Universidad de Valladolid

Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, 2013/2014
Especialidad en Matemáticas

Trabajo Fin de Máster
"Aprendizaje de conceptos matemáticos a partir de libros de divulgación matemática y literarios"

Autora: **Lidia Pulgar Diez**

Tutor: **Alfonso Jesús Población Sáez**

Valladolid, Junio 2014

Índice

1.- Presentación

Se expone el trabajo final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, con especialidad en Matemáticas, realizado en el curso académico 2013/2014. Se enmarca en el Módulo Prácticum y Fin de Máster que consta de dos asignaturas: periodo de prácticas en un centro de Enseñanza Secundaria (10 ECTS) y un Trabajo Fin de Máster (6 ECTS).

El tema del trabajo es el uso de libros de divulgación matemática y literarios para enseñar Matemáticas en Educación Secundaria, apostando por la presencia de variedad de recursos en las aulas. Con ello se pretende mostrar la posibilidad real y las ventajas de la aplicación de este recurso.

En primer lugar se describen los objetivos y las razones del desarrollo de este trabajo. Después se muestra el marco teórico que lo respalda, basado en la vigente ley de educación. A continuación se desarrolla el tema del trabajo incluyendo: fuentes donde podemos encontrar el material necesario para esta propuesta didáctica, modelos de actuación para llevarla a cabo en las aulas así como métodos para su evaluación, la contribución de esta propuesta a la atención a la diversidad y, por último, una propuesta didáctica. Esta última consta de actividades que cubren la mayoría de los contenidos establecidos para el tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Para terminar, se manifiestan las conclusiones y la reflexión personal obtenidas de la realización del trabajo.

2.- Objetivos

Este trabajo se engloba dentro de las iniciativas que pretenden hacer las matemáticas más atractivas al alumnado en Educación Secundaria, intentando cambiar la creencia popular de que éstas no tienen utilidad real y la percepción de inalcanzables que generalmente se les atribuye.

El objetivo principal es desarrollar brevemente la utilización de libros divulgativos y literarios como recurso didáctico en las aulas de Educación Secundaria. Es decir, presentar otra forma alternativa de enseñanza de los conceptos matemáticos para intentar incentivar a su estudio y promover la competencia matemática.

Este propósito se ha intentado alcanzar a través del desarrollo de tres objetivos secundarios. En primer lugar, la recopilación de algunas fuentes de información donde poder encontrar el material necesario. En segundo lugar, la exposición de distintos modelos de actuación y de evaluación para su aplicación. Y, finalmente, la elaboración de una propuesta didáctica concreta en la que se ha pretendido incluir actividades para introducir y/o explicar conceptos, mejorar la comprensión de los alumnos, aportar ejemplos, crear ejercicios y problemas motivadores, y enseñar la utilidad y la historia de las matemáticas. Ésta se ha centrado en un sólo curso de Educación Secundaria Obligatoria para hacerla más representativa y global de un año académico.

La propuesta didáctica pretende ser un ejemplo práctico de cómo usar este recurso. Así mismo se presta como fuente directa de actividades para utilizar en el aula. De ninguna manera se trata de una programación didáctica a implantar durante un curso completo, ni de añadir contenidos al currículo. Es un complemento metodológico para utilizar cuando se necesite o más interese; para utilizar en la clase habitual o en talleres dedicados a la actividad matemática.

La aritmética es lo que permite contar hasta veinte sin tener que sacarse los zapatos.
ANÓNIMO

Las matemáticas son como el amor: una idea simple pero que puede complicarse.
ANÓNIMO

3.- Justificación

Una forma de mejorar la percepción y la predisposición del alumnado hacia las matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria es promover el sentido real de éstas. Este aspecto se deja de lado en la enseñanza escolarizada en muchas ocasiones, lo que provoca que el alumno no consiga situarse en la asignatura, sintiéndose perdido porque no sabe qué está haciendo realmente ni para qué. Una manera de evitarlo es presentar los conceptos matemáticos haciendo referencia a su utilidad, a los elementos cotidianos en los que se encuentran, y a cómo ha sido su evolución a lo largo de la historia. Si, además, introducimos recursos motivadores para los alumnos, podremos intentar cambiar la deslucida imagen que las matemáticas tienen en la sociedad.

A este respecto, puede darse el caso de querer mostrar estas facetas pero no conocer los recursos apropiados, por no tener suficiente información o no saber adecuarla al nivel que los alumnos necesitan. En la actualidad hay bastantes referencias bibliográficas, tanto de divulgación matemática como literarias, que incluyen el ámbito matemático en sus argumentos y que solventan estos obstáculos al estar escritos precisamente para este fin y para acercar la asignatura a aquellos lectores no familiarizados con la matemática formal.

Durante el periodo de prácticas de este máster en el que se engloba el presente trabajo, realizado en un centro oficial de Enseñanza Secundaria, he podido comprobar el buen funcionamiento de un Plan de Lectura. Este plan está programado en los cuatro cursos de Educación Secundaria Obligatoria y lleva en marcha entre seis y ocho años. Los profesores del centro constatan que, en un principio, los alumnos leían pero no lo tomaban totalmente en serio. Sin embargo, en cursos posteriores, se ha observado cómo el alumnado ha aceptado el Plan de Lectura como algo natural en el día a día, interesándose en la lectura y llegando a "engancharse" a los libros. Mi propia experiencia como docente en la fase de intervención de este periodo, junto a las respuestas de los alumnos a una encuesta realizada al final de esta fase, corroboran el carácter motivador y el apreciable aprendizaje que conllevan las actividades didácticas complementarias a la clase magistral y al mero seguimiento de un libro de texto.

Además, cabe destacar la importancia de la lectura en la transmisión de la historia de las matemáticas y en el conocimiento de los grandes matemáticos, como señalan también diversos autores (véase, por ejemplo, [7]).

Todo ello me ha llevado a plantear esta propuesta de incorporar la lectura y el uso de libros de divulgación matemática y literarios en la enseñanza de los conceptos matemáticos que señala el currículo de las asignaturas.

4.- Análisis epistemológico y curricular. Marco teórico

Hasta el momento la literatura ha tenido poca presencia en la enseñanza escolarizada de las Matemáticas. Los antiguos planes de educación no daban pie a ello y la aplicación de la LOE se ha limitado a introducir breves referencias matemáticas sobre historia, la vida cotidiana, o juegos de estrategia, al inicio de las unidades didácticas y/o al final de cada bloque temático en los libros de texto de ciertas editoriales. En gran medida estas referencias son relegadas a simples anécdotas en la enseñanza en el aula, cuando no completamente obviadas.

A pesar de esta situación, existen varios puntos a destacar en la normativa legal que establece las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria, que avalan la presencia metodológica y didáctica de recursos basados en la lectura en todas las materias a impartir.

4.1.- Marco teórico de Educación Secundaria Obligatoria

En primer lugar, en el REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, podemos encontrar los siguientes extractos:

> Artículo 4. *Organización de los tres primeros cursos.*
>
> 7. Sin perjuicio del tratamiento específico en algunas de las materias de la etapa, la comprensión lectora, la expresión oral y escrita, la comunicación audiovisual, las tecnologías de la información y la comunicación, y la educación en valores se trabajarán en todas ellas.
>
> Artículo 5. *Organización del cuarto curso.*
>
> 5. [Reproduce exactamente el artículo anterior]
>
> Artículo 7. *Competencias básicas.*
>
> 4. La lectura constituye un factor primordial para el desarrollo de las competencias básicas. Los centros deberán garantizar en la práctica docente de todas las materias un tiempo dedicado a la misma en todos los cursos de la etapa.

También podemos encontrar razones a favor del uso de libros de divulgación matemática y literarios como recurso didáctico en las aulas por ser un medio a través del cual se pueden alcanzar ciertos fines y objetivos. Entre éstos, del mismo REAL DECRETO 1631/2006 señalamos los siguientes objetivos:

Artículo 3. *Objetivos de la Educación secundaria obligatoria.*

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Específicamente, sobre la materia Matemáticas, en el Anexo II del REAL DECRETO 1631/2006, destacamos los siguientes extractos, indicando aquellos objetivos que una apropiada elección de libros de divulgación y/o literarios puede ayudar a alcanzar:

Matemáticas

Las matemáticas, tanto histórica como socialmente, forman parte de nuestra cultura y los individuos deben ser capaces de apreciarlas […].

Ahora bien, acometer los retos de la sociedad contemporánea supone, además, preparar a los ciudadanos para que adquieran autonomía a la hora de establecer hipótesis y contrastarlas, diseñar estrategias o extrapolar resultados a situaciones análogas […].

Para que el aprendizaje sea efectivo, los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee, tratando siempre de relacionarlos con su propia experiencia y de presentarlos preferentemente en un contexto de resolución de problemas. Algunos conceptos deben ser abordados desde situaciones preferiblemente intuitivas y cercanas al alumnado para luego ser retomados desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad […].

En todos los cursos se ha incluido un bloque de contenidos comunes que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca […]. También se introducen en este bloque la capacidad de expresar verbalmente los procesos que se siguen y la confianza en las propias capacidades para interpretar, valorar y tomar decisiones sobre situaciones que incluyen soporte matemático, poniendo de relieve la importancia de los factores afectivos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas […].

En todos los casos, las matemáticas han de ser presentadas a los alumnos como un conjunto de conocimientos y procedimientos cercanos a su experiencia, que han evolucionado en el transcurso del tiempo y que, con seguridad, continuarán haciéndolo en el futuro.

Objetivos

La enseñanza de las Matemáticas en esta etapa tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima

adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

Por otro lado, en el DECRETO 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, podemos advertir:

Principios metodológicos generales

En ocasiones, la tarea del profesor consistirá en proporcionar de una manera ordenada los contenidos relevantes –lo que se conoce como aprendizaje por facilitación–, mientras que otras veces resultara más apropiado disponer las condiciones y los materiales más idóneos para que el alumno, asumiendo una actitud más autónoma, adquiera su propio conocimiento (aprendizaje por descubrimiento). Siempre que sea viable deberá ofrecerse al alumno la posibilidad de practicar o aplicar los conocimientos, puesto que esto supone una de las mejores formas de consolidar los aprendizajes.

Por otra parte, el grado de motivación afecta directamente a su rendimiento académico. Para incrementarlo conviene hacer explícita la utilidad de los contenidos que se imparten. Esta utilidad puede entenderse al menos en dos sentidos, tanto en lo que se refiere a los aspectos académicos como a aquellos que atañen al desenvolvimiento en su ambiente cotidiano. De otro lado, plantear algunas tareas como un desafío, como una meta con cierto grado de dificultad pero asequible al mismo tiempo, aumentará el interés en los adolescentes y contribuirá a incrementar el grado de autonomía y la consideración positiva hacia el esfuerzo.

Por último, el REAL DECRETO 1631/2006, en el Anexo I sobre las competencias básicas, hace la siguiente referencia:

Con las áreas y materias del currículo se pretende que todos los alumnos y las alumnas alcancen los objetivos educativos y, consecuentemente, también que adquieran las competencias básicas. Sin embargo, no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas o materias y el desarrollo de ciertas competencias. Cada una de las áreas contribuye al desarrollo de diferentes competencias y, a su vez, cada una de las competencias básicas se alcanzará como consecuencia del trabajo en varias áreas o materias.

Queda aclarado que la total adquisición de las competencias básicas se basa en el trabajo conjunto de éstas a través de cada una de las materias, siendo posible y necesario englobar la competencia lingüística dentro de la materia de Matemáticas. Posible, por ejemplo, mediante el uso de libros de divulgación matemática y literarios. Y es necesario porque fomentar la comprensión lectora favorece el desarrollo del razonamiento, lleva a la reflexión, y ayuda a establecer un plan de trabajo y a generar hipótesis, habilidades necesarias para alcanzar la competencia matemática. Al mismo tiempo, la lectura da a conocer la cultura y la historia, aspectos usualmente apartados en lo que respecta a las Matemáticas. Estas habilidades se reflejan en el Anexo I del REAL DECRETO 1631/2006:

1. Competencia en comunicación lingüística.

Esta competencia se refiere a la utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita, de representación, interpretación y comprensión de la realidad, de construcción y comunicación del conocimiento y de organización y autorregulación del pensamiento, las emociones y la conducta.

Los conocimientos, destrezas y actitudes propios de esta competencia permiten expresar pensamientos, emociones, vivencias y opiniones, así como dialogar, formarse un juicio crítico y ético, generar ideas, estructurar el conocimiento, dar coherencia y cohesión al discurso y a las propias acciones y tareas, adoptar decisiones, y disfrutar escuchando, leyendo o expresándose de forma oral y escrita, todo lo cual contribuye además al desarrollo de la autoestima y de la confianza en sí mismo […].

Leer y escribir son acciones que suponen y refuerzan las habilidades que permiten buscar, recopilar y procesar información, y ser competente a la hora de comprender, componer y utilizar distintos tipos de textos con intenciones comunicativas o creativas diversas. La lectura facilita la interpretación y comprensión del código que permite hacer uso de la lengua escrita y es, además, fuente de placer, de descubrimiento de otros entornos, idiomas y culturas, de fantasía y de saber, todo lo cual contribuye a su vez a conservar y mejorar la competencia comunicativa.

Para finalizar se agregan los contenidos establecidos en el DECRETO 52/2007, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, para el tercer curso de Matemáticas a los que se hará referencia en el apartado 5.5.- Propuesta didáctica.

Matemáticas

Bloque 1. Contenidos comunes.

– Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas, tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada.

– Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales y de procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa.

– Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o simbólico o sobre elementos o relaciones espaciales.

– Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.

– Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.

– Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Bloque 2. Números.

– Números racionales. Comparación, ordenación y representación sobre la recta.

– Decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Decimales exactos y decimales periódicos. Fracción generatriz.

– Operaciones con fracciones y decimales. Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis.

– Potencias de base racional y exponente entero. Significado y propiedades. Su aplicación para la expresión de números muy grandes y muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. Uso de la calculadora.

– Aproximaciones y errores. Cifras significativas. Error absoluto y error relativo. Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada.

– Resolución de problemas en los que interviene la proporcionalidad directa o inversa. Repartos proporcionales.

– Interés simple. Porcentajes encadenados.

Bloque 3. Álgebra.

– Sucesiones de números enteros y fraccionarios. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.

– Estudio de las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.

– Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.

– Polinomios. Valor numérico. Operaciones elementales con polinomios. Identidades notables. Ceros de un polinomio.

– Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

– Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado. Soluciones exactas y aproximaciones decimales. Propiedades de las raíces.

– Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación crítica de las soluciones.

Bloque 4. Geometría.

– Revisión de la geometría del plano.

– Lugar geométrico. Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades.

– Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales.

– Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.

– Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.

– Revisión de la geometría del espacio.

– Planos de simetría en los poliedros.

– Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas. El cilindro y el cono.

– Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.

– La esfera. Intersecciones de planos y esferas. El globo terráqueo. Coordenadas terrestres y husos horarios. Longitud y latitud de un lugar. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados.

– Estudio de formas, configuraciones y relaciones geométricas.

– Cálculo de áreas y volúmenes.

Bloque 5. Funciones y gráficas.

– Relaciones funcionales. Distintas formas de expresar una función.

– Construcción de tablas de valores a partir de enunciados, expresiones algebraicas o gráficas sencillas.

– Elaboración de gráficas continuas o discontinuas a partir de un enunciado, una tabla de valores o de una expresión algebraica sencilla.

– Estudio gráfico de una función: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetrías, continuidad y periodicidad. Análisis y descripción de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano. Uso de las tecnologías de la información para el análisis y reconocimiento de propiedades de funciones.

– Formulación de conjeturas sobre el fenómeno representado por una gráfica y sobre su expresión algebraica.

– Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes, lineales y afines. Distintas formas de representar la ecuación de una recta.

– Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.

Bloque 6. Estadística y probabilidad.

– Estadística descriptiva unidimensional. Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales. Variables discretas y continuas.

– Interpretación de tablas de frecuencias y gráficos estadísticos.

– Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias.

– Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.

– Descripción de datos cuantitativos. Parámetros de centralización: media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones.

– Descripción de datos cuantitativos. Parámetros de dispersión: rango y desviación típica.

– Utilización conjunta de la media y la desviación típica.

– Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Análisis y crítica de la información de índole estadístico y de su presentación.

– Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas.

– Experimentos aleatorios. Sucesos y espacio muestral. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

– Frecuencia y probabilidad de un suceso. Cálculo de probabilidades mediante la Ley de Laplace.

– Cálculo de la probabilidad mediante simulación o experimentación.

– Formulación y verificación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

– Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. Reconocimiento y valoración de las Matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.

4.2.- Marco teórico de Bachillerato

En el REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, podemos encontrar los siguientes extractos que incluyen la lectura en este nivel educativo:

Artículo 3. *Objetivos del bachillerato.*

d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.

l) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.

Artículo 9. *Currículo.*

6. Las administraciones educativas promoverán las medidas necesarias para que en las distintas materias se desarrollen actividades que estimulen el interés y el hábito de lectura y la capacidad de expresarse correctamente en público así como el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

También encontramos razones a favor del uso de libros de divulgación matemática y literarios como un medio metodológico a través del cual se pueden alcanzar ciertos fines y objetivos. En el Anexo I de este REAL DECRETO 1467/2007 podemos señalar los extractos que siguen:

II. **Materias de modalidad**

B) *Modalidad de Ciencias y Tecnología*

MATEMATICAS I Y II

[…] Por último, es importante presentar la matemática como una ciencia viva y no como una colección de reglas fijas e inmutables. Detrás de los contenidos que se estudian hay un largo camino conceptual, un constructo intelectual de enorme magnitud, que ha ido evolucionando a través de la historia hasta llegar a las formulaciones que ahora manejamos.

C) *Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales*

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I Y II

Tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, pocas materias se prestan como ésta a tomar conciencia de que las matemáticas son parte integrante de nuestra cultura. Por eso, las actividades que se planteen deben favorecer la posibilidad de aplicar las herramientas matemáticas al análisis de fenómenos de especial relevancia social, tales como la diversidad cultural, la salud, el consumo, la coeducación, la convivencia pacífica o el respeto al medio ambiente […].

[El último párrafo es idéntico al de la modalidad anterior.]

Respecto al Anexo del DECRETO 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León, se indican, entre otros, los siguientes objetivos:

II. Materias de modalidad

B) Modalidad de Ciencias y Tecnología

MATEMÁTICAS I Y II

Objetivos

La enseñanza de las Matemáticas en el bachillerato tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Comprender y aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de otras ciencias, así como en la resolución razonada de problemas procedentes de actividades cotidianas y diferentes ámbitos del saber.

4. Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber.

8. Desarrollar métodos que contribuyan a adquirir hábitos de trabajo, curiosidad, creatividad, interés y confianza en sí mismos.

