



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**¿Qué es una Teoría Gauge?**

*Autor: Luis Sánchez-Tejerina San José*

*Tutor/es: Mariano Santander*



# ¿Qué es una Teoría Gauge?

Luis Sánchez-Tejerina San José

Trabajo Fin de Grado. Julio 2014

## INDICE

Abstract.....	3
Resumen.....	3
1. Introducción.....	5
2. Ambigüedad de los potenciales electromagnéticos en física clásica.....	7
3. Ambigüedad de los potenciales en mecánica cuántica.....	13
4. Punto de Vista Moderno.....	23
5. Generalización. Teorías de Yang-Mills.....	28
6. Conclusiones.....	35
Fuentes.....	37
Referencias.....	38



## Abstract

In this essay we will try to explain what is a gauge theory. In order to do that, we will approach historically the concept of gauge invariance, showing how and why this concept appeared in classical physics (more precisely, Maxwell electrodynamics). After that, we will see how to take into account this concept in Quantum Mechanics, where we use a Hamiltonian formalism, and due to the dependence of the Hamiltonian on the potential, the wave function will depend on the gauge chosen. The description of electromagnetism according to Quantum Mechanics provides the clue: both the electromagnetic potential and the wave function share ambiguity, but the ambiguity disappears completely from the observable results of the theory. This ambiguity relates to the phase of the wave function, and this introduces a (previously hidden) local symmetry in the theory.

This study lets us twist the argument, and take the local symmetry as the starting point of the issue, which is the present view of it, showing that electrodynamics is associated to the symmetry group  $U(1)$ . Finally we will generalize the methodology to other symmetry groups, particularly, non-abelian groups, and will apply it to the groups  $SU(2)$  and  $SU(3)$ , which sets the basis of the present description of weak and strong interactions.

## Resumen

El objetivo de este trabajo es dar una idea de la base de las teorías gauge a partir de una visión histórica de su aparición. Es por ello que primero haremos un breve repaso a la historia del electromagnetismo, ya que es en esta teoría donde primero va a aparecer el concepto de invarianza gauge, aunque al principio de manera subterránea, lo que dará lugar a distintas expresiones para la fuerza entre dos elementos diferenciales de corriente. Es con las ecuaciones de Maxwell, como veremos, que se puede entender fácilmente esta característica de la teoría.

En el siguiente apartado presentaremos las dificultades que plantea la no univocidad de los potenciales en mecánica cuántica, y también como se solucionan, introduciendo el concepto de acoplamiento mínimo y la derivada covariante. Además aprovecharemos para comentar el origen del término gauge para designar estas teorías. Estos dos primeros apartados, con la introducción, nos ocuparán gran parte del trabajo.

La última parte del mismo tendrá como objetivo presentar la visión actual de las teorías gauge, que conceptualmente resulta de “*dar la vuelta*” a los argumentos dados en el apartado tres, esto es, tomar la simetría local del grupo en estudio como la propiedad fundamental de la que partir, y deducir a partir de ella la existencia de unos potenciales, y la ley de transformación de los mismos. Primero lo haremos para obtener a partir de la simetría  $U(1)$  la electrodinámica, y en el siguiente apartado generalizaremos el método a otros grupos de simetría. Finalmente indicaremos cómo aplicar lo dicho a los grupos  $SU(2)$  y  $SU(3)$  lo que, según los modelos actualmente aceptados, describe correctamente las interacciones débiles y fuertes. También comentaremos brevemente algunos aspectos particulares de estas teorías.

# 1. Introducción

Las teorías gauge constituyen la base para la construcción de las teorías de interacción modernas. Se estudian en el contexto de la teoría cuántica de campos, por lo que la descripción de la materia será mediante unos campos, debidamente cuantizados. Las teorías gauge constituyen el marco dentro del cual se han desarrollado, con enorme éxito, las descripciones que hoy tenemos de las interacciones electromagnéticas y débiles (unificándolas en una única interacción electrodébil) y de las interacciones fuertes.

Para explicar la interacción entre dos sistemas materiales las teorías gauge conducen a la idea de que entre estos dos sistemas se produce un intercambio de “portadores” de la interacción. Estos portadores van a ser los cuantos de un cierto campo. La información de este campo la podremos expresar mediante un potencial, el cual no va a estar unívocamente determinado, sino que va a tener cierta ambigüedad (tanto el campo como el potencial van a tener cuatro componentes, es más, dependiendo de la interacción estudiada, podrán tener varios índices adicionales, por lo que podremos verlo como varios campos y potenciales). Esta libertad a la hora de escoger los potenciales va a estar relacionada con la existencia de una simetría *local* en la descripción del campo de materia.

El argumento puede verse en dos direcciones. La histórica, que es el argumento hecho en el párrafo anterior, es decir, la existencia de una ambigüedad en los potenciales va a determinar la aparición de una simetría local en la función de onda. Y la actual, en la cual la existencia de una simetría *local* en el campo de materia se acepta como hipótesis básica, de la cual se deriva de manera necesaria la existencia de unos potenciales, de los que derivarán los campos, que interactuarán con la materia mediante el intercambio de portadores, i.e., de cuantos del campo (de interacción). Por tanto la interacción entre la materia va a ser consecuencia, en última instancia, de la existencia de una simetría *local* en la función de onda.

El objetivo del presente trabajo no va a ser (ni tampoco sería posible) una introducción general a las teorías gauge (lo que requeriría un trabajo varias veces más extenso), sino una exposición que describa los precedentes históricos de las mismas, y que sirva como excusa para introducir los conceptos asociados a estas. Para ello haremos una descripción de los orígenes del electromagnetismo, ya que su origen es también el origen de las teorías gauge (esta interacción se puede describir como una teoría gauge en el que los potenciales están asociados al grupo de simetría  $U(1)$ ,

como veremos más adelante). Pasaremos más tarde a describir cómo se incluye la no univocidad de los potenciales en el contexto de la teoría cuántica. Finalmente generalizaremos las ideas a otros grupos de simetría. Haciendo esto habremos introducido los conceptos fundamentales de las teorías gauge, permitiendo ahora un estudio más detallado del tema, así como de la teoría matemática que lo sustenta (principalmente teoría de grupos).

## 2. Ambigüedad de los potenciales electromagnéticos en física clásica

Desde mediados del siglo XVIII (Ley de Coulomb, 1785, e investigaciones previas) y durante el siglo XIX se desarrolló el electro/magnetismo. En 1820 el experimento de Oersted puso de manifiesto cierta relación entre ambos fenómenos: una corriente eléctrica modifica la orientación de una aguja magnetizada (imán). Este hecho interesó mucho a Ampère, que se puso a trabajar sobre ello, llegando a una interpretación muy atrevida del origen del magnetismo. Su hipótesis consistía en que las sustancias que presentan magnetismo lo presentan debido a la existencia de corrientes eléctricas internas. Esto da inicio a lo que llamó electrodinámica, es decir, el estudio de las fuerzas que actúan entre dos corrientes eléctricas. En este estudio Ampère obtiene una expresión para la fuerza que aparece entre dos corrientes, aunque más adelante debe corregirla a la vista de los nuevos experimentos (de Faraday). Otros autores también estudiaron el tema obteniendo expresiones para la fuerza que aparece entre dos circuitos. La forma diferencial de las expresiones obtenidas por varios autores, que nos daría la fuerza entre elementos diferenciales del circuito, tenían aspectos muy diferentes, hecho que no se podía entender en aquel momento.

Faraday también mostró un vivo interés por estos fenómenos, pero sus métodos diferían bastante de los de Ampère, cuya metodología estaba dominada por la visión de los clásicos franceses, siendo por tanto muy matemática y axiomática. Faraday por su parte no sabía matemáticas por lo que buscaba una unidad en su teoría dada por la conexión entre los experimentos. Una de las principales ventajas de la forma de trabajar de Faraday es que permitía gran flexibilidad a la hora de modificar experimentos previos e inventar otros nuevos, permitiendo con ello el descubrimiento de nuevos efectos no previstos, a diferencia de los experimentos de Ampère, mucho más rígidos, orientados a verificar sus axiomas. Esta etapa establece la base experimental de esta nueva ciencia, la electrodinámica.

Tras la interpretación de Ampère del magnetismo como producto de corrientes internas en los materiales, Faraday pensó que sería posible entonces provocar corrientes eléctricas utilizando “*poderes*” magnéticos (que es como llamaba a las fuentes de la fuerza magnética, sin comentar la naturaleza profunda de las mismas). Los primeros experimentos en este terreno dieron resultado nulo, sin embargo, después de realizar otra serie de experimentos más sensibles, consistente en dos bobinados en un núcleo de hierro, uno para magnetizar el mismo, y el otro en el que se debería observar corriente según su hipótesis, observó que efectivamente se inducía una corriente,

pero solo al conectar y desconectar el primer circuito. También en este periodo empezó a desarrollar el concepto de líneas de campo como unas líneas imaginarias que unían los “*poderes*” magnéticos, aunque la existencia real de estas líneas fue un tema que Faraday no defendió hasta bastantes años más tarde. Más tarde introduciría el concepto de campo magnético como el espacio comprendido entre dos “*poderes*” magnéticos.

