



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**SISTEMAS TRIPLES DE STEINER
Y OTROS DISEÑOS COMBINATORIOS**

**Autor: Elena Zurro Pérez
Tutor: José Enrique Marcos Naveira**

2022-2023

A mi familia, por haber hecho posible que llegue hasta aquí y por haberme apoyado cada día. En especial, a mi abuelo, por ser mi mayor ejemplo y por haberme enseñado a luchar incluso cuando se tiene todo en contra.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares sobre diseños combinatorios	3
1.1. Sistemas triples de Steiner	3
1.2. Diseños por bloques	13
1.3. Aplicaciones	17
2. Familias de diferencias	21
2.1. Familias de diferencias	21
2.2. Familia de diferencias relativa	27
3. Construcciones directas	31
4. Construcciones inductivas	35
4.1. Construcción producto	35
4.2. Construcción de $\text{STS}(2v + 1)$	37
4.3. Construcción de $\text{STS}(3v - 2)$	39
4.4. Construcción de $\text{STS}(3v - 6)$	41
4.5. Construcción de $\text{STS}(3v - 14)$	44
4.6. Construcción de $\text{STS}(7v - 6)$	47
4.7. Construcción de $\text{STS}(w(v - 1) + 1)$ con base en un $\text{STS}(v)$ y un $\text{STS}(w)$	50

5. Coloración de STS	55
5.1. Conceptos previos	55
5.2. Coloraciones en sistemas triples de Steiner	57
6. Otros diseños combinatorios	65
6.1. Diseños por bloques con índice $\lambda \geq 2$	65
6.2. Familias de diferencias con índice $\lambda \geq 2$	68
Anexo	73
Bibliografía	79

Introducción

La teoría de diseños combinatorios es una rama de la combinatoria que se centra en la existencia, construcción y propiedades de sistemas de conjuntos finitos que cumplen conceptos generalizados de equilibrio y simetría. Estos diseños tienen aplicaciones en diversos campos, como el diseño de experimentos, geometría finita, testeo en grupo, criptografía y muchos otros. Considerando la naturaleza visual de los diseños combinatorios, se recomienda imprimir este trabajo a color, ya que se incluyen gráficos y figuras que carecerían de sentido en blanco y negro.

Los diseños combinatorios tienen una larga historia que se remonta a la antigüedad, con ejemplos como el *cuadrado Lo Shu* en China y el uso de diseños en la elaboración de perfumes en la India. En los siglos XVIII y XIX, los diseños combinatorios se desarrollaron junto con el crecimiento de la combinatoria, con ejemplos destacados como los cuadrados latinos y los sistemas de Steiner.

En el siglo XX, los diseños combinatorios se aplicaron al diseño de experimentos y proporcionaron herramientas para la planificación eficiente de estos y la obtención de resultados fiables.

En este caso, nos centraremos principalmente en los *Sistemas Triples de Steiner*, así que conozcamos un poco de su historia.

”*The Lady’s and Gentlemen’s Diary*” fue una revista periódica del siglo XIX que abordaba varios temas, entre ellos, matemáticas y acertijos. En 1844, Wesley S. B. Woolhouse definió por primera vez los sistemas triples de Steiner en la pregunta de premio #1733 de este diario. Thomas Kirkman resolvió el problema planteado en 1847 y, posteriormente, en 1850, propuso una variación conocida como el problema de las colegialas de Kirkman, que involucraba sistemas triples con una propiedad adicional llamada resolubilidad. Jakob Steiner, sin conocimiento del trabajo de Kirkman, reintrodujo los sistemas triples en 1853, y debido a la mayor difusión de su trabajo, estos sistemas fueron nombrados en su honor.

Entonces, *¿Qué es un Sistema Triple de Steiner?*

Un Sistema Triple de Steiner es un conjunto de elementos acompañado de una familia de ternas, de forma que cada par de elementos del conjunto solo coincida en una única terna. Estos son muy útiles en diseño de experimentos y testeo en grupo.

En este trabajo estudiaremos en profundidad este concepto, junto con otros aspectos que le rodean. En concreto, trataremos los diseños por bloques, también conocidos como *Balanced incomplete block design* y las familias de diferencias. Además, veremos que existe una relación con la geometría finita en múltiples resultados y ejemplos.

Por otra parte, estudiaremos varias construcciones, tanto directas como inductivas, de sistemas triples de Steiner, haciéndose visible así el amplio uso de grupos y cuerpos finitos. También, se abordará el tema de la coloración en STS.

Finalmente, volveremos a estudiar alguno de estos conceptos con la particularidad de que cada par de elementos del conjunto coincidan en más de un bloque.

Por último, me gustaría mencionar uno de los motivos por los cuales he elegido este tema. Tras haber estudiado las principales ramas de las matemáticas, la parte de combinatoria ha sido la que más interés ha despertado en mí y a una de las que más aplicaciones prácticas he encontrado. Aunque es cierto que este tema se abordó durante una de las asignaturas del grado, hubo ciertos conceptos que me hubiera gustado estudiar con mayor profundidad. Este, por lo tanto, es el motivo principal de la elección de este tema para finalizar así mi carrera universitaria.

Capítulo 1

Preliminares sobre diseños combinatorios

Los *sistemas triples de Steiner* son una clase de diseños combinatorios que se caracterizan por ser una familia de bloques de tres elementos de un conjunto dado, con la particularidad de que cada par de elementos distintos de dicho conjunto aparece exactamente en un único bloque.

En la primera parte de este capítulo, exploraremos diferentes aspectos de los STS. Introduciremos los conceptos de *número total de bloques* y *número de replicación*, y veremos cómo calcularlos. También analizaremos la *construcción de Bose* y su importancia en la obtención de un gran número de sistemas triples de Steiner. Además, estudiaremos la *matriz de incidencia*, los *subsistemas* y, finalmente, los *isomorfismos* y *automorfismos* entre STS.

En la segunda sección, continuaremos profundizando en el tema de los *diseños por bloques* o *BIBD* (*Balanced Incomplete Block Design*). Se presentarán condiciones necesarias para que exista un BIBD, así como técnicas para calcular el *número total de bloques* y el *número de replicación*. También, se definirán los *diseños simétricos*, incluyendo un ejemplo sencillo. Por último, se verán aplicaciones reales de los sistemas triples de Steiner en dos casos de estudio específicos.

Se han utilizado fuentes como [11], [10], [3], [13] y [12] para el desarrollo de estas secciones. Esta documentación ha sido esencial para entender los conceptos y resultados presentados en este capítulo.

1.1. Sistemas triples de Steiner

Comenzamos esta sección con la definición de sistema triple de Steiner y algún ejemplo sencillo e ilustrativo. Además, veremos qué relación existe con los planos afines y proyectivos.

Definición 1.1. Un sistema triple de Steiner es un par (V, \mathcal{B}) donde V es un conjunto de v elementos y \mathcal{B} una colección de ternas de V , con la propiedad de que, dados dos elementos distintos x e y de V , existe una única terna B de \mathcal{B} a la que pertenecen. Se denota como $\text{STS}(v)$.

Ejemplo 1. Sea $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ un conjunto de 7 elementos. V junto con la familia de ternas \mathcal{B} forma un $\text{STS}(7)$, siendo \mathcal{B} el conjunto siguiente:

$$\mathcal{B} = \{013, 026, 045, 124, 156, 235, 346\}$$

Como vemos a continuación en la figura 1, al representar estas ternas se genera el plano proyectivo finito $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$, también conocido como *plano de Fano*. Recordamos que el plano finito $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$ está compuesto por $p^2 + p + 1$ puntos y, por ello, $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ tiene 7 puntos.

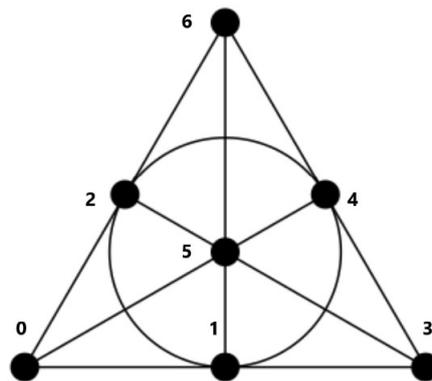


Figura 1: Ejemplo de un $\text{STS}(7)$

Es fácil comprobar que cada par de puntos está en una única terna. Volviendo al plano proyectivo, sabemos que en $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$, cada recta proyectiva pasa por $p + 1$ puntos. En nuestro caso, esto implica que cada una de estas rectas, las cuales pasan por 3 puntos, es una de nuestras ternas.

Ejemplo 2. Sea $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ un conjunto de 9 elementos. V forma un $\text{STS}(9)$ junto con la familia de ternas siguiente.

$$\mathcal{B} = \{ABC, DEF, GHI, ADG, BEH, CFI, AEI, BFG, CDH, AFH, BDI, CEG\}$$

Si tomamos el plano afín de 9 puntos \mathbb{F}_3^2 y dibujamos todas las rectas distintas que contiene, obtenemos las ternas de la familia \mathcal{B} , como vemos en la siguiente figura.

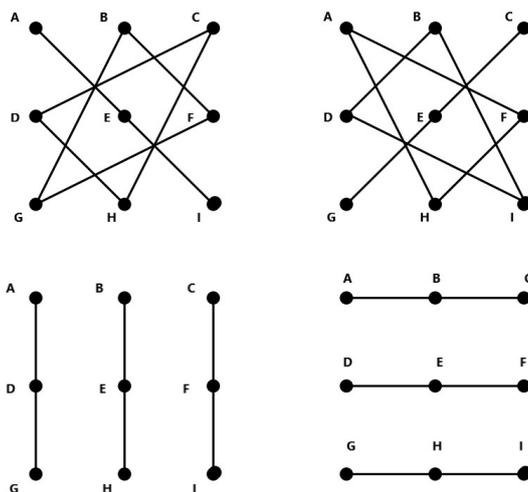


Figura 2: Ejemplo de un STS(9)

En la Figura 2 se distinguen los cuatro tipos de rectas que hay en \mathbb{F}_3^2 . Además, se corresponden a las distintas ternas del STS(9) de la familia \mathcal{B} .

- $y = -x + b \rightarrow \{AEI, BFG, CDH\}$.
- $y = x + b \rightarrow \{AFH, BDI, CEG\}$.
- $x = c \rightarrow \{ADG, BEH, CFI\}$.
- $y = c \rightarrow \{ABC, DEF, GHI\}$.

De nuevo, si se toman dos puntos distintos cualesquiera, se comprueba sin dificultad que existe una única recta que pasa por ellos. Esto es lo mismo que decir que, dados dos elementos de V , hay una única terna de \mathcal{B} que los contiene.

A través de estos ejemplos sencillos, acabamos de descubrir una posible relación entre los sistemas triples de Steiner y los planos finitos.

Ahora, vamos a introducir dos conceptos muy importantes asociados con los diseños combinatorios: el *número total de bloques* y el *número de replicación*.

Definición 1.2. Dado un STS(v), llamaremos b al *número total de bloques*, en este caso ternas, y *número de replicación* r al número de bloques en los que aparece cada elemento $v \in V$.

En los dos próximos resultados, veremos cómo calcular b y r , dado un STS(v), mediante unas fórmulas sencillas.

Teorema 1.3. *Sea (V, \mathcal{B}) un STS(v). Se cumple que hay exactamente $b = \frac{v(v-1)}{6}$ bloques.*

Demostración. Sabemos que dados dos elementos de V , existe una única terna que los contiene y hay en total $\binom{v}{2} = \frac{v!}{2(v-2)!} = \frac{v(v-1)}{2}$ parejas. Sin embargo, en cada terna hay $\binom{3}{2} = 3$ posibles parejas, luego $b = \frac{v(v-1)}{2 \cdot 3} = \frac{v(v-1)}{6}$. \square

Teorema 1.4. *Sea (V, \mathcal{B}) un STS(v). Se cumple que cada elemento de V está exactamente en $r = \frac{v-1}{2}$ ternas.*

Demostración. Sea $x \in V$. Sabemos que cada par de elementos distintos de V están en una única terna de \mathcal{B} y, como $V \setminus \{x\}$ tiene $v-1$ elementos, x está con cada uno de los $v-1$ de ellos en una única terna. Sin embargo, si tomamos $y \in V \setminus \{x\}$, existe $z \in V \setminus \{x\}$ distinto de y que está en la terna $\{x, y, z\}$. Finalmente, como $\{x, y, z\} = \{x, z, y\}$, concluimos que x está exactamente en $\frac{v-1}{2}$ ternas. \square

Si observamos las dos igualdades anteriores notaremos que son bastante similares. La relación que guarda una con respecto a la otra se expone en el siguiente teorema.

Teorema 1.5. *Sea (V, \mathcal{B}) un STS(v). Se cumple la igualdad $3b = vr$.*

Demostración. Si sustituimos las igualdades vistas en los teoremas 1.3 y 1.4, resulta evidente que $3b = vr$, como se quiere probar. \square

Una vez que hemos presentado los conceptos *número de bloques*, *número de replicación*, y cómo calcular cada uno de ellos, aplicaremos lo aprendido a uno de los ejemplos anteriores.

Ejemplo 3. Retomando el ejemplo 1 comprobamos que, en este caso, \mathcal{B} tiene en total $b = \frac{7 \cdot 6}{6} = 7$ ternas y cada elemento $v \in V$ aparece en $r = \frac{6}{2} = 3$ ternas.

Nótese que $v = b$, es decir, el cardinal del conjunto coincide con el número de ternas. Esto se conoce como *diseño simétrico*.

Por ello, es evidente que un sistema triple de Steiner es simétrico si y solo si es de orden 7, ya que si tenemos en cuenta que $3b = vr$ y que $b = v$, debe ser $r = 3$, es decir, $v = 1 + 2r = 7$.

A continuación, vamos a ver una condición necesaria para que exista un STS(v).

Teorema 1.6. *Sea (V, \mathcal{B}) un STS(v). Entonces, se cumple $v \equiv 1 \pmod{6}$, o bien $v \equiv 3 \pmod{6}$.*

Demostración. Sabemos que el número de replicación $r = \frac{v-1}{2} \in \mathbb{N}$, luego $v-1$ es par. Por otra parte, $b = \frac{v(v-1)}{6} \in \mathbb{N}$, es decir, o v es múltiplo de 3, o bien lo es $v-1$.

- (a) Si v es múltiplo de 3, al ser impar ($v-1$ es par), tiene que ser $v \equiv 3 \pmod{6}$.
- (b) Si $v-1$ es múltiplo de 3, al ser par, se cumple que $v-1 \equiv 0 \pmod{6}$. Por lo tanto, se verifica que $v \equiv 1 \pmod{6}$. □

En la demostración del siguiente teorema, se muestra cómo construir un STS(v) con $v = 6t + 3$ para cualquier t , conocida como *construcción de Bose*. Su importancia radica en la gran cantidad de sistemas triples de Steiner que se pueden obtener mediante esta construcción.

Teorema 1.7. *Sean $n = 2t + 1$ un número impar y $(G, +)$ un grupo conmutativo de orden n . Entonces, existe un STS($6t + 3$) sobre el grupo $(G \times \mathbb{F}_3, +)$.*

Demostración. Se define la familia de ternas \mathcal{B} de modo que sean de uno de los dos siguientes tipos.

- (a) $\{(x, 0), (x, 1), (x, 2)\}$, con $x \in G$.
- (b) $\{(x, i), (y, i), (\frac{x+y}{2}, i+1)\}$, con $x, y \in G$, $i \in \mathbb{F}_3$ y $x \neq y$.

En la figura que se muestra a continuación se ven representados los dos tipos de ternas, siendo el (a) la terna vertical y el (b) las dos a su derecha.

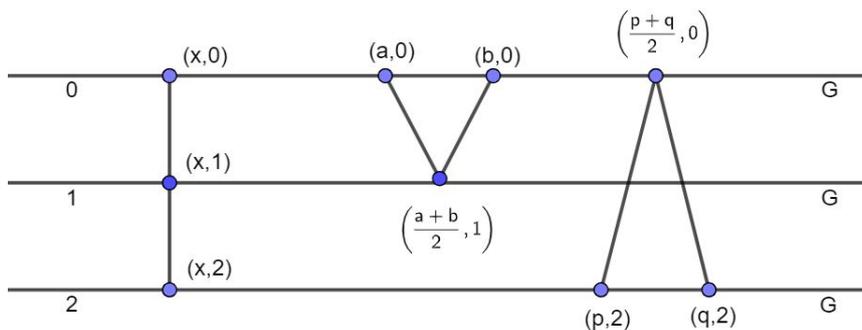


Figura 3: Tipos de ternas en un STS(6t+3)

Nótese que, por ser G de orden impar, existe el elemento $\frac{x}{2} \in G$ dado $x \in G$.

Si vemos que, dados dos elementos distintos $(x, i), (y, j) \in (G \times \mathbb{F}_3)$, existe una única terna de \mathcal{B} a la que pertenecen, queda probado el teorema.

- Si $x = y$, existe una terna del tipo (a) a la que pertenecen. Esta terna es $\{(x, i), (x, j), (x, k)\}$, con $k \in \mathbb{F}_3 \setminus \{i, j\}$.
- Si $i = j$, se encuentran en la terna del tipo (b) que es $\{(x, i), (y, i), (\frac{x+y}{2}, i + 1)\}$. Además, es evidente que $x \neq \frac{x+y}{2}$, ya que si fuesen iguales sería $2x = x + y$, es decir $x = y$, que es absurdo.
- Si $j = i + 1$ y con $x \neq y$, existe una terna del tipo (b) en la que están. Para ver esto, renombramos $x = a$ y $y = \frac{a+b}{2}$, es decir, $a = x$ e $b = 2y - x$, que se ve que son distintos siguiendo el mismo mecanismo que en el punto anterior. Por tanto, están en la terna $\{(x, i), (y, i + 1), (2y - x, i)\}$.

□

Ahora, presentamos los subsistemas de un sistema triple de Steiner y, mediante un lema, vamos a analizar una de sus propiedades.

Definición 1.8. Sean (X, \mathcal{A}) y (Y, \mathcal{B}) dos Sistemas triples de Steiner. Se tiene que (Y, \mathcal{B}) es un *subsistema* de (X, \mathcal{A}) si se cumple que:

- $Y \subseteq X$
- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, es decir, las ternas de \mathcal{B} pertenecen a la familia de ternas \mathcal{A} .

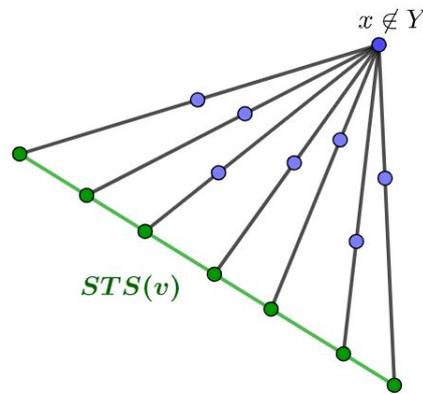
Más adelante, en el capítulo 4 de construcciones inductivas, veremos ejemplos concretos e ilustrativos de subsistemas.

Lema 1.9. Sea (Y, \mathcal{B}) un $STS(v)$ y (X, \mathcal{A}) un $STS(w)$. Si (Y, \mathcal{B}) es subsistema de (X, \mathcal{A}) , se tiene que $2v + 1 \leq w$.

Demostración. Sea $x \in X \setminus Y$. Para cada $y \in Y$, existe una única terna $A = \{x, y, z\} \in \mathcal{A}$ a la que pertenecen x e y . Es claro que z es único y además pertenece a $X \setminus Y$, ya que si $z \in Y$ tendríamos que $A \in \mathcal{B}$, por estar $y, z \in Y$ y ser un STS, pero $x \notin Y$, luego absurdo.

Como consecuencia de lo anterior, si fijamos un $x \in X \setminus Y$ vemos claramente que $2v + 1 \leq w$, donde v es el cardinal de Y . □

En la siguiente figura observamos un esquema ilustrativo de la demostración anterior, donde están representados el conjunto Y (segmento verde), el punto $x \in X \setminus Y$ fijado y los elementos que completan cada terna.



A continuación, presentamos el concepto de *matriz de incidencia* de un $STS(v)$ y un resultado muy interesante relacionado con ella.

Definición 1.10. Sea (X, \mathcal{B}) un $STS(v)$ con $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ un conjunto y $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$ una familia de ternas. La *matriz de incidencia* de (X, \mathcal{B}) es una matriz A de tamaño $v \times b$, de forma que $A = (a_{ij})$, con $a_{ij} = 1$ si $x_i \in B_j$, y $a_{ij} = 0$ en cualquier otro caso.

Ejemplo 4. Una vez más, recuperamos el ejemplo 1 para ver cuál es su matriz de incidencia. Recordemos que, en este caso, $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\mathcal{B} = \{013, 026, 045, 124, 156, 235, 346\}$. Por tanto, la matriz de incidencia A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como vimos anteriormente, este sistema triple de Steiner es un diseño simétrico, es decir, $v = b$ y por ello, A es una matriz cuadrada de tamaño 7×7 .

