesor, para lo cual han de utilizar las TIC. El uso de GeoGebra en el aula será útil para entender el concepto de límite, así como las herramientas de cuestionarios como Kahoot! o la búsqueda de información en las últimas actividades que se consideren.

4. **Aprender a aprender** (CApr): supone iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuarlo de forma autónoma. Con la utilización de la metodología del aula invertida, son los alumnos los que han de dar el paso en sus hogares para ver los vídeos y las lecciones del profesor, pudiendo además consultar otros recursos de internet. Aunque sea el profesor el que dirige el aprendizaje, este pasa a ser un guía: es el alumno el que toma un papel central, y debe continuar con él a lo largo de todo el proceso.

5. **Competencias sociales y cívicas** (CSoc): se trabajará por medio de la realización de actividades en clase. Por un lado, se propone que los alumnos resuelvan las tareas en parejas, por lo que han de colaborar para obtener la solución. Por otro, dichas actividades serán puestas en común cuando el profesor lo indique, por lo que los alumnos deberán ser capaces de debatir con el resto de sus compañeros las soluciones obtenidas y de dar argumentos tanto para justificar su trabajo como para señalar los posibles errores. En estas puestas en común se procurará desarrollar una actitud de respeto con los compañeros y con los turnos de palabra, esperando de manera educada y en silencio.

6. **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor** (CEmpr): en la metodología del aula invertida se le da una gran responsabilidad al alumno, dado que este ha de visualizar los contenidos antes de iniciarse la clase. Con ello, el alumno ha de demostrar su sentido de iniciativa en cuanto al aprendizaje, interesándose por las explicaciones y preguntando las dudas que le puedan surgir. Además, las actividades en clase se propondrán como retos a resolver, fomentándose el espíritu emprendedor para lograr encontrar la solución y justificarla.

7. **Conciencia y expresiones culturales** (CCult): el concepto de límite ha tenido una evolución muy notable a lo largo de la historia, por lo que se propondrán varias situaciones para que los alumnos se acerquen a estos pensamientos históricos: el método de exhausción utilizado por Arquímedes para agotar el círculo es un buen ejemplo, así como los fractales, los cuales siguen una recursión hasta llegar a su límite.

6.9. Temporalización

La propuesta didáctica se llevará a cabo durante 8 sesiones de 50 minutos (duración habitual de una clase de Bachillerato), en las que se pondrán en práctica los contenidos sobre límites visualizados previamente a través de EdPuzzle. En ellas, se irá construyendo poco a poco el concepto de límite, partiendo de sucesiones y de la diferencia entre aproximación y tendencia. Se darán unos cuantos ejemplos para que el alumno pueda crear una imagen conceptual variada sobre el concepto, y se aplicará al cálculo de límites utilizando varios registros: numérico-tabular, gráfico y algebraico.

Los guiones de trabajo de cada una de las sesiones están incluidos en el **Anexo I**. En cada uno de ellos se recogen los contenidos a trabajar, el modo de trabajo durante la sesión, las competencias puestas en marcha, la temporalización de cada sesión, las actividades a realizar antes de la clase, las actividades que se realizarán durante esta y una rúbrica para evaluar el trabajo en cada sesión.

En la última sesión se hará una prueba final de evaluación, en la que se comprobará el nivel de aprendizaje de los alumnos respecto al concepto de límite.

Asimismo, la temporalización de cada una de las sesiones seguirá habitualmente una tendencia similar: al comienzo los alumnos podrán preguntar todas sus dudas e inquietudes a partir de la visualización de los vídeos y de las respuestas a las preguntas planteadas. Posteriormente se trabajarán sobre esos mismos contenidos en parejas a través de ejercicios y problemas propuestos por el profesor, que serán puestos en común cuando este lo indique. Aquí se llevará a cabo un orden muy marcado: es necesario respetar el turno de palabra y las intervenciones de los compañeros. Si alguno quiere hacer algún comentario deberá levantar la mano y esperar su turno, sin interrumpir a quien esté hablando. Al finalizar la clase, se hará un resumen de lo que se ha visto a modo de conclusión, destacando los aspectos más relevantes para las próximas sesiones.

6.10. Actividades de aprendizaje

Las actividades de aprendizaje que se han propuesto para cada sesión aparecen detalladas en los guiones de trabajo incluidos en el **Anexo I**. Estas actividades han sido diseñadas especialmente teniendo en cuenta los aspectos referentes al límite estudiados en el capítulo 3 y las teorías sobre el aprendizaje del límite que aparecen en el capítulo 4. Así, el objetivo de ellas es crear una imagen conceptual sólida y variada en torno al concepto de límite: se comenzará trabajando con sucesiones, para las que se introduce el significado de los términos aproximación y tendencia. Tras realizar varias actividades donde se pueden ver varios casos significativos, en las que se busca que el alumno piense en lugar de trabajar mecánicamente, se dará el paso a trabajar con funciones. Al establecer el límite en términos de tendencias, primero se trabajará de manera secuencial a través de tablas de valores, viendo que si las abscisas tienden hacia el punto a, entonces sus respectivas imágenes tienden hacia la ordenada L. En este momento también se animará al estudiante a comenzar a trabajar con la definición como aproximación óptima: fijada una aproximación N al límite, los alumnos han de buscar un valor de x a partir del cual sus imágenes sean mejores aproximaciones al límite que N (es decir, que sus errores sean cada vez más pequeños y menores que el error de aproximación de N). Los primeros ejemplos tendrán una fenomenología incluida en contextos reales donde puede ser interesante considerar el límite de una función, con el objetivo de que los estudiantes vean la necesidad de utilizar el concepto.

Una vez establecido, comenzaremos a trabajar con él matemáticamente, buscando avanzar hacia la definición como aproximación óptima. Introduciendo además las representaciones gráficas, haremos que los estudiantes entiendan la relación que existe entre esta y la representación tabular. Este punto es importante ya que los alumnos suelen tener dificultades para observar la tendencia en las imágenes, dado que asocian la tendencia con un movimiento del punto sobre la gráfica en lugar de observar las ordenadas de esos puntos sobre el eje Y. Es por ello que la combinación de ambas representaciones, viendo cómo se producen las aproximaciones a la vez de una manera tabular, les hará comprender el significado del concepto. Aquí también se pretende que los alumnos sean conscientes de la coordinación que existe entre los procesos de aproximación en el dominio y en la imagen.

Se introducirá también el concepto de límite lateral a través de sucesiones de abscisas que tiendan a x por su izquierda y por su derecha. Aquí suelen tener problemas, ya que entienden los límites laterales como movimientos sobre la recta: identifican tender a un punto por la izquierda como tender hacia menos infinito, y por la derecha como tender hacia más infinito. Con la combinación de las representaciones gráfico y tabular los estudiantes entenderán estas tendencias y no las confundirán con las propias de más o menos infinito.

Para trabajar el límite como aproximación óptima de una manera comprensiva se ha creado utilizando GeoGebra el **applet** que aparece en la Figura 12. En él, el estudiante puede introducir una función $f(x)$ y una abscisa x_0 para calcular su límite en este punto. La ventaja que presenta es que permite introducir la definición de límite como aproximación óptima también de una manera gráfica: los alumnos deberán fijar una aproximación N al límite, que se entiende como mover el punto N sobre el eje Y. Esto genera un entorno del supuesto límite. El objetivo del alumno es encontrar un entorno de x_0 cuyas imágenes mejoren a N como aproximación al límite. Moviendo entonces el punto a sobre el eje X los alumnos pueden encontrar este entorno, aunque deberán tener cuidado con cuáles son las imágenes de los puntos comprendidos entre $x_0 - a$ y $x_0 + a$. A la vez podrán ver en la tabla como se producen estas aproximaciones en el dominio y en la imagen, comprobando si para esa misma aproximación N son capaces de encontrar aproximaciones a la izquierda y a la derecha de x_0 que mejoren a N. Comprendido este lenguaje de las tendencias en los registros numérico-tabular y gráfico, los alumnos serán capaces de asimilar la definición de límite como aproximación óptima.

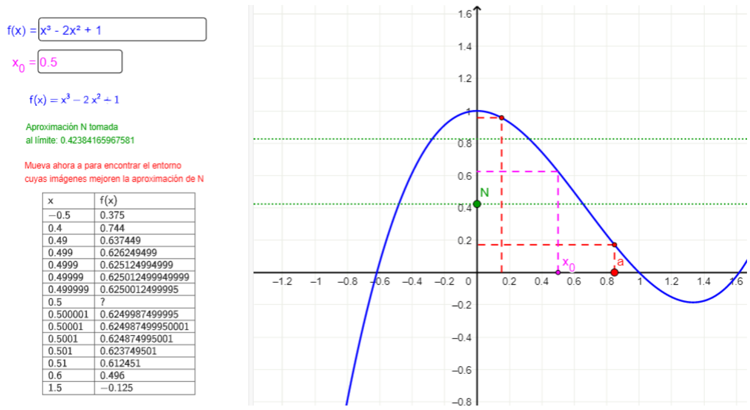


Figura 12. Applet creado en GeoGebra para entender el concepto de límite como aproximación óptima utilizando las representaciones gráfica y numérico-tabular. Elaboración propia, disponible en el enlace https://www.geogebra.org/m/v4bwxmmd.

En el paso anterior, se incluirán ejemplos de varias funciones, como las que se incluyeron en la Figura 11. En las actividades no solamente se utilizarán funciones continuas, también otras en las que aparezcan discontinuidades evitables, de salto finito, de salto infinito (bien con asíntotas o con límite finito a un lado e infinito a otro)… Esto se pretenderá ligar a otros conceptos como la continuidad o las asíntotas, estudiados otros cursos solamente a partir del punto de vista gráfico, mostrando también la necesidad del límite como una herramienta matemática.

Tras ello, se trabajará el concepto de límite en el infinito, nuevamente introducido a través de situaciones reales en los que aparezcan funciones que modelicen procesos. Se tratará de que los alumnos den una definición de límite en infinito similar a la que ya conocen en un punto utilizando la noción de tendencia, trabajando con más ejemplos que les hagan tener una visión amplia y variada (por ejemplo, funciones con un comportamiento oscilante que tienden a 0, donde es posible que en algunos puntos el límite sea igual a la función). Esto también se pretende enlazar con el concepto de asíntota horizontal y oblicua, ofreciendo una comprensión relacional del concepto.