Otro foco importante de desarrollo de lo que hoy llamamos electromagnetismo en esta época fue Alemania. Tuvo gran importancia para esta ciencia el trabajo de Weber y Gauss, quienes llevaron la exactitud y precisión de la metodología gaussiana a esta rama. Weber verifica experimentalmente la ley de Ampère y “*generaliza*” la ley de Coulomb de la fuerza entre cargas, recuperando esta para el caso de cargas en reposo, y recuperando la de Ampère en el caso más general. Para ello supuso que la corriente eléctrica era un flujo de partículas cargadas en movimiento, lo cual no era la visión dominante en aquella época, resultando por tanto una hipótesis novedosa.

También desde Alemania trabajó en este campo Neumann, que hace del concepto de potencial (ánalogo al potencial gravitatorio de la teoría newtoniana) base y fundamento de su teoría del electromagnetismo, siendo la fuerza electromotriz la variación del potencial dado por su teoría. Sin embargo se dió cuenta de que, si se tomaban elementos del circuito por separado, la fuerza electromotriz no se podía obtener solamente como la integral temporal de la variación del potencial.

Weber se dió cuenta de que las fórmulas obtenidas con su descripción coincidían con las correspondientes de Neumann para circuitos cerrados, pero aparecían discrepancias en el caso de que el circuito presentase contactos deslizantes. Fue necesario que Neumann incorporase algunas correcciones a su modelo para describir correctamente estas situaciones. Por estos años Faraday demostraba la relación de la luz con el magnetismo, al cambiar la polarización de la misma haciéndola atravesar un medio magnetizado.

Partiendo de la ley de Weber, Kirchhoff estudia el movimiento de la electricidad en conductores, llegando a una ecuación de ondas amortiguada que se propaga a una velocidad próxima a la de la luz en el vacío. Además también obtiene la expresión de la fuerza electromotriz, que en notación moderna resulta

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1)$$

lo que constituye la primera aparición del potencial vector (aunque el concepto lo introdujo más tarde Thomson).

No obstante los mayores avances se producen en Inglaterra. Thomson es el que señala la equivalencia entre la teoría de las líneas de fuerza imaginada por Faraday y la teoría del potencial. Su punto de partida fue el trabajo de Fourier sobre la teoría del calor, y uno de sus méritos es el desarrollo del electromagnetismo gracias al uso de analogías con la misma. Desarrolla así un formalismo para el electromagnetismo obteniendo expresiones aplicables tanto a la teoría de Faraday y sus líneas de campo, como a la teoría de los dos fluidos eléctricos imperante en la época. Además da una definición energética del potencial (a través del trabajo), e introduce el concepto de potencial vector.

Es, sin embargo, Maxwell el mayor responsable del electromagnetismo clásico. Introduce el concepto de superficies equipotenciales y traduce al lenguaje matemático las leyes de Faraday de la inducción a partir de las líneas de fuerza. Haciendo uso de las evidencias experimentales obtenidas hasta el momento, y haciendo de las líneas de fuerza y los campos, conceptos introducidos por Faraday, centrales en su descripción, desarrolla una teoría del electromagnetismo con una fuerte influencia de la teoría de Faraday, pero diferente a ella, obteniendo las ecuaciones que constituyen la base de la electrodinámica clásica que manejamos hoy en día (aunque conceptualmente su teoría es muy diferente de la actual).

Para completar esta breve descripción del desarrollo del electromagnetismo faltaría añadir la introducción de los potenciales retardados por parte de Lorenz, basados en la suposición de que estos viajan a la velocidad de la luz, y no son por tanto instantáneos. Estos potenciales retardados llevan el nombre de Liénard-Wiechert porque fueron estos los que, de manera independiente, obtuvieron una expresión para los mismos para partículas cargadas en movimiento. Ahora sabemos que esta suposición es correcta en el gauge de Lorenz, pero como vamos a ver, los potenciales no tienen realidad física, por lo que puede haber varias descripciones distintas de los mismos, con la única condición de que generen los mismos campos, y que por no tener realidad física no hay restricciones en la propagación de los mismos. De hecho, en el gauge de Coulomb el potencial escalar se propaga de forma instantánea. También faltaría añadir la extensión que hace Helmholtz del concepto de potencial a corrientes abiertas. Esta teoría del potencial de Helmholtz conduce a los mismos resultados que las anteriores para corrientes cerradas, pero presenta discrepancias en otros casos.

Durante este desarrollo, especialmente en las expresiones iniciales “*tipo Ampère*”, se obtuvieron distintas expresiones para la fuerza que aparece entre dos segmentos diferenciales conductores por los que circula una corriente, lo cual resultaba sorprendente en aquella época. Ahora sabemos que las diferentes expresiones para segmentos diferenciales del conductor se deben a que se puede añadir una función arbitraria a la expresión que da la fuerza diferencial,  $dF$ , con la única condición de que esta se anule al integrar a todo el circuito, y es que, como quien genera esa fuerza es un circuito cerrado, la fuerza que aparece se debe a todo el circuito, y no se pueden aislar partes del mismo, por lo que todas estas expresiones conducían finalmente a los mismos resultados para situaciones físicas reales.

Desde el punto de vista moderno podemos ver que cada una de estas expresiones dadas por los anteriormente mencionados, conducen a distintas expresiones del potencial vector (aunque fue Kirchhoff el primero en escribirlo, para los casos anteriores se dedujo más tarde a partir de sus expresiones para las fuerzas). Por tanto lo que sucede es que distintas expresiones del potencial vector  $\mathbf{A}$  conducen a una fuerza neta, entre corrientes que realmente dependen del circuito completo.

Esto se puede entender fácilmente visto desde el punto de vista moderno, conociendo ya las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \mathbf{B} &= 0; & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

Sabemos que  $\mathbf{B}$  puede obtenerse como el rotacional de una cierta función que llamamos potencial vector  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3)$$

Utilizando este resultado en la ecuación de Maxwell que nos liga el rotacional de  $\mathbf{E}$  con la variación temporal de  $\mathbf{B}$  obtenemos

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4)$$

y por tanto la función entre paréntesis deriva de un potencial, de forma que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \quad (5)$$

Finalmente podemos escribir

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (6)$$

Que, teniendo en cuenta las propiedades matemáticas del gradiente y del rotacional, y dados unos potenciales que nos originen los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , podemos ver que cualquier potencial que se relacione con los antiguos según

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}; \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\Lambda \quad (7)$$

nos llevará a los mismos campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , donde  $\Lambda$  es una función **arbitraria**.

Es a esto a lo que nos referimos cuando decimos que los potenciales son ambiguos, o que no están unívocamente determinados. Dados unos potenciales que generen los campos de la situación física que tengamos, tenemos libertad para cambiar estos potenciales eligiendo una función **arbitraria**  $\Lambda$  de tal manera que sumando su variación temporal al potencial escalar y su vector gradiente al potencial vector obtendremos unos nuevos potenciales que dan lugar a los mismos campos, es decir, que describen exactamente la misma situación física. Los potenciales no son observables, por lo que su no univocidad en una situación física determinada no plantea ningún problema conceptual, ni ningún problema experimental, al no poder medirlos.

En el formalismo Hamiltoniano de la mecánica clásica (MC) esto se traduce de la siguiente manera. El Hamiltoniano de una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  se escribe como

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - q\Phi \quad (8)$$

donde hemos utilizado el acoplamiento mínimo, es decir, la sustitución de  $\mathbf{p}$  por  $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$  (sustitución del momento canónico,  $\mathbf{p}$ , por el mecánico,  $\boldsymbol{\pi}$ ). Todas las magnitudes físicas pueden obtenerse en este formalismo a partir de las variables dinámicas fundamentales,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  y  $t$ . La evolución del sistema vendrá gobernada por las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \nabla_{\mathbf{p}}H(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t) \\ \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) &= -\nabla_{\mathbf{r}}H(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t) \end{aligned} \quad (9)$$

Por su parte las ecuaciones de Newton dependen únicamente de los campos, que son invariantes, y por ello también la posición y el momento mecánico  $\boldsymbol{\pi} = m\mathbf{v} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ , pero no el momento canónico  $\mathbf{p}$ , obteniendo la relación

$$\mathbf{p}' - q\mathbf{A}' = \mathbf{p} - q\mathbf{A} \quad (10)$$

Donde las primas indican el cambio de potenciales. Entonces es fácil ver que el momento canónico cambia al cambiar de potenciales de la forma

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + q\nabla\Lambda \quad (11)$$

Al igual que con los campos y potenciales, la magnitud física que podemos medir es el momento mecánico, no el canónico, por lo que la ambigüedad de los potenciales no supone ningún problema.