Para el siguiente resultado se utiliza la matriz identidad I y la matriz J cuyas entradas son todas igual a 1.

Proposición 1.11. *Sea A la matriz de incidencia de un STS(v) con número de replicación r . Entonces, se cumple $AA^t = (r - 1)I + J$.*

Demostración. Definimos la matriz $B = (b_{ij})$ como el producto AA^t . Es evidente que $b_{ij} = \sum_{k=1}^b a_{ik}a_{jk}$. Por otra parte, sabemos que las filas i -ésima y j -ésima de A tienen r unos cada una, ya que se corresponden con cada una de las ternas a las que pertenecen x_i y x_j , respectivamente.

Por tanto, se tiene que:

- Si $i = j$, $b_{ij} = b_{ii} = r$, ya que cada x_i está en r ternas.
- Si $i \neq j$, $b_{ij} = 1$, ya que x_i y x_j coinciden en una única terna.

Esto quiere decir que los valores que toma la diagonal de la matriz AA^t son iguales a r y el resto de entradas iguales a 1. Por tanto, $AA^t = (r - 1)I + J$, como se quiere probar. \square

Además, si nos volvemos a fijar en la matriz del ejemplo 4, es fácil comprobar que se verifican las dos siguientes afirmaciones.

- (a) $JA = 3J$, lo cual significa que la suma de los unos de las columnas de A es siempre igual a 3. Esto se debe a que hay tantos unos como elementos en una terna, por tanto, la suma de ellos es 3.
- (b) $AJ = rJ$, es decir, la suma de los unos de cada fila de A es siempre igual a r . Esto es consecuencia de que en cada fila se muestran las ternas a las que pertenece cada elemento de V , es decir, el número de replicación r .

Finalmente, analizaremos qué es un isomorfismo y un automorfismo entre sistemas triples de Steiner, así como su relación con las matrices de incidencia.

Definición 1.12. Sean (X, \mathcal{A}) y (Y, \mathcal{B}) dos STS(v), con $|X| = |Y|$. Se dice que (X, \mathcal{A}) y (Y, \mathcal{B}) son *isomorfos* si existe una biyección $f : X \rightarrow Y$ que envía cada terna de \mathcal{A} en una terna de \mathcal{B} . En esta situación llamaremos *isomorfismo* a f .

Ejemplo 5. Retomamos el ejemplo 2 para buscar otro STS(9) isomorfo a él. Como recordatorio, tenemos el conjunto $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ y la siguiente familia de ternas asociada.

$$\mathcal{B} = \{ABC, DEF, GHI, ADG, BEH, CFI, AEI, BFG, CDH, AFH, BDI, CEG\}$$

Ahora, tomamos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y la familia de ternas que se muestra a continuación.

$$\mathcal{A} = \{123, 456, 789, 147, 258, 369, 159, 267, 348, 168, 249, 357\}$$

Definimos la biyección $f : V \rightarrow X$, de forma que $f(A) = 1, f(B) = 2, f(C) = 3, f(D) = 4, f(E) = 5, f(F) = 6, f(G) = 7, f(H) = 8$ y $f(I) = 9$. Entonces se tiene lo siguiente.

$ABC \rightarrow 123$	$DEF \rightarrow 456$	$GHI \rightarrow 789$	$ADG \rightarrow 147$
$BEH \rightarrow 258$	$CFI \rightarrow 369$	$AEI \rightarrow 159$	$BFG \rightarrow 267$
$CDH \rightarrow 348$	$AFH \rightarrow 168$	$BDI \rightarrow 249$	$CEG \rightarrow 357$

Concluimos que f es un isomorfismo, puesto que envía las ternas de \mathcal{B} en las de \mathcal{A} , y por tanto, V y X son dos STS(9) isomorfos.

En la siguiente tabla se recoge el número de sistemas triples de Steiner no isomorfos de los órdenes menores:

orden	7	9	13	15	19	21
número	1	1	2	80	11.084.874.829	?

El número de sistemas triples de Steiner no isomorfos de orden 19 se ha consultado en [9].

Es notable el gran salto entre el número de sistemas isomorfos de orden 15 y el de orden 19. A este fenómeno se le conoce como *explosión combinatoria*, definido como un crecimiento de forma desproporcionada del número de combinaciones o posibilidades a medida que se aumentan las opciones.

Por otra parte, aunque es cierto que no se conoce a día de hoy el número exacto de STS no isomorfos de orden 21, en [8] se estima una cantidad de $1,965 \cdot 10^{16}$ sistemas. Además, se muestra que hay 12.661.527.336 clases de isomorfismos de STS(21) que tienen al menos un STS(9) como subsistema y 116.635.963.205.551 sistemas de orden 21 con STS(7) como subsistema.

Sigamos con la definición de automorfismo y un ejemplo sencillo que lo ilustre.

Definición 1.13. Sea (V, \mathcal{B}) un STS(v). Decimos que $f : V \rightarrow V$ es un *automorfismo* si es biyectiva y envía cada terna de \mathcal{B} en otra terna de \mathcal{B} .

Ejemplo 6. En este caso, utilizamos el ejemplo 1 con $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la familia de ternas siguiente.

$$\mathcal{B} = \{013, 026, 045, 124, 156, 235, 346\}$$

Definimos $f : V \rightarrow V$ tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 2$, $f(5) = 6$ y $f(6) = 5$. Si aplicamos la biyección f a las ternas, resulta lo siguiente.

$$\begin{array}{cccc} 013 \rightarrow 013 & 026 \rightarrow 045 & 045 \rightarrow 026 & 124 \rightarrow 124 \\ 156 \rightarrow 156 & 235 \rightarrow 346 & 346 \rightarrow 235 & \end{array}$$

Por tanto, queda probado que f es un automorfismo.

Por último, estudiaremos un resultado que relaciona los isomorfismos entre sistemas triples de Steiner utilizando matrices de incidencia.

Teorema 1.14. Sean (X, \mathcal{A}) y (Y, \mathcal{B}) dos STS(v), con $X = \{x_1, \dots, x_v\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_v\}$, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_b\}$ y $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$. Sean $M = (m_{ij})$ y $N = (n_{ij})$ las dos matrices de incidencia asociadas a (X, \mathcal{A}) y (Y, \mathcal{B}) , respectivamente. Se tiene que X e Y son isomorfos si y solo si existen dos permutaciones α en $\{1, \dots, v\}$ y β en $\{1, \dots, b\}$ de modo que $m_{ij} = n_{\alpha(i)\beta(j)}$, para todos $1 \leq i \leq v$, $1 \leq j \leq b$.

Demostración.

\implies) Supongamos que X e Y son isomorfos, es decir, existe un isomorfismo $f : X \rightarrow Y$ que envía las ternas de \mathcal{A} en ternas de \mathcal{B} .

Esto significa que $\mathcal{B} = \{\{f(x) : x \in A\} : A \in \mathcal{A}\}$, es decir, existe una permutación β en $\{1, \dots, b\}$ tal que $A_j = B_{\beta(j)}$ para todo $j \in \{1, \dots, b\}$.

Ahora definimos una permutación α en $\{1, \dots, v\}$ de modo que $\alpha(i) = j$ si y solo si $f(x_i) = y_j$.

Con estas condiciones tenemos que

$$m_{ij} = 1 \iff x_i \in A_j \iff y_{\alpha(i)} \in B_{\beta(j)} \iff n_{\alpha(i)\beta(j)} = 1$$

quedando probada esta implicación.

\impliedby) Supongamos que tenemos permutaciones α y β tal que $m_{ij} = n_{\alpha(i)\beta(j)}$ para todos i, j . Definimos $f : X \rightarrow Y$ de forma que $f(x_i) = y_j$ si y solo si $\alpha(i) = j$.

En esta situación, se tiene que $\{f(x) : x \in A_j\} = B_{\beta(j)}$, para $1 \leq j \leq b$.

Por tanto, como f envía ternas de \mathcal{A} en ternas de \mathcal{B} , es evidente que es un isomorfismo entre (X, \mathcal{A}) y (Y, \mathcal{B}) , es decir, X e Y son isomorfos. \square

1.2. Diseños por bloques

Ahora que estamos más familiarizados con los sistemas triples de Steiner, vamos a generalizar en esta sección algunos de los conceptos y resultados previos. Para ello, introduzcamos los diseños por bloques.

Definición 1.15. Un *diseño por bloques* o BIBD (*Balanced incomplete block design*) es un par (V, \mathcal{B}) donde V es un conjunto de v elementos y \mathcal{B} una colección de bloques de k elementos, de forma que

cada par de elementos distintos de V se encuentra en λ bloques de \mathcal{B} . Lo denotamos por $2-(v, k, \lambda)$ BIBD.

Nótese que cada $STS(v)$ es un $2-(v, 3, 1)$ BIBD.

De ahora en adelante, nos centraremos en los casos de $\lambda = 1$. Los casos $\lambda \geq 1$ se tratarán en el capítulo 6.

Ejemplo 7. Dado $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$ conjunto de 13 elementos, veamos cómo es una familia de bloques \mathcal{B} con la que constituye un $2-(13, 4, 1)$ BIBD:

$$\mathcal{B} = \{ABCL, DEFL, GHIL, ADGJ, BEHJ, CFIJ, AEIM, BFGM, CDHM, AFHK, BDIK, CEGK, JKLM\}.$$

Si nos fijamos, es fácil ver que estos bloques son las ternas del $STS(9)$ del ejemplo 2 añadiendo un elemento más a cada una. Esto es porque al plano afín \mathbb{F}_3^2 le estamos incorporando la recta del infinito, es decir, ahora nos encontramos en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, que tiene 13 puntos.

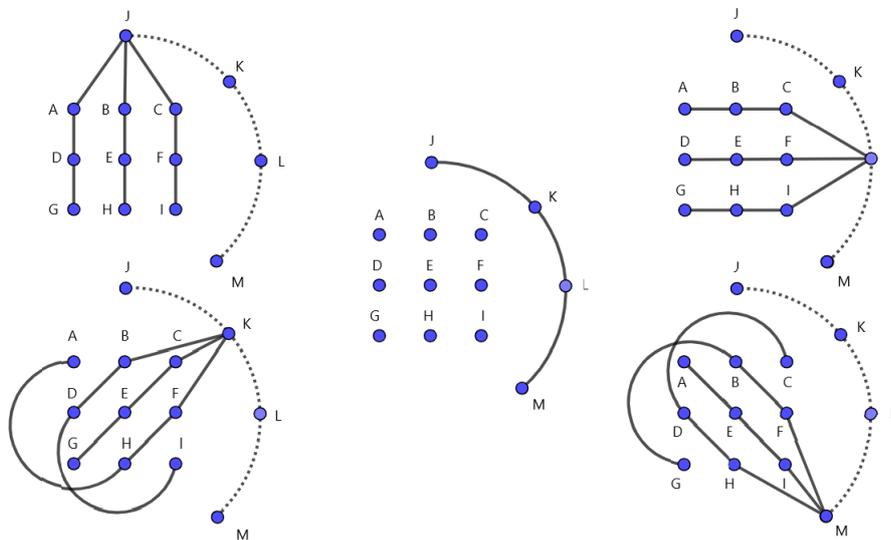


Figura 4: Ejemplo de un $2-(13,4,1)$ BIBD

Además, como vimos en la sección anterior, las rectas de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$ tienen $p + 1$ puntos y por ello, observamos en la figura 4 que cada recta pasa por 4 puntos.

Con esto concluimos que el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ con sus rectas constituye un $2-(13,4,1)$ BIBD.

A continuación, se exponen los conceptos de *número de bloques* y *número de replicación*, así como los métodos de calcularlos, generalizados a cualquier k .

Definición 1.16. Dado un 2 -($v, k, 1$) BIBD, denotamos mediante b al *número total de bloques* que hay en \mathcal{B} , y *número de replicación* r al número de bloques en los que aparece cada elemento $v \in V$.

Teorema 1.17. Sea (V, \mathcal{B}) un 2 -($v, k, 1$) BIBD. Se verifica que el número de replicación $r = \frac{v-1}{k-1}$.

Demostración. Sea $x \in V$. Sabemos que cada par de elementos distintos de V está en un único bloque de \mathcal{B} . Por otro lado, como $V \setminus \{x\}$ tiene $v-1$ elementos, x está con cada uno de los $v-1$ puntos en un único bloque. Sin embargo, como hay otros $k-1$ elementos de V con los que x define el mismo bloque, es claro que x está exactamente en $\frac{v-1}{k-1}$ bloques. \square

Teorema 1.18. Sea (V, \mathcal{B}) un 2 -($v, k, 1$) BIBD. Se cumple que el número de bloques $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.

Demostración. Sabemos que dos puntos distintos están en un único bloque y hay $\binom{v}{2} = \frac{v!}{2(v-2)!} = \frac{v(v-1)}{2}$ parejas. Por otra parte, en un mismo bloque de k elementos hay $\binom{k}{2} = \frac{k!}{2(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{2}$ combinaciones posibles. Por tanto, esto implica que $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$, como queremos probar. \square

A continuación veremos una propiedad que cumplen los diseños por bloques y que muestra la relación entre los parámetros b, v, k y r .

Teorema 1.19. Sea (V, \mathcal{B}) un 2 -($v, k, 1$) BIBD. Se verifica $bk = vr$.

Demostración. Al igual que vimos en la demostración del teorema 1.5, se prueba sustituyendo $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$ y $r = \frac{v-1}{k-1}$ a cada lado de la igualdad. \square

Definición 1.20. Sea (V, \mathcal{B}) un 2 -($v, k, 1$) BIBD. Decimos que es un *diseño simétrico* si $b = v$.

Nótese que, como todo diseño verifica la igualdad $bk = vr$, entonces un diseño es simétrico si y solo si $k = r$.

Veamos en el siguiente ejemplo una aplicación de lo anterior.

Ejemplo 8. Calculemos el número de bloques y el número de replicación del diseño por bloques del ejemplo 7.

Se tiene que $b = \frac{13 \cdot 12}{4 \cdot 3} = 13$, es decir, hay 13 rectas en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, y por cada punto pasan $r = \frac{12}{3} = 4$ rectas.

Además, observamos que al ser $b = v$, es un diseño simétrico.

En los siguientes resultados se indican algunas condiciones que tiene que cumplir v , tras fijar un cierto k , para que existan diseños por bloques.

Proposición 1.21. *Sea (V, \mathcal{B}) un 2 - $(v, 4, 1)$ BIBD. Entonces se cumple que $v \equiv 1 \pmod{12}$, o bien $v \equiv 4 \pmod{12}$.*

Demostración. Sabemos que $r = \frac{v-1}{k-1} = \frac{v-1}{3} \in \mathbb{N}$, luego $v-1$ es múltiplo de 3. Por otra parte, $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = \frac{v(v-1)}{12} \in \mathbb{N}$. Esto implica que v o $v-1$ es múltiplo de 4.

- (a) Si $v-1$ es múltiplo de 4, entonces lo es de 12, por serlo también de 3. Es decir, $v-1 \equiv 0 \pmod{12}$, luego $v \equiv 1 \pmod{12}$.
- (b) Si v es múltiplo de 4, $v-1 \equiv 3 \pmod{4}$. Como $v-1$ es múltiplo de 3, solo cumplen esta condición los $v-1 = 12t + 3$, es decir, los v de la forma $12t + 4$. Esto resulta lo mismo que $v \equiv 4 \pmod{12}$. □

Proposición 1.22. *Dado un 2 - $(v, 5, 1)$ BIBD sobre (V, \mathcal{B}) . Se verifica que $v \equiv 1 \pmod{20}$ o $v \equiv 5 \pmod{20}$.*

Demostración. Tomando de nuevo $r = \frac{v-1}{k-1} = \frac{v-1}{4} \in \mathbb{N}$, vemos que $v-1$ es múltiplo de 4. Sabemos también que $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = \frac{v(v-1)}{20} \in \mathbb{N}$ por lo que, o bien v es múltiplo de 5, o por el contrario tiene que serlo $v-1$.

- (a) Si $v-1$ es divisible entre 5, es múltiplo de 20, por serlo de 4 también. Por lo que $v-1 \equiv 0 \pmod{20}$, es decir, $v \equiv 1 \pmod{20}$.

- (b) Si v es múltiplo de 5, tenemos que v tiene que ser de la forma $20t + 5$, dado que $v - 1$ es divisible entre 4. Por ello, es claro que $v \equiv 5 \pmod{20}$. \square

Proposición 1.23. *Sea (V, \mathcal{B}) un 2 - $(v, 6, 1)$ BIBD. Entonces, se cumple que, o bien $v \equiv 1 \pmod{15}$, o bien $v \equiv 6 \pmod{15}$.*

Demostración. Una vez más, como $r = \frac{v-1}{k-1} = \frac{v-1}{5} \in \mathbb{N}$, se verifica que $v \equiv 1 \pmod{5}$. Tomando ahora $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = \frac{v(v-1)}{30} \in \mathbb{N}$ y teniendo en cuenta que v o $v-1$ es par, resulta que $\frac{v(v-1)}{15} \in \mathbb{N}$. Entonces:

- (a) Si $v - 1$ es múltiplo de 15, es claro que $v \equiv 1 \pmod{15}$.
- (b) Si v es múltiplo de 3 y $v \equiv 1 \pmod{5}$, tenemos que v tiene que ser de la forma $15t + 6$, luego se verifica que $v \equiv 6 \pmod{15}$. \square

Nota: Hanani probó los recíprocos de las proposiciones 1.21 y 1.22, por lo que se tiene que, si $v \equiv 1$ o $4 \pmod{12}$, existe algún 2 - $(v, 4, 1)$ BIBD y si $v \equiv 1$ o $5 \pmod{20}$, entonces existe algún 2 - $(v, 5, 1)$ BIBD. Sin embargo, el recíproco de la proposición 1.23 no es cierto, ya que no existen, por ejemplo, 2 - $(16, 6, 1)$ BIBD o 2 - $(36, 6, 1)$ BIBD.

1.3. Aplicaciones

Para finalizar este capítulo, veamos alguna aplicación de los diseños por bloques, en concreto de los sistemas triples de Steiner. Veamos un ejemplo de diseño de experimentos y otro de *group testing*.

En primer lugar, el diseño de experimentos se enfoca en la planificación y ejecución de experimentos para obtener conclusiones sobre relaciones causa-efecto y los sistemas triples de Steiner son muy útiles, ya que, como veremos a continuación, reducen el número de pruebas a realizar.

Ejemplo 9. Supongamos que hay una enfermedad con gran riesgo de propagación y tenemos 9 antibióticos que son parcialmente útiles, pero no nos garantizan una eficacia total. Por otra parte, sabemos que si los combinamos entre ellos vamos a obtener mejores resultados.

Lo primero que se nos ocurriría sería hacer parejas de medicamentos y, por ello, tendríamos que realizar un total de $\binom{9}{2} = 36$ experimentos.

Otra posibilidad sería agruparlos de tres en tres, por lo que tendríamos un total de $\binom{9}{3} = 84$ pruebas.

Sin embargo, veamos que sucedería si recurrimos a los sistemas triples de Steiner.

En primer lugar, por ser $v = 9$, tendríamos un total de $b = \frac{9 \cdot 8}{6} = 12$ experimentos. Como cada par de elementos está en una única terna, tenemos que cada pareja posible aparece una vez entre todas las combinaciones. Además, recordemos que $r = \frac{8}{2} = 4$, es decir, cada antibiótico estará presente en 4 de los experimentos.

Como conclusión, si usáramos los sistemas triples de Steiner a la hora de realizar estas pruebas, necesitaríamos 12 pacientes, número bastante reducido en comparación con los 36 y 84 pacientes que necesitaríamos para el ensayo en los otros dos posibles casos.

Ahora, veamos qué ventajas hay al utilizar diseños por bloques en *group testing*, método que se centra en la identificación eficiente de elementos defectuosos o anómalos dentro de un conjunto utilizando pruebas en grupo.

El siguiente ejemplo se remonta a la Segunda Guerra Mundial, época en la cual surgió el *group testing*. El ejército de EEUU quiso descartar a todo aquel soldado que quisiera alistarse y padeciera de sífilis, pero hacer pruebas a cada individuo resultaba muy costoso, por lo trataron de reducir el número de analíticas a realizar.

Ejemplo 10. Supongamos que tenemos 26 soldados a los que queremos realizar una analítica de sangre para detectar si son o no enfermos de sífilis.

La primera idea sería llevar a cabo 26 pruebas individuales, pero como se ha dicho previamente, resulta demasiado costoso, por lo que esta idea queda descartada.

Vamos a tratar de reducir las analíticas a la mitad, es decir, únicamente se realizarán 13 pruebas.

En este caso, podríamos pensar en separar a los 26 individuos por parejas y hacer un test por cada una, pero esto también queda rápidamente descartado. La razón más evidente es que aquellas parejas que den positivo deberán hacerse un análisis individual, por lo que, a pesar de reducir el número de pruebas, seguiría resultando costoso y superaría las 13 fijadas. Por otra parte, afectaría a los individuos a nivel emocional repetir el test, por lo que no se tiene en cuenta esta opción.