Finalmente, se trabajará el cálculo de límites a partir de las representaciones numérico-tabular, gráfico y simbólico-algebraico e incluyéndolo en problemas, y se introducirá el concepto de indeterminación. La propuesta puede continuarse estudiando los distintos métodos para resolver las indeterminaciones que puedan surgir, aunque nosotros hemos decidido estudiar las más sencillas, por ejemplo intercambiando con las representaciones numérico-tabular y gráfica o razonando a través de los órdenes de infinitud. También se incluirán otras actividades para ver si los alumnos han comprendido el concepto de límite, como es la construcción de funciones cumpliendo una serie de características referentes a sus límites en varios puntos o en infinito, así como la obtención de límites a partir de gráficas de funciones dadas o de tablas de valores.

Además de todo lo anterior, la propuesta también incluye otras actividades complementarias dirigidas a la indagación sobre procesos infinitos en relación a la historia del límite y a sus aplicaciones: se propondrá una introducción al estudio de la integral como suma de rectángulos infinitos, la descomposición de figuras en otras más simples, el método de exhausción, el estudio de los fractales como procesos infinitos… Algunas de ellas con carácter optativo, especialmente dirigidas a alumnos con altas capacidades.

6.11. Evaluación

La evaluación ha de estar de acuerdo con las directrices que marca la ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo, en la que atenderemos a los siguientes criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que marca la legislación (tomamos como referencia los de la asignatura Matemáticas I, que son muy similares a los de la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I) y que están recogidos en la Tabla 9.

Tabla 9. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje extraídos de la ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo, utilizados para evaluar el nivel de aprendizaje de los alumnos sobre los contenidos de límites

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque de Análisis Matemático	
2. Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.	2.1. Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones
4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.
Bloque de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas	
1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.
8. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.	8.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
11. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas	11.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia por su sencillez y utilidad
13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas	13.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 13.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.
14. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet	14.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la

o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción	herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.

Nota: elaboración propia.

La propuesta didáctica que aquí se incluye está prevista como una unidad didáctica en sí misma referente a los contenidos sobre límites, que se abordaría después de la unidad de funciones elementales y antes de la dedicada a continuidad y asíntotas (vistas ambas como una aplicación de los límites).

Habitualmente se suele abordar durante el segundo trimestre de 1º de bachillerato, y la nota aquí obtenida hará media con el resto de unidades vistas durante este tiempo (números complejos y geometría analítica) para obtener la nota final de la evaluación. Se necesitará una nota superior a 4 en cada unidad didáctica para poder hacer media; si esto no es así, el alumno deberá ir automáticamente a la prueba escrita de recuperación de la evaluación.

Los criterios de calificación de esta unidad didáctica son los que aparecen en la Tabla 10.

Tabla 10. Porcentajes en la evaluación del alumno para la propuesta didáctica sobre límites

Instrumentos de Evaluación	Porcentaje sobre el total de la nota
Prueba objetiva escrita	70 %
Trabajo en clase, visualización de vídeos y respuesta a las preguntas	20 %
Trabajo de investigación	10 %

Nota: elaboración propia.

Se utilizarán los siguientes instrumentos para calificar al alumno:

- **Prueba objetiva escrita**: se llevará a cabo en la última sesión, y en ella se harán varias preguntas para evaluar el nivel de aprendizaje que el alumno ha adquirido sobre el concepto de límite. Tendrá una duración de alrededor de 50 minutos (a lo que se puede añadir parte del tiempo del recreo). En ella se valorarán más los aspectos de tipo conceptual que los de tipo procedimental, aunque se deberán conocer los primeros para poder entender los segundos. No se necesitará utilizar ni el ordenador ni GeoGebra, ya que el profesor incluirá en el examen las gráficas o las tablas que considere para comprobar si los alumnos lo han entendido o no.

También se incluirán preguntas de respuesta abierta, en las que el alumno deberá responder con ejemplos que muestren que es capaz de producir situaciones como las que se le piden.

- El **trabajo en clase y en casa** se evaluará en todas las sesiones. Como puede comprobarse en el Anexo I, cada una de estas lleva al final una rúbrica de evaluación sobre los contenidos que se han trabajado, además de que el profesor tendrá en cuenta si el alumno ha visualizado previamente en casa los vídeos que se le han requerido y las respuestas que ha dado a las preguntas planteadas (este apartado se evaluará x2). La nota de cada sesión será la media ponderada de todos los apartados que figuran. Para obtener la nota final de la unidad, basta con hacer la media de todas las calificaciones de todas las sesiones.

- Un pequeño **trabajo de investigación** que deberán realizar por parejas, en clase, pudiendo ser este completado si así lo quieren en sus casas. Versará sobre alguno de los aspectos que involucren al límite, tanto en su concepción histórica como en sus aplicaciones: método de exhausción, cálculo de decimales del número π, método de Arquímedes/Kepler para calcular el área de un círculo, hotel infinito de Hilbert, relación con la desintegración radioactiva y la función exponencial, fractales…

La prueba de recuperación incluirá contenidos y ejercicios de esta unidad didáctica y de todas las demás que se hayan visto en el trimestre, sin tener en cuenta el trabajo de evaluación continua realizado. Si el alumno aprueba, esa será su calificación de cara a la media final de curso; si suspende, deberá esperar a final de curso. Si la media de las 3 evaluaciones es mayor o igual que 5, tendrá la asignatura aprobada; si no, deberá presentarse al examen final con las evaluaciones suspensas.

6.12. Evaluación de la actividad docente

Lo primero que deberemos evaluar es si la propuesta didáctica cumple con nuestro cometido principal, que es comprobar si los alumnos han comprendido el concepto de límite visto como aproximación óptima. Para ello, deberemos verificar si la imagen conceptual que creamos con la propuesta didáctica es suficiente y variada, contestando a las siguientes preguntas:

- ¿Se utilizan demasiadas representaciones prototípicas?
- ¿Los ejemplos utilizados ayudan a abstraer propiedades del objeto?
- ¿Los ejemplos seleccionados permiten obtener una definición adecuada del concepto?
- ¿El nivel es alcanzable por los alumnos?
- ¿La propuesta contribuye a evitar los obstáculos habituales en torno al límite?
- ¿La propuesta y los ejemplos utilizados permiten enlazar la imagen conceptual con la definición conceptual?

- ¿El conocimiento que se proporciona sobre el límite es relacional o instrumental?

En esta evaluación de la actividad docente, aparte de sobre los contenidos, deberemos también preguntarnos por la metodología utilizada, los recursos, las actividades, el nivel de atención al alumnado, aspectos que podrían ser mejorados…

Se podría realizar la siguiente encuesta para poder recibir *feedback* de los alumnos, como la que se recoge en la Tabla 11.

Tabla 11. Ejemplo de cuestionario para la evaluación de la actividad docente por parte de los alumnos

ITEMS	1	2	3	4	5
Los contenidos han resultado interesantes					
La metodología del Flipped Classroom ha sido útil					
El profesor ha mostrado atención por el aprendizaje de los alumnos					
Los materiales y actividades que se han utilizado son adecuados					
El uso de herramientas informáticas ha resultado positivo					
La herramienta GeoGebra me ha ayudado a entender mejor la asignatura					
La carga de trabajo en casa ha sido adecuada					
La carga de trabajo en clase ha sido adecuada					
He podido comprobar la evolución de mi aprendizaje					
El profesor ha sido justo para evaluar					
COMENTARIOS ADICIONALES (Algún aspecto que considerarías mejorable, aspectos que creas positivos…)					

Nota: elaboración propia.

7. Análisis de la propuesta didáctica

La propuesta didáctica que aquí se incluye, como ya indiqué en el capítulo 5, **no pudo ser implementada** durante el periodo de prácticas de este máster. La enseñanza que hoy en día se ofrece en los centros educativos es esencialmente procedimental, más centrada en utilizar los conceptos como herramientas que en estudiarlos en sí mismos. Durante mi estancia (en la que impartí parte de contenidos sobre límites, dedicados fundamentalmente a la resolución de indeterminaciones) pude comprobar muchos de los errores que se cometen debido principalmente a los obstáculos comentados en el capítulo 4. La mayoría de ellos (como el no ser conscientes de la coordinación entre las aproximaciones en el dominio y en el rango) se deben al poco tiempo que se dedica en las aulas a estudiar la definición y el concepto en profundidad, aunque sin necesidad de entrar en el formalismo.

Aunque no pudo ser puesta en marcha, podemos hacer un análisis de la hipotética situación a través de un **análisis DAFO**, una metodología de estudio muy utilizada en el mundo profesional para evaluar la posición de un proyecto (o una propuesta) atendiendo a las posibles debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades de la misma (cuyas iniciales componen precisamente el nombre).

7.1. Debilidades

Las debilidades hacen referencia a aquellos factores internos de la propuesta que pueden funcionar en contra de un resultado exitoso, y que la situarían en una posición desfavorable frente a otras. Las hipotéticas debilidades que podría presentar nuestra propuesta en una implementación son:

- Puede haber algunos docentes que presenten dificultades al implementar en el aula una propuesta didáctica como la que aquí se presenta, dirigida a fomentar la comprensión del concepto de límite en vez de a enseñar a resolver límites a los alumnos como si de autómatas se trataran. Se presenta de una manera novedosa, alejada de la enseñanza tradicional, que podría incluso generar opiniones en contra. Muchos no saben cómo llevar a cabo una metodología como el Flipped Classroom, además de que requiere una alta implicación por parte del profesor al tener que generar vídeos, recursos, estar atento a las necesidades del alumnado…

- La propuesta didáctica dedica poco tiempo a la resolución de indeterminaciones, que es lo que principalmente se pregunta en las pruebas de acceso a la universidad. Por lo tanto, podría suceder que los alumnos no salieran suficientemente preparados para estas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que es una propuesta dirigida a 1º de Bachillerato: los aspectos mecánicos se pueden trabajar en el 2º curso, dedicando el anterior a entender los conceptos que aparecen para luego poder trabajar con ellos sin problemas. Además, en segundo se estudia la Regla de L'Hôpital, que es mucho más potente para resolver límites.

- Se dedica bastante tiempo en el aula y en el hogar a que los alumnos utilicen las TIC. Si esto no se hace de una manera eficiente y las herramientas no se preparan cuidadosamente, los problemas pueden aparecer. En este caso, si los estudiantes se muestran reacios a utilizar softwares como GeoGebra (dado que, desafortunadamente, no se utilizan a menudo las tecnologías en el aula) o a seguir metodologías activas como el Flipped Classroom, podrían presentar una actitud de desmotivación ante el aprendizaje. Además, cuando se presentan las dudas en clase puede que se dedique más tiempo a estas del planteado inicialmente en la secuenciación, lo que puede obligar a que se incluya alguna más para suplir las necesidades.

- Pudiera ser que, aun utilizando la definición de límite de Blázquez y Ortega como aproximación óptima, muchos alumnos siguieran sin entender el concepto de límite. La propuesta no se centra en explotarlo de una manera teórica, sino de utilizarlo para justificar los resultados que se obtienen, así como generar una imagen conceptual rica y variada en torno a él.