9. Expresarse verbalmente y por escrito en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, comprendiendo y manejando términos, notaciones y representaciones matemáticas.

C) Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I Y II

Objetivos

La enseñanza de las Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales en el bachillerato tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Aplicar a situaciones diversas los contenidos matemáticos para analizar, interpretar y valorar fenómenos sociales, con objeto de comprender los retos que plantea la sociedad actual.

3. Elaborar juicios y formar criterios propios sobre fenómenos sociales y económicos, utilizando tratamientos matemáticos. Expresar e interpretar datos y mensajes, argumentando con precisión y rigor y aceptando discrepancias y puntos de vista diferentes como un factor de enriquecimiento.

6. Hacer uso de variados recursos, incluidos los informáticos, en la búsqueda selectiva y el tratamiento de la información gráfica, estadística y algebraica en sus categorías financiera, humanística o de otra índole, interpretando con corrección y profundidad los resultados obtenidos de ese tratamiento.

7. Adquirir y manejar con fluidez un vocabulario específico de términos y notaciones

matemáticos. Incorporar con naturalidad el lenguaje técnico y gráfico a situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente.

8. Desarrollar métodos que contribuyan a adquirir hábitos de trabajo, curiosidad, creatividad, interés y confianza en sí mismos, para investigar y resolver situaciones problemáticas nuevas.

9. Utilizar el conocimiento matemático para interpretar y comprender la realidad, estableciendo relaciones entre las matemáticas y el entorno social, cultural o económico y apreciando su lugar, actual e histórico, como parte de nuestra cultura.

5.- Desarrollo del trabajo

5.1.- Material/Búsqueda de recursos

En las siguientes fuentes de información se puede encontrar material de trabajo para llevar a cabo una propuesta didáctica del currículo de Matemáticas a través de libros de divulgación matemática y literarios:

➢ Las siguientes secciones de la página web de DivulgaMat, (véase [A]), el centro virtual de divulgación de las matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española:

➢ Publicaciones de divulgación. Categoría: Libros de divulgación matemática.

Contiene una exhaustiva lista de libros de divulgación matemática publicados en España desde el año 2000, acompañados cada uno de una pequeña ficha técnica y una reseña del libro realizada por alguien que lo ha leído o, en su defecto, la reseña que incluye el propio libro.

➢ Ficciones matemáticas. Categoría: Érase una vez un problema.

Contiene una serie de cuentos en cuyo argumento se describen ejercicios matemáticos que se les plantea a los personajes y que éstos tendrán que resolver. Se narran con humor, utilizando personajes populares como protagonistas de estas historietas con el objetivo de entretener, atraer, y hacer pensar.

➢ Textos on-line. Categoría: Libros.

En este apartado se encuentran libros disponibles en la red que incluyen las matemáticas en sus argumentos y que tienen permiso legal de descarga gratuita.

➢ Texto literario del mes.

Esta sección contiene una lista de diversos textos que incluyen alguna mención a las matemáticas o al lenguaje matemático. Pretende mostrar que las matemáticas están presentes en cualquier parte. En cada entrada se indica su autor y la fuente de información.

➢ Revista SUMA

La revista SUMA es una publicación sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas realizada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Cada año se publican tres ejemplares que aparecen en marzo, julio y noviembre.

Consta de dos partes diferenciadas: artículos y secciones. En los artículos es donde se encuentra cualquier tema relacionado con la didáctica de las matemáticas tanto a nivel divulgativo como formativo. Publican temas sobre actividades en el aula, historia de las matemáticas, desarrollo analítico, etc.

Es una revista de suscripción y de su página web, (véase [B]), se pueden descargar libremente algunos números publicados.

➢ Revista UNO

Se trata de una publicación de didáctica de las matemáticas de la editorial GRAÓ publicada desde 1994 de forma trimestral.

Es también una revista de suscripción y desde su página web, (véase [C]), se pueden comprar los números publicados y descargar libremente algunos artículos de éstos.

➢ Revista SIGMA

Revista de matemáticas publicada por el Departamento de Educación del Gobierno Vasco en colaboración con los Berritzegunes (antiguos Centros de Orientación Pedagógica, COP) de Bilbao, Vitoria y San Sebastián.

Incluye varias secciones, de Educación Secundaria, artículos con contenido matemático diverso, y reseñas de libros. Su versión electrónica es de acceso libre (véase [D]).

5.2.- Esquemas metodológicos

Podemos realizar un diseño de desarrollo del currículo de Matemáticas en Educación Secundaria utilizando libros de divulgación matemática y/o literarios mediante distintos modelos de actuación. A lo largo de un curso completo se puede optar por la lectura y seguimiento de un único libro, por la lectura y seguimiento de varios libros de forma continua, o por la utilización de diferentes textos y/o partes de distintos libros. En cualquiera de estas tres opciones se tiene en cuenta la posibilidad de que los libros a usar sean tanto de divulgación matemática como literarios.

Así mismo, el diseño de estas tres opciones ofrece varias alternativas.

► Lectura y seguimiento de un único libro:

1) Mantener la lectura del libro en clase y a lo largo del curso:

El profesor elige el libro que considera adecuado y establece un itinerario de lectura del mismo durante las clases a lo largo del curso. Se proponen dos posibilidades para el itinerario de lectura:

1.1) Lectura semanal: El profesor establece un día a la semana en el que imparta una sesión de Matemáticas, llamemos a ésta *sesión con lectura*, de tal forma que todas las semanas, durante esa sesión, se dedican diez minutos a la lectura del libro elegido. Esta opción es más adecuada si es un libro de narrativa porque permite ir recordando el argumento, uno de los incentivos de estas sesiones.

1.2) Lectura al ritmo de los contenidos curriculares: el profesor coordina la lectura del libro elegido en función de los contenidos a enseñar. Esta opción es apropiada en el caso de elegir un libro de divulgación matemática, adecuando las diferentes secciones del libro a los contenidos tratados en clase en cada momento.

2) Lectura de un mismo libro para todos los alumnos a lo largo de un curso completo. Puede ser de manera:

2.1) Libre: cada alumno marcará su propio ritmo de lectura. En este caso es más conveniente la elección de un libro de narrativa.

2.2) Dirigida: será el profesor quien marque el ritmo de lectura aunque cada alumno leerá por su cuenta. El profesor establece ciertas etapas de lectura, por ejemplo mensuales, trimestrales, diferenciando las distintas evaluaciones del curso, o por capítulos/secciones, pudiendo adecuarse a los contenidos vistos en clase.

3) El alumno elige un libro de entre una lista propuesta por el profesor:

Con esta opción es preferible que la lectura del libro sea libre por parte del alumno puesto que puede resultar inviable la atención personalizada por parte del profesor si la lista de libros es demasiado extensa. En esa lista es conveniente incluir la descripción y las características de cada libro propuesto.

► Lectura y seguimiento de varios libros de forma continua:

Este modelo de actuación consiste en la lectura de varios libros elegidos por el profesor durante las clases a lo largo de un curso completo, estableciendo un orden de lectura concreto. Esta opción se pondría en marcha más convenientemente mediante un Plan de Lectura (al igual que en el punto 1.1 del apartado anterior) con una lectura semanal de alrededor de diez minutos en el transcurso de una clase de Matemáticas.

► Utilización de diferentes textos y/o partes de distintos libros:

Este modelo es el que conlleva más preparación por parte del profesor puesto que precisa disponer de una “biblioteca” de textos de divulgación matemática y de extractos de diferentes obras, que sean apropiados y oportunos para utilizar en la enseñanza de cada tema y/o concepto concreto del currículo.

De este modo se pretende motivar a los alumnos, mejorar la comprensión de los conceptos, y percibir la utilidad de las matemáticas. Además puede servir como recapitulación de conocimientos previos para aquellos alumnos con una base matemática insuficiente, para introducir actividades relacionadas con la vida cotidiana y el uso real de las matemáticas, y como acicate cultural.

La puesta en práctica puede hacerse de varias maneras:

1) Lectura en clase:

La lectura puede hacerse en clase con una organización premeditada, por ejemplo leyendo un extracto por semana de forma sistemática, o de manera puntual a lo largo del curso, por ejemplo para explicar algunos conceptos concretos o alguna unidad didáctica.

2) Lectura personal de los alumnos:

En el caso de preferir no dedicar tiempo a la lectura en las clases por razones de preferencia o falta de tiempo, se puede optar por proporcionar a los alumnos los extractos y mandar trabajarlos en casa como una tarea más.

Otra opción es la de intercalar estas líneas de actuación, siempre controlando no excederse en cantidad y respetando la enseñanza de los contenidos curriculares.

En todos los casos, se ha de resaltar el cuidado y precaución a la hora de preparar el diseño, teniendo en cuenta el tiempo global del año académico y la respuesta que puede provocar en el alumnado dependiendo de las características de éste. Lo que se pretende es utilizar formas alternativas de enseñanza, no añadir contenidos al currículo.

La elección de uno u otro modelo de actuación y de los libros siempre estarán en relación de dependencia. Si se pretende utilizar un libro en concreto por preferencia del profesor, el modelo se elegirá en torno a las características de dicho libro. Si se prefiere elegir primero el modelo de actuación durante el curso, se optará por unos libros que se adecuen a éste.

5.3.- Criterios de evaluación

En función de cada esquema metodológico, el aprendizaje de los conceptos matemáticos realizado por los alumnos se podrá evaluar a través de diferentes actuaciones (puesta en común en clase, entrega de un trabajo, entrega de una ficha técnica del libro más una tarea, actividades, exposiciones en clase, etc.) y criterios de evaluación. Los tres modelos de actuación propuestos anteriormente podrían evaluarse como sigue:

► Lectura y seguimiento de un único libro:

1) Mantener la lectura del libro en clase y a lo largo del curso:

Está opción da paso a una actuación directa en la clase durante los siguientes cinco minutos a la lectura por si surge algún elemento o característica matemáticos a destacar o explicar en la parte leída. Los alumnos ponen en común lo que han entendido o no, y el profesor enseña los conceptos matemáticos que han aparecido.

2) Lectura de un mismo libro para todos los alumnos a lo largo de un curso completo:

La valoración de esta opción como una tarea más a cumplir por los alumnos se puede realizar a través de entregas periódicas como pueden ser:

◆ Un trabajo sobre el libro leído o algún capítulo señalado y las matemáticas que contiene.

◆ La realización de varias actividades y/o cuestiones redactadas por el profesor.

Las actividades a plantear por el profesor tratarían tanto de la resolución como de la invención por parte del alumno de algún ejercicio, problema, acertijo o juego matemático en relación con las matemáticas tratadas en el libro leído.

Para la manera libre, los alumnos harían una única entrega al finalizar el curso. Para la manera dirigida, harían una entrega al final de cada etapa de lectura establecida.

3) El alumno elige un libro de entre una lista propuesta por el profesor:

Al igual que la opción anterior, ésta puede evaluarse a través de una entrega al final del curso. Puede ser la entrega de un trabajo sobre el libro leído y las matemáticas que contiene, o la entrega de una ficha técnica con alguna actividad puesta por el profesor en relación con las matemáticas tratadas en dicho libro.

► Lectura y seguimiento de varios libros de forma continua:

Este esquema se guiaría también de una evaluación a través de la actuación directa del profesor y los alumnos durante la clase tratando la lectura realizada a continuación de ésta durante cinco o diez minutos.

► Utilización de diferentes textos y/o partes de distintos libros:

En esta opción no se contempla una evaluación como tal de las lecturas puesto que este plan de acción lo que pretende no es impartir más contenidos de los que haya que evaluar al alumnado sino aportar herramientas a los alumnos para comprender mejor los conceptos matemáticos que sí son objeto de evaluación.

Otra forma de tarea en la que los alumnos pongan en evidencia su aprendizaje a partir de las lecturas es hacer una exposición. Cada alumno puede preparar una exposición del libro leído o se puede realizar una exposición con todos los alumnos bajo el nombre, por ejemplo, de *Matemáticas en los libros*, en la que cada alumno tenga que elegir un texto de entre aquellos preparados y tratados por el profesor y hacer ciertas actividades relacionadas con el texto. Después se expondrían sus trabajos a través de paneles en el centro de manera temporal, o de carteles que compongan una exposición permanente en el aula de matemáticas, o de presentaciones ante sus compañeros de manera oral.

5.4.- Atención a la diversidad

Bajo esta denominación, los diversos organismos se refieren a la especial atención que reclaman las aulas escolares ante la gran variedad de niveles educativos y formas de aprendizaje que coexisten en una misma aula con alumnos procedentes de contextos sociales muy dispares. No se contempla al Alumnado con Necesidades Educativas Especiales (ACNEE) ni las adaptaciones curriculares específicas, que requieren una actuación más especializada.

A este respecto, el REAL DECRETO 1631/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, indica que:

> Artículo 12. *Atención a la diversidad.*
>
> 1. La Educación secundaria obligatoria se organiza de acuerdo con los principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado. Las medidas de atención a la diversidad en esta etapa estarán orientadas a responder a las necesidades educativas concretas del alumnado y a la consecución de las competencias básicas y los objetivos de la Educación secundaria obligatoria y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que les impida alcanzar dichos objetivos y la titulación correspondiente.

Y el DECRETO 52/2007, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, dice:

> Artículo 10.– *Atención a la diversidad.*
>
> 1. Las diferentes actuaciones educativas deberán contemplar la atención a la diversidad del alumnado, compatibilizando el desarrollo de todos con la atención personalizada de las necesidades de cada uno.

En este punto cabe destacar que el trabajo que aquí se expone contribuye a la atención a la diversidad redactada en la normativa legal por varios motivos que se diferencian a continuación. En el aula el principal causante de la pluralidad de niveles educativos es la suma de las diferentes formas de aprendizaje y de entender los conceptos, junto a la falta de una atención personalizada en los grupos grandes, a lo cual se une la falta de sentido real y el lenguaje formal de las matemáticas estudiadas. El uso de libros de divulgación matemática y literarios permite solucionar estas diferencias gracias a:

♦ El lenguaje coloquial que utilizan para explicar las nociones matemáticas, pensado precisamente para ser asequible a adolescentes de entre 12 y 18 años.

♦ La fuente de información motivadora que puede suponer para éstos.

♦ El formato cotidiano, y bien conocido por los adolescentes de estas edades, en el que se presentan.

Además, otro motivo favorecedor hacia la atención a la diversidad de este recurso didáctico es:

♦ La cantidad de libros de divulgación matemática disponibles actualmente en castellano. El profesor puede elegir sin problemas los textos y/o libros adecuados al nivel educativo de los alumnos dada la gran variedad de éstos que existen.

♦ La preparación meditada, cuidadosa y atenta de las actividades a realizar relacionadas con la lectura seleccionada.

5.5.- Propuesta didáctica

La siguiente es una propuesta concreta de diseño del currículo de Matemáticas del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria utilizando libros de estas características a través del plan de actuación expuesto como tercera opción en el apartado 5.2 de este trabajo:

► Utilización de diferentes textos y/o partes de distintos libros.

Con la puesta en práctica:

1) Lectura en clase.

Para este fin, me he basado en los contenidos definidos por el DECRETO 52/2007, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, para preparar una serie de actividades, ejemplos, fundamentos divulgativos y apoyos introductorios, abarcando la mayor parte de las nociones matemáticas englobadas en los contenidos del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria.

La estructura de la propuesta se organiza por contenidos siguiendo, cada uno de los tratados, el siguiente esquema:

Contenidos curriculares que se trabajan con la actividad

- Libro de divulgación matemática o narrativo utilizado y autor
- Extracto utilizado de dicho libro
- Desarrollo de la actividad
- Matemáticas implicadas

BLOQUE 1. CONTENIDOS COMUNES

ACTIVIDAD 1

Contenidos comunes

Libro: *Vitaminas matemáticas*; **Autor:** Claudi Alsina

Extracto:

¿Influyen las matemáticas en mi vida cotidiana?

Medite un momentito, por favor, sobre cómo las matemáticas están subyacentes a todo lo que hace en su vida. Puestos a dejar al margen cosas profesionales, escoja para la reflexión el día de la semana más neutral: el domingo. Tiene el día libre, nadie le obliga a nada... ¿tienen también las matemáticas el día libre? ¡Ni pensarlo! Ellas están activadas como siempre. Usted se despierta a una hora razonable, las 10 por ejemplo. Se levanta de la cómoda cama (medidas ergonómicas), regula el termostato (giro de rueda, escala en grados Celsius) y se dirige a la ducha (giros opuestos en el monomando, proporción de agua fría y agua caliente), usa su champú favorito (tanto por ciento de suavidad) y luego se acaba de arreglar frente al espejo (simetría), se lava los dientes (traslación y giros) y se dirige a la cocina a tomar el desgraciado (descafeinado con leche descremada y sacarina) y su ración de cereales (control de calidad en cereales, la caja parece un tratado de teoría de números). Recibe una llamada del móvil (números telefónicos, ondas, antenas parabólicas) y luego se toma una pastilla (estudio estadístico farmacológico, grupo de control en pacientes). Y son las 10:30 (sistema en base 60).

Como puede ya intuir, por poco que haga... allí están las matemáticas. Y en el fondo usted confía en ellas, da por descontado que funcionan.

Desarrollo:

Esta actividad se llevaría a cabo al inicio del curso, dando cuenta de los contenidos que se van a ver en el curso, o al final, repasando los contenidos aprendidos.

Se dice el autor y el libro a leer, y se lee el texto. Después se relee parando en cada concepto matemático, describiendo cómo aparece en la acción cotidiana correspondiente.

Un par de alumnos pueden describir su día anterior concretando entre toda la clase las matemáticas que se esconden en su transcurso.

Aspectos matemáticos:

Con este extracto se muestra la presencia de las matemáticas en el entorno que nos rodea, lo que pone de manifiesto de algún modo su utilidad. Los conceptos matemáticos que aparecen en el texto son:

- Medidas ergonómicas: la cama ha de tener unas medidas adecuadas en relación a las características corporales del cuerpo humano. Importancia de medir.
- Giro de rueda, giros opuestos en el monomando, simetría, traslación y giros.

