Cincuenta años de la Olimpiada Matemática Española (OME)

Francisco Bellot Rosado
Miembro de la Comisión de Olimpiadas de la RSME
Cesáreo Jesús González Fernández
Delegado de la RSME para la OME en la Universidad de Valladolid

El presente curso académico 2013-14 se celebra la quincuagésima edición de la competición de Matemáticas para estudiantes preuniversitarios más antigua de España, y la de mayor nivel académico: la Olimpiada Matemática Española (OME en lo sucesivo), que organiza la Real Sociedad Matemática Española (RSME). Se articula en dos rondas: la fase local, en cada una de las Universidades públicas de nuestro país, de la que salen tres ganadores; y de entre ellos pasan a la prueba final de la fase nacional 77 estudiantes de las 17 Comunidades Autónomas y las dos ciudades autónomas (Ceuta y Melilla).

Presentación de la Olimpiada Matemática Española

Es un hecho fácilmente comprobable que un número muy elevado de los actuales Profesores Universitarios de Matemáticas han estado, en una u otra medida, relacionados con la Olimpiada. Algunos han sido ganadores, tanto a nivel local como nacional; otros han sido participantes. Tanto unos como otros comparten su gusto por las matemáticas y tal vez también el reto que supone intentar resolver un problema (mucho mejor si el enunciado es atractivo) de Matemáticas Elementales, que no es lo mismo que un problema elemental de Matemáticas.

Desde 1989 la Real Sociedad Matemática Española tiene un convenio suscrito con el Ministerio de Educación para garantizar la presencia de España en las competiciones internacionales: La Olimpiada Matemática Internacional (IMO) y la Iberoamericana (OIM). Sería muy largo relatar aquí las vicisitudes afrontadas por la OME en estos 50 años.

Revista de Ciencias, 4, 32-35, abril 2014
ISSN: 2255-5943

Por lo que a la Universidad de Valladolid se refiere, la fase local se desarrolla en los 4 campus (Valladolid, Palencia, Segovia y Soria) que realizan la prueba el mismo día y a la misma hora. Previamente, y con la financiación del Vicerrectorado, se organizan Seminarios de preparación para los alumnos interesados en aprender técnicas de resolución de problemas y estrategias adecuadas para conseguir encontrar esas soluciones.

Para finalizar esta presentación de los problemas propuestos en la fase local de Valladolid en enero de 2014, recordemos algunos datos del palmarés de los estudiantes de Valladolid en la Fase Nacional de la Olimpiada, desde 1988: 13 medallas de oro, 7 de plata y 16 de bronce.

A continuación se presentan los problemas planteados en la edición del presente año.

PROBLEMA 1

Los lados de un triángulo son 1, *k*, *k*^{2}. Calcular los valores de *k* para los que el triángulo es rectángulo.

Observaciones: propuesto por el Tribunal local de Valladolid. Origen del problema: Olimpiada de Chile 2009.

Solución

El caso *k=1* hay que descartarlo, porque el triángulo sería equilátero.

Los dos casos posibles para k distinto de 1 (según que $k < 1$ ó $k>1$) conducen, aplicando el teorema de Pitágoras, a sendas ecuaciones bicuadráticas de las que se obtienen las soluciones:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \text{ y } \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

—————— • ——————

PROBLEMA 2

Hallar las soluciones enteras de la ecuación: $x^4 + y^4 = 3x^3y$

Observaciones: propuesto por la Real Sociedad Matemática Española. Se publicará en su página web de Olimpiadas.

Solución del Prof. Jorge Mozo, Univ. de Valladolid, miembro del Tribunal.

Solución

Observemos dos cosas:

1) Si (x,y) es una solución real, y a es un número real, (ax,ay) también es solución, por ser la ecuación homogénea.
2) Si (x,y) es una solución y una de las componentes es nula, lo es la otra.

Así, supongamos que (x,y) es una solución entera con las dos componentes no nulas. Si d = mcd(x,y), entonces (x/d , y/d) es también solución, con lo que podemos suponer que la pareja x,y no tiene factores comunes. Como x divide a x^4 y a $3x^3y$, debe dividir a y^4, y en consecuencia, x divide a y. Análogamente, y divide a y^4 y a $3x^3y$, con lo que y divide a x^4 y por tanto y divide a x. Como no tienen factores comunes, esto solamente es posible si tanto x como y son +1 ó -1. Pero esto no es posible, dado que, en tal caso, $x^4 + y^4 = 2$ mientras que $3x^3y$ es +3 ó -3.

En conclusión, la única solución es (x,y) = (0,0).

—————— • ——————

PROBLEMA 3

En el triángulo ABC, de incentro I, la circunferencia inscrita es tangente al lado BC en T. La recta por T paralela a AI corta de nuevo a la circunferencia inscrita en S. La tangente en S a la circunferencia inscrita corta a AC en B' y a AB en C'.

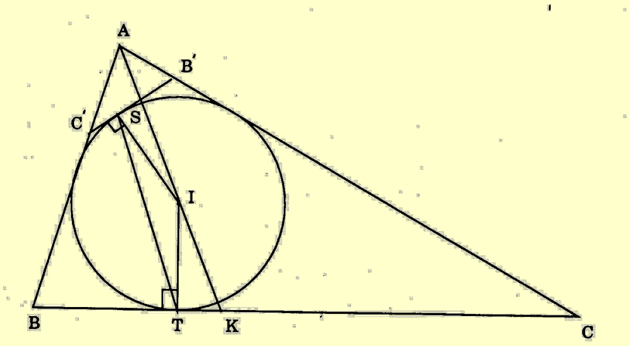
Demostrar que los triángulos ABC y AB'C' son semejantes.

