Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

PROLONGACIÓN ANALÍTICA DE FUNCIONES HOLOMORFAS

Autor: Melquiades Rodríguez Gutiérrez
Tutor: Jorge Mozo Fernández
Año 2023

Resumen

En este TFG se explicará con profundidad el concepto de prolongación analítica de una función compleja holomorfa. En el primer capítulo se expondrán definiciones y ejemplos de prolongación analítica directa junto con el resultado del principio de Reflexión de Schwarz y sus variantes. En el segundo capítulo explicaremos la prolongación analítica a lo largo de una curva contenida en $\mathbb{C}$ junto con varios resultados, entre ellos el teorema de Monodromía. En el tercer capítulo estudiaremos resultados que justifican mediante su expresión en serie de potencias, cuándo una función se puede prolongar o no (series lacunares). En el cuarto capítulo expondremos ejemplos de prolongación analítica que nos dan funciones muy importantes en matemáticas como la zeta de Riemann. En el último capítulo se demostrará que la solución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales puede prolongarse a lo largo de caminos contenidos en el dominio de definición y se probará que existen soluciones holomorfas en dicho dominio si este es simplemente conexo.

The aim is to introduce concepts and results about analytic continuation, for example, the Schwarz Reflexion with several variants, and introduce examples of holomorfic extendible functions, for example, the Riemann function. One of most important analytic continuation is along the curve. We'll tell definitions and properties with about this concept , and will enunciate and prove the monodromy theorem. Also we'll ilustrate functions that cannot be extended. In the end, We'll prove that solutions of linnear diferencial equations can be extended along paht contained in a simply connected domain .

Introducción

Dada una función $f\colon \Omega_0 \to \mathbb{C}$ holomorfa, siendo $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ una región, nos hacemos la siguiente pregunta:

¿Es posible extender el dominio de definición de la función f sin alterar su holomorfía, es decir, encontrar una $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $g = f$ en $\Omega_0 \subset \Omega$?

La teoría matemática que se encarga de estudiar esta posibilidad es *La prolongación analítica de funciones holomorfas.* Esta rama de la variable compleja es muy útil en las matemáticas ya que nos sirve para comprender mejor las propiedades de funciones de variable compleja y nos permite definir con mayor claridad las funciones multiformes o multivaluadas, como el logaritmo o potencia ($f(z) = z^w$, con z,w $\in \mathbb{C}$).
Uno de los resultados mas importantes que nos permite extender el dominio de holomorfía es *el principio de Reflexión de Schwarz*, que presenta varias variantes que se expondrán y se demostrarán en el capítulo 1, sección 1.2, donde el concepto de simetría sobre una recta o incluso sobre un arco de circunferencia tomará gran importancia en estos resultados.
Uno de los hombres más influyentes en la prolongación analítica fue K.Weierstrass (1815-1897). A diferencia de Riemann, quien estaba más interesado en una perspectiva más geométrica, Weierstrass pensó cómo prolongar una función analítica con su expresión en series de potencias. Esta estructura es mucho más cómoda a la hora de encontrar una extensión analítica y además podremos determinar cuándo una función holomorfa, definida en una región, puede no extenderse a un recinto más amplio que su dominio de definición. Las series de potencias que no se pueden extender se las conocen como series lacunares, estudiadas por algunos matemáticos entre los siglos XIX-XX como Hadamard u Owstrowski entre otros. En este caso, el hecho de que una serie de potencias pueda extenderse o no, dependerá de la frontera de la bola donde está definida dicha serie.
Un tipo de prolongación importante es el de prolongación a lo largo de una curva φ, que consiste en ir construyendo funciones holomorfas y dominios de definición (f_t,G_t), tales que extiendan la función holomorfa $f_0\colon G_0 \to \mathbb{C}$. El soporte de φ no tiene por qué estar contenido en G_0. De la prolongación analítica a lo largo de una curva se extrae un importante resultado: *El Teorema de*

Monodromía, que nos da una condición suficiente para que la prolongación a lo largo de dos curvas homótopas, que parten de un punto a y llegan a un punto b, sean iguales.
Ejemplos de funciones que pueden ser prolongables son el logaritmo, la función Gamma y la función zeta de Riemann, las dos últimas introducidas por L.Euler en el siglo XVIII. La función zeta de Riemann tiene un importante significado en la teoría de números por su relación con la distribución de los números primos. La función Ganma es muy utilizada tanto en la teoría de la probabilidad y estadística (la distribución t de Student, la distribución χ_2^n,...) como en combinatoria.

Ahora nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Es posible extender la solución de una ecuación lineal diferenciable holomorfa o sistema diferenciable holomorfo?

La respuesta es sí, es más, la prolongación se puede realizar a partir de curvas cuyo soporte esté contenido en el dominio de definición de dicho sistema y también se puede encontrar una solución del sistema lineal holomorfo en dicho dominio siempre y cuando sea simplemente conexo.

Índice general

Capítulo 1

Prolongación analítica

En este capítulo explicaremos de forma genérica qué es la prolongación analítica, junto con varias propiedades relevantes. En la primera sección definiremos el concepto de prolongación analítica directa y prolongación analítica a lo largo de una cadena de regiones. Además ilustraremos y demostraremos importantes resultados relacionados con estos conceptos.
En la segunda sección ilustraremos y probaremos uno de los resultados más comunes para prolongar una función: *Principio de Reflexión de Schwarz*, junto con sus variantes, como el principio de reflexión a lo largo del arco de una circunferencia. Pero antes ilustraremos algunos conceptos importantes para su demostración. A lo largo de todos estos capítulos entenderemos por rama c de logaritmo como la función

$$\log_c(z) = ln(z) + iarg(z)$$

donde $arg(z)$ es una función que toma el único argumento de z que se encuentra en el intervalo $[c, c+2\pi)$, donde $c \in \mathbb{R}$. También diremos que $f(z) = \log(z)$ con la rama c, cuando f es igual a la rama c del logaritmo.

1.1. Definición y primeras propiedades

Antes de explicar los conceptos y propiedades básicas de esta sección, expondremos y probaremos un resultado importante para entender y demostrar algunas propiedades sobre la prolongación analítica. Este resultado se le conoce como principio de identidad, pero antes mostraremos un teorema útil para probarlo.

1.1.1.Teorema (Principio de los ceros aislados): Sea f una función holomorfa en una región U de $\mathbb{C}$. Si existe un subconjunto $A \subset U$ tal que tiene al menos un punto de acumulación en U ($A' \cap U \neq \varnothing$) y $f = 0$ en A, entonces $f = 0$ en U.

Demostración:
Sea

$$Z(f) = \{z \in U;\ f(z) = 0\}$$

y $L = Z'(f)$ su conjunto derivado. Como $A \subset Z(f)$, entonces $A' \subset L$ y, por tanto, $L \cap U \neq \varnothing$. Ahora veamos que L es abierto y cerrado en U. El derivado de un conjunto siempre es un conjunto cerrado, por tanto, L es cerrado en U. Probemos ahora que L es entorno de todos sus puntos. Sea $z_0 \in L$, entonces al ser f holomorfa, $\exists \delta > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

$\forall z \in B(z_0{,}\delta)$. Como $f(z_0) = 0$, entonces pueden ocurrir dos casos:

1. $f^{(n)}(z_0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. z_0 es un cero de orden $m \geq 1$.

Supongamos que se da el caso 2. Entonces existe φ, holomorfa en $B(z_0{,}\delta)$ y con $\varphi(z_0) \neq 0$, tal que $f(z) = \varphi(z)(z - z_0)^m$. Como φ es continua, existe $\epsilon > 0$ tal que $\varphi(Z) \neq 0$, $\forall z \in B(z_0{,}\epsilon)$. Por tanto, $B(z_0{,}\epsilon) \cap Z(f) = \varnothing$, luego $z_0 \notin L$. Esto contradice lo supuesto al principio y entonces se cumple el caso i), es decir, f es nula en $B(z_0{,}\delta)$. Entonces L es abierto y cerrado en U, pero como U es conexo, $L = U$, es decir, $f = 0$ en U.

■

1.1.2.Teorema (Principio de identidad): Sean f y g funciones holomorfas en una región U de $\mathbb{C}$. Si $f = g$ en A, con $A' \cap U \neq \emptyset$, entonces $f = g$ en U.

Demostración:
Como $f - g$ es holomorfa, aplicando el anterior resultado se tiene lo deseado.

■

1.1.3.Observación:
Ambos resultados son falsos si U no es conexo. Por ejemplo, si cogemos dos discos con intersección vacía, B_1 y B_2, y definimos las funciones

$$g(z) = \begin{cases} \exp(z) & \text{si } z \in B_2, \\ z & \text{si } z \in B_1, \end{cases}$$

y $f(z) = \exp(z)$ para $z \in B_1 \cup B_2$, ambas bien definidas, se tiene que f y g son iguales en la bola B_2, con puntos de acumulación en $B_1 \cup B_2$, pero no son iguales en el abierto de definición de las dos funciones.

Demos ahora un nuevo concepto de gran importancia en este capítulo.

1.1.4.Definición: Sea f una función compleja definida en $M \subset \mathbb{C}$, subconjunto cualquiera. Decimos que f admite una prolongación o extensión analítica a una región $D \supset M$ si existe una función g, definida y holomorfa en D, tal que $g\,|_M = f$.

1.1.5.Ejemplos:
i) Si definimos f como la exponencial en $\mathbb{R}$, sabemos que f admite una extensión g, que es la función exponencial definida en los complejos. Si en caso de existir otra función g_1, holomorfa en $\mathbb{C}$, entonces por el principio de identidad $g = g_1$, al ser $\mathbb{R}$ cerrado en $\mathbb{C}$.

ii) Otros casos son, por ejemplo, las funciones trigonométricas definidas en los reales que, como en el caso i), admiten extensión analítica hacia el plano complejo.

iii) La serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

definida en el disco unidad, tiene como extensión la función

$$g(z) = \frac{1}{1-z}$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Esto se debe a que

$$g^{(n)}(0) = n!$$

y, por tanto, aplicando el desarrollo de Taylor, tenemos que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

en un entorno del 0.

1.1.6.Definición: Sea f una función definida y holomorfa en una región D de $\mathbb{C}$. Decimos que el par (f,D) es un elemento de función.

1.1.7.Definición: Sean (f,D) y (g,E) dos elementos de función. Decimos que ambos son la prolongación analítica directa o inmediata uno del otro si existe una región $H \subset D \cap E$ tal que $f = g$ en H. Esta relación la representamos como $(f,D) \sim (g,E)$.

1.1.8.Observación:

i) Por el principio de identidad, si $(f,D) \sim (g,E)$, entonces podemos tomar la mayor componente conexa $F \subset D \cap E$ que contenga a H tal que $f = g$ en F.

ii) Si tomamos una función f, holomorfa en una región Ω, y una subregión $\Omega_1 \subset \Omega$, entonces $(f,\Omega) \sim (f,\Omega_1)$.

iii) Es lógico pensar que si dados dos elementos de función (f_1,D_1) y (f_2,D_2) tales que $(f_1,D_1) \sim (f_2,D_2)$, entonces existe (g,B), con $B = D_1 \cup D_2$, tal que g coincide con f_1 y f_2 en D_1 y D_2 respectivamente. Sin embargo, este caso no siempre se da. Tomemos, por ejemplo, $f_1 = \log(z)$ la rama principal del logaritmo y $f_2 = \log_0(z)$ la rama 0 del logaritmo. Las funciones f_1 y f_2 son holomorfas en W_1, que es todo el plano complejo menos el semieje real negativo, y en W_2, todo el plano complejo menos el semieje real positivo, respectivamente. Su intersección es todo el plano complejo menos el eje real. Estas dos funciones coinciden en el semieje imaginario positivo (el argumento $5\pi/2$, que determina los números imaginarios positivos puros, se encuentra en $[-\pi,\pi) \cap [0, 2\pi)$.)
Sin embargo, estas dos funciones no coinciden en el semieje imaginario negativo (el argumento $3\pi/2$ se encuentra en el intervalo $[-\pi,\pi)$, pero no en el intervalo $[0,2\pi)$, donde se encuentra el argumento $7\pi/2$. En este caso $f_1(z) - f_2(z) = 2\pi i$). Por lo tanto, no siempre es posible definir una nueva función g en B que sea extensión analítica de las funciones f_1 y f_2.

A pesar de la observación 1.1.8, apartado ii), si $D \cap E$ es conexo se da el siguiente resultado.

1.1.9.Corolario: Si $(f,D) \sim (g,E)$, con $D \cap E$ conexo, entonces el elemento de función $(h,D \cup E)$ tal que

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D, \\ g(z) & \text{si } z \in E, \end{cases}$$

es una extensión analítica de (f,D) y (g,E).

Demostración:
h está bien definida por el principio de identidad, debido a que $f = g$ en $D \cap E$, al ser éste conexo. Además es holomorfa ya que coincide con f en D y con g en E.

■

Ahora ilustremos algunos ejemplos de prolongación analítica directa.

1.1.10.Ejemplos:
i) Sean dos elementos de función tales que $(f,D) \sim (g,G)$, siendo D y G dos discos cualesquiera que no contienen al cero. Si f es una rama de logaritmo,

entonces g también, ya que el dominio de holomorfía de una rama del logaritmo es todo el plano complejo menos una semirrecta que empieza en el origen. Si G no corta a esa semirrecta, entonces g también estará definida por la misma rama del logaritmo por el principio de identidad. En caso contrario, podemos encontrar una nueva rama tal que su dominio de definición sea todo el plano complejo menos una semirrecta que sea perpendicular a la anterior, cuya colocación dependerá en cual de los dos cuadrantes la interseque.

ii) Un ejemplo de función prolongable sería la del ejemplo 1.1.5, apartado iii). Este ejemplo lo podemos generalizar. Sea

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

un cociente de polinomios, con $grad(Q(z)) > grad(P(z))$, donde $grad(P(z))$ denota el grado de un polinomio $P(z)$. En este caso al ser $Q(z)$ un polinomio, por el teorema fundamental del álgebra se anulará en exactamente $n = grad(Q(z))$ raíces. Si cogemos un punto z_0, donde $Q(z)$ no se anule, siempre podremos encontrar $\epsilon > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

$\forall z \in B(z_0,\epsilon)$. En este caso se tiene que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, B(z_0, \epsilon) \right) \sim (f(z),\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\})$$

siendo $z_1, ..., z_n$ las raíces de $Q(z)$.

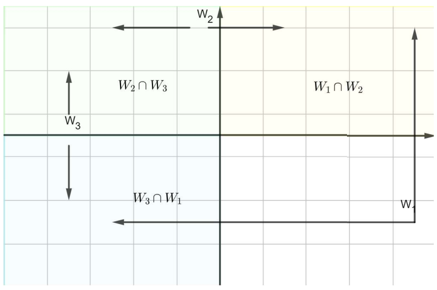
Ahora generalicemos el concepto de prolongación analítica.

1.1.11.Definición: Una cadena es una sucesión finita de regiones $\Upsilon = \{D_0,...,D_n\}$ tal que $D_{i-1} \cap D_i \neq \varnothing$, para $i = 1, ..., n$. Si tenemos un elemento de función (f_0,D_0) y tenemos que $(f_{i-1},D_{i-1}) \sim (f_i,D_i)$, para $i = 1, ..., n$, entonces diremos que (f_n,D_n) es una prolongación analítica de (f_0,D_0) a lo largo de Υ.

1.1.12.Observación:
i) Nótese que la prolongación analítica directa es un caso particular de prolongación analítica a lo largo de una cadena. Es más, dados (f,F) y (g,G) dos elementos de función, entonces la cadena en este caso sería $\Upsilon = \{F,G\}$.

ii) Si (f_n,D_n) es la prolongación analítica de (f_0,D_0) a lo largo de Υ, con $D_0 \cap D_n \neq \varnothing$, entonces no necesariamente $(f_0,D_0) \sim (f_n,D_n)$.
Tomemos la función $f(z) = \log(z)$, la rama principal del logaritmo, y consideremos W_1, la región formada por el primer, tercer y cuarto cuadrante quitando el

semieje real negativo, y W_2 el semiplano por encima del eje real. Consideremos también $g(z) = \log(z)$, con la rama 0, y W_3 el semiplano situado a la derecha del eje imaginario. Se tiene que $(f,W_1) \sim (f,W_2)$ y $(f,W_2) \sim (g,W_3)$, ya que en el semieje imaginario positivo los argumentos son de la forma $\pi/2+2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$, y $\pi/2$ se encuentra en $(-\pi,\pi] \cap (0,2\pi]$. En cambio, en la intersección $W_2 \cap W_3$, las funciones f y g no coinciden en el semieje imaginario negativo, ya que uno de los argumentos de los elementos de ese semieje es $-\pi/2$, que se encuentra en el intervalo $(-\pi,\pi]$ pero no en el intervalo $(0,2\pi]$, donde se encuentra el argumento $3\pi/2$. En este caso $f(z) - g(z) = 2\pi i$, luego aplicando el principio de identidad, al ser $W_2 \cap W_3$ conexo, se tiene que $f \neq g$, $\forall z \in W_2 \cap W_3$. En este caso se tiene que (f,W_2) y (g,W_3) no son prolongaciones analíticas directas, sin embargo, se tiene que (f,W_2) y (g,W_3) son prolongaciones analíticas a lo largo de una cadena Υ, donde $\Upsilon = \{W_1,W_2,W_3\}$. La siguiente imagen muestra una representación gráfica de los dominios del contraejemplo que hemos expuesto antes.



iii) El apartado ii) también justifica que la relación $(f,D_1) \sim (g,D_2)$, donde (f,D_1) y (g,D_2) son elementos de función, no necesariamente es transitiva. Sin embargo, es inmediato que $\sim$ es reflexiva y simétrica.

Denotemos por $\sim^*$, la relación a lo largo de una cadena cualquiera de regiones dada Υ. A diferencia de $\sim$, esta relación cumple la siguiente propiedad.

1.1.13.Corolario: $\sim^*$ es una relación de equivalencia.

Demostración:
Veamos que se cumplen las tres propiedades:

Reflexiva: $(f,D) \sim^* (f,D)$.
Es inmediata, solo basta tomar $\Upsilon = \{D\}$

Simétrica: Si $(f,D) \sim^* (g,E)$ a lo largo de una cadena Υ, entonces $(g,E) \sim^* (f,D)$.
Basta considerar la misma cadena, ya que $\sim$ es simétrica.

Transitiva: Si $(f,D) \sim^* (g,E)$ a lo largo de una cadena Υ_1 y si $(g,E) \sim^* (h,G)$

a lo largo de una cadena Υ_2, entonces $(f,D) \sim^* (h,G)$.
Basta considerar $\Upsilon_3 = \Upsilon_1 \cup \Upsilon_2$. Es fácil ver que $(f,D) \sim^* (h,G)$ a lo largo de Υ_3.

■

Sabemos que por la observación 1.1.12, apartado ii), la relación $\sim$ no es de equivalencia ya que no cumple la propiedad transitiva, sin embargo, se da un caso particular:

1.1.14.Corolario: Si $(f_0,D_0) \sim (f_1,D_1)$ y $(f_1,D_1) \sim (f_2,D_2)$, con $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, entonces $(f_0,D_0) \sim (f_2,D_2)$ siempre que $D_i \cap D_j$ sean conexos, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distintos, y $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$.

Demostración: Como $f_0 = f_1$ en $D_0 \cap D_1$ y $f_1 = f_2$ en $D_1 \cap D_2$, entonces $f_0 = f_2$ en $D_0 \cap D_1 \cap D_2$, pero al ser $D_0 \cap D_2$ conexo, se tiene que por el principio de identidad, $f_0 = f_2$ en $D_0 \cap D_2$.

■

Ahora enunciaremos un resultado que afirma que el producto, suma y producto por un escalar mantienen la relación de prolongación analítica directa.