7.2. Amenazas

Las amenazas en un análisis DAFO hacen referencia a factores externos que podrían poner en riesgo la implementación de la propuesta. En este caso, las amenazas a las que podría enfrentarse hipotéticamente nuestra propuesta didáctica son:

- La metodología del aula invertida supone que los alumnos disponen de medios tecnológicos y conexión a internet en sus hogares para visualizar los vídeos y los contenidos previos a la sesión. Sin embargo, no todas las familias pueden permitirse estos recursos, aunque algunos centros educativos ofrecen ordenadores que los alumnos pueden llevar a sus casas para trabajar.

- La propuesta también supone la existencia de laboratorios de informática o de ordenadores portátiles que utilizar en el aula, pero muchos centros no cuentan con una cantidad suficiente de estos o que estén actualizados a la última versión. Esto puede dificultar enormemente el desarrollo de las sesiones, ya que están previstas para utilizar las TIC en ellas.

- Algunas familias se muestran bastante contrarias a la utilización de una metodología distinta a la lección magistral, sobre todo en Bachillerato (ya que dan una gran importancia a que sus hijos *"vayan bien preparados para la EBAU"*). Sin embargo, el uso de metodologías activas, en contra de lo que se piensa, hace que los alumnos se sientan más motivados a la vez que les hace más partícipes en el desarrollo de las clases.

7.3. Fortalezas

Las fortalezas indican las áreas o los aspectos por los que destaca un proyecto y que lo hacen distinguirse positivamente de los demás. Las hipotéticas fortalezas que se pueden destacar de la propuesta didáctica que aquí se incluye son:

- Se utilizan metodologías de tipo activo y se hace uso del ordenador, dos elementos que suelen tener una buena cabida entre los estudiantes. Una de sus potencialidades es el uso de varias representaciones para entender el concepto de límite, lo que permite la utilización del software GeoGebra. De una manera visual y dinámica (introduciendo elementos manipulativos en la pantalla) los alumnos comprenderán el concepto de límite más fácilmente.

- La metodología del aula invertida hace que los alumnos estudien los conceptos en su casa y los apliquen en las clases. Esto puede ser muy positivo, ya que pueden ver los vídeos tantas veces como quieran y consultar sus dudas de manera presencial. Además, en lugar de tener tareas para casa (pudiendo ocurrir que no supieran cómo hacerlas), las actividades prácticas se llevan a cabo en el aula, por lo que el profesor puede ayudar en todo momento. Se convierte en un guía de su aprendizaje.

- A diferencia de la enseñanza tradicional del límite, en nuestro caso proponemos que se haga de una manera comprensiva. Los ejemplos que se incluyen para tratarlo son numerosos y variados, para que el alumno sea consciente de su significado. El punto fuerte es que tratamos de crear un conocimiento de tipo relacional: en lugar de enseñar métodos útiles para unos casos particulares, se exponen ideas generales sobre el límite, que se pueden aplicar en varios contextos e incluso relacionar con la continuidad y con las asíntotas. Se incluyen también otras actividades para que los alumnos aumenten su curiosidad por las matemáticas.

7.4. Oportunidades

Las oportunidades en el análisis DAFO son los factores externos que favorecen la obtención de un resultado positivo, y que pueden ser aprovechados para explotarla. Las principales oportunidades que pensamos que podría tener una hipotética implementación en el aula son las siguientes:

- Se podría llevar a cabo una investigación cualitativa de investigación-acción para comprobar los efectos que provoca sobre el aprendizaje del límite en los estudiantes. Además, en otra investigación podría compararse con una propuesta tradicional en la que se da más importancia al cálculo de límites y a la resolución de indeterminaciones, para averiguar si de este modo se consiguen mejores resultados a la hora de tratar con límites.

- La propuesta didáctica se enmarcaría perfectamente en la nueva Ley de Educación, la LOMLOE, que propone dar más importancia a los conceptos matemáticos en sí mismos que al desarrollo de habilidades algorítmicas y al aprendizaje de rutinas. Aparte de esto, otro punto fuerte es que precisamente en el currículo se incluye el estudio de límites a través de representaciones algebraicas, gráficas y tabulares como vimos en el capítulo 3, por lo que es una propuesta fácilmente adaptable para los futuros cursos. Por si fuera poco, en la LOMLOE también se le da una gran importancia al uso de softwares informáticos para visualizar los conceptos evitando procedimientos y cálculos algorítmicos, así como a metodologías activas que permitan el trabajo en equipo. Por lo tanto, no cabe duda de que la propuesta didáctica consigue adaptarse a la nueva manera de tratar las matemáticas.

7.5. Resumen del análisis DAFO sobre la propuesta

En la Figura 13 se incluye un breve resumen visual del análisis DAFO que hemos realizado sobre la propuesta en los apartados anteriores. Se presenta una matriz, cuya primera columna se corresponde con el análisis interno de la propuesta y la segunda con el externo. Asimismo, la primera fila corresponde con los hipotéticos puntos débiles de la implementación, mientras que la segunda contiene los puntos fuertes de esta.

Figura 13. Matriz que resume el análisis DAFO llevado a cabo a partir de la propuesta didáctica. Elaboración propia.

8. Conclusión y reflexión final sobre el trabajo efectuado

La propuesta didáctica que aquí se recoge puede parecer rompedora en cuanto a la manera de tratar el límite: se da más importancia a comprender la definición y los procedimientos que a desarrollar métodos mecánicos sin explicación que permitan calcular límites y resolver indeterminaciones. El objetivo que nos propusimos inicialmente a la hora de crearla fue conseguir que los alumnos adquirieran una visión completa y comprensiva en torno al límite, construyendo una imagen conceptual rica en torno a este que permitiera entender la definición conceptual (ya que esta apenas se suele explotar habitualmente en Secundaria). Precisamente es la definición de límite de Blázquez y Ortega como aproximación óptima la que nos permite construir esto, ya que encaja con la idea dinámica que caracteriza al límite. Además, el uso de representaciones – algo que caracteriza a la propuesta, pues habitualmente solo se explota el registro simbólico-algebraico – hace que el concepto se comprenda mucho más fácilmente, siendo estas útiles y a la vez necesarias. Por otro lado, el uso de un vocabulario preciso y correcto – a través de los términos de aproximación y tendencia – permite tratar el concepto sin que surjan los obstáculos estudiados debidos al lenguaje.

La propuesta les puede resultar muy interesante a los estudiantes debido al modo de trabajar. El uso del aula invertida hace que los estudiantes visualicen vídeos sobre los contenidos teóricos en su casa, pudiendo verlos tantas veces como quieran, pausarlos, rebobinarlos… Si les surgen dudas, pueden preguntarlas o consultarlas en clase. Además, el trabajo en la clase de matemáticas se plantea de una manera activa en lugar de que el alumno sea un espectador: el aula es el sitio en el que se harían los tradicionales deberes para casa, resolviendo ejercicios, problemas y otras actividades. Por lo tanto, el profesor puede ver las dificultades de los alumnos y tratar de solucionarlas en el momento.

Se utilizan las tecnologías de la información y la comunicación, las cuales hacen que el aprendizaje sea más visual, dinámico y ameno. La inclusión de GeoGebra debería ser casi obligatoria en el aula de Secundaria y de Bachillerato, ya que permite ver los contenidos, manipularlos y experimentar con ellos. Sería muy difícil explicar todo lo relacionado con el concepto de límite sin utilizar un software de este tipo. Por otra parte, el trabajo en equipo supone además otra motivación, tanto para enfrentarse a las tareas como para hacer los trabajos en grupo. Estos incluyen cuestiones históricas y curiosidades sobre las matemáticas, que pueden motivar aún más su interés por esta disciplina.

Con todo ello, consideramos que se cumplen los objetivos planteados al inicio del TFM:

- con la propuesta didáctica se consigue dar más importancia a los aspectos conceptuales que a los procedimentales;
- está enfocada para que los estudiantes tomen un papel activo en el aula y que se adapte a la diversidad del alumnado;
- hemos conseguido determinar por qué la enseñanza del límite se lleva a cabo actualmente de una manera tan centrada en lo procedimental contextualizando el concepto a través de la historia, en las distintas leyes educativas, en los libros de texto y viendo su relación con la EBAU;

- las investigaciones en Didáctica de la Matemática nos han permitido conocer las teorías sobre el aprendizaje y los obstáculos habituales de los alumnos, hechos sobre los que hemos podido reflexionar para llevar a cabo la propuesta didáctica.

Personalmente, espero poder aplicar la propuesta didáctica aquí recogida algún día en un aula, para poder comprobar sus efectos. Considero que se adapta muy bien a la visión de las matemáticas que trae la nueva ley de educación, la LOMLOE, que de primeras parece bastante ambiciosa en cuanto a la reducción de los aspectos algorítmicos frente a la importancia de la reflexión y el "hacer matemáticas". Asimismo, queda pendiente poder realizar una investigación para determinar si el efecto que se produce al aplicar la actual propuesta didáctica conduce a entender y a trabajar mejor el concepto de límite que con los métodos utilizados tradicionalmente. Me ha gustado especialmente conocer su tratamiento histórico, didáctico y curricular, y espero que su enseñanza en las aulas cambie pronto hacia una mayor comprensión del concepto.

9. Referencias

Arce, M. y Conejo, L. (2017). Análisis de las notas tomadas por los alumnos en una presentación inicial de límite de una función. *PNA, 11*(3), 155-179.

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Madrid: Síntesis.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Benitez, E. y Gabriel, J. R. (2020). Una propuesta didáctica para mejorar la comprensión del concepto de límite de una función. *El cálculo y su enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, 14*, 16-29.

Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(3), 219-236.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 30*, 67-82.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 189-209.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori - ICE Universidad de Barcelona.

Conejo, L. (2015). *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la Ley General de Educación a la Ley Orgánica de Educación.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Contreras de la Fuente, Á. (2004). Los registros de representación semiótica y la teoría de las funciones semióticas. *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*, (pp. 32-57). Universidad de Jaén.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Durán, A. J. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo.* Madrid: Alianza Editorial.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano : registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

El nuevo plan de estudios del bachillerato. (29 de agosto de 1934). *Luz*, p. 4. Recuperado de http://hemerotecadigital.bne.es/pdf.raw?query=id:0003585566&lang=es&log=19340829-00000-00004/Luz+(Madrid.+1932)

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2013). Concept of finite limit of a function at a point: meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 699-710.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las ciencias, 33*(2), 211-229.

González, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables: la teoría de la proporción y el método de exhaución. *Sigma: Revista de matemáticas, (33)*, 101-129.