- Escala en grados Celsius: las escalas constituyen un método para clasificar datos cualitativos partiendo de un punto de referencia. En este caso, la referencia son los valores 0º y 100º atribuidos a las temperaturas de ebullición y congelación del agua, respectivamente.
- Proporción de agua fría y agua caliente: dependiendo de la proporción de agua fría o caliente obtendremos la temperatura deseada.
- Tanto por ciento de suavidad: las características y componentes de los productos suelen cuantificarse en tanto por ciento. Por ejemplo: 100% natural, 0% colorantes, 10% aloe vera, 0% parabenos.
- Control de calidad en cereales, estudio estadístico farmacológico, grupo de control en pacientes: la idoneidad de un proceso o un tratamiento médico se basa en el estudio estadístico y probabilístico.
- Caja de cereales: para el envasado de los productos se estudia la mejor relación entre cantidad de material necesario y volumen que debe contener.
- Números telefónicos: continuamente utilizamos números para identificar sujetos.
- Ondas: las características de éstas se describen matemáticamente a través de la teoría de funciones.
- Antenas parabólicas: se llaman así por su forma geométrica de paraboloide de revolución. Es la superficie geométrica óptima para reflejar las ondas electromagnéticas en la dirección que se requiere.
- Sistema sexagesimal: existen diferentes sistemas de numeración, cada uno con sus procesos de cálculo.

ACTIVIDAD 2

Contenidos comunes

Libro: *El ingenioso hidalgo Don Quijote de La Mancha*; **Autor:** Miguel de Cervantes

Extracto:

Es una ciencia, replicó don Quijote, que encierra en sí todas o las más ciencias del mundo, a causa que el que la profesa ha de ser jurisperito, y saber las leyes de la justicia distributiva y conmutativa, para dar a cada uno lo que es suyo y lo que le conviene; [...] ha de ser teólogo [...]; ha de ser médico; [...] ha de ser astrólogo, para conocer por las estrellas cuántas horas son pasadas de la noche, y en qué parte y en qué clima del mundo se halla; ha de saber las matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad de ellas.

Desarrollo:

Este extracto se utilizaría al inicio del curso para dar la visión de la presencia de las matemáticas en muchos ámbitos, incluso en la literatura clásica.

Se introduce situándolo en el libro: En el capítulo XVIII de la segunda parte de la obra, Don Quijote define lo que él llama ciencia de la caballería andante.

A continuación se lee en voz alta y se pregunta: ¿Para qué va a necesitar Don Quijote las matemáticas?

Aspectos matemáticos:

Mediante este párrafo puede comprobarse que ya en la época de Cervantes las matemáticas eran calificadas como necesarias, y describe diferentes situaciones en las que se echa mano de las mismas.

En la obra, se hace un uso instrumental de conceptos y elementos matemáticos. Don Quijote ha de enfrentarse a aspectos cotidianos en los que es necesario recurrir a las matemáticas para entablar diálogos (en la obra aparecen varias paradojas), para expresar cantidades, para referirse a unidades monetarias u otros tipos de medidas, y para imaginar cantidades y tamaños fantasiosos, por no mencionar los conceptos referentes a la navegación que también se tratan.

ACTIVIDAD 3

Contenidos comunes

Libro: *El ingenioso hidalgo Don Quijote de La Mancha*; **Autor:** Miguel de Cervantes

Extracto:

Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (y esté vuesa merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso); digo pues, que sobre este río estaba una puente, y al cabo de ella una horca y una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río de la puente y del señorío, que era en esta forma: si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna. […] Sucedió pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. […] Pídese a vuesa merced, señor gobernador, ¿qué harán los jueces del tal hombre?

Desarrollo:

Como en el caso anterior, situamos el párrafo para comprender mejor el contexto: En el capítulo LI de la segunda parte de la obra, Sancho tiene que juzgar, como gobernador de la ínsula Barataria, las complicadas situaciones que los súbditos le plantean buscando justicia. Una de las más conocidas, es la paradoja lógica que se expone en el texto.

Después de leerlo en voz alta, se plantean las siguientes cuestiones:

a) Verificar que los alumnos han comprendido el texto, y aclararlo, si fuera necesario, dado el lenguaje utilizado.

b) ¿Qué solución adoptaría un juez con el hombre? ¿Podría pasar el puente porque dice la verdad, o miente?

c) Se explica qué es una paradoja. Describir más ejemplos de paradojas.

Aspectos matemáticos:

a) Dado el lenguaje del texto, se trata de desarrollar la comprensión lectora de los alumnos, fomentando la necesidad de leer y entender correctamente los problemas en matemáticas. Por otro lado, al presentar paradojas se pretende estimular la lógica matemática.

b) Según la ley del dueño del río y del puente, todo hombre que desee pasar por el puente tiene que decir para qué quiere cruzarlo, de modo que sólo podrá hacerlo si dice la verdad, siendo ahorcado en caso contrario. El hombre dijo que iba al puente para morir en la horca. Ahora bien, si los jueces dictaminan que ha dicho la verdad, le dejan pasar y no es ahorcado, por lo que en verdad habría mentido y no debería haber cruzado el puente. Por el contrario, si dictaminan que ha mentido, le ahorcan, y entonces el hombre habría dicho la verdad y tendrían que haberle dejado pasar.

Ante la contradicción en ambas posturas, al final Sancho juzga que "le dejen pasar libremente, pues siempre es alabado más el hacer bien, que mal".

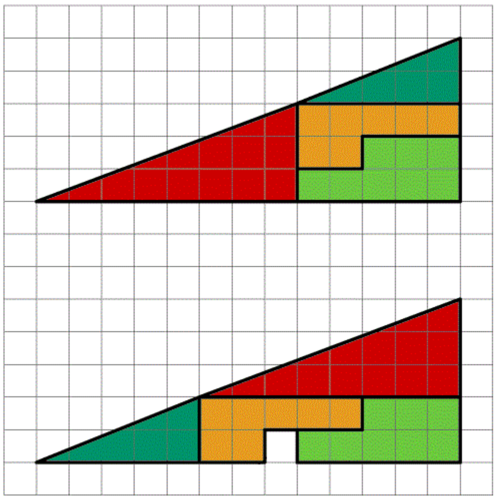
c) Una paradoja es una proposición que encierra una contradicción de ideas, de forma que conduce a una situación imposible de resolver. Estas situaciones pueden deberse, por ejemplo, a la afirmación simultánea de dos ideas contrarias entre sí, o a incluir resultados de apariencia imposible. Dos paradojas lingüísticas muy conocidas son:

¿Quién fue primero: el huevo o la gallina?

Sólo sé que no sé nada.

En matemáticas existen paradojas que, *paradójicamente*, han ayudado al avance de las mismas. Ejemplos de paradojas geométricas son las siguientes:

1) ¿Cómo es posible que, reordenando exactamente las mismas piezas en ambas figuras, en la segunda quede un cuadrado blanco?



Se trata de un ardid geométrico: visualmente parece que el segmento formado por las hipotenusas de los dos triángulos es la diagonal del rectángulo cuya mitad ocupan las piezas. Sin embargo, la pendiente de las hipotenusas es ligeramente diferente:

$$\text{Pendiente}_{\text{triángulo Rojo}} = \frac{3}{8}$$

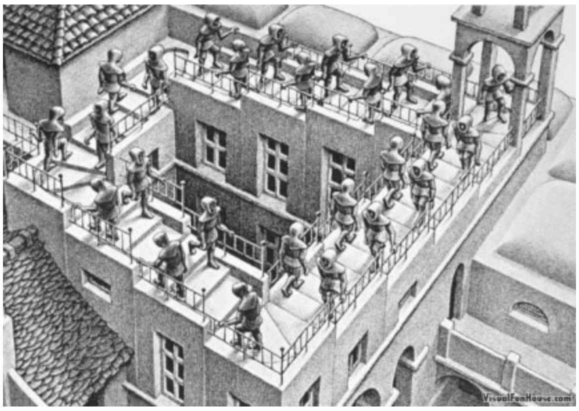
$$\text{Pendiente}_{\text{triángulo Verde}} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Y es claro que } \frac{3}{8} \neq \frac{2}{5}\ .$$

por lo que el segmento que forman no es realmente recto. Esto da lugar a la ocupación de un área ligeramente mayor con el cambio de sitio de los triángulos en la segunda figura.

2) La siguiente imagen de un grabado de M. C. Escher muestra una nueva contradicción: los hombres están bajando y subiendo las escaleras al mismo tiempo. La razón de esta ilusión óptica se encuentra en la hábil disposición del artista de la perspectiva

tridimensional al ser proyectada en el plano.



BLOQUE 2. NÚMEROS

ACTIVIDAD 4

Decimales y fracciones

Libro: *El diablo de los números*; **Autor:** Hans Magnus Enzensberger

Extracto:

El diablo de los números alzó su bastón, y ante los ojos de Robert apareció una nueva calculadora. […]

-Bueno, teclea uno entre tres -ordenó el anciano.

1:3

-dijo Robert, pulsando las teclas.

En la interminable ventanita apareció la solución, en letras verde claro:

0,3333333333333333333

-¿Es que no termina nunca? -preguntó Robert.

-Sí -dijo el diablo de los números-. Termina donde termina la calculadora.

-¿Y luego qué?

-Luego sigue. Sólo que no puedes leerlo.

-Pero siempre sale lo mismo, un tres tras otro. ¡Es como un tobogán!

-En eso tienes razón.

-Bah -murmuró Robert-. ¡Es demasiado tonto! Para eso yo escribo simplemente un tercio. Así:

$$\frac{1}{3}$$

Y me quedo tan tranquilo. […] Sólo me gustaría saber de dónde salen todos esos treses.

-Es así: el primer tres que hay detrás de la coma son tres décimas. Luego viene el segundo tres, que hace tres centésimas; el tercero, tres milésimas, etc. Puedes sumarlo todo:

0,3
0,03
0,003
0,0003
0,00003
…

» ¿Comprendido? ¿Sí? Entonces intenta todo el tiempo multiplicar por tres: el primer tres, es decir las tres décimas, luego las tres centésimas, etc.

-No hay problema -dijo Robert-. Puedo hacerlo incluso de cabeza:

0,3 x 3 = 0,9
0,03 x 3 = 0,09
0,003 x 3 = 0,009
0,0003 x 3 = 0,0009
0,00003 x 3 = 0,00009

Bueno, etcétera.

-Bien. Y si sumas todos los nueves otra vez, ¿qué ocurre?

-¡Un momento! 0,9 más 0,09 son 0,99; más 0,009, 0,999. Cada vez más nueves. Parece seguir eternamente así.

-Parece. Pero, si lo piensas bien, verás que no es cierto. Si sumas los tres tercios, tendría que salir 1, ¿no? Porque un tercio por tres da un entero. Eso está claro.

[…]

-¡Uf! -exclamó Robert-. ¿Esto ocurre sólo con los treses y los nueves? ¿O también los otros números forman esas repugnantes serpientes?

-Hay tantas serpientes interminables como arena a la orilla del mar, querido. ¡Piensa cuántas habrá sólo entre 0,0 y 1,0!

Desarrollo:

Después de presentar el libro y su argumento, se lee el texto (puede leerse como un diálogo entre dos alumnos) y se propone la siguiente actividad para reflexionar:

a) ¿Cómo se denomina el tipo de números decimales que aparecen en el texto? ¿Cómo se denotan para no tener que escribir cifras decimales infinitamente ya que a Robert no le gustan?

b) Robert escribe $\frac{1}{3}$ para no tener que escribir treses sin parar. ¿También se pueden utilizar fracciones para escribir 0,7777777777777...? En caso afirmativo, escribir su fracción equivalente. ¿Cuál es la fracción equivalente de 0,9999999999999...?

c) ¿Cuántos números como éstos hay entre 0,0 y 1,0? Proponer tres ejemplos.

Aspectos matemáticos:

Este libro narra los sueños de un chico llamado Robert en los que aparece el diablo de los números para enseñarle unas cuantas cosas que lo sorprenderán.

a) El tipo de números que aparecen son números decimales periódicos puros con una cifra en el periodo. Es conocida la notación

$$0{,}3333333333333... = 0{,}\overline{3}$$

b) En efecto,

$$0{,}7777777777777... = 0{,}\overline{7} = \frac{7}{9}$$

porque:

$$0{,}\overline{7} \times 10 - 0{,}\overline{7} = 0{,}\overline{7} \times (10 - 1) = 0{,}\overline{7} \times 9$$

$$\text{también } 0{,}\overline{7} \times 10 - 0{,}\overline{7} = 7{,}\overline{7} - 0{,}\overline{7} = 7$$

$$\text{entonces } 0{,}\overline{7} \times 9 = 7, \text{ es decir: } 0{,}\overline{7} = \frac{7}{9}$$

Análogamente, se puede escribir la fracción equivalente a 0,9999999999999... = $0{,}\overline{9}$:

$$0{,}\overline{9} \times 10 - 0{,}\overline{9} = 0{,}\overline{9} \times (10 - 1) = 0{,}\overline{9} \times 9$$

$$\text{también } 0,\overline{9} \times 10 - 0,\overline{9} = 9,\overline{9} - 0,\overline{9} = 9$$

$$\text{entonces } 0,\overline{9} \times 9 = 9, \text{ es decir: } 0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

¡Como dice el diablo de los números!

c) Entre 0,0 y 1,0 hay infinitos números (por tanto, infinitos números decimales así como infinitos números decimales periódicos). Por ejemplo:

0,010101010101010101010101...

0,505050505050505050505050...

0,293293293293293293293...

Extracto:

-Pero algunas de tus cifras detrás de la coma se comportan de forma muy peculiar. ¿Quieres que te enseñe cómo?

-¡Claro! Siempre que no llenes toda la playa de esas asquerosas serpientes.

-Tranquilo. Tu gran calculadora lo hará. Sólo tienes que pulsar: siete entre once.

No hizo falta que se lo repitieran.

7:11 = 0,6363636363636...

-¡Qué está pasando! -exclamó-. Siempre 63, y 63 y otra vez 63. Es probable que continúe así para siempre.

-Sin duda; pero esto aún no es nada. ¡Prueba con seis entre siete!

Robert tecleó:

6:7 = 0,8571428571428...

-¡Siempre vuelven a aparecer las mismas cifras! -exclamó-: 857 142, y vuelta a empezar. ¡El número gira en círculos!

Sí, son unas criaturas fantásticas, los números. ¿Sabes?, en el fondo no hay números normales. Cada uno de ellos tiene sus propios rasgos, sus propios secretos. Nunca acaba uno de conocerlos. La serpiente de nueves tras el cero y la coma, por ejemplo, que no termina nunca y sin embargo es prácticamente lo mismo que un simple uno. Además, hay otros muchos que se portan de forma mucho más testaruda y se vuelven completamente locos detrás de su coma.

Desarrollo:

Se continúa la lectura con este otro extracto junto a las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué tipo de decimales son los resultantes de dividir 7:11 y 6:7? Escribirlos con notación periódica.

b) Dar ejemplos de decimales periódicos puros con 3, 7 y 9 cifras en el periodo y transformarlos en fracciones.

c) ¿A qué números *completamente locos detrás de la coma* se refiere el diablo de los números al final del texto? Citar dos de éstos *números locos*.

d) ¿Qué tipos de decimales no se han nombrado en los dos textos? Indicar un ejemplo de cada uno en forma de fracción y en forma decimal.

Aspectos matemáticos:

a) 7:11 = 0,6363636363636... es decimal periódico puro con dos cifras en el periodo:

$$0{,}6363636363636... = 0{,}\overline{63}$$

6:7 = 0,8571428571428... es decimal periódico puro con seis cifras en el periodo:

$$0{,}8571428571428... = 0{,}\overline{857142}$$

b) Un ejemplo de decimal periódico puro con tres cifras en el periodo es el siguiente:

$$4{,}1231231231231... = 4{,}\overline{123} = \frac{1373}{333}$$

ya que:

$$4{,}\overline{123} \times 1000 - 4{,}\overline{123} = 4{,}\overline{123} \times (1000 - 1) = 4{,}\overline{123} \times 999$$

$$\text{también } 4{,}\overline{123} \times 1000 - 4{,}\overline{123} = 4123{,}\overline{123} - 4{,}\overline{123} = 4123 - 4$$

$$\text{entonces } 4{,}\overline{123} \times 999 = 4123 - 4, \text{ es decir:}$$

$$4{,}\overline{123} = \frac{4123 - 4}{999} = \frac{4119}{999} = \frac{1373}{333}$$

Un ejemplo de decimal periódico puro con siete cifras en el periodo es:

$$15{,}526894352689435... = 15{,}\overline{5268943} = \frac{15526879}{9999999}$$

ya que:

$$15{,}\overline{5268943} \times 10.000.000 - 15{,}\overline{5268943} = 15{,}\overline{5268943} \times (10.000.000 - 1)$$
$$= 15{,}\overline{5268943} \times 9.999.999$$

también

$$15{,}\overline{5268943} \times 10.000.000 - 15{,}\overline{5268943} = 155268943{,}\overline{5268943} - 15{,}\overline{5268943}$$
$$= 155268943 - 15$$

entonces

$$15{,}\overline{5268943} \times 9.999.999 = 155268943 - 15, \text{ es decir:}$$

$$15{,}\overline{5268943} = \frac{155268943 - 15}{9999999} = \frac{15526879}{9999999}$$

Un ejemplo de decimal periódico puro con nueve cifras en el periodo es:

$$1{,}577375047577375047... = 1{,}\overline{577375047} = \frac{526318}{333667}$$

ya que:

$$1{,}\overline{577375047} \times 1.000.000.000 - 1{,}\overline{577375047} = 1{,}\overline{577375047} \times (1.000.000.000 - 1)$$
$$= 1{,}\overline{577375047} \times 999.999.999$$

también

$$1{,}\overline{577375047} \times 1.000.000.000 - 1{,}\overline{577375047} = 1577375047{,}\overline{577375047} - 1{,}\overline{577375047}$$
$$= 1577375047 - 1$$

entonces

$$1,\overline{577375047} \times 999.999.999 = 1577375047 - 1, \text{ es decir:}$$

$$1,\overline{577375047} = \frac{1577375047 - 1}{999.999.999} = \frac{1577375046}{999.999.999} = \frac{526318}{333667}$$

c) El diablo se refiere a los números decimales no periódicos que tienen infinitas cifras decimales sin seguir ningún orden. Por eso no tienen una fracción equivalente y se llaman irracionales. El primer número irracional que apareció es $\sqrt{2}$. Otro número irracional muy importante en geometría es el número *pi*: $\pi = 3,141592653589793...$ Pero también se pueden describir otros, como por ejemplo:

$$0,1234567891011121314151617...$$

$$356,1011011101111011111011111110...$$

d) Faltan de nombrar los dos siguientes tipos:

– Números con un número finito de decimales. Por ejemplo:

$$0,56841 = \frac{56841}{100.000}$$

– Números decimales periódicos mixtos: son aquellos con infinitas cifras decimales en las que el periodo aparece a partir de un cierto decimal. Por ejemplo:

$$63,4715715715715715... = 63,4\overline{715} = \frac{634715 - 634}{9.990} = \frac{634081}{990}$$

ACTIVIDAD 5

Decimales y fracciones. Fracción generatriz. Operaciones con fracciones

Libro: *Malditas matemáticas. Alicia en el País de los Números*; **Autor:** Carlo Frabetti

Extracto:

—Eso significa que el Sombrerero Loco y sus amigos están tomando el té de las cinco —comentó Charlie—. Lo cual no tiene nada de extraño, pues lo toman a todas horas.