### 3. Ambigüedad de los potenciales en mecánica cuántica.

Como hemos visto en el apartado anterior existe cierta libertad a la hora de escoger los potenciales electromagnéticos, pero al no ser estas magnitudes físicamente observables no hay ninguna indeterminación en ninguna medida: el cambio de potenciales no nos modifica los campos, los cuales sí son observables. Sin embargo en Mecánica Cuántica (MQ) la correcta descripción de los fenómenos físicos es a través de los potenciales, con lo que se plantea la pregunta de ver cómo se refleja en las ecuaciones básicas de la MQ la exigencia de que el cambio de gauge en los potenciales no modifique los observables que utilizaremos para la descripción de nuestro sistema físico (habitualmente el Hamiltoniano). Esto va a hacer necesaria una revisión de algunos conceptos, a saber, la densidad de probabilidad y su corriente.

En efecto, ahora utilizar un potencial u otro modifica la ecuación a resolver y con ello las funciones de onda cambian. En esta sección veremos cómo se solucionó este problema por parte de Fock en 1926, demostrando que la densidad de probabilidad de la partícula no cambia (en el caso no relativista), y viendo que la expresión correcta de la densidad de corriente conduce a los mismos resultados con un gauge que con otro. En el caso relativista la expresión correcta del tetravector probabilidad (componente temporal la densidad de probabilidad y las espaciales la densidad de corriente de probabilidad) es formalmente idéntica a como vamos a redefinir en el caso no relativista la densidad de corriente, por lo que lo haremos para el caso no relativista (que es como lo hizo Fock), sabiendo que la generalización al caso relativista no es difícil.

En primer lugar vamos a ver como definimos la densidad de probabilidad y la densidad de corriente de probabilidad en el caso de una partícula libre. En este caso, y dado el Hamiltoniano de la partícula libre, sabemos que la función de onda  $\Psi$  es una onda plana, pero más importante para el trabajo que nos ocupa es ver las expresiones de la densidad de probabilidad y su corriente. Para la expresión de la densidad de corriente partiremos de la definición dada por la mecánica de fluidos clásica

$$\mathbf{j} = \rho \frac{1}{m} \mathbf{p} \quad (12)$$

por lo que utilizando la regla de correspondencia, y la definición de densidad de probabilidad en MQ, llegamos a que podemos escribir la densidad y su corriente como

$$\rho = \Psi^* \Psi \quad \mathbf{j} = \frac{1}{2} \left( \Psi^* \frac{1}{m} \mathbf{p} \Psi + \Psi \frac{1}{m} \mathbf{p} \Psi^* \right) \quad (13)$$

Ahora dándonos cuenta de que para una partícula libre

$$p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (14)$$

Sustituyendo llegamos a que

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} \left( \Psi^* \frac{1}{m} (-i\hbar) \nabla \Psi + \Psi \frac{1}{m} + i\hbar \nabla \Psi^* \right) = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (15)$$

Queremos ver ahora las expresiones no para una partícula libre, sino para una partícula cargada en un campo electromagnético. La ecuación de Schrödinger en este caso (haciendo uso del acoplamiento mínimo) es

$$\frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} \Psi = (E - q\Phi) \Psi \quad (16)$$

que desarrollando nos lleva a

$$\left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{(q\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p} q \mathbf{A}}{2m} - \frac{q \mathbf{A} \mathbf{p}}{2m} \right) \Psi = (E - q\Phi) \Psi \quad (17)$$

Es obvio que una transformación gauge, es decir, el cambio de unos potenciales por otros relacionados con los primero según la ecuación (7), nos va a modificar la ecuación y por tanto las soluciones de dicha ecuación. Queremos ver cómo es este cambio.

Como hemos visto en el apartado anterior, la posición queda invariante, mientras que el momento cambia según la ecuación (11). Las ecuaciones que se deben cumplir entonces en MQ son las dadas por la condición de invarianza de los valores esperados de estos operadores, tras el cambio de gauge. Vamos entonces a buscar una transformación unitaria (para que no nos cambie la norma de las funciones de onda) que nos lleve de la función de onda con los potenciales iniciales a la función de onda con los potenciales transformados, de tal manera que se verifiquen la invarianza del valor esperado de la posición y del momento. Haremos uso de la relación entre el momento antes del cambio y después, que es la dada por la ecuación (11), a la que habrá que aplicar las reglas de correspondencia.

Tenemos por tanto que se han de satisfacer la siguientes ecuaciones

$$\langle \psi' | \mathbf{R} | \psi' \rangle = \langle \psi | \mathbf{R} | \psi \rangle \quad (18)$$

$$\langle \psi' | \mathbf{P} | \psi' \rangle = \langle \psi | \mathbf{P} + q\nabla\Lambda | \psi \rangle$$

Es fácil ver que estas ecuaciones se cumplen si y solo si se verifica que

$$T_\Lambda^\dagger \mathbf{R} T_\Lambda = \mathbf{R} \quad (19)$$

$$T_\Lambda^\dagger \mathbf{P} T_\Lambda = \mathbf{P} + q\nabla\Lambda$$

siendo  $T_\Lambda$  la transformación unitaria que nos lleva la función de onda en el gauge antiguo a la función de onda en el nuevo gauge. A la vista de este resultado es obvio que la transformación conmuta con la posición, por lo que podremos escribirla de la forma

$$T_\Lambda = e^{iF(\mathbf{R},t)} \quad (20)$$

con  $F(\mathbf{R}, t)$  hermítico. Teniendo en cuenta la propiedad

$$[\mathbf{P}, G(\mathbf{R})] = -i\nabla G(\mathbf{R}) \quad (21)$$

Donde podemos comprobar que hemos tomado (como haremos en lo que sigue de demostración)  $\hbar = 1$ . Aplicando esta propiedad al conmutador de  $\mathbf{P}$  y  $T_\Lambda$ , obtenemos

$$[\mathbf{P}, T_\Lambda] = \nabla F(\mathbf{R}, t) T_\Lambda(t) \quad (22)$$

Multiplicando esta relación por  $T_\Lambda$  por la izquierda y comparando con (19) comprobamos que

$$\nabla F(\mathbf{R}, t) = q\nabla\Lambda(\mathbf{R}, t) \quad (23)$$

cuya solución es

$$F(\mathbf{R}, t) = F_0(t) + q\Lambda(\mathbf{R}, t) \quad (24)$$

Llevando este resultado a la transformación unitaria (omitiendo el factor  $F_0$ , que nos llevaría a un factor de fase *global* que sabemos que es una simetría, es decir, no tiene ninguna consecuencia física) llegamos finalmente a que

$$T_\Lambda(t) = e^{iq\Lambda(\mathbf{R},t)} \quad (25)$$

Podemos, además, comprobar que la evolución temporal viene determinada por la ecuación de Schrödinger en todos los gauges. El Hamiltoniano de una partícula

cargada en un campo electromagnético es

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 - q\Phi \quad (26)$$

La ecuación de Schrödinger para los nuevos potenciales sería

$$i\frac{d}{dt}|\psi'\rangle = H'|\psi'\rangle \quad (27)$$

Teniendo en cuenta la transformación unitaria que transforma los estados de un gauge a otro (25), y que la función  $\Lambda$  conmuta con su derivada temporal (y por tanto vamos a poder derivar como una función normal el operador  $T_\Lambda$ ) podemos escribir el primer miembro de la ecuación como

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}|\psi'(t)\rangle &= -q\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\mathbf{R},t)\right\}T_\Lambda(t)|\psi(t)\rangle + T_\Lambda(t)H(t)|\psi(t)\rangle \\ &= \left\{-q\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\mathbf{R},t) + \tilde{H}(t)\right\}|\psi'(t)\rangle \end{aligned} \quad (28)$$

donde  $\tilde{H} = T_\Lambda H T_\Lambda^\dagger$ . Por tanto la ecuación de Schrödinger nos determina que

$$H' = \tilde{H} - q\frac{\partial}{\partial t}\Lambda \quad (29)$$

Por su parte podemos escribir  $\tilde{H}$  en función de las posiciones y momentos transformados. Sabemos que la posición es invariante y que el momento se relaciona con el del gauge original por la ecuación (11), una vez aplicadas las reglas de correspondencia. Hecho esto llegamos a que

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - q\nabla\Lambda - q\mathbf{A})^2 - q\Phi \quad (30)$$

que en términos de los potenciales nuevos queda

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - q\mathbf{A}')^2 - q\Phi' + q\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = H' + q\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad (31)$$

lo que confirma nuestro aserto de que la ecuación de Schrödinger determina la evolución temporal del estado en cualquier gauge.

Por consiguiente la transformación gauge de los potenciales introduce un cambio respecto a la función de onda original del tipo

$$\Psi' = e^{-ie\Lambda}\Psi; \quad (32)$$

Debido a que el principal objeto de estudio de la electrodinámica cuántica es el electrón, con carga ( $q = -e$ ), haremos uso de la expresión para el electrón a partir de ahora, que es la sustitución que hemos hecho en la fórmula (32)

Ahora bien esta transformación tiene una peculiaridad, y es que, aunque aparentemente se trate de un cambio de fase, no es tal debido a que el factor  $e^{-ie\Lambda}$  depende de la posición, dado que  $\Lambda$  depende de ella. Sin embargo recordando la relación del módulo de la función de onda con la densidad de probabilidad de presencia podemos comprender que este cambio no alterará las predicciones físicas del sistema, al no alterar las probabilidades, para cuya densidad la ley de transformación es  $\rho' = \Psi'^* \Psi' = e^{iq\Lambda} \Psi^* e^{-iq\Lambda} \Psi = \Psi^* \Psi = \rho$

El problema surge al ver cómo evoluciona el sistema, es decir, al comprobar cómo es la corriente de probabilidad del sistema. Recordemos que en la MQ convencional definimos esta corriente como

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} \{ \Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^* \} = \text{Re} \{ \Psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla \Psi \} \quad (33)$$

Nótese que esto no es más que el valor esperado del momento (de una partícula libre) en el estado  $\Psi$ .