López-Esteban, C. (2019). La institucionalización del análisis matemático en el siglo XVIII a través de libros históricos y su reflejo en las enseñanzas para educación secundaria en España a través del análisis de manuales. En J. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. Muñoz-Escolano y Á. Alsina, *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 95-116). Valladolid: SEIEM.

Ortega, T. (2016). *Entre la intuición y el formalismo. El concepto de límite.* Obtenido de Conferencia virtual en la Universidad de los Andes (Colombia): http://funes.uniandes.edu.co/8396/1/Ortega2016Limites.pdf

Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Leeds.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1985). *Historia de la matemática: del renacimiento a la actualidad (Vol. 2).* Gedisa.

Robert, A. (1982). L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. *Reserches en Didactique des Mathématiques, 3*(3), 307-341.

Romiti, M. R., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2014). Preferencia de registros de representación en el concepto de límite de funciones de alumnos de primer año de ingeniería. En P. Lestón, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1107-1115). México D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sánchez-Matamoros García, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (Desarrollo del concepto).* Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the learning of mathematics, 7*(3), 41-51.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*(4), 371–397.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las ciencias, 17*(3), 463-476.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching (77)*, 20-26.

Sorando, J. M. (2002). ¿Os acordáis de los conjuntos? *SUMA, 39*, 121-126.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1992). The transition to Advance Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. En D. A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). New York: MacMillan.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las ciencias, 29*(3), 325-338.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez, *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Jaén: SEIEM.

Wees, D. [@davidwees]. (2015, 3 de febrero). *The difference between instrumental and relational understanding in a picture. #mathchat* [Tweet]. Twitter.

Zamora, M. R. (2014). *Análisis de las pruebas de acceso a las universidades de Castilla y León (Matemáticas II).* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Normativa en materia educativa utilizada:

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *BOE (Boletín Oficial del Estado)*, *295*, de 10 de diciembre de 2013, 97858-97921. https://www.boe.es/eli/es/lo/2013/12/09/8/con

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se estable el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. *BOE (Boletín Oficial del Estado)*, *3*, de 3 de enero de 2015, 169-546. https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/12/26/1105/con

ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *BOE (Boletín Oficial del Estado)*, *25*, de 29 de enero de 2015, 6986-7003. https://www.boe.es/eli/es/o/2015/01/21/ecd65

ORDEN EDU 362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *BOCyL (Boletín Oficial de Castilla y León), 86*, de 8 de mayo de 2015, 32051-32480. https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/orden-edu-362-2015-4-mayo-establece-curriculo-regula-implan

ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. *BOCyL (Boletín Oficial de Castilla y León), 86*, de 8 de mayo de 2015, 32481-32984. https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/orden-edu-363-2015-4-mayo-establece-curriculo-regula-implan

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE (Boletín Oficial del Estado)*, *340*, de 30 de diciembre de 2020, 122868-122953. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. *BOE (Boletín Oficial del Estado)*, *82*, de 6 de abril de 2022, 46047-46408. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/04/05/243/con

Anexo I. Temporalización de las sesiones y secuenciación de las actividades propuestas

En este apartado se recogen los guiones de trabajo de cada una se las sesiones en las que se trabajará la propuesta didáctica que se ha creado con motivo de este TFM. Hay que tener en cuenta que una buena parte de los contenidos los destacará el profesor de manera oral en el aula, por lo que ha de entenderse que no todo figura de manera escrita en estos guiones, así como los posibles imprevistos que puedan surgir. El acceso a los vídeos para ver en casa puede hacerse a través del siguiente enlace: https://edpuzzle.com/join/dozumuv (o introduciendo la clave *dozumuv*).

I.1. Sesión 1

<table>
<tr><th colspan="2">Sesión 1</th></tr>
<tr><td>Contenidos a trabajar</td><td>Sucesiones. Límite de una sucesión: conceptos de aproximación y tendencia. Tendencias finitas e infinitas y no existencia de límite. Cálculo de límites de sucesiones. El número e.</td></tr>
<tr><td>Competencias clave</td><td>CLing; CMatCie; CApr; CSoc; CEmpr;</td></tr>
<tr><td>Objetivos a cumplir</td><td>1, 2, 3, 5, 17, 18</td></tr>
<tr><td>Actividades previas</td><td>Visualización de los siguientes vídeos:
1. Sucesiones
2. Aproximación y tendencia
3. Límite de una sucesión
Respuesta a las preguntas al final de los vídeos</td></tr>
<tr><td>Modo de trabajo</td><td>Actividades basadas en los vídeos visualizados. Trabajo en el aula en grupos de dos personas, inicialmente formados a su gusto salvo que el profesor indique lo contrario.
Se harán de una en una y se resolverán en común después de un tiempo razonable. Para cada una de ellas, el profesor mostrará en GeoGebra una representación gráfica.</td></tr>
<tr><td>Temporalización</td><td>0’-10’: solución de las dudas surgidas en la visualización
10’-30’: ejercicios sobre aproximación y tendencia (con calculadora)
30’-50’: cálculo de límites sencillos con calculadora</td></tr>
<tr><td>Recursos del aula</td><td>1. Calculadora
2. Papel, lápiz y boli
3. Proyector y ordenador del profesor</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades en el aula</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad 1: Calcula los 5 primeros términos ($n > 1$) de las siguientes sucesiones:</td></tr>
</table>

a) (x_n) con término general $x_n = n^2$;

b) (x_n) con término general $x_n = (-1)^n$;

c) (x_n) con término general $x_n = (1/2)^n$;

d) (x_n) con término general $x_n = (-1/2)^n$;

e) (x_n) con término general $x_n = 1 + (-1)^n/n$;

f) (x_n) siguiendo la recurrencia $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Actividad 2: Responde las siguientes preguntas relacionadas con los términos aproximación y tendencia:

a) Se han calculado los primeros 50 términos de la sucesión siguiente:

n	x_n
1	0
2	1
3	0
4	1.5
5	1.25
6	1.125
...	...
10	1.01
...	...
20	1.0001
...	...
40	1.000001
...	...
50	1.00000001

¿La sucesión anterior se aproxima a -1? ¿Y a 0? ¿Y a 1? ¿Tiende a alguno de los valores anteriores?

b) Se han calculado los primeros 50 términos de la sucesión siguiente:

n	x_n
1	-1.5
2	1.5
3	-1
4	1
5	-0.5
6	0.5
...	...
9	-0.0975
10	0.0975
...	...
19	-0.0056
	0.0056
...	...
49	-0.00018
50	0.00018

¿La sucesión anterior se aproxima a -1? ¿Y a 0? ¿Y a 1? ¿Tiende a alguno de los valores anteriores?

c) Se han calculado los primeros 50 términos de la sucesión siguiente:

n	x_n
1	30
2	-30
3	20
4	-20
5	15
6	-15
...	...
9	10.5
10	-10.5
...	...
19	10.05
	-10.05
...	...
49	10.0001
50	-10.0001

¿La sucesión anterior se aproxima a -1? ¿Y a 0? ¿Y a 1? ¿Tiende a alguno de los valores anteriores?

d) Se han calculado los primeros 50 términos de la sucesión siguiente:

n	x_n
1	-4
2	-2
3	0
4	2
5	4
...	...
10	14
...	...
30	54
...	...
50	94

¿La sucesión anterior se aproxima a algún valor? ¿Hacia dónde tiende?

e) Se han calculado los primeros 50 términos de la sucesión siguiente:

n	x_n
1	1
2	1
3	1
4	1
...	...
50	1

¿Hacia dónde tiende la sucesión anterior?

Actividad 3. Indica qué sucesiones de la actividad anterior tienen límite, cuál es su valor y justifícalo. Te recomiendo utilizar una tabla como la siguiente, aunque debes adaptar el valor de n:

n	1	2	...	10	...	20	...	50
Distancia entre x_n y L								

Prueba a tomar una aproximación K al supuesto límite L (el que tú creas) y calcula el error de aproximación. ¿Eres capaz de encontrar algún valor de n a partir del cual todos los términos de la sucesión sean mejores aproximaciones de L que K?

Nota: podría suceder que no supieran tomar la aproximación, o que tomen una que no existan términos (ya que pueden no inferir como se generan los próximos valores). Es el problema que presentan las representaciones numérico-tabulares cuando no te dan (o puedes deducir) la fórmula general o la expresión algebraica en cuestión. Se les comentará a los estudiantes, aunque en algunos casos como en el e) probablemente intuyan el comportamiento.

Actividad 4. Calcula el valor de los siguientes límites (puedes utilizar la calculadora si lo necesitas). Justifica tu respuesta.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2n}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}(-n)^n$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n^2}\right)^n$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$

El profesor puede utilizar un recurso como este: https://www.GeoGebra.org/m/kyGbHXpu

Evaluación de la sesión

El docente evaluará de acuerdo a la siguiente rúbrica:

Indicadores de evaluación	Sobresaliente (10)	Notable (7,5)	Aprobado (5)	Suspenso (0)
Participación en la actividad (x2)	El estudiante visionó los videos y participó activamente en la sesión con aportaciones de calidad	El estudiante visionó los videos y participó en la sesión, aunque presentó alguna dificultad	El estudiante visionó los vídeos, aunque no realizó ninguna aportación a la sesión	El estudiante no visionó los videos, no hizo las actividades o no participó en la sesión

Cálculo de términos de una sucesión	El estudiante sabe calcular términos de sucesiones dadas por el término general o por una recurrencia	El estudiante sabe calcular términos de sucesiones con término general, incluido si son alternadas	El estudiante sabe calcular los términos únicamente a partir de un término general	El estudiante no es capaz de calcular los términos de una sucesión
Aproximación y tendencia	El estudiante comprende los términos aproximación y tendencia, y los reconoce en todos los casos	El estudiante comprende los términos aproximación y tendencia, aunque tiene alguna dificultad en aplicarlos	El estudiante comprende los términos aproximación y tendencia, aunque solo sabe aplicarlo en casos monótonos	El estudiante no ha comprendido la diferencia entre los términos aproximación y tendencia
Existencia de límite	El estudiante identifica el límite en todos los casos dados por tablas y lo asocia con la tendencia	El estudiante identifica el límite en todos los casos dados por tablas, aunque no lo asocia con la tendencia	El estudiante identifica el límite de sucesiones monótonas dadas por tablas	El estudiante no sabe identificar el límite de sucesiones dadas por tablas
Cálculo de límites a partir del término general	El estudiante sabe calcular el límite de sucesiones dadas por su término general y lo vincula con la tendencia	El estudiante calcula el límite a partir de algunos términos de la sucesión, aunque tiene alguna dificultad para justificarlo	El estudiante sabe calcular términos de una sucesión, aunque no lo relaciona con el límite	El estudiante no sabe calcular el límite de una sucesión dada por su término general
Razonamiento matemático	El estudiante justifica todos o casi todos los resultados de manera rigurosa	El estudiante justifica todos o casi todos de los resultados aunque sin rigor	El estudiante justifica alguno de los resultados que obtiene	El estudiante no justifica ninguno de los resultados que obtiene