1.1.15.Proposición: Sean (f,F), (g,G), (f_1,D_1),(f_2,D_1),(g_1,E_1) y (g_2,E_1) elementos de función. Entonces se cumplen los siguientes resultados:

i) Si tenemos H: $\Omega \to \mathbb{C}$, holomorfa en una región Ω, $f(F), g(G) \subset \Omega$ y $(f,F) \sim (g,G)$, se tiene que $(H \circ f,F) \sim (H \circ g,G)$.

ii) Si $(f_1,D_1) \sim (g_1,E_1)$ y $(f_2,D_1) \sim (g_2,E_1)$, entonces $(f_1+f_2,D_1) \sim (g_1+g_2,E_1)$ y $(f_1 \cdot f_2,D_1) \sim (g_1 \cdot g_2,E_1)$.

iii) Si $(f_i,D_i) \sim (g_i,E_i)$, para $i = 1, 2$, y si $f_2, g_2 \neq 0$, $\forall z \in D_1$, entonces

$$(f_1/f_2, D_1) \sim (g_1/g_2,D_1)$$

■

1.1.16.Observaciones:
i) Si tenemos $f(z)$ una función holomorfa en una región $U \subset \mathbb{C}$ tal que $P(f(z)) = 0$, con P un polinomio de grado n con coeficientes complejos, y además $f(z)$ admite prolongación analítica $g(z)$ a una región V, entonces por la proposición 1.1.15 y el principio de identidad se tiene que $P(g(z)) = 0$.

ii) Si f, holomorfa en una región U, admite un logaritmo analítico g, y a su vez, g admite una prolongación directa g_1 a una región más grande V, entonces

f admitirá también una prolongación directa f_1 hacia V. Además dicha prolongación analítica admitirá logaritmo analítico g_1 por el principio de identidad.

Ahora demostraremos un par de resultados relacionados con las derivadas y las primitivas.

1.1.17.Proposición: Si $(f_1,D_1) \sim (f,D)$, entonces $(f_1^{(n)},D_1) \sim (f^{(n)},D)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:
Probemos el caso para $n = 1$, ya que para el resto de los casos se razona de forma inductiva. Si $(f_1,D_1) \sim (f,D)$, entonces existe $G \subset D_1 \cap D$, una región donde $f_1 = f$. Al ser G un abierto, se tiene que $f' = f_1'$ en G, por lo tanto, $(f_1',D_1) \sim (f',D)$.

■

1.1.18.Proposición: Si $(f,D) \sim (f_1,D_1)$ y ambas funciones admiten primitivas, entonces existen primitivas F y F_1 de f y f_1 respectivamente tal que $(F,D) \sim (F_1,D_1)$.

Demostración:
Como $(f,D) \sim (f_1,D_1)$, existe una región $L \subset D \cap D_1$, donde $f \equiv f_1$. Supongamos que existe $z_0 \in G$, con $G(z_0) \neq G_1(z_0)$, donde G y G_1 son primitivas de f y f_1 respectivamente. Consideremos

$$H(z) = G(z) - G_1(z).$$

Al ser H continua, existe un entorno $U \subset L$ tal que $H(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.
Por un lado, por la proposición 1.1.17, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

$\forall z \in B(z_0, \epsilon)$.
Entonces tenemos que $H^n(z_0) = f(z_0) - f_1(z_0) = 0$ y que $H(z) \equiv H(z_0)$ en $B(z_0,\epsilon)$. Por el principio de identidad tenemos que $H(z)$ es constante en L. Ahora tomando $F(z) = G(z) - H(z_0)$ y $F_1 = G_1$, se tiene el resultado deseado.

■

1.1.19.Ejemplos:
El elemento de función $(1/(1 - z),\mathbb{C} \setminus \{1\})$ es prolongación analítica directa de

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n, B(0,1) \right).$$

La derivada de $1/(1-z)$ es $-1/(1-z)^2$. Por la proposición 1.1.17, $-1/(1-z)^2$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

deben ser iguales en $B(0,1)$, luego tenemos que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, B(0,1)\right) \sim \left(-1/(1-z)^2, \mathbb{C}\setminus\{1\}\right).$$

1.1.20.Definición: A cada clase de equivalencia de la relación $\sim^*$ se la llama función analítica global, general o completa.

1.1.21.Observación:
Las funciones analíticas globales están representadas por un elemento de función (f,D). A dichas clases de equivalencia se las suele denotar por $\mathbf{f}$, haciendo alusión a un representante de dicha clase.

Ahora expongamos una definición más específica de función analítica completa.

1.1.22.Definición: Decimos que dos pares (f_1,z_1) y (f_2,z_2) son equivalentes si, y solo si, $z_1 = z_2$ y $f_1 = f_2$, en alguna región que contenga a $z_1 \in \mathbb{C}$. A cada clase de equivalencia de esta relación se la conoce como *germen* o *germen de una función*. Cada germen determina un único z, conocido como la proyección del germen. Se suele denotar el germen como $\mathbf{f}_z$ o $[f]_z$.

1.1.23.Definición: Sea $\mathbf{f}$ una función analítica completa y M la unión de todas las regiones G que forman parte de un elemento de función $(f,G)\in \mathbf{f}$. Al conjunto M lo llamaremos campo de existencia de la función analítica completa $\mathbf{f}$.

1.1.24.Proposición: El campo de existencia M de una función analítica completa es una región.

Demostración:
Como M es unión de abiertos, entonces es abierto. Probemos que es conexo viendo que es conexo por caminos. Sean $z_1, z_2 \in M$ dos puntos cualesquiera, entonces al ser $\mathbf{f}$ función analítica completa, existen dos pares de elementos de función (G_1,f_1) y (G_2,f_2) de $\mathbf{f}$, tales que $z_1 \in G_1$ y $z_2 \in G_2$. Como (G_1,f_1), $(G_2,f_2)\in \mathbf{f}$, existe una cadena de elementos de función

$$\{(L_0,g_0)=(G_1,f_1),\ (L_1,g_1),\dots,\ (L_n,g_n)=(G_2,f_2)\}$$

tal que $(L_{k-1},f_{k-1}) \sim (L_k,f_k)$, para $k = 1, ..., n$. Como L_k es una región entonces es arco conexo, luego existirá un camino ψ_k que una un punto $\theta_k \in L_{k-1} \cap L_k$ con otro punto $\theta_{k+1} \in L_k \cap L_{k+1}$, para $k = 1, ..., n-1$. Sean los caminos ψ_0, que une z_1 con θ_1, y ψ_n, que une θ_n con z_2, contenidos en L_0 y L_n respectivamente. Si consideramos el producto de caminos $\psi = \psi_0 \cdot ... \cdot \psi_n$, se tiene que ψ es un camino contenido en M que une z_1 con z_2, ya que cada camino ψ_i del producto ψ está contenido en L_i, para $i = 0, ..., n$, y

$$\bigcup_{i=0}^{n} L_i \subset M$$

por definición de campo de existencia. Por consiguiente, M es una región.

■

1.1.25.Definición: Decimos que un elemento de función (f,G) es subordinado al elemento (g,E) si $E \subset G$ y $f = g$, $\forall z \in E$.

1.1.26.Observación:
i) Un elemento de función (f,G) y cualquier subordinado suyo siempre serán prolongaciones analíticas directas y, por tanto, siempre pertenecerán a la función analítica global **f**.

ii) Dada f: $U \to \mathbb{C}$, una función holomorfa, existirá un desarrollo de Taylor de la función f, para $z_0 \in U$, en una bola $B(z_0,\epsilon) \subset U$, con $\epsilon > 0$. Por tanto, el elemento de función $(T,B(z_0,\epsilon))$, donde T es el desarrollo de Taylor de la función f, holomorfa en una región U, será un subordinado de (f,U).

1.2. Principio de Reflexión de Schwarz.

En esta sección expondremos uno de los resultados más importantes sobre prolongación analítica: *El principio de Reflexión*. También ilustraremos y demostraremos todas sus variantes, (rectas inclinadas, circunferencias e incluso curvas analíticas). El primer caso es la reflexión en el eje real y fue probado por H.A.Schwarz (1843-1921), matemático alemán que estuvo interesado en cuestiones geométricas, lo cual le llevo a demostrar este resultado, sin embargo, nunca dio una generalización completa. Este principio consiste en lo siguiente:
Dada una función f, holomorfa en Ω, una región que corta al eje real, entonces es posible extender la función a la región simétrica de Ω con respecto al eje real. Antes de probar dicho resultado introduciremos unos cuantos conceptos importantes.

1.2.1.Definición: Dado $D \subset \mathbb{C}$ definimos D^* como el simétrico de D respecto del eje real, es decir

$$D^* = \{z \in \mathbb{C}; \overline{z} \in D\}.$$

Se dice que D es simétrico si $D = D^*$.

1.2.2.Observación:
i) Si tenemos $D \subset \mathbb{C}$ una región simétrica, se denota por D^+,D^- y D_0 como

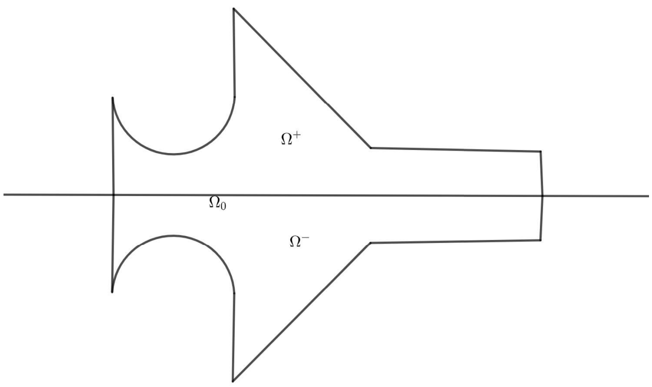
$$\begin{aligned} D^+ &= \{z \in D, Im(z) > 0\} \\ D_0 &= \{z \in D, Im(z) = 0\} \\ D^- &= \{z \in D, Im(z) < 0\} \end{aligned}$$

ii) Si denotamos por $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$ y $\mathbb{C}_0$, los planos superior e inferior de $\mathbb{C}$ y el eje real respectivamente, entonces se tiene que:

$$D^+ = D \cap \mathbb{C}^+,\ D^- = D \cap \mathbb{C}^- \text{ y } D_0 = D \cap \mathbb{C}_0$$

iii)Sea D una región simétrica. El conjunto D_0 es no vacío, ya que si lo fuera, $D = D^+ \cup D^-$, donde D^+ y D^- son abiertos no vacíos disjuntos de $\mathbb{C}$. Esto iría en contra de que D es una región de $\mathbb{C}$ (D es unión disjunta de dos abiertos no vacíos, luego no es conexo).

En la siguiente imagen se puede observar un ejemplo de conjunto simétrico.



1.2.3.Proposición: (Principio de simetría): Sea D una región simétrica con respecto al eje real, con f^+ y f^- funciones holomorfas en D^+ y D^- respectivamente. Entonces podemos definir una función holomorfa f de la siguiente manera:

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z) & \text{si } z \in D^+, \\ f^-(z) & \text{si } z \in D^-, \\ f^-(z) = f^+(z) & \text{si } z \in D_0, \end{cases}$$

Demostración:

Como f^+ y f^- son continuas en $D^+ \cup D_0$ y $D^- \cup D_0$ respectivamente, al ser estos dos conjuntos cerrados con la topología de subespacio de $\mathbb{C}$ en D, entonces f es continua en D. Ahora solo falta ver que f es analítica en los puntos de D_0. Para ello nos basaremos en el teorema de Morera, que dice que si la integral de f a lo largo del borde de cualquier triángulo T tal que $\overline{T} \subset B(z_0,\epsilon)$, para $z_0 \in D$ y $\epsilon > 0$, es nula, entonces f es holomorfa en $B(z_0,\epsilon)$. Para ello consideremos 4 casos.

Caso 1:
Si el triángulo T está contenido en D^+ o D^-, entonces al ser f holomorfa en una de esas regiones se tiene por el teorema de Cauchy-Goursat que la integral a lo largo del borde del triángulo es nula.

Caso 2:
El triángulo T tiene uno de sus lados en D_0. Supongamos que $T \subset D^+ \cup D_0$ (el otro caso es igual). Como T es compacto y f es continua en $D^+ \cup D_0$, entonces f es uniformemente continua en T y, por tanto , $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$, $\forall z,w \in T$ tal que $|z - w| < \delta$. Supongamos que T tiene por vértices a, b y c, con el lado (b,c) contenido en D_0, y consideremos una recta paralela al eje real que corta a ∂T en dos puntos, e y h de tal forma que $\text{máx}\{|e-b|,|h-c|\} < \delta$. Sean T_1, el borde del triángulo con vértices a, e y h, y T_2, el borde del cuadrilátero formado por los vértices (e, b, c, h). Se tiene que:

$$\int_{\partial T} f = \int_{T1} f + \int_{T2} f.$$

Como T_1 está contenido en D^+, por el caso 1 se tiene que:

$$\int_{\partial T} f = \int_{T2} f$$

Si consideramos $M = \text{máx}\{|f(z)|, \text{ para } z \in T\}$ y l el perímetro del triángulo, acotando por M y teniendo en cuenta la desigualdad en módulo de la integral y la continuidad uniforme en T de f, tenemos que:

$$|\int_{[b,c]} f + \int_{[e,h]} f| = |(c-b)\int_0^1 (f(tc+(1-t)b))dt + (h-e)\int_{[e,h]} f(th+(1-t)e)dt|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |c-b| \int_0^1 |\, (f(tc+(1-t)b) - f(th+(1-t)e)dt \,| \\
&+(|e-b| + |h-c|) \int_0^1 (f(th+(1-t)e))dt \\
&\leq |c-b|\epsilon + M(|c-h| + |b-e|) \\
&\leq l\epsilon + 2M\delta
\end{aligned}$$

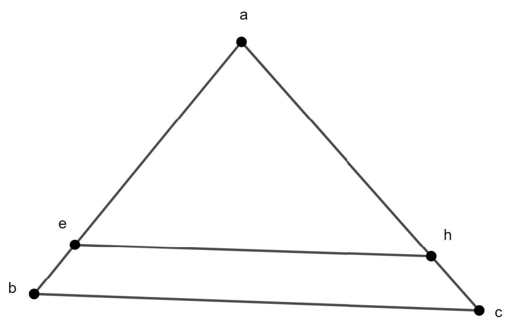
Por otro lado

$$\text{máx}\{|\int_{[c,h]} f|, |\int_{[b,e]} f|\} \leq M\delta$$

y, por tanto,

$$|\int_{T2} f| \leq \epsilon l + 4M\delta$$

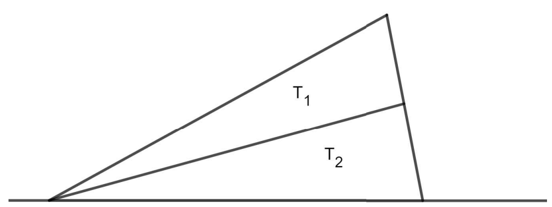
Eligiendo $\delta < \epsilon$ y al ser ϵ arbitrario se tiene que $|\int_T f| = 0$.



Caso 3:
Si tenemos un triángulo T, que corta a D_0 en un solo punto, entonces podemos prolongar el lado de T que no corta a D_0 hasta hacerlo interseccionar. De esta forma obtenemos otro triángulo T_2. Aplicando el caso 2 a T_2 y a T_1, siendo T_1 la unión de T y T_2, y considerando que:

$$\int_{T_1} f = \int_T f + \int_{T2} f$$

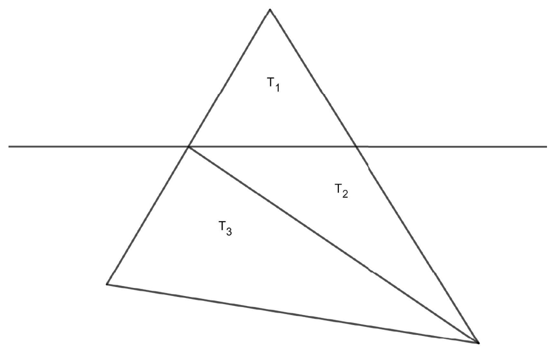
se tiene que $\int_T f = 0$. Esto se observa muy bien en la siguiente imagen.



Caso 4: Si $\text{int}(T) \cap D^+ \neq \varnothing$ e $\text{int}(T \cap D^- \neq \varnothing$, entonces podemos subdividir T en tres subtriángulos T_1, T_2 y T_3, y aplicando los casos 2 y 3 se obtiene que

$\int_T f = 0$.

Este caso se observa con claridad en la siguiente imagen.



Entonces por el teorema de Morera se tiene que f es holomorfa en D_0 y, por tanto, en todo D.

■

Teorema 1.2.4 (Principio de Reflexión de Schwarz): Sea D una región simétrica y f una función holomorfa en D^+ y continua en $D_0 \cup D^+$, que toma valores reales en D_0. Entonces f es prolongable hacia la región D, es decir, existe g, holomorfa en D, tal que $(g,D) \sim (f,D^+)$.

Demostración: Consideremos g de la siguiente forma

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D^+, \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{si } z \in D^-, \\ f(z) = \overline{f(\overline{z})} & \text{si } z \in D_0,. \end{cases}$$

Veamos que $\overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa en $z_0 \in D^-$. Como D^+ es abierto, podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0,\epsilon) \subset D^-$. Tenemos que

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{z - z_0}$$

por otro lado $B^*(z_0,\epsilon) = B(\overline{z_0},\epsilon) \subset D^+$. En este caso g es holomorfa en $B(\overline{z_0},\epsilon)$ y, por tanto, tenemos la siguiente igualdad de límites para $w = \overline{z} \in D^+$.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{z - z_0} = \lim_{w \to \overline{z_0}} \frac{\overline{f(w)} - \overline{f(\overline{z_0})}}{\overline{w} - z_0} = \overline{f'(\overline{z_0})}$$

donde la última igualdad se debe a que f holomorfa en $B^*(z_0,\epsilon)$. De esta forma hemos probado que g es holomorfa en D^- y, aplicando el principio de simetría probado anteriormente, se tiene que g es holomorfa en D.

■

1.2.5.Observación:
i) El principio de simetría no solo da una posibilidad de encontrar una función que sea prolongación de la original, sino también una manera de crear la nueva región donde se extiende la función y la forma de realizar dicha prolongación.

ii) La condición de que f tome valores reales en D_0 es para que esté bien definida. Es más, la extensión analítica g construida en la demostración del teorema de reflexión de Schwarz, cumple que $\overline{g(\overline{z})} = g(z)$, para $z \in D_0$. Como $\overline{g(\overline{z})} = g(z)$, en un conjunto con puntos de acumulación ($D_0' \cap D \neq \varnothing$), se tiene que por el principio de identidad $\overline{g(\overline{z})} = g(z)$, $\forall z \in D$.

iii) Dada f una función holomorfa cualquiera en una región simétrica Ω, se tiene que $f = f_1 + if_2$, siendo f_1 y f_2 holomorfas en Ω y que toman valores reales en Ω_0.
Si consideramos $f(z) = u(z) + i \cdot v(z)$ y tomamos $f(z) + \overline{f(\overline{z})}$, se tiene que para $z \in \mathbb{R}$

$$\overline{f(z) + \overline{f(\overline{z})}} = f(z) + \overline{f(z)} = 2u(z).$$

Haciendo las mismas operaciones pero con $f(z) + \overline{f(\overline{z})}$, se obtiene que esta función vale $2i \cdot v(z)$. Entonces tomando

$$f_1(z) = \frac{f(z) + \overline{f(\overline{z})}}{2}$$

y

$$f_2(z) = (-i)\frac{f(z) - \overline{f(\overline{z})}}{2}$$

se obtiene que $f(z) = f_1(z) + if_2$.

Antes de empezar a dar casos más generales del principio de reflexión, daremos unos conceptos y resultados breves, pero imprescindibles para entender la generalización de este resultado.

1.2.6.Definición: Sean a, b, c y d números complejos, con $ad - bc \neq 0$, entonces la aplicación

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

se llama transformación bilineal o transformación de Möbius.

1.2.7.Observación:
i) Algunas de las transformaciones de Möbius más importantes son:

1. Traslaciones $z \longrightarrow z{+}b$ con $b \in \mathbb{C}$.
2. Rotaciones $z \longrightarrow az$, con $\mid a \mid 1$.
3. Dilataciones $z \longrightarrow rz$, con $r > 0$.
4. Inversiones $z \longrightarrow \dfrac{1}{z}$.

Es más, cada transformación de Möbius es composición de alguna de estas cuatro aplicaciones. (La demostración de este resultado esta en [7])

ii) Las tres primeras transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias, pero no ocurre lo mismo con la cuarta transformación (por ejemplo, la transformación

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

que veremos más adelante). Sin embargo, las inversiones envían elementos de A a elementos de A, donde A denota el conjunto de rectas y circunferencias del plano complejo.

iii) Dada una transformación de Möbius, como en la definición anterior, si imponemos la condición $\varphi(z) = z$, entonces igualando las expresiones obtenemos una ecuación de segundo grado que, por el teorema fundamental del álgebra, posee a lo sumo dos soluciones. Por otro lado, sean a, b y c números complejos evaluados en la transformación de Möbius. Si existiera otra transformación bilineal ψ, que tomase los mismos valores que φ en esos tres puntos, entonces $\psi^{-1} \circ \varphi$ tiene tres puntos fijos, pero por lo visto anteriormente solo nos queda la posibilidad de que $\psi^{-1} \circ \varphi = Id$, es decir, $\psi = \varphi$. Luego las transformaciones de Möbius quedan determinadas de manera única por tres valores.

iv) Existe una única transformación de Möbius M que envía los puntos (a, b) en (0,1) y que $\lim\limits_{z \to c} M(z) = \infty$. Esta aplicación está dada por

$$M(z) = \frac{\dfrac{z-a}{z-c}}{\dfrac{b-a}{b-c}}.$$

Dicha transformación la denotaremos por (z, a, b, c).También existe una única transformación conforme M_1 que envía (a, b, c) en (d, e, f) dada por $(z, d, e, f)^{-1}(z, a, b, c)$.