Se puede demostrar que, así definida, la corriente no es invariante gauge, y por tanto las predicciones que hagamos sobre la evolución del sistema sí dependerán del gauge elegido. Fue gracias al trabajo de Fock (entre otros) por el que se solucionó el problema. Recordemos ahora que la ecuación anterior la obtuvimos por analogía a como se define en mecánica de fluidos, que utiliza el momento canónico, que no es invariante ante transformaciones gauge. Debemos utilizar, por tanto, la condición de acoplamiento mínimo para el campo electromagnético. Tenemos que tener en cuenta que ahora nuestro momento es  $p_i - qA_i$ , y es este operador el que debemos sustituir al calcular la densidad de corriente. O dicho de otra manera, debemos considerar la derivada covariante definida de la siguiente manera

$$\mathbf{D}\Psi = (\nabla - iq\mathbf{A})\Psi; \quad (34)$$

como la parte fundamental de nuestro operador momento en la representación de posiciones.

Veamos por tanto que ahora nuestra densidad de corriente queda de la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{j} &= \frac{1}{2} \left( \Psi^* \frac{1}{m} \mathbf{p} \Psi + \Psi \frac{1}{m} \mathbf{p}^+ \Psi^* \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \Psi^* \frac{1}{m} (-i\hbar) (\nabla - q\mathbf{A}) \Psi + \Psi \frac{1}{m} i\hbar (\nabla q\mathbf{A}) \Psi^* \right) \\
&= \frac{\hbar}{2mi} \left( \Psi^* (\nabla - q\mathbf{A}) \Psi - \Psi (\nabla - q\mathbf{A}) \Psi^* \right) \\
&= \text{Re} \left\{ \Psi^* \frac{\hbar}{im} (\nabla - q\mathbf{A}) \Psi \right\} = \text{Re} \left\{ \Psi^* \frac{\hbar}{im} \mathbf{D} \Psi \right\}
\end{aligned} \tag{35}$$

Donde obtenemos una expresión muy parecida al caso anterior, pero, como decimos, cambiando  $(-i\hbar)\nabla$  que es el operador momento para el caso de una partícula libre, por  $(-i\hbar)\mathbf{D}$  que es el operador momento para la partícula en el campo.

La ecuación de Schrödinger se convierte, en el caso relativista, en la ecuación de Dirac para partículas de spin  $\frac{1}{2}$ , y en la de Klein-Gordon para partículas de spin 0. Por tanto, una partícula cargada de spin 0 en un campo electromagnético vendrá descrita por la ecuación de Klein-Gordon

$$(\nabla iq\mathbf{A})^2 \Psi - \left( \frac{\partial}{\partial t} + iq\Phi \right)^2 \Psi = m^2 \Psi \tag{36}$$

Por lo que si hacemos una transformación gauge a los potenciales, las componentes espaciales del tetravector densidad de probabilidad (la densidad de corriente de probabilidad) se transformarán de la forma que ya hemos expuesto, y la componente temporal según

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \Psi^* \frac{1}{c} (i\hbar) D_t \Psi + \Psi \frac{1}{c} (-i\hbar) D_t \Psi^* \right) \tag{37}$$

con  $D_t \Psi = \left( \frac{\partial}{\partial t} + iq\Phi \right) \Psi$ . Obsérvese que se cumplen las mismas relaciones que para las componentes espaciales sin más que cambiar  $D_i$  por  $D_t$ , y aplicar el potencial  $\Phi$ , que sería la componente temporal del tetravector potencial. En lenguaje covariante queda, por tanto, muy compacto.

Hemos definido la derivada covariante de manera que obtenemos las densidades de probabilidad y de corriente de probabilidad como el valor esperado del momento y de la energía. Veamos ahora cómo se modifican estas al hacer una transformación gauge. Para ello veamos que  $(D\Psi)' = e^{-iq\Lambda}(D\Psi)$  y que  $(D_t\Psi)' = e^{-iq\Lambda}(D_t\Psi)$

$$\begin{aligned}
(D\Psi)' &= \left( \nabla - iq(\mathbf{A} - \nabla\Lambda) \right) e^{-iq\Lambda} \Psi \\
&= e^{-iq\Lambda} \left( -iq(\nabla\Lambda)\Psi + \nabla\Psi - iq(\mathbf{A} - \nabla\Lambda)\Psi \right) \\
&= e^{-iq\Lambda} \left( -iq(\nabla\Lambda) + \nabla - iq(\mathbf{A} - \nabla\Lambda) \right) \Psi \\
&= e^{-iq\Lambda} (D\Psi)
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
(D_t\Psi)' &= e^{-iq\Lambda} \left( -iq\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} + iq(\Phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}) \right) \Psi \\
&= e^{-iq\Lambda} \left( \frac{\partial}{\partial t} + iq\Phi \right) \Psi \\
&= e^{-iq\Lambda} (D_t\Psi)
\end{aligned}$$

Por tanto, al calcular estos valores esperados, las fases  $e^{-iq\Lambda}$  se anulan con el conjugado y recuperamos los mismos resultados que sin la transformación. En otras palabras, introducimos unas derivadas que cambien de la misma forma que lo hace la función de onda (de ahí el nombre de covariante), con el objetivo de que las predicciones físicas no lo hagan. Esto se consigue gracias a que existen unas funciones, que no son observables, que cambian según (7); o al revés, como los potenciales cambian según (7) tenemos que utilizar unas derivadas definidas así para que las derivadas de la función de onda cambien igual que la función.

Resumiendo, la ambigüedad en los potenciales en MQ está asociada a una ambigüedad en la función de onda, sin embargo, al calcular las probabilidades, esta ambigüedad va a desaparecer, y por ello no cambiará la estadística ni las predicciones físicas al cambiar de gauge. Cabría destacar, no obstante que esta ambigüedad es un factor de fase  $e^{i\alpha}$  cuya fase  $\alpha$  depende del punto espacio-temporal. En efecto, al depender  $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$ , el factor  $e^{-iq\Lambda}$  es distinto para cada punto. Es a partir de esta idea de donde vamos a seguir trabajando.

Antes de nada convendría hacer un breve comentario sobre el cambio de fase que nos impone el cambio de potencial. Sabemos de la MQ convencional que un factor global de fase  $e^{i\alpha}$  es una simetría, y esta no modifica el sistema físico considerado. Es importante el matiz de factor global de fase. Esta fase no tiene importancia si todas las funciones de onda relevantes para el problema físico que nos interesa son modificadas de la misma forma (se les añade a todas un mismo factor de fase), pero no hay

que perder de vista que la diferencia crucial entre la MC y la MQ es precisamente la fase cuántica, y más concretamente las diferencias de fase entre las funciones de onda. Es de esta característica, junto a la discretización del espacio fásico, de dónde procede las diferencias con la MC.

Bien, lo que nos viene a decir todo lo hecho anteriormente es que la ambigüedad en los potenciales nos impone una simetría similar a la que ya concíamos, con la diferencia de que esta simetría es **local**, depende del punto; así, una elección concreta de los potenciales nos impone una determinada fase, diferente para cada punto. Este hecho está enmascarado cuando trabajamos únicamente con un gauge, ya que obtendremos una cierta función de onda con las características que sea. Es al cambiar de este gauge a otro cuando podemos darnos cuenta de que podemos seguir manejando la función de onda obtenida anteriormente, pero cambiándola por un factor  $e^{-iq\Lambda}$ , siendo  $\Lambda$  la función que nos relaciona los nuevos potenciales con los antiguos. En ausencia de campo esto también es válido, pero no se llega a apreciar simplemente porque no parece sensato elegir un gauge tal que los potenciales sean distintos de 0 cuando el campo es nulo.

Parece oportuno comentar, llegados a este punto, la razón de la utilización del término gauge (calibre, escala) para estas teorías. Una vez que Fock y otros llegaron a la conclusión de que la elección de un gauge u otro imponía el factor  $e^{-iq\Lambda}$ , no fue difícil para Weyl resucitar su antiguo intento de unificar gravitación y electromagnetismo.