I.2. Sesión 2

Sesión 2	
Contenidos a trabajar	Límite de una función en un punto. Definición dinámica intuitiva de límite en un punto. Representación numérico-tabular. Representación gráfica. Relación entre ambas representaciones. Importancia de la coordinación

	en las aproximaciones en el dominio y en la imagen.
Competencias clave	CLing; CMatCie; CDig; CApr; CSoc; CEmpr;
Objetivos a cumplir	1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 17, 18
Actividades previas	Visualización de los siguientes vídeos: 1. Límite de una función en un punto: idea intuitiva (I) 2. Límite de una función en un punto: idea intuitiva (II) Respuesta a las preguntas al final de los vídeos
Modo de trabajo	Actividades basadas en los vídeos visualizados. Al inicio de la clase el profesor mostrará algunas herramientas a utilizar en GeoGebra. Trabajo en el aula en grupos de dos personas, inicialmente formados a su gusto salvo que el profesor indique lo contrario. Se harán de una en una y se resolverán en común después de un tiempo razonable.
Temporalización	0'-10': solución de las dudas surgidas en la visualización 10'-20': uso de GeoGebra para el cálculo de límites 20'-40': ejercicios para trabajar el concepto de límite 40'-50': cálculo de límites sencillos con GeoGebra
Recursos del aula	1. Calculadora 2. Ordenador o Tablet con conexión a Internet y con GeoGebra 3. Papel, lápiz y boli 4. Proyector y ordenador del profesor
Actividades en el aula	

Actividad 1: El crecimiento de una población en un determinado país ha quedado recogido en la siguiente tabla (adaptado de Blázquez y Ortega, 2001):

x (cientos de años)	4	4,9	4,99	4,999	4,9999
y (miles de habitantes por año)	10,7846	10,7613	10,7621	10,76203	10,7620002

a) ¿A qué valor tiende el crecimiento del país? ¿Es una evolución creciente o decreciente? Comprueba que las imágenes de la función son aproximaciones cada vez mejores que los valores anteriores, calculando el error de aproximación.

b) Deduce qué es lo que ocurre al cabo de 500 años. Asócialo con lo que ya has estudiado sobre tendencias.

c) Toma como aproximación al límite el valor $K = 10{,}77$. Calcula el error que se comete con la aproximación. ¿Existen valores de x cuyas imágenes mejoren la aproximación anterior?

Actividad 2: El crecimiento de otra población se corresponde con la siguiente función, donde x representa los cientos de años transcurridos e $y = f(x)$ los miles de habitantes por año:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & si \quad x \leq 2 \\ 2^x & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Los geógrafos identificaron un comportamiento extraño 200 años después de realizar la medición. Como estudiante de matemáticas, te piden ayuda. En primer lugar, completa la siguiente tabla utilizando la calculadora:

x (cientos de años)	1,5	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	2,5
y (miles de habitantes por año)								

a) ¿Qué puedes decir sobre la existencia de límite en $x = 2$? Justifica tu respuesta.

b) ¿A qué se te ocurre que se puede asociar lo que ha ocurrido al cabo de 200 años?

c) Utiliza GeoGebra para representar la función que aparece en el enunciado. Puedes utilizar el siguiente applet https://www.GeoGebra.org/m/pvkzhc2x (recuerda que para los exponentes se utiliza el símbolo ^). ¿Qué comportamiento aprecias en x = 2? ¿Qué sucede con las ordenadas si mueves la abscisa del punto P alrededor de $x = 2$?

Actividad 3. Ya conoces de la unidad anterior las funciones de proporcionalidad inversa, como la siguiente:

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x - 2}$$

a) ¿Qué ocurre si intentas evaluar la función anterior en $x = 2$?

b) Utiliza una tabla de valores para conocer qué es lo que ocurre en un entorno del punto $x = 2$. Calcula también sus imágenes. ¿Qué ocurre con esta sucesión de imágenes? ¿Hacia dónde **tienden** los valores por la izquierda y por la derecha?

c) Introduce la función anterior en GeoGebra (puedes volver a utilizar el applet del ejercicio anterior. ¿El comportamiento es el mismo con valores a la izquierda y a la derecha de 2? Establece cuáles son los límites laterales. ¿Qué ocurre con el límite *general*?

Actividad 4. Abre el siguiente applet en GeoGebra: https://www.GeoGebra.org/m/v4bwxmmd.

a) Introduce la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

b) Queremos calcular cuál es el límite de $f(x)$ cuando $x \to ½$. Para ello, fíjate primero en la tabla de valores que aparece a la izquierda. ¿Hacia qué valor tienden las x? ¿Hacia qué valor tienden sus imágenes $y = f(x)$? Calcula los errores en la aproximación al límite.

c) Toma ahora el valor $N = 0.6255$ como aproximación al límite L. ¿Puedes mejorarla a través de los valores de la sucesión anterior?

d) Presta atención a continuación a la gráfica. El punto a constituye una aproximación a x_0, que puedes mover sobre el eje X. ¿Qué sucede con las imágenes de los puntos si haces tender a hacia x_0?

e) El punto N constituye una aproximación al límite L. Ajusta este como $N = 0.6$, y mueve ahora el punto a sobre el eje X. Trata de encontrar un entorno del punto $x_0 = ½$ para el que las imágenes de todos sus puntos sean mejores aproximaciones de L que N.

f) Compara el límite que has obtenido anteriormente con el valor de la función en $x_0 = ½$.

PRECAUCIÓN: Las imágenes de los puntos las observamos sobre el eje Y.

Actividad 5. Abre de nuevo el applet y repite el mismo proceso anterior, en este caso con la función *f(x)* siguiente y tomando $x \to 5$:

$$f(x) = \frac{10 - 2\sqrt{5x}}{5 - x}$$

a) ¿Qué sucede en este caso si evaluamos directamente la función en 5?

b) Crea con la calculadora una tabla de valores alrededor de este punto para estudiar las tendencias. ¿Hacia qué valor tienden sus imágenes? ¿Es el mismo al tomar valores por la izquierda y por la derecha? ¿Cuál crees que es el límite?

c) Observa ahora la gráfica de la función. A partir de esta, ¿cuál piensas que es el límite de *f(x)* cuando $x \to 5$?

d) Fija una aproximación $N = 1.51952$ a este límite. Observa la tabla a la izquierda y trata de encontrar un entorno de $x_0 = 5$ para el que todas las imágenes de sus puntos sean mejores aproximaciones de L que N.

e) ¿Qué vinculación encuentras en la gráfica con la información recogida en la tabla? A partir de esta, ¿dirías que el límite es el mismo que pensaste en los dos casos? Justifícalo a partir de los errores y relaciónalo con el concepto de tendencia.

f) Intenta relacionar los hechos que aquí suceden con lo que ya conoces de otros cursos sobre la continuidad de una función. ¿5 es un punto del dominio?

NOTA: El profesor utilizará algunos de estos ejemplos para comenzar a hablar de indeterminaciones.

Evaluación de la sesión

El docente evaluará de acuerdo a la siguiente rúbrica:

Indicadores de evaluación	Sobresaliente (10)	Notable (7,5)	Aprobado (5)	Suspenso (0)
Participación en la actividad (x2)	El estudiante visionó los videos y participó activamente en la sesión con aportaciones de calidad	El estudiante visionó los videos y participó en la sesión, aunque presentó alguna dificultad	El estudiante visionó los vídeos, aunque no realizó ninguna aportación a la sesión	El estudiante no visionó los videos, no hizo las actividades o no participó en la sesión

Utilización de tendencias en el cálculo de límites	El estudiante es capaz de calcular el límite a partir de una tabla y justifica a través del concepto de tendencia	El estudiante intuye el límite y calcula los errores, aunque no lo asocia con el concepto de tendencia	El estudiante intuye el límite, aunque no lo asocia al concepto de tendencia	El estudiante no ha comprendido el concepto de tendencia
Representación numérico – tabular	El estudiante justifica la existencia o no existencia de límite a través de las tendencias (tomando cualquier aproximación)	El estudiante intuye la existencia o no de límite, aunque solo lo justifica con las aproximaciones en el dominio e imagen	El estudiante intuye la existencia o no de límite, aunque no lo justifica	El estudiante no sabe utilizar el sistema tabular para calcular un límite
Representación gráfica	El estudiante justifica la existencia o no existencia de límite a través de las tendencias (tomando cualquier aproximación)	El estudiante intuye la existencia o no de límite, aunque solo lo justifica con las aproximaciones en el dominio e imagen	El estudiante intuye la existencia o no de límite, aunque no lo justifica	El estudiante no sabe utilizar el sistema gráfico para calcular un límite
Relación entre representaciones numérico-tabular y gráfica	El estudiante identifica la tabla y la gráfica, y justifica el límite a través del concepto de tendencia	El estudiante identifica la tabla y la gráfica, y es capaz de ver las aproximaciones en ambos procesos	El estudiante es capaz de identificar la correspondencia entre abscisas y ordenadas en la tabla y en la gráfica	El estudiante no relaciona las representaciones numérico-tabular y gráfica
Uso del concepto de límite como aproximación óptima	El estudiante sabe encontrar un entorno del punto a cuyas imágenes mejoren cualquier aproximación K fijada	El estudiante fija una aproximación K al límite e identifica los procesos de aproximación, aunque no encuentra el entorno de a	El estudiante identifica los procesos de aproximación en el dominio y en la imagen	El estudiante no ve ningún proceso de aproximación
Razonamiento matemático	El estudiante justifica todos o	El estudiante justifica todos o	El estudiante justifica alguno	El estudiante no justifica ninguno

	casi todos los resultados que obtiene de manera rigurosa	casi todos de los resultados aunque sin rigor	de los resultados que obtiene	de los resultados que obtiene

I.3. Sesión 3

Sesión 3	
Contenidos a trabajar	Definición de límite como aproximación óptima. Límites laterales. Cálculo de límites a partir de varias representaciones. Relación con la continuidad y las asíntotas.
Competencias clave	CLing; CMatCie; CDig; CApr; CSoc; CEmpr;
Objetivos a cumplir	1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 17, 18
Actividades previas	Visualización de los siguientes vídeos: 1. Límite de una función en un punto como aproximación óptima 2. Cálculo de límites a partir del sistema simbólico-algebraico Respuesta a las preguntas al final de los vídeos
Modo de trabajo	Seguimos trabajando el concepto de límite con actividades similares a las de la sesión anterior. Se proporcionan más ejemplos y situaciones. Trabajo en el aula en grupos de dos personas, inicialmente formados a su gusto salvo que el profesor indique lo contrario. Se harán de una en una y se resolverán en común después de un tiempo razonable.
Temporalización	0'-10': solución de las dudas surgidas en la visualización 10'-30': actividades sobre el cálculo de límites 30'-50': cálculo de límites sencillos algebraicamente y con GeoGebra
Recursos del aula	1. Calculadora 2. Ordenador o Tablet con conexión a Internet y con GeoGebra 3. Papel, lápiz y boli 4. Proyector y ordenador del profesor
Actividades en el aula	
Actividad 1: De una determinada función se han coleccionado los siguientes valores (tomado de Blázquez y Ortega, 2001):	

x	*f(x)*
0,87	3,59
1,02	2,41
1,005	2,7
0,9997	3,01
1,0001	3,0025
0,999995	2,9994
1,0000002	3,0001
0,999999996	2,999995
1,00000000341	2,9999999998
1,000000000007	3,000000000001

a) ¿A qué número a se aproxima x? Calcula los errores de cada aproximación.
b) ¿A qué número se aproximan sus imágenes *f(x)*? ¿Cuáles son los límites laterales de la función?
c) Elige una aproximación K de L.
d) Calcula el error que se comete con la aproximación anterior.
e) Busca en la tabla anterior valores de x cuyas imágenes mejoren la aproximación anterior.
f) Busca un entorno de a donde se encuentren los valores anteriores
g) Repite el proceso con distintas aproximaciones.