Y, efectivamente, siguieron avanzando por la diagonal del bosque de números y poco tiempo después vieron al Sombrerero y la Liebre de Marzo tomando el té en una mesa dispuesta bajo un árbol. Entre ellos, el Lirón dormía profundamente.

La mesa era muy grande, y sin embargo los tres comensales se habían agrupado muy juntos en una esquina. Al ver acercarse a Alicia, la Liebre y el Sombrerero empezaron a gritar:

—¡No hay sitio! ¡No hay sitio!

—Hay sitio de sobra —replicó la niña, indignada, a la vez que se sentaba en una amplia butaca que había a la cabecera de la mesa. Charlie, que la seguía sonriendo enigmáticamente, se sentó a su lado.

—¿Qué prefieres, media tarta de manzana o dos cuartas partes? —le preguntó la Liebre de Marzo a Alicia, mientras le ofrecía una obsequiosa sonrisa.

—¿Te estás quedando conmigo? Media tarta es lo mismo que dos cuartas partes —dijo la niña.

—Muy bien, acabas de descubrir las fracciones equivalentes —la felicitó el Sombrerero Loco.

—Claro: 1/2 = 2/4 —añadió la Liebre.

—Aunque a lo mejor eres una glotona y prefieres comerte el 50% de la tarta —dijo el Sombrerero.

—¡Ya está bien de tomarme el pelo! —protestó Alicia—. El 50% de la tarta también es lo mismo que la mitad.

—¡Qué niña tan lista! —exclamó la Liebre de Marzo, aplaudiendo con las orejas.

—¿Por qué el 50% es lo mismo que la mitad? —preguntó el Lirón sin abrir los ojos.

—Porque si de cien partes tomas cincuenta, es lo mismo que tomar la mitad —contestó rápidamente Alicia.

—¿Ah, sí? ¡Cómo se nota que no eres tú la que tiene que partir la tarta! —replicó el Sombrerero—. ¿Crees que es lo mismo partirla en dos trozos y darte uno que partirla en cien trozos y darte cincuenta?

Desarrollo:

Con este extracto se propondrían las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué respuesta convendría a la última pregunta del Sombrerero loco? ¿Por qué?

b) ¿De cuántas formas distintas aparece expresada la fracción de tarta que la Liebre y el Sombrerero le ofrecen a Alicia? ¿Cuál es la fracción generatriz?

c) El Sombrerero Loco se ha encargado de preparar la tarta de manzana que se están comiendo en el té de las cinco. Los ingredientes para seis personas son los siguientes:

2 huevos

1 yogur de limón

½ taza de leche

¾ taza de aceite

1 y ½ tazas de harina

2 manzanas

¼ taza de mermelada

¿Qué cantidad necesita de cada ingrediente para invitar a todos sus amigos? ¿Y si hubiesen ido también a tomar el té la Reina de Corazones y el Gato de Cheshire?
El Lirón era el encargado de hacer la compra, pero se quedó dormido y, cuando llegó a la tienda, sólo quedaba un huevo. ¿Qué cantidad de cada ingrediente necesitará para un sólo huevo? ¿A cuántos comensales podrá invitar?

Aspectos matemáticos:

a) La cantidad de tarta es la misma porque $\frac{50}{100} = \frac{50:50}{100:50} = \frac{1}{2}$. No obstante, requiere más trabajo partir la tarta en un centenar de trozos que en dos, de ahí la importancia de la fracción generatriz.

b) 1/2; 2/4; 50%; y 50/100. La fracción generatriz es la irreducible, es decir, aquella en la que numerador y denominador son primos entre sí. En este caso es 1/2.

c) Sus amigos son la Liebre, el Lirón, Alicia y Charlie, es decir, cuatro. La tarta es para seis personas, entonces cada persona tocaría a 1/6 de cada ingrediente. Como van a comer cuatro, el Sombrerero necesita $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ de cada ingrediente para invitar a todos sus amigos. Es decir:

$$\frac{4}{6} \cdot 2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1 \ y \ \frac{1}{3} \text{ huevos}$$

$$\frac{4}{6} \cdot 1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ de yogur de limón}$$

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ tazas de leche}$$

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \text{ tazas de aceite}$$

$$\frac{4}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{6} + \frac{4}{12} = \frac{8}{12} + \frac{4}{12} = \frac{12}{12} = 1 \text{ taza de harina}$$

$$\frac{4}{6} \cdot 2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1 \ y \ \frac{1}{3} \text{ manzanas}$$

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \text{ tazas de mermelada}$$

Si también hubiesen ido la Reina de Corazones y el Gato de Cheshire, habrían sido seis amigos a los que invitar por lo que necesitaría la totalidad de los ingredientes, es decir, toda la tarta.

En la receta se necesitan dos huevos. Si sólo tenemos un huevo, es decir, la mitad de los que necesitábamos, el resto de ingredientes necesarios también se reduce a la mitad, por tanto la receta para un sólo huevo es:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \text{huevos}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad \text{de yogur de limón}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{tazas de leche}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \quad \text{tazas de aceite}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{tazas de harina}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \text{manzana}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \quad \text{tazas de mermelada}$$

Además, por la misma razón, con esta receta podrá invitar a la mitad de personas que con la anterior receta que era para seis. Podrá invitar a:

$$\frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \quad \text{personas}$$

ACTIVIDAD 6

Expresión de números muy grandes. Notación científica

Libro: *La biblioteca de Babel*; **Autor:** Jorge Luis Borges

Extracto:

A cada uno de los muros de cada hexágono corresponden cinco anaqueles; cada anaquel encierra treinta y dos libros de formato uniforme; cada libro es de cuatrocientas diez páginas; cada página de cuarenta renglones; cada renglón de unas ochenta letras [...] La biblioteca es total y en sus anaqueles se registran todas las posibles combinaciones de los veintitantos símbolos ortográficos, o sesa, todo lo que es dable expresar. Todo: la historia minuciosa del porvenir, las autobiografías de los arcángeles, el catálogo fiel de la biblioteca, miles y miles de catálogos falsos, la demostración de la falacia de esos catálogos, el evangelio gnóstico de Balsídes, el comentario de ese evangelio, el comentario del comentario, la relación verídica de tu muerte.

Desarrollo:

Después de la presentación del extracto, se plantea éste como el enunciado de un problema a resolver:

¿Cuántas letras hay en cada hexágono descrito? Expresarlo en notación científica.

Aspectos matemáticos:

En primer lugar, calculamos cuántas letras tiene cada libro: un libro tiene 410 páginas y cada una de éstas, 40 renglones, por lo que cada libro tiene

$$410 \times 40 = 16400 \text{ renglones} = 1{,}64 \times 10^4 \text{ renglones}$$

Cada renglón tiene unas 80 letras, entonces un libro tiene alrededor de

$$80 \times 1{,}64 \times 10^4 = 131{,}2 \times 10^4 = 1{,}312 \times 10^6 \text{ letras}$$

Por otro lado, cada anaquel contiene 32 libros, por lo que cada uno contendrá

$$32 \times 1{,}312 \times 10^6 = 41{,}984 \times 10^6 = 4{,}1984 \times 10^7 \text{ letras}$$

En cada muro de un hexágono hay cinco anaqueles, es decir,

$$5 \times 4{,}1984 \times 10^7 = 20{,}992 \times 10^7 = 2{,}0992 \times 10^8 \text{ letras}$$

Como un hexágono tiene 6 lados, finalmente, en cada uno de éstos habrá

$$6 \times 2{,}0992 \times 10^8 = 12{,}5952 \times 10^8 = 1{,}25952 \times 10^9 \text{ letras}$$

Expresión de números muy grandes. Notación científica
Libro: *Cent mille milliard de poèmes*; **Autor:** Raymond Queneau

Desarrollo:

Cent mille milliards de poèmes es una obra de Raymond Queneau, escritor francés del grupo Oulipo, que contiene diez sonetos. El libro tiene diez páginas, un soneto por página, que se recortan en catorce trozos, cada uno correspondiente a una línea de poema. Cada trozo puede intercalarse entre páginas diferentes y puede encontrarse leyendo el primer verso del quinto poema, seguido del segundo verso del primero, con el tercero del séptimo, etc., en el orden que se quiera, manteniendo un sentido.

a) ¿Cuántos poemas posibles se pueden leer en esta obra? Expresar el resultado en modo potencial y notación científica, como millardos y como billones.

b) Según Queneau, se emplean 45 segundos para leer un poema y 15 segundos para cambiar las tiras. ¿Cuánto se tardaría en leer todas las posibilidades?

c) Si dedicamos 8 horas de lectura al día durante 200 días al año, ¿cuántos años se alargaría la lectura? Efectuar los cálculos con un programa informático y utilizar notación científica para expresar los resultados.

d) ¿Qué es el grupo Oulipo?

Aspectos matemáticos:

a) Como hay 10 elecciones posibles para el primer verso, 10 para el segundo y así hasta los 14 versos de cada poema, la cantidad total de posibilidades es:

$$10 \times 10 \times \ldots \times 10 \text{ (14 veces)} = 10^{14} \text{ poemas}$$

Un millardo (mil millones) equivale a 10^9. Por consiguiente,

$$10^{14} = 100.000 \times 10^9,$$

es decir, se tienen cien mil millardos de poemas.

Un billón (un millón de millones) equivale a 10^{12}. Entonces,

$$10^{14} = 100 \times 10^{12},$$

es decir, se tienen cien billones de poemas.

Con este concepto, es interesante comentar a los alumnos que en Norteamérica un billón se define como mil millones, es decir, lo que nosotros llamamos un millardo, lo cual no es sólo una cuestión cultural, sino que en ocasiones ha derivado en desastrosas malinterpretaciones de grandes cantidades.

b) Hay 10^{14} poemas posibles y 45 segundos para leer cada uno, luego se emplean

$$45 \times 10^{14} \text{ segundos para leerlos todos.}$$

Se tarda 15 segundos en cambiar de poema y se harían $10^{14} - 1$ cambios, por tanto se necesitan

$$15 \times (10^{14} - 1) = 15 \times 10^{14} - 15 \text{ segundos para hacer todos los cambios.}$$

Entonces, para leer todos los poemas se requieren

$$45 \times 10^{14} + 15 \times 10^{14} - 15 = (45 + 15) \times 10^{14} - 15 = 60 \times 10^{14} - 15$$
$$= 6 \times 10^{15} - 15 \text{ segundos}$$

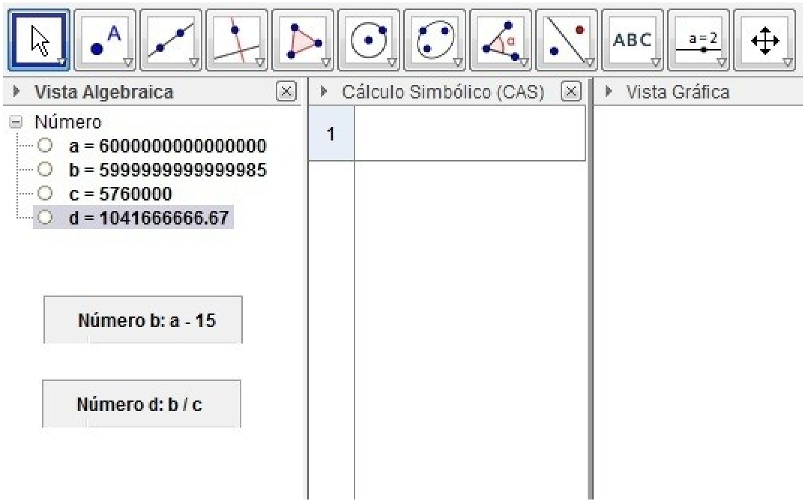
c) Una hora equivale a $60 \times 60 = 3600$ segundos. Luego 8 horas, 200 días al año, implican

$$3600 \times 8 \times 200 = 5760000 = 5{,}76 \times 10^{6} \text{ segundos cada año dedicados a leer.}$$

Por b), hay que leer $6 \times 10^{15} - 15$ segundos en total. Por lo tanto, para leer todos los poemas habría que hacerlo durante

$$(6 \times 10^{15} - 15) / (5{,}76 \times 10^{6}) = 1041666666{,}67 \text{ años}$$
$$= 1{,}04166666667 \times 10^{9} \text{ años} \approx 1{,}042 \times 10^{9} \text{ años,}$$

Para realizar los cálculos con grandes cantidades se puede utilizar una calculadora con notación científica o un software adecuado a este tipo de alumnos, como por ejemplo, *GeoGebra*:



Es decir, aproximadamente

$$(1{,}042 \times 10^{9}) / 100 = 1{,}042 \times 10^{7} = 10{,}42 \times 10^{6} \approx 10 \text{ millones de siglos de lectura.}$$

d) El grupo Oulipo es un grupo de escritores y matemáticos, fundado en 1960, que pretenden escribir obras literarias usando técnicas de lo que ellos llaman “escritura limitada”. Ellos mismos se imponen restricciones en el lenguaje, también de naturaleza matemática, llegando a crear grandes retos literarios.

ACTIVIDAD 8

Resolución de problemas de proporcionalidad directa o inversa

Libro: *Los viajes de Gulliver*; **Autor:** Jonathan Swift

Extracto:

Sólo podía mirar hacia arriba; el sol empezaba a calentar y su luz me ofendía los ojos. Oía yo a mi alrededor un ruido confuso; pero la postura en que yacía solamente me dejaba ver el cielo. Al poco tiempo sentí moverse sobre mi pierna izquierda algo vivo, que, avanzando lentamente, me pasó sobre el pecho y me llegó casi hasta la barbilla; forzando la mirada hacia abajo cuanto pude, advertí que se trataba de una criatura humana cuya 1altura no llegaba a seis pulgadas, con arco y flecha en las manos y carcaj a la espalda. […] Estas gentes son excelentísimos matemáticos, y han llegado a una gran perfección en las artes mecánicas con el amparo y el estímulo del emperador, que es un famoso protector de la ciencia. […] Quinientos carpinteros e ingenieros se pusieron inmediatamente a la obra para disponer la mayor de las máquinas hasta entonces construida. Consistía en un tablero levantado tres pulgadas del suelo, de unos siete pies de largo y cuatro de ancho, y que se movía sobre veintidós ruedas. Los gritos que oí eran ocasionados por la llegada de esta máquina, que, según parece, emprendió la marcha cuatro horas después de haber pisado yo tierra. La colocaron paralela a mí; pero la principal dificultad era alzarme y colocarme en este vehículo. [...] Novecientos hombres de los más robustos tiraron de estas cuerdas por medio de poleas fijadas en las vigas, y así, en menos de tres horas, fui levantado, puesto sobre la máquina y en ella atado fuertemente.

Desarrollo:

Después de presentar el libro y el autor, y de leer el extracto en voz alta, se propone el siguiente ejercicio:

a) Por lo que cuenta Gulliver, quinientos carpinteros e ingenieros construyeron una máquina para transportarle tardando unas cuatro horas, ¿cuánto habrían tardado 750 liliputienses juntos? ¿Podrían plantearse que la construyera un sólo liliputiense?

b) Si 900 hombres robustos tardaron en levantar a Gulliver alrededor de tres horas, ¿cuántos hombres iguales a éstos se necesitan para levantarlo en 1 hora y cuarto?

Aspectos matemáticos:

a) Si menos trabajadores tienen que hacer el mismo trabajo, el tiempo empleado en él será mayor, por lo que es una relación de proporcionalidad inversa. Como 500 liliputienses tardan 4 horas, 750 habrían tardado

trabajadores	tiempo
500	4 horas
750	x horas

$$x = (500 \times 4) / 750 = 2000 / 750 \approx 2{,}66 \text{ horas.}$$

Por otro lado, un sólo liliputiense tardaría

trabajadores	tiempo
500	4 horas
1	x horas

$$x = (500 \times 4) / 1 = 2000 \text{ horas.}$$

Es decir, tardaría 2000 horas = $83{,}\overline{3}$ días = 83 días y 8 horas en construir la máquina. Si quieren transportar a Gulliver cuanto antes, esta opción no les interesa.

b) A más hombres, menos horas tardarán en levantarlo. Por tanto, este caso es también una relación de proporcionalidad inversa. De manera que:

hombres robustos	tiempo
900	3 horas
x	1,25 horas

$$x = (900 \times 3) / 1{,}25 = 2700 / 1{,}25$$

= 2160 hombres harán falta para levantarlo en 1 hora y cuarto.

Dependiendo del desarrollo del temario, puede ser adecuado relacionar la proporcionalidad inversa con la función $y = \frac{1}{x}$, y su representación gráfica.

ACTIVIDAD 9

Resolución de repartos proporcionales

Libro: Los viajes de Gulliver; **Autor:** Jonathan Swift

Extracto:

El lector puede tener el gusto de observar que en la última de las normas necesarias para recobrar la libertad, el Emperador estipula que se me conceda una cantidad de comida y bebida suficiente para mantener a _____ liliputienses. Algún tiempo después, habiendo preguntado a un amigo de la Corte cómo se las arreglaron para fijar una cifra tan concreta, me dijo que los matemáticos de su Majestad, tras medir la altura de mi cuerpo usando un cuadrante y descubrir que era más grande que el suyo en la proporción de doce a uno, concluyeron por la semejanza de sus cuerpos que el mío debía contener, al menos, _____ de los suyos y consecuentemente requeriría tanto alimento como se necesitaba para mantener el mismo número de liliputienses.

Desarrollo:

Después de presentar el libro y el autor, y de leer el extracto en voz alta, se propone el siguiente ejercicio:

Suponiendo que Gulliver midiera aproximadamente 1,80 metros, completar los espacios vacíos.

Aspectos matemáticos:

Los dos huecos a rellenar son el mismo dato: la cantidad de liliputienses a la que equivale el cuerpo de Gulliver.

Los matemáticos de la Corte dicen que la relación de proporción entre Gulliver y un liliputiense es de 12/1, es decir, Gulliver es tan alto como 12 liliputienses juntos. Sin embargo, también mide 12 veces más de ancho y 12 veces más de largo que un liliputiense. Por tanto, Gulliver equivale a $12 \times 12 \times 12 = 12^3 = 1728$ liliputienses.

Igual que se indicó en la actividad anterior, las cuestiones de proporcionalidad directa y de repartos directamente proporcionales son un buen momento para introducir el concepto de un modo más analítico, mediante la función $f(x) = k \cdot x$, $k \in \mathbb{Z}$, y sus representaciones gráficas.