Poco después de que se estableciese la teoría de Einstein de la gravedad, hacia principios del siglo XX, Weyl intentó desarrollar una geometría que fuese “*realmente infinitesimal*”, según la cual, el módulo de un vector solo podía mantenerse inalterado al trasladar el vector a un punto infinitesimalmente cerca del punto inicial. Esto es, una vez conocida la geometría Minkowskiana tenemos un criterio para medir intervalos espacio-temporales. La relatividad general modifica ligeramente este criterio ya que la densidad de energía va a modificar la curvatura espacio-temporal imponiendo una métrica local, es decir, dependiente del punto, de manera que ya solo podremos calcular intervalos entre sucesos muy próximos, y así este intervalo queda de la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (39)$$

De modo que si queremos calcular un intervalo finito no tendremos más que calcu-

lar la integral de la expresión infinitesimal previa, sabiendo que la elección de un observador u otro, y por tanto el uso de distintas expresiones para la métrica, no influirá en el resultado final. La expresión que queda por tanto es

$$\Delta s^2 = \int ds \quad (40)$$

El problema que aparece es que el módulo de un tetravector (calculado en el punto p) se sigue calculando como

$$M^2 = g_{\mu\nu}|_p u^\mu|_p u^\nu|_p \quad (41)$$

Es decir, utilizamos la misma métrica por muy “grande” que sea el tetravector, sin importar que esta cambie a lo largo de los puntos por los que pasa el mismo. Es esta incongruencia la que intenta solucionar Weyl proponiendo una definición del módulo de forma que solo sea infinitesimal. Obteniendo el módulo de vectores finitos como la integral de esta expresión diferencial, al igual que se hacía con los intervalos entre sucesos. Es decir

$$dl = A_\mu u^\mu \longrightarrow l = \int dl \quad (42)$$

Donde la  $A_\mu$  es un elemento adicional que tenemos que considerar, además de la métrica, para la correcta descripción de la geometría espacio-temporal. Al igual que la métrica, este tetravector depende del punto, y al igual que esta (la cual dependiendo del observador puede cambiar en términos que se anulen en la línea de universo del mismo) no está unívocamente determinada, sino que se le puede añadir términos de la forma

$$(A^\mu)' = A^\mu + d\lambda^\mu \quad (43)$$

Estos términos modificarían el módulo del vector por una exponencial dependiente de la función (gauge)  $\lambda$ . Una elección u otra del gauge correspondería simplemente a un cambio en la escala utilizada para medir, es decir, el gauge nos da la escala a la que estamos midiendo.

Weyl estableció su teoría en 1918 pensando que su geometría era la verdadera geometría del espacio-tiempo, que debía ser descrita no solo con la métrica sino también con esta nueva función de cuatro componentes, que propuso identificar como el tetravector potencial electromagnético. Sin embargo, debido a ciertos detalles de la teoría, se vio que no podía ser físicamente aceptable, y se descartó. La importancia de este trabajo radica en que es el primer intento de construcción de una teoría invariante gauge y que presenta por tanto todas las características propias de las

teorías gauge modernas, siendo la base y orientación de todas ellas.

Retomamos aquí la teoría de Weyl porque, como decíamos, al estudiar el campo electromagnético nos aparece un término de fase, una simetría local, que recuerda en la forma al cambio de escala de Weyl, con la única diferencia de que, en nuestro caso, ese exponente es imaginario y afecta no a la longitud del vector sino a la fase de la función de onda. Como ya hemos adelantado, fue Weyl el que reinterpretó su teoría en 1929 al darse cuenta de que el cambio de escala, que él había supuesto que debía acompañar al módulo de los vectores, en realidad debe modificar la fase de las funciones de onda, obteniendo así de la invarianza gauge de los potenciales electromagnéticos la simetría local asociada al grupo  $U(1)$  (grupo de los números complejos de módulo unidad). A partir de ese momento, y debido a este principio de invarianza, el campo electromagnético se vio como un fenómeno que debía acompañar no al campo gravitatorio, como pensó Weyl al principio, sino al campo de materia.

## 4. Punto de Vista Moderno

Vamos a darle la vuelta al argumento ahora. Plantearemos la ecuación de Schrödinger para dos gauges distintos, esto es

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{(q\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}q\mathbf{A}}{2m} - \frac{q\mathbf{A}\mathbf{p}}{2m} \right) \Psi + q\Phi &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \\ \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{(q\mathbf{A}')^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}q\mathbf{A}'}{2m} - \frac{q\mathbf{A}'\mathbf{p}}{2m} \right) \Psi' + q\Phi' &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi' \end{aligned} \quad (44)$$

Sabemos que si queremos que tanto  $\Psi$  como  $\Psi'$  describan la misma situación física, las predicciones hechas con una u otra función de onda deberán ser las mismas. Particularmente nos deberán conducir a la misma densidad de probabilidad  $\rho$  y a la misma corriente de probabilidad  $\mathbf{j}$ . Impondremos primero la igualdad en la densidad de probabilidad. Tenemos por tanto

$$\rho = \Psi^* \Psi = (\Psi')^* \Psi' = \rho' \quad (45)$$

Lo que nos dice esta ecuación no es otra cosa que el módulo del valor de la función en cada punto es el mismo para las dos funciones de onda, por lo que el valor de las funciones en cada punto solo puede diferir en un factor de fase

$$\Psi' = e^{i\chi} \Psi; \quad (46)$$

El valor de esta “fase” no tendrá por qué ser el mismo en cada punto, por lo que, de manera general, lo haremos depender de la posición a través de  $\chi$ . Además debemos fijarnos que la función  $\chi$  debe tener la forma  $\chi = qf$  para obtener el cambio de fase que nos apareció en el argumento histórico (ecuación (32)).

Vamos a imponer ahora que la corriente de probabilidad sea la misma. Recordemos primero cual era la expresión correcta de la densidad de corriente de probabilidad (ecuación (35), de la que haremos uso de la primera igualdad).

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} \left( \Psi^* \frac{1}{m} \mathbf{p} \Psi + \Psi \frac{1}{m} \mathbf{p}^+ \Psi^* \right) \quad (47)$$

Tendremos por tanto que

$$\frac{1}{2} \left( \Psi^* \frac{1}{m} \mathbf{p} \Psi + \Psi \frac{1}{m} \mathbf{p}^+ \Psi^* \right) = \frac{1}{2} \left( (\Psi')^* \frac{1}{m} \mathbf{p} \Psi' + \Psi' \frac{1}{m} (\mathbf{p})^+ (\Psi')^* \right) \quad (48)$$

Recordemos ahora la forma del operador momento en la representación de coor-

denadas, y lo obtenido al imponer la igualdad de la densidad de probabilidad. La ecuación que nos queda con ello es

$$\begin{aligned} & \Psi^* \frac{1}{m} (i\hbar\nabla - q\mathbf{A}) \Psi + \Psi \frac{1}{m} (-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}) \Psi^* \\ & = e^{-i\chi} \Psi^* \frac{1}{m} (i\hbar\nabla - q\mathbf{A}') e^{i\chi} \Psi + e^{i\chi} \Psi \frac{1}{m} (-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}') e^{-i\chi} \Psi^* \end{aligned} \quad (49)$$

Operando esta expresión llegamos a que

$$\begin{aligned} & \Psi^* \nabla \Psi - \Psi^* \frac{q\mathbf{A}}{i\hbar} \Psi - \Psi \nabla \Psi^* - \Psi \frac{q\mathbf{A}}{i\hbar} \Psi^* \\ & = \Psi^* i\nabla\chi \Psi + \Psi^* \nabla \Psi - \Psi^* \frac{q\mathbf{A}'}{i\hbar} \Psi + \Psi i\nabla\chi \Psi^* - \Psi \nabla \Psi^* - \Psi \frac{q\mathbf{A}'}{i\hbar} \Psi^* \end{aligned} \quad (50)$$

que eliminando y agrupando términos queda

$$\Psi^* \left( -\frac{q\mathbf{A}}{i\hbar} - i\nabla\chi + \frac{q\mathbf{A}'}{i\hbar} \right) \Psi - \Psi \left( \frac{q\mathbf{A}}{i\hbar} + i\nabla\chi - \frac{q\mathbf{A}'}{i\hbar} \right) \Psi^* = 0 \quad (51)$$

Por lo que es obvio que lo que hay entre paréntesis ha de ser 0, y por consiguiente

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \hbar \frac{1}{q} \nabla\chi \quad (52)$$

Vemos que nos aparece el factor  $\hbar$  que habíamos omitido en la demostración. Además, para recuperar la transformación de los potenciales que conocemos del electromagnetismo, la función  $\chi$  debe contener el factor  $q$ , como sabíamos por el argumento del cambio de fase.

Para obtener la expresión del potencial vector podemos comparar las ecuaciones de Schrödinger en el caso libre, y con potenciales

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla^2}{2m} \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \\ & \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2}{2m} \Psi = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\Phi \right) \Psi \end{aligned} \quad (53)$$

Vemos que al igual que hemos cambiado  $-i\hbar\nabla$  del caso libre por  $-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}$ , también hemos hecho un cambio de  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  por  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + q\Phi$ , lo que nos llevará a una relación similar en este caso

$$\Phi' = \Phi + \hbar \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial t} \chi \quad (54)$$

La asimetría entre el potencial escalar y el vector se debe a que la ecuación de Schrödinger solo es válida para casos no relativistas, en los que llamamos energía

solo a una parte de la energía del sistema (y de hecho a la menor parte). Sin embargo el cambio de la función de onda debido al cambio de potenciales es una propiedad básica de la función de onda, por lo que el cambio del potencial escalar debido al cambio en la función de onda sobrevive a esta aproximación.