Actividad 2: Representa la siguiente función en GeoGebra (puedes utilizar el applet https://www.GeoGebra.org/m/v4bwxmmd)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & si \quad x < 0 \\ \frac{5}{x-2} & si \quad 0 \leq x < 4 \\ x - \frac{3}{2} & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

a) Indica el dominio de definición de la anterior función
b) Calcula $\lim_{x \to -8} f(x)$
c) Calcula $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ y deduce el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
d) Calcula $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ y deduce el valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$.
e) Calcula $\lim_{x \to 4^-} f(x)$, $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ y deduce el valor de $\lim_{x \to 4} f(x)$.
f) Relaciona lo anterior con la continuidad de la función y con las asíntotas.

Actividad 3. Presta atención a la explicación del profesor. Calcula el valor de los siguientes límites utilizando varios sistemas de representación (puedes utilizar el applet https://www.GeoGebra.org/m/v4bwxmmd). Relaciónalo con la continuidad y las asíntotas.

a) $\lim_{x \to 0} cos(x)$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2 - x - 2}$

c) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x+3}{x-3}$

d) $\lim_{x \to 1} f(x), \text{con } f(x) = \begin{cases} x^3 & si \;\; x < 1 \\ 3 & si \;\; x = 1 \\ 3x-2 & si \;\; x > 1 \end{cases}$

e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$

f) $\lim_{x \to 0} f(x), \text{con } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \;\; x < 0 \\ 2^x & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$

Evaluación de la sesión

El docente evaluará de acuerdo a la siguiente rúbrica:

Indicadores de evaluación	Sobresaliente (10)	Notable (7,5)	Aprobado (5)	Suspenso (0)
Participación en la actividad (x2)	El estudiante visionó los videos y participó activamente en la sesión con aportaciones de calidad	El estudiante visionó los videos y participó en la sesión, aunque presentó alguna dificultad	El estudiante visionó los vídeos, aunque no realizó ninguna aportación a la sesión	El estudiante no visionó los videos, no hizo las actividades o no participó en la sesión
Identificación del límite a través de tablas	El estudiante es capaz de calcular el límite a partir de una tabla y lo justifica con la definición	El estudiante intuye el límite y calcula los errores, aunque no lo asocia con el concepto de tendencia	El estudiante intuye el límite, aunque no sabe trabajar con aproximaciones	El estudiante no sabe calcular el límite con tablas
Identificación del límite a través de gráficas	El estudiante justifica la existencia o no existencia de límite a través de las tendencias (tomando cualquier aproximación)	El estudiante intuye la existencia o no de límite, aunque solo lo justifica con las aproximaciones en el dominio e imagen	El estudiante intuye la existencia o no de límite, aunque no lo justifica	El estudiante no sabe utilizar el sistema gráfico para calcular un límite
Relación entre los límites en el sistema numérico-tabular y gráfico	El estudiante vincula ambos sistemas y relaciona las aproximaciones por la derecha y	El estudiante relaciona los sistemas numérico-tabular y gráfico aunque no lo relaciona	El estudiante solo identifica el límite en uno de los dos sistemas	El estudiante no sabe relacionar la información tabular con la información gráfica

	por la izquierda en los dos	con los límites laterales		
Cálculo de límites laterales	El estudiante identifica los límites laterales en algún registro y lo relaciona con la existencia de límite en el punto	El estudiante identifica los límites laterales en algún registro aunque no lo relaciona con el límite en el punto	El estudiante es capaz de identificar alguno de los límites laterales	El estudiante no sabe determinar los límites laterales
Cálculo de límites a través de la expresión algebraica	El estudiante sustituye en la función y lo relaciona con otras representaciones	El estudiante sustituye en la función, aunque muestra problemas si aparece una indeterminación	El estudiante sustituye en la función aunque no logra encontrar el resultado	El estudiante no sabe calcular límites a partir de la expresión algebraica
Razonamiento matemático	El estudiante justifica todos o casi todos los resultados que obtiene de manera rigurosa	El estudiante justifica todos o casi todos de los resultados aunque sin rigor	El estudiante justifica alguno de los resultados que obtiene	El estudiante no justifica ninguno de los resultados que obtiene

I.4. Sesión 4

Sesión 4	
Contenidos a trabajar	Límite de una función en infinito. Definición dinámica intuitiva de límite en el infinito. Representación numérico-tabular. Representación gráfica. Relación entre ambas representaciones. Cálculo de límites en infinito. Relación con las asíntotas y ramas infinitas.
Competencias clave	CLing; CMatCie; CDig; CApr; CSoc; CEmpr;
Objetivos a cumplir	1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 17, 18
Actividades previas	Visualización de los siguientes vídeos: 1. Límite de una función en infinito. 2. Cálculo de límites en infinito a través de la gráfica y una tabla. Respuesta a las preguntas al final de los vídeos
Modo de trabajo	Se trabajará el concepto de límite en infinito con actividades planeadas por el profesor, en este caso con límites en infinito. Algunas situaciones estarán vinculadas al mundo real.

	Trabajo en el aula en grupos de dos personas, inicialmente formados a su gusto salvo que el profesor indique lo contrario. Se harán de una en una y se resolverán en común después de un tiempo razonable.
Temporalización	0'-10': solución de las dudas surgidas en la visualización 10'-30': actividades introductorias al límite en infinito 30'-50': cálculo de límites en infinito con la tabla y con GeoGebra
Recursos del aula	1. Calculadora 2. Ordenador o Tablet con conexión a Internet y con GeoGebra 3. Papel, lápiz y boli 4. Proyector y ordenador del profesor

Actividades en el aula

Actividad 1: En una empresa de reparación de coches, el número de coches que arregla el alumno en prácticas en función del tiempo viene dada por la expresión

$$f(t) = \frac{5t}{t+4}$$

donde t es el número de días que llevan trabajando y *f(t)* el número de coches que se reparan.

a) ¿Cuántos coches repara el primer día?
b) ¿Cuántos coches repara el sexto día?
c) ¿Cuántos coches repara el undécimo día?
d) ¿Qué día repara 4 coches?
e) ¿Algún día llega a reparar 6 coches? ¿Y 7?
f) ¿A qué número tenderá cuando lleve muchos días trabajando? Crea una tabla de valores y representa la función en GeoGebra para comprobarlo.

Actividad 2: Después de efectuar un estudio demográfico, los matemáticos han modelizado el número de habitantes que tendrá una cierta población en los próximos años. Esta viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{14500x + 7200}{2x+1}$$

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?
b) Supongamos que la función anterior es válida hasta el fin de los tiempos. ¿Crees que la función crecerá indefinidamente o que se estabilizaría? Justifica tu respuesta.
La siguiente tabla puede serte útil:

x	5	10	20	50	100	500	1000	10.000
f(x)								

c) Utiliza GeoGebra (en su versión clásica) para representar la función anterior. ¿Qué comportamiento aprecias?

d) ¿Cuál es el límite de la función anterior cuando x tiende a $+\infty$?

Actividad 3. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Si el límite de una función en infinito es 0, ¿la función nunca puede valer 0 en ningún punto?

b) Si el límite de una función en infinito es 0, ¿la función puede valer 0 en un número infinito de puntos?

c) Considera la función *f(x) = sen(x)/x*. Haz una tabla de valores para dicha función utilizando valores grandes y positivos, y otra con valores grandes y negativos. Representa también la función anterior en GeoGebra. ¿Cuál es su límite en $+\infty$ y en $-\infty$? ¿Cuántas veces corta la función al eje x? ¿Dirías que tiene una asíntota?

Actividad 4. Calcula el valor de los siguientes límites (razona su valor mediante una tabla de valores, y compruébalo gráficamente).