Ahora, vamos a descubrir por qué los sistemas triples de Steiner son útiles en este tipo de situaciones. Tomamos un STS(13) con sus 26 ternas, cada una de las cuales corresponde a un único soldado. Ahora bien, ¿cómo es que un individuo tiene asignados tres análisis? Esto se debe a que se va a dividir en tres partes la sangre extraída de cada soldado y se va a repartir entre tres pruebas.

Por otra parte, como el número de replicación en un STS(13) es igual a 6, cada analítica está compuesta por muestras de sangre de 6 soldados distintos. Se presupone que la mezcla de muestras de sangre no altera el resultado de la prueba.

En la tabla que encontramos en la página 20 se ve cómo ha sido el reparto entre las distintas pruebas. Es claro que si sustituimos las X por 1 y los espacios en blanco por 0, obtenemos la matriz de incidencia de este STS(13).

De esta forma, si hubiera un único individuo infectado, como por ejemplo el individuo 5, resultarían positivas las analíticas 5, 6 y 9, siendo así fácil de identificar al enfermo. Análogamente, se pueden extraer los soldados que padecen sífilis en caso de que hubiera dos o tres afectados.

Sin embargo, aunque para un número bajo de infectados este método es bastante efectivo, a medida que se incrementa resulta prácticamente imposible detectarlos correctamente.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	X	X			X								
2		X	X			X							
3			X	X			X						
4				X	X			X					
5					X	X			X				
6						X	X			X			
7							X	X			X		
8								X	X			X	
9									X	X			X
10	X									X	X		
11		X									X	X	
12			X									X	X
13	X			X									X
14	X		X					X					
15		X		X					X				
16			X		X					X			
17				X		X					X		
18					X		X					X	
19						X		X					X
20	X						X		X				
21		X						X		X			
22			X						X		X		
23				X						X		X	
24					X						X		X
25	X					X						X	
26		X					X						X

Capítulo 2

Familias de diferencias

En este segundo capítulo, se presentará la definición formal de una *familia de diferencias*, que es una familia de subconjuntos de un grupo conmutativo, cada uno con un número fijo de elementos, de tal manera que las diferencias entre los elementos de cada subconjunto forman conjuntos disjuntos entre sí. La unión de todos ellos resulta ser el conjunto de partida sin el elemento neutro. También se introducirán los *conjuntos de diferencias* y se ilustrarán ambos conceptos con varios ejemplos concretos.

Además, se mostrará cómo construir un sistema triple de Steiner a partir de una familia de diferencias. A esto lo denotamos *desarrollo de la familia de diferencias*. También se presentará un método para crear familias de diferencias en un cuerpo finito de orden un número primo a partir de una raíz primitiva.

Por último, se profundizará en el tema de las *familias de diferencias relativas*, también conocidas como *familias de diferencias con bloque de ciclo corto* y se explicará cómo construir un STS a partir de una familia de diferencias relativa.

En este capítulo, se han consultado varias fuentes para entender los conceptos y resultados presentados, tales como [1], [10], [12] y [3].

2.1. Familias de diferencias

Para comenzar el segundo capítulo, veamos qué es una familia de diferencias y dos claros ejemplos que ilustren este concepto.

Definición 2.1. Sea $(G, +)$ un grupo conmutativo de orden v . Una $(v, k, 1)$ -familia de diferencias sobre el grupo G , es una familia de subconjuntos B_1, B_2, \dots, B_t de G , cada uno con k elementos, de forma que se satisfacen las siguientes condiciones.

- $\Delta B_i = \{x - y, y - x : x, y \in B_i, x \neq y\}$, con $1 \leq i \leq t$, tiene $k(k - 1)$ elementos.
- $G \setminus \{0\} = \bigsqcup_{i=1}^t \Delta B_i$, unión disjunta.

Ejemplo 11. Sea $G = (\mathbb{F}_{13}, +)$. Veamos que $B_1 = \{0, 1, 4\}$ y $B_2 = \{0, 2, 7\}$ forman una $(13, 3, 1)$ -familia de diferencias:

- $\Delta B_1 = \{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$ y $\Delta B_2 = \{2, 4, 5, 7, 8, 11\}$, con $3 \cdot 2 = 6$ elementos cada uno.
- $\mathbb{F}_{13} \setminus \{0\} = \Delta B_1 \sqcup \Delta B_2$.

Por tanto, $\{B_1, B_2\}$ es una $(13, 3, 1)$ -familia de diferencias definida sobre $(\mathbb{F}_{13}, +)$.

Ejemplo 12. Sea $G = (\mathbb{F}_{37}, +)$. Probemos que $B_1 = \{0, 1, 3, 24\}$, $B_2 = \{0, 4, 9, 15\}$ y $B_3 = \{0, 7, 17, 25\}$ son una $(37, 4, 1)$ -familia de diferencias:

- $\Delta B_1 = \{1, 2, 3, 13, 14, 16, 21, 23, 24, 34, 35, 36\}$, $\Delta B_2 = \{4, 5, 6, 9, 11, 15, 22, 26, 28, 31, 32, 33\}$ y $\Delta B_3 = \{7, 8, 10, 12, 17, 18, 19, 20, 25, 27, 29, 30\}$, con $4 \cdot 3 = 12$ elementos cada uno.
- $\mathbb{F}_{37} \setminus \{0\} = \Delta B_1 \sqcup \Delta B_2 \sqcup \Delta B_3$.

Con esto se concluye que $B_1 = \{0, 1, 3, 24\}$, $B_2 = \{0, 4, 9, 15\}$ y $B_3 = \{0, 7, 17, 25\}$ forman una $(37, 4, 1)$ -familia de diferencias definida sobre $(\mathbb{F}_{37}, +)$.

Nótese que para que exista una $(v, k, 1)$ -familia de diferencias, es necesario que $v \equiv 1 \pmod{k(k-1)}$.

Esto se debe a que si B_1, B_2, \dots, B_t es una familia de diferencias y $|G \setminus \{0\}| = v - 1$, entonces se tiene que $|\bigsqcup_{i=1}^t \Delta B_i| = \sum_{i=1}^t |\Delta B_i| = t \cdot k(k - 1) = v - 1$, es decir $v \equiv 1 \pmod{k(k-1)}$.

Esto implica que si estamos trabajando con $\text{STS}(v)$, para que exista una $(v, 3, 1)$ -familia de diferencias debe ser $v = 6t + 1$, para algún t .

Veamos ahora un caso particular de las familias de diferencias y un ejemplo simple.

Definición 2.2. Llamamos *conjunto de diferencias* a la familia de diferencias en la situación de la definición 2.1 si está formada por un solo conjunto.

Ejemplo 13. Para el grupo $(\mathbb{F}_{21}, +)$, $B = \{0, 1, 4, 14, 16\}$ es un $(21, 5, 1)$ -conjunto de diferencias. En estos casos donde hay únicamente un conjunto de diferencias, es claro que ΔB será igual al grupo sin el 0, como se puede ver en este ejemplo.

En el próximo resultado se expone un modo de construir sistemas triples de Steiner a partir de una familia de diferencias, siempre que se verifique $v \equiv 1 \pmod{6}$.

Teorema 2.3. Sea $(G, +)$ un grupo de orden v . Sea B_1, B_2, \dots, B_t una $(v, 3, 1)$ -familia de diferencias definida sobre G , entonces la familia de subconjuntos $g + B_i$, con $g \in G$, $i = 1, 2, \dots, t$, es un $STS(v)$ sobre G .

Demostración. Sean x, y dos elementos distintos de G , veamos que existe una única terna de la forma $g + B_i$, con $g \in G$, a la que pertenecen.

Como $x - y \neq 0$, entonces $x - y \in G \setminus \{0\} = \bigsqcup_{i=1}^t \Delta B_i$ y como es unión disjunta, hay un único i tal que $x - y \in \Delta B_i$. Esto implica que existen $a, b \in B_i$ de forma que $x - y = a - b$, luego $x - a = y - b = g \in G \setminus \{0\}$.

Reescribimos lo anterior y obtenemos que $x = g + a \in g + B_i$ e $y = g + b \in g + B_i$.

Ahora falta probar que $g + B_i$ es la única terna en la que están:

Si sucediese que $x, y \in h + B_j$, entonces $x - y \in \Delta B_j$, pero sabemos que son conjuntos disjuntos, luego debe ser $i = j$. Por tanto, tenemos que x, y están en $g + B_i$ y en $h + B_i$. B_i es de la forma $\{b_1, b_2, b_3\}$ y si fuese $g \neq h$ tendríamos que, por ejemplo, $x = g + b_1 = h + b_2$ e $y = g + b_3 = h + b_1$, es decir, $x - y = b_1 - b_3 = b_2 - b_1$. Esto implica que, al ser dos diferencias iguales, $|\Delta B_i| < 6$, absurdo, luego debe ser $g = h$. \square

A este sistema triple de Steiner, que ha sido obtenido a partir de una familia de diferencias, se le denomina *desarrollo de la familia de diferencias*.

Ejemplo 14. Vamos a aplicar lo anterior al grupo $(\mathbb{F}_7, +)$ con $B = \{0, 1, 3\}$ un $(7, 3, 1)$ -conjunto de diferencias.

Es fácil comprobar que si hacemos $g + B$, $g \in \mathbb{F}_7$, obtenemos un STS(7) con la familia de ternas $\mathcal{B} = \{013, 124, 235, 346, 450, 561, 602\}$, que corresponden con los bloques vistos en el ejemplo 1.

Ahora generalizamos lo anterior a cualquier k , obteniendo así un diseño por bloques de k elementos.

Teorema 2.4. *Sea $(G, +)$ un grupo de orden v . Sea B_1, B_2, \dots, B_t una $(v, k, 1)$ -familia de diferencias definida sobre G , entonces la familia de subconjuntos $g + B_i$, con $g \in G$, $i = 1, 2, \dots, t$, es un 2 - $(v, k, 1)$ BIBD.*

Demostración. Análoga a la del teorema 2.3, cambiando ternas por bloques de k elementos. \square

Ejemplo 15. Sea el grupo $(\mathbb{F}_{13}, +)$, es sencillo comprobar que al hacer el desarrollo de familia de diferencias $g + B$, con $g \in \mathbb{F}_{13}$ y $B = \{0, 1, 3, 9\}$, obtenemos un 2 - $(13, 4, 1)$ BIBD con los siguientes bloques.

$$\mathcal{B} = \{\{0, 1, 3, 9\}, \{1, 2, 4, 10\}, \{2, 3, 5, 11\}, \{3, 4, 6, 12\}, \{0, 4, 5, 7\}, \{1, 5, 6, 8\}, \{2, 6, 7, 9\}, \\ \{3, 7, 8, 10\}, \{4, 8, 9, 11\}, \{5, 9, 10, 12\}, \{0, 6, 10, 11\}, \{1, 7, 11, 12\}, \{0, 2, 8, 12\}\}.$$

A continuación, se exponen una serie de resultados sin demostración sobre cuerpos finitos de orden un número primo que utilizaremos como base para probar un teorema sobre la construcción de familias de diferencias.

Teorema 2.5. *Sea p primo. Entonces, existe un cuerpo finito de p elementos, que es el anillo de enteros módulo p , es decir, $\mathbb{Z}/(p)$.*

De ahora en adelante, denotamos el cuerpo finito de p elementos por $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

Teorema 2.6. *Sean p primo y \mathbb{F}_p cuerpo finito de orden p . Se verifica que el grupo multiplicativo (\mathbb{F}_p^*, \cdot) es un grupo cíclico de orden $p - 1$.*

Corolario 2.7. *Sean $p = 6t + 1$ primo y \mathbb{F}_p cuerpo finito de orden p . Entonces, en el grupo multiplicativo \mathbb{F}_p^* existen elementos de orden $p - 1 = 6t$. Además, si $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$ tiene orden $6t$, α^t tiene orden 6 .*

Lema 2.8. Sean $p = 6t + 1$ primo y \mathbb{F}_p cuerpo finito de p elementos. Consideramos en el grupo \mathbb{F}_p^* una raíz primitiva $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$, es decir, α tiene orden $p - 1$. Entonces, se verifica lo siguiente:

$$\mathbb{F}_p^* = \{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{p-2}\} = \{\alpha^i, \alpha^{i+t}, \alpha^{i+2t}, \alpha^{i+3t}, \alpha^{i+4t}, \alpha^{i+5t} : 0 \leq i < t\}$$

Nótese que $\alpha^0 = \alpha^{p-1} = 1$.

Lema 2.9. Sea $p = 6t + 1$ primo. \mathbb{F}_p cuerpo finito. Consideramos en el grupo \mathbb{F}_p^* una raíz primitiva $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$ y definimos r como $\alpha^r = (\alpha^{2t} - 1)$. Sea el conjunto $\{\alpha^0, \alpha^{2t}, \alpha^{4t}\} = \{1, \alpha^{2t}, \alpha^{4t}\}$, se tiene que las seis diferencias entre sus elementos son distintas y son exactamente:

$$\begin{aligned} \alpha^{2t} - 1 &= \alpha^r & 1 - \alpha^{2t} &= \alpha^{r+3t} \\ \alpha^{4t} - \alpha^{2t} &= \alpha^{r+2t} & \alpha^{2t} - \alpha^{4t} &= \alpha^{r+5t} \\ 1 - \alpha^{4t} &= \alpha^{r+4t} & \alpha^{4t} - 1 &= \alpha^{r+t} \end{aligned}$$

Ahora, utilizando los recursos anteriores, vamos a probar el siguiente resultado que expone una forma de construir una familia de diferencias a partir de un cuerpo finito \mathbb{F}_p , con p primo, y una de sus raíces primitivas.

Teorema 2.10. [11]. Sea $p = 6t + 1$ primo. \mathbb{F}_p cuerpo finito. Consideramos en el grupo \mathbb{F}_p^* una raíz primitiva $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$. Entonces, la familia de conjuntos $A_i = \{\alpha^i, \alpha^{2t+i}, \alpha^{4t+i}\}$, con $0 \leq i < t$, es una $(p, 3, 1)$ -familia de diferencias en $(\mathbb{F}_p, +)$.

Demostración. Para ver que es una $(p, 3, 1)$ -familia de diferencias en $(\mathbb{F}_p, +)$ debemos verificar las dos condiciones de la definición 2.1.

- Para cada $0 \leq i < t$, se verifica que $A_i = \alpha^i \cdot A_0$, con $A_0 = \{\alpha^0, \alpha^{2t}, \alpha^{4t}\}$ y, por tanto, también es cierto que $\Delta A_i = \alpha^i \cdot \Delta A_0$. Sabemos, por el lema 2.9, que ΔA_0 tiene 6 elementos, por lo que cada ΔA_i también los tiene.
- Como $\Delta A_0 = \{\alpha^r, \alpha^{r+t}, \alpha^{r+2t}, \alpha^{r+3t}, \alpha^{r+4t}, \alpha^{r+5t}\}$, resulta que $\Delta A_i = \alpha^i \cdot \Delta A_0 = \{\alpha^{r+i}, \alpha^{r+t+i}, \alpha^{r+2t+i}, \alpha^{r+3t+i}, \alpha^{r+4t+i}, \alpha^{r+5t+i}\}$ para cada i . Por tanto, por el lema 2.8, se tiene que $\bigsqcup_{i=1}^t \Delta A_i = \mathbb{F}_p^*$. □

Veamos en el siguiente ejemplo una aplicación del teorema anterior para el cuerpo finito \mathbb{F}_{13} :

Ejemplo 16. Sea el cuerpo finito \mathbb{F}_{13} . Se tiene que 2 es raíz primitiva del grupo \mathbb{F}_{13}^* . Veamos que $A_1 = \{2^0, 2^4, 2^8\} = \{1, 3, 9\}$ y $A_2 = \{2^1, 2^5, 2^9\} = \{2, 5, 6\}$ constituyen una $(13, 3, 1)$ -familia de diferencias.

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= \{2, 5, 6, 7, 8, 11\} \\ \Delta A_2 &= \{1, 3, 4, 9, 10, 12\} \end{aligned} \quad \implies \quad A_1 \sqcup A_2 = F_{13}^*$$

Por tanto, esto verifica que es una $(13, 3, 1)$ -familia de diferencias, como queríamos probar.

El teorema 2.10 es esencial, ya que se puede demostrar la existencia de familias de diferencias con características específicas a partir de un cuerpo finito de orden un número primo y una raíz primitiva. Esto permite la utilización de estas familias en la construcción de sistemas triples de Steiner y otros diseños combinatorios.

Para finalizar esta sección, se recogen en la siguiente tabla algunos ejemplos de $(v, 3, 1)$ -familias de diferencias, con $v \leq 55$, en el grupo cíclico $(\mathbb{Z}/(v), +)$.

7	0 1 3
13	0 1 4 0 2 7
19	0 1 4 0 2 9 0 5 11
25	0 1 3 0 4 11 0 5 13 0 6 15
31	0 1 3 0 2 24 0 3 8 0 4 17 0 6 16
37	0 1 3 0 4 26 0 5 14 0 6 25 0 7 17 0 8 21
43	0 1 3 0 4 9 0 6 28 0 7 23 0 8 33 0 11 30 0 12 26
49	0 1 3 0 4 9 0 6 17 0 7 23 0 8 30 0 10 31 0 12 36 0 14 34
55	0 1 3 0 4 9 0 6 16 0 7 32 0 8 29 0 11 42 0 12 27 0 14 36 0 17 37

Cuando v no es primo, existen familias de diferencias que no están generadas a partir de un grupo cíclico. Por ejemplo, en el caso $v = 25$ hay otra $(25, 3, 1)$ -familia de diferencias, que está generada sobre el grupo $\mathbb{Z}/(5) \times \mathbb{Z}/(5)$:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{(0, 1), (4, 1), (1, 3)\} & A_2 &= \{(1, 0), (3, 3), (1, 2)\} \\
 A_3 &= \{(3, 2), (2, 1), (0, 2)\} & A_4 &= \{(1, 1), (2, 4), (2, 0)\}
 \end{aligned}$$

2.2. Familia de diferencias relativa

Comenzamos esta sección introduciendo las familias de diferencias con bloque de ciclo corto o *familias de diferencias relativas* y con un ejemplo sencillo.

Definición 2.11. Sean $(G, +)$ un grupo, con $|G|$ un múltiplo de 3, y H un subgrupo de G de tres elementos. Sean B_1, B_2, \dots, B_t una familia de ternas disjuntas de G tales que $\bigsqcup_{i=1}^t \Delta B_i = G \setminus H$. En este caso, llamamos *familia de diferencias relativa al subgrupo H* a la familia $\{B_1, \dots, B_t\}$.

Ejemplo 17. Consideramos el grupo $(\mathbb{Z}/(15), +)$ y el subgrupo $H = \{0, 5, 10\} \subset \mathbb{Z}/(15)$. Veamos que $A_1 = \{0, 1, 4\}$ y $A_2 = \{0, 2, 9\}$ forman una familia de diferencias relativa a H .

$$\Delta A_1 \sqcup \Delta A_2 = \{1, 3, 4, 11, 12, 14\} \sqcup \{2, 6, 7, 8, 9, 13\} = \mathbb{Z}/(15) \setminus H$$

Por tanto, es una familia de diferencias relativa al subgrupo H de $\mathbb{Z}/(15)$.

Además vemos que, si para cada $g \in \mathbb{Z}/(15)$ hacemos $g + H$, obtenemos que H tiene cinco clases laterales en $\mathbb{Z}/(15)$:

$$H = \{0, 5, 10\}, \quad 1+H = \{1, 6, 11\}, \quad 2+H = \{2, 7, 12\}, \quad 3+H = \{3, 8, 13\}, \quad 4+H = \{4, 9, 14\}$$

Para generalizar lo anterior, recordamos que si $|G| = 3k$, por el Teorema de Lagrange, H tiene exactamente $\frac{|G|}{|H|} = \frac{3k}{3} = k$ clases laterales en G y, por tanto, el grupo cociente G/H está formado por k elementos que coinciden con las clases laterales.

A continuación, veremos un teorema que muestra cómo construir un sistema triple de Steiner a partir de una familia de diferencias con bloque corto.

Teorema 2.12. Sea $(G, +)$ un grupo de orden $v = 3k$. Sea B_1, B_2, \dots, B_t una familia de diferencias

relativa al subgrupo H de tres elementos. Entonces, la familia de subconjuntos $g + B_i$, $g + H$ con $g \in G$, $i = 1, 2, \dots, t$, es un STS(v) en G .

Demostración. Dados dos elementos distintos $x, y \in G$, vamos a probar que existe una única terna de la forma $g + B_i$ o $g + H$, con $g \in G$, en la que están.