Ahora probemos lo afirmado en ii)

1.2.8.Proposición: Toda aplicación de Möbius transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

Demostración:
Solo es necesario ver el caso para los cuatro tipos de transformaciones explicados en la observación 1.2.7, apartado i), ya que cualquier transformación de Möbius es composición de algunas de estas cuatro. Tenemos la siguiente ecuación:

$$\alpha\overline{z}z + \overline{\beta}z + \overline{z}\beta + \gamma = 0 \tag{1.1}$$

para α,$\gamma \in \mathbb{R}$ (si $\alpha \neq 0$ y $\gamma/\alpha <\mid \beta/\alpha \mid^2$, (1.1) es la ecuación de una circunferencia, y si $\alpha = 0$ y $\mid \gamma \mid = 1$ o $\gamma = 0$, es la de una recta.
Si $\alpha \neq 0$, entonces podemos dividir la ecuación (1.1) por α, y como $\gamma > 0$ se tiene que

$$\overline{z}z + \overline{\eta}z + \overline{z}\eta + \gamma/\alpha = \overline{(z-\eta)}(z-\eta) = -\gamma/\alpha - \mid \eta \mid^2$$

siendo $\eta = \beta/\alpha$.
Si $\alpha = 0$, tenemos que

$$\beta\overline{z} + z\overline{\beta} = \beta\overline{z} + \overline{\beta\overline{z}} = -\gamma \tag{1.2}$$

Consideremos primero que $Re(\beta) = 0$. Entonces tenemos que $\overline{\beta} = -\beta$ y, por tanto,

$$\beta\overline{z} + z\overline{\beta} = \beta\overline{z} + z\beta = -\gamma$$

y como $\overline{z} + z = 2iIm(z)$, se tiene que

$$Im(z) = \frac{\gamma}{2i\beta}.$$

Si $Re(\beta) \neq 0$, dividiendo la ecuación (1.2) por $Re(\beta)$, se tiene que

$$(1+ai)z + (1-ai)\overline{z} = -\gamma/Re(\beta)$$

donde $a = Im(\beta)/Re(\beta)$. Teniendo en cuenta que $Re(z) = (z+\overline{z})/2$ e $Im(z) = (z-\overline{z})/2i$, se llega a que

$$Re(z) = aIm(z) - \gamma/(2 \cdot Re(\beta))$$

donde la última ecuación determina una recta). Para traslaciones tenemos que si consideramos $w = t(z) = z+a$, donde t es la traslación, entonces sustituyendo z por $w-a$ en (1.1) se tiene que:

$$\alpha\overline{(w-a)}(w-a) + \overline{\beta}(w-a) + \overline{(w-a)}\beta + \gamma = 0$$

$$\alpha\overline{w}w + (\overline{\beta} + \alpha - a)w + (\beta + \alpha - a)\overline{w} + (\gamma + a\overline{a}\alpha) = 0.$$

Para rotaciones si consideramos $w = cz$, con $\mid c \mid = 1$, sustituyendo z por wc^{-1} tenemos que

$$\alpha\overline{(wc^{-1})}(wc^{-1}) + \overline{\beta}(wc^{-1}) + \overline{wc^{-1}}\beta + \gamma = 0$$

$$\alpha\overline{w}w + \overline{\beta}c^{-1}w + \overline{wc}^{-1}\beta + \gamma = 0.$$

Para el caso de dilataciones el proceso es el mismo. En estos tres casos se tiene que la ecuación se transforma en otra, donde el α 'nuevo' es distinto del 0 si, y solo si, lo es en (1.1). Esto no ocurre en el caso de las inversiones. Para inversiones si consideramos $w = 1/z$, con $z \neq 0$, y sustituimos z por $1/w$ tenemos que

$$\frac{\alpha}{\mid w \mid^2} + \frac{\overline{\beta}}{w} + \frac{\beta}{\overline{w}} + \gamma = 0$$

luego

$$\alpha + \overline{\beta}\overline{w} + \beta w + \gamma \overline{w} w = 0$$

En este caso la inversión transforma rectas que no pasan por el cero en circunferencias que pasan por el cero si $\alpha = 0$ y $\delta \neq 0$, y al revés si $\alpha \neq 0$ y $\delta = 0$.

■

Ahora daremos el concepto de simetría respecto de una circunferencia y una recta.

1.2.9.Definición: Sea S una circunferencia, con centro z_0 y radio $R > 0$, y z, z^* dos puntos distintos de z_0. Decimos que dichos puntos z y z^* son simétricos respecto de una circunferencia S si z, z^* y z_0 están alineados de forma que $\mid z - z_0 \mid \cdot \mid z^* - z_0 \mid = R^2$.
Decimos que dos puntos z y z^* son simétricos respecto una recta ρ si el segmento $[z,z^*]$ es perpendicular a ρ y la distancia de z y z^* al punto intersección del segmento con ρ es la misma. Denotaremos por z^* al simétrico de z sobre ρ, siendo ρ un arco de circunferencia o trozo de curva.

En la definición de simetría con respecto a una recta, obviamente se tiene que si giramos la recta ρ hasta que coincida con el eje real, obtenemos que el simétrico de z pasa a ser el conjugado de $r(z)$, donde r es la rotación que nos lleva al eje real.

Ahora veremos un resultado importante que nos afirma que si realizamos transformaciones conformes se seguirá manteniendo la relación de simetría entre dos puntos a lo largo de una circunferencia o recta.

1.2.10.Proposición: Si z y z^* son simétricos respecto de una circunferencia o recta Γ, y φ una transformación de Möbius, se tiene que $\varphi(z^*) = \varphi(z)^*$.

No haremos la demostración ya que se sale de los objetivos de esta sección. Este resultado se encuentra probado en [7].

El principio de reflexión de Schwarz admite varias generalizaciones tanto a rectas distintas del eje real como a circunferencias.

Consideremos una recta ρ que corta al eje real en z_0. Si α es el ángulo formado por la recta ρ ya trasladada con el eje real, entonces la aplicación conforme:

$$\varphi(z) = (z - z_0)e^{-i\alpha}$$

lleva la recta ρ al eje real, trasladándola primero al punto cero y después hacerla rotar hasta que coincida con el eje real.
Si tenemos un conjunto Ω, que es simétrico respecto de ρ, entonces el conjunto

$$\Omega' = \{z' \in \mathbb{C},\, z' = \varphi(z) \text{ para } z \in \Omega\}$$

es simétrico respecto al eje real por la proposición anterior. Denotamos con Ω_1 y Ω_2, la dos partes de Ω que se encuentran en los dos semiplanos definidos por ρ, y $\Omega_{1,2} = \Omega \cap \rho$. Con estas notaciones ya podemos enunciar el siguiente resultado.

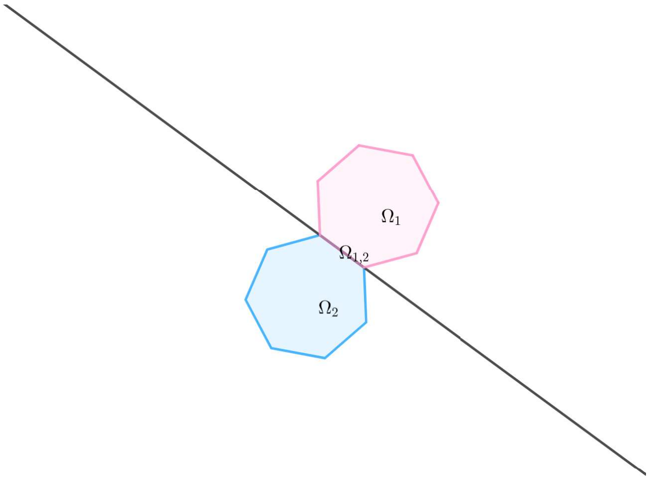
1.2.12.Proposición: Si Ω_1 es una región del plano complejo que tiene por borde un "trozo"de una recta ρ, denotado por $\Omega_{1,2}$, y f es una función holomorfa en Ω_1 que se puede extender de forma continua a $\Omega_1 \cup \Omega_{1,2}$ y tal que $f(\Omega_{1,2}) \subset \rho_1$, donde ρ_1 es otra recta, entonces podemos prolongar analíticamente f a una región $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, siendo Ω_2 la región simétrica a Ω_1 con respecto a ρ.

Demostración:
Sean φ_1 y φ las transformaciones de Möbius que giran las rectas ρ_1 y ρ respectivamente al eje real. Entonces la función:

$$\varphi_1 \circ f \circ \varphi^{-1} : \Omega_1' \to \mathbb{C}$$

es composición de aplicaciones holomorfas bien definidas, luego es holomorfa. En este caso, tomamos Ω_1', que es el conjunto obtenido al aplicar φ sobre Ω_1, deshacemos primero el giro hecho de antes hasta llegar a Ω_1, donde f está definida, y por último realizar un giro de la recta ρ_1 al eje real, donde se encuentran los valores de $\Omega_{1,2}$ evaluados por f.
Aplicando el principio de simetría de Schwarz podemos encontrar una extensión g a $\Omega' = \Omega_1' \cup (\Omega_1')^*$, tal que $g = f$ en Ω_1', donde $(\Omega_1')^*$ es el simétrico de Ω_1' con respecto al eje real. Deshaciendo los cambios, tenemos que la función $G = \varphi_1^{-1} \circ g \circ \varphi$ es una extensión analítica de f a una región simétrica respecto a ρ $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_{1,2} \cup \Omega_2$, tal que $G = f$ en Ω_1, donde Ω_2 es el simétrico de Ω_1 con respecto a ρ.

$\blacksquare$



Antes de demostrar el principio de reflexión para circunferencias, vamos a exponer y probar un resultado importante para este principio.

1.2.13.Proposición: La transformación de Möbius

$$\tau(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

transforma la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ en el eje real.

Demostración:
Si $\mid z \mid = 1$ entonces

$$\overline{\tau(z)} = -i\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = -i\frac{z+\overline{z}z}{z-\overline{z}z} = i\frac{1+z}{1-z} = \tau(z).$$

$\blacksquare$

1.2.14.Proposición: Sea f una función holomorfa en una región Ω, cuyo borde poseé un arco de circunferencia C, y denotemos Ω^* como su simétrico sobre C. Supongamos además que f admite extensión continua al borde C y además f(C)$\subset \rho$, donde ρ es otro arco de circunferencia o una recta. Entonces f admite extensión analítica a $\Omega \cup \gamma \cup \Omega^*$.

Demostración:
Consideremos $C_1 = \{z \in \mathbb{C}, \mid z - a \mid = R$, con $R > 0$ y $a \in \mathbb{C}\}$ tal que $C_1 \subset C$. Dividamos la demostración en dos casos:

Caso 1:
Supongamos que ρ es una recta. La función

$$\varphi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

transforma el círculo unitario en el eje real por la proposición anterior. La función

$$g = \varphi_1 \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \kappa^{-1} \circ \eta^{-1} : \Omega' \to \mathbb{C}$$

es una función holomorfa, donde η y κ son las traslaciones y dilataciones de la bola $\mathbb{E}^2$ en la bola con borde C

$$\eta(z) = z - a$$
$$\kappa(z) = \frac{z}{R}$$

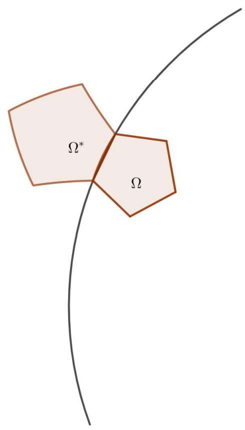
φ_1 la traslación que gira la recta ρ al eje real y Ω' el conjunto obtenido de Ω al aplicar η, κ y φ. Por el principio de Schwarz, g admite prolongación analítica G hacia $\Omega^+ \cup \Omega_0 \cup \Omega^-$. Luego $F = \varphi_1^{-1} \circ G \circ \varphi \circ \kappa \circ \eta$ es una prolongación analítica de f al conjunto simétrico con respecto a C.

Caso 2: Si ρ es otro arco de circunferencia ($\rho \subset C_2 = \{$z$\in \mathbb{C}, \mid z - b \mid \leq R_1$, con $R_1 > 0$ y $b \in \mathbb{C}\}$), el razonamiento es el mismo solo que en vez de componer con φ_1 lo haremos con $\varphi \circ \eta_1 \circ \kappa_1$, donde:

$$\eta_1(z) = z - b$$
$$\kappa_1(z) = R_1 z$$

y φ es la transformación de Mobiüs considerada en la proposición 1.2.13.

■



El principio de reflexión de Schwarz también se puede generalizar a partir de una curva analítica ϕ, pero de manera local, es decir, a partir de un entorno de $\mathbb{C}$ de un punto $t_0 \in [a, b]$, para $a, b \in \mathbb{R}$, contenido en la región Ω donde está definida una función f holomorfa. Notemos que una curva analítica es una curva tal que en un entorno $E \subset \mathbb{R}$ de un punto de $\mathbb{R}$ se puede expresar en series de potencias, luego esto nos permite definir dicha curva a valores complejos en entornos $E \subset \mathbb{C}$.

Al ser ϕ analítica podemos dar la siguiente definición.

1.2.15.Definición: Sean z y z^* dos puntos de $\mathbb{C}$ y

$$\phi:[a,b]\to \mathbb{C}$$

una curva analítica arbitraria. Decimos que z y z^* son simétricos respecto de ϕ si $\exists r>0$ y tres puntos t, t^*, $t_0 \in [a,b]$ con $t^* = \overline{t}$ y $|t-t_0|<r$, tal que $\phi(t)=z$ y $\phi(t^*)=z^*$.

1.2.16.Proposición: Sea f una función holomorfa en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$, cuyo borde contiene el soporte de una curva analítica ϕ :$[a,b]\to \mathbb{C}$ no constante. Supongamos además que la función f se puede extender de forma continua al soporte ϕ^* y tal que $f(\phi^*)\subset \varphi^*$, donde φ^* es el soporte de otra curva analítica φ :$[c,d]\to \mathbb{C}$ no constante. Entonces para cada $t_0 \in [a,b]$, existe una región $t_0 \in \Omega_{t_0} \subset \Omega$ tal que f admite prolongación analítica hacia $\Omega_{t_0} \cup \Omega_{t_0}^*$, donde

$$\Omega_{t_0}^* = \{z \in \mathbb{C},\, z = z^*\}$$

y z^* es el simétrico de z con respecto de ϕ.

Demostración:
Sea $t_0 \in [a,b]$. Como $\phi'(t_0) \neq 0$, por el teorema de las funciones inversas, $\exists G$ región tal que $G \cap \mathbb{R}$ es un segmento y $t_0 \in G$, de forma que ϕ establece un homeomorfismo entre G y $\phi(G) \subset \Omega$, tal que ϕ^{-1} es también holomorfa. Supongamos también que existe $u_0 \in [c,d]$ tal que $\varphi(u_0) \in f(\phi(d))$, donde d es el segmento real de G, y $\varphi'(u_0) \neq 0$. Por lo tanto, aplicando otra vez el teorema de las funciones inversas, existe $r_0>0$ tal que φ establece un homeomorfismo, con inversa holomorfa, de $B(u_0,r_0)$ en $\varphi(B(u_0,r_0))$. Como $f\circ\phi$ es continua, podemos tomar G lo suficientemente pequeño de forma que $f \circ \phi(G) \subset \varphi(B(u_0,r_0))$. La aplicación:

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \phi$$

es holomorfa en G, con $\varphi^{-1} \circ f \circ \phi(d) \subset \mathbb{R}$, por tanto, aplicando el principio de simetría de Schwarz, existe H holomorfa que es prolongación analítica de $\varphi^{-1} \circ f \circ \phi$. Deshaciendo los cambios, $\varphi \circ H \circ \phi^{-1}$ es una prolongación analítica de f en un entorno de $\phi(t_0)$.

■

1.2.17.Observación:
i) Este resultado se puede aplicar también de forma local tanto en rectas como en arcos de circunferencia, al ser éstos también curvas analíticas.

ii) Si se tuviera que $\phi'(t) = 0$, $\forall t \in [a, b]$, entonces ϕ sería constante y, por tanto, estaríamos considerando solo un punto del borde de Ω. Por lo tanto no tiene sentido estudiar la prolongación analítica en ese caso.

Capítulo 2

Prolongación analítica a lo largo de curvas

En este capítulo expondremos el concepto de prolongación analítica a lo largo de una curva, que consiste en ir construyendo elementos de función (g,D) a lo largo de un camino o curva de forma que en trozos pequeños de la curva los elementos de función son prolongaciones analíticas directas y tales que las regiones de definición son no disjuntas. También demostraremos la unicidad de las prolongaciones analíticas a lo largo de curvas, junto con varias propiedades y ejemplos ilustrativos.
La última sección de este capítulo la dedicaremos a la demostración del *teorema de Monodromía*, junto con ejemplos prácticos. Este teorema justifica que si una región Ω, que contiene el dominio de definición D de una función f, siendo (f,D) un elemento de función que admite prolongación a lo largo de una curva ϕ, con $\phi^* \subset \Omega$, es simplemente conexa, entonces la función f se puede extender analíticamente a Ω. En otros libros se expone el teorema de Monodromía como una condición suficiente para que dos prolongaciones analíticas a lo largo de dos curvas con mismo inicio y final de un elemento de función (f,D) sean equivalentes, es decir, que pertenezcan al mismo germen. Esa condición suficiente es la homotopía entre dos curvas.
Al final demostraremos algunas de las consecuencias más importantes del teorema de Monodromía (criterio de Radó y teorema de Poincaré (1887-1985)). A lo largo de esta sección consideraremos curvas continuas en el intervalo $[0,1]$.

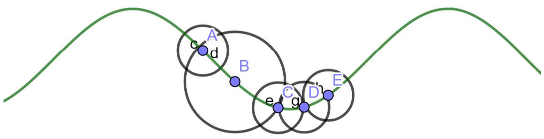
2.1. Definición y primeras propiedades

El concepto de prolongación analítica a lo largo de una curva se expresa de distintas formas. En esta sección daremos dos definiciones de prolongación analítica y veremos que son equivalentes.

2.1.1.Definición: Sea (f,D) un elemento de función, $\phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva y $\{(f_t,D_t) \colon t \in [0,1]\}$ una familia de elementos de función que cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $(f_0,D_0) = (f,D)$;
2. $\phi(t) \in D_t$, $\forall t \in [0,1]$;
3. Para cada $t \in [0,1]$ $\exists \delta > 0$ tal que $\phi(s) \in D_t$ y $f_t = f_s$ en un entorno conexo de $\phi(s)$, $\forall s \in (t-\delta, t+\delta)$.

En este caso diremos que (f,D) es prolongable a lo largo de ϕ. Diremos que (f_1,D_1) es una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de ϕ, o que (f_1,D_1) se ha obtenido de (f,D) a lo largo de ϕ. Escribimos $(f,D) \sim^1 (g,E)$ si existe una curva ϕ para la cual (g,E) es una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de ϕ.



2.1.2.Proposición: La relación $\sim^1$ es de equivalencia.

Demostración:

Reflexiva: $(f,D) \sim^1 (f,D)$.
Consideremos el camino $\phi(t) = a$ y los elementos de función $(D_t, f_t) = (f,D)$, $\forall t \in [0,1]$.

Simétrica: Si $(f,D) \sim^1 (g,E)$, entonces $(g,E) \sim^1 (f,D)$.
Como $(f,D) \sim^1 (g,E)$, existe una curva ϕ y una familia de elementos de función

$$\{(f_t,D_t) \colon t \in [0,1]\}$$

donde (g,E) es una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de ϕ. Si consideramos $\mu(t) = \phi(1-t)$ y la siguiente familia de elementos de función

$$\{(f_t^1,D_t^1) \colon t \in [0,1]\}$$

donde $(f_t^1,D_t^1) = (f_{1-t},D_{1-t})$, al cumplirse que $\sim$ es simétrica se tiene que (f,D) es una prolongación analítica de (g,E) a lo largo de μ.