Se verá mucho más clara la necesidad del cambio también en el potencial escalar en el contexto relativista, para lo cual haremos el mismo tratamiento, pero para las expresiones relativistas. Como solo cambia la expresión de la componente temporal, i.e, la densidad de probabilidad, que pasa de ser  $\rho = \Psi^* \Psi$  a ser la expresión (para bosones, en el caso de trabajar con fermiones el procedimiento es muy parecido) (37), solo explicitaremos este caso (para las componentes espaciales es exactamente igual al caso no relativista). Por tanto nos queda

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} \left( \Psi^* \frac{1}{c} (i\hbar) \left( \frac{\partial}{\partial t} + iq\Phi \right) \Psi + \Psi \frac{1}{c} (-i\hbar) \left( \frac{\partial}{\partial t} + iq\Phi \right) \Psi^* \right) \\ &= \rho' = \frac{1}{2} \left( (\Psi')^* \frac{1}{c} (i\hbar) \left( \frac{\partial}{\partial t} + iq\Phi' \right) \Psi + \Psi \frac{1}{c} (-i\hbar) \left( \frac{\partial}{\partial t} + iq\Phi' \right) (\Psi')^* \right) \end{aligned} \quad (55)$$

Operando exactamente igual que antes, llegaremos a que

$$\Phi' = \Phi + \hbar \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial t} \chi \quad (56)$$

Por tanto, si queremos decir que la densidad de probabilidad y su corriente son los valores esperados del operador momento, deberemos escribir el operador momento en la representación de coordenadas (salvo constantes) como

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + iqA_\mu) \Psi; \quad (57)$$

que es la definición de la derivada covariante. Por lo tanto se hace necesario que el potencial  $A^\mu$  se transforme según

$$(A^\mu)' = A^\mu + d\lambda^\mu \quad (58)$$

para que los potenciales antiguos y nuevos describan la misma situación física.

Que la función gauge, y por tanto los potenciales obtenidos de esta manera, sean tetravectores está vinculado al hecho de que la teoría tiene que ser invariante también ante transformaciones de Lorentz. Apreciamos ahora como la existencia de una simetría nos impone una ley de transformación de los potenciales (en el caso del electromagnetismo solo vamos a tener un potencial cuadvivectorial, pero para

otras teorías nos aparecerán más). A partir de los potenciales podemos obtener las ecuaciones del campo sin más que plantear (para el caso del electromagnetismo)

$$F^{\mu\nu} = D^\mu A^\nu - D^\nu A^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (59)$$

Finalmente para recuperar las ecuaciones de Maxwell no tendremos más que aplicar el principio de mínima acción a un sistema de partículas cargadas dado. Obviamente tendremos que pasar a la formulación Lagrangiana.

La densidad Lagrangiana del sistema será suma de tres términos, uno asociado al campo,  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , otro asociado a la interacción,  $A_\mu j^\mu$ , y otro asociado al sistema de partículas. La expresión precisa de  $j^\mu$  (y por ello del término de interacción) y de la parte correspondiente al sistema de partículas sin radiación depende de la ecuación que se pretenda estudiar (ya que la misma se derivará del Lagrangiano), por lo que será distinta para el caso no relativista y el relativista, y para bosones o fermiones en el caso relativista.

En cualquier caso el Lagrangiano se construye buscando que la parte correspondiente a los campos sea invariante gauge, lo que se cumple obviamente con el término  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , el cual no depende de los potenciales. Como es lógico, la parte correspondiente al sistema de partículas también va a ser independiente del gauge. Podríamos pensar entonces que el término correspondiente a la interacción debe ser invariante gauge de nuevo, pero el término  $A_\mu j^\mu$  no lo es (depende explícitamente de los potenciales). Sin embargo el término que añade el cambio de potenciales, gracias a la forma en que estos deben cambiar, es una derivada total del tiempo, que al calcular las ecuaciones del movimiento, no añade nada nuevo a las mismas, por lo que desde el punto de vista variacional este término es irrelevante.

Es decir, a la parte de interacción del Lagrangiano no se le exige invarianza gauge estricta, pero sí que el término que aparezca al cambiar los potenciales se pueda escribir como la derivada total respecto del tiempo de cierta función, y de esta manera no modifique las ecuaciones del movimiento obtenidas, describiendo por tanto el mismo sistema, aunque de forma distinta.

Como decíamos, deberemos ahora aplicar el principio de mínima acción al Lagrangiano así construido, con lo cual obtendremos las ecuaciones de Maxwell, en lenguaje covariante

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad (60)$$

siendo  $j^\mu$  el tetravector carga-corriente  $(\rho, \mathbf{j})$ . Sabemos además que estas ecuaciones ya incluyen la conservación de la carga. Por tanto vemos que no necesitamos más que la simetría de la función de onda, además de los principios de invarianza gauge y de mínima acción, para obtener el electromagnetismo. La idea ahora es generalizar esto para poder estudiar otras fuerzas de interacción (débiles y fuertes) buscando otras simetrías que deban cumplir las funciones de onda que sufran estas interacciones.

No obstante, antes de pasar a ver cómo se generaliza esta teoría, parece adecuado recordar que la precisión de cálculo de la electrodinámica cuántica se ha verificado experimentalmente hasta donde ha sido posible por la precisión de los aparatos, por lo que resulta lógico que se pretenda generalizar una teoría que ha dado tan buenos resultados para explicar otras interacciones.

## 5. Generalización. Teorías de Yang-Mills

Hemos visto hasta ahora que la libertad que tenemos a la hora de escoger un determinado gauge u otro está ligada a la aparición de una simetría local en la función de onda.

Podemos plantearlo al revés, es decir, tomar como punto de partida que la realidad presenta una cierta simetría local de la forma  $\Psi' = e^{-iq\Lambda}\Psi$ . Sin embargo este cambio en la función de onda debe venir acompañado de un cambio en la descripción de los potenciales del campo que debe ser de la forma  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda$ .

La simetría estudiada hasta ahora está asociada al grupo de simetría  $U(1)$ , es decir, el de los números complejos de módulo unidad. Sabemos también que nuestra teoría cumple con las ideas de la relatividad, por lo que también es invariante ante transformaciones de Lorentz, asociadas al grupo  $SO(1, 3)$ . Queremos, por tanto, estudiar otros grupos de simetría mediante el mismo procedimiento, y ver qué cambios nos imponen en la función de onda y a partir de esto deducir los potenciales que describan esta nueva interacción. Por supuesto estas nuevas teorías deberán cumplir igualmente las leyes de la relatividad, es decir, verificar la simetría asociado al grupo de las transformaciones de Lorentz  $SO(1, 3)$ .

Para generalizar el caso anterior debemos considerar que la función de onda deberá tener ahora tantas componentes como la dimensión de la representación fundamental del grupo de simetría ya que esta deberá transformarse como

$$\Phi'_i = e^{-i\chi^i T_i} \Phi_i \quad (61)$$

Donde las  $\chi^i$  son funciones de las coordenadas y las  $T_i$  son los generadores infinitesimales del grupo de simetría, razón por la cual las funciones de onda deberán tener varias componentes, ya que estas serán matrices. Estos generadores infinitesimales cumplirán unas determinadas reglas de conmutación que escribiremos abreviadamente

$$[T^i, T^j] = if_{ijk} T^k \quad (62)$$

Donde los  $f_{ijk}$  son las constantes estructurales del grupo. Ahora tenemos que definir una derivada covariante tal como hemos dicho en el apartado anterior, por lo que debemos definir antes unos potenciales para ello. Estos potenciales deberán transformarse adecuadamente según la forma

$$A'_\mu = e^{-i\chi^i T_i} (A_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu) e^{i\chi^i T_i} \quad (63)$$

donde  $g$  es una constante con unidades de inversa de (la nueva) carga, y que determina la magnitud de la interacción. Podemos escribir la ley de transformación de una forma más reconocible sin más que considerar transformaciones infinitesimales de manera que podemos llegar a la expresión

$$A'_\mu = A_\mu - i\chi^i [T_i, A_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \chi^i T_i \quad (64)$$

Tenemos por tanto el mismo número de campos que de generadores infinitesimales, los cuales escribiremos como

$$(A'_\mu)^i = A_\mu^i + f_{ijk} \chi^j A_\mu^k - \frac{1}{g} \partial_\mu \chi^i \quad (65)$$

verificando los  $A_\mu^i$  que  $A_\mu = A_\mu^i T_i$ . Ahora ya estamos en condiciones de definir la derivada covariante en analogía con el electromagnetismo como

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu; \quad (66)$$

Finalmente podemos ya definir el tensor del campo como

$$F^{\mu\nu} = D^\mu A^\nu - D^\nu A^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \frac{g}{i} [A_\mu, A_\nu] \quad (67)$$

que para cada uno de los campos queda como

$$\begin{aligned} (F^{\mu\nu})^i &= D^\mu (A^\nu)^i - D^\nu (A^\mu)^i = \\ &= \partial^\mu (A^\nu)^i - \partial^\nu (A^\mu)^i + \frac{g}{i} [(A_\mu)^i, (A_\nu)^i] = \\ &= \partial^\mu (A^\nu)^i - \partial^\nu (A^\mu)^i + gf_{ijk} (A^\mu)^j (A^\nu)^k \end{aligned} \quad (68)$$

En estas ecuaciones podemos observar que nos aparece un término que no esperaríamos por similitud a la electrodinámica cuántica, que es debido a la no conmutatividad de los generadores infinitesimales del grupo (y por ello no aparece en la electrodinámica cuántica, asociada al grupo  $U(1)$ , que solo tiene un generador que obviamente conmuta consigo mismo). Esta no conmutatividad es la responsable de que, como podemos ver en (68), los campos para otros grupos no son lineales con los potenciales, debido al último término que aparece, lo que va a implicar que los campos van a ser fuentes de campo, o dicho de otra manera los bosones portadores de la interacción van a tener carga (la carga asociada al grupo en estudio).