Tenemos dos casos:

- Si $x - y \in G \setminus H = \bigsqcup_{i=1}^t \Delta B_i$, tenemos que, por ser unión disjunta, existe un único i tal que $x - y \in \Delta B_i$. Como consecuencia, existen $a, b \in B_i$ tales que $x - y = a - b$ y, por tanto, $x - a = y - b = g \in G \setminus H$. Reescribiendo la expresión anterior obtenemos:

$$x = g + a \in g + B_i \qquad y = g + b \in g + B_i$$

Veamos que la terna $g + B_i$ es la única a la que pertenecen por reducción al absurdo.

Supongamos que x, y están también en la terna $h + B_j$, $h \in G$. Entonces, $x - y \in \Delta B_j$, pero al ser disjuntos, debe ser $i = j$. Por otra parte, tenemos que $B_i = \{b_1, b_2, b_3\}$ y si $g \neq h$ tendríamos, por ejemplo, que $x = g + b_3 = h + b_1$ e $y = g + b_2 = h + b_3$ y por tanto sería $x - y = b_3 - b_2 = b_1 - b_3$. Esto es un absurdo, ya que así sería $|\Delta B_i| < 6$, luego $g = h$.

- Si $x - y \in H$, sabemos que son equivalentes las siguientes propiedades:

$$x - y \in H \iff x \in y + H \iff y - x \in H \iff y \in x + H \iff x + H = y + H$$

Esto implica que x, y pertenecen a la misma clase lateral, que es $x + H = y + H$, por lo que existe un $g \in G$ tal que $g + H = x + H = y + H$. \square

Nótese que, en la construcción anterior, $v = 3k$ y por tanto un STS($3k$) tendrá $\frac{3k(3k-1)}{6} = \frac{3k^2 - k}{2}$ ternas. Por otra parte, vemos que hay $3k \cdot t$ ternas del tipo $g + B_i$ y k de la forma $g + H$ y, por tanto, teniendo en cuenta que $|G| = |G \setminus H| + |H| = 6t + 3 = 3k$, si sustituímos en la suma $3k \cdot t + k$ el valor de $t = \frac{k-1}{2}$, obtenemos el número total de ternas.

Definición 2.13. En la situación anterior llamamos *bloque de ciclo corto* o *bloque corto* al subgrupo H .

Ejemplo 18. Retomando el ejemplo 17, veamos cómo construir un STS(15) con un bloque de ciclo corto. Sabemos que tendrá 35 ternas de las cuales 5 son las clases laterales de H en G y el resto son de la forma $g + A_i$, con $g \in G$, $i = 1, 2$.

$g + H :$	{0, 5, 10}	{1, 6, 11}	{2, 7, 12}	{3, 8, 13}	{4, 9, 14}
$g + A_1 :$	{0, 1, 4}	{1, 2, 5}	{2, 3, 6}	{3, 4, 7}	{4, 5, 8}
	{5, 6, 9}	{6, 7, 10}	{7, 8, 11}	{8, 9, 12}	{9, 10, 13}
	{10, 11, 14}	{0, 11, 12}	{1, 12, 13}	{2, 13, 14}	{0, 3, 14}
$g + A_2 :$	{0, 2, 9}	{1, 3, 10}	{2, 4, 11}	{3, 5, 12}	{4, 6, 13}
	{5, 7, 14}	{0, 6, 8}	{1, 7, 9}	{2, 8, 10}	{3, 9, 11}
	{4, 10, 12}	{5, 11, 13}	{6, 12, 14}	{0, 7, 13}	{1, 8, 14}

Las 35 ternas anteriores forman, junto con $\mathbb{Z}/(15)$, un STS(15) con el bloque de ciclo corto $H = \{0, 5, 10\}$.

Finalmente, se expone una tabla donde se recogen las familias de diferencias relativas para $v \leq 45$ generadas sobre el grupo cíclico $(\mathbb{Z}/(v), +)$. Entre corchetes [] está indicado el bloque de ciclo corto correspondiente a cada familia.

15	0 1 4	0 2 9	[0 5 10]		
21	0 1 3	0 4 12	0 5 11	[0 7 14]	
27	0 1 3	0 4 11	0 5 15	0 6 14	[0 9 18]
33	0 1 3	0 4 10	0 5 18	0 7 19	0 8 17 [0 11 22]
39	0 1 3	0 4 18	0 5 27	0 6 16	0 7 15 0 9 20 [0 13 26]
45	0 1 3	0 4 10	0 5 28	0 7 34	0 8 32 0 9 29 0 12 26 [0 15 30]

Capítulo 3

Construcciones directas

En este capítulo se van a tratar algunas construcciones particulares de sistemas triples de Steiner. En primer lugar, veremos un STS($2^n - 1$) sobre el grupo $(\mathbb{F}_2^n \setminus \{\bar{0}\}, +)$ y, posteriormente, un STS(3^n) sobre el grupo $(\mathbb{F}_3^n, +)$. Además, este capítulo se completará con otras dos construcciones sobre los planos afines \mathbb{F}_7^2 y \mathbb{F}_{13}^2 , respectivamente, así como una tercera construcción que será una combinación de estas dos anteriores en \mathbb{F}_{13}^2 .

En los capítulos previos, hemos visto otras construcciones directas como el teorema 2.10, o la *construcción de Bose*, presentada en el teorema 1.7, que, como ya se mencionó, es esencial para la generación de sistemas triples de Steiner.

Para el desarrollo de estas construcciones se ha recurrido a [13] y [3].

Comenzamos con la primera construcción comentada.

Proposición 3.1. *Sea el grupo producto $(\mathbb{F}_2^n, +)$ con la suma componente a componente. Sea $X = \mathbb{F}_2^n \setminus \{\bar{0}\}$. Sean las ternas $\{x, y, z\}$, con $x, y, z \in X$ y tales que $x + y + z = \bar{0}$. Entonces, X con las ternas definidas anteriormente, constituye un STS($2^n - 1$).*

Demostración. Veamos que dados dos elementos distintos $x, y \in X$, existe una única terna a la que pertenecen. Para ello, debemos encontrar un $z \in X$ único tal que $x + y + z = \bar{0}$.

Sea $z = x + y$, veamos que se verifica la condición dada:

$$z + x + y = (x + y) + x + y = (x + y) + (x + y) = \bar{0}$$

Recordemos que la última igualdad es cierta por estar en un cuerpo de característica 2.

Nótese que $z \neq x$ y $z \neq y$, ya que si lo fuese, por ejemplo $z = y$, tendríamos $y = x + y$ y por tanto sería $x = 0$. Esto es absurdo, puesto que estamos en $\mathbb{F}_2^n \setminus \{\bar{0}\}$.

Además, resulta que z es único, ya que si tuviésemos $x + y + z_1 = \bar{0}$ y $x + y + z_2 = \bar{0}$, es obvio que $z_1 = z_2$. \square

Proposición 3.2. *Sea el grupo producto $(\mathbb{F}_3^n, +)$ con la suma componente a componente. Sea $X = \mathbb{F}_3^n$. Sean las ternas $\{x, y, z\}$, con $x, y, z \in X$ y tales que $x + y + z = \bar{0}$. Entonces, X es un STS(3^n) con las ternas definidas.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Probemos que existe una terna única a la que pertenecen, es decir, veamos que existe un único z en X de modo que se cumpla la condición $x + y + z = \bar{0}$.

Sea $z = 2x + 2y$. Vamos a comprobar que verifica la igualdad anterior.

$$x + y + z = x + y + 2x + 2y = 3x + 3y = \bar{0}$$

En este caso, al estar en un cuerpo de característica 3, se cumple que $3x = \bar{0} = 3y$.

Nótese que $z \neq x$ y $z \neq y$, ya que si fuera, por ejemplo, $z = x$, tendríamos $x = 2x + 2y$, es decir, $-x = 2y = -y$, por estar en un cuerpo de característica 3, y como consecuencia sería $x = y$, absurdo.

Para ver que z es único, nos fijamos en que si tuviéramos $x + y + z_1 = \bar{0}$ y, por otra parte, $x + y + z_2 = \bar{0}$, está claro que $z_1 = z_2$. \square

Ahora, veamos otras dos construcciones sobre planos afines. La primera trata sobre \mathbb{F}_7^2 , donde vamos a definir un STS(49), y en la segunda, con un procedimiento similar, vamos a obtener un STS(169) en el plano afín \mathbb{F}_{13}^2 .

Proposición 3.3. *Sea $X = \mathbb{F}_7^2$ plano afín. Sea (X, \mathcal{A}) un 2-(49, 7, 1) BIBD, donde los bloques de \mathcal{A} son las rectas del plano afín. Entonces, existe un STS(49), al que llamamos (X, \mathcal{B}) , definido sobre \mathbb{F}_7^2 .*

Demostración. Por una parte, sabemos que \mathcal{A} está constituido por las 56 rectas del plano afín \mathbb{F}_7^2 y junto con X conforman un 2-(49, 7, 1) BIBD.

Cada una de estas rectas tiene 7 puntos, luego definiendo un STS(7) obtenemos 7 ternas por recta, es decir, $56 \cdot 7 = 392$ ternas en total, que constituyen la familia de ternas \mathcal{B} . Como cada par de rectas, si se

cortan, solo tienen un punto en común, está claro que dadas dos ternas distintas a lo sumo coincidirán en un punto. Además, para cada par de puntos distintos hay una única recta que pasa por ellos, es decir, una única terna del STS(7) de esa recta que los contiene. Por lo tanto, hemos construido un STS(49) sobre el plano finito \mathbb{F}_7^2 . \square

Proposición 3.4. *Sea $X = \mathbb{F}_{13}^2$ plano afín. Sea (X, \mathcal{A}) un 2-(169, 13, 1) BIBD, donde los bloques de \mathcal{A} son las rectas del plano afín. Entonces, existe un STS(169), al que llamamos (X, \mathcal{B}) , definido sobre \mathbb{F}_{13}^2 .*

Demostración. Análogo al resultado anterior. En este caso, se define un STS(13) en cada una de las 182 rectas del plano afín \mathbb{F}_{13}^2 . De esta forma obtenemos $b = \frac{13 \cdot 12}{6} = 26$ ternas por cada recta, es decir, las $182 \cdot 26 = 4732$ ternas distintas de \mathcal{B} . Como para cada par de puntos existe una única recta que pasa por ellos, se deduce que la terna que los contiene pertenece al STS(13) de dicha recta. Por tanto, hemos construido un STS(169) sobre \mathbb{F}_{13}^2 . \square

Proposición 3.5. *Sea \mathbb{F}_{13}^2 plano afín. Sean las 7 rectas paralelas $x = 0, x = 1, \dots, x = 6$ en \mathbb{F}_{13}^2 . Sea $X = \{(x, y) : x \in \{0, 1, \dots, 6\}, y \in \mathbb{F}_{13}^2\}$. Entonces, existe un STS(91), que denotamos por (X, \mathcal{B}) , definido en \mathbb{F}_{13}^2 .*

Demostración. En primer lugar, definimos un STS(13) en cada una de las 7 rectas verticales, las cuales tienen 13 puntos. Si calculamos el número total de ternas en las rectas verticales resulta $b \cdot 7 = \frac{13 \cdot 12}{6} \cdot 7 = 26 \cdot 7 = 182$ ternas.

Por otro lado, hay 169 rectas horizontales y oblicuas, es decir, aquellas que verifican $y = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{F}_{13}$ y tienen 7 puntos del conjunto X cada una. Definiendo un STS(7) en cada recta, obtenemos $b \cdot 169 = 7 \cdot 169 = 1183$ ternas.

Si sumamos las dos cantidades anteriores resulta $182 + 1183 = 1365 = \frac{91 \cdot 90}{6}$, es decir, el número total de ternas de un STS(91).

Finalmente, dados dos puntos distintos, existe una única recta que los contiene. Si esa recta es una de las verticales, la terna que contiene al par de puntos pertenece a la familia de ternas del STS(13) de dicha recta. Análogamente, si la recta que pasa por el par de puntos es horizontal u oblicua, la terna buscada forma parte del STS(7) de esa recta. Por tanto, como las rectas intersecan a lo sumo en un punto, hemos construido un STS(91) sobre \mathbb{F}_{13}^2 . \square

Capítulo 4

Construcciones inductivas

En este capítulo, estudiaremos cómo ampliar sistemas triples de Steiner a partir de uno existente. Para ello, identificaremos los diferentes tipos de ternas que se presentan en cada nuevo diseño y demostraremos que, dados dos elementos distintos del conjunto, existe una única terna que los contiene. Finalmente, verificaremos que el número total de ternas calculado con la fórmula conocida coincide con la suma de ternas de cada tipo.

En la mayoría de los casos, el sistema inicial resulta ser un subsistema del sistema que se ha construido a partir de él, como se observará en cada una de las secciones.

Para desarrollar este capítulo se han consultado las fuentes [10], [11], [3], [13] y [14].

4.1. Construcción producto

En este primer resultado partimos de dos sistemas triples de Steiner y vamos a construir un sistema triple de Steiner que tiene como conjunto base el producto cartesiano de los dos conjuntos iniciales.

Proposición 4.1. *Sea (V_1, \mathcal{B}_1) un $STS(v_1)$ y sea (V_2, \mathcal{B}_2) otro $STS(v_2)$. Existe un sistema triple de Steiner, $STS(v_1v_2)$, definido en el conjunto $V_1 \times V_2$.*

Demostración. Definimos la familia de ternas \mathcal{B} , que estará compuesta por bloques de la forma

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ y de modo que cumpla una de estas tres condiciones (figura 5):

- (a) $\{(x_1, y), (x_2, y), (x_3, y)\}$, con $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{B}_1$.

(b) $\{(x, y_1), (x, y_2), (x, y_3)\}$, con $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{B}_2$.

(c) $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$, con $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{B}_1$ y $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{B}_2$.

Para ver que forma un STS(v_1v_2), veamos que dados dos elementos distintos de $V_1 \times V_2$, existe una terna única de \mathcal{B} que los contiene.

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos elementos distintos de $V_1 \times V_2$.

- Si $y_1 = y_2$, por la condición (a), existe un $x_3 \in V_1$ de forma que $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{B}_1$, es decir, (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) = (x_2, y_1)$ pertenecen a la terna $\{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1)\} \in \mathcal{B}$.
- Si $x_1 = x_2$, por la condición (b), existe un $y_3 \in V_2$ de modo que $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{B}_2$, es decir, (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) = (x_1, y_2)$ están en la terna $\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3)\} \in \mathcal{B}$.
- Si $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, por (c), existen $x_3 \in V_1$ e $y_3 \in V_2$, tal que $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{B}_1$ y $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{B}_2$. Por tanto, (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en la terna $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\} \in \mathcal{B}$. □

Veamos que la suma de las ternas coincide con el número total de bloques:

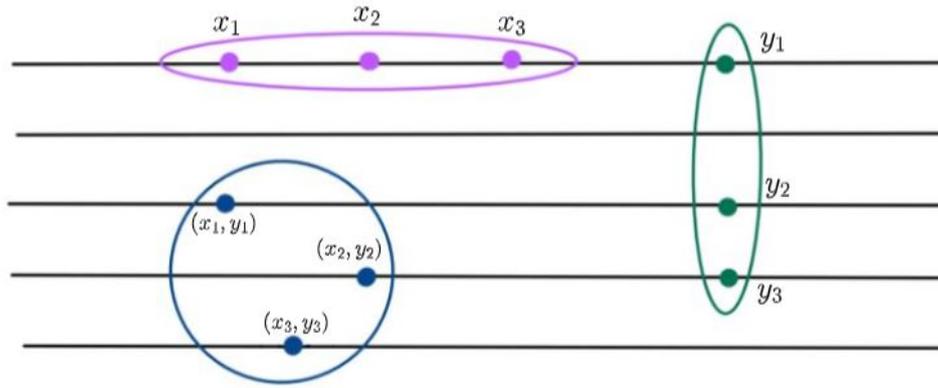
$$\text{Ternas (a): } v_2 \cdot \frac{v_1(v_1 - 1)}{6}$$

$$\text{Ternas (b): } v_1 \cdot \frac{v_2(v_2 - 1)}{6}$$

$$\text{Ternas (c): } 6 \cdot \frac{v_1(v_1 - 1)}{6} \frac{v_2(v_2 - 1)}{6}$$

La suma de estas tres cantidades es $\frac{v_1v_2(v_1v_2 - 1)}{6}$, que es el número total de ternas de un STS(v_1v_2).

En la siguiente figura observamos los distintos tipos de ternas de \mathcal{B} . En concreto, la clase (a) de color lila, la (b) de verde y la (c) de azul.

Figura 5: STS($v_1 \times v_2$)

Nota: Se tiene que, para cada $y \in V_2$, $(V_1 \times \{y\}, \mathcal{B}_1)$ es isomorfo a (V_1, \mathcal{B}_1) y, para cada $x \in V_1$, $(V_2 \times \{x\}, \mathcal{B}_2)$ es isomorfo a (V_2, \mathcal{B}_2) . Por tanto, $(V_1 \times V_2, \mathcal{B})$ tienen $v_1 + v_2$ subsistemas.

Las construcciones de un STS(3v) y de un STS(7v) a partir de un STS(v), son dos casos particulares de la construcción producto que acabamos de estudiar.

4.2. Construcción de STS(2v + 1)

A continuación, en esta segunda construcción, tomamos un sistema triple de Steiner, lo duplicamos y añadimos un elemento a mayores que es ∞ . El resultado es un STS(2v + 1).

Proposición 4.2. Sea (X, \mathcal{A}) un STS(v). Existe un sistema triple de Steiner, STS(2v + 1), sobre el conjunto $Y = \{\infty\} \cup (X \times \{1, 2\})$.

Demostración. Definimos la siguiente familia de ternas \mathcal{B} (figura 6):

- (a) $\{\infty, (x, 1), (x, 2)\}$, para cada $x \in X$.
- (b) $\{(x, 1), (y, 1), (z, 2)\}$, con $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$.
- (c) $\{(x, 2), (y, 2), (z, 2)\}$, con $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$.

Dados dos elementos distintos de Y , veamos que existe una única terna de \mathcal{B} a la que pertenecen. Estudiemos todos los casos posibles:

- Si uno de los elementos es ∞ , el otro será de la forma (x, n) , con $n \in \{1, 2\}$, luego, por (a), la terna resultante será $\{\infty, (x, 1), (x, 2)\} \in \mathcal{B}$.
- Si ninguno de los dos es ∞ , los elementos son de la forma $(x, n), (y, m)$, con $x, y \in X$ y $m, n \in \{1, 2\}$.
 - Si $x = y$, por (a), pertenecen a la terna $\{\infty, (x, 1), (x, 2)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $x \neq y, n = m = 1$, por (b), existe $z \in X$ de modo que $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$ y la terna en la que están es $\{(x, 1), (y, 1), (z, 2)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $x \neq y, n = m = 2$, por (c), existe $z \in X$ tal que $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$ y pertenecen a la terna $\{(x, 2), (y, 2), (z, 2)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $x \neq y, n \neq m$, por (b), existe $z \in X$ de forma que $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$ y la terna buscada es $\{(x, 1), (y, 2), (z, 1)\} \in \mathcal{B}$, en el caso $n = 1, m = 2$, y $\{(x, 2), (y, 1), (z, 1)\} \in \mathcal{B}$, si $n = 2, m = 1$. □

Nótese en el caso (b) que, si $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$, tenemos como posibles ternas $\{(x, 1), (y, 1), (z, 2)\}$, $\{(x, 1), (y, 2), (z, 1)\}$ y $\{(x, 2), (y, 1), (z, 1)\}$, luego, la suma de ternas queda del siguiente modo:

Ternas (a): v

$$\text{Ternas (b): } 3 \cdot \frac{v(v-1)}{6}$$

$$\text{Ternas (c): } \frac{v(v-1)}{6}$$

La suma resulta $\frac{2v(2v+1)}{6}$, que coincide con el número de bloques de un STS($2v+1$).

Nota: Vemos que $(X \times \{2\}, \mathcal{A})$, que es isomorfo a (X, \mathcal{A}) , es subsistema de (Y, \mathcal{B}) , ya que está contenido en el conjunto Y y, por (c), las ternas de \mathcal{A} están en la familia de ternas \mathcal{B} .

En la siguiente figura vemos representadas los distintos tipos de ternas de \mathcal{B} . El tipo (a) se corresponde con la terna verde, el (b) con la azul y, finalmente, el (c) con la morada.