Transitiva: Si $(f,D) \sim^1 (g,E)$ y $(g,E) \sim^1 (h,F)$, entonces $(f,D) \sim^1 (h,F)$. Tomemos ϕ_1 y ϕ_2, curvas para las cuales $(f,D) \sim^1 (g,E)$ y $(g,E) \sim^1 (h,F)$ respectivamente. Consideremos dos casos:

Caso 1:
Si se da $\phi_1(1) = \phi_2(0)$, entonces consideremos la curva:

$$\phi_1 \cdot \phi_2(t) = \begin{cases} \phi_1(2t) & \text{si } t \in [0,1/2], \\ \phi_2(2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1], \end{cases}$$

y la familia de elementos de función

$$\{(f_t^1,D_t^1)\colon t \in [0,1]\}$$

donde $(f_t^1,D_t^1) = (f_{2t},D_{2t})$, para $t \in [0,1/2]$, y $(g_t^1,D_t^1) = (f_{2t-1},D_{2t-1})$, para $t \in [1/2,1]$. De esta forma se tiene que $(f,D) \sim^1 (h,F)$.

Caso 2:
Si tenemos que $\phi_1(1) \neq \phi_2(0)$, al ser E una región, existe un camino ϕ_{12} que une estos dos puntos. De esta forma, podemos encontrar la siguiente familia de elementos de función:

$$\{(g,B(\phi_{12}(t),\delta(t)))\colon t \in [0,1]\}$$

donde $\delta(t)$ es cualquier número no negativo de forma que $B(\phi_{12}(t),\delta(t)) \subset E$. Razonando como en el caso 1, pero considerando la curva

$$\mu(t) = \phi_1(t) \cdot \phi_{12}(t) \cdot \phi_2(t)$$

se obtiene que (h,F) es la prolongación a lo largo de μ de (f,D).

■

2.1.3.Observación:
i) Dado un elemento de función (f,D) que admite una prolongación analítica a lo largo de una curva cerrada ϕ con la siguiente familia de funciones:

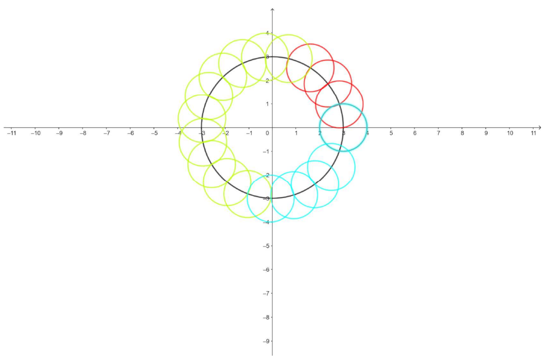
$$\{(f_t,D_t);\, t \in [0,1]\}$$

con $D_1 = D_0 = D$ y $(f_0,D) = (f,D)$, no necesariamente tiene que ocurrir que $(f,D) \sim (f_1,D_1)$. Consideremos, por ejemplo, el elemento de función $(\log(z),B(1{,}1/2))$, tomando la rama principal del logaritmo, y la curva

$\phi(t) = \exp(2\pi i t)$.
Consideremos

$$(f_t, D_t) = \begin{cases} (\log(z), B(\exp(2\pi i t), 1/2)) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \text{ con la rama principal de logaritmo} \\ (\log(z), B(\exp(2\pi i t), 1/2)) & \text{si } t \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \text{ con la rama de logaritmo } 0 \\ (\log(z), B(\exp(2\pi i t), 1/2)) & \text{si } t \in \left(\frac{3}{4}, 1\right], \text{ con la rama de logaritmo } \pi \end{cases}$$

Podemos encontrar un intervalo $(s_1, t_1) \subset (0, 1)$ que contenga a $1/4$, de forma que $(f_s, D_s) \sim (f_t, D_t)$, $\forall s, t \in (s_1, t_1)$, ya que D_t y D_s están situados en el semiplano superior menos el semieje real positivo, donde los logaritmos con la rama principal y la rama 0 coinciden debido a que los argumentos de esos números complejos se encuentran en el intervalo $[0,\pi)$. Con el mismo razonamiento pero para $3/4$, se concluye finalmente que la cadena expuesta arriba cumple las condiciones de la definición de prolongación analítica a lo largo de ϕ. Sin embargo, no se tiene que $(f_1, B(\exp(2\pi i), 1/2)) \sim (f, B(1, 1/2))$, ya que en este caso $f_1(z) - f(z) = 2\pi i$, para $z \in B(\exp(2\pi i), 1/2) \cap B(1,1/2)$.



ii) Sea f una función holomorfa en Ω, región en $\mathbb{C}$, ϕ una curva contenida en Ω y la familia de elementos de función

$$\{(f_t, D_t);\, t \in [0, 1]\}$$

con $D_t \subset \Omega$, $\forall t \in [0, 1]$. Si (f_0, D_0) se prolonga analíticamente a lo largo de ϕ, con la familia

$$\{(f_t, D_t) : t \in [0, 1]\}$$

y con $f_0 = f$ en D_0, entonces $f_t = f$ en D_t para todo $t \in [0, 1]$.

Consideremos

$$A = \{t \in [0, 1];\, f_t = f\}.$$

Este conjunto es no vacío por hipótesis ($0 \in A$). A es abierto, ya que si consideramos $t \in A$, por definición de prolongación analítica a lo largo de ϕ, existe $\delta(t) > 0$ tal que $f_s = f_t = f$ en un entorno conexo de $\phi(s)$, $\forall s \in (t-\delta(t), t+\delta(t))$. Por el principio de identidad se tiene que $f_s = f$ en D_s.
Ahora veamos que A es cerrado. Sea $t \in [0,1]$, límite de una sucesión $\{t_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$. Por definición de prolongación analítica a lo largo de ϕ, $\exists \delta(t)$ tal que $f_t = f_s$, en un entorno conexo de $\phi(t)$, $\forall s \in (t-\delta(t), t+\delta(t))$. Por otro lado, por la definición de convergencia de una sucesión, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid t - t_{n_0} \mid < \delta(t)$, luego $f_t = f_{t_{n_0}} = f$ en una región de $\phi(t)$ y aplicando el principio de identidad se tiene que $f_t = f$ en D_t.
Como $[0,1]$ es conexo, se tiene que $A = [0,1]$.

iii) Si existe f holomorfa en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ y definimos (f,D), con $D \subset \Omega$ una región, entonces (f,D) se puede prolongar a lo largo de cualquier curva ϕ contenida en Ω, con $\phi(0) \in D$. Para ello basta considerar para cada $t \in (0,1]$ una bola D_t contenida en Ω, con $\phi(t) \in D_t$, y considerar la siguiente familia de elementos de función:

$$\{(f,D_t);\, t \in [0,1]\}$$

con $D_0 = D$. Esto justifica que (f,D) se puede prolongar a lo largo de ϕ.

A continuación daremos un nueva definición de prolongación a lo largo de una curva que es equivalente a la expuesta anteriormente.

2.1.4.Proposición: Sean dos elementos de función (f,D) y (g,E), y ϕ una curva de $\mathbb{C}$ con $\phi(0) \in D$ y $\phi(1) \in E$. Se tiene que (g,E) es prolongación analítica de (f,D) a lo largo de ϕ si, y solo si, existe una cantidad finita de elementos de función (f_1,D_1),(f_2,D_2),...,(f_n,D_n) y una partición

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = 1$$

de forma que:

1. $\phi([t_i,t_{i+1}]) \subset D_{i+1}$, $\forall 0 \le i \le n$.
2. $f_i \equiv f_{i+1}$, en un entorno conexo de $\phi(t_i)$, $\forall 1 \le i \le n$.

Demostración:
Supongamos que $(g,E) \sim^1 (f,D)$. Dado que la segunda condición impuesta en la definición se cumple para todo $t \in (0,1)$, se tiene que

$$[0,1] = \bigcup_{t\in(0,1)} ((t-\epsilon(t), t+\epsilon(t)) \cap [0,1]).$$

Como [0,1] es compacto y está recubierto por abiertos de la forma $((t-\epsilon(t), t+\epsilon(t)) \cap [0,1])$, con respecto a la topología inducida de $\mathbb{R}$, utilizando el lema del número de Lebesgue, se tiene que existen n números:

$$0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = 1$$

tales que cumplen las dos condiciones siguientes:

1) $\phi([s_j, s_{j+1}]) \subset D_{s_j}$.

2) $f_{s_j} = f_{s_{j+1}}$ en un entorno conexo de $\phi(s_j)$.

Supongamos ahora que se da la segunda definición impuesta en el enunciado de la proposición. Entonces podemos considerar la siguiente familia de elementos de función:

$$(f_t, D_t) = \begin{cases} (f_i, G_i) & \text{si } t \in [t_{i-1}, t_i], \\ (f_n, G_n) & \text{si } t \in [t_{n-1}, t_n], \end{cases}$$

Considerando en este caso $\delta(t_i) = t_i - t_{i-1}$ y $\delta(t) < \delta(t_i)$, para $t \in [t_{i-1}, t_i]$, se verifican las condiciones impuestas por la definición de prolongación analítica.

■

2.1.5.Observación:
Este resultado nos justifica que la prolongación analítica a lo largo de una curva y a lo largo de una cadena son conceptos equivalentes. Si existe una curva donde el elemento de función (f,D) se puede prolongar analíticamente, entonces por el anterior resultado podemos encontrar una cadena Γ finita de regiones, donde (f,D) se puede prolongar a lo largo de Γ. Recíprocamente, si tenemos una cadena

$$\Gamma = \{D_i; 1 \leq i \leq n\}$$

finita de regiones donde (f,D) se puede prolongar de forma que existen $f_1, ..., f_n$, tales que $(f_i,D_i) \sim (f_{i+1},D_{i+1})$, para $1 \leq i \leq n-1$, entonces tomemos $x_i \in G_i$, donde $G_i \subset D_i \cap D_{i+1}$ es la región tal que $f_i = f_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n-1$. Como D_i es una región, existen caminos ϕ_i que unen x_i con x_{i+1}, con $\phi_i^* \subset D_i$. Considerando el camino

$$\phi = \phi_1 \cdot ... \cdot \phi_{n-1}$$

se tiene que por el anterior resultado, hay una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de una curva ϕ.

Veamos a continuación que la prolongación a lo largo de una curva no depende de la familia elegida.

2.1.6.Teorema (de unicidad): Sean (f,D), (g,E) y (h,F), tres elementos de función, y ϕ una curva en $\mathbb{C}$, con $\phi(0) \in D$ y $\phi(1) \in E \cap F$. Entonces si (g,E) y (h,F) son dos prolongaciones analíticas de (f,D) a lo largo de ϕ, se tiene que $g = h$ en una región conexa D_1, con $\phi(1) \in D_1 \subset E \cap F$.

Demostración:
Existen dos familias de elementos de función

$$\{(g_t,E_t)\colon t \in [0,1]\}$$

y

$$\{(h_t,F_t)\colon t \in [0,1]\}$$

con $(g_0,E_0) = (h_0,F_0) = (f,D)$, $(g_1,E_1) = (g,E)$ y $(h_1,F_1) = (h,F)$.
Consideremos el siguiente conjunto:

$$T = \{t \in [0,1];\ g_t = h_t, \text{ en una región contenida en } E_t \cap F_t\}.$$

El conjunto T es no vacío por hipótesis ($0 \in T$). Se tiene que T es abierto. Si consideramos $t \in T$, entonces por definición de prolongación analítica a lo largo de una curva, existirán $\delta_g(t)$, $\delta_h(t)$ tales que

$$g_t = \begin{cases} g_s & \forall s \in (t-\delta_g(t), t+\delta_g(t)) \text{ en una región } G_s \text{ de } E_s \cap E_t, \text{ con } \phi(s) \in G_s \\ h_s & \forall s \in (t-\delta_h(t), t+\delta_h(t)) \text{ en una región } F_s \text{ de } E_s \cap E_t, \text{ con } \phi(s) \in F_s. \end{cases}$$

Como en este caso tenemos que $\phi(s) \in F_s \cap G_s$, existe una región $\Omega \subset G_s \cap F_s$, con $\phi(s) \in \Omega$, tal que $h_s \equiv g_s$. Por lo tanto, se tiene que $s \in T$.
Veamos ahora que T es cerrado. Cojamos una sucesión $\{t_n\}_{n=0}^{\infty} \subset T$, que converge a un punto t. Si consideramos

$$\epsilon = \text{mín}\{\delta_g(t),\delta_h(t)\}$$

siendo $\delta_g(t)$ (respectivamente $\delta_h(t) > 0$) tal que $g_s = g_t$ (respectivamente $h_s = h_t$) en una región que contiene a $\phi(s)$, $\forall s \in (t-\delta_g(t), t+\delta_g(t))$ (respectivamente $\forall s \in (t-\delta_i(t), t+\delta_i(t))$). Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mid t - t_{n_0} \mid < \epsilon$$

por lo tanto, se tiene que

$$\begin{cases} g_{t_{n_0}} = g_t \text{ en una región, con } \phi(t_{n_0}) \in D_1 \subset E_t, \\ h_{t_{n_0}} = h_t \text{ en una región, con } \phi(t_{n_0}) \in D_2 \subset F_t, \\ h_{t_{n_0}} = g_{t_{n_0}} \text{ en una región, con } \phi(t_{n_0}) \in D_3 \subset E_t \cap F_t. \end{cases}$$

Como $\phi(t_{n_0}) \in D_1 \cap D_2 \cap D_3$, podemos encontrar una región $\Omega \subset D_1 \cap D_2 \cap D_3$, con $\phi(t_{n_0}) \in \Omega$, tal que $h_t = g_t$ y por consiguiente, T es cerrado.
Entonces al ser [0,1] conexo, se tiene que $T = [0,1]$.

Ahora daremos una segunda demostración.

Demostración:
Por la segunda definición de la proposición 2.1.4 tenemos que existen

$$0 = s_0 < s_1 < ... < s_n < s_{n+1} = 1.$$
$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = 1.$$

tales que

$$\phi([s_i, s_{i+1}]) \subset E_i$$

y

$$\phi([t_i, t_{i+1}]) \subset F_i$$

de tal forma que $(g_i,E_i) \sim (g_{i+1},E_{i+1})$ y $(h_i,F_i) \sim (h_{i+1},F_{i+1})$, para $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$.

Veamos ahora que si $[s_i,s_{i+1}]$ y $[t_j,t_{j+1}]$ tienen intersección no vacía, entonces $(g_i,E_i) \sim (h_j,F_j)$.
Supongamos que esta condición no se da para algún par (i,j) y entre todos ellos consideremos el par tal que $i+j$ sea mínimo. Se tiene que

$$[s_i, s_{i+1}] \cap [t_j, t_{j+1}] = [max(t_j, s_i)min(t_{j+1}, s_{i+1})]$$

Así que podemos considerar el caso en el que $t_j \geq s_i$ (la otra situación se razona de manera análoga) y, por tanto, tendremos que $[s_i,s_{i+1}] \cap [t_{j-1},t_j] \neq \varnothing$.
Como $i+j$ es mínimo, tenemos que $(g_{i-1},E_{i-1}) \sim (h_j,F_j)$ y como

$$\phi(s_i) \in E_{i-1} \cap E_i \cap F_j$$

se da que $h_j = g_i$ en un entorno de $\phi(s_i)$. Por lo tanto, se tiene que $(h_j,F_j) \sim (g_i,E_i)$ en contra de lo supuesto. En particular tenemos que $(h_m,F_m) \sim (g_n,E_n)$, que es lo que queríamos probar.

■

Los resultados acerca de convergencia, derivación, primitiva y composición con una función holomorfa que se cumplían con las prolongaciones analíticas directas, también se cumplen para la prolongación a lo largo de un camino.

2.1.7.Proposición: Sea (f,D) y (g,E) dos elementos que admiten prolongación analítica a lo largo de una curva ϕ en $\mathbb{C}$, con $D \cap E \neq \varnothing$. Entonces se cumple:

1. $(f+g,F_1)$ admite prolongación analítica, siendo $F_1 \subset E \cap D$ una región.
2. $(f \cdot g,F_2)$ admite prolongación analítica, siendo $F_2 \subset E \cap D$.
3. $(f/g,F_3)$ admite prolongación analítica, siendo $F_3 \subset E \cap D$, siempre y cuando $g(z) \neq 0$, $\forall z \in F_3$.

Demostración:
Si tenemos las dos siguientes familias:

$$\{(f_t,D_t);\ t \in [0,1] \text{ y } f_0 = f, D_0 = D\}$$

y

$$\{(g_t,E_t);\ t \in [0,1] \text{ y } g_0 = g, E_0 = E\}$$

Podemos considerar la siguiente familia de elementos de función:

$$\{(f_t + g_t,B_t);\ t \in [0,1] \text{ y } f_0 + g_0 = f + g\}$$

donde B_t es un disco con centro en $\phi(t)$ tal que $B(t) \subset D_t \cap E_t$. Estos discos recubren toda la curva y además se tiene que $\exists \delta_t > 0$, para cada $t \in [0,1]$ tal que $(f_t + g_t,B_t) \sim (f_s + g_s,B_s)$, $\forall s \in [t - \delta_t, t + \delta_t]$. Esto se debe a que $B_t \cap B_s$ es una región.
Para las otras dos situaciones se razona de manera análoga, teniendo en cuenta que en 3. puedo encontrar un entorno en el que la función g no se anule en ningún punto.

■

2.1.8.Proposición: Sea (f,D) un elemento de función que admite una prolongación analítica a lo largo de ϕ con la siguiente familia de funciones:

$$\{(f_t,D_t)\text{: con } f_0 = f, D_0 = D \text{ para } t \in [0,1]\}$$

tal que $f_t(D_t) \subset \Omega$, siendo $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región. Si definimos una función $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, se tiene que $(h \circ f,D) \sim^1 (h \circ f_1,D_1)$.

Demostración:
Consideramos la siguiente familia de elementos de función:

$$\{(hof_t,D_t)\text{: con } (h \circ f_0,D_0) = (h \circ f,D) \text{ y } t \in [0,1]\}.$$

Existe $\delta(t) > 0$, para $t \in [0,1]$, tal que $(f_t,D_t) \sim (f_s,D_s)$, $\forall s \in [t - \delta(t), t + \delta(t)]$. Como la composición con una función holomorfa mantiene la relación de prolongación analítica directa, se tiene que $(h \circ f_t,D_t) \sim^1 (h \circ f_s,D_s)$, $\forall s \in [t - \delta(t), t + \delta(t)]$.

■

2.1.9.Proposición: Si $(f,D) \sim^1 (g,E)$, entonces $(f^{(n)},D) \sim^1 (g^{(n)},E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:
Demostremos la proposición para $n = 1$, ya que para el resto de los casos se prueba fácilmente por inducción. Consideremos la siguiente familia de elementos de función:

$$\{(f'_t,D_t)\text{: con } f'_0 = f, D_0 = D \text{ para } t \in [0,1]\}.$$

Se tiene que por la proposición 1.1.17, $\exists \delta(t) > 0$ tal que $(f'_t,D_t) \sim (f'_s,D_s)$, para cada $s \in [t - \delta(t), t + \delta(t)]$, al tener que $(f_t,D_t) \sim (f_s,D_s)$.

■

2.1.10.Proposición: Si (f, D) $\sim^1$ (g,F) y tanto f como g admiten primitiva, entonces existen primitivas F y G de f y g respectivamente tal que (F,D) $\sim^1$ (G,F).

Demostración:
Existe una cantidad de n números t_1,t_2,...,t_n tales que

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = 1$$

y de elementos de función (f_0,D_0),...,(f_{n+1},D_{n+1}) tales que

$$(f_i,D_i) \sim (f_{i+1},D_{i+1}) \text{ para } 0 \leq i \leq n$$

Por lo probado en la proposición 1.1.18, existen $F_0, ..., F_{n+1}$, primitivas de $f_0, ..., f_{n+1}$, tales que

$$(F_i,D_i) \sim (F_{i+1},D_{i+1}), \text{ para } 0 \leq i \leq n.$$

De esta forma se tiene que existen F y G, primitivas de f y g respectivamente, tal que (F,D) $\sim^1$ (G,E).