Al igual que antes, a partir del principio de mínima acción podemos obtener las ecuaciones de los campos, las cuales incluirán la información de las corrientes que se conservan en estos casos.

Vamos a ver cómo se aplica esto en el caso de los grupos  $U(1)$  y  $SU(2)$ . En el caso del grupo  $U(1)$  solo tenemos un generador infinitesimal que obviamente conmuta consigo mismo, por lo que teniendo esto en cuenta, y sustituyendo  $g = -e$  llegamos a que

$$(A_\mu)' = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\chi \quad (69)$$

y por tanto la derivada covariante y el tensor del campo nos quedan de la forma

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu; \quad (70)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (71)$$

como ya sabíamos.

Apliquémoslo ahora al grupo de simetría  $SU(2)$ . En este caso tenemos tres generadores infinitesimales, las matrices de Pauli, a saber

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (72)$$

Y por tanto tenemos tres potenciales, que aplicando las fórmulas previas escribiremos como

$$(A_\mu^i)' = A_\mu^i + f_{ijk}\chi^j A_\mu^k - \frac{1}{g}\partial_\mu\chi^i \quad (73)$$

A partir de cada uno de estos potenciales podremos sacar un tensor de campo como ya hemos indicado.

$$(F^{\mu\nu})^i = \partial^\mu (A^\nu)^i - \partial^\nu (A^\mu)^i + gf_{ijk}(A^\mu)^j (A^\nu)^k \quad (74)$$

Asociado a este habrá una partícula de la misma forma que al campo electromagnético está asociado el fotón. Aparecen así tres nuevas partículas que serán los portadores de la interacción asociada a este grupo de simetría. Sin embargo, a diferencia del electromagnetismo en el que el campo era lineal en los potenciales, y esto permitía que no hubiese autointeracción, la no conmutatividad de los potenciales va a suponer la aparición de términos no lineales con los mismos en la expresión de los campos y que por tanto estos sí sientan la interacción de la cual son portadores, es decir, que

hay autointeracción entre los portadores.

Sabemos además que la función de onda debe transformarse según (61) lo que nos indica que esta debe tener dos índices. Es decir, nuestra función de onda debe transformarse

$$\begin{aligned} \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \Phi' = \exp(-i\chi^i T_i) \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \\ \exp \left[ -i \begin{pmatrix} \chi_3 & \chi_1 - i\chi_2 \\ \chi_1 + i\chi_2 & -\chi_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (75)$$

donde cada una de las  $\chi_i$  son las funciones gauge, que dependen de las coordenadas; esta simetría también es local. Ahora asociaremos al campo material representado por esta función  $\Phi$  de dos componentes una propiedad que, por la evidente analogía con el spin, llamaremos isospin, de manera que a una de las componentes de esta función le asociaremos isospin up, y a la otra isospin down. El resultado de esto es que, si a cada componente de este campo material le asociamos una partícula, estas aparecerán ahora por parejas, ya que no serán sino la misma partícula con diferente componente de isospin, como ocurre con los leptones (electrón y neutrino electrónico), muón y neutrino muónico, etc.) o con los quarks (quark up y down, etc.). Por tanto cuando digamos que dos partículas tienen el mismo sabor nos estaremos refiriendo precisamente a que son las dos componentes de isospin de un único campo material.

Podemos aplicarlo también al grupo  $SU(3)$ , cuyos generadores infinitesimales son las ocho matrices de Gell-Mann

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ T_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & T_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ T_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & T_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (76)$$

Esto da lugar a ocho campos y por tanto a ocho portadores de la interacción, llamados gluones. Al ser matrices  $3 \times 3$  el campo de materia que interactúa con este campo vendrá descrito por un spinor de tres componentes, cada una de las cuales

representa un color (rojo, verde y azul). Por tanto las partículas que sientan la interacción fuerte (los quarks), tendrán un número cuántico de color, dando lugar a tres variedades de partículas.

Existen, sin embargo, ciertos matices en la teoría precisa de las interacciones electrodébiles y fuertes. El planteamiento moderno para la construcción de nuevas teorías de las interacciones fundamentales consiste en buscar qué simetrías ha de verificar una función de onda y como consecuencia qué potenciales aparecen. La cuantización de estos potenciales (en el estudio de estas teorías es necesario trabajar con los campos materiales cuantizados y cumpliendo relaciones de conmutación para bosones, o anticonmutación para fermiones) asocia a cada uno de ellos una determinada partícula, entendida como un ente discreto con determinadas propiedades (carga, spin, isospin, color, etc.), que se conoce como portador de la interacción. Hay sin embargo una característica a tener en cuenta con estas teorías, y es que las teorías gauge “puras” siempre predicen masa nula para los portadores, por lo que estas interacciones deberían tener alcance infinito, lo cual sabemos que no ocurre en las interacciones débiles ni en las fuertes. Para solucionar este problema (en la teoría electrodébil) hay que añadir a la teoría un mecanismo de *ruptura espontánea de la simetría*, como es el mecanismo de Higgs.

La idea de la ruptura espontánea de la simetría proviene de que si el estado fundamental de un sistema (en el caso de una teoría de campos el estado del vacío) es degenerado, la elección de un determinado estado fundamental es arbitraria, y esta elección del estado romperá dicha simetría. Por otro lado si existe alguna magnitud cuyo valor esperado es no nulo podremos utilizarla para elegir un determinado estado, produciendo este fenómeno de ruptura espontánea. Los detalles de estas teorías así como los distintos modelos planteados (Goldstone, Higgs, etc.) pueden ser interesantes de estudiar, además de necesarios para dar a la teoría electrodébil consistencia física (explicando su alcance finito al dotar a los portadores de masa). Sin embargo no entraremos en ellos en el presente trabajo.

La razón física del alcance finito de las interacciones fuertes es distinta. En este caso los bosones de intercambio (gluones) tienen masa nula, pero debido a los términos no lineales de sus campos, presentan carga de color. Esto hace que la energía de interacción entre ellos aumente al aumentar la distancia, dando lugar al confinamiento y la libertad asintótica. De este modo los portadores efectivos de la interacción deberán tener carga neutra de color, y serán los mesones, que sí tienen masa, y por tanto su alcance es finito. Es por esta razón que el modelo de Yukawa de las inter-

acciones fuertes, en el cual predijo la existencia de los mesones como portadores de la interacción, funciona razonablemente bien. Sorprende que predijera la existencia de estas partículas elementales, y que diera una explicación a la interacción fuerte basada en el intercambio de mesones 20 años antes del artículo de Yang y Mills, y la subsiguiente eclosión de las teorías gauge. No entraremos sin embargo en los detalles de estas teorías.

Sobre la aplicación de esta teoría al grupo  $SU(2)$  es necesario recordar que es la que nos permite explicar las interacciones débiles, y con ello las desintegraciones radiactivas (como la  $\beta^\pm$ ) o el scattering de neutrinos, ya que al no sentir la interacción fuerte ni electromagnética estos solo pueden ser dispersados mediante la interacción débil. Aunque la motivación del estudio de este grupo no fue explicar estos fenómenos (Yang y Mills intentaban explicar las interacciones fuertes), podemos ver la importancia que tiene el estudio del mismo, no solo desde el punto de vista académico (es el grupo no-abeliano más sencillo) sino también porque se hace necesario para el estudio de fenómenos relativamente habituales y de utilidad práctica, siendo la interacción que aparece debido a esta simetría una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza, con la electromagnética, la fuerte y la gravedad.