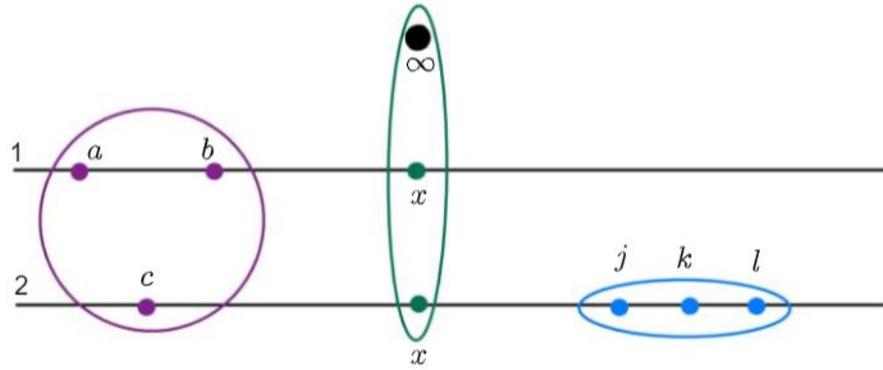


Figura 6: $STS(2v + 1)$

4.3. Construcción de $STS(3v - 2)$

Ahora, veamos cómo construir un $STS(3v - 2)$ a partir de un $STS(v)$. Para ello, tomamos el conjunto X y le quitamos un elemento que denominamos a . Posteriormente, triplicamos el conjunto $X \setminus \{a\}$ y, finalmente, volvemos a añadir el elemento a al conjunto que resulta del paso anterior, es decir a $(X \setminus \{a\}) \times \{1, 2, 3\}$.

Proposición 4.3. *Sea (X, \mathcal{A}) un $STS(v)$. Existe un sistema triple de Steiner, $STS(3v - 2)$ sobre el conjunto $Y = ((X \setminus \{a\}) \times \{1, 2, 3\}) \cup \{a\}$.*

Demostración. Definimos la familia de ternas \mathcal{B} como sigue (figura 7):

- (a) $\{a, (b, 1), (c, 1)\}$, con $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}$
- (b) $\{a, (b, 2), (c, 2)\}$, con $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}$
- (c) $\{a, (b, 3), (c, 3)\}$, con $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}$

Si $a \notin \{x, y, z\}$ tenemos las ternas:

- (d) $\{(x, 1), (y, 1), (z, 1)\}$, con $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$
- (e) $\{(x, 2), (y, 2), (z, 2)\}$, con $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$
- (f) $\{(x, 3), (y, 3), (z, 3)\}$, con $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$

Además, si dotamos a $X \setminus \{a\}$ con una estructura de grupo, como por ejemplo $\mathbb{Z}/(v-1)$, obtenemos el siguiente tipo de ternas.

$$(g) \{(f, 1), (g, 2), (f + g, 3)\}, \text{ con } f, g \in X \setminus \{a\}$$

Probemos que estas ternas constituyen un STS($3v-2$) sobre el conjunto Y .

Dados dos elementos distintos de Y , veamos que existe una única terna de \mathcal{B} que los contiene.

- Si uno de ellos es a , el otro tiene que ser de la forma (b, n) , con $b \in X \setminus \{a\}$, $n \in \{1, 2, 3\}$. Según el valor que tome n estaremos en los casos (a), (b) o (c) respectivamente y, por tanto, existe $c \in X \setminus \{a\}$ tal que $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}$. En consecuencia, la terna buscada es $\{a, (b, n), (c, n)\} \in \mathcal{B}$.
- Si ninguno de los dos es a , son entonces de la forma $(x, n), (y, m)$ y encontramos cinco situaciones distintas:
 - Si $n = m$, existe un $z \in X$ tal que $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$ y, según su valor, la terna tendrá una estructura u otra.
 - Si $z = a$, volvemos a estar en los casos (a), (b), (c) según el valor de $n = m$ y la terna buscada es $\{a, (x, n), (y, n)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $z \neq a$, por (d), (e) o (f), según el valor de $n = m$, la terna a la que pertenecen es $\{(x, n), (y, n), (z, n)\} \in \mathcal{B}$
 - Si $n \neq m$, por (f) existe una terna que contiene a los dos elementos dados y será de una de las formas citadas a continuación.
 - Si $n \neq 3 \neq m$, la terna que buscamos es $\{(x, n), (y, m), (x + y, 3)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $n = 3$, tenemos que $x = y + z$, es decir, $z = x - y$. Por tanto, la terna es $\{(y, m), (x - y, p), (x, 3)\} \in \mathcal{B}$, con $p \in \{1, 2\} \setminus \{m\}$.
 - Si $m = 3$, tenemos $y = x + z$, es decir, $z = y - x$, luego la terna a la que pertenecen es $\{(x, n), (y - x, p), (y, 3)\} \in \mathcal{B}$, con $p \in \{1, 2\} \setminus \{m\}$. □

Si hacemos el recuento de ternas tenemos:

$$\text{Ternas (a), (b) y (c): } 3 \cdot \frac{v-1}{2}$$

Ternas (d), (e) y (f): $\frac{v^2 - 4v + 3}{2}$

Ternas (g): $(v - 1)^2$

Por tanto, la suma total es $\frac{3v^2 - 5v + 2}{2}$, que coincide con el número de bloques de un STS(3v - 2).

Nota: Se tiene que los sistemas $((X \setminus a \times \{k\}) \cup a, \mathcal{A})$, con $k \in \{1, 2, 3\}$, son subsistemas de (Y, \mathcal{B}) . Además, estos tres subsistemas son isomorfos al STS(v) inicial.

Del mismo modo, convendría destacar que si usamos grupos no isomorfos de orden $v - 1$ distintos de $\mathbb{Z}/(v - 1)$, obtendremos probablemente otros sistemas triples de Steiner STS(3v - 2) no isomorfos entre sí.

En la figura que vemos a continuación aparecen dibujados ejemplos de algunos tipos de ternas de \mathcal{B} . De color azul está representada una terna del tipo (b), de verde el tipo (d) y de rojo el (g). Los tipos restantes se representarían de una forma similar.

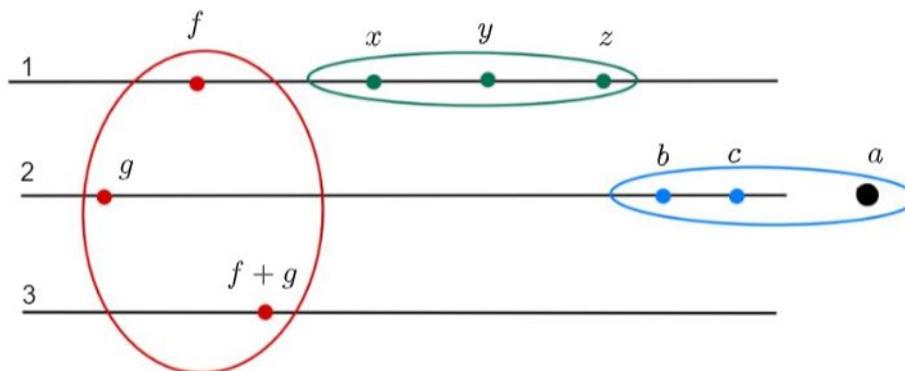


Figura 7: STS(3v - 2)

4.4. Construcción de STS(3v - 6)

En esta cuarta sección, vamos a construir un STS(3v - 6). En este caso, el conjunto final Y será la unión de dos conjuntos: el conjunto X sin una terna de \mathcal{A} , triplicado en tres pisos y la unión de esto con la terna retirada.

Proposición 4.4. *Sea (X, \mathcal{A}) un STS(v). Sea $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}$ una terna prefijada. Existe un sistema triple de Steiner, STS(3v - 6) sobre el conjunto $Y = ((X \setminus \{a, b, c\}) \times \{1, 2, 3\}) \cup \{a, b, c\}$.*

Demostración. Definimos la familia de ternas \mathcal{B} del nuevo STS($3v - 6$) de la siguiente forma (figura 8):

- (a) $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}$
- (b) $\{a, (j, 1), (k, 1)\}$, con $\{a, j, k\} \in \mathcal{A}$
- (c) $\{a, (j, 2), (k, 2)\}$, con $\{a, j, k\} \in \mathcal{A}$
- (d) $\{a, (j, 3), (k, 3)\}$, con $\{a, j, k\} \in \mathcal{A}$
- (e) $\{b, (p, 1), (q, 1)\}$, con $\{b, p, q\} \in \mathcal{A}$
- (f) $\{b, (p, 2), (q, 2)\}$, con $\{b, p, q\} \in \mathcal{A}$
- (g) $\{b, (p, 3), (q, 3)\}$, con $\{b, p, q\} \in \mathcal{A}$
- (h) $\{c, (r, 1), (s, 1)\}$, con $\{c, r, s\} \in \mathcal{A}$
- (i) $\{c, (r, 2), (s, 2)\}$, con $\{c, r, s\} \in \mathcal{A}$
- (j) $\{c, (r, 3), (s, 3)\}$, con $\{c, r, s\} \in \mathcal{A}$

Si $\{a, b, c\} \cap \{x, y, z\} = \emptyset$, tenemos las ternas:

- (k) $\{(x, 1), (y, 1), (z, 1)\}$, con $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$
- (l) $\{(x, 2), (y, 2), (z, 2)\}$, con $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$
- (m) $\{(x, 3), (y, 3), (z, 3)\}$, con $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$

Si damos una estructura de grupo en $X \setminus \{a, b, c\}$, por ejemplo $\mathbb{Z}/(v - 3)$, consideramos las ternas:

- (n) $\{(f, 1), (g, 2), (f + g, 3)\}$, con $f, g \in X \setminus \{a, b, c\}$

Veamos que es un STS($3v - 6$).

Dados dos elementos distintos de Y , vamos a comprobar que existe una única terna de \mathcal{B} a la que pertenecen.

- Si los dos elementos están en $\{a, b, c\}$, por (a), la terna será $\{a, b, c\} \in \mathcal{B}$.
- Si solo uno de ellos es cualquiera de los elementos a, b, c , el otro es entonces de la forma (x, n) , con $x \in X \setminus \{a, b, c\}$, $n \in \{1, 2, 3\}$. Distinguimos los siguientes casos según el valor de n y del elemento sustraído de X .
 - Si es a , dependiendo del valor de n estaremos entre los tipos de ternas (b), (c) y (d). Por tanto, existe un único $y \in X \setminus \{a, b, c\}$ tal que $\{a, x, y\} \in \mathcal{A}$ y la terna buscada es $\{a, (x, n), (y, n)\} \in \mathcal{B}$.
 - Análogamente, si es b , la terna buscada será la del tipo (e), (f) o (g), es decir, un único $y \in X \setminus \{a, b, c\}$ con $\{b, x, y\} \in \mathcal{A}$ y la terna en la que están es $\{b, (x, n), (y, n)\} \in \mathcal{B}$.
 - Por último, si es c , de nuevo existe un $y \in X \setminus \{a, b, c\}$ único con $\{c, x, y\} \in \mathcal{A}$ y la terna a la que pertenecen es del tipo (h), (i) o (j), y es de la forma $\{c, (x, n), (y, n)\} \in \mathcal{B}$.
- Si ninguno de los dos es a, b o c , son entonces de la forma $(x, n), (y, m)$ y tenemos las siguientes posibilidades.
 - Si $n = m$, existe un $z \in X$ tal que $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$ y, según su valor, la terna será de una forma u otra.
 - Si $z \in \{a, b, c\}$, volvemos a estar en cualquiera de los casos desde el (b) hasta el (j).
 - Si $z \notin \{a, b, c\}$, por (k), (l) o (m), según el valor de $n = m$, la terna a la que pertenecen es $\{(x, n), (y, n), (z, n)\} \in \mathcal{B}$
 - Si $n \neq m$, por (n) existe una terna que contiene a los dos elementos dados. Según el valor de n y m , nos situamos en uno de los casos citados a continuación.
 - Si $n \neq 3 \neq m$, la terna que buscamos es $\{(x, n), (y, m), (x + y, 3)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $n = 3$, entonces tenemos que $x = y + z$, es decir, $z = x - y$. Por ello, la terna es $\{(y, m), (x - y, p), (x, 3)\} \in \mathcal{B}$, con $p \in \{1, 2\} \setminus \{m\}$.
 - Si $m = 3$, tenemos $y = x + z$, es decir, $z = y - x$, y como consecuencia, la terna a la que pertenecen es $\{(x, n), (y - x, p), (y, 3)\} \in \mathcal{B}$, con $p \in \{1, 2\} \setminus \{m\}$. □

Una vez más, si hacemos el recuento de ternas vemos que coincide con el número total de bloques de un STS($3v - 6$), que es $b = \frac{3v^2 - 13v + 14}{2}$.

Por una parte, si nos damos cuenta, las ternas desde el tipo (b) hasta el (m) coinciden con el número de bloques de un $STS(v)$ menos la terna $\{a, b, c\}$, que es el tipo (a). Si multiplicamos este valor por 3, que es el número de pisos que hay, y sumamos la terna (a), resulta $\frac{v^2 - v - 4}{2}$. Por otra parte, al igual que vimos en la construcción anterior, el número total de ternas del tipo (n) es igual a $(v - 3)^2$. Si sumamos estas dos cantidades obtenemos b .

En la siguiente figura vemos las ternas de \mathcal{B} que hemos definido. En concreto, en color negro la terna prefijada $\{a, b, c\}$, en morado un ejemplo de las ternas (b), (g) e (i), en verde una terna del tipo (k) y, por último, en azul una terna de (n).

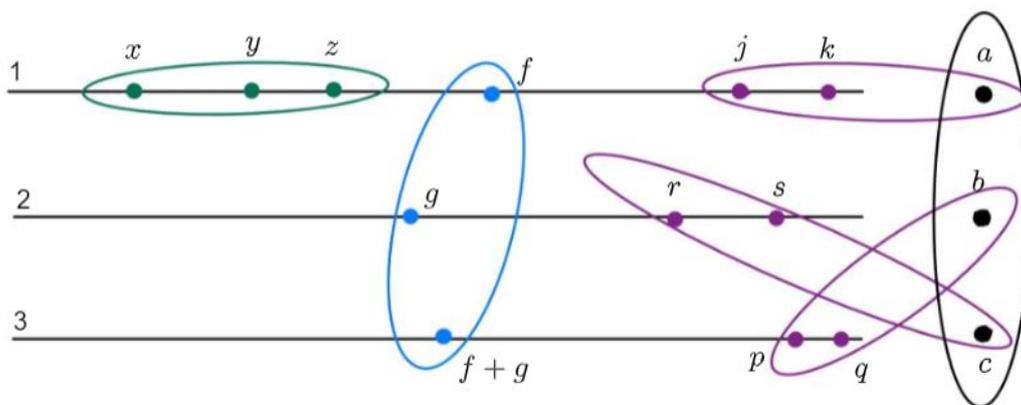


Figura 8: $STS(3v - 6)$

Nota: En este caso tenemos que los sistemas (X_i, \mathcal{A}) , con $X_i = (X \setminus \{a, b, c\} \times \{i\}) \cup \{a, b, c\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, son subsistemas de (Y, \mathcal{B}) . Por tanto, (Y, \mathcal{B}) tiene tres subsistemas que son isomorfos al sistema inicial (X, \mathcal{A}) .

Además, es importante resaltar que si utilizamos grupos no isomorfos de orden $v - 3$ diferentes a $\mathbb{Z}/(v - 3)$, es probable que construyamos otros sistemas triples de Steiner $STS(3v - 6)$ que no sean isomorfos entre sí.

4.5. Construcción de $STS(3v - 14)$

En esta quinta construcción partimos de un $STS(v)$ con la particularidad de tener un $STS(7)$ como subsistema. El conjunto de puntos del sistema triple de Steiner final será la unión del $STS(7)$ y el

conjunto inicial sin dicho subsistema multiplicado en tres pisos.

Proposición 4.5. *Sea (X, \mathcal{A}) un $STS(v)$, con $v \geq 15$. Sea (Z, \mathcal{A}') un subsistema de (X, \mathcal{A}) y que es, a su vez, un $STS(7)$. Entonces, existe un sistema triple de Steiner, $STS(3v - 14)$ sobre el conjunto $Y = ((X \setminus Z) \times \{1, 2, 3\}) \cup Z$.*

Demostración. Vamos a definir la familia de ternas \mathcal{B} del $STS(3v - 14)$ que vamos a construir (figura 9).

En primer lugar, las ternas del subsistema:

$$(a) \{a, b, c\} \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$$

Si $\alpha \in Z$ y $\beta, \gamma \in X \setminus Z$:

$$(b) \{\alpha, (\beta, 1), (\gamma, 1)\}, \text{ con } \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathcal{A}$$

$$(c) \{\alpha, (\beta, 2), (\gamma, 2)\}, \text{ con } \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathcal{A}$$

$$(d) \{\alpha, (\beta, 3), (\gamma, 3)\}, \text{ con } \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathcal{A}$$

Si $Z \cap \{x, y, z\} = \emptyset$, tenemos las ternas:

$$(e) \{(x, 1), (y, 1), (z, 1)\}, \text{ con } \{x, y, z\} \in \mathcal{A}$$

$$(f) \{(x, 2), (y, 2), (z, 2)\}, \text{ con } \{x, y, z\} \in \mathcal{A}$$

$$(g) \{(x, 3), (y, 3), (z, 3)\}, \text{ con } \{x, y, z\} \in \mathcal{A}$$

Si damos una estructura de grupo en $X \setminus Z$, por ejemplo $\mathbb{Z}/(v - 7)$, consideramos las ternas:

$$(h) \{(f, 1), (g, 2), (f + g, 3)\}, \text{ con } f, g \in X \setminus Z$$

Veamos que es un $STS(3v - 14)$.

Dados dos elementos distintos de Y , veamos que existe una única terna de \mathcal{B} en la que están.

- Si los dos elementos a, b están en Z , por (a), existe un punto $c \in Z$ con el que constituyen una terna del $STS(7)$, luego $\{a, b, c\} \in \mathcal{B}$.

- Si solo uno de ellos pertenece a Z , al que denotamos $\alpha \in Z$, el otro entonces es de la forma (β, n) , con $\beta \in X \setminus Z$, $n \in \{1, 2, 3\}$. Según el valor de n , por (b), (c) o (d), existe un punto $\gamma \in X \setminus Z$ con el que forman la terna que buscamos, que es $\{\alpha, (\beta, n), (\gamma, n)\} \in \mathcal{B}$.
- Si ninguno de los dos está en Z , deben ser de la forma $(x, n), (y, m)$ y tenemos las siguientes posibilidades.
 - Si $n = m$, existe un $z \in X$ tal que $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$ y, según su valor, diferenciamos los casos que vemos a continuación:
 - Si $z \in Z$, estamos de nuevo en uno de los casos entre el (b), (c) o (d).
 - Si $z \notin Z$, según el valor de $n = m$, por (e), (f) o (g) la terna es $\{(x, n), (y, n), (z, n)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $n \neq m$, por (h) existe la terna que buscamos. Según el valor de n y m , nos situamos en uno de los siguientes casos.
 - Si $n \neq 3 \neq m$, la terna es $\{(x, n), (y, m), (x + y, 3)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $n = 3$, entonces tenemos que $x = y + z$, es decir, $z = x - y$. Por ello, la terna a la que pertenecen es $\{(y, m), (x - y, p), (x, 3)\} \in \mathcal{B}$, con $p \in \{1, 2\} \setminus \{m\}$.
 - Análogamente, si $m = 3$, tenemos $y = x + z$, es decir, $z = y - x$, y por tanto, la terna que buscamos es $\{(x, n), (y - x, p), (y, 3)\} \in \mathcal{B}$, con $p \in \{1, 2\} \setminus \{m\}$. □

Nótese que, por el lema 1.9, debe cumplirse $v \geq 2 \cdot 7 + 1 = 15$, ya que (X, \mathcal{A}) tiene como subsistema un STS(7).

Si calculamos el número total de ternas de un STS($3v - 14$), resulta que es $b = \frac{3v^2 - 29v + 70}{2}$.

Veamos que coincide con la suma de todas las ternas de \mathcal{B} :

Ternas (a): 7

Ternas (b), (c) y (d): $\frac{21v - 147}{2}$

Ternas (e), (f) y (g): $\frac{v^2 - 22v + 105}{2}$

Ternas (h): $v^2 - 14v + 49$

Finalmente, si sumamos estas cuatro cantidades anteriores, resulta el número b calculado previamente.

Nota: Se ve claramente que los sistemas (X_i, \mathcal{A}) , con $X_i = (X \setminus Z \times \{i\}) \cup Z$, $i \in \{1, 2, 3\}$, son subsistemas de (Y, \mathcal{B}) , es decir, (Y, \mathcal{B}) tiene tres subsistemas que, además, son isomorfos al sistema (X, \mathcal{A}) inicial.

Cabe destacar que al emplear grupos no isomorfos de orden $v - 7$ que sean distintos a $\mathbb{Z}/(v - 7)$, es probable que se generen otros sistemas triples de Steiner STS(3v - 14) que no sean isomorfos entre ellos.

A continuación, vemos las ternas de \mathcal{B} que hemos definido para el STS(3v - 14). En color azul una terna de \mathcal{A}' , en morado un ejemplo de las ternas (c), en verde una terna del tipo (e) y, por último, en naranja una terna de (h).