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^4$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 - x^2 + 1)$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - x^2 + 1)$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} sen(x)$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-2x}{2+x}$

Evaluación de la sesión
El docente evaluará de acuerdo a la siguiente rúbrica:

Indicadores de evaluación	Sobresaliente (10)	Notable (7,5)	Aprobado (5)	Suspenso (0)

Participación en la actividad (x2)	El estudiante visionó los videos y participó activamente en la sesión con aportaciones de calidad	El estudiante visionó los videos y participó en la sesión, aunque presentó alguna dificultad	El estudiante visionó los vídeos, aunque no realizó ninguna aportación a la sesión	El estudiante no visionó los videos, no hizo las actividades o no participó en la sesión
Fenomenología del límite en infinito	El estudiante identifica el límite en los problemas, justifica su valor e interpreta el significado del resultado	El estudiante identifica y calcula el límite en los problemas, aunque no justifica su valor o no interpreta su significado	El estudiante identifica el límite en los problemas, aunque no sabe qué hacer para resolverlo	El estudiante no identifica los límites en infinito en problemas
Representación numérico – tabular	El estudiante justifica la existencia o no existencia de límite a través de las tendencias (tomando cualquier aproximación)	El estudiante intuye la existencia o no de límite, aunque solo lo justifica con las aproximaciones en el dominio e imagen	El estudiante intuye la existencia o no de límite, aunque no lo justifica	El estudiante no sabe utilizar el sistema tabular para calcular un límite
Representación gráfica	El estudiante justifica la existencia o no existencia de límite a través de las tendencias (tomando cualquier aproximación)	El estudiante intuye la existencia o no de límite, aunque solo lo justifica con las aproximaciones en el dominio e imagen	El estudiante intuye la existencia o no de límite, aunque no lo justifica	El estudiante no sabe utilizar el sistema gráfico para calcular un límite
Relación entre representaciones numérico-tabular y gráfica	El estudiante identifica la tabla y la gráfica, y justifica el límite a través del concepto de tendencia	El estudiante identifica la tabla y la gráfica, y es capaz de ver las aproximaciones en ambos procesos	El estudiante es capaz de identificar la correspondencia entre abscisas y ordenadas en la tabla y en la gráfica	El estudiante no relaciona las representaciones numérico-tabular y gráfica
Cálculo de límites en infinito y menos infinito dados	El estudiante sabe encontrar el límite en más o menos infinito en	El estudiante utiliza algún sistema de representación	El estudiante intuye el límite aunque no lo justifica	El estudiante no sabe calcular el límite a partir de

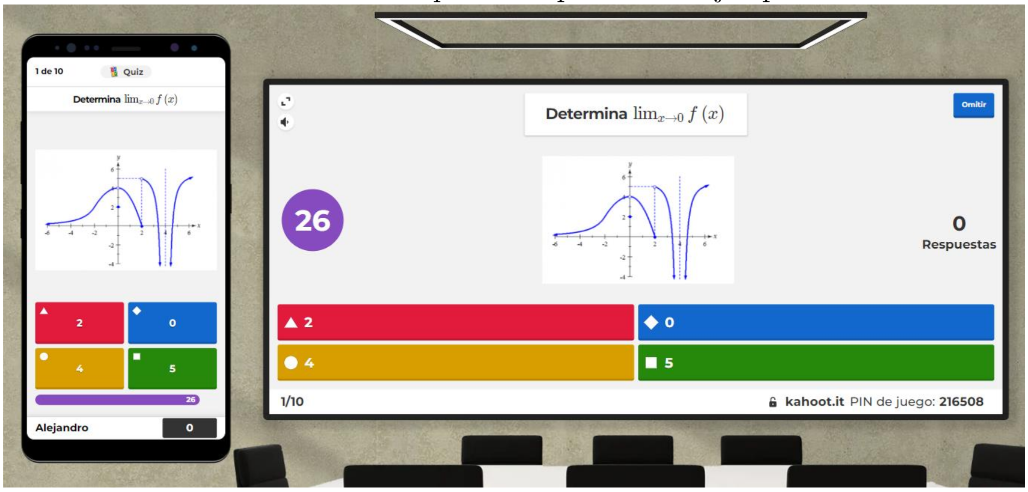
por su expresión algebraica	cualquier sistema de representación y además lo justifica	para calcular límites en más y menos infinito aunque no lo justifica		la expresión algebraica
Razonamiento matemático	El estudiante justifica todos o casi todos los resultados que obtiene de manera rigurosa	El estudiante justifica todos o casi todos de los resultados aunque sin rigor	El estudiante justifica alguno de los resultados que obtiene	El estudiante no justifica ninguno de los resultados que obtiene

I.5. Sesión 5

Sesión 5	
Contenidos a trabajar	Concepto de indeterminación. Órdenes de infinitud. Reconocimiento de las indeterminaciones ∞/∞, $0/0$ y $k/0$ y cálculo de límites sencillos donde aparecen.
Competencias clave	CLing; CMatCie; CDig; CApr; CSoc; CEmpr;
Objetivos a cumplir	1, 2, 8, 9, 10, 13, 14, 17, 18
Actividades previas	Visualización de los siguientes vídeos: 1. Concepto de infinito 2 Concepto de indeterminación. 3. Resolución de indeterminaciones ($k/0$) 4. Resolución de indeterminaciones ($0/0$) 5. Resolución de indeterminaciones (∞/∞) Respuesta a las preguntas al final de los vídeos
Modo de trabajo	Trabajaremos la identificación de indeterminaciones a partir de la representación algebraica y veremos algún método para solucionarlas. Trabajo en el aula en grupos de dos personas, inicialmente formados a su gusto salvo que el profesor indique lo contrario. Se harán de una en una y se resolverán en común después de un tiempo razonable.
Temporalización	0'-10': solución de las dudas surgidas en la visualización 10'-30': actividades sobre el cálculo de límites 30'-50': cálculo de límites sencillos con GeoGebra
Recursos del aula	1. Calculadora 2. Ordenador o Tablet con conexión a Internet y con GeoGebra 3. Papel, lápiz y boli 4. Proyector y ordenador del profesor

Actividades en el aula

Actividad 1: (introducida a través de Kahoot!). Se propondrá una gráfica de una función, y los estudiantes deberán identificar los límites que se les pidan. Por ejemplo:



Actividad 2: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+4}{x^2}$

Actividad 3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

Actividad 4. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} 2^{-x}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^{-x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x)$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{ln(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{3x}}{4x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{15}+2x^7}{2^x}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{2^x}$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{ln(x^3)}{e^x}$

Actividad 5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^5 - 3x^2}{x^4 - x^3}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^5 - 3x^2}{x^7 - x^3}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^5 - 3x^2}{3x^5 - x^3}$

Evaluación de la sesión

El docente evaluará de acuerdo a la siguiente rúbrica:

Indicadores de evaluación	Sobresaliente (10)	Notable (7,5)	Aprobado (5)	Suspenso (0)
Participación en la actividad (x2)	El estudiante visionó los videos y participó activamente en la sesión con aportaciones de calidad	El estudiante visionó los videos y participó en la sesión, aunque presentó alguna dificultad	El estudiante visionó los vídeos, aunque no realizó ninguna aportación a la sesión	El estudiante no visionó los videos, no hizo las actividades o no participó en la sesión
Indeterminación $k/0$	El estudiante identifica la indeterminación y calcula el valor del límite sin ninguna dificultad	El estudiante identifica la indeterminación y calcula los límites laterales, aunque no encuentra el resultado	El estudiante identifica la indeterminación, aunque no la resuelve	El estudiante no identifica la indeterminación
Indeterminación $0/0$	El estudiante identifica la indeterminación y calcula el valor del límite sin ninguna dificultad	El estudiante identifica la indeterminación y factoriza, aunque no llega al resultado final	El estudiante identifica la indeterminación, aunque no la resuelve	El estudiante no identifica la indeterminación
Órdenes de infinitud	El estudiante aplica los órdenes de infinitud sin ninguna dificultad	El estudiante sabe los órdenes de infinitud e intenta aplicarlos, aunque con algún error	El estudiante sabe los órdenes de infinitud, aunque no como aplicarlos	El estudiante no sabe utilizar los órdenes de infinitud
Indeterminación ∞/∞	El estudiante identifica la indeterminación y calcula el valor	El estudiante identifica la indeterminación y encuentra	El estudiante identifica la indeterminación,	El estudiante no identifica la indeterminación

	del límite sin ninguna dificultad	funciones equivalentes, aunque no encuentra el resultado final	aunque no la resuelve	
Razonamiento matemático	El estudiante justifica todos o casi todos los resultados que obtiene de manera rigurosa	El estudiante justifica todos o casi todos de los resultados aunque sin rigor	El estudiante justifica alguno de los resultados que obtiene	El estudiante no justifica ninguno de los resultados que obtiene

I.6. Sesión 6

Sesión 6	
Contenidos a trabajar	Aplicación del límite a la resolución de problemas y ejercicios.
Competencias clave	CLing; CMatCie; CDig; CApr; CSoc; CEmpr; CCult;
Objetivos a cumplir	2, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18
Actividades previas	No hay
Modo de trabajo	Trabajamos el límite a través de problemas y ejercicios. Trabajo en el aula en grupos de dos personas, inicialmente formados a su gusto salvo que el profesor indique lo contrario. Se harán de una en una y se resolverán en común después de un tiempo razonable.
Temporalización	Clase completa dedicada a la resolución de ejercicios y problemas
Recursos del aula	1. Calculadora 2. Ordenador o Tablet con conexión a Internet y con GeoGebra 3. Papel, lápiz y boli 4. Proyector y ordenador del profesor
Actividades en el aula	

Actividad 1: Representa una función *f(x)* que verifique las siguientes propiedades:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, f(-1) = 0; \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty; f(3) = -1; \lim_{x\to\infty} f(x) = 2.$$

Actividad 2: Representa una función *f(x)* que verifique las siguientes propiedades:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0; \lim_{x\to 1} f(x) = 0; f(1) = 2; \lim_{x\to\infty} f(x) = 0;$$

(aquí se destacará la posibilidad de tomar una función oscilante, cuyo límite en infinito sea 0 pero que corte infinitas veces al eje x)

Actividad 3: Representa una función *f(x)* que verifique las siguientes propiedades:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0; f(1) = 2; \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2; \lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

¿Qué límite tiene la función anterior en $x = 1$?

Actividad 4. Calcula los siguientes límites utilizando las representaciones gráfica y numérico-tabular. Justifica su valor.

a) $\lim_{x \to -1} f(x), \text{con } f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 1 \\ 2x & si \quad x > 1 \end{cases}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{2x^3}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{2x^3}$

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{ln(x)}{x-1}$

e) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

Actividad 5. Calcula los límites anteriores con técnicas algebraicas.

Actividad 6. La cantidad de una droga en la corriente sanguínea t horas después de inyectada intramuscularmente está dada por la función

$$f(t) = \frac{10t}{t^2+1}$$

Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en sangre?