■

2.1.11.Observación:
i) La prolongación analítica directa es un caso específico de prolongación analítica a lo largo de una curva. Si tenemos que (f,D) $\sim$ (g,F) y $a \in G \subset D \cap F$, siendo G la región donde $f = g$, entonces se tiene que (g,F) es la prolongación analítica de (f,D) a lo largo de $\phi(t) = a$, tomando la familia $f_t = g$ y $D_t = F$, $\forall t \in (0, 1]$.

ii) Debido a que el concepto de prolongación a lo largo de una cadena y a lo largo de una curva son equivalentes, una función analítica completa se puede entender también como las clases de equivalencia $\sim^1$.

iii) También una función analítica completa se puede entender como la colección de todos los gérmenes $\mathbf{g}_b$ tal que existe un punto a y un camino ϕ que une a con b tal que $\mathbf{g}_b$ es prolongación analítica de $\mathbf{f}_a$ a lo largo de ϕ, entendiéndose la prolongación analítica de un germen como una definición equivalente a la de elemento de función, pero considerando en la segunda condición la igualdad $(\mathbf{f}_s)_{\phi(s)} = (\mathbf{f}_t)_{\phi(s)}$.

iv) Si tenemos dos sucesiones f_n y g_n de funciones holomorfas en D y E con (f_n,D) $\sim^1$ (g_n,E), que convergen en los compactos de D y E a f y g, respectivamente, entonces no necesariamente se tiene que (f,D) $\sim^1$ (g,E).
Consideremos la siguiente sucesión de funciones

$$f_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{z - c_n}$$

tal que $c_n \in \mathbb{S}^1$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es absolutamente convergente.
Haciendo tender m a ∞ y teniendo que

$$\sum_{n=1}^{m} \mid \frac{a_n}{z - c_n} \mid \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{\mid a_n \mid}{\mid z \mid -1}$$

donde la última serie de la desigualdad es convergente en los compactos del disco unidad, entonces podemos aplicar el criterio de Weierstrass y concluir que la sucesión es uniformemente convergente en los compactos del disco unidad. Dado que f_m es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{c_1, ..., c_m\}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, se puede extender a partir de cualquier curva que pase por un número $p \in \mathbb{C} \setminus \{c_1, ..., c_m, ...\}$ cualquiera contenido en la circunferencia unidad.
Consideremos la sucesión $c_n \in \mathbb{S}$, de tal forma que su rango es denso en la circunferencia unidad (tómese, por ejemplo, $c_n = exp(2\pi t_n)$, para $t_n \in \mathbb{Q}$, considerando todos los racionales), entonces si consideramos p, con parte real irracional, es imposible prolongar f a lo largo de una curva ϕ que pase por p, con $\phi^* \subset B(0, 1)$, ya que cualquier entorno de p contendrá algún número de la sucesión c_n (el razonamiento sería análogo si consideramos que el número irracional es la parte imaginaria de p).

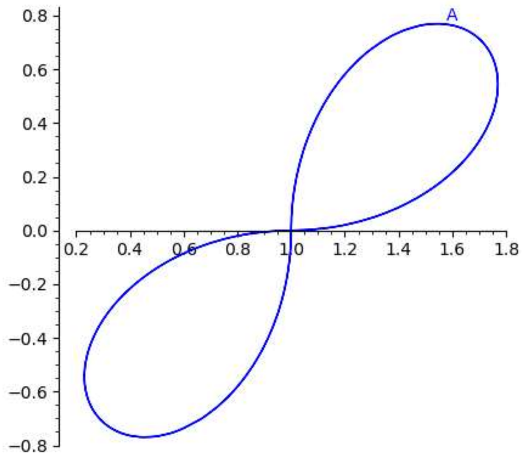
2.1.12.Ejemplos:
i) Si consideramos (f,D) tal que $f(z) = \log(z)$, con cualquier rama, y D un disco que no contiene al 0, entonces se tendrá que cualquier prolongación suya a lo largo de una curva cualquiera ϕ, con $0 \notin \phi^*$, será una rama del logaritmo, es más, se tendrá que cualquier f_t de la familia

$$\{(f_t,D_t) \colon t \in [0, 1]\}$$

será también una rama del logaritmo, donde D_t es un disco con $0 \notin D_t$. Esto se debe a que como las circunferencias no contienen al cero, el disco no intersecciona a los cuatros cuadrantes y, por tanto, podemos encontrar un semieje que se encuentre en el cuadrante que tiene intersección vacía con D_t, tal que podamos definir la función logaritmo que sea holomorfa en $\mathbb{C}$ menos ese semieje, de tal forma que en la bola D_t, el valor sea el mismo que toma la función logaritmo, $\forall t \in [-\delta(0), \delta(0)]$, siendo δ la función tal que $(f_t,D_t) \sim (f_s,D_s)$, $\forall t \in [s - \delta(s), s + \delta(s)]$.

ii) Si $0 \in E$, entonces (g,E) no puede ser la prolongación analítica de (f,D), siendo f una rama del logaritmo. Esto se debe a que si $0 \in E$, entonces E cortará a los cuatro cuadrantes y de esta forma, por el teorema de identidad, podríamos definir g como la función logaritmo de f en E menos la recta donde la función logaritmo no es holomorfa. Pero también podríamos definir g como otra rama del logaritmo de forma que en $D \cap E$ se tiene que los argumentos de $z \in D \cap E$ se encuentren en los intervalos de ambos logaritmos. Luego se deduce que (g,E) no es una prolongación analítica de (f,D). De esta forma se tiene que (g,E) es prolongación analítica de (f,D) a lo largo de una curva ϕ si se cumple la existencia de una cantidad finita de entornos $D_1,...,D_n$, tal que 0 no pertenezca a D_i, para $0 \leq i \leq n$.

iii) Sea ϕ la curva representada abajo. Empecemos tomando el punto A y un disco D centrado en A de forma que no corte al semieje real positivo. Consideremos el elemento de función (f,D), donde $f(z) = \log(z)$, con la rama 0 del logaritmo. Tomemos una cantidad finita de bolas centradas en puntos de la curva, recorriendo la curva ϕ en sentido horario, hasta que lleguemos a un punto donde el disco obtenido al final D_n interseque al semieje real positivo. Ahora consideremos (g,D_n), siendo $g(z) = \log(z)$ con la rama principal. De esta forma se tiene que $(g,D_n) \sim (f,D_n)$. Por lo tanto, tomando en el resto del camino discos del mismo radio y con la misma función logaritmo, se llega a que hemos obtenido una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de ϕ.



2.2. Teorema de monodromía

Dados dos caminos ϕ y δ, con los mismos puntos final e inicial, un elemento de función (f,D) y dos prolongaciones analíticas (f_1,D_1) y (g_1,E_1) de (f,D). Nos planteamos la siguiente cuestión:

¿Se tiene que $(f_1,D_1) \sim (g_1,E_1)$*?*

Si tenemos que $\phi = \delta$, la respuesta es afirmativa debido al teorema de unicidad de prolongación analítica. Sin embargo, no tiene por qué ser en general cierto. Considérese el ejemplo expuesto en la observación 2.1.3, donde las curvas a tomar eran ϕ, la circunferencia de radio 1 centrada en el 0, y δ, el camino constante 1, ambas con el mismo punto final e inicial.

Sin embargo, podemos encontrar una condición suficiente para garantizar que las prolongaciones analíticas de (f,D) a lo largo de ϕ y δ sean prolongaciones analíticas directas: la homotopía de las curvas entre ϕ y δ en una región que contiene a D y al soporte de ambas curvas. Uno de los resultados más importantes en variable compleja que garantiza esta posibilidad, es el *Teorema de Monodromía.*

En varios textos como [7], definen el teorema de Monodromía como un resultado que justifica que una condición suficiente para que las prolongaciones analíticas a lo largo de dos curvas sean prolongaciones analíticas directas es la homotopía entre las curvas. Otros libros como [14], exponen el teorema de Monodromía como una forma de extender una función holomorfa definida en una región D a una región Ω, tal que $D \subset \Omega$, siempre y cuando Ω sea simplemente conexo.
En esta sección definiremos el teorema de Monodromía de la segunda forma, pero también demostraremos la primera. Además expondremos varias de sus consecuencias, como el criterio de Radó y el teorema de Poincaré. En el capítulo 5, utilizaremos el teorema de Monodromía para demostrar la extensión de soluciones de ecuaciones diferenciales a dominios de mayor tamaño. Antes de exponer y demostrar los resultados relevantes del teorema de Monodromía, daremos el siguiente concepto.

2.2.1.Definición: Diremos que un elemento de función (f,D) es arbitrariamente prolongable en Ω, con $D \subset \Omega$, siendo Ω una región, si es prolongable a lo largo de cualquier curva con soporte contenido en Ω y con inicio en un punto de D.

2.2.2.Observaciones:
i) Ejemplo de funciones que son arbitrariamente prolongables son las funciones enteras definidas en una región Ω cualquiera.

ii) Toda función holomorfa f en una región Ω admite su desarrollo de Taylor en un disco $B(x_0,\epsilon) \subset \Omega$. En este caso el elemento de función (f,$B(x_0,\epsilon)$) admite prolongación analítica en Ω.

Ahora daremos una versión 'local' del teorema de Monodromía:

2.2.3.Proposición: Sea (f,D) un elemento de función que admite una prolongación analítica a lo largo de una curva $\phi : [0,1] \to \mathbb{C}$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda curva δ: $[0,1] \to \mathbb{C}$, donde (f,D) admite una prolongación analítica, con mismo inicio y final que ϕ, con

$$\mid \delta(t) - \phi(t) \mid < \epsilon, \ \forall t \in [0,1].$$

Entonces tenemos que los elementos de función (g,E) y (h,F), que son prolongaciones analíticas de (f,D) a lo largo de ϕ y δ respectivamente, son prolongaciones analíticas directas el uno del otro.

Demostración:
Si (f,D) admite una prolongación analítica a lo largo de ϕ, existen

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = 1$$

y

$$\{(f_i,D_i);\ 0 \leq i \leq n\}$$

tal que $\phi([t_i, t_{i+1}]) \subset D_i$ y $(f_i,D_i) \sim (f_{i+1},D_{i+1})$, para $0 \leq i \leq n$. Consideremos

$$0 < \epsilon < \text{mín}\{d(\phi([t_i, ti + 1]),\ \mathbb{C} \setminus D_i),\ 0 \leq i \leq n\}$$

donde d denota la distancia entre dos conjunto. Si tomamos δ, una curva tal que

$$\mid \delta(t) - \phi(t) \mid < \epsilon$$

se tiene que $\delta([t_i, ti + 1]) \subset D_i$, por la anterior desigualdad y $(f_i,D_i) \sim (f_{i+1},D_{i+1})$, para $0 \leq i \leq n$. Por lo tanto tenemos dos prolongaciones analíticas a lo largo de una curva. Por el teorema de unicidad se tiene que $(g,E) = (f_1,D_1) \sim (h,F)$ en un entorno conexo de $\phi(1)$.

■

Vamos a dar ahora una condición suficiente para que la prolongación analítica de (f,D) a lo largo de dos curvas sean iguales: la homotopía entre curvas.Nos referimos a familia uniparamétrica de funciones homótopas f_1 y f_2 dadas, como el conjunto de funciones creadas a partir de una homotopía entre las dos funciones.

2.2.4.Proposición: Sea (f,D) un elemento de función, Ω una región tal que $D \subset \Omega$ y ϕ_0, ϕ_1 dos caminos homótopos relativamente a {0,1}. Si (f,D) admite prolongación analítica a lo largo de todos los caminos de la familia uniparamétrica formada por ϕ_0 y ϕ_1, entonces se tiene que las prolongaciones analíticas (g,E) y (h,F), a lo largo de las curvas ϕ_0 y ϕ_1 respectivamente, son prolongaciones analíticas directas.

Demostración:
Al ser ϕ_0 y ϕ_1 homótopos, se tiene que existe H:$[0, 1] \times [0, 1] \to \Omega$ continua y tal que:

$$H(t, 0) = \phi_0(t), \qquad H(t, 1) = \phi_1(t)$$

Consideremos el camino $\phi_s(t) = H(t, s)$, $\forall s \in [0, 1]$. Por hipótesis existe una familia de elementos de función:

$$\{(f_{s,t},D_{s,t});\ t \in [0, 1]\}$$

con $(f_{1,1},D_{1,1}) = (h,F)$ y $(f_{0,1},D_{0,1}) = (g,E)$, donde (f,D) es prolongable analíticamente. Tomemos ahora el siguiente conjunto

$$U = \{u \in [0,1],\ f_{1,u} = f_{1,0} \text{ en un entorno conexo de } \phi_0(1)\}.$$

U es no vacío ya que $0 \in U$. Veamos que U es abierto.

$\exists \epsilon > 0$ tal que para toda curva $\omega(t)$ que cumple $\mid \omega(t) - \phi(t) \mid < \epsilon$, $\forall t \in [0,1]$, se tiene que las prolongaciones analíticas de (f,D) a lo largo de estas curvas son prolongaciones analíticas directas la una de la otra.
Como el producto cartesiano de compactos es compacto y H es continua, utilizando el teorema de Heine en varias variables se tiene que H es uniformemente continua. Por lo tanto, para el ϵ anterior, $\exists \delta > 0$ tal que para todo $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in [0,1] \times [0,1]$, con $\| (s_1,t_1) - (s_2,t_2) \|_2 < \delta$, siendo $\| \ \|_2$ la norma euclídea, se tiene que

$$\mid H(s_1,t_1) - H(s_2,t_2) \mid < \epsilon.$$

En este caso tenemos que

$$\mid H(s,t) - H(u,t) \mid < \epsilon$$

al tener que $\| (s,t) - (u,t) \|_2 = \mid u - s \mid < \delta$. De esta forma tenemos que $(u-\delta, u+\delta) \subset U$, y de aquí se tiene que U es abierto.
Sea una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ tal que $s_n \longrightarrow s$. Considerando el ϵ de la proposición anterior y teniendo en cuenta la continuidad uniforme de H, tenemos que

$$\mid H(s_n,t) - H(s,t) \mid < \epsilon$$

para $\mid s_n - s \mid < \delta$. Por lo tanto se tiene que $f_{1,u} = f_{1,0}$ en un entorno conexo de $\phi_0(1)$, y de aquí se concluye que U es cerrado.
Al ser [0,1] un conjunto conexo se tiene que $U = [0,1]$ y, por tanto, $(g,E) \sim (h,F)$.

■

2.2.5.Observación:
Este resultado nos permite también ver cuando un conjuntos no es simplemente conexo. Por ejemplo, las dos curvas consideradas en la observación 2.1.3, apartado i), no son homótopas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ya que habíamos justificado que la función logaritmo con la rama principal $f(z)$ podía tener una extensión de forma que en el punto i se diferenciara de $f(z)$ en 2π.

Ahora ya tenemos los resultados necesarios para probar el teorema de Monodromía.

2.2.6.Teorema (Teorema de Monodromía): Sea Ω una región simplemente conexa y (f,D) un elemento de función arbitrariamente prolongable en Ω, con $D \subset \Omega$. Entonces existe F, holomorfa en Ω, tal que $F \equiv g$ en E, siendo (g,E) una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de ϕ, con $\phi(0) \in D$ y $\phi^* \subset \Omega$.

Demostración:
Fijemos un punto $z_0 \in D$. Consideremos ahora la siguiente familia de elementos de función:

$$\Re = \{(g_\phi,E_\phi)\colon \forall\phi \text{ curva con } \phi(0) = z_0 \text{ y } \phi^* \subset \Omega\}$$

tal que (g_ϕ,E_ϕ) es prolongación analítica de (f,D) a lo largo de ϕ.
Notemos que

$$\Omega = \bigcup_{\forall\phi,\phi(0)=z_0} (E_\phi \cap \Omega)$$

para todo E_ϕ, tal que $(g_\phi,E_\phi) \in \Re$. Si $z \in \Omega$, al ser Ω una región, existe un camino ϕ que une z_0 con z. Como (f,D) es arbitrariamente prolongable, existe (g_ϕ,E_ϕ), prolongación analítica de (f,D) en ϕ tal que $z \in E_\phi$. La otra contención es inmediata.

Definimos $F : \Omega \to \mathbb{C}$ como:

$$F(z) = g_\phi(z) \text{ para } z \in E_\phi$$

siendo (g_ϕ,E_ϕ) una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de una curva ϕ, con $\phi(0) = z_0$ y $\phi(1) = z$.
Veamos primero que F está bien definida. Para ello demostremos que:

1. El valor de $F(z)$ no depende de la curva que se tome en la prolongación de (f,D).

Si consideramos dos curvas ϕ y φ, con $\phi(0) = \varphi(0) = z_0$ y $\phi(1) = \varphi(1) = z$, al ser Ω simplemente conexo, se tiene que ϕ y φ son homótopas, luego por el resultado probado anteriormente se tiene que si (g_ϕ,E_ϕ) y (g_φ,E_φ) son prolongaciones analíticas de (f,D) a lo largo de ϕ y φ respectivamente, entonces:

$$g_\varphi \equiv g_\phi \text{ en } G \subset E_\phi \cap E_\varphi$$

siendo G una región con $z \in G$.

2. Si $\exists z_1 \in \Omega$ tal que $z \in E_{\phi_1}$, siendo (g_{ϕ_1},E_{ϕ_1}) una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de una curva ϕ_1, con $\phi_1(0) = z_0$ y $\phi_1(1) = z_1$, entonces $g_\phi = g_{\phi_1}$ en una región $G \subset E_{\phi_1} \cap E_\phi$, con $z \in G$.

Como $(f,D) \sim^1 (g_{\phi_1},E_{\phi_1})$, entonces existe una familia de elementos de función:

$$\{((g_{\phi_1,t},E_{\phi_1,t}))\colon t \in [0,1]\}$$

con $(g_{\phi_{1,0}},E_{\phi_{1,0}}) = (f,D)$ y $(g_{\phi_{1,1}},E_{\phi_{1,1}}) = (g_{\phi_1},E_{\phi_1})$.
Como E_{ϕ_1} es arcoconexo, existe un camino ψ que une z con z_1 y con soporte contenido en E_{ϕ_1} . Como E_{ϕ_1} también es abierto, existe $r(t) > 0$ tal que $B(\psi(t),r(t)) \subset E_{\phi_1}$, para $1 \geq t > 0$. De esta forma podemos considerar la siguiente familia de elementos de función:

$$\{(g_{\phi_1},G_t)\colon t \in [0,1]\}$$

con $G_0 = E_{\phi_1}$ y $G_t = B(\psi(t),r(t))$ para $1 \geq t > 0$.
Obviamente se tiene que (g_{ϕ_1},G_1) es prolongación analítica de (f,D) a lo largo de $\phi_1 \cdot \psi$.
Como Ω es simplemente conexo, $\phi_1 \cdot \psi \simeq \phi$ rel$\{0,1\}$, con $\phi_1 \cdot \psi(1) = z$ y, por tanto, por el resultado anterior, se tiene que

$$g_{\phi_1} \equiv g_\phi \text{ en una región } G \subset G_1 \cap E_\phi$$

con $z \in G$. Por consiguiente, $g_{\phi_1}(z) = g_\phi(z)$.

1. y 2. nos permite justificar que F está bien definida.

La holomorfía de F en Ω se debe a que F coincide con una función holomorfa en una región de un punto $z \in \Omega$ cualquiera. Con esto termina la demostración del teorema de Monodromía.

■

2.2.7.Observación:
En la observación 1.1.8, apartado iii), no se podía realizar una extensión holomorfa de la función logaritmo con la rama principal a todo el plano complejo. Esto no es contradictorio con el teorema de Monodromía, ya que no se puede hacer una prolongación analítica a lo largo de una curva que pase por el 0 de una función logaritmo por lo demostrado en el ejemplo 2.1.7, apartado i). Por otro lado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo, ya que retracta por deformación sobre la circunferencia unidad.

Ahora veremos un resultado que nos permite justificar que el teorema de Monodromía se cumple si, y solo si, Ω es simplemente conexo.

2.2.8.Teorema (Criterio de Radó): Sea Ω una región de $\mathbb{C}$. Si para cada elemento de función (f,D) arbitrariamente prolongable, con $D \subset \Omega$, se tiene que existe F, holomorfa en Ω, con $F = g$ en E y siendo (g,E) una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de una curva ϕ, con soporte contenido en Ω, entonces se tiene que Ω es simplemente conexo.

Demostración:
Si $\Omega = \mathbb{C}$, el resultado es trivial. Consideremos $\Omega \neq \mathbb{C}$. Tomemos g holomorfa en Ω, tal que $g(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$. Tomemos el elemento de función (g,D) con D

un disco.
Al ser D simplemente conexo, existe f holomorfa en Ω tal que $g(z) = \exp(f(z))$, $\forall z \in D$.
Calculando derivadas tenemos que

$$f'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

$f'(z)$ es arbitrariamente prolongable en Ω, al ser $g(z)$ y $g'(z)$ holomorfas en Ω, con $g \neq 0$. Por la Proposición 2.1.10, al ser f primitiva de f', f es arbitrariamente prolongable en Ω. Entonces por hipótesis, existe F holomorfa en Ω tal que $F \equiv f_1$ en D_1, siendo (f_1,D_1) prolongación analítica de (f,D) a lo largo de una curva con soporte contenido en Ω.
Como se da que $\exp(F) \equiv g$ en D, al ser Ω conexo y D con puntos de acumulación en su interior, por el teorema de identidad se tiene que $\exp(F) = g$ en Ω, luego Ω es simplemente conexo. Esta conclusión es un resultado que no probaremos en este capítulo. Su prueba está en [14].
Así que podemos concluir que el teorema de Monodromía no se verifica en ninguna región que no sea simplemente conexa.