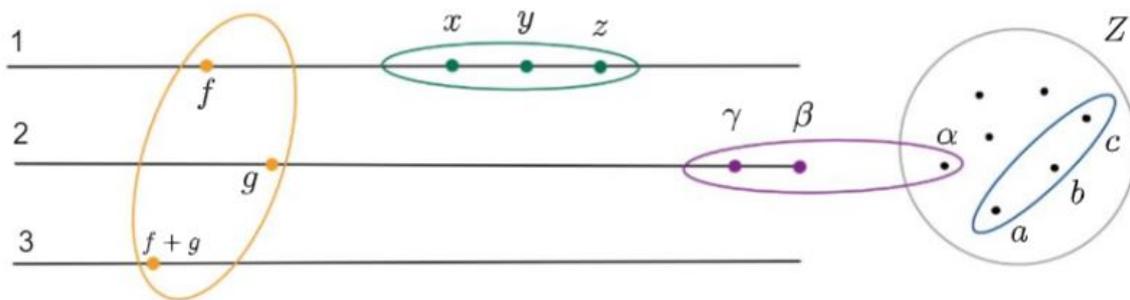


Figura 9: STS(3v - 14)

4.6. Construcción de STS(7v - 6)

Esta sección trata sobre la construcción de un STS(7v - 6) a partir de un STS(v). En esta ocasión, fijamos un punto x , lo retiramos del conjunto inicial y, en vez de multiplicarlo en tres pisos, como en construcciones previas, lo vamos a hacer en siete. Finalmente, añadimos el punto x al conjunto que ha resultado del paso anterior.

Proposición 4.6. Sea (X, \mathcal{A}) un STS(v). Sea $x \in X$ un punto prefijado. Existe un sistema triple de Steiner, STS(7v - 6) sobre el conjunto $Y = ((X \setminus \{x\}) \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}) \cup \{x\}$.

Demostración. Definamos la familia de ternas \mathcal{B} del STS(7v - 6) (figura 10):

(a) $\{x, (y, i), (z, i)\}$, con $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Si $\{x\} \cap \{\alpha, \beta, \gamma\} = \emptyset$, con $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathcal{A}$, tenemos las ternas:

(b) $\{(\alpha, i), (\beta, i), (\gamma, i)\}$, con $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathcal{A}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Damos una estructura de grupo en $X \setminus \{x\}$, por ejemplo $\mathbb{Z}/(v-1)$. Por otro lado, definimos un STS(7) que denotamos (Z, \mathcal{C}) , en el conjunto $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Definimos las siguientes ternas:

(c) $\{(a, i), (b, j), (a+b, k)\}$, con $a, b \in X \setminus \{x\}$, y la terna $\{i, j, k\} \in \mathcal{C}$, con $i < j < k$

Veamos que (Y, \mathcal{B}) es un STS($7v-6$).

Dados dos elementos distintos de Y , veamos que existe una única terna de \mathcal{B} a la que pertenecen.

- Si uno de ellos es x , el otro es de la forma (y, i) , con $y \in X \setminus \{x\}$, $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$. Por (a), existe un punto $z \in X \setminus \{x\}$ tal que $\{x, (y, i), (z, i)\} \in \mathcal{B}$ es la terna a la que pertenecen.
- Si ninguno de los dos es $\{x\}$, deben ser de la forma $(x, i), (y, j)$ y tenemos las siguientes posibilidades.
 - Si $i = j$, existe un $z \in X$ tal que $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$ y, según el valor que tome, puede ser:
 - Si $z = x$, estamos de nuevo en el caso anterior.
 - Si $z \neq x$, por (b), la terna es $\{(x, n), (y, n), (z, n)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $i \neq j$, existe un $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$ tal que $\{i, j, k\} \in \mathcal{C}$. Además, por (c), existe una terna única en la que están ambos puntos. Tenemos los casos siguientes, según los valores de i y j .
 - Si $i < j < k$, la terna es $\{(x, i), (y, j), (x+y, k)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $j < i < k$, se tiene que la terna es $\{(y, j), (x, i), (x+y, k)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $i < k < j$, entonces tenemos $\{(x, i), (y-x, k), (y, j)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $j < k < i$, la terna que buscamos es $\{(y, j), (x-y, k), (x, i)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $k < i < j$, se tiene que la terna es $\{(y-x, k), (x, i), (y, j)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $k < j < i$, la terna en la que están es $\{(x-y, k), (y, j), (x, i)\} \in \mathcal{B}$. □

Al calcular el número total de bloques de un STS(7v - 6), obtenemos $b = \frac{49v^2 - 91v + 42}{6}$. Veamos que si hacemos la suma de las ternas de \mathcal{B} coincide con este resultado:

Ternas (a) y (b): $\frac{7v^2 - 7v}{6}$

Ternas (c): $7v^2 - 14v + 7$

Una vez más, si sumamos las dos cantidades, resulta ser b , el número total de ternas que hemos calculado.

En la siguiente figura vemos las ternas de \mathcal{B} definidas para el STS(7v - 6). En concreto, están representadas de color azul dos ternas de tipo (a), en verde dos ejemplos de las ternas (b) y, por último, en rojo una terna de (c).

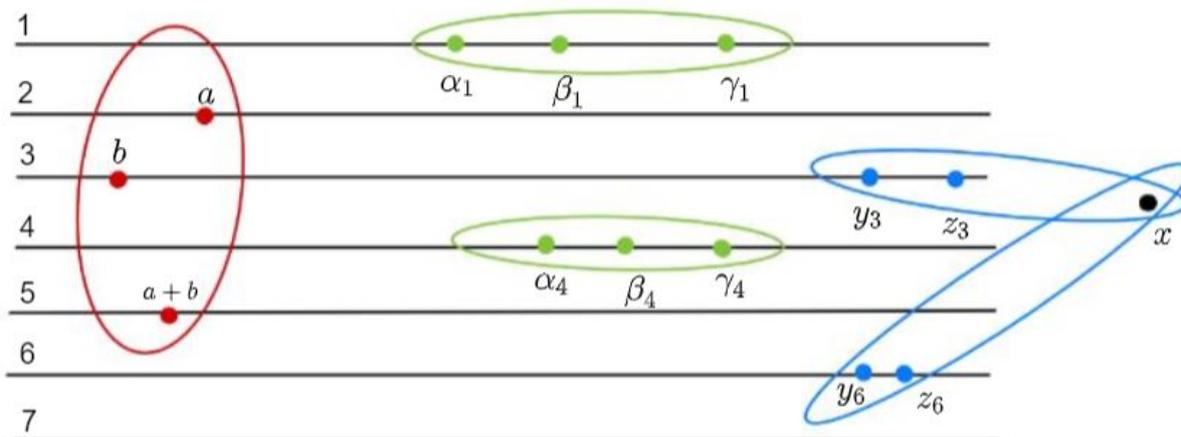


Figura 10: STS(7v - 6)

Nota: En este caso, los sistemas (X_i, \mathcal{A}) , con $X_i = (X \setminus \{x\} \times \{i\}) \cup \{x\}$, $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$, son subsistemas de (Y, \mathcal{B}) . Además, estos siete subsistemas de (Y, \mathcal{B}) son isomorfos al sistema inicial (X, \mathcal{A}) .

Por último, como hemos comentado en las secciones anteriores, si usamos grupos no isomorfos de orden $v - 1$, distintos a $\mathbb{Z}/(v - 1)$, es probable que se construyan otros sistemas triples de Steiner STS(7v - 6) que no sean isomorfos entre sí.

4.7. Construcción de $\text{STS}(w(v - 1) + 1)$ con base en un $\text{STS}(v)$ y un $\text{STS}(w)$

Por último, vamos a generalizar la construcción estudiada en la sección anterior. En este caso, en vez de tomar un $\text{STS}(7)$ para las ternas verticales (las que no están en el mismo piso), tomaremos un $\text{STS}(w)$. Por tanto, partimos de un $\text{STS}(v)$ y un $\text{STS}(w)$ con el fin de generar un $\text{STS}(w(v - 1) + 1)$. El conjunto final es similar al visto previamente con el $\text{STS}(7v - 6)$. Esto es, tras quitar un punto prefijado x del conjunto inicial, multiplicamos este nuevo conjunto en w pisos y añadimos de nuevo el punto x .

Proposición 4.7. *Sea (X, \mathcal{A}) un $\text{STS}(v)$. Sea (Z, \mathcal{C}) un $\text{STS}(w)$, con $Z = \{1, 2, \dots, w\}$. Sea $x \in X$ un punto prefijado. Existe un sistema triple de Steiner, $\text{STS}(w(v - 1) + 1)$ sobre el conjunto $Y = ((X \setminus \{x\}) \times \{1, 2, \dots, w\}) \cup \{x\}$.*

Demostración. Definimos la familia de ternas \mathcal{B} del $\text{STS}(w(v - 1) + 1)$ como sigue (figura 11):

$$(a) \{x, (y, i), (z, i)\}, \text{ con } \{x, y, z\} \in \mathcal{A}, i \in \{1, 2, \dots, w\}$$

Si $\{x\} \cap \{\alpha, \beta, \gamma\} = \emptyset$, con $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathcal{A}$, tenemos las ternas:

$$(b) \{(\alpha, i), (\beta, i), (\gamma, i)\}, \text{ con } \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathcal{A}, i \in \{1, 2, \dots, w\}$$

Dando una estructura de grupo en $X \setminus \{x\}$, por ejemplo $\mathbb{Z}/(v - 1)$, definimos las ternas:

$$(c) \{(a, i), (b, j), (a + b, k)\}, \text{ con } a, b \in X \setminus \{x\}, \text{ y la terna } \{i, j, k\} \in \mathcal{C}, \text{ con } i < j < k$$

Probemos que es un $\text{STS}(w(v - 1) + 1)$.

Dados dos elementos distintos de Y , veamos que existe una única terna de \mathcal{B} en la que están.

- Si uno de ellos es x , entonces el otro es de la forma (y, i) , con $y \in X \setminus \{x\}$, $i \in \{1, 2, \dots, w\}$. Por (a), existe un punto $z \in X \setminus \{x\}$ tal que $\{x, (y, i), (z, i)\} \in \mathcal{B}$ es la terna que buscamos.
- Si ninguno de los dos es $\{x\}$, son de la forma $(x, i), (y, j)$ y tenemos los distintos casos que vemos a continuación.

- Si $i = j$, existe un $z \in X$ tal que $\{x, y, z\} \in \mathcal{A}$ y, según el valor que tome la terna buscada es de uno u otro tipo.
 - Si $z = x$, estamos de nuevo en el caso previo.
 - Si $z \neq x$, por (b), la terna es $\{(x, n), (y, n), (z, n)\} \in \mathcal{B}$.
- Si $i \neq j$, entonces existe un $k \in \{1, 2, \dots, w\}$ de modo que $\{i, j, k\} \in \mathcal{C}$. Por otro lado, por (c), existe una única terna donde coinciden ambos puntos. Según los valores de i y j diferenciamos los siguientes casos.
 - Si $i < j < k$, se tiene que la terna es $\{(x, i), (y, j), (x + y, k)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $j < i < k$, la terna que buscamos es $\{(y, j), (x, i), (x + y, k)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $i < k < j$, la terna en la que están es $\{(x, i), (y - x, k), (y, j)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $j < k < i$, la terna es $\{(y, j), (x - y, k), (x, i)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $k < i < j$, se tiene que la terna es $\{(y - x, k), (x, i), (y, j)\} \in \mathcal{B}$.
 - Si $k < j < i$, entonces tenemos $\{(x - y, k), (y, j), (x, i)\} \in \mathcal{B}$. □

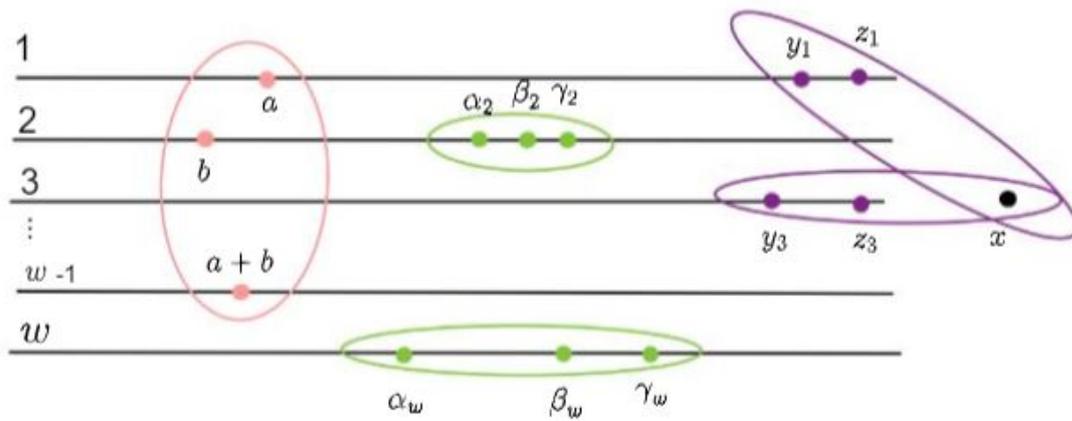
Una vez más, veamos que la suma de ternas coincide con el número total de bloques de un sistema triple de Steiner de orden $w(v-1)+1$:

$$\text{Ternas (a) y (b): } \frac{wv^2 - wv}{6}$$

$$\text{Ternas (c): } \frac{w^2v^2 - 2w^2v - wv^2 + 2wv + w^2 - w}{6}$$

Concluimos con que la suma de ambas cantidades coincide con $b = \frac{w^2v^2 - 2w^2v + wv + w^2 - w}{6}$, es decir, con el número total de ternas de un $STS(w(v-1)+1)$.

A continuación, vemos las ternas de \mathcal{B} que hemos definido para el $STS(w(v-1)+1)$. De color morado aparecen dos ejemplos de las ternas (a), en verde dos ternas de tipo (b) y, finalmente, en rosa una terna de (c).

Figura 11: $\text{STS}(w(v-1)+1)$

Nota: Se tiene que los sistemas (X_i, \mathcal{A}) , con $X_i = (X \setminus \{x\} \times \{i\}) \cup \{x\}$, $i \in \{1, 2, \dots, w\}$, son subsistemas de (Y, \mathcal{B}) y que, a su vez, son isomorfos al sistema (X, \mathcal{A}) inicial.

En las construcciones donde hemos utilizado un grupo, generalmente $(\mathbb{Z}/(n), +)$, si lo reemplazamos por otro grupo no isomorfo a él, es posible obtener otro sistema triple de Steiner del mismo orden y que no sean isomorfos entre sí.

Finalmente, se presenta a continuación una tabla que recoge los distintos sistemas triples de Steiner que podemos construir, con los métodos expuestos en este capítulo, a partir de otro sistema triple de Steiner.

v	$2v + 1$	$3v - 2$	$3v - 6$	$3v$	$3v - 14$	$7v - 6$	$7v$
7	15	19	15	21	-	43	49
9	19	25	21	27	-	57	63
13	27	37	33	39	-	85	91
15	31	43	39	45	31	99	105
19	39	55	51	57	43	127	133
21	43	61	57	63	49	141	147
25	51	73	69	75	61	169	175
27	55	79	75	81	67	183	189
31	63	91	87	93	79	211	217

Si nos fijamos en la tabla, vemos que podemos obtener sistemas triples de Steiner con el mismo v de distintas formas, como es el caso de $STS(39)$, pero no hay que confundirse, ya que es probable que no sean isomorfos entre ellos.

Además, observamos que para $v \in \{7, 9, 13\}$, no podemos construir un $STS(3v-14)$, ya que si recordamos la construcción 4.5, debe ser v mayor o igual que 15.

Como conclusión, hemos aprendido que podemos alcanzar, a través de estas construcciones, un sistema triple de Steiner de orden muy elevado partiendo de otro más pequeño.

Capítulo 5

Coloración de STS

En este capítulo abordaremos la coloración de sistemas triples de Steiner. Se estudiarán varios términos que son clave en la teoría de la coloración, como conjuntos independientes, número de independencia, coloración débil, número cromático y coloración completa, entre otros.

Como veremos más adelante, algunos de los resultados enunciados sobre coloración no serán demostrados por su complejidad, pero se indicará en cada caso una fuente para consultar la prueba correspondiente.

Para la redacción de este capítulo se han utilizado diversos recursos como [5], [6], [3], [7] y [4], que han proporcionado la base teórica necesaria para la comprensión de cada concepto.

5.1. Conceptos previos

Antes de tratar en profundidad el término de *coloración*, vamos a comenzar introduciendo unos conceptos previos.

En primer lugar, veamos qué son los conjuntos independientes y el número de independencia asociado a un $\text{STS}(v)$.

Definición 5.1. Sea $\mathcal{D} = (V, \mathcal{B})$ un $\text{STS}(v)$. Un subconjunto $S \subseteq V$ es *independiente* si ninguna terna $B \in \mathcal{B}$ está contenida en S . Este se dice que es *maximal* si para todo $x \in V \setminus S$, se tiene que $S \cup \{x\}$ no es independiente.

Ejemplo 19. Si tomamos $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\mathcal{B} = \{013, 026, 045, 124, 156, 235, 346\}$, tenemos un STS(7). En este caso, algunos subconjuntos independientes de V son $\{1, 3, 6\}$ o $\{0, 1, 2, 5\}$, ya que ninguna terna de \mathcal{B} está contenida en ellos. Observamos que $\{0, 1, 2, 5\}$ además es maximal, puesto que al añadir cualquiera de los puntos que faltan en V , el conjunto deja de ser independiente.

Definición 5.2. El número de independencia $\beta(\mathcal{D})$ de \mathcal{D} se define como $\beta(\mathcal{D}) = \max\{|S| : S \text{ es independiente en } \mathcal{D}\}$. Además, en \mathcal{D} se definen:

$$\beta_{\min}(v) = \min\{\beta(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ es un STS}(v)\}$$

$$\beta_{\max}(v) = \max\{\beta(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ es un STS}(v)\}$$

$$B(v) = \{\beta : \beta(\mathcal{D}) = \beta, \text{ para algún STS}(v), \mathcal{D}\}$$

Ejemplo 20. Retomando el ejemplo 19, vemos que el número de independencia es 4, puesto que es el cardinal de un conjunto independiente maximal.

Nota: Para órdenes pequeños se conocen los siguientes $B(v)$:

$$B(7) = B(9) = \{4\}$$

$$B(15) = \{6, 7, 8\}$$

$$B(13) = \{6\}$$

$$B(19) = \{7, 8, 9, 10\}$$

A continuación, se enuncia una propiedad sin demostración sobre $\beta_{\max}(\mathcal{D})$, la cual se verifica en los valores máximos de $B(\mathcal{D})$ de la nota anterior.

Proposición 5.3. [4]. Sea (V, \mathcal{B}) un STS(v). Entonces, se verifica la siguiente igualdad

$$\beta_{\max}(v) = \begin{cases} (v+1)/2, & \text{si } v \equiv 3 \text{ o } 7 \pmod{12} \\ (v-1)/2, & \text{si } v \equiv 1 \text{ o } 9 \pmod{12} \end{cases}$$

Ahora presentamos el concepto de *conjunto recubridor* unido al *número de dominación*, así como un ejemplo para lograr una mayor comprensión de ambos.

Definición 5.4. Sea \mathcal{D} un STS(v). Un subconjunto $F \subset V$ se denomina *conjunto recubridor* de \mathcal{D} si $B \cap F \neq \emptyset$, para todo $B \in \mathcal{B}$. Un conjunto recubridor no es necesariamente independiente.

Definición 5.5. El *número de dominación*, $\text{dom } \mathcal{D}$, de \mathcal{D} se define como $\text{dom } \mathcal{D} = \min\{|F| : F \text{ es conjunto recubridor de } \mathcal{D}\}$.

Ejemplo 21. Recordamos las ternas de un STS(7) que hemos elegido en el ejemplo 19 y que son $\mathcal{B} = \{013, 026, 045, 124, 156, 235, 346\}$. En este caso, el conjunto cubridor trivial es $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Al contrario que para los conjuntos independientes, es muy difícil encontrar conjuntos cubridores pequeños. En este caso, también lo son $\{0, 1, 3\}$ o $\{3, 4, 6\}$. Por tanto, el número de dominación es 3.

5.2. Coloraciones en sistemas triples de Steiner

Una vez hemos tratado los conceptos básicos mostrados previamente, podemos abordar el tema de la coloración.

Empezamos con tres definiciones sencillas que explican los términos *coloración*, con el caso particular *coloración débil*, *clase de color* y qué es un sistema triple de Steiner m -coloreable.

Definición 5.6. Sea $\mathcal{D} = (V, \mathcal{B})$ un STS(v). Una *coloración* en \mathcal{D} es una aplicación $\varphi : V \rightarrow C$, donde C es el conjunto de *colores*. Si $|C| = m$, decimos que \mathcal{D} es *m -coloreable*. Para cada $c \in C$, el conjunto $\varphi^{-1}(c) = \{x : \varphi(x) = c\}$ es una *clase de color*.

Definición 5.7. Una coloración φ de \mathcal{D} es *débil* si para todo $B \in \mathcal{B}$, $|\varphi(B)| > 1$.

Nótese que si la coloración es débil no hay ningún bloque monocromático.

A continuación, veremos qué es el *número cromático débil* de un STS.