BLOQUE 3. ÁLGEBRA

ACTIVIDAD 10

Sucesiones de números enteros y fraccionarios. Conjuntos de números. Progresiones aritméticas y geométricas

Libro: *El diablo de los números*; **Autor:** Hans Magnus Enzensberger

Extracto:

Llamaron a la puerta, y el diablo de los números gritó: ¡Adelante! Enseguida entraron desfilan-do, y de tal manera, todos a una, que el dormitorio de Robert estuvo hasta los topes en un abrir y cerrar de ojos. Le asombró cuánta gente cabía entre la puerta y la cama. Los números pasaban ante él como ciclistas de competición o corredores de maratón, porque todos llevaban sus números en camisetas blancas. El cuarto era bastante pequeño, pero cuantos más números se apretujaban más largo parecía. La puerta se fue alejando cada vez más, hasta que apenas fue posible distinguirla al final de un recto pasillo.

Los números anduvieron por ahí riendo y charlando, hasta que el diablo de los números gritó como un sargento:

-¡Atención! ¡A formar!

Enseguida se pusieron en una larga fila, con la espalda contra la pared, el uno primero y todos los demás junto a él. […]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

Miró complacido a los números normales, ordenados en fila:

-¡Segunda fila, a formar! -gritó, y enseguida afluyeron nuevos números, armando gran tumulto y alboroto, hasta que al fin estuvieron en el orden correcto:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	...

[…] Sacó un silbato del bolsillo y silbó.

Enseguida, del fondo de la infinita habitación salió una nueva columna. Esta vez llevaban camisetas verdes, y estuvieron yendo de un lado para otro hasta que el viejo maestro gritó:

-¡Tercera fila, a formar!

No pasó mucho tiempo antes de que los verdes se pusieran en perfecto orden delante de los rojos y los blancos:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	...

[…] Luego, siguió dando órdenes:

-¡Todos aquí! ¡Las filas cuatro, cinco, seis y siete, a formar! ¡Aprisa, por favor! Robert abrió los ojos, que ya se le estaban cerrando, y vio siete clases distintas de números, con camisetas blancas, rojas, verdes, azules, amarillas, negras y rosas, correctamente ordenadas unas tras otras, en pie en su infinitamente alarga-do dormitorio:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	…
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	…
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	…
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	…
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384		…
1	2	6	24	120	720	5040	40320		362880		3628800		39916800		…

Ya casi no pudo leer los últimos números sobre las camisetas rosas, porque eran tan largos que apenas cabían en el pecho de quienes los llevaban.

Desarrollo:

Se lee el texto después de presentar el autor y el libro, y se plantea la siguiente actividad:

a) ¿Son fáciles de reconocer las sucesiones que ha presentado el diablo de los números a Robert? ¿Cuáles son?

b) ¿Cuáles de estas sucesiones son recurrentes y cuáles no? Expresar la fórmula general de aquellas que lo sean. Añadir dos términos más a cada sucesión.

c) ¿Cambia algo el hecho de que los números estuvieran revueltos por la habitación de Robert a que luego el diablo de los números les haya llamado a formar?

Aspectos matemáticos:

a) Todas las sucesiones son de números naturales. La de color blanco es precisamente la de todos los números naturales desde el 1. La de color rojo es la sucesión de los números impares. La verde son los números primos. La azul es la ***sucesión de Fibonacci*** mientras que la amarilla son los ***números triangulares***. La de color negro contiene las sucesivas potencias de base 2. Y, por último, la de color rosa es la sucesión de los factoriales.

b) Todas son sucesiones recurrentes excepto la de los números primos, que no tienen ningún orden conocido hasta ahora. Entonces, todas excepto ésta pueden ponerse de forma recurrente, dependiendo de los elementos anteriores.

- Color blanco, los números naturales desde el 1:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2 = 1 + 1$$
$$a_3 = 3 = 2 + 1$$
$$a_4 = 4 = 3 + 1$$
$$\dots$$

Es decir, de forma recurrente $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1$, para $n \geq 2$. Es una progresión aritmética de diferencia igual a 1.

Además se deduce la fórmula general $a_n = n$ ya que:

$a_n = a_{n-1} + 1 = (a_{n-2} + 1) + 1 = a_{n-2} + 2 = (a_{n-3} + 1) + 2 = a_{n-3} + 3 = (a_{n-4} + 2) + 3$
$= a_{n-4} + 4 = \ldots = a_{n-(n-1)} + (n-1) = a_1 + (n-1) = 1 + (n-1) = n$

Los dos términos siguientes son $a_{16} = 16$ y $a_{17} = 17$.

- Color rojo, los números impares:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3 = 1 + 2$$
$$a_3 = 5 = 3 + 2$$
$$a_4 = 7 = 7 + 2$$
$$\ldots$$

Entonces, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$. Es una progresión aritmética de diferencia igual a 2.

Además se deduce la fórmula general $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$ ya que:

$a_n = a_{n-1} + 2 = (a_{n-2} + 2) + 2 = a_{n-2} + 2 \cdot 2 = (a_{n-3} + 2) + 2 \cdot 2 = a_{n-3} + 3 \cdot 2$
$= (a_{n-4} + 2) + 3 \cdot 2 = a_{n-4} + 4 \cdot 2 = \ldots = a_{n-(n-1)} + (n-1) \cdot 2 = a_1 + (n-1) \cdot 2$
$= 1 + (n-1) \cdot 2$

La sucesión continúa así: $a_{16} = 1 + (16-1) \cdot 2 = 31$ y $a_{17} = 1 + (17-1) \cdot 2 = 33$.

- Color azul, sucesión de Fibonacci:

Fibonacci fue un matemático italiano, de nombre Leonardo de Pisa, que ideó esta sucesión, de ahí su denominación, mediante la siguiente fórmula recurrente:

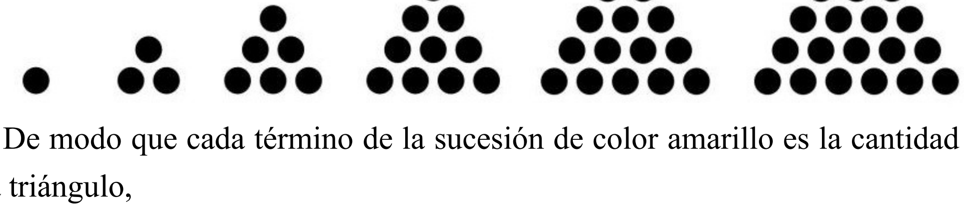
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 1,$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3.$$

De forma que los dos términos que siguen son $a_{16} = a_{15} + a_{14} = 610 + 377 = 987$ y $a_{17} = a_{16} + a_{15} = 987 + 610 = 1597$.

Es conocido el problema de reproducción de los conejos que dio origen a la sucesión. Es probable que los alumnos no la conozcan, siendo éste un buen momento para contarla y describir un gráfico con las sucesivas camadas para identificar sus valores con los términos de la sucesión. Sobre este asunto trata la siguiente actividad.

- Color amarillo, los números triangulares:

Estos números se llaman así porque permiten construir triángulos con el siguiente método:



De modo que cada término de la sucesión de color amarillo es la cantidad de puntos de cada triángulo,

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3 = 1 + 2$$
$$a_3 = 6 = 3 + 3$$
$$a_4 = 10 = 6 + 4$$
$$a_5 = 15 = 10 + 5$$
$$a_6 = 21 = 15 + 6$$
$$\dots$$

Se observa que cada triángulo es igual al anterior más su última fila, en la cual hay tantos puntos como indica la posición del elemento en la sucesión, por lo que se puede definir de forma recurrente como sigue:

$$a_1 = 1,$$
$$a_n = a_{n-1} + n, \text{ para } n \geq 2.$$

Se deduce la fórmula general:

$$a_n = a_{n-1} + n = (a_{n-2} + (n-1)) + n = a_{n-2} + (n-1) + n = (a_{n-3} + (n-2)) + (n-1) + n$$
$$= a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \dots = a_{n-(n-1)} + [n-(n-2)] + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$= a_1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n,$$

es decir, que el elemento a_n es la suma de los n primeros números naturales:

$$a_n = 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$$

La sucesión continúa así: $a_{16} = a_{15} + 16 = 120 + 16 = 136$ y $a_{17} = a_{16} + 17 = 136 + 17 = 153$.

Como en el caso anterior, es ilustrativo presentar a los alumnos algún ejemplo real en el que aparecen los números triangulares y otros números figurados. Por ejemplo, describiendo el problema del apilamiento de naranjas (relacionado también con el teorema de Kepler, demostrado recientemente después de siglos siendo conjetura) u otros ejemplos similares.

- Color negro, las sucesivas potencias de base 2:

$$a_1 = 2^1 = 2$$
$$a_2 = 2^2 = 4$$
$$a_3 = 2^3 = 8$$
$$a_4 = 2^4 = 16$$
$$\dots$$

De otra forma, $a_n = 2^n$, para $n \geq 2$. Es una progresión geométrica de razón igual a 2.

Los siguientes términos son $a_{16} = 2^{16} = 65.536$ y $a_{17} = 2^{17} = 131.072$.

- Color rosa, sucesión de los factoriales:

El factorial de cualquier número natural n se denota por $n!$ y se define como el producto de todos los números naturales menores o iguales a n,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

luego:

$$a_1 = 1! = 1$$

$$a_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$a_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$\ldots$$

Entonces, de forma recurrente y en general se tiene:

$$a_n = n \cdot a_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot a_{n-2} = \ldots = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Y los dos siguientes términos son $a_{16} = 16! = 20.922.789.888.000$ y $a_{17} = 17! = 355.687.428.096.000$.

c) Aunque los números como tal no cambien, sí cambia el concepto matemático. Si los números que forman cada sucesión están agrupados sin ningún orden, lo que se tiene es el conjunto de números que verifican una característica común. Mientras que, al llamarlos a formar y estar colocados siguiendo un orden establecido, en todos estos casos en orden creciente, obtenemos ya una sucesión de números.

ACTIVIDAD 11

Sucesiones recurrentes

Libro: *El diablo de los números*; **Autor:** Hans Magnus Enzensberger

Extracto:

Un tipo simpático, el viejo Bonatschi. Por otra parte, fue uno de los primeros que entendieron el cero. Desde luego no lo inventó, pero en cambio se le ocurrió la idea de los números de Bonatschi. ¡Deslumbrante! Como la mayoría de las buenas ideas, su invento empieza con el uno... ya sabes. Más exactamente, con dos unos:

$$1 + 1 = 2.$$

»Luego coge las dos últimas cifras y las sumas

	$1 = 1$
así que...	$1 + 1 = 2$
y luego... otra vez las dos últimas...	$1 + 2 = 3$
etcétera.	$2 + 3 = 5$
-Hasta el aburrimiento.	$3 + 5 = 8$
-Naturalmente.	$5 + 8 = 13$
	$8 + 13 = 21$

Entonces, el diablo de los números empezó a salmodiar los números de Bonatschi; sentado en su silla plegable, cayó en una especie de canturreo. […]

-Comprendo. Todo estupendo, pero dime para qué sirve.

-Oh -dijo el diablo de los números-, no te creas que las Matemáticas son sólo cosa de matemáticos. Tampoco la Naturaleza sale adelante sin números. Incluso los árboles y los moluscos saben contar.

-Tonterías -dijo Robert-. ¡Me quieres dar gato por liebre!

-También los gatos, supongo. Todos los anima-les. Por lo menos, se comportan como si tuvieran los números de Bonatschi en la cabeza. Es posible que hayan comprendido cómo funcionan.

-No me lo creo.

-O las liebres. Tomemos mejor las liebres, son más espabiladas que los moluscos. ¡En este campo de patatas tiene que haber liebres!

-Yo no veo ninguna -dijo Robert.

-Ahí hay dos.

De hecho, dos diminutas liebres blancas se acercaron dando brincos y se sentaron a los pies de Robert.

-Creo -dijo el anciano- que son un macho y una hembra. Así que tenemos una pareja. Como sabes, todo empieza con el uno.

-Quiere convencerme de que sabéis contar -dijo Robert a las liebres-. ¡Esto es demasiado! No le creo una sola palabra.

-Ah, Robert, qué sabrás tú de liebres -dijeron las dos liebres al unísono-. ¡No tienes ni idea! Probablemente te has creído que somos liebres de invierno.

-Liebres de invierno, claro -repuso Robert, que quería demostrarles que no era tan ignorante como parecía-. Solamente en invierno hay liebres de invierno.

-Justo. Nosotras sólo somos blancas mientras somos pequeñas. Pasa un mes hasta que llegamos a ser adultas. Luego nuestra piel se vuelve parda, y queremos tener hijos. Hasta que vienen al mundo, chico y chica, pasa cosa de un mes más. ¡Toma nota de esto!

-¿Sólo vais a tener dos? -dijo Robert-. Yo siempre había pensado que las liebres tenían un montón de hijos.

-Naturalmente que tenemos un montón de hijos -dijeron las liebres-, pero no de un golpe. Ca-da mes dos, con eso basta. Y nuestros hijos harán exactamente lo mismo. Ya lo verás.

Desarrollo:

Este extracto ofrece un ejemplo de sucesión de números con aplicación en la vida real. Además da a conocer a ***Fibonacci***, uno de los grandes matemáticos de la historia.

Después de leerlo se estudia la sucesión numérica presentada por el diablo de los números y se construye con los alumnos un cuadro que refleje el ritmo de reproducción de las liebres según la descripción que éstas proporcionan a Robert. Relacionar los resultados del cuadro con la sucesión anterior.

Se citan más ejemplos de la naturaleza donde se aprecia la sucesión de Fibonacci.

Para terminar, se presenta a Fibonacci como matemático.

Aspectos matemáticos:

La sucesión numérica que canturrea el diablo de los números es:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_3 = 1 + 1 = 2$$
$$a_4 = 1 + 2 = 3$$
$$a_5 = 2 + 3 = 5$$
$$a_6 = 3 + 5 = 8$$
$$a_7 = 5 + 8 = 13$$
$$a_8 = 8 + 13 = 21$$
$$\dots$$

Tomando los dos primeros términos de la sucesión iguales a 1, construye cada término sucesivo sumando los dos anteriores, es decir, la siguiente es la relación de recurrencia que la define:

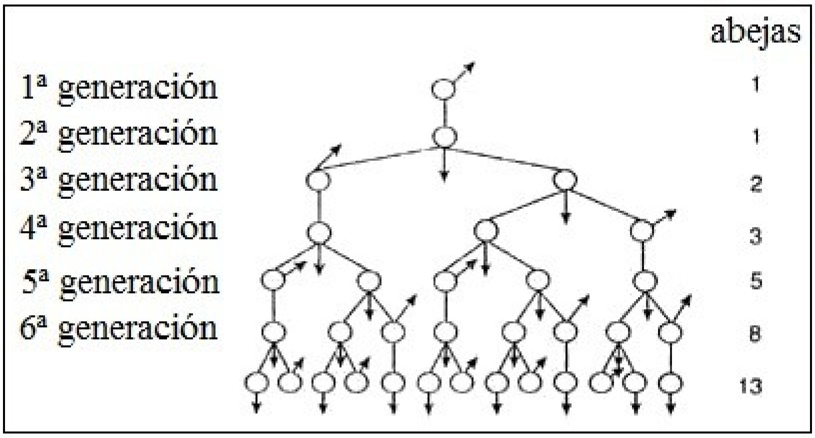
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3.$$

Respecto a los animales, las liebres pequeñas (blancas) le explican a Robert que tardan un mes en ser adultas (pardas). Desde que se hacen adultas tienen una pareja de hijos cada mes. El cuadro de la reproducción y crecimiento de las liebres es el siguiente:

Tiempo	Padres	Hijos	Nietos	Bisnietos	Nº parejas
0 meses					1
1 mes					1
2 meses					2
3 meses					3
4 meses					5
5 meses					8
6 meses					13
7 meses					21

Se aprecia que la sucesión del número de parejas totales que se acumulan cada mes coincide con la sucesión anteriormente presentada: la sucesión de Fibonacci.

La relevancia de la sucesión de Fibonacci radica en su presencia en muchos procesos de la naturaleza, sobretodo en configuraciones biológicas, y en sus propiedades matemáticas. Por ejemplo está presente en: la reproducción de ciertos animales como la que se acaba de ver, la ramificación de los árboles, la disposición de las hojas en un tallo, la flora de la alcachofa, la inflorescencia del brecol romanescu, el árbol genealógico de los machos de una colmena de abejas.



En el ámbito científico, tiene muchas aplicaciones en computación y teoría de juegos.

Leonardo de Pisa (1170-1250), alias Fibonacci, que significa “hijo de Bonaccio”, fue un matemático italiano cuyo padre, de apodo Bonaccio, era comerciante. Esto le permitió estar en contacto con las cuentas y los números, y escribió el *Liber Abaci*, un tratado sobre contabilidad. Su gran aportación matemática, además de la sucesión, fue la difusión del sistema de numeración indo-arábigo, utilizado actualmente, en Europa, sabiendo apreciar la importancia del uso del cero como un número más. De aquí la primera frase del diablo de los números en el texto leído.

ACTIVIDAD 12

Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico

Libro: *Ejercicios de Estilo*; **Autor:** Raymond Queneau

Extracto:

En el paralelepípedo rectangular que se desplaza a lo largo de una línea recta de ecuación $84 \cdot x + S = y$, un homoide A que presenta un casquete esférico rodeado por dos sinusoides, sobre una parte cilíndrica de longitud $1 > n$, presenta un punto de intersección con un homoide trivial B. Demostrar que este punto de intersección es un punto de inflexión.

Desarrollo:

Se presenta el autor y el libro donde aparece el extracto, y se explica que es la traducción de lenguaje verbal a matemático de una pequeña historieta sobre un encuentro entre dos hombres. A continuación se lee. Se pregunta por la comprensión del texto y se vuelve a leer una segunda vez, ya realizadas las aclaraciones necesarias respecto al vocabulario utilizado.

a) ¿Qué ha ocurrido en la historieta? ¿Cuál puede ser el suceso acontecido entre los dos hombres?

b) Traducir el texto a lenguaje verbal.

Aspectos matemáticos:

La obra *Ejercicios de Estilo* es la recopilación de una misma historia contada de 99 maneras diferentes y aquí se presenta la versión geométrica.

a) Lo que ocurre en esta historia es el pisotón de un pasajero a otro dentro de un autobús, lo que provoca una pelea entre ambos.

b) El paralelepípedo rectangular es el autobús. Según el texto, se desplaza por una línea recta de ecuación $y = 84\,x + s$, es decir, recorre una carretera recta. El homoide A se refiere a uno de los hombres y presenta un casquete esférico rodeado por dos sinusoides porque éste lleva un sombrero con un cordón alrededor. Con la parte cilíndrica de longitud $n < 1$ quiere decir que tenía un cuello muy largo. Por otro lado, el homoide B es el segundo hombre y el punto de intersección con él es el pisotón que recibe el primer hombre. Al decir que el punto de intersección es un punto de inflexión quiere decir que el pisotón provocó una pelea.