■

Ahora veamos que el número de elementos de una función analítica completa es a lo sumo numerable.

2.2.9.Teorema (Poincaré-Volterra): Sea Ω una región de $\mathbb{C}$. Sea (f,D) un elemento de función arbitrariamente prolongable, con $D \subset \Omega$, y $a \in D$. Entonces el número de prolongaciones analíticas de (f,D) a lo de curvas es numerable.

Demostración:
Solo basta considerar las curvas que parten de a, ya que al ser D conexo, podríamos encontrar una curva que una a con otro punto $z_1 \in D$. Consideremos los siguientes elementos de función que son prolongaciones analíticas de (f,D) a lo largo de cualquier curva contenida en Ω.

$$\{(g_\phi,E_\phi)\text{: donde } \phi \text{ es una curva por donde se puede prolongar } (f,D)\}.$$

Consideremos ahora el siguiente conjunto

$$\mathbb{Q}(i) = \{a_1 + ia_2, \text{ con } a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\}$$

Se tiene que $\mathbb{Q}(i)$ es numerable y denso en $\mathbb{C}$. Si consideramos una curva ϕ por donde se puede prolongar (f,D) a (g,E), con $\phi(1) = z$ para $z \in \Omega$, podemos tomar un elemento $z_n \in \mathbb{Q}(i)$ proximo de z de manera que $z_n \in E$. De esta forma uniendo z con z_n por medio de un camino ψ, podemos considerar solo los caminos que tienen como punto final un elemento perteneciente a $\mathbb{Q}(i)$.

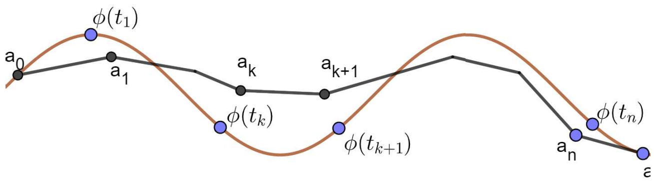
Ahora solo falta ver que el número de clases de curvas homótopas que van

de a a a_0 es a lo sumo numerable, con a_0 cualquiera.
El conjunto de curvas poligonales que une n puntos de $\mathbb{Q}(i)$ es numerable y lo denotamos por $L(\sigma_n)$. De esta forma

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} L(\sigma_n)$$

es numerable.
Consideremos ahora una curva ϕ, donde se prolonga (f,D). Podemos considerar una cantidad finita de puntos $c_1, ..., c_n \in \mathbb{Q}(i)$ y una curva poligonal ϕ_n que los una, de forma que ϕ_n esté próxima a ϕ. Por la proposición 2.2.3, se tiene que las prolongaciones analíticas a lo largo de ϕ_n y ϕ son prolongaciones analíticas directas unas de otras. De esta forma el número de prolongaciones analíticas de (f,D) a lo largo de una curva es a lo sumo numerable.

■



Capítulo 3

Prolongación analítica mediante series de potencias

En este capítulo consideraremos funciones analíticas expresadas de la siguiente forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z - z_0)^n$$

definida en la bola $B(z_0,R)$, donde R es el radio de convergencia de dicha serie y z_0 el centro.
Esta manera de representar una función facilita el trabajo a la hora de encontrar cualquier prolongación analítica de un elemento de función (f,D) a lo largo de una curva. Cualquier función f, definida en D, puede representarse mediante una serie de potencias centrada en un punto $z_0 \in D$.
Uno de los matemáticos más influyentes en este tema fue el alemán K.Weierstrass, quien estaba interesado en demostrar y construir métodos de prolongación analítica mediante series de potencias. Por ejemplo, considérese la siguiente serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

con radio de convergencia r. Si fijamos un punto $z_1 \in B(z_0,r)$, con $z_1 \neq z_0$, entonces existirá $r_1 \geq r- \mid z_0 - z_1 \mid$, tal que f admite el siguiente desarrollo en series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z - z_1)^n$$

$\forall z \in B(z_1,r_1)$. En la primera sección daremos definiciones importantes, como punto singular, punto regular y prolongación analítica en el sentido de Weierstrass, analizando el caso $r_1 > r- \mid z_0 - z_1 \mid$. Además justificaremos que la prolongación analítica de un elemento de función (f,D) a lo largo de una curva

ϕ se puede realizar mediante series de potencias. Daremos casos en los que es posible realizar la extensión analítica con ejemplos ilustrativos y también estudiaremos la posibilidad cuando $r_1 = r- \mid z_0 - z_1 \mid$ (Teorema de Pringsheim (1850,1941)).
Otro matemático importante en la prolongación analítica mediante series de potencias fue el francés J.Hadamard (1865-1963), quien en 1892 consideró en una de sus tesis el siguiente problema:

¿Qué relación hay entre los coeficientes de una serie de potencias y las singularidades de la función holomorfa que ésta representa?.

Hadamard dijo lo siguiente:

Las series de Taylor no revelan las propiedades de las funciones representadas e incluso parecen ocultarlas por completo

La pregunta de Hadamard condujo la aparición de grandes resultados, que permiten realizar una prolongación analítica de forma más sencilla o afirmar que es imposible extender el dominio de holomorfía de una función dada. Ahora nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Qué relación hay entre los coeficientes de una serie de potencias y la posibilidad de extender su dominio de definición?

En la segunda sección estudiaremos varios resultados que nos garantizan cuando una serie de potencias puede no extenderse fuera de la bola donde es holomorfa (ejemplos importantes son las series lacunares) dando la definición de dominio de holomorfía mencionado anteriormente. Ilustraremos y probaremos los teoremas de Hadamard y Ostrowski. Todos estos comentarios, preguntas e información histórica han sido sacados de [13].

3.1. Definición y primeras propiedades.

Antes de exponer varios resultados acerca de prolongación analítica mediante series de potencias, daremos varias definiciones sencillas pero importantes en esta sección.

3.1.1.Definición: Decimos que el elemento de función (f_a,B_a) es un elemento canónico si f_a es una serie de potencias centrada en $a \in \mathbb{C}$ y B_a el disco de convergencia, de radio R_a máximo, de f_a.

3.1.2.Observación:
i) A diferencia de elementos de función genéricos, no hace falta especificar la región donde las series de potencias de los elementos canónicos coincidan cuando

éstos son prolongaciones analíticas directas, ya que la intersección de dos bolas siempre nos dará una región.

ii) Por el apartado i) anterior y el corolario 1.1.9, dados dos elementos canónicos $(f_a,B_a) \sim (f_b,B_b)$, con radios de convergencia R_a y R_b respectivamente, podemos definir un elemento de función (g,Ω) que sea la extensión analítica de (f_a,B_a) y (f_b,B_b), o que (f_a,B_a) y (f_b,B_b) sean subordinados de (g,Ω).

iii) Dados dos elementos canónicos $(f_a,B_a) \sim (f_b,B_b)$, con $B_a, B_b \subsetneq \mathbb{C}$, no puede darse que $\overline{B_b} \subset B_a$, ya que si se diera el caso podríamos recubrir la frontera de B_b por bolas contenidas en B_a. Al ser compactas las circunferencias, se tiene que existen n bolas contenidas en B_a que recubren la frontera de B_b. Denotemos las bolas por $D_1, ..., D_n$. Si fijamos un punto $x_i \in D_{i-1} \cap D_i$, para $i = 1, ..., n-1$, entonces tomando $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon < \text{mín}\{d(S_b, x_i),\ i = 1, ..., n-1\}$$

donde S_b denota la frontera de B_b, se tiene que f_b se puede extender a la bola $B(b,\epsilon + R_b)$, lo cual contradice que el radio de convergencia de la serie f_b sea R_b.

iv) La anterior afirmación nos justifica que las circunferencias ∂B_a y ∂B_b se cortan en dos o un punto. Por tanto, se cumple la siguiente desigualdad

$$\mid R_a - R_b \mid \leq \mid b - a \mid .$$

v) Todo elemento de función (f,D) es prolongación analítica directa de algún elemento canónico. Para verlo basta fijar un punto $a \in D$ y considerar el desarrollo de f en series de Taylor

$$f_a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Se tendrá que existe $\delta > 0$ tal que $f_a = f$ en $B_a = B(a,\delta) \subset D$.

3.1.3.Proposición: Sea (f,D) un elemento de función que admite prolongación analítica a lo largo de una curva ϕ mediante la siguiente familia de elementos de función

$$\{(f_t,D_t);\ t \in [0,1]\}$$

con (f_0,D_0)=(f,D). Entonces podemos encontrar una familia de elementos canónicos

$$\{(f_{a_t},D_{a_t});\ t \in [0,1]\}$$

con $a_t = \phi(t)$ y radio de convergencia $R(t)$, que prolonga analíticamente (f,D) a lo largo de ϕ.

Demostración:
Como la función f_t es analítica en D_t para cada $t \in [0,1]$, con $\phi(t) \in D_t$, existe $r_t > 0$ de forma que

$$f_t(z) = f_{a_t}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_t^{(n)}(\phi(t))}{n!}(z - \phi(t))^n$$

para todo $z \in B(a_t, r_t) = D_{a_t}$, con $a_t = \phi(t)$ y tal que

$$f_{a_t} = f_t \text{ en } D_{a_t}.$$

Veamos que la familia de elementos de función

$$\{(g_t,E_t);\ t \in [0,1]\}$$

prolonga (f,D) a lo largo de ϕ, con $(g_t,E_t) = (f_{a_t},D_{a_t})$, para $t \in [0,1]$.
Es evidente que $\phi(t) \in E_t$. Por hipótesis tenemos que $\exists \delta(t) > 0$, tal que $f_t = f_s$ en un entorno conexo de a_s y $\phi((s)) \in D_t$, $\forall s \in (t - \delta(t), t + \delta(t))$. Como ϕ es continua, podemos tomar $\epsilon(t) < \delta(t)$ lo suficientemente pequeño tal que $a_s \in E_s \cap E_t$, $\forall s \in (t - \epsilon(t), t + \epsilon(t))$. Como $E_s \cap E_t \subset D_s \cap D_t$, para $s \in (t - \epsilon(t), t + \epsilon(t))$, se tiene que $g_t = g_s$ y, por tanto, hemos probado que la familia de elementos canónicos

$$\{(g_t,E_t);\ t \in [0,1]\}$$

prolonga analíticamente (f,D) a lo largo de ϕ.

$\blacksquare$

Estudiemos ahora la variación del radio de convergencia $r(t)$, mencionado en la demostración de la anterior proposición.

3.1.4.Proposición: Sea (f,D) un elemento canónico que admite prolongación analítica a lo largo de ϕ mediante la siguiente familia de elementos canónicos

$$\{(f_t,D_t):\ t \in [0,1]\}$$

con $(f_0,D_0) = (f,D)$ y centradas en $\phi(t)$, para $t \in [0,1]$. Si denotamos por $r(t)$ el radio de convergencia del elemento canónico (f_t,D_t), entonces se tiene que $r(t) = \infty$, $\forall t \in [0,1]$ o que $r(t)$ es una aplicación continua en [0,1] con llegada en $(0,\infty)$.

Demostración:
Si existe $t \in [0,1]$ tal que $r(t)\infty$, entonces $f(t)$ se puede extender a todo el plano complejo. Por el principio de identidad, se tiene que $f(t) = f(s)$, $\forall s \in [0,1]$ y,

por tanto, $r(s) = \infty$, $\forall s \in [0,1]$.

Supongamos que $r(t) < \infty$, $\forall t \in [0,1]$.
Por hipótesis, fijado $t \in [0,1]$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall s \in (t-\delta, t+\delta)$ se tiene que

$$\mid \phi(s) - \phi(t) \mid < r(t)$$

y

$$f_t = f_s \ \forall z \in B_t \cap B_s$$

Por el apartado iii) de la observación 3.1.2 y la definición de prolongación analítica a lo largo de ϕ, tenemos que el radio de convergencia del elemento canónico es $r(s) \leq r(t) - \mid \phi(t) - \phi(s) \mid$ (razonando de forma análoga se tiene que $r(t) \leq r(s) - \mid \phi(t) - \phi(s) \mid$), luego

$$\mid r(t) - r(s) \mid \leq \mid \phi(s) - \phi(t) \mid$$

Esta desigualdad junto con la continuidad de ϕ justifican la continuidad de $r(t)$.

■

3.1.5.Definición: El conjunto de todos los elementos canónicos que se obtienen a partir de uno dado mediante prolongación analítica a lo largo de una curva ϕ, se le conoce como *prolongación analítica en el sentido de Weierstrass.*

3.1.6. Observación:
i) Nótese que la definición dada anteriormente es un caso específico de función analítica global.

ii) Por la unicidad de la prolongación analítica a lo largo de una curva ocurre que si tenemos dos familias de elementos canónicos que prolongan el elemento (f,D), entonces sus elementos son prolongaciones analíticas directas para cada $t \in [0,1]$. Por la propia definición de radio de convergencia de una serie, se tiene que $r(t)$ es independiente de la familia elegida.

Veamos ahora una nueva definición que nos justificará si es posible realizar o no una prolongación analítica de un elemento canónico.

3.1.7.Definición: Sea (f,D) un elemento canónico y $a \in \mathbb{C}$ un punto de la frontera de D. Decimos que a es un punto regular o que (f,D) o D admite un punto regular a si existe al menos un elemento canónico (f_a,D_a), con D_a una bola de centro $a \in D_a$ tal que $(f_b,D_b) \sim (f,D)$. Si a no es regular decimos que el punto es singular.

3.1.8. Observación:
i) Si tenemos un elemento canónico (f,D) que admite un punto regular $a \in \partial D$, frontera de D, entonces podemos prolongar analíticamente (f,D). Si el elemento

canónico (f_a,D_a) admite un punto regular $b \in \partial D_a$, entonces podemos prolongarlo. Podemos repetir este proceso reiteradamente y se terminará si se llega a un elemento de función (f_n,D_n) donde todos los puntos frontera de D_n sean singulares. Sin embargo, puede seguir de forma indefinida.

ii) Sea (f,D) un elemento canónico con centro z_0 y $a \in \partial D$. Si a es regular, entonces existe (f_a,D_a), elemento canónico con $D_a \nsubseteq D$, tal que $(f,D) \sim (f_a,D_a)$. Si fijamos un punto z_1 perteneciente al segmento abierto (z_0,a), por el desarrollo de Taylor, podemos encontrar un elemento canónico $(f_{z_1},D_{z_1}) \sim (f,D)$, donde el radio de D_{z_1} es

$$r_1 > r- \mid z_1 - a \mid .$$

siendo r el radio de convergencia de f. Esto se debe a que si se diese la igualdad en la ecuación anterior, podemos recubrir la frontera de D_{z_1} por bolas que estén contenidas en $D_a \cup D$. Por ser la frontera de D_{z_1} compacta, podemos extraer una cantidad finita de bolas

$$B_1, ..., B_n$$

tal que $B_i \cap B_{i+1} \neq \varnothing$, para $i = 1, ..., n-1$. Si tomamos un punto $z_i \in B_i \cap B_{i+1}$ y consideramos

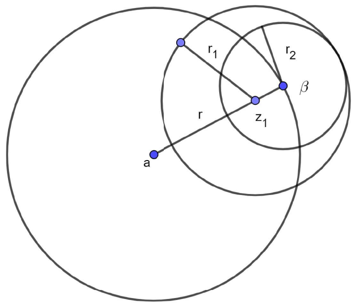
$$r_2 = \min\{\mid z_i - z_0 \mid\}$$

entonces tenemos que $r_2 > r- \mid z_1 - a \mid$, luego el radio de convergencia de f_1 es $r_2 > r_1$ y llegamos a una contradicción.

iii) Recíprocamente, si para todo punto $z_1 \in (z_0,a)$ se tiene que el radio de convergencia r_{z_1} del desarrollo de Taylor de f en z_1 es $r_{z_1} > r- \mid z_1 - a \mid$, entonces se tiene que $a \in B(z_1,r_{z_1})$ y por lo tanto, $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(a,\epsilon) \subset B(z_1,r_{z_1})$ y f admite desarrollo de Taylor en esa bola, luego a es regular. Esto implica que hemos podido dar otra definición equivalente a 3.1.7.

iv) Los apartados ii) y iii) justifican que si se da la desigualdad (respectivamente la igualdad) de (1) en un punto del segmento abierto (z_0,a), entonces se da la desigualdad (respectivamente la igualdad) en todos los puntos de (z_0,a).

Ahora demostraremos la existencia de puntos singulares y cómo determinar alguno de ellos con las condiciones impuestas sobre los coeficientes de una serie de potencias f.



3.1.9.Teorema: Sea (f,D) un elemento canónico con centro $a \in \mathbb{C}$ y radio de convergencia r_a. Entonces siempre existirá al menos un punto singular.

Demostración:
Supongamos que todos los puntos de la frontera de D son regulares, por tanto, existe un elemento canónico $(f_{z^*},D_{z^*}) \sim (f,D)$ con centro en z^*, un punto cualquiera de la frontera de D. Como D_{z^*} recubre la frontera de D, $\forall z^* \in \partial D$, y ésta es compacta, entonces podemos extraer una cantidad finita de puntos

$$z_1, ..., z_n$$

de la frontera de D, n discos $D_1, ..., D_n$ centrados en $z_1, ..., z_n$, de forma que $D_i \cap D_{i+1} \neq \varnothing$, para $1 \leq i \leq n$, que recubren la frontera de D, y elementos de función (f_i,D_i) tales que

$$(f_i,D_i) \sim (f,D).$$

Si fijamos n puntos $z_i^* \in D_i \cap D_{i+1}$ tales que $\mid z_i^* - a \mid > \epsilon + r_a$, para $i = 1, ..., n-1$, con $\epsilon > 0$ cualquiera, y consideramos

$$r = \text{mín}\{\mid a - z_i^* \mid : i = 1, ..., n\}$$

entonces hemos encontrado una extensión analítica de (f,D), (g,E), dada por

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D, \\ f_i(z) & \text{si } z \in D_i \text{ para } i = 1, ..., n, \end{cases}$$

tal que $E = B(a, r)$, pero por el apartado ii) de la observación 3.1.2 llegamos a una contradicción.

$\blacksquare$

3.1.10. Teorema (de Pringsheim): Sea (f,D) un elemento canónico, con r su radio de convergencia. Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $a_n \geq 0$, entonces tenemos que $z_0 + r$ es un punto singular.

Demostración:
Si $z_0 + r$ fuera regular, tomemos entonces un punto $z_1 = z_0 + h_1$ con $0 < h_1 < r$, luego existe un elemento canónico $(f_1,D_1) \sim (f,D)$ con centro z_1 tal que

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n$$

Por otro lado tenemos que

$$f^{(k)}(z_1) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n(h_1)^{n-k}$$

Tomemos ahora $z_2 = h_2 + z_0$, con $h_2 > r$, de forma que $z_2 \in D_1$. Combinando las dos ecuaciones anteriores tenemos que

$$f(z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} h_1^{n-m} \right) (h_2 - h_1)^m$$

Como a_n es positivo podemos reordenar la suma y obtener que

$$f(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} h_1^{n-m} (h_2 - h_1)^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_2^n < \infty$$

Como $h_2 > r$ se tiene una contradicción, ya que el radio de convergencia del elemento canónico (f,D) es r.

■

3.1.11.Ejemplos:
Tomemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Esta serie tiene radio de convergencia 1, pero podríamos realizar la prolongación fuera de la bola unidad. El desarrollo de Taylor de f en el punto $1/2$ es

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}(z + 1/2)^n$$

g tiene radio de convergencia $3/2$ (se tiene que

$$f^{(n)}(-1/2) = \frac{2^n}{3^n}$$

ya que f es el desarrollo de Taylor en el punto 0 de la función

$$\frac{1}{1-z}.$$

Si se tiene que

$$\mid z + 1/2 \mid < 3/2$$

entonces el radio de convergencia de g es $3/2$).

Se tiene que el punto $1/2$ es regular, luego hemos encontrado un elemento canónico (g,$B(1/2,3/2)$) que es prolongación directa de (f,$B(0,1)$).