Definición 5.8. El *número cromático débil* de \mathcal{D} es el mínimo m tal que existe una m -coloración débil de \mathcal{D} y se denota por $\chi(\mathcal{D})$.

En otras palabras, podemos definir el *número cromático débil* $\chi(\mathcal{D})$ como el mínimo número de colores con el que podemos pintar cada elemento de V de modo que no haya ninguna terna monocromática.

En la proposición que se enuncia ahora sin demostración, se muestra la relación entre el *número cromático débil*, el *número de independencia* visto en la sección anterior y el orden v de \mathcal{D} .

Proposición 5.9. [4]. Sea \mathcal{D} un STS(v). Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\chi(\mathcal{D}) \cdot \beta(\mathcal{D}) \geq v$
2. $\chi(\mathcal{D}) + \beta(\mathcal{D}) \leq v + 1$

Ejemplo 22. En la figura siguiente podemos ver un STS(7) con 3-coloración débil.

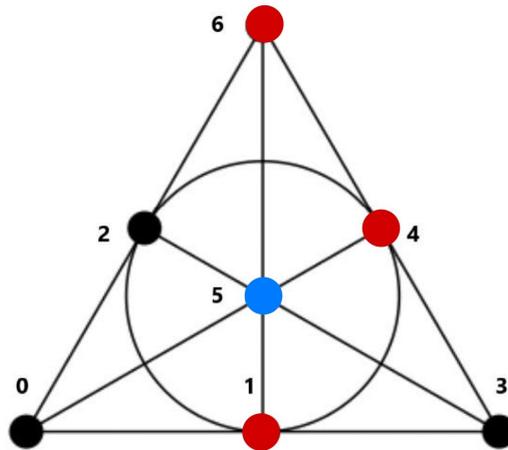


Figura 12: Ejemplo de un STS(7) con 3-coloración

Teniendo en cuenta los ejemplos de la sección previa, vemos que se verifican las dos propiedades de la proposición 5.9:

1. $\chi(\mathcal{D}) \cdot \beta(\mathcal{D}) = 3 \cdot 4 \geq 7$
2. $\chi(\mathcal{D}) + \beta(\mathcal{D}) = 3 + 4 \leq 8$

A continuación, se presenta una proposición que nos muestra que no existen sistemas triples de Steiner con $v \geq 7$ que sean 2-coloreables.

Proposición 5.10. Sea \mathcal{D} un STS(v) con $v \geq 7$ y tal que verifica $v \equiv 1$ o $3 \pmod{6}$. Entonces, \mathcal{D} no es 2-coloreable.

Demostración. Veamos, mediante reducción al absurdo, que no es posible tener un sistema triple de Steiner 2-coloreable de orden $v \geq 7$. Supongamos que \mathcal{D} es 2-coloreable y tomemos como colores rojo y azul. Entonces, cada terna tiene o 2 puntos rojos o 2 puntos azules, y el tercero del color contrario, evitando así que sea la terna monocromática.

Denotamos por l el número de puntos rojos de V , que, sin pérdida de generalidad, suponemos que verifica $l \leq \frac{v-1}{2}$. Como consecuencia, el número de puntos azules es $v-l \geq \frac{v+1}{2}$.

Por tanto, sabiendo que, por una parte, $b = \frac{v(v-1)}{6}$ y, por otra, $b = \binom{l}{2} + \binom{v-l}{2}$, tenemos la siguiente igualdad.

$$\frac{v(v-1)}{6} = \binom{l}{2} + \binom{v-l}{2} = \frac{l(l-1)}{2} + \frac{(v-l)(v-l-1)}{2} = \frac{v^2 + 2l^2 - 2vl - v}{2}$$

Ahora operando a ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{v(v-1)}{6} &= \frac{v^2 + 2l^2 - 2vl - v}{2} \\ vl - l^2 &= \frac{v^2 - v}{2} - \frac{v^2 - v}{6} \\ vl - l^2 &= \frac{v^2 - v}{3} \end{aligned}$$

Considerando la desigualdad $l \leq \frac{v-1}{2}$ y tomando $h \geq 1$, tenemos la igualdad $l = \frac{v-h}{2}$.

Partiendo de lo anterior, esta nueva igualdad, implica lo siguiente:

$$\begin{aligned} v \left(\frac{v-h}{2} \right) - \left(\frac{v-h}{2} \right)^2 &= \frac{v^2 - v}{3} \\ 6v(v-h) - 3(v-h)^2 &= 4(v^2 - v) \\ 3v^2 - 3h^2 &= 4v^2 - 4v \\ -3h^2 &= v^2 - 4v = v(v-4) < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $v > 0$, tenemos que $0 < v < 4$, llegando así a un absurdo, ya que habíamos supuesto que $v \geq 7$. □

Ahora, veamos unos resultados sobre coloraciones en STS. Dada la complejidad de la demostración, el primero solamente será enunciado. La demostración puede encontrarse en [4].

Proposición 5.11. *Para todo $v \equiv 1$ o $3 \pmod{6}$, tal que $v \geq 7$, existe un $STS(v)$ 3-coloreable.*

Viendo la demostración del teorema 1.7, es claro que para cada $v \equiv 3 \pmod{6}$, existe al menos un $STS(v)$ que sea 3-coloreable. Como vemos en la siguiente figura, si pintamos cada uno de los pisos de un color, no habría ninguna terna monocromática y, por tanto, quedaría demostrado uno de los dos casos de la proposición anterior.

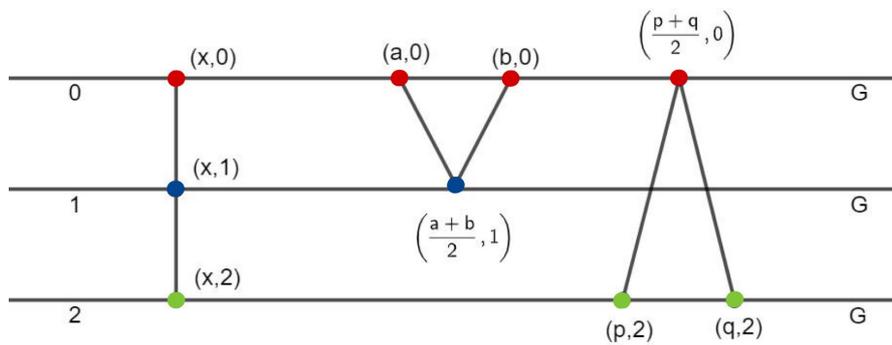


Figura 13: Coloración de un $STS(6t+3)$

La siguiente proposición presenta una relación, a través de una desigualdad, entre el cardinal del conjunto base de un $STS(v)$ y el número de elementos de las clases de color.

Proposición 5.12. [7]. *Sea (V, \mathcal{B}) un $STS(v)$ 3-coloreable con clases de color V_1, V_2, V_3 de tamaños $|V_i| = v_i$, con $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces, se verifica lo siguiente:*

$$v = |V| = v_1 + v_2 + v_3 \geq \frac{1}{2}[(v_1 - v_2)^2 + (v_1 - v_3)^2 + (v_2 - v_3)^2]$$

Demostración. Para $i \neq j$, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, definimos x_{ij} como el número de ternas que intersecan con V_i en dos puntos y con V_j en uno. Definimos, además, x_{123} como el número de ternas que tienen un punto de cada color, es decir, las ternas que intersecan con las tres clases de color.

Por tanto, se cumple que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_{ij} + x_{123} = b = \frac{1}{3} \binom{v}{2}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$x_{12} + x_{13} = \binom{v_1}{2}, \quad x_{21} + x_{23} = \binom{v_2}{2}, \quad x_{31} + x_{32} = \binom{v_3}{2} \quad (1), (2), (3)$$

$$2x_{12} + 2x_{21} + x_{123} = v_1v_2, \quad 2x_{23} + 2x_{32} + x_{123} = v_2v_3, \quad 2x_{13} + 2x_{31} + x_{123} = v_1v_3 \quad (4), (5), (6)$$

Si operamos (1) + (2) - (4) obtenemos la desigualdad:

$$x_{13} + x_{23} - x_{12} - x_{21} = \binom{v_1}{2} + \binom{v_2}{2} - v_1v_2 + x_{123} \geq \frac{1}{2}[(v_1 - v_2)^2 - (v_1 + v_2)] \quad (7)$$

Análogamente, si calculamos (1) + (3) - (6) y (2) + (3) - (5), resultan las siguientes desigualdades, respectivamente:

$$x_{12} + x_{32} - x_{31} - x_{13} = \binom{v_1}{2} + \binom{v_3}{2} - v_1v_3 + x_{123} \geq \frac{1}{2}[(v_1 - v_3)^2 - (v_1 + v_3)] \quad (8)$$

$$x_{31} + x_{21} - x_{23} - x_{32} = \binom{v_2}{2} + \binom{v_3}{2} - v_2v_3 + x_{123} \geq \frac{1}{2}[(v_2 - v_3)^2 - (v_2 + v_3)] \quad (9)$$

Finalmente, sumando las tres desigualdades (7) + (8) + (9), resulta:

$$0 \geq \frac{1}{2}[(v_1 - v_2)^2 - (v_1 + v_2) + (v_1 - v_3)^2 - (v_1 + v_3) + (v_2 - v_3)^2 - (v_2 + v_3)],$$

es decir,

$$v = v_1 + v_2 + v_3 \geq \frac{1}{2}[(v_1 - v_2)^2 + (v_1 - v_3)^2 + (v_2 - v_3)^2].$$

□

Esta proposición previa nos muestra que si un STS(v) es 3-coloreable, v_1 , v_2 y v_3 tendrán unos valores bastante similares.

Ahora, veamos una generalización del resultado anterior a t clases de color.

Proposición 5.13. [7]. *Sea (V, \mathcal{B}) un STS(v) t -coloreable con clases de color V_1, V_2, \dots, V_t , es decir, $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_t$. Se tiene que $|V_i| = v_i$, con $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ y, además, $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_t$.*

Entonces, se cumple que

$$v_1 + v_2 < \frac{4}{5}v + 1.$$

Demostración. Sean los conjuntos $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2$ y $W_3 = V_3 \cup \dots \cup V_t$, con $|W_i| = w_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Al igual que en la proposición anterior, definimos para $i \neq j$, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, x_{ij} como el número de ternas que intersecan con W_i en dos puntos y con W_j en uno. Definimos, además, x como el número de ternas que intersecan con W_1, W_2 y W_3 , y al número de ternas que sean subconjuntos de W_3 lo denotamos por y . Se verifican las siguientes igualdades.

$$x_{12} + x_{13} = \binom{w_1}{2}, \quad x_{21} + x_{23} = \binom{w_2}{2}, \quad 3y + x_{31} + x_{32} = \binom{w_3}{2} \quad (1), (2), (3)$$

$$2x_{12} + 2x_{21} + x = w_1w_2, \quad 2x_{23} + 2x_{32} + x = w_2w_3, \quad 2x_{13} + 2x_{31} + x = w_1w_3 \quad (4), (5), (6)$$

Ahora, operando entre las igualdades, en concreto $(1) + (2) + 2 \cdot (3) - ((4) + (5) + (6))$ y reordenándolas, resulta la desigualdad que vemos a continuación.

$$w_3^2 \geq 6y - 3x = \frac{1}{2}[(w_1 - w_2)^2 + (w_1 - w_3)^2 + (w_2 - w_3)^2] - (w_1 + w_2 + w_3)$$

Es decir,

$$0 \geq w_1^2 + w_2^2 - w_1w_2 - (w_1 + w_2)w_3 - v$$

que implica a su vez

$$w_3 \geq \frac{w_1^2 + w_2^2 - w_1w_2 - v}{w_1 + w_2} = \frac{(w_1 + w_2)^2 - 3w_1w_2 - v}{w_1 + w_2} = w_1 + w_2 - \frac{3w_1w_2 + v}{w_1 + w_2}$$

y sumando a ambos lados w_3 resulta

$$2w_3 \geq v - \frac{3w_1w_2 + v}{w_1 + w_2}. \quad (7)$$

Por otro lado,

$$w_1w_2 \leq \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} = \frac{(v - w_3)^2 - 2w_1w_2}{2}$$

implica que $w_1 w_2 \leq \frac{1}{4}(v - w_3)^2$ y aplicándolo en (7) obtenemos

$$2w_3 \geq v - \frac{\frac{3}{4}(v - w_3)^2 + v}{v - w_3} = \frac{v}{4} + \frac{3}{4}w_3 - \frac{v}{v - w_3}.$$

Simplificando lo anterior, resulta $\frac{5}{4}w_3 \geq \frac{v}{4} - \frac{v}{v - w_3}$, es decir, $\frac{5}{4}(v_1 + v_2) \leq v + \frac{v}{v_1 + v_2}$.

Finalmente, con la desigualdad anterior deducimos lo que queremos probar:

$$v_1 + v_2 \leq \frac{4}{5}v \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{5}{v}} \right] < \frac{4}{5}v \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{2v} \right) \right] = \frac{4}{5}v + 1$$

□

Esto anterior nos muestra que, en cualquier t -coloración de un STS(v), las dos clases de color más grandes pintan como máximo $\frac{4}{5}$ del conjunto de vértices.

Veamos las dos proposiciones previas ilustradas en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 23. En la figura que vemos a continuación se muestra una 3-coloración débil de un STS(9).

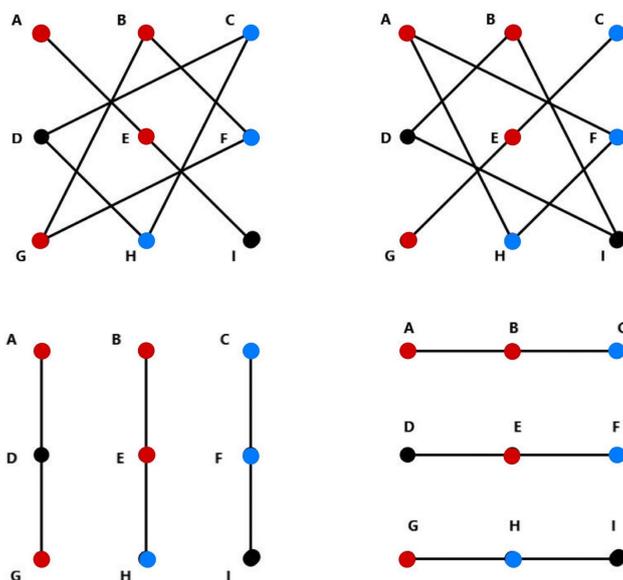


Figura 14: Ejemplo de un STS(9) con 3-coloración

En este caso, tenemos $v_1 = 4$ puntos rojos, $v_2 = 3$ puntos azules y $v_3 = 2$ puntos negros.

Es fácil ver que es cierta la proposición 5.11 sustituyendo cada valor en la desigualdad, como vemos a continuación:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 9 \geq \frac{1}{2}[(v_1 - v_2)^2 + (v_1 - v_3)^2 + (v_2 - v_3)^2] = \frac{1}{2}[(4 - 3)^2 + (4 - 2)^2 + (3 - 2)^2] = 3$$

Además, siguiendo el mismo método con la desigualdad de la proposición 5.13, vemos que se verifica que $v_1 + v_2 = 7 < \frac{4}{5} \cdot 9 + 1 = 8,2$.

Por último, veamos el concepto de *coloración completa* de un sistema triple de Steiner, así como el *número acromático*. También se muestra la relación entre este y el *número cromático* $\chi(\mathcal{D})$.

Definición 5.14. Sea \mathcal{D} un STS(v), decimos que una *m-coloración completa* de \mathcal{D} es una *m-coloración débil* C de V tal que para cada par de clases de color distintas C_i y C_j , existe una terna $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq C_i \cup C_j$. El máximo número posible de colores en una coloración completa de \mathcal{D} se denomina el *número acromático*, denotado por $\psi(\mathcal{D})$.

Proposición 5.15. [4]. Sea \mathcal{D} un STS(v). Existe una *m-coloración completa* de \mathcal{D} para todo m que satisfaga $\chi(\mathcal{D}) \leq m \leq \psi(\mathcal{D})$.

Ejemplo 24. En la figura 14 hemos visto una 3-coloración débil para un STS(9). Si nos fijamos en las ternas verticales se aprecia claramente que hay un bloque contenido en cada par distinto de clases de color, luego es una 3-coloración completa.

Capítulo 6

Otros diseños combinatorios

En este último capítulo vamos a repasar algunos de los conceptos vistos en capítulos anteriores, en concreto los diseños por bloques y las familias de diferencias. Sin embargo, ahora nos enfocaremos en casos en los que λ tome valores distintos de uno.

Para su desarrollo se han consultado fuentes como [10], [3] y [11].

6.1. Diseños por bloques con índice $\lambda \geq 2$

Comencemos esta sección recordando la definición de un diseño por bloques acompañada por un ejemplo simple:

Definición 6.1. Un *diseño por bloques* o BIBD (*Balanced incomplete block design*) es un par (V, \mathcal{B}) donde V es un conjunto de v elementos y \mathcal{B} una colección de bloques de k elementos, de forma que cada par de elementos distintos de V se encuentra en λ bloques de \mathcal{B} . Lo denotamos por 2 -(v, k, λ) diseño o 2 -(v, k, λ) BIBD. Llamamos *índice* del diseño a λ

Ejemplo 25. El conjunto de 6 elementos $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, junto con la familia de bloques

$$\mathcal{B} = \{012, 013, 024, 035, 045, 125, 134, 145, 234, 235\}$$

constituyen un 2 -(6, 3, 2) BIBD.

En este caso, cada par de elementos distintos de V coinciden exactamente en dos bloques de \mathcal{B}

Para los dos siguientes resultados, recordemos que denotamos por r al *número de replicación*, es decir, al número de bloques en los que aparece cada elemento, y b al *número total de bloques*.

Teorema 6.2. *Sea (V, \mathcal{B}) un 2 - (v, k, λ) diseño. Entonces, cada elemento está exactamente en $r = \lambda \frac{v-1}{k-1}$ bloques.*

Demostración. Sea $x \in V$. Sabemos que cada par de elementos distintos de V está en λ bloques de \mathcal{B} y, como $V \setminus \{x\}$ tiene $v-1$ elementos, x está con cada uno de los $v-1$ en λ bloques. Por otro lado, si tomamos $y \in V \setminus \{x\}$, existen $z_3, z_4, \dots, z_k \in V \setminus \{x\}$ tales que $\{x, y, z_3, z_4, \dots, z_k\}$ forman un bloque. Sin embargo, este mismo razonamiento se repite con cualquiera de los $k-1$ elementos de $V \setminus \{x\}$ con los que se constituye ese bloque, luego es cierto que $r = \lambda \frac{v-1}{k-1}$. \square

Teorema 6.3. *Sea (V, \mathcal{B}) un 2 - (v, k, λ) diseño. Entonces, hay exactamente $b = \lambda \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$ bloques.*

Demostración. Sabemos que cada par de elementos de V están contenidos en λ bloques y hay en total $\binom{v}{2} = \frac{v!}{2(v-2)!} = \frac{v(v-1)}{2}$ parejas. Por otra parte, en cada bloque se pueden hacer $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ posibles parejas, luego se verifica que $b = \lambda \frac{v(v-1)/2}{k(k-1)/2} = \lambda \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$. \square

Nota: Al igual que vimos para $\lambda = 1$, es cierto que $kb = rv$. Sustituyendo b y v por las igualdades vistas en los dos teoremas anteriores se comprueba rápidamente esta igualdad.

A continuación, veamos qué condiciones debe satisfacer v para que existan ciertos diseños.

Lema 6.4. *Sea un 2 - $(v, 3, 2)$ diseño. Entonces, $v \equiv 0 \pmod{3}$, o bien $v \equiv 1 \pmod{3}$.*

Demostración. Sabemos que $b = \lambda \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = 2 \cdot \frac{v(v-1)}{6} = \frac{v(v-1)}{3} \in \mathbb{N}$, luego tenemos que v o $v-1$ es múltiplo de 3, es decir, $v \equiv 0 \pmod{3}$, o bien $v \equiv 1 \pmod{3}$. \square

Nota: El recíproco es cierto, es decir, si $v \equiv 0 \pmod{3}$, o bien $v \equiv 1 \pmod{3}$, existe al menos un 2 - $(v, 3, 2)$ diseño.

Lema 6.5. *Sea un 2 - $(v, 4, 2)$ diseño. Entonces, $v \equiv 1 \pmod{3}$.*

Demostración. Sabemos que $r = \lambda \frac{v-1}{k-1} = 2 \cdot \frac{v-1}{3} \in \mathbb{N}$, luego $v-1$ es múltiplo de 3, es decir, $v \equiv 1 \pmod{3}$. \square

Nota: En este caso el recíproco también se satisface, siempre que $v \geq 7$, es decir, si $v \equiv 1 \pmod{3}$, existe al menos un 2 - $(v, 4, 2)$ diseño.