ACTIVIDAD 13

Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación critica de las soluciones

Libro: *El señor del cero*; **Autor:** María Isabel Molina

Extracto:

El suelo era de barro rojo y los muchachos se sentaban en hileras, con las tablillas ante ellos; eran ya adolescentes y atendían silenciosos al maestro, que llevaba un turbante oscuro como signo de su categoría y paseaba entre las filas de los chicos, mientras dictaba.

—Tomad notas si lo necesitáis. En cuanto alguno tenga la solución, que levante una mano.

Tendrá un punto extra para la nota final. Por supuesto, sólo cuentan las soluciones exactas. Empezó a recitar:

Un ladrón, un cesto de naranjas,
del mercado robó,
y por entre los huertos escapó;
al saltar una valla,
la mitad más media perdió;
perseguido por un perro,
la mitad menos media abandonó;
tropezó en una cuerda,
la mitad más media desparramó;
en su guarida, dos docenas guardó.
Vosotros, los que buscáis la sabiduría,
decidnos:
¿cuántas naranjas robó el ladrón?

Los muchachos agacharon la cabeza sobre sus tablillas; muy pronto, un chico moreno, de pelo rizado, levantó la mano.

El maestro preguntó:

—José, ¿cuál es el resultado?

Desarrollo:

Se dice el autor y el libro al que pertenece el texto, y se lee. La actividad trata de tener que resolver el problema planteado en el mismo.

Aspectos matemáticos:

Se denota por x el número total de naranjas que robó el ladrón, que es el dato que se quiere calcular.

Al saltar una valla, el ladrón pierde la mitad más media naranja de las naranjas que tiene, es decir, tiene x naranjas y pierde $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. Entonces le quedan

$$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}\quad \text{naranjas.}$$

Después abandona la mitad menos media naranja de las naranjas que aún le quedan que son $\frac{x-1}{2}$ naranjas, por lo que abandona $\frac{(x-1)/2}{2}-\frac{1}{2}$ naranjas y ahora le quedan

$$\frac{x-1}{2}-\left(\frac{(x-1)/2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)/2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{(x-1)-\frac{(x-1)}{2}+1}{2}$$

$$=\frac{\frac{(x-1)}{2}+1}{2}=\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}\quad \textit{naranjas.}$$

Al tropezar con una cuerda se le desparrama otra mitad más media naranja de las naranjas que tiene en ese momento. Tiene $\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}$ y se le caen $\frac{\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{2}$. Por tanto, al llegar a su guarida, la cantidad de naranjas es

$$\left(\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{4}-\frac{\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}}{2}$$

$$=\frac{x-1}{4}-\frac{x-1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{2\cdot(x-1)-(x-1)-2\cdot 1}{8}=\frac{2x-2-x+1-2}{8}=\frac{x-3}{8}$$

Como guarda dos docenas, se tiene la siguiente igualdad:

$$\frac{x-3}{8}=2\cdot 12\quad\rightarrow\quad\frac{x-3}{8}=24$$

Por último, se resuelve la ecuación:

$$x-3=8\cdot 24\quad\rightarrow\quad x-3=192$$

$$x=192+3=195$$

Por tanto, el ladrón robó 195 naranjas en total.

ACTIVIDAD 14

Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación critica de las soluciones

Libro: *El señor del cero*; **Autor:** María Isabel Molina

Extracto:

El murmullo de la clase le sacó de sus pensamientos. Ordenó:
—¡Tomad nota de otro problema!
Comenzó a dictar:
Un collar se rompió mientras jugaban
dos enamorados,
y una hilera de perlas se escapó.
La sexta parte al suelo cayó,
la quinta parte en la cama quedó,
y un tercio la joven recogió.
La décima parte el enamorado encontró
y con seis perlas el cordón se quedó.
Vosotros, los que buscáis la sabiduría,
decidme cuántas perlas tenía
el collar de los enamorados.

En la clase se hizo el silencio; se escuchaban los leves crujidos de las vigas y los lejanos rumores de los mercaderes que recogían sus mercancías en las tiendas.

En esta ocasión la mano de Alí se alzó primero:

—Son treinta y cinco perlas, señor.

Desarrollo:

Como en el caso anterior, se dice el autor y el libro al que pertenece el texto, y se lee. Se plantea la pregunta: ¿La respuesta de Alí es correcta?

Aspectos matemáticos:

Si se denota por x el número total de perlas que tenía el collar, se tiene que:

$\frac{x}{6}$ perlas cayeron al suelo

$\frac{x}{5}$ perlas quedaron sobre la cama

$\frac{x}{3}$ perlas recogió la chica

$\frac{x}{10}$ perlas encontró el chico

6 perlas quedaron en el cordón

La suma de todas las partes esparcidas será igual al total de perlas, entonces

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+\frac{x}{10}+6=x$$

Ahora se resuelve la ecuación:

$$\frac{5x+6x+10x+3x+30\cdot 6}{30}=x$$

$$\frac{24x+180}{30}=x$$

$$24x+180=30x$$

$$180=30x-24x$$

$$180=6x \quad \rightarrow \quad x=\frac{180}{6}=30$$

El collar tenía 30 perlas en total. El resultado de Alí no es correcto.

BLOQUE 4. GEOMETRÍA

ACTIVIDAD 15

Aplicación del teorema de Thales a la resolución de problemas

Libro: *La isla misteriosa*; **Autor:** Julio Verne

Extracto:

Había que completar los elementos de las observaciones de la víspera, mediante la medición de la altitud de la meseta panorámica sobre el nivel del mar.

– ¿No va a necesitar un instrumento análogo al de ayer? –preguntó Harbert al ingeniero–.

– No, hijo mío –respondió éste–. Vamos a proceder de otro modo y casi con la misma precisión.

[...] Cyrus Smith se había provisto de una vara recta, de unos 3,60 metros de longitud. Esta longitud la había medido a partir de su propia estatura. Harbert llevaba una plomada que le había dado Cyrus Smith, consistente en una simple piedra atada con el extremo de una fibra flexible. Llegado a unos sesenta centímetros de la orilla de la playa y a unos ciento cincuenta metros de la muralla granítica, que se erguía perpendicularmente, Cyrus Smith clavó la vara en la arena, a unos sesenta centímetros de profundidad, y, tras sujetarla bien, logró mantenerla perpendicular al plano del horizonte, gracias a la plomada. Hecho esto, se apartó a la distancia necesaria para que, tumbado sobre la arena, su mirada pusiera en línea el extremo de la vara y la cresta de la muralla. Después, señaló el punto con una estaca.

– Harbert, ¿conoces los principios elementales de la geometría?

– Un poco, señor Cyrus –respondió Harbert–, que no quería comprometerse demasiado.

Desarrollo:

a) ¿Qué principio geométrico pretende usar el ingeniero Cyrus Smith?

b) ¿Qué instrumentos utiliza para llevar a cabo su plan? ¿Qué es una plomada y para qué sirve?

c) Para ayudar a Cyrus y Harbert, ¿cuánto mide la muralla si la distancia de la estaca a la base de la muralla es de 3,82 metros?

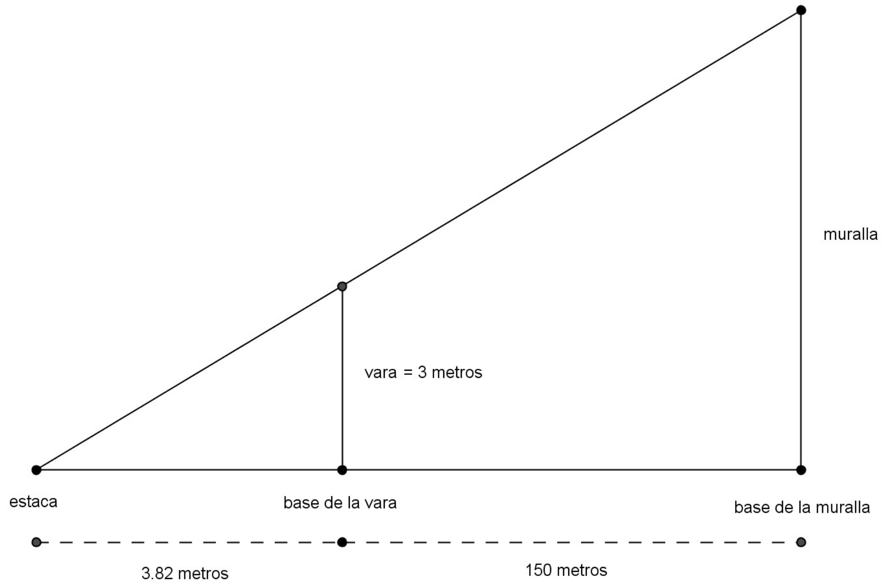
d) Utilizar otro argumento matemático para resolver el mismo problema contando sólo con un metro suficientemente largo.

Aspectos matemáticos:

a) El ingeniero se basa en la semejanza de triángulos que se debe al teorema de Thales.

b) Para sus cálculos necesitan una vara recta de medida conocida, una plomada y una estaca. Esto muestra que se pueden realizar mediciones del entorno sin necesidad de instrumentos científicos especiales. La plomada es una pesa consistente en un peso atado en el extremo de una cuerda. En este caso se utiliza para colocar la vara perpendicular al suelo gracias al peso de la piedra que cae perpendicular al suelo.

c) La vara mide 3,60 metros y Cyrus la clava en la arena a unos 60 centímetros de profundidad, por lo que quedan 3 metros visibles. El esquema del plan es el siguiente:



Por el teorema de Thales, la distancia de la estaca a la base de la muralla es proporcional a la altura de ésta, como la distancia de la estaca a la base de la vara lo es a la altura de ésta otra, es decir,

$$\frac{distancia\ de\ la\ estaca\ a\ la\ base\ de\ la\ muralla}{altura\ de\ la\ muralla} = \frac{distancia\ de\ la\ estaca\ a\ la\ base\ de\ la\ vara}{altura\ de\ la\ vara}$$

$$\frac{3{,}82 + 150}{altura\ de\ la\ muralla} = \frac{3{,}82}{3}$$

$$\frac{153{,}82}{altura\ de\ la\ muralla} = \frac{3{,}82}{3}$$

$$altura\ de\ la\ muralla = 153{,}82 \cdot \frac{3}{3{,}82} \approx 120{,}8\ metros$$

d) Se puede utilizar el mismo argumento que Thales ideó para medir la altura de la pirámide de Keops. Si se miden la sombra que proyecta la muralla, la altura de uno mismo y la sombra que éste proyecta, todo en el mismo instante del día, como los rayos de sol inciden sobre la muralla y el sujeto con la misma inclinación, también se tiene que:

$$\frac{sombra\ de\ la\ muralla}{altura\ de\ la\ muralla} = \frac{nuestra\ sombra}{nuestra\ altura}$$

ACTIVIDAD 16

Teorema de Pitágoras

Libro: *Vitaminas matemáticas*; **Autor:** Claudi Alsina

Extracto:

¿Quién halló el teorema de Pitágoras? Ya los babilonios tenían rectángulos concretos donde valía la relación pitagórica, y el mérito de Pitágoras fue ver la relación general para cualquier triángulo rectángulo. Pero este resultado tan práctico también se fue redescubriendo (independientemente de Pitágoras) en otras culturas. Así, en 300 a.C. el tratado chino Chau Pei lo describe... y surge toda la historia oriental del teorema, llamado allí O Kon Ku, que nada tiene que ver con la versión griega del tema, siendo las medidas del bambú la estrella.

Desarrollo:

Este extracto se utiliza para introducir brevemente la historia de las matemáticas concernientes al ***teorema de Pitágoras***. Se anuncia el autor y el libro que se va a leer y se lee el texto. Se comenta con los alumnos lo que les sugiere el texto.

a) Por lo leído, ¿el teorema es de Pitágoras o no?

b) Se introduce la figura de Pitágoras y su escuela filosófica.

c) Se cuenta el dilema que puede surgir ante la autoría de un descubrimiento matemático, en este caso con el teorema de Pitágoras.

d) Se resalta que las matemáticas están en todas las culturas, incluso en las no occidentales, menos conocidas aquí, como en China.

e) Resolver el problema chino del bambú quebrado: Hay un bambú de 10 chì de alto, cuyo extremo superior al romperse toca el suelo a 3 chì de la base del tronco. ¿A qué altura se produjo la rotura?

Aspectos matemáticos:

a) Las primeras civilizaciones matemáticas que nos dejaron su herencia se centran en dos focos: Egipto, a lo largo del río Nilo, y Babilonia, entre los ríos Tigris y Éufrates. Como dice el texto, hay pruebas de que los babilonios ya utilizaban lo que hoy llamamos ***ternas pitagóricas*** pero no demostraron la generalidad del resultado para cualquier triángulo rectángulo. En nuestra cultura, fue Pitágoras quien lo demostró de forma independiente, y por eso se lo atribuimos a él.

b) Pitágoras de Samos (siglo VI a.C.) fue un filósofo y matemático griego. Realizó grandes avances en geometría y aritmética. Fundó la escuela pitagórica que mantenía sus estudios en el más profundo secretismo y ya se consideraban a ellos mismos “matemáticos”.

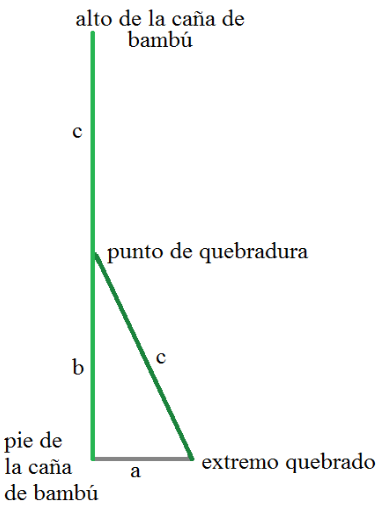
c) En matemáticas el interés de la autoría de un descubrimiento radica en el honor y el reconocimiento moral que otorga. A este respecto pueden surgir disputas a la hora de conceder el mérito cuando varias personas defienden haber llegado a un mismo resultado. Estas situaciones pueden deberse, por ejemplo, a: culturas diferentes alejadas en el espacio, como este caso en el que en Grecia (Pitágoras) y China se demostró el mismo resultado; estudios simultáneos de un mismo problema por diferentes matemáticos; o, publicaciones tardías.

d) Se hace notar que las matemáticas están presentes en todas las culturas gracias a la necesidad de contar que surge en todas partes. Sin embargo no siempre se desarrollan de la misma forma debido a las diferencias y recursos culturales.

En China el teorema de Pitágoras se llama ***teorema Gōugŭ*** y su demostración aparece en la obra matemática china más antigua conocida, Zhōu bì suàn jīng (El Clásico de la Aritmética del Gnomon y de las Sendas Circulares de los Cielos), que data entre los años 500-300 a.C.

e) Como se señala al final del texto, uno de los problemas matemáticos chinos más famosos donde se aplica este teorema es el del bambú quebrado que se enuncia como sigue:

Hay un bambú de 10 chì (1chì ~ 23cm) de alto, cuyo extremo superior al romperse toca el suelo a 3 chì de la base del tronco. ¿A qué altura se produjo la rotura?



El problema es del tipo: conocidos a y $b + c$, hallar b. En este caso $b + c = 10$ chì, y $a = 3$ chì.

$$b + c = 10 \quad \rightarrow \quad c = 10 - b$$

El triángulo de lados a, b y c es rectángulo, porque el bambú crece perpendicular al suelo, siendo los catetos a y b, y la hipotenusa $c = 10 - b$. Entonces, por el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$(10 - b)^2 = 3^2 + b^2$$
$$100 - 20b + b^2 = 9 + b^2$$
$$100 - 20b + b^2 - 9 - b^2 = 0$$
$$91 - 20b = 0$$
$$20b = 91$$
$$b = \frac{91}{20}\ chì$$

ACTIVIDAD 17

Cálculo de áreas y volúmenes

Libro: *Malditas matemáticas. Alicia en el País de los Números*; **Autor:** Carlo Frabetti

Extracto:

—[...] Y todo el mundo sabe también que un cuarto de litro es lo mismo que 250 centímetros cúbicos —contestó la niña, con un gesto de impaciencia.

—¿Por qué? —volvió a preguntar el adormilado Lirón.

—Charlie te lo explicará —dijo Alicia, que en realidad no lo tenía muy claro.

Con su característica media sonrisa enigmática, el escritor se sacó un dado de un bolsillo de la chaqueta y lo puso sobre la mesa.

—Este dado es un cubo de un centímetro de lado —dijo—, y su volumen es de un centímetro cúbico.

—¿Por qué? —preguntó el Lirón para no perder la costumbre.

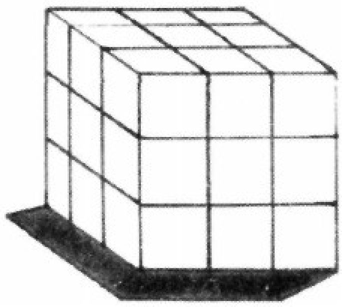
— Por definición —contestó Charlie—; llamamos «centímetro cúbico» al volumen de un cubo de un centímetro de lado. Pues bien, un litro es igual a un decímetro cúbico, es decir, al volumen de un cubo de un decímetro de lado, y un decímetro cúbico son mil centímetros cúbicos.

—¿Por qué un decímetro cúbico son mil centímetros cúbicos? —preguntó entonces Alicia—. Si no recuerdo mal, un decímetro son diez centímetros.

Desarrollo:

Se presenta el autor y el libro que se va a leer. La lectura puede realizarse interpretando a los tres personajes que aparecen: Alicia, el Lirón y Charlie. Después se plantean las siguientes preguntas:

a) ¿Charlie se ha equivocado al final o Alicia ha olvidado algo? ¿Cómo explicar a Alicia que Charlie tiene razón? Después de la pregunta de Alicia, Charlie hace el siguiente dibujo:



Si cada cuadrado pequeño tiene un centímetro de lado, ¿cuántos centímetros cúbicos contiene el cubo entero?

b) ¿Tiene sentido la primera afirmación de Alicia?

c) Si se dispone de un cubo de un 1 dm de lado que se pueda rellenar de agua, se hace la prueba de que en un cubo de 1 dm de lado cabe justo 1L, con la ayuda de una botella de esta capacidad.

d) ¿En qué libro se basa éste que se ha leído? ¿Quién a su autor, representado en el texto como Charlie?

Aspectos matemáticos:

a) Por definición un centímetro cúbico es el volumen de un cubo de un centímetro de lado porque la fórmula del volumen de un cubo de lado ℓ es $V = \ell^3$, entonces si el lado mide 1cm tenemos $V = 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1^3 \text{ cm}^3 = 1 \text{ cm}^3$.