3.2. Funciones que no pueden prolongarse: Series lacunares.

En esta sección daremos varios resultados que nos afirman cuando una serie no se puede prolongar a una región más amplia. Daremos la definición de dominio de holomorfía y frontera natural de una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

junto con algunas propiedades importantes. Estos conceptos fueron dados por K.Weierstrass, que en 1842 se planteó la posibilidad de que las funciones holomorfas tuvieran frontera natural, concepto que aparece por primera vez en 1866 en una de sus obras *Monatsber. Akad. Wiss. Berlin.* En 1880, el matemático alemán afirma que todo dominio de $\mathbb{C}$ es un dominio de holomorfía de una función f, diciendo lo siguiente:

Es fácil demostrar para una región Ω arbitraria la existencia de funciones holomorfas que no pueden ser prolongadas mas allá de dicha región.

No dio una prueba lo suficientemente convincente, pero sí Runge, 5 años después.

Posteriormente, definiremos varios tipos de series lacunares y daremos demostraciones que nos justifican cuando no se pueden extender, como los teoremas de Ostrowski o Hadamard entre otros.

Las series de potencias que no se pueden prolongar fueron descubiertas por Weierstrass y Kronecker en 1860. Sin embargo, uno de los métodos más importantes para determinar si una serie se puede extender o no, fue dado por Hadamard en 1892. Posteriormente, otros matemáticos como Szegö en 1921 o J.L.Mordell en 1927 dieron demostraciones alternas a este teorema. En este capítulo daremos la demostración de este teorema como un corolario del teorema de Ostrowski, quien pudo observar esta forma de probarlo en 1921.

Al final ilustraremos ejemplos de series de potencias que no se pueden prolongar, justificando este hecho por medio de varios resultados probados anteriormente.

3.2.1.Definición: Una región $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio de holomorfía de una función f, holomorfa en G, si $\forall z \in G$ el disco de convergencia de la serie de Taylor de f en z está contenido en G.

3.2.2.Observación:
i) Si D es un dominio de holomorfía de una función f, siendo (f,D) un elemento canónico, entonces no se puede definir un elemento de función (g,E) tal que (f,D) sea su subordinado. Si existe $E \supset D$ y g holomorfa en E, tal que $g\mid_D = f$, entonces $E = D$, ya que si $E \supsetneq D$ se tendría que $C \subset E$, siendo C un "trozo"de curva de la frontera de D. Sea a el centro de D y $a_1 \in C$. Si tomamos un punto $a_0 \in (a, a_1) \subset D$ y considerando que $(f,D) \sim (g,E)$, se tiene por definición que a_1 es regular, luego existirá una bola $A = B(a_0, r) \nsubseteq D$ en la que f admite su desarrollo de Taylor, con radio de convergencia r. Por definición de dominio de holomorfía llegamos a una contradicción.

ii) En general el recíproco de i) no tiene por qué ser cierto. Si consideramos la función $f(z) = \log(z)$, con la rama principal del logaritmo, entonces la región de mayor tamaño, denotado por A, donde se puede definir f para que sea holomorfa, es todo el plano complejo menos el semieje real negativo. Sin embargo, tomando $g(z) = \log(z)$ con la rama 0, tenemos que $g(z) = f(z)$ en el segundo cuadrante sin el semieje real negativo, denotado por A_2, luego cojamos un punto $c \in A_2$. El disco de convergencia del desarrollo de Taylor intersecciona al semieje real negativo, ya que dicho desarrollo coincide con $g(z)$. Por lo tanto, A no puede ser su dominio de holomorfía.

Demos ahora una nueva definición que está relacionada con el concepto de dominio de holomorfía y es importante en las series lacunares.

3.2.3. Definición: Sea (f,D) un elemento canónico. Si ∂D tiene todos sus puntos singulares, entonces decimos que ∂D es un borde o frontera natural de f o del elemento canónico (f,D).

3.2.4.Observación:
i) Sea B un disco con centro en a. Si B es el dominio de holomorfía de una función f, entonces ∂B es la frontera natural de f. Si existiera un punto c regular, entonces tomando un punto $z_0 \in (a, c)$ se tiene que el disco de convergencia del desarrollo de Taylor de f en z_0 es tal que no está contenido en B, lo cual contradice lo supuesto al principio.

ii) Recíprocamente, si ∂B es una frontera natural de f, para f holomorfa en B, entonces B es un dominio de holomorfía de f. El radio máximo del desarrollo de Taylor, para $z \in B$, es tal que el disco centrado en z esta totalmente contenido en B debido a que todos los puntos son singulares.

3.2.5.Definición: Tenemos la siguiente serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Decimos que $f(z)$ es una serie lacunar si existe una secuencia de enteros positivos

$$m_1 < m_2 < ... < m_n < ...$$

tal que

$$a_j = 0 \text{ para } m_n < j < m_{n+1}, \text{ siendo } n \in \mathbb{N}$$

y se tiene que $\lim_{n\to\infty}(m_{n+1} - m_n) = \infty$

Veamos ahora el siguiente resultado.

3.2.6.Teorema (de convergencia de Ostrowski): Si tenemos la siguiente serie de potencias lacunar

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

con radio de convergencia r, que admite al menos un punto regular β, entonces la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge en algún entorno de β.

Demostración:
Sea (g,E) la prolongación analítica en el sentido de Weierstrass de (f,D) tal que $\beta \in E$. Tomemos $a_1, a_2 \in \partial D$, dos puntos que comprenden el arco de circunferencia en el que se encuentra β, de forma que se puede coger un sector circular S contenido estrictamente en $D \cup E$, pero tal que $S \not\subseteq \overline{D}$.
Solo hay que probar que $\lim_{n\to\infty} \mid g - s_n \mid_{B_1} = 0$, siendo $B_1 \subset S$ un disco centrado en β y tal que su radio sea estrictamente menor que la distancia entre β y a_i, para $i = 1, 2$. Si consideramos las siguientes funciones

$$h_n(z) = \frac{g(z) - s_n(z)}{z^{n+1}}(z - a_1)(z - a_2)$$

es suficiente ver que $\lim_{n\to\infty} \mid h_n \mid_S = 0$ ya que

$$\mid g - s_n \mid_D \leq \mid d^{-1} h_n \mid_S$$

con $d^{-1} = \min\{(z - a_1)(z - a_2) : z \in B_1\}$.

Veamos primero que h_n está acotada.
Si $z = a_1 t$ con $t < 1$, entonces

$$\mid h_n(z) \mid \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} Ar^m \leq \frac{A}{1-r} r^{n+1} \frac{1}{r^{n+1}} (1-r)2 = 2A$$

ya que $\mid a_2 - z \mid < 2$, siendo $A = sup \mid a_n \mid < \infty$.

Si $z = ta_1$ con $1 < t \leq s$ entonces

$$\mid h_n(z) \mid \leq (\|g\|_\infty + A)(r-1)(s+1) < (\|g\|_\infty + A)(1+s)$$

h_n está acotado en el segmento $[0,a_1]$ y se razona de manera análoga para$[0,a_2]$.

En el arco circular entre a_1 y a_2 tenemos que

$$\mid h_n(z) \mid \leq \left(\|g\|_\infty + A(1+q)^2 \frac{(1+q)^2}{1-q} q^{m_{n+1}-m_n} \frac{A}{s-1} \right) (1+s)^2$$

luego se tiene que h_n está acotada en $D \cup E$.

Sea

$$M = \{z \in S : \lim_{n \to \infty} h_n(z) = 0\}.$$

Como las circunferencias de radio $q < 1$ son cerradas y están contenidos en el disco unidad, aplicando el teorema de Vitali, cuya demostración se encuentra en [7], que $C_q \subset M$, siendo C_q la circunferencia de radio q y centro 0.

Tenemos que

$$\mid g_{m_n}(z) \mid \leq \sum_{n=0}^{\infty} Aq^n (1+q)^2 \frac{1}{q^{m_n+1}} = Aq^{m_n}/(1-q)(1+q)^2 \frac{1}{q^{m_n+1}} =$$
$$A(1+q)^2 \frac{(1+q)^2}{1-q} q^{m_{n+1}-m_n}$$

■

Probemos ahora uno de los casos donde una función no pueda extenderse más allá de su dominio de definición.

3.2.7.Teorema (Criterio de No extensión): Si tenemos una serie lacunar f, definida en una bola B y que diverge en todos los puntos de ∂D, entonces el dominio de holomorfía de f es B.

Demostración:
La sucesión de sumas parciales s_n no converge en ningún punto de ∂D, luego por el teorema de convergencia de Ostrowski se tiene que todos los puntos de ∂D son singulares. Luego B es el dominio de holomorfía de D.

■

Ahora mismo daremos un nuevo concepto, que gracias a unas condiciones específicas que cumplen los coeficientes de una serie de potencias, podemos garantizar la posibilidad de que la sucesión de sumas parciales converja fuera del disco. Este fenómeno se le conoce como sobreconvergencia. Demos ahora la siguiente definición.

3.2.8.Definición: Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

una serie de potencias con radio de convergencia 1 que admite al menos un punto regular β. Se dice que f es sobreconvergente si existe

$$0 < m_0 < m_1 < ... < m_n < ...$$

una secuencia de enteros de forma que la sucesión de sumas parciales $\{s_{m_n}\}$ converge en un entrono de β.

Demos ahora otra definición importante para justificar un resultado importante.

3.2.9.Definición: Un serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

se dice que es una serie de Ostrowski si existe $\delta > 1$ y dos secuencias de números naturales $n_0, n_1, ...$ y $m_0, m_1, ...$ tal que

$$m_0 < n_0 \leq m_1 < n_1 \leq ... \leq m_t < n_t \leq m_{t+1} < ...$$

y

$$n_k > \delta m_k.$$

Además se cumple que

$$a_i = 0 \text{ para } m_k < i < n_k$$

3.2.10.Lema: Sea $\psi(z) = (z^n + z^{n+1})/2$, con $n \in \mathbb{N}$. Si consideramos $\Omega_\epsilon = B(0,1) \cup B(1,\epsilon)$, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $r > 1$ tal que

$$\psi(B(0,r)) \subset \Omega_\epsilon$$

Demostración:
Si $\mid z \mid \leq 1$, entonces $\mid \psi(z) \mid = \mid z \mid^n \mid 1+z \mid /2 \leq \mid 1+z \mid /2$ que es estrictamente menor que 1 a menos que $z = 1$. Por lo tanto, tenemos que $\psi(\overline{B}(0,1)) \subset \Omega_\epsilon$. Entonces como ψ es continua, $\psi^{-1}(\Omega_\epsilon)$ es abierto, luego podemos recubrir cada punto de $\mathbb{S}^1$ por discos contenidos en $\psi^{-1}(\Omega_\epsilon)$. Por la compacidad de $\mathbb{S}^1$ podemos encontrar una cantidad finita $B_1, ..., B_m$ de discos que recubran la circunferencia unidad, luego para $1 \leq i \leq m-1$ cogemos un punto $x_i \in B_i \cap B_{i+1}$ tal que $\mid x_i \mid > 1$. Entonces considerando

$$r < \text{mín}\{\mid x_i \mid\}$$

tenemos que $B(0,r) \subset \psi^{-1}(\Omega_\epsilon)$, luego $\psi(B(0,r)) \subset \Omega_\epsilon$.

■

3.2.11.Teorema (sobreconvergencia de Ostrowski): Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

una serie de potencias de Ostrowski con radio 1 y $\beta \in \mathbb{S}^1$ un punto regular. Entonces la sucesión de sumas parciales converge uniformemente en un entorno de β.

Demostración:
Sin pérdida de generalidad podemos considerar $\beta = 1$. Consideremos ψ como en el lema anterior y definamos $g(z) = f(\varphi(z))$, siendo φ la función del lema anterior, para la existencia de $r > 1$ y $z \in B(0,1)$. Consideremos

$$g(z) = f(\psi(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi(z)^n$$

y el desarrollo de Taylor de g en 0

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

El objetivo es ver que

$$s_{(p+1)n_k}(w) = t_{m_k}(\phi(w))$$

siendo $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ las sucesiones de sumas parciales de F y g respectivamente. El mayor exponente de $\psi(w)^{n_k}$ es más pequeño que el menor exponente de $\psi(w)^{m_k}$. Por la condición de espaciado satisfecha por a_n, tenemos que

$$s_{(p+1)n_k}(w) = t_{m_k}(\phi(w)).$$

$t_{m_k}(z)$ converge cuando $\mid w \mid< r$, luego $s_{(p+1)n_k}$ converge en un entorno de 1.

■

3.2.12.Definición: Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

una serie de potencias con radio de convergencia r. Decimos que es una serie lacunar de Hadamard si existe $r > 1$ y una secuencia de números enteros positivos $m_0, m_1, ...$ tales que

$$m_{k+1} > rm_k \text{ y } a_i = 0 \text{ para } m_k < i < m_{k+1}$$

3.2.13.Teorema (de Hadamard): Cualquier serie lacunar de Hadamard f, con radio de convergencia R, tiene a $\partial B(0, R)$ como su frontera natural.

Demostración:
La subsucesión de sumas parciales s_{m_k} de la definición 3.2.9 es la sucesión de sumas parciales de la serie lacunar de Hadamard f definida en el teorema, teniendo en cuenta que $n_i = m_{i+1}$. Esta sucesión diverge en cualquier punto fuera de la bola, luego por definición de radio de convergencia y por el teorema de sobreconvergencia de Ostrowski, podemos garantizar que no hay ningún punto regular en $\partial B(0, R)$.

■

3.2.14.Ejemplos:
i) Consideremos $a_n = 1$, si n es una potencia de 2, y $a_n = 0$ en caso contrario. Definamos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n 2^{1/\sqrt{n}}.$$

Como

$$\limsup_{n\to\infty} (\mid a_{2^n} \mid 2^{1\sqrt{n}})^{1/n} = 1$$

se tiene que el radio de convergencia de la serie f es 1 por el criterio de la raiz. Aplicando el teorema de Hadamard ($a_{n+1}/a_n = 2 > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$) tenemos que la frontera natural de f es el disco unidad, sin embargo, consideremos

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n 2^{1/\sqrt{n}} z^{n-k}$$

para k entero no negativo, se tiene que $f^{(k)}$ converge uniformemente en la circunferencia unidad, luego f y todas sus derivadas se puede extender de forma continua al disco cerrado unidad. Este ejemplo justifica que aunque f tenga como frontera natural a $\mathbb{S}^1$, no necesariamente tiene que haber discontinuidades, es más, es posible realizar una prolongación continua de f al borde del disco unidad.

ii) Si T es el borde natural de una función f, entonces también lo será para $f^{(k)}$ con $k \in \mathbb{C}$. En caso de que no fuera así, podríamos realizar una prolongación analítica de $f^{(k)}$, y utilizando el resultado de prolongación analítica directa de primitivas, llegaríamos a la conclusión de que f posee puntos regulares. Lo mismo ocurre con dominios de holomorfía, si G es un dominio de holomorfía de f, entonces también lo será para $f^{(k)}$.

iii) Otros ejemplos también interesantes de series lacunares de Hadamard son:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \text{ y } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

También podríamos demostrar de otra forma que la serie de potencias f tiene a $\mathbb{S}^1$ como su frontera natural. Consideremos el siguiente conjunto:

$$B = \{\exp(2\pi ik/2^n);\ n, k \in \mathbb{N}\}.$$

Se tiene que B es denso en $\mathbb{S}^1$, ya que contiene a todos los posibles números de la forma $\exp(\pi ik)$, donde $k \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Como el conjunto de puntos singulares de la función f es cerrado (se debe a que el conjunto de puntos regulares es abierto, ya que si tenemos un punto regular c, habrá una bola de centro c que contenga un arco C de $\mathbb{S}^1$. Por la definición 3.1.7 los puntos de C son regulares. Entonces el conjunto de puntos regulares es abierto en $\mathbb{S}^1$, luego el conjunto de puntos singulares es cerrado, pero como $\mathbb{S}^1$ es cerrado, se tiene que este conjunto es cerrado en la topología usual), se tiene que la frontera natural de f es $\mathbb{S}^1$.

iv) Un ejemplo de serie lacunar que no sea de Hadamard es

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$$

ya que para $n = 0$ se da la igualdad con el 1, pero $\lim\limits_{n\to\infty} ((n + 1)^2 - n^2) = \infty$.

Capítulo 4

Ejemplos clásicos de funciones prolongables

En este capítulo expondremos de forma breve, pero con detalle, la prolongación analítica de algunas funciones de variable compleja importantes en las matemáticas como el logaritmo, la función gamma y la función zeta de Riemann.

4.1. Primeros ejemplos

He ido dando ejemplos donde se puede aplicar fácilmente la teoría que hemos visto a lo largo de los anteriores capítulos. En esta sección explicaré cómo la extensión analítica puede definir con mayor claridad las funciones analíticas multivaluadas.
Dos ejemplos importantes de funciones analíticas multivaluadas en variable compleja son: la función logaritmo y la raíz n-ésima. Estudiaremos en esta sección la función logaritmo (la raiz n-ésima es un caso parecido). Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) > 0\} \\ H_2 &= \{z \in \mathbb{C};\ Im(z) > 0\} \\ H_3 &= \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) < 0\} \\ H_4 &= \{z \in \mathbb{C};\ Im(z) < 0\} \end{aligned}$$

Sabemos que dados z_1, z_2 con $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, entonces $z_1 = z_2 + 2k\pi i$ para $k \in \mathbb{Z}$. Vamos a dar a partir de ramas de logaritmo una definición general de la función logaritmo utilizando prolongaciones analíticas.
Consideremos para $z \in S_n = H_i$, con $i = 1, 2, 3, 4$, y $n = 4k + i$ para $k \in \mathbb{Z}$, las siguientes funciones:

$$f_n(z) = \log(\mid z \mid) + iarg(z)$$

siendo $arg(z)$ el argumento de z que se encuentra en el intervalo $[\pi(n-2)/2, n\pi/2)$.
Si consideramos $r \in \mathbb{R}$ tal que $(n-1) \leq r \leq n$, entonces es fácil ver que $(f_n,H_i) \sim (\log(z)_r,H_i)$ donde $\log(z)_r = ln(\mid z \mid) + iarg(z)$, $arg(z) \in [r, r + 2\pi)$.
Por otro lado, por la diferencia de los argumentos, tenemos que

$$f_n(z) - f_{n+4k}(z) = 2\pi i k$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$.
Entonces tenemos que para cada $i = 1, 2, 3, 4$ y $n = 4k + i$, para $k \in \mathbb{Z}$, las funciones f_n dan todos los posibles valores que puede tomar la función logaritmo en un punto $z \in H_i$ cualquiera

$$\log(z) = \{f_k(z) : \text{para } arg(z) \in [c, c + 2\pi), \text{ siendo } c \in \mathbb{R} \text{ cualquiera}\}$$

4.2. Función gamma

La función gamma es una de las más importantes en varias ramas de las matemáticas, ya sea la probabilidad y estadística (es muy utilizada en varias distribuciones como la t de Student o la F de Fisher) como la variable compleja y ecuaciones diferenciales (juega un papel importante en la solución de las ecuaciones de Laplace). Esta función se caracteriza por extender el concepto de función factorial al plano complejo, de forma que dicha función sea holomorfa.

Dicha función se puede calcular numéricamente a partir de fórmulas como la de Stirling y crece muy rápidamente para valores de gran tamaño, por lo que varios lenguajes de programación como R tienen una función que devuelve el logaritmo de la función gamma.
La función gamma fue introducida por Euler en el año 1729 junto con Christian Goldbach. Esta función surgió de una mezcla entre un problema interpolatorio y otro integral. El problema consistía en encontrar una función sencilla que diese valores de factoriales con la entrada de un entero. Goldbach se planteó varias preguntas: ¿Es posible definir una función que devuelva factoriales de números enteros positivos? ¿Es posible dar el factorial de un número racional no entero?... Las respuestas a estas preguntas son proporcionadas por la función Γ.
La función Γ tiene varios resultados interesantes. En esta sección solo demostraremos su extensión analítica, pero antes daremos su definición.

4.2.1. Definición: Sea $\Gamma(z)$ la siguiente función

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Esta función se le conoce como función gamma y su notación fue introducida por Legendre.

Demostremos el siguiente resultado.

4.2.2. Proposición: Si tenemos $A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ y

$$f_n = \int_{1/n}^{n} t^{z-1} e^{-t} dt$$

entonces f_n es holomorfa en A, para cada $n \in \mathbb{N}$, y converge uniformemente en los compactos de A a $\Gamma(z)$.