Lema 6.6. *Sea un 2 - $(v, 5, 2)$ diseño. Entonces, $v \equiv 1 \pmod{10}$, o bien $v \equiv 5 \pmod{10}$.*

Demostración. Sabemos, por un lado, que $b = \lambda \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = 2 \cdot \frac{v(v-1)}{20} = \frac{v(v-1)}{10} \in \mathbb{N}$, y por el otro, $r = \lambda \frac{v-1}{k-1} = 2 \cdot \frac{v-1}{4} \in \mathbb{N}$. Esto implica que $v-1$ es par y v impar, luego si $v-1$ es, además, múltiplo de 5, tendríamos que $v \equiv 1 \pmod{10}$. Si por el contrario $v-1$ no es múltiplo de 5, debe serlo v , por lo que tenemos $v \equiv 5 \pmod{10}$. \square

Nota: El recíproco no se cumple, ya que si tomamos $v = 15$ no existe ningún 2 - $(15, 5, 2)$ diseño.

Veamos de nuevo la definición de diseño simétrico y una adaptación de una condición necesaria al caso de índice $\lambda \geq 2$.

Definición 6.7. Un 2 - (v, k, λ) diseño es un *diseño simétrico* si $v = b$.

Proposición 6.8. *Una condición necesaria para que exista un 2 - (v, k, λ) diseño simétrico es que $v = 1 + \frac{k(k-1)}{\lambda}$.*

Demostración. Esta igualdad se verifica fácilmente al sustituir $b = \lambda \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$ en $b = v$. \square

Ahora recordemos la relación de los diseños combinatorios con los cuerpos finitos a través del siguiente ejemplo sobre espacios afines.

Ejemplo 26. Sea p primo y \mathbb{F}_p cuerpo finito. Sea \mathbb{F}_p^3 espacio afín, que tiene p^3 puntos. Veamos que los planos de este espacio afín constituyen un 2 - $(p^3, p^2, p+1)$ diseño.

Por un lado, tenemos que cada bloque, que es un plano, contiene p^2 puntos, luego $v = p^3$ y $k = p^2$. Veamos que $\lambda = p+1$.

Sea π un plano afín de \mathbb{F}_p^3 . Dados $x, y \in \pi$, con $x \neq y$, existe una única recta $r \subset \pi$ que los contiene. Por otro lado, dado $a \notin r$, se tiene que x, y, a forman un plano, por ejemplo π , y hay $p^3 - p$ puntos con los que x e y forman un plano, ya que es el número de puntos que no están en la recta r . Sin embargo, si tomamos otro punto $b \notin r$, pero $b \in \pi$, se genera el mismo plano π , luego hay que descontar los puntos que estén en π y no en r , es decir, $p^2 - p$. Por tanto, con esto concluimos que $\lambda = \frac{p^3 - p}{p^2 - p} = p+1$, y como λ es el mismo para cada $x, y \in \mathbb{F}_p^3$, con $x \neq y$, tenemos un 2 - $(p^3, p^2, p+1)$ diseño.

Con esto podemos deducir el número de replicación y el número total de bloques:

- $r = \lambda \frac{v-1}{k-1} = (p+1) \frac{p^3-1}{p^2-1} = p^2 + p + 1$, es decir, cada punto $x \in \mathbb{F}_p^3$ está en exactamente $p^2 + p + 1$ planos.
- $b = \lambda \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = (p+1) \frac{p^3(p^3-1)}{p^2(p^2-1)} = p^3 + p^2 + p$, luego hay un total de $p^3 + p^2 + p$ planos afines en \mathbb{F}_p^3 .

Por ejemplo, los planos del espacio afín \mathbb{F}_3^3 constituyen un 2-(27, 9, 4) diseño. En este caso se tiene que cada punto del espacio \mathbb{F}_3^3 está en $r = 13$ planos y hay $b = 39$ planos afines en total.

6.2. Familias de diferencias con índice $\lambda \geq 2$

En esta sección veremos qué es una familia de diferencias con $\lambda \neq 1$. Para ello recordemos que en un *multiconjunto*, a diferencia de en un conjunto, pueden aparecer elementos repetidos e importa el número de veces que está cada elemento.

Definición 6.9. Sea $(G, +)$ un grupo conmutativo de orden v . Una (v, k, λ) -familia de diferencias sobre el grupo G , es una familia de subconjuntos B_1, B_2, \dots, B_t de G , cada uno con k elementos, de forma que el multiconjunto

$$\bigcup_{i=1}^t [x - y, y - x : x, y \in B_i, x \neq y]$$

contiene cada elemento de $G \setminus \{0\}$ exactamente λ veces.

Ejemplo 27. Veamos que $B_1 = \{0, 1, 2, 5\}$ y $B_2 = \{0, 2, 3, 5\}$ forman una $(9, 4, 3)$ -familia de diferencias sobre el grupo $(\mathbb{Z}/(9), +)$, es decir, veamos que el multiconjunto formado por las diferencias contiene 3 veces cada elemento del grupo sin el elemento neutro 0.

$$\Delta B_1 = [1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8]$$

$$\Delta B_2 = [1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8]$$

Ahora, es fácil comprobar que la unión de ambos conjuntos proporciona un multiconjunto en el que aparece 3 veces cada elemento de $\mathbb{Z}/(9)$ sin el 0, luego es una $(9, 4, 3)$ -familia de diferencias.

Al igual que con las familias de diferencias que vimos en el capítulo 2, también existen los *conjuntos de diferencias* para índice $\lambda \geq 2$.

Definición 6.10. En la situación de la definición 6.9, si la familia de diferencias está formada por un único conjunto, este se denomina *conjunto de diferencias*.

Ejemplo 28. Veamos que el conjunto $A = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ es un $(11, 5, 2)$ -conjunto de diferencias sobre el grupo $(\mathbb{Z}/(11), +)$.

$$\Delta A = [1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10]$$

Por tanto, como aparece 2 veces cada elemento de $\mathbb{Z}/(11)$ sin el neutro 0, A es un $(11, 5, 2)$ -conjunto de diferencias.

Nota: Si existe una (v, k, λ) -familia de diferencias B_1, B_2, \dots, B_t sobre un grupo G de orden v , necesariamente se cumple $\lambda(v - 1) = tk(k - 1)$. Esto es por

$$\lambda(G \setminus \{0\}) = \bigcup_{i=1}^t \Delta B_i \implies \lambda(v - 1) = tk(k - 1)$$

En el caso de un (v, k, λ) -conjunto de diferencias, al ser $t = 1$, se verifica $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$.

A continuación, se recogen en las siguientes tablas, para distintos k , varios ejemplos de (v, k, λ) -familias de diferencias definidas sobre su correspondiente grupo $(\mathbb{Z}/(v), +)$.

v	λ	$(v, 3, \lambda)$ - familia de diferencias							
16	2	0 1 2	0 2 8	0 3 7	0 4 7	0 5 10			
28	2	0 1 12 0 6 14	0 2 11	0 2 12	0 3 7	0 3 13	0 4 9	0 5 13	0 6 7

v	λ	$(v, 4, \lambda)$ - familia de diferencias						
19	2	0 1 3 12	0 1 5 13	0 4 6 9				
31	2	0 1 8 11	0 1 13 17	0 2 11 14	0 5 7 13	0 5 9 15		
43	2	0 1 6 36	0 3 18 22	0 9 11 23	0 10 12 26	0 26 27 33	0 13 35 38	0 19 28 39
21	3	0 2 3 7	0 3 5 9	0 1 7 11	0 2 8 11	0 1 9 14		
29	3	0 2 5 7	0 1 12 13	0 4 19 23	0 3 22 25	0 6 15 21	0 8 9 17	0 11 16 27
11	6	0 1 8 9	0 2 5 7	0 1 4 5	0 2 3 5	0 4 5 9		
15	6	0 1 2 3	0 2 4 6	0 4 8 12	0 1 8 9	3 6 9 12	0 1 5 10	0 2 5 10

v	λ	$(v, 5, \lambda)$ - familia de diferencias				
31	2	0 1 3 7 15	0 3 9 14 21	0 4 5 13 15		
71	2	1 5 25 54 57 6 8 30 40 58	3 4 15 20 29 18 19 24 32 49	9 12 16 45 60	27 36 38 48 64	2 10 37 43 50
13	5	0 1 2 4 8	0 1 3 6 12	0 2 5 6 10		
17	5	0 1 4 13 16	0 3 5 12 14	0 2 8 9 15	0 6 7 10 11	
33	5	0 2 3 7 25 3 9 12 15 27	0 3 13 14 29 0 8 13 14 31	0 4 5 12 13 0 2 7 13 29	0 2 12 16 26	0 3 12 20 31

Por último, recordemos cómo son los diseños por bloques que proceden del *desarrollo de una familia de diferencias*, para $\lambda \geq 2$.

Teorema 6.11. *Sea $(G, +)$ un grupo de orden v . Sea B_1, B_2, \dots, B_t una (v, k, λ) -familia de diferencias sobre G . Entonces entonces la familia de subconjuntos $g + B_i$, con $g \in G, i = 1, 2, \dots, t$, es un 2 - (v, k, λ) diseño sobre G , al que conocemos como desarrollo de la familia de diferencias.*

Demostración. Sean x, y dos elementos distintos de G , veamos que existen λ bloques de la forma $g + B_i$, con $g \in G$, a la que pertenecen.

Como $x - y \neq 0$, entonces $x - y \in G \setminus \{0\}$. Por otra parte, recordemos que en $\bigcup_{i=1}^t \Delta B_i$ aparecen λ veces los elementos de $G \setminus \{0\}$, luego existirán $a_i, b_i \in B_i$ con $1 \leq i \leq \lambda$ tal que $x - y = a_i - b_i \in \Delta B_i \subset G \setminus \{0\}$. De esta forma tenemos $a - x_i = b - y_i = h_i$, es decir, $a = h_i + x_i \in h_i + B_i, b = h_i + y_i \in h_i + B_i$. Por tanto, como había λ diferencias de la forma $a_i - b_i, x$ e y pertenecen a λ bloques de la forma $g + B_i$.

Para probar que x e y pertenecen a exactamente λ bloques de la forma $g + B_i$ habría que ver el recíproco. Supongamos que $a, b \in m + B_k$, entonces se ve fácilmente siguiendo el desarrollo anterior en sentido contrario que la diferencia $a - b$ debe ser una de las λ diferencias de la forma $a_i - b_i$, luego x e y pertenecen a exactamente λ bloques de la forma $g + B_i$. \square

Anexo

Programas MATLAB

En esta sección del anexo están recogidos unos códigos en MATLAB sobre familias de diferencias, como se explica a continuación.

Este primer programa verifica, dados unos conjuntos B_i , con $1 \leq i \leq t$, y un número n , si $\bigsqcup_{i=1}^t \Delta B_i = \{1, 2, \dots, n\}$. En otras palabras, se comprueba que los conjuntos B_i forman una familia de diferencias sobre el grupo G , es decir $(\mathbb{Z}/(n), +)$, con $|G| = n$.

```
1 function DeltaB = familias_diferencias(n, varargin)
2     num_sets = nargin - 1; % Numero de conjuntos B_i
3     DeltaB = []; % Inicializacion del conjunto Delta_B
4
5     % Iteracion sobre cada conjunto B
6     for k = 1:num_sets
7         B = varargin{k}; % k-esimo conjunto B_i
8
9         % Iteracion sobre cada par de elementos en B_i
10        for i = 1:length(B)
11            for j = 1:length(B)
12                % Verificar que los elementos sean diferentes
13                if i = j
14                    % Calcular las diferencias x-y y y-x
15                    considerando el modulo
16                    diff = mod(B(i) - B(j), n);
```

```

16
17         % Agregar las diferencias al conjunto Delta_B
18         DeltaB = [DeltaB, diff];
19     end
20 end
21 end
22 end
23
24 DeltaB = sort(DeltaB);
25
26 % Verificar si la union de los Delta_B es igual al conjunto
27     {1, 2, ..., n-1}=G\{0}
28
29 G = 1:n-1;
30
31 if isequal(DeltaB, G)
32     disp('La union de los conjuntos Delta_B es igual al
33         conjunto G\{0}');
34 else
35     disp('La union de los conjuntos Delta_B no es igual al
36         conjunto G\{0}');
37 end
38 end

```

Vamos a probar con el ejemplo 11, es decir, sea $G = (\mathbb{F}_{13}, +)$, $B_1 = \{0, 1, 4\}$ y $B_2 = \{0, 2, 7\}$, veamos si constituyen una $(13, 3, 1)$ -familia de diferencias.

```

>> familias_diferencias(13, [0, 1, 4], [0, 2, 7]);
La union de los conjuntos Delta_B es igual al conjunto G\{0}

```

De la misma forma, se han verificado las $(v, 3, 1)$ -familia de diferencias que se muestran en la tabla de la página 26, como por ejemplo:

```
>> familias_diferencias(55, [0, 1, 3], [0, 4, 9], [0, 6, 16], [0, 7, 32], [0,
    ↪ 8, 29], [0, 11, 42], [0, 12, 27], [0, 14, 36], [0, 17, 37]);
```

La union de los conjuntos Delta_B es igual al conjunto $G \setminus \{0\}$

Ahora, el programa que se presenta tiene una funcionalidad similar al mostrado anteriormente. Este, en concreto, verifica si unos conjuntos dados, junto con un bloque de ciclo corto, constituyen una familia de diferencias relativa. Recordemos que estamos trabajando sobre el grupo $(\mathbb{Z}/(n), +)$. Veamos el código:

```
1 function DeltaB = familias_diferencias_relativas(n, H, varargin)
2     num_sets = nargin - 2; % Numero de conjuntos B_i
3     DeltaB = []; % Inicializacion del conjunto Delta_B
4
5     % Iteracion sobre cada conjunto B
6     for k = 1:num_sets
7         B = varargin{k}; % k-esimo conjunto B_i
8
9         % Iteracion sobre cada par de elementos en B_i
10        for i = 1:length(B)
11            for j = 1:length(B)
12                % Verificar que los elementos sean diferentes
13                if i ~= j
14                    % Calcular las diferencias x-y y y-x
15                    considerando el modulo
16                    diff = mod(B(i) - B(j), n);
17
18                    % Agregar las diferencias al conjunto Delta_B
19                    DeltaB = [DeltaB, diff];
20                end
            end
        end
    end
```

```

21         end
22     end
23
24     DeltaB = sort(DeltaB);
25
26     % Verificar si la union de los Delta_B es igual al conjunto G\H
27     G = setdiff(0:n-1, H);
28
29     if isequal(DeltaB, G)
30         disp('La union de los conjuntos Delta_B es igual al
31             conjunto G\H');
32     else
33         disp('La union de los conjuntos Delta_B no es igual al
34             conjunto G\H');
35     end
36 end

```

Probémoslo con el ejemplo 17. Sea el grupo $G = (\mathbb{Z}/(15), +)$ y el subgrupo $H = \{0, 5, 10\} \subset \mathbb{Z}/(15)$. Veamos si $B_1 = \{0, 1, 4\}$ y $B_2 = \{0, 2, 9\}$ forman una familia de diferencias relativa a H .

```

>> familias_diferencias_relativas(15, [0, 5, 10], [0, 1, 4], [0, 2, 9]);
La union de los conjuntos Delta_B es igual al conjunto G\H

```

Al igual que en el caso anterior, se han verificado las familias de diferencias relativas de la página 29.

A continuación vemos un ejemplo:

```

>> familias_diferencias_relativas(45, [0, 15, 30], [0, 1, 3], [0, 4, 10], [0,
↪ 5, 28], [0, 7, 34], [0, 8, 32], [0, 9, 29], [0, 12, 26]);
La union de los conjuntos Delta_B es igual al conjunto G\H

```

Por último, el programa que vemos a continuación recibe como parámetros los números n y λ , y un número variable de conjuntos. Su finalidad es comprobar que dichos conjuntos constituyen una familia de diferencias sobre el grupo $(\mathbb{Z}/(n), +)$. Nótese que ahora estamos trabajando con multiconjuntos, como vimos en la sección 6.2.

```
1 function DeltaB = familias_diferencias_lambda(n, lambda, varargin)
2     num_sets = nargin - 2; % Numero de conjuntos B_i
3     DeltaB = []; % Inicializacion del conjunto Delta_B
4
5     % Iteracion sobre cada conjunto B
6     for k = 1:num_sets
7         B = varargin{k}; % k-esimo conjunto B_i
8
9         % Iteracion sobre cada par de elementos en B_i
10        for i = 1:length(B)
11            for j = 1:length(B)
12                % Verificar que los elementos sean diferentes
13                if i ~= j
14                    % Calcular las diferencias x-y y y-x
15                    considerando el modulo
16                    diff = mod(B(i) - B(j), n);
17
18                    % Agregar las diferencias al conjunto Delta_B
19                    DeltaB = [DeltaB, diff];
20                end
21            end
22        end
23
24    DeltaB = sort(DeltaB);
25
26    % Verificar si la union de los Delta_B contiene lambda veces
```

```

    los elementos de  $G \setminus \{0\}$ 
27 G = 1:n-1;
28 G_lambda = repelem(G, lambda);
29
30 if isequal(DeltaB, G_lambda)
31     disp(['La union de los conjuntos Delta_B contiene '
32         num2str(lambda) ' veces al conjunto  $G \setminus \{0\}$ ']);
33 else
34     disp(['La union de los conjuntos Delta_B no contiene '
35         num2str(lambda) ' veces al conjunto  $G \setminus \{0\}$ ']);
36 end
end

```

Para probarlo, tomemos un ejemplo de cada una de las tablas de las páginas 69 y 70:

```

>> familias_diferencias_lambda(28, 2, [0, 1, 12], [0, 2, 11], [0, 2, 12], [0,
↪ 3, 7], [0, 3, 13], [0, 4, 9], [0, 5, 13], [0, 6, 7], [0, 6, 14]);
La union de los conjuntos Delta_B contiene 2 veces al conjunto  $G \setminus \{0\}$ 

```

```

>> familias_diferencias_lambda(15, 6, [0, 1, 2, 3], [0, 2, 4, 6], [0, 4, 8,
↪ 12], [0, 1, 8, 9], [3, 6, 9, 12], [0, 1, 5, 10], [0, 2, 5, 10]);
La union de los conjuntos Delta_B contiene 6 veces al conjunto  $G \setminus \{0\}$ 

```

```

>> familias_diferencias_lambda(33, 5, [0, 2, 3, 7, 25], [0, 3, 13, 14, 29], [
↪ 0, 4, 5, 12, 13], [0, 2, 12, 16, 26], [0, 3, 12, 20, 31], [3, 9, 12,
↪ 15, 27], [0, 8, 13, 14, 31], [0, 2, 7, 13, 29]);
La union de los conjuntos Delta_B contiene 5 veces al conjunto  $G \setminus \{0\}$ 

```

Bibliografía

- [1] BETH, THOMAS; JUNGNICKEL , DIETER & LENZ, HANFRIED. *Design Theory Volume I. Second Edition*. Cambridge University Press, 1999.
- [2] BETH, THOMAS; JUNGNICKEL , DIETER & LENZ, HANFRIED. *Design Theory Volume II. Second Edition*. Cambridge University Press, 1999.
- [3] COLBOURN, CHARLES J. & DINITZ, JEFFREY H. *Handbook of Combinatorial Designs. Second Edition*. Chapman & Hall/CRC, 2007.
- [4] COLBOURN, CHARLES J.; DINITZ, JEFFREY H. & ROSA, ALEXANDER. *Bicoloring Steiner Triple Systems*. The Electronic Journal of Combinatorics. Volumen 6, #R25. 1999.
- [5] COLBOURN, CHARLES J. & STINSON, DOUGLAS R. *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys*. John Wiley & Sons, 1992.
- [6] DE BRANDES, MARCIA; PHELPS, KEVIN T. & RÖDL, VOJTECH. *Coloring Steiner Triple Systems*. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods. Volumen 3, nº 2, pag 241-249. 1982.
- [7] HADDAD, LUCIEN & RÖDL, VOJTECH. *Unbalanced Steiner Triple Systems*. Journal of Combinatorial Theory. Series A, Volumen 66, nº 1, pag 1-16. 1994.
- [8] HEINLEIN, DANIEL & ÖSTERGARD, PATRIC R. J. *Steiner Triple Systems of Order 21 with Subsystems*. 2021.
- [9] KASKI, PETTERI & ÖSTERGARD, PATRIC R. J. *The Steiner Triple Systems of order 19*. Mathematics of Computation, Volume 73, Number 248, Pages 2075-2092. 2004.
- [10] MARCOS NAVEIRA, JOSÉ ENRIQUE. *Apuntes sobre Diseños Combinatorios*. 2021.
- [11] MARSHALL HALL, JR. *Combinatorial Theory. Second Edition*. John Wiley & Sons, 1986.

- [12] STINSON, DOUGLAS R. *Combinatorial Designs. Constructions and Analysis*. Springer, 2004.
- [13] VAN LINT, J.H. & WILSON, R.M. *A Course in Combinatorics. Second Edition*. Cambridge University Press, 2001.
- [14] WALLIS, WALTER. D. *Introduction to Combinatorial Designs. Second Edition*. Chapman & Hall/CRC, 2011.