No obstante podemos unificar la teoría electromagnética y la débil de manera que obtengamos una teoría más general. Para ello en lugar de estudiar los grupos  $U(1)$  y  $SU(2)$  por separado estudiaremos el grupo  $U(1) \times SU(2)$ . Con ellos obtendremos cuatro potenciales y por tanto cuatro portadores de la interacción electrodébil, todos ellos de masa nula. Ahora deberemos aplicar el mecanismo de Higgs, con lo que obtendremos otros cuatro potenciales, combinaciones de los primeros, lo cual nos dará un portador de masa nula, el fotón,  $\gamma$ , un portador de carga eléctrica nula y masa  $\sim 90 GeV$ , el bosón  $Z^0$ , y dos portadores con carga eléctrica, uno  $+e$  y otro  $-e$  y masa  $\sim 80 GeV$ , los bosones  $W^\pm$ . Una de las características del estudio de este conjunto es que nos permite darnos cuenta de que las interacciones electromagnética y débil son en realidad la misma interacción, pero que debido a la ruptura espontánea de la simetría se manifiestan de maneras muy distintas (alcance infinito y alcance del orden de  $10^{-3} fm$ ). No obstante, para altas energías esta separación desaparece y ambas interacciones se comportan como lo que son, una única interacción electrodébil.

Para el estudio de las interacciones fuertes habrá que hacer el estudio del grupo  $SU(3)$ , como hemos indicado, el cual tiene ocho generadores infinitesimales, las matrices de Gell-Mann, por lo que obtendremos ocho potenciales y ocho portadores

llamados gluones. También parece posible unificar el estudio de la interacción fuerte con la electrodébil mediante el estudio del grupo de simetría  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ , o tal vez el del  $SU(5)$ ; se trata de encontrar el grupo de simetría más simple que incluya las tres álgebras de los grupos como subálgebras. Sin embargo, para que las tres interacciones se manifiesten como una sola, se necesitarán energías mucho mayores que las necesarias para observar la electrodébil como una sola.

## 6. Conclusiones

Con este trabajo hemos pretendido explicar qué es una teoría gauge, aquella en que la ambigüedad en la descripción del estado del sistema dada por la existencia de una simetría *local* se refleja en una ambigüedad, de una determinada forma, de los potenciales. Como la modificación del estado que describe el sistema ha de ser una simetría, solo puede cambiar la *descripción* del sistema físico considerado, pero no el sistema en sí, es decir, las predicciones han de ser las mismas. Esta es la condición que determina la forma en que pueden modificarse los potenciales.

Por tanto en el estudio de una teoría gauge va a haber dos niveles de descripción, ambos consecuencia de la simetría local del sistema. Los potenciales, que van a tener una cierta indeterminación, recordándonos la libertad que nos deja la simetría del grupo, y que por tanto no van a ser observables. Y los campos, derivados de estos, que al ser observables van a estar unívocamente determinados. Por tanto la existencia de unos campos, y la interacción de la materia con los mismos, es debido a la existencia de una simetría en el sistema en estudio. Hay que diferenciar aquí la simetría local del grupo, que nos va a imponer la existencia de una interacción, y la simetría global, que nos impone una corriente conservada (la carga eléctrica en el caso del grupo  $U(1)$ , en el caso de  $SU(2)$  la hipercarga débil, es decir, cierta combinación de la carga y el isospin débil, etc). Potenciales y campos van a ser por tanto consecuencia de la simetría, y base en todas las interacciones fundamentales, por lo que podremos decir que, en último término, la interacción entre diferentes partículas va a ser consecuencia de la existencia de una simetría local en la descripción del Lagrangiano del sistema (partículas más campos). Las partículas interactúan por el intercambio de cuantos del campo (de interacción), es decir, a través de los bosones de intercambio.

El objetivo del presente trabajo ha sido dar una idea básica de qué es una teoría gauge. Para ello hemos hecho una aproximación histórica a la misma, ya que así se puede ver y entender mejor la evolución de las ideas involucradas. Hemos empezado viendo como el electromagnetismo determina unos potenciales para unos campos dados, pero que no lo hace de manera unívoca. La libertad de elección de los potenciales es lo que se conoce actualmente como invarianza gauge. Pasando ya a MQ hemos visto que un cambio en los potenciales involucra un cambio en las funciones de onda, y que la ley de transformación de la función de onda está asociada al grupo de simetría  $U(1)$ .

El paso a las teorías gauge modernas viene asociado a invertir el razonamiento, tomando ahora como base la suposición de la existencia de un cierto grupo de simetría que determina una simetría local del campo de materia, para comprobar que esto nos impone la existencia de unas funciones, que llamamos potenciales, que se transforman al cambiar la función de onda según una cierta ley de transformación, y que a partir de ellos podemos obtener unos campos, a los que suponiendo una determinada distribución de cargas y corrientes, aplicando el principio de mínima acción podemos obtener las ecuaciones de los campos (ecuaciones de Maxwell en el caso del electromagnetismo). El último apartado ha estado destinado a generalizar esta metodología a otros grupos de simetría, y a indicar brevemente los ejemplos de los grupos  $SU(2)$  y  $SU(3)$ .

Corresponde hacer aquí una mención al éxito de estas teorías. Para darles justa importancia hay que ponerlas en su contexto histórico. Los aspectos más básicos del formalismo matemático de las teorías gauge aparecen, en una primera versión, en la teoría de Weyl de 1918, pero no es hasta su reinterpretación en 1929 que se aplica correctamente al electromagnetismo. La generalización de estas teorías, y su aplicación a un grupo de simetría no abeliano ( $SU(2)$ ), no llega hasta 1954 con el artículo de Yang y Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*. La demostración de que estas teorías son renormalizables fue la tesis doctoral de t'Hooft de 1971, dirigida por Veltman. Por su parte los aspectos relacionados con la libertad asintótica y el confinamiento de los gluones fueron propuestos por Gross, Wilczek y Politzer en 1973. Hasta estos años las teorías gauge no eran más que uno de los muchos intentos de explicar las interacciones débiles y las fuertes, pero es con estos dos hitos, junto con el descubrimiento del cuarto quark,  $c$ , en 1974, gracias a lo cual, la mayor parte de los autores se decanta por estas teorías para explicar las interacciones fundamentales. A partir de este punto la evidencia experimental se hace cada vez más fuerte. En 1983 se detectan por primera vez los bosones de intercambio  $W^\pm$  y  $Z^0$ , asociados a la interacción débil, lo que mereció el Nobel de 1984. Para la correcta descripción de la interacción electrodébil es necesario, como hemos indicado anteriormente, un mecanismo de ruptura espontánea de la simetría, que predice la existencia de una nueva partícula, el Higgs, descubierto en el CERN en 2012, lo que también fue merecedor del premio Nobel, de 2013 en este caso. Además Gross, Wilczek y Politzer también recibieron el premio Nobel en 2004 por su trabajo sobre la libertad asintótica y el confinamiento de los gluones.

Vemos por tanto que son teorías muy recientes, tienen apenas sesenta años, y todavía en desarrollo, con lo que se hace aún más sorprendente el enorme éxito que

han tenido a la hora de explicar las interacciones electrodébiles y fuertes, tres de las cuatro interacciones fundamentales.

## Fuentes

En el estudio hecho para la realización del presente trabajo se han recurrido a las siguientes fuentes:

Para el apartado 2, en el que describimos el desarrollo del electromagnetismo en el siglo XIX, y su relación con la idea de invarianza gauge, se ha hecho uso de libro [1] de Darrigol, y de [2], de Cohen-Tanoudji, Diu y Laloë, además de los artículos [3], de Jackson y Okun, y [4] de t'Hooft principalmente.

Para el apartado 3 en el que tratamos qué consecuencias tiene la invarianza gauge en la teoría cuántica hemos hecho uso otra vez del libro [2] y de los artículos [3]. Además hemos utilizado el artículo [5] de Straumann, y el artículo [6], el artículo original de Weyl de 1918, para describir su teoría.

En el caso del apartado 4, en el cual vemos como es el tratamiento moderno de la invarianza gauge hemos utilizado el libro [7], de Galtsov, Grats y Zhukovski, y el [8] de Mosel. Los artículos usados fueron el [4] y el [9] de Hällgren.

Finalmente para el apartado 5 en que describimos la manera de generalizar este tipo de teorías nos hemos basado en el libro [7] y el [8] y los artículos [10], de Boozer, además de [4] y [9].

## Referencias

- [1] O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. Oxford University Press, New York, 2000
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, traducción de la edición francesa, Wiley and Hermann, Paris, 1977
- [3] J. D. Jackson y L. B. Okun, *Historical roots of gauge invariance*, *Reviews of Modern Physics* 73 (2001):663-680
- [4] G. t'Hooft (2008) *Gauge Theories*. Scholarpedia, 3(12):7443.
- [5] N. Straumann, *Early history of gauge theories and weak interactions*, invited talk at the PSI Summer School on Physics with Neutrinos 1996
- [6] H. Weyl, *Gravitation and Electricity*, translated from *Gravitation und Elektrizität*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften*, 1918
- [7] D. V. Galtsov, Iu. V. Grats y V. Ch. Zhukovski, *Campos Clásicos*. Traducción de la edición rusa, Moscú 1991. Editorial URSS, 2005
- [8] U. Mosel, *Gauge-Field Theories*, Vorlesung im Sommersemester 1996, Giessen
- [9] T. Hällgren, *Yang-Mills theories*, 2004
- [10] A. D. Boozer, *Classical Yang-Mills theory*, *American Journal of Physics*, vol. 79, pp 925-931, 2011