Demostración:
Como la función $g(z) = e^{-t}t^{z-1}$ es holomorfa en A, entonces aplicando el lema de holomorfía bajo el signo integral con la curva $\phi(z)$ tal que $\phi^* = [1/n, n]$, el segmento que une n con $1/n$, tenemos que f_n es holomorfa en A.
Si $K \subset A$ es compacto, entonces podemos encontrar dos números positivos a, b tales que

$$K \subset \{z : a \leq Re(z) \leq b\}$$

Luego

$$f_m(z) - f_n(z) = \int_{1/m}^{1/n} e^{-t}t^{z-1}dt + \int_{n}^{m} e^{-t}t^{z-1}dt$$

para $m > n$. Por otro lado

$$\mid \int_{1/m}^{1/n} e^{-t}t^{z-1}dt \mid \leq \int_{1/m}^{1/n} t^{a-1}dt = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{m^a}\right)$$

y

$$\mid \int_{n}^{m} e^{-t}t^{z-1}dt \mid \leq \int_{n}^{m} Me^{-t/2}dt = 2M(e^{(-1/2)m} - e^{(-1/2)n})$$

siendo $M > 0$ tal que $t^{b-1}e^{-t} \leq Me^{-t/2}$ al tener que $\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{b-1} = 0$.
Tenemos que la sucesión de funciones f_n es uniformemente de Cauchy en K, y por consiguiente, tenemos que f_n converge uniformemente en K.
Por otro lado, aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que la sucesión f_n converge puntualmente a Γ, luego lo hace uniformemente por la unicidad de convergencia puntual y uniforme. Tenemos que, aplicando el criterio de Weierstrass, Γ es holomorfa en $\{z : a < Re(z) < b\}$.

∎

Ahora veamos una propiedad que nos permitirá justificar la prolongación analítica de Γ.

4.2.3.Proposición: Se tiene que

$$\Gamma(z+1)z = \Gamma(z)$$

Demostración:
Es simplemente aplicar integración por partes

$$\int_0^\infty e^{-t}t^z dt = -e^{-t}t^z \mid_{t\to 0}^{t\longrightarrow\infty} - z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z)$$

■

Veamos ahora que podemos prolongar Γ a todo el plano complejo menos los enteros no positivos.

4.2.4.Proposición: Definimos la función $\Pi_n(z)$, con $n \in \mathbb{N}$, como

$$\Pi_n(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)...(z+n-1)}$$

entonces si definimos $\Pi(z) = \Pi_n(z)$ si $-n < Re(z) \leq -n+1$,para $n \neq 0$ y $\Pi_0 = \Gamma$, se tiene que Π es la extensión analítica de Γ a $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$.

Demostración:
Si tenemos $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n < Re(z) \leq -n+1$, luego podemos encontrar un disco D con centro en z_0 y contenida en el semiplano $Re(z) > -n$, de forma que $\Pi(z) = \Pi_{n+1}(z)$, $\forall z \in D$. Luego Π es holomorfa en z y por consiguiente, es una extensión analítica de Γ hacia $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, ya que $\Pi = \Pi_0 = \Gamma$ en el semiplano $Re(z) > 0$.

■

4.3. Función zeta de Riemann

Esta función tiene una gran repercusión en la teoría de números, sobre todo con la distribución de los números primos. De hecho, uno de los problemas más famosos de matemáticas sin resolver es la localización de ceros de esta función. Esta conjetura se le conoce como hipótesis de Riemann y fue formulada en 1859. Aunque esta función cobra una gran importancia en la matemática abstracta, también es de gran utilidad en la estadística y la física. En este capítulo no explicaremos los detalles de todas las consecuencias y resultados relacionados con la función zeta de Riemann. Solo demostraremos que se puede extender a todo el plano complejo menos el punto 1.

Si tenemos la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que la serie es convergente si, y solo si, $\alpha > 1$. Podemos definir una función $\zeta(z)$ con $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

para $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 1$. Esta función se le conoce como función zeta de Riemann. Veamos ahora que ζ es holomorfa en $A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$. Tenemos que si $z \in A$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $Re(z) > 1 + \delta$. Luego tenemos que

$$| \zeta(z) | \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{| n^z |} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(z)}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

Como $1 + \delta > 1$ se tiene que la serie es convergente en A, luego ζ es holomorfa en $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1 + \delta\}$, $\forall \delta > 0$. Por consiguiente, ζ es holomorfa en $\{z : Re(z) > 1\}$.

Si consideramos el siguiente desarrollo en series de potencias

$$\frac{1}{1 - 1/p_i^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{nz}}$$

para p_i primo, tenemos que

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 1/p_i^z} = \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{nz}} \right).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, existirán $p_1, ..., p_m$ primos no necesariamente distintos, tales que $n = p_1 \cdot ... \cdot p_m$. Luego reordenando sumas y haciendo tender m a infinito tenemos que

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 1/p_i^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Esta es la ecuación del producto de Euler.

Antes de demostrar la extensión analítica de la zeta de Riemann, daremos una relación entre ζ y Γ para $Re(z) > 0$.
Tenemos que

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

realizando el cambio $t = nu$, tenemos que

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{z-1} dt$$

luego

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{z-1} dt$$

A partir de ahora solo vamos a enunciar resultados importantes para el proceso de extensión analítica de la función $\zeta(z)$, ya que el objetivo de este capítulo es simplemente dar una introducción escueta de la prolongación analítica de algunos ejemplos de funciones importantes en las matemáticas. Estos resultados están probados con detalle en [7].

4.3.1.Proposición: Para $Re(z) > 1$ se tiene que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$$

4.3.2.Corolario:
i)

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\exp(t) - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt$$

es holomorfa en $Re(z) > 0$.

ii)

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\exp(t) - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) dt$$

es holomorfa en $Re(z) > -1$.

iii)

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{\exp(t) - 1} - \frac{1}{t} \right) dt$$

es holomorfa en $Re(z) < 1$.

■

4.3.3.Proposición: Para $Re(z) > 1$ se tiene que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\exp(t) - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt + \int_1^\infty \left(\frac{1}{\exp(t) - 1} \right) t^{z-1} dt + \frac{1}{z-1}.$$

Demostración:
Tenemos que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt = \int_0^1 (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt + \int_1^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt =$$
$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\exp(t) - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt + \int_1^\infty \left(\frac{1}{\exp(t) - 1} \right) t^{z-1} dt + \frac{1}{z-1}$$

■

4.3.4.Corolario: ζ se puede extender hacia $Re(z) > 0$ menos al punto 1.
Demostración:
Como la función Γ nunca se anula (Este resultado no se probará en esta sección, ya que excede los objetivos de este capítulo. Sin embargo, daremos un esbozo de esta prueba. Esta propiedad se prueba justificando antes que la función gamma se puede escribir como producto infinito de funciones holomorfas) y además es holomorfa en $Re(z) > 0$, entonces podemos pasarla dividiendo en la ecuación del enunciado de la proposición 4.3.3. Todas las funciones en esta ecuación son holomorfas en $Re(z) > 0$, menos en el punto 1, luego se tiene la extensión analítica de la función zeta de Riemann en $Re(z) > 0$.

$\blacksquare$

4.3.5.Proposición: En $\{z \in \mathbb{C}: 0 < Re(z) < 1\}$ se tiene que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{z-1} dt \\ - \frac{1}{2z} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1} dt$$

4.3.6.Proposición: $\zeta(z)$ se puede extender a $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > -1\} \backslash \{1\}$

Demostración:
Por el corolario 4.3.2 se tiene que todos los sumandos que aparecen en la ecuación de la proposición 4.3.5, pasando la función Γ dividiendo, son holomorfos en $Re(z) > -1$ menos el punto 1. El lado derecho de la ecuación seguiría siendo holomorfo en $z = 0$, ya que tenemos que $2z\Gamma(z) = 2\Gamma(z+1)$.

$\blacksquare$

A continuación enunciaremos un resultado importante que no probaremos por su dificultad y extensión que nos permitirá realizar la extensión hacia $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

4.3.7. Proposición (Ecuación funcional de Riemann): Se tiene que

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\sin\left(\frac{1}{2}\pi z\right)$$

para $z \in \mathbb{C}$ con $-1 < Re(z) < 0$.

$\blacksquare$

Esto nos permite justificar que la función $\zeta(z)$ se puede extender hacia el plano complejo menos el punto 1, ya que el lado derecho de la ecuación funcional de Riemann es holomorfo en $Re(z) < 0$, debido a que $\zeta(z)$ es holomorfa en $Re(z) > -1$ y

$$Re(1-z) > -1 \iff 2 > Re(z) \Rightarrow Re(z) < 0.$$

Por otro lado $\Gamma(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, entonces se tiene que $\Gamma(1-z)$ es holomorfa en $Re(z) > 0$. Como el conjunto siguiente

$$A = \{z \in \mathbb{C} : -1 < Re(z) < 0\}$$

es conexo, por el corolario 1.1.9 tenemos que $\zeta(z)$ se puede extender a todo el plano complejo menos el punto 1.

Capítulo 5

Prolongación de soluciones de ecuaciones diferenciales.

En este capítulo probaremos que cualquier sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$x'(z) = A(z)x(z), \forall z \in G \tag{5.1}$$

siendo G una región y $A(z)$ una matriz de dimensión $n \times n$, cuyas entradas son funciones holomorfas, es decir, de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}(z) & a_{1,2}(z) & \dots & a_{1,n}(z) \\ a_{2,1}(z) & a_{2,2}(z) & \dots & a_{2,n}(z) \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n,1}(z) & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

con condición

$$x(z_0) = x_0$$

siendo $z_0 \in G$, $x_0 \in \mathbb{C}^n$ y $a_{i,j}(z)$ una función holomorfa en G, $\forall 1 \leq i, j \leq n$, admite solución holomorfa en una bola contenida en G con centro en un punto $z_0 \in G$ cualquiera. Además probaremos que dicha solución se puede prolongar a lo largo de cualquier camino ϕ contenido en G con inicio en z_0, probando también que dicha solución se puede extender a toda la región G siempre y cuando G sea simplemente conexo.

El sistema escrito anteriormente se dice que es analítico en G si las entradas de $A(z)$ son holomorfas en G. El punto z_0, donde todos los coeficientes de $A(z)$ son holomorfos, se le denomina punto ordinario, en caso contrario se le conoce como singular del sistema. En este caso todos los coeficientes de $A(z)$ se pueden expresar como series de potencias

$$a_{i,j}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1,(i,j)}(z - z_0)^n$$

para $1 \leq i, j \leq n$, siendo n la dimensión de $A(z)$. Esta situación será muy importante para probar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial escrita anteriormente.

Al final del capítulo se expondrán otros ejemplos de ecuaciones diferenciales donde es posible realizar la prolongación analítica de su solución siempre y cuando G sea simplemente conexo.

Ahora probaremos un resultado que justifica la existencia y unicidad de soluciones del siguiente sistema

$$x'(z) = A(z)x(z), \forall z \in G, x(z_0) = x_0 \tag{5.3}$$

siendo z_0 un punto ordinario del sistema y $x_0 \in \mathbb{C}^n$ un vector.

5.1.Lema: Consideremos el sistema (5.1), con G una región tal que sus puntos son ordinarios. Luego para cualquier punto $z_0 \in G$ y $x_0 \in \mathbb{C}^n$, existe un vector de funciones holomorfas en el disco $D = B(z_0,\epsilon)\subset G$, del mayor tamaño posible y de dimensión n tal que

$$x'(z) = A(z)x(z),\ \forall z \in D,\ x(z_0) = x_0.$$

Además dicha solución es única.

Demostración:
Primero probemos la unicidad de la solución. Supongamos que existieran dos o más soluciones de (5.3) holomorfas en un disco $D \subset G$
Cojamos un vector solución de (5.3), $x(z)$. Todas sus coordenadas son holomorfas, luego es posible encontrar un desarrollo en series de potencias en el disco D

$$x_i(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{i,m}(z - z_0)^m$$

donde $x_i(z)$ es una coordenada de $x(z)$ para $1 \leq i \leq n$.
De la misma manera para la matriz $A(z)$, podemos expresar sus entradas en series de potencias

$$A_{i,j}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{(i,j),m}(z - z_0)^m$$

siendo $A_{i,j}(z)$ las entradas de $A(z)$ para $1 \leq i, j \leq n$. Tomemos $c_m = (c_{1,m}, ..., c_{n,m})$ y $B_m = (B_{(i,j),m})$, para $1 \leq i, j \leq n$.
Sustituyendo las dos ecuaciones en (5.1) e igualando términos acompañados del mismo orden de potencia $(z - z_0)^n$, tenemos que

$$(n + 1)c_{n+1} = \sum_{m=0}^{n} B_{n-m}x_m, n \geq 0$$

Si tenemos la condición inicial $x(z_0) = x_0$, entonces c_0 sería el mismo para todas las soluciones posibles del sistema (5.3). Razonando de forma inductiva tenemos que la solución de (5.3) es única.

Para la existencia tengamos en cuenta las dos expresiones en series de potencias expuestas anteriormente y consideremos

$$\epsilon = \text{mín}\{d_{i,j},\ 1 \leq i, j \leq n\}$$

donde $d_{i,j}$ sería el mayor radio de convergencia del desarrollo de Taylor de $A_{i,j}(z)$ en el punto z_0. Por el criterio de la raíz tenemos que $\| c_n \|_2 \leq cK^n$, para $K > 1/\epsilon$. Entonces por lo probado antes tenemos que

$$(n+1) \| c_n \|_2 \leq c \sum_{m=0}^{n} K^{n-m} \| c_m \|_2$$

Si consideramos la siguiente sucesión

$$a_0 = \| c_0 \|_2 \text{ y } (m+1)a_{m+1} = \sum_{l=0}^{m} K^{m-l} c_l$$

tenemos que $| c_n | \leq a_m$, por construcción de a_m. Si consideramos la siguiente serie de potencias

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

se tiene que cumple la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$y' = c(1 - Kz)^{-1} y.$$

Esta ecuación tiene como solución a $y_0 = c_0(1 - Kz)^{-c/K}$, que es holomorfa en el disco con radio de convergencia $1/K$. Realizando el desarrollo de Taylor de la solución en torno a el punto 0 y comparando coeficientes, se puede ver que los coeficientes satisfacen la misma relación que hemos expuesto para construir a_n. Esto prueba que el radio de convergencia de la serie

$$x_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{i,n}(z - z_0)^n$$

es al menos $1/K$. Por lo tanto, K lo podemos tomar lo suficientemente grande para que $B(0,1/K) \subset G$, cumpliendo que $K > 1/\epsilon$. Esto justifica la existencia de una solución en (5.3).

■

Ahora veamos que es posible prolongar la solución de (5.3) a lo largo de cualquier camino.

5.2.Proposición: La solución de (5.3) puede ser prolongada a lo largo de cualquier curva que comienza en $z_0 \in G$ y cuyo soporte está contenido en G.

Demostración:
Sea ϕ una curva tal que $\phi^* \subset G$ con $\phi(0) = z_0$. Por el lema 5.1 tenemos que existe un disco $D \subset G$, de radio ϵ y con centro en z_0, tal que el sistema (5.3) admite solución $x_0(z)$ en D.
Tomemos $z_1 \in G$ tal que

$$| z_0 - z_1 |< \epsilon$$

Por el lema anterior siempre podremos encontrar una solución única $x_1(z)$ del siguiente sistema:

$$x'(z) = A(z)x(z), \forall z \in D \ x(z_1) = x_0(z_0)$$

Entonces tenemos que en el disco $D_2 = B(z_1,\epsilon_1- \mid z_1 - z_0 \mid) \subset D_1 \cap D_0$, hay dos soluciones x_1 y x_0 del sistema lineal anterior con $x_1(z_1) = x_0(z_0)$. Por la unicidad probada en el lema 5.1, tenemos que

$$x_1 \equiv x_0 \text{ en } D_2$$

y por el teorema de unicidad se tiene que son iguales en $D_1 \cap D_0$. Por ser D_1, D_2 discos, podemos definir una nueva prolongación analítica de $x_1(z)$ y $x_0(z)$

$$x(z) = \begin{cases} x_1(z) & \text{si } z \in D_1, \\ x_0(z) & \text{si } z \in D_0. \end{cases}$$

Repitiendo este proceso de forma reiterada podemos encontrar $n + 1$ puntos $z_0, z_1, ..., z_n \in \phi^*$ y $n + 1$ soluciones $x_0, ..., x_n$ que satisfacen $x_i(z_i) = x_{i-1}(z_{i-1})$ y tal que

$$(x_i,D_i) \sim (x_{i+1},D_{i+1})$$

para $1 \leq i \leq n$, siendo D_i el disco donde es holomorfa x_i, de forma que los n discos de los elementos de función expuestos antes recubren la curva que se haya elegido para prolongar la solución de (5.3).

■

Ahora veamos un resultado que demuestra la existencia de una solución de manera global con una condición sobre la región G.

5.3.Teorema: Consideremos el sistema (5.3) con $A(z)$ holomorfa en una región simplemente conexa. Entonces para cualquier $z_0 \in G$ y $x_0 \in \mathbb{C}^n$, existe una solución $x(z)$, holomorfa en G, tal que

$$x'(z) = A(z)x(z),\ z \in G,\ x(z_0) = x_0$$

Demostración:
Por la proposición 5.2 siempre podremos prolongar cualquier vector de funciones holomorfas a lo largo de cualquier curva contenida en G.
Aplicando el teorema de Monodromía podemos concluir la existencia de un vector de funciones holomorfas $F(z)$ en G tal que

$$F \equiv x \text{ en } D$$

siendo D el disco centrado en z_0 donde $x(z)$ es holomorfa.

■

5.4.Observaciones:
i) También podemos demostrar los mismos resultados para sistemas no homogéneos, es decir, de la forma

$$x'(z) = A(z)x(z) + b(z),\ z \in G$$

donde $b(z)$ es un vector de funciones holomorfas en G.

ii) El teorema 5.3 nos permite justificar resultados interesantes.
Si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x'(z) = F(z)x(z)$$

con F entera, entonces la solución con una condición específica impuesta, también será entera.

iii) También podríamos realizar la prolongación de la solución de

$$x^{(m)}(z) - a_1(z)x^{(m-1)}(z) - ... - a_m(z)x(z) = 0$$

para $z \in G$. Sabemos que admite solución única cuando se imponen ciertas condiciones

$$x(z_0) = x_0, ..., x^{(m)}(z_0) = x_m$$

para $x_0, ..., x_m \in \mathbb{C}$ y $z_0 \in G$. Si consideramos el siguiente sistema

$$X'(z) = A(z)X(z)$$

con

$$X(z) = \begin{pmatrix} x(z) \\ x'(z) \\ . \\ . \\ x^{(m)}(z) \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

y

$$A(z)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . & \\ . & . & ... & . & \\ 0 & 0 & ... & 1 & \\ a_m(z) & a_{m-1}(z) & ... & a_0(z) & \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Entonces por el teorema 5.3 es posible realizar la extensión de la solución a G.

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors: *Complex Analytic*, Ed. McGraw-Hill, 1979.

[2] E. Aparicio: *Teoría de funciones de Variable Compleja*, Bilbao, 1998.

[3] R. B. Ash, W. P. Novinger: *Complex Analytic*, Ed. Dover, 2007.

[4] W. Balser: *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer, 2000.

[5] C. Caratheodory: *Theory of functions of a Complex Variable*, Volumen II, Chelsea publishing Company, New York, 1954.

[6] R. V. Churchill, J. W. Brown: *Variable Compleja y Aplicaciones*, Ed. McGraw-Hill, 1990.

[7] J. B. Conway: *Functions of One Complex Variable I*, Ed. Springer, 1978.

[8] K. Kodaira *Introduction to complex Variable* Cambrige University Press.

[9] F. López Fernámdez-Asenjo, F. Galindo Soto, L. A. Tristán Vega: *Teoría de funciones de Variable Compleja*, Bilbao, 1998

[10] A. Markushevich *Teoría de funciones Analíticas, Tomo II*, Ed. Mir Moscu.

[11] Mitsuhiko Kohno: *Global Analysis in Linear Differential Equations*, Springer-Science, 1999.

[12] E.G.C.Poole: *Introduction to the Thery of Linear Diferential Equations*, Oxford at the Clarendon Press , 1936.

[13] R. Remmert: *Classical Topics in Complex Function Theory*, Ed. Springer, 1997.

[14] W. Rudin: *Análisis Real y Complejo*, Ed. McGraw-Hill, 1988.

[15] I. Stewart , D. Tall: *Complex Analysis.*

Agradecimientos

A mi tutor del TFG, Jorge Mozo Fernández, por todas las correcciones, aclaraciones, consejos e información que me ha ido proporcionando para elaborar este trabajo.
También a mis padres por todo el apoyo, ayuda emocional y paciencia que han tenido conmigo a lo largo de la carrera de matemáticas, una de las etapas más importantes de mi vida.