En el dibujo de Charlie, cada cuadrado pequeño tiene un centímetro de lado por lo que cada cubito pequeño es 1 cm^3, como acabamos de decir. En total, el cubo mide tres centímetros de lado, luego tiene $3 \times 3 = 9$ cubitos en la base. Como tiene tres pisos de nueve cubitos, en total hay $3 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ cubitos de 1 cm^3 cada uno. Por consiguiente, el cubo contiene 27 cm^3.

Ahora bien, si se tiene un cubo de 1 dm de lado y un decímetro es igual a diez centímetros, como recuerda Alicia, entonces el volumen del cubo es

$$V = 1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm} = 1 \text{ dm}^3$$

pero también

$$V = 1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 10^3 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

por lo que $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

b) Se ha establecido que 1 L es la cantidad de líquido que cabe en un cubo de 1 dm de lado, es decir,

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3.$$

Así pues, Alicia no se equivoca al decir que un cuarto de litro son 250 centímetros cúbicos ya que:

$$\tfrac{1}{4} \text{ L} = \tfrac{1}{4} \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 250 \text{ cm}^3$$

d) Este libro se basa en el famoso libro *Alicia en el país de las maravillas* escrito por Lewis Carroll, seudónimo como escritor del matemático británico Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), quien trabajó en geometría, álgebra, aritmética electoral, lógica y matemáticas recreativas.

ACTIVIDAD 18

Cálculo de áreas y volúmenes

Libro: *Los viajes de Gulliver*; **Autor:** Jonathan Swift

Extracto:

Sólo podía mirar hacia arriba; el sol empezaba a calentar y su luz me ofendía los ojos. Oía yo a mi alrededor un ruido confuso; pero la postura en que yacía solamente me dejaba ver el cielo. Al poco tiempo sentí moverse sobre mi pierna izquierda algo vivo, que, avanzando lentamente, me pasó sobre el pecho y me llegó casi hasta la barbilla; forzando la mirada hacia abajo cuanto pude, advertí que se trataba de una criatura humana cuya altura no llegaba a seis pulgadas, con arco y flecha en las manos y carcaj a la espalda. […] Estas gentes son excelentísimos matemáticos, y han llegado a una gran perfección en las artes mecánicas con el amparo y el estímulo del emperador, que es un famoso protector de la ciencia. […] Quinientos carpinteros e ingenieros se pusieron inmediatamente a la obra para disponer la mayor de las máquinas hasta entonces construida. Consistía en un tablero levantado tres pulgadas del suelo, de unos siete pies de largo y cuatro de ancho, y que se movía sobre veintidós ruedas. La colocaron paralela a mí; pero la principal dificultad era alzarme y colocarme en este vehículo. Ochenta vigas, de un pie de alto cada una, fueron erigidas para este fin, y cuerdas muy fuertes, del grueso de bramantes, fueron sujetas con garfios a numerosas fajas con que los trabajadores me habían rodeado el cuello, las manos, el cuerpo y las piernas. Novecientos hombres de los más robustos tiraron de estas cuerdas por medio de poleas fijadas en las vigas, y así, en menos de tres horas, fui levantado, puesto sobre la máquina y en ella atado fuertemente.

Desarrollo:

Se lee el extracto en voz alta. Se plantea el ejercicio siguiente:

a) Las ruedas tienen un radio igual a la altura del tablero sobre el suelo y un grosor de 1,5 pulgadas. Por los datos que proporciona Gulliver, ¿cuánta madera necesitan los liliputienses para construir la máquina que transporta a Gulliver?

b) Si las medidas de la base de una de las vigas usadas son 2 y 2,5 pulgadas, ¿cuánto material contienen todas las vigas juntas?

Expresar todos los resultados a partir del centímetro (6 pulgadas = 15 cm, 6 pies = 180 cm).

Aspectos matemáticos:

En primer lugar, se expresan todas las medidas en centímetros para trabajar mejor. Como seis pulgadas son 15 cm, una pulgada equivale a 15/6 = 2,5 cm, mientras que un pie equivale a 180/6 = 30 cm. Entonces las medidas son:

$$\text{radio de las ruedas} = 3 \times 2{,}5 \text{ cm} = 7{,}5 \text{ cm}$$

$$\text{grosor de las ruedas} = 1{,}5 \times 2{,}5 \text{ cm} = 3{,}75 \text{ cm}$$

$$\text{largo del tablero} = 7 \times 30 \text{ cm} = 210 \text{ cm}$$

$$\text{ancho del tablero} = 4 \times 30 \text{ cm} = 120 \text{ cm}$$

$$\text{medidas de la base de una viga: } 2 \times 2{,}5 \text{ cm} = 5 \text{ cm};\ 2{,}5 \times 2{,}5 \text{ cm} = 6{,}25 \text{ cm}$$

$$\text{altura de una viga} = 1 \times 30 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$$

a) La madera utilizada para construir el tablero es la siguiente:

$$\text{área del tablero} = 210 \text{ cm} \times 120 \text{ cm} = 25200 \text{ cm}^2$$

Mientras que la madera total para construir las ruedas es:

$$\text{volumen de una rueda} = \text{área lateral} \times \text{grosor} = \Pi \times r^2 \times \text{grosor} =$$

$$= \Pi \times 7{,}5^2 \times 3{,}75 = 662{,}68 \text{ cm}^3$$

$$\text{madera para todas las ruedas} = 662{,}68 \text{ cm}^3 \times 22 = 14578{,}96 \text{ cm}^3$$

Entonces la cantidad de madera total es 25200 cm^2 más 14578,96 cm^3.

b) Como las vigas tienen forma de prisma rectangular, la base de una viga mide

$$\text{área de la base} = 5 \text{ cm} \times 6{,}25 \text{ cm} = 31{,}25 \text{ cm}^2.$$

La cantidad total de material de todas las vigas es:

$$\text{volumen de una viga} = 31{,}25 \text{ cm}^2 \times 30 \text{ cm} = 937{,}5 \text{ cm}^3$$

$$\text{material total} = 937{,}5 \text{ cm}^3 \times 80 = 75000 \text{ cm}^3$$

ACTIVIDAD 19

Estudio gráfico de una función: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetrías, continuidad y periodicidad

Libro: *Vitaminas matemáticas*; **Autor:** Claudi Alsina

Extracto:

¿Sería posible describir matemáticamente las interpretaciones musicales?

[…] ¿A usted le gusta el karaoke? ¿Le gustaría cantar como Elvis Presley o componer una canción y oírla interpretada por Elvis? Diversas respuestas afirmativas han sido dadas ya por el MTG en colaboración con Yamaha Corporation. Ya se encuentra en el mercado el producto VOCALOID©.

El potencial autor de canciones podrá escuchar sus creaciones interpretadas en su ordenador al introducir la letra de la canción y las notas de la partitura. El *software* sintetiza el sonido interpretativo a partir de "bibliotecas vocales" ligadas a músicas grabadas por cantantes reales, entresacando las cualidades vocales de los cantantes y poniendo entonces estas características interpretativas al servicio de la nueva creación […].

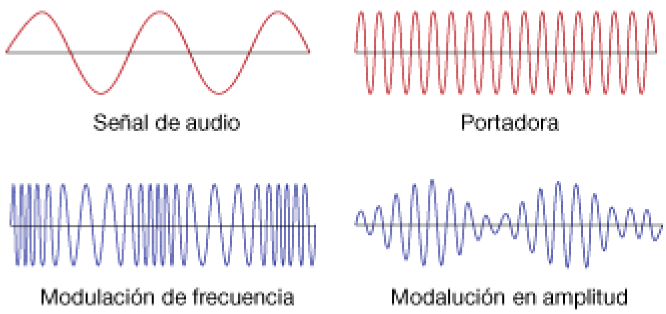
Además de usar las nuevas tecnologías, el punto crucial de todo esto es tener muy bien almacenados todos los registros y matices de las grabaciones de un cantante, segmentando sus varios componentes en una base de datos. La música y voz (fonética, expresividad...) pasan a ser ondas y estas gráficas sinusoidales tienen sus frecuencias, amplitudes, máximos, mínimos, etc. Son las técnicas del llamado SPP (Spectral Peak Processing) puestas al servicio de la interpretación.

Desarrollo:

Después de introducir el autor y el libro, se lee el extracto en voz alta. Se comenta con los alumnos lo que quiere mostrar el texto y la importancia del estudio gráfico y cualitativo de las funciones en este tipo de programas tecnológicos y también en otros procesos.

Aspectos matemáticos:

Uno de los procesos que describen las ondas sinusoidales, como muestra el texto, son las capturas de audio. Para ejemplificar:



Estas ondas se describen en función del tiempo y se estudian matemáticamente a través de ciertos parámetros como:

- La amplitud: distancia entre el punto más bajo (mínimo absoluto) y el punto más alto (máximo absoluto) alcanzados por la gráfica que describen.
- La periodicidad: repetición de un intervalo de valores de forma continua.
- La frecuencia: número de repeticiones por unidad de tiempo de un suceso.
- Los máximos y mínimos: valores extremos que toma la función.

A través de las características de las funciones y de sus gráficas, también se estudian, por ejemplo, los movimientos físicos, procesos naturales y biológicos, las variaciones económicas, o el ritmo cardíaco.

ACTIVIDAD 20

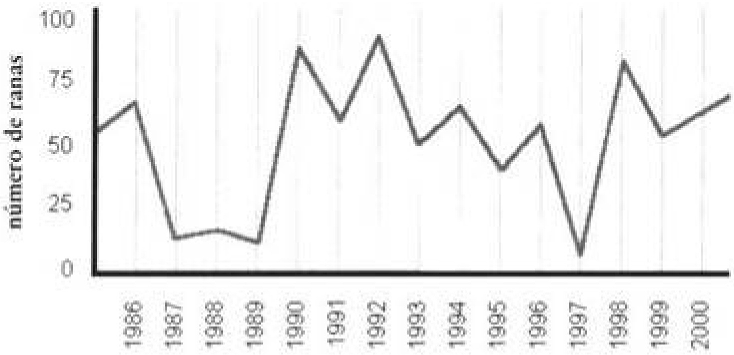
Análisis y descripción de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano. Formulación de conjeturas sobre el fenómeno representado por una gráfica

Libro: *El curioso incidente del perro a medianoche*; **Autor:** Mark Haddon

Extracto:

En el colegio tenemos un estanque con ranas, que están allí para que aprendamos a tratar a los animales con cariño y respeto, porque algunos de los niños del colegio son muy malos con los animales y creen que es divertido aplastar gusanos o tirar piedras a los gatos.

Y algunos años hay montones de ranas en el estanque, y algunos años hay muy pocas. Y si hicieras un gráfico de cuántas ranas había en el estanque tendría este aspecto (pero este gráfico es lo que se llama *hipotético*, que significa que las cifras no son las cifras reales, sino que sólo es una *ilustración*)



Y si mirases el gráfico podrías pensar que en 1987 y 1988 y 1989 y 1997 hizo un invierno realmente frío, o que había una garza real que venía a comerse montones de ranas (a veces hay una garza real que viene y trata de comerse las ranas, pero hay una tela metálica sobre el estanque que lo impide).

Pero a veces no tiene nada que ver con inviernos fríos o gatos o garzas. A veces son tan sólo matemáticas.

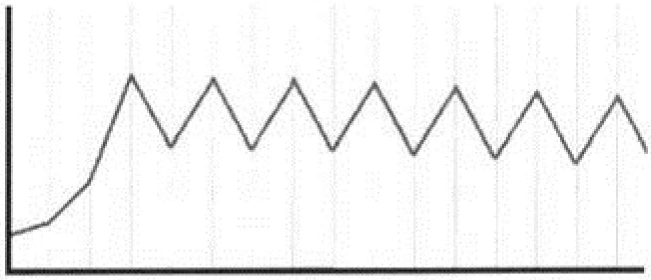
He aquí una fórmula para una población de animales.

$$\mathbf{N_{nueva} = \lambda\ (N_{vieja})\ (1 - N_{vieja})}$$

Y en esta fórmula **N** representa la densidad de población. Cuando **N = 1** la población es lo más grande que puede llegar a ser. Y cuando **N = 0** la población se ha extinguido. $\mathbf{N}_{nueva}$ es la población en un año, y $\mathbf{N}_{vieja}$ es la población en el año anterior. Y λ es lo que se llama una constante.

Cuando λ es menor que 1, la población es cada vez más pequeña y se extingue. Y cuando λ está entre 1 y 3, la población crece y después se estabiliza, así (y estos gráficos también son hipotéticos)

Y cuando λ está entre 3 y 3,57 la población sigue ciclos así



Pero cuando λ es mayor que 3,57 la población se vuelve caótica como en el primer gráfico.

Eso lo descubrieron Robert May y George Oster y Jim Yorke. Y significa que a veces las cosas son tan complicadas que es imposible predecir qué va a pasar a continuación, pero en realidad obedecen unas reglas muy sencillas.

Y eso significa que, a veces, una población entera de ranas, o de gusanos, o de gente, puede morir sin razón alguna, sólo porque así es como funcionan los números.

Desarrollo:

a) Realizar la tabla aproximada de valores de la primera gráfica para cada año. ¿Cuál es la fórmula algebraica que modeliza las gráficas según el protagonista del texto?

b) ¿Cuándo ha habido alrededor de 35 ranas en el estanque?

c) En la primera gráfica, ¿por qué se puede pensar que en 1987, 1988, 1989 y 1997 hizo un invierno frío o las garzas reales se comieron muchas ranas? ¿Qué pudo pasar entre 1991 y 1992? ¿Y entre 1992 y 1993?

d) ¿Cuántos máximos y mínimos relativos hay en cada gráfica? ¿En qué año hay más y menos ranas? La división de las dos últimas gráficas es la misma que la de la primera.

e) ¿Cuándo se producen los cambios más bruscos de crecimiento o decrecimiento en la población de ranas de la primera gráfica?

f) ¿Alguna de las tres gráficas presenta simetrías o periodicidad?

Aspectos matemáticos:

La ecuación que se describe en el texto se planteó para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema cerrado. Se la conoce como ***parábola logística de May***. El texto refleja cómo, en algunos procesos, una pequeña variación de una de las variables provoca cambios inesperados y muy diferentes en el resultado.

a) Aproximando la altura que alcanza la gráfica en las barras correspondientes a cada año, la tabla de valores es la siguiente:

Año	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	199 4	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Nº de ranas	65	13	15	11	87	57	94	50	64	40	55	7	80	52	63

La fórmula algebraica es $N_{nueva} = \lambda\ (N_{vieja})\ (1 - N_{vieja})$.

b) En el estanque ha habido alrededor de 35 ranas entre los años 1986 y 1987, entre 1989 y 1990, entre 1996 y 1997, y entre 1997 y 1998.

c) Se puede pensar eso porque son los años en los que hay menor número de ranas en el estanque. Entre 1991 y 1992 hay un crecimiento en la población, aunque no es el mayor crecimiento que se observa, por lo que las ranas eran más fuertes en esos años, o estaban mejor alimentadas, o las condiciones climáticas fueron propicias para la reproducción, por ejemplo. Entre 1992 y 1993 baja el número de ranas de 94 a 50, aproximadamente, por lo que murieron bastantes ranas y no se produjo mucha reproducción.

d) En la primera gráfica se observan siete máximos y siete mínimos relativos, siendo en 1992 cuando se alcanza el mayor número de ranas en el estanque, y en 1997 el menor número.

En la segunda gráfica hay un único mínimo, al inicio de la gráfica, y a partir de 1989 se estabiliza en su máximo.

En la tercer gráfica vuelve a haber siete mínimos relativos, alcanzando el mínimo absoluto al inicio, y otros siete máximos relativos, alcanzando el absoluto, aunque por poca diferencia, en 1988.

e) Los dos crecimientos más pronunciados que se pueden observar se producen entre 1989 y 1990, con una diferencia de 87 – 11 = 76 ranas, y entre 1997 y 1998, con una diferencia de 80 – 7 = 73 ranas.

Los dos decrecimientos más drásticos se producen entre 1986 y 1987, con un descenso de 65 – 13 = 52 ranas, y entre 1996 y 1997, con un descenso de 55 – 7 = 48 ranas.

f) No, ni simetrías ni periodicidad.

BLOQUE 6. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

ACTIVIDAD 21

Estadística descriptiva unidimensional. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales

Libro: *Vitaminas matemáticas*; **Autor:** Claudi Alsina

Extracto:

¿Los datos los recogen o los fabrican?

Sin datos fiables no pueden sacarse conclusiones dignas y/o interesantes. Por tanto, el primer gran problema de cualquier estudio estadístico es partir de una buena colección de datos. Esto afecta a los grandes institutos de estadística (¿cómo hacer el censo de población?, ¿cómo echar cuentas de demografía?, ¿cómo medir la inflación de los precios?...), afecta a todos los usuarios de datos (analistas, periodistas, inversores, apostadores a carreras de caballos...) y en la escala que sea también le afecta a usted. Para decidir una compra, un viaje o un plan de pensiones, usted precisa al menos de algunos datos sobre los cuales decidir (precios, comodidad, garantías, recuperación...).

Así pues, la primera categoría de datos es la de los datos que se recogen; datos que existen y que sólo es preciso tenerlos en cuenta, recopilarlos, ordenarlos, etc. Son los precios de los escaparates, las ofertas de los bancos, las notas de una evaluación, la publicidad de todos los coches nuevos […].

Pero hay una segunda categoría de datos: los datos que deben crearse, que aún no existen y que deben ser el resultado de una acción decidida. Si usted quiere poner a la venta una vivienda tiene muchos datos de los precios de mercado del momento para tomar una opción, pero si lo que quiere vender es un reloj de bolsillo de su bisabuelo ya puede ponerse zapatillas cómodas para deambular por anticuarios y joyeros a la búsqueda y captura de ofertas posibles. Lo mismo le ocurre a un equipo clínico cuando desea certificar la novedad de un nuevo tratamiento o inferir la causa de una nueva patología. Provocar la aparición de datos interesantes (y tener un control sobre cuántos son necesarios como mínimo) forma parte de lo que llamaríamos el "oficio" del estadístico.

Desarrollo:

Se anuncia el autor y el libro que se va a leer. Se realiza la lectura del texto y se comenta lo que éste aporta acerca de las matemáticas y la opinión que genera en los alumnos. Se citan ejemplos, con la participación de los alumnos, de recopilación de datos en la vida cotidiana.

Aspectos matemáticos:

Este extracto sirve para enseñar uno de los cometidos de la estadística, la necesidad y el sentido de la recopilación de datos y el método de recogida de éstos.