Evaluación de la sesión

El docente evaluará de acuerdo a la siguiente rúbrica:

Indicadores de evaluación	Sobresaliente (10)	Notable (7,5)	Aprobado (5)	Suspenso (0)
Participación en la actividad (x2)	El estudiante realizó todas las actividades y participó activamente	El estudiante realizó las actividades aunque participó mínimamente	El estudiante tuvo problemas para realizar los ejercicios de la sesión	El estudiante no hizo las actividades o no participó en la sesión
Creación de funciones con	El estudiante representa una	El estudiante interpreta casi	El estudiante solamente	El estudiante no sabe crear

condiciones dadas	gráfica que cumple las condiciones pedidas	todas las condiciones, aunque presenta algún error	interpreta una o dos condiciones	ninguna función dadas sus características
Relación entre los límites en el sistema numérico-tabular y gráfico	El estudiante vincula ambos sistemas y relaciona las aproximaciones por la derecha y por la izquierda en los dos	El estudiante relaciona los sistemas numérico-tabular y gráfico aunque no lo relaciona con los límites laterales	El estudiante solo identifica el límite en uno de los dos sistemas	El estudiante no sabe relacionar la información tabular con la información gráfica
Uso del concepto de límite como aproximación óptima	El estudiante sabe encontrar un entorno del punto a cuyas imágenes mejoren cualquier aproximación K fijada	El estudiante fija una aproximación K al límite e identifica los procesos de aproximación, aunque no encuentra el entorno de a	El estudiante identifica los procesos de aproximación en el dominio y en la imagen	El estudiante no ve ningún proceso de aproximación
Indeterminaciones	El estudiante resuelve todos los límites en los que aparece alguna indeterminación	El estudiante detecta la indeterminación aunque comete algún error en algún momento	El estudiante detecta la indeterminación pero tiene problemas para resolverla	El estudiante no sabe detectar ninguna indeterminación
Razonamiento matemático	El estudiante justifica todos o casi todos los resultados que obtiene de manera rigurosa	El estudiante justifica todos o casi todos de los resultados aunque sin rigor	El estudiante justifica alguno de los resultados que obtiene	El estudiante no justifica ninguno de los resultados que obtiene

I.7. Sesión 7

Sesión 7	
Contenidos a trabajar	Otros procesos e ideas relacionados con el concepto de límite.
Competencias clave	CLing; CMatCie; CDig; CApr; CSoc; CEmpr; CCult;
Objetivos a cumplir	2, 9, 11, 13, 16, 17
Actividades previas	No hay

Modo de trabajo	Los estudiantes deberán investigar por parejas sobre alguno de los temas que se sugieren en relación a procesos en los que interviene el límite.
Temporalización	Clase completa dedicada a la búsqueda
Recursos del aula	1. Ordenador o Tablet con conexión a Internet y con GeoGebra 2. Papel, lápiz y boli 3. Proyector y ordenador del profesor
Actividades en el aula	
Al inicio de la clase se sortearán los temas que se incluyen en el Anexo II. Cada pareja deberá realizar un pequeño trabajo investigando sobre el tema que le haya tocado, con una extensión máxima de dos caras (realizado en dos folios distintos). Podrán ser más páginas si se incluyen dibujos o ilustraciones, y podrán seguir con él (si lo desean) fuera del aula. Después se compartirán con el resto de la clase a través de Teams.	
Evaluación de la sesión	
Se evaluará de acuerdo a una rúbrica que aparece recogida en el anexo II.	

I.8. Sesión 8

Sesión 8	
Contenidos a trabajar	Prueba final
Actividades previas	No hay
Modo de trabajo	El examen se desarrollará individualmente y en silencio. No se utilizará el ordenador ni GeoGebra, el profesor ya dará los datos necesarios en la prueba.
Temporalización	50 minutos más una parte del recreo (si es necesario)
Recursos del aula	1. Calculadora 2. Papel, lápiz y boli

Anexo II: Trabajos de indagación

En la séptima sesión, los alumnos (por parejas o grupos) deberán buscar información sobre alguno de los siguientes temas relacionados con el concepto de límite (se repartirán sacando un papel de un bote):

1. **Método de exhausción de Eudoxo-Arquímedes: aproximación a la circunferencia por medio de polígonos. Cálculo del número π.** (4 personas)

Información: https://www.GeoGebra.org/m/jKwe7WUZ (applet en GeoGebra sobre el proceso de aproximación)

2. **Historia del número *e*. Euler. Relación con los intereses bancarios.** (4 personas)

   Información: https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU (¿Qué es el número *e*? – vídeo de YouTube del canal Derivando)

3. **Cálculo del área de un círculo: método de los infinitésimos de Kepler**. (2 personas)

   Información: http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/kepler/keplercirculo.html (explicación de cómo se puede descomponer un círculo en triángulos mixtilíneos)

4. **Hotel infinito de Hilbert. Tratamiento del infinito actual o potencial.** (2 personas)

   Información: https://www.youtube.com/watch?v=XB-x9m6_rsg (Vídeo de YouTube sobre el problema planteado por Hilbert y cómo resolverlo)

5. **Desintegración radioactiva: relación con la función exponencial y con el concepto de límite** (2 personas)

   Información: http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/expolog/radio.html (explicación de cómo se produce el proceso de desintegración)

6. **El concepto de integral: aproximación del área bajo una curva mediante rectángulos** (2 personas)

   Información: http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/integral/integral.html (explicación de cómo se descompone el área bajo una curva en rectángulos)

7. **Fractales: triángulo de Sierpinski y alfombra de Sierpinski** (2 personas)

   Información: http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/geometria_fractal/proyectos/movimiento_browniano/sierpinski.htm (cómo se construyen los triángulos y la alfombra). También habrá que buscar qué es un fractal y cómo se relacionan con los límites.

8. **Fractales: copo de nieve de Koch y fractales con papel** (2 personas)

   Información: http://i3campus.co/CONTENIDOS/wikipedia/content/a/copo_de_nieve_de_koch.html (cómo se construye el copo de nieve). También habrá que buscar qué es un fractal y cómo se relacionan con los límites.

Rúbrica de evaluación:

Indicadores de evaluación	Sobresaliente (10)	Notable (7,5)	Aprobado (5)	Suspenso (0)
Participación en la actividad	El estudiante participó en la actividad de manera activa	El estudiante participó en la actividad, pero no siempre de manera activa	El estudiante participó en la actividad solo durante algún tiempo	El estudiante no participó en la actividad
Presentación	La presentación es muy buena y el trabajo está ordenado.	La presentación es buena, aunque existe algo de desorganización en cuanto a contenidos	La presentación es correcta, aunque no hay un orden claro	El trabajo está mal estructurado y es difícil de entender
Lenguaje y términos matemáticos	Utiliza un lenguaje matemático propio del nivel y con muy pocos errores o ninguno	Utiliza símbolos y términos matemáticos, aunque presenta algunos errores	El uso de símbolos y términos matemáticos es muy escaso	No utiliza simbología o expresiones matemáticas o lo hace de manera incorrecta
Desarrollo del trabajo	Todos los estudiantes trabajan por igual y realizan aportaciones de calidad	Los estudiantes trabajan por igual, aunque la calidad del trabajo es baja	La pareja/grupo desarrolla el trabajo, aunque está descompensado	No hay ninguna planificación sobre cómo trabajar
Relación con el límite	La relación del trabajo con el límite aparece de manera explícita y justificada	La relación con el límite aparece de manera explícita, aunque no se justifica o vincula con elementos matemáticos	Se aprecia alguna relación, aunque no de manera explicita	No se aprecia ninguna relación en el trabajo con el límite
Razonamiento matemático	Los estudiantes justifican todos o casi todos los resultados que obtiene de manera rigurosa	Los estudiantes justifican todos o casi todos de los resultados aunque sin rigor	Los estudiantes justifican alguno de los resultados que obtiene	Los estudiantes no justifican ninguno de los resultados que obtiene

Anexo III: Ejemplo de prueba final de evaluación

Este es un ejemplo de la prueba final que se llevaría a cabo para evaluar el nivel de aprendizaje de los alumnos con la propuesta didáctica aquí elaborada:

TOTAL DEL EXAMEN: 7 puntos

Actividad 1: responde a las siguientes cuestiones:

a) Representa una función f cuyos límites laterales en un punto a sean finitos y distintos. (0,25 puntos)

b) Representa una función g cuyos límites laterales en un punto a sean iguales y valgan 2 y cuya imagen en ese punto sea igual a 4 (es decir, $f(a) = 4$). (0,25 puntos)

c) Representa una función con las siguientes características: (0,5 puntos)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty; f(2) = 4;$$
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2; \lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

Actividad 2:

a) Explica cuál es la diferencia entre que una sucesión *se aproxima* a un número y una sucesión *tiende* a un número. Ilústralo con un sencillo ejemplo. (0,75 puntos).

b) Se han calculado los primeros 50 términos de la sucesión siguiente:

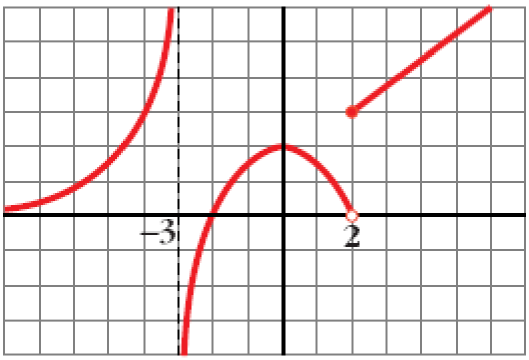
n	x_n
1	-2
2	1
3	-1
4	0
5	0.5
6	0.75
7	0.85
8	0.91
...	...
15	0.9781
...	...
20	0.995432
21	0.9992
...	...
30	0.99999932
...	...
50	0.9999999998

c) ¿La sucesión anterior se aproxima a -1? ¿Y a 0? ¿Y a 1? ¿Tiende a alguno de los valores anteriores? Justifica tu respuesta. (0,75 puntos)

d) Toma como aproximación al límite el valor $K = 0.997$. Calcula el error en la aproximación al límite. (0.25 puntos)

e) ¿Puedes encontrar algún valor de n a partir del cual los términos de la sucesión sean siempre mejores aproximaciones del límite que K? Indica cual. ¿Qué significa esto? (0.25 puntos)

Actividad 3: Determina la existencia o no existencia de los siguientes límites y encuentra su valor (0,2 puntos cada apartado = 1 punto):



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Actividad 4: De una función se conoce la siguiente tabla de valores:

x	3	2.5	2.1	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.001	2.0001
$f(x)$	6	3.25	1.41	1.2025	1.1616	1.1209	1.0804	1.0401	1.004001	1.00040001

x	1	1.5	1.7	1.9	1.95	1.97	1.98	1.99	1.999	1.9999
$f(x)$	−2	−0.75	−0.11	0.61	0.8095	0.8809	0.9204	0.9601	0.996001	0.99960001

a) ¿Hacia qué valor tienden las abscisas? ¿Y las ordenadas? Completa los siguientes huecos (0,25 puntos):

$$\lim_{x\to\ldots.} f(x) = \ldots\ldots$$

b) Toma el valor $K = 0.95$ como aproximación al límite. Calcula el error de aproximación. ¿Puedes encontrar en la tabla un entorno de x cuyas imágenes mejoren a K como aproximación? Indica cómo lo harías y qué entorno es el que lo cumple. (0,5 puntos)

Actividad 5: Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 1}{(x-3)^2}$ (0,75 puntos)

b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$ (0,75 puntos)

Actividad 6: El número de peces de una piscifactoría evoluciona según la función

$$f(t) = 50 + \frac{100t^2}{t^2 + 1}$$

donde t es el número de días que transcurren. Averigua si el crecimiento es indefinido o si tiende a estabilizarse en el futuro (en tal caso, calcula el valor alrededor del cual se estabiliza) (0,75 puntos)