Algunos ejemplos donde utilizamos la recogida de datos en la vida cotidiana son:

- Comprar productos: comparando precios, características del producto, intereses externos sobre el producto.
- Decidir un viaje: precios, gustos, recomendaciones, preferencias, oportunidades que ofrece el destino.
- Reservas de hotel: precios, opiniones, situación geográfica.
- Realizar una actividad de ocio: opiniones y recomendaciones, preferencias, oportunidades y características que ofrece, pros y contras.

ACTIVIDAD 22

Estadística descriptiva unidimensional. Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra

Libro: *Vitaminas matemáticas*; **Autor:** Claudi Alsina

Extracto:

Sin datos fiables no pueden sacarse conclusiones dignas y/o interesantes [...]. A veces datos insuficientes pueden llegar a confundir conclusiones. Hace años se detectó en América del Norte (Estados Unidos y Canadá) que entre los inmigrantes asiáticos se daba el cáncer de esófago en proporciones destacadas respecto al resto de la población. Buscando razones que explicaran el fenómeno, en primera instancia se achacó el problema al tabaco (al darse en el colectivo asiático un mayor consumo). El tabaco es un causante pero no necesariamente el único. Al seguir acumulando datos y al margen del tabaquismo, se observó que las segundas y terceras generaciones de la inmigración asiática, aun fumando, ya no presentaban un índice destacable de cáncer de esófago. Con más datos, pues, se vio que el problema era típico de primeras generaciones: al provenir de lugares pobres, éstos habían pasado ya una parte de su vida en viviendas con mucho humo al dormir cerca de los fuegos de la casa. El problema en muchos casos era el humo doméstico. Las nuevas generaciones, al no estar sometidos ya a estas condiciones, normalizaban la situación.

Una tendencia que todos tenemos es la tentación a llegar a grandes conclusiones a partir de muy poquitos datos […] o de datos de muy mala calidad […]. Esto justifica que todas las leyes pesimistas, como la de Murphy, siempre tengan enorme aceptación […].

Desarrollo:

Se lee el texto después de introducirlo con el autor y el libro al que pertenece. Al igual que el extracto anterior, da pie a comentar lo que éste aporta acerca de las matemáticas y la opinión que genera en los alumnos. Además, se puede hacer referencia a la popular Ley de Murphy.

Aspectos matemáticos:

En general, no se pueden sacar conclusiones definitivas de la simple observación de un hecho. De ahí el rol de la estadística y la probabilidad para estudiar muchos datos relacionados entre sí de una u otra manera, y de los cuales sacar conclusiones válidas.

La popular ***Ley de Murphy***, “si algo puede ir mal, irá mal”, es una afirmación pesimista no científica basada en experiencias personales. Esta ley ha conllevado otras que la amplían o que la aplican a situaciones concretas. Es importante remarcar que esta ley no es irrefutable. No hay que confundir un caso particular con una verdad general.

ACTIVIDAD 23

Tablas de frecuencias. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones

Libro: *El escarabajo de oro*; **Autor:** Edgard Allan Poe

Extracto:

Y al llegar aquí, Legrand, habiendo calentado de nuevo el pergamino, lo sometió a mi examen. Los caracteres siguientes aparecían de manera toscamente trazada, en color rojo, entre la calavera y la cabra:

53+++305))6*;4826)4+.)4+);806*:48+8¶60))85;1+(;:+*8+83(88)
5*+;46(;88*96*';8)*+(;485);5*+2:*+(;4956*2(5*—4)8¶8*;406
9285);)6+8)4++;1(+9;48081;8:+1;48+85;4)485+528806*81(+9;
48;(88;4(+?34;48)4+;161;:188;+?; […]

– Y el caso –dijo Legrand– que la solución no resulta tan difícil como cabe imaginarla tras del primer examen apresurado de los caracteres. Estos caracteres, según pueden todos adivinarlo fácilmente forman una cifra, es decir, contienen un significado pero por lo que sabemos de Kidd, no podía suponerle capaz de construir una de las más abstrusas criptografías. […] mi primera medida era averiguar las letras predominantes así como las que se encontraban con menor frecuencia. Las conté todas y formé la siguiente tabla […].

Desarrollo:

Para empezar, se introduce el libro y el autor. A continuación se lee el extracto en voz alta y se propone el ejercicio:

a) Reproducir la tabla que Legrand dice haber formado con las frecuencias de cada símbolo en el mensaje encriptado. Calcular también las frecuencias relativas y porcentuales.

b) ¿Qué es la criptografía? ¿Hasta qué punto es importante el estudio estadístico en esta ciencia?

Aspectos matemáticos:

a) La tabla de frecuencias es la siguiente:

SIGNO	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia porcentual
8	32	$\frac{32}{202} \approx 0{,}158$	15,80%
;	25	$\frac{25}{202} \approx 0{,}124$	12,4 %
+	24	$\frac{24}{202} \approx 0{,}119$	11,9 %
4	19	$\frac{19}{202} \approx 0{,}094$	9,4 %

)	16	$\frac{16}{202} \approx 0{,}079$	7,9 %
*	13	$\frac{13}{202} \approx 0{,}064$	6,4 %
5	12	$\frac{12}{202} \approx 0{,}059$	5,9 %
6	11	$\frac{11}{202} \approx 0{,}054$	5,4 %
(	10	$\frac{10}{202} \approx 0{,}049$	4,9 %
1	8	$\frac{8}{202} \approx 0{,}04$	4 %
0	6	$\frac{6}{202} \approx 0{,}03$	3 %
9	5	$\frac{5}{202} \approx 0{,}025$	2,5 %
2			
:			
3	4	$\frac{4}{202} \approx 0{,}02$	2 %
?	2	$\frac{2}{202} \approx 0{,}01$	1 %
¶			
.	1	$\frac{1}{202} \approx 0{,}005$	0,5 %
’			
—			
SUMA	202	1	100,00%

b) La criptografía es la disciplina que estudia las técnicas de cifrado de mensajes lingüísticos contra posibles intrusos. También se encarga del estudio de los algoritmos y protocolos que se utilizan para proteger la información, dada la evolución de los sistemas informáticos.

Los sistemas básicos de codificación de la información se basan en cambiar, siempre, una letra por un mismo símbolo mediante un tabla de equivalencias. La descodificación de estos mensajes se hace a partir del estudio estadístico de los distintos lenguajes. Por ejemplo, la letra E es la más frecuente en el idioma español, mientras que la K y la W son las que menos.

ACTIVIDAD 24

Cálculo de probabilidades mediante la Ley de Laplace

Libro: *El jugador*; **Autor:** Fiódor Dostoievski

Extracto:

Expliqué a la abuela, lo mejor que pude, el mecanismo de las numerosas combinaciones "rojo y negro", "par e impar", "caballo" y para terminar, las diversas formas en que se agrupan los números. Ella escuchaba atentamente, hacía nuevas preguntas y se instruía sobre el azar. De cada sistema de posturas se podía poner en seguida ejemplos, así es que muchas cosas las pudo aprender pronto y fácilmente. La abuela estaba encantada.

– ¿Y qué es eso del "cero"? Mira ese croupier de pelo rizado, el principal, que acaba de gritar "cero". ¿Por qué se ha llevado todo lo que había encima de la mesa? ¡Una cantidad tan enorme! ¿Qué significa eso?

– El "cero", abuela, queda a beneficio de la banca. Si la bola cae en el "cero" todo lo que está sobre la mesa, todo, sin distinción, pertenece a la banca. Cierto que se concede otra postura por pura fórmula, pero en caso de perder la banca no paga nada.

– ¡Toma! ¿Entonces si pongo al "cero" y gano no cobro nada?

– No, abuela. Si usted hubiese puesto previamente al "cero" y hubiese salido, cobraría treinta y cinco veces la puesta.

– ¡Cómo! ¡Treinta y cinco veces! ¿Y sale a menudo? ¿Por qué entonces esos imbéciles no juegan al "cero"?

– Hay treinta y cinco probabilidades en contra, abuela.

– ¡Qué negocio! ¡Potapytch, Potapytch! Espera, llevo dinero encima... ¡Aquí está! -sacó del bolsillo un portamonedas repleto y tomó un federico-. Toma, ponlo en el "cero".

– Pero, abuela, el "cero" acaba de salir –objeté–. No saldrá, por lo tanto, en mucho tiempo. Usted se arriesga demasiado, espere al menos un poco –insistí–.

– ¡Ponlo y calla!

[…] Comprendí en aquel momento que yo también era un jugador. Mis manos y mis piernas temblaban. Era realmente extraordinario que en un intervalo de diez jugadas el cero hubiese salido tres veces, pero sin embargo había sucedido así. Yo mismo había visto, la víspera, que el cero había salido tres veces seguidas y un jugador, que anotaba cuidadosamente en un cuadernito todas las jugadas, me hizo notar que la víspera, el mismo cero no se había dado más que una vez en veinticuatro horas.

Desarrollo:

Se presenta el libro y el autor, y se lee el extracto en voz alta. Después hay que resolver el siguiente problema:

“El juego que se presenta en la lectura es la ruleta francesa de los casinos. Esta ruleta consta de 37 números, del 0 al 36, como muestra la imagen. Se trata de apostar qué número va a tocar cuando el croupier lance una bolita en la ruleta, haga girar ésta y finalmente se detenga.

Ruleta y paño de apuestas de una ruleta francesa.

Básicamente, hay seis tipos de apuestas ya estipulados que se pueden jugar:

1) A dieciocho: en la primera columna de la imagen (1 a 18, 19 a 36) se apuesta si el número a salir será menor o igual a 18, o mayor de 18.

2) A color: en la primera columna (rombo rojo, rombo negro) se apuesta si el número a salir va a ser rojo o negro.

3) Pares o impares: en la primera columna (even, odd) se apuesta si el número a salir va a ser par o impar.

4) A docena: en el paño de apuestas de la imagen están diferenciadas tres docenas fijadas a las que se puede apostar (1^{st} 12, 2^{nd} 12, 3^{rd} 12) o se puede jugar por una de las tres columnas (2 a 1), que contienen también doce números. Se gana la apuesta si el número que sale se encuentra en la docena apostada.

5) A filas: se puede apostar a los tres números de una fila.

6) A fichas: se puede apostar directamente a un único número elegido.

Así pues:

a) Describir el espacio muestral. ¿Qué probabilidad hay de ganar con cada tipo de apuesta?

b) ¿Qué probabilidad tiene la abuela de ganar?

c) Una mujer ha apostado a la décima fila y ha ganado. En esa jugada, ¿habría sido más aconsejable apostar a negro o a rojo?

d) Un hombre apuesta que va a salir un número negro mientras que el que está al lado apuesta que saldrá impar. ¿Qué apuesta es la mejor? ¿Es posible que ganen los dos? ¿Qué probabilidad hay de que ganen los dos?

e) Si se supiera que el número que va a salir es rojo, ¿sería mejor apostar a par o a impar? La respuesta a esta pregunta, ¿en qué columna sería mejor apostarla?

f) ¿Exagera el narrador al decir que es extraordinario que en diez tiradas el cero haya salido tres veces? ¿Lo es que salga un número tres veces seguidas?

g) Existe también la ruleta americana que se diferencia de la francesa en que añade una casilla más a la ruleta llamada doble cero, numerada con 00. ¿Cambian las probabilidades de las apuestas de una ruleta a otra? ¿Qué ruleta es más acertada elegir para jugar?”

Aspectos matemáticos:

a) El espacio muestral son todos los números del cero al 36: $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 35, 36\}$. La probabilidad de ganar de cada apuesta es:

$$P(\text{dieciocho}) = P(\text{color}) = P(\text{par}) = P(\text{impar}) = 18/37 = 0,\overline{486}$$
$$P(\text{docena}) = 12/37 = 0,\overline{324}$$
$$P(\text{fila}) = 3/37 = 0,\overline{081}$$
$$P(\text{ficha}) = 1/37 = 0,\overline{027}$$

b) La abuela apuesta sólo al cero, por lo que la probabilidad de que gane es la de que salga el cero, es decir:

$$P(0) = P(\text{fichas}) = 1/37 = 0,\overline{027}$$

c) Se quiere saber qué probabilidad es mayor: la de negro o la de rojo en la décima fila.

$$P(\text{rojo en la 10º fila}) = 1/3 = 0,\overline{3}$$
$$P(\text{negro en la 10º fila}) = 2/3 = 0,\overline{6}$$

Habría sido mejor apostar a negro.

d) Por el primer apartado se sabe que P(negro) = P(impar) = 18/37 = $0,\overline{486}$, por lo que las dos apuestas son iguales en posibilidades.

Sí pueden ganar los dos a la vez porque hay números impares en negro. La probabilidad de que ganen los dos es la de que el número que salga sea al mismo tiempo negro e impar, es decir,

$$P(\text{negro e impar}) = 8/37 = 0,\overline{216}.$$

e) Si se sabe de antemano que va a salir rojo, se apostaría a par o impar según qué probabilidad sea mayor:

$$P(\text{rojo y par}) = 8/37 = 0,\overline{216}$$
$$P(\text{rojo e impar}) = 10/37 = 0,\overline{270}$$

Entonces se apostaría a impar.

Si se sabe que va a salir impar, se apostará en la columna donde tenga más probabilidad:

$$P\ (\text{impar en la 1ª columna}) = 6/37 = 0,\overline{162}$$
$$P\ (\text{impar en la 2ª columna}) = 6/37 = 0,\overline{162}$$
$$P\ (\text{impar en la 3ª columna}) = 6/37 = 0,\overline{162}$$

Nos daría igual qué columna apostar porque en todas se tiene la misma probabilidad de impar.

f) La probabilidad de un experimento aleatorio compuesto de sucesos independientes viene dado por el producto de las probabilidades de cada suceso. Como la probabilidad de que en diez tiradas el cero salga tres veces es la de que en diez jugadas, el cero salga tres veces y las otras siete tiradas salga un número distinto de cero, se tiene que:

$$P(\text{tres ceros en diez jugadas}) = (1/37)^3 \cdot (36/37)^7 = 0{,}000016$$

Así que el narrador no exageraba.

La probabilidad de que el cero salga tres veces seguidas es la de que en tres jugadas salga el cero, es decir,

$$P(0 \text{ tres veces seguidas}) = P(0 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ jugada}) \cdot P(0 \text{ en la } 2^{\text{a}} \text{ jugada}) \cdot P(0 \text{ en la } 3^{\text{a}} \text{ jugada})$$
$$= 1/37 \cdot 1/37 \cdot 1/37 = 1/37^3 = 0{,}000019$$

Este suceso también es poco probable.

g) Las probabilidades de ganar cambian de una ruleta a otra porque en la ruleta americana el espacio muestral tiene 38 elementos en vez de 37, creciendo así el denominador en la regla de Laplace sin que cambie el numerador, por lo que los hipotéticos beneficios serán menores que en la ruleta francesa.

6.- Conclusiones y reflexión personal

En la preparación de este trabajo he podido entrelazar los conocimientos adquiridos y la experiencia realizada en el transcurso del máster.

A lo largo de los primeros módulos cursados, se ha visto cómo las diferentes necesidades que se encuentran en los grupos escolares requieren la adaptación de los contenidos a un determinado nivel; y cómo la etapa de adolescencia que se afronta pide el uso de ciertas metodologías. Todo esto sin perder la rigurosidad matemática que, al menos en parte, se ha de intentar inculcar.

Claro está, entonces, que lo más adecuado en esta propuesta de recurso didáctico es que el profesor que quiera ponerlo en práctica lea el libro que le interese y decida la idoneidad de éste para sus alumnos puesto que el profesor es quien conoce el verdadero nivel académico de éstos.

Con respecto a los esquemas metodológicos expuestos, se puede pensar que unos pueden favorecer más al estudio de las matemáticas mientras otros implican en mayor medida la competencia lingüística. Aun así, todo depende de los libros escogidos. Hay obras que implican en gran medida las matemáticas y, además, han sido bien recibidas por el público. He aquí la importancia de no conformarse con conocer un par de libros, sino profundizar en el tema. Existen artículos dedicados a la recopilación bibliográfica, comentada y clasificada por ciclos (véase [8], [10]), que facilitan la búsqueda.

Por otra parte, en el periodo de prácticas, he podido constatar que se pueden leer varios libros en un mismo año académico, por lo que sí se dispone de tiempo para poder dedicarlo a un único libro de manera exhaustiva o para dedicar ciertos momentos del curso a introducir textos o extractos de libros. Personalmente, la propuesta de utilizar varios textos cuando mejor se considere da mayor variedad de posibilidades y más libertad de organización. Sin embargo, en la realización de este trabajo también he podido comprobar la existencia de obras literarias que contienen un estructurado orden de contenidos matemáticos, bien amoldados a la narrativa de éstas.

Para finalizar, este trabajo deja abierta la línea de investigación para poner en práctica la propuesta didáctica desarrollada en el apartado *Propuesta didáctica*, o alguno de los modelos de actuación del apartado *Esquemas metodológicos*, de tal manera que muestre la acomodación del recurso aquí defendido en la situación real de un aula de Educación Secundaria.

7.- Referencias bibliográficas

DOCUMENTOS

[1] Decreto 52/2007
[2] Decreto 42/2008
[3] Real Decreto 1631/2006
[4] Real Decreto 1467/2007

ARTÍCULOS

[5] Balbuena Castellano, Luis (profesor de Matemáticas en Tenerife): *Cervantes, Don Quijote y las matemáticas*.
[6] Figueiras, Lourdes y Deulofeu, Jordi (Universidad Autónoma de Barcelona): *Libros para disfrutar la matemática*, revista UNO, nº 48
[7] Frabetti, Carlo: *Literatura y matemáticas*, revista UNO, nº 50
[8] Grupo Alquerque de Sevilla, *Bibliografía comentada de literatura y matemáticas*, revista UNO, nº 50
[9] Macho Stadler, Marta (profesora de Matemáticas de la U.P.V.): *Un paseo matemático por la literatura*, revista SIGMA, nº 32
[10] Muñoz Santonja, José y Fernández-Aliseda Redondo, Antonio: *Leer en matemáticas*, revista claveXXI, nº 4

LIBROS

[11] Alsina, Claudi: *Vitaminas matemáticas*
[12] Enzensberger, Hans Magnus: *El diablo de los números*
[13] Frabetti, Carlo: *Malditas matemáticas. Alicia en el País de los Números*
[14] Haddon, Mark: *El curioso incidente del perro a medianoche*
[15] Molina, María Isabel: *El señor del cero*

8.- Recursos en red

[A] Centro virtual de divulgación de las matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española, *www.divulgamat.net*

[B] Centro virtual de la publicación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), *www.revistasuma.es*

[C] Centro virtual de la publicación de la editorial GRAÓ, *uno.grao.com*

[D] Centro virtual de la publicación del Departamento de Educación del Gobierno Vasco, *www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/sigma_aldizkaria.html*

[E] Enciclopedia libre, *http://es.wikipedia.org*