Observaciones: propuesto por el Tribunal local de Valladolid. Origen del problema: Olimpiada de la India 1997.

Solución de Mª Ascensión López Chamorro, Catedrática jubilada del IES "Leopoldo Cano" de Valladolid.

Solución

Obsérvese la figura adjunta:



Consideremos una simetría axial cuyo eje es la bisectriz AI. Teniendo en cuenta la igualdad de los ángulos SIA y TIK, el simétrico de S es precisamente el punto de la circunferencia inscrita diametralmente opuesto a T. Esto quiere decir que la tangente B'C' se transforma en la tangente a la circunferencia inscrita en el punto diametralmente opuesto a T; dicho de otra forma, B' se transforma en B_1, C' se transforma en C_1, y B_1C_1 es paralela a BC, con lo que el triángulo AB_1C_1 es obviamente semejante a ABC. Pero AB_1C_1 y AB'C' son triángulos congruentes (iguales), con lo que se concluye.

—————— • ——————

PROBLEMA 4

Demostrar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es múltiplo de 9.

Observaciones: propuesto por el Tribunal local de Valladolid.

Solución

Sean *n-1, n y n+1* los tres naturales consecutivos. Debemos probar que

$$(n-1)^3+ n^3 +(n+1)^3$$

es múltiplo de 9. Desarrollando y simplificando, esa suma vale

$$3n^3+6n = 3n(n^2+ 2).$$

Si n es múltiplo de 3, ese producto es múltiplo de 9.

Si n no es múltiplo de 3, será de la forma $n = 3k+1$ ó $3k-1$. Entonces n^2 será de la forma $9k^2 + 1 + 6k$ ó bien $9k^2 + 1 – 6k$. Cuando se calcula $n^2 + 2$, se obtiene una expresión en la que aparece el factor común 3 que necesitamos.

—————— • ——————

PROBLEMA 5

Encontrar las tres últimas cifras de 7^{2014}

Observaciones: propuesto por la Real Sociedad Matemática Española. Se publicará en su página web de Olimpiadas.

Solución

Las tres últimas cifras de 7^4 son 401. Multiplicando sucesivamente por 7^4 tenemos:

Potencia	Últimas cifras
7^4	401
7^8	801
7^{12}	201
7^{16}	601
7^{20}	001
7^{24}	401

Puesto que $7^{2014} = 7^2.7^{2012} = 7^2.7^{503.4}$, resulta que las tres últimas cifras de 7^{2012} son 201, ya que 503 da resto 3 al dividirlo por 5 (5 es el período de la tabla y 3 corresponde a la tercera entrada de la tabla). Por lo tanto las tres últimas cifras de 7^{2014} son las tres últimas cifras del producto 49.201, es decir, 849.

—————— • ——————

PROBLEMA 6

Se tienen 10 objetos, cuyos pesos son enteros positivos. Ninguno de esos pesos es mayor que 10, y la suma de todos los pesos es 20. Demostrar que siempre es posible dividir los objetos en dos grupos que se equilibren cuando ambos grupos se colocan en los dos platillos de una balanza.

Observaciones: propuesto por el Tribunal local de Valladolid. Origen del problema: Olimpiada de la India 1998.

Solución

Sean $a_1,a_2,\ldots,a_{10}$ los pesos de los diez objetos, que suponemos en orden decreciente:

$$10 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{10} \geq 1,$$

con $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 20$.

Para cada $i, 1 \leq i \leq 9$, definimos $S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. Consideramos los 11 números siguientes:

$$0, S_1, S_2, \cdots, S_9, a_1 - a_{10}.$$

Estos 11 números son no negativos y verifican:

$$0 \le a_1 - a_{10} < 10,$$

y $1 < S_i < 20$ para $1 \le i \le 9$.

Consideremos los restos cuando esos 11 números se dividen entre 10: al ser 11 números y 10 posibles restos, el principio del palomar asegura que al menos dos de esos números dan el mismo resto. Entonces podemos considerar los siguientes casos:

a) Para algún j, S_j da resto 0, es decir, S_j es múltiplo de 10. Como $1<S_j<20$, la única posibilidad es que $S_j = 10$. En este caso, los dos grupos equilibrados son $\{a_1, \cdots, a_j\}$ y $\{a_{j+1}, \cdots, a_{10}\}$.

b) Supongamos que $a_1 - a_{10}$ es múltiplo de 10. En este caso, ya que $0 \le a_1 - a_{10} < 10$, esto obliga a que $a_1 - a_{10} = 0$, lo cual a su vez implica que todos los pesos son iguales a 2 para que la suma sea 20. En este caso, cualquier grupo de 5 objetos se equilibra con el grupo formado por los restantes 5.

c) Supongamos que para ciertos j,k, con $j < k$, S_j y S_k dan el mismo resto, es decir $S_k - S_j$ es múltiplo de 10. Nuevamente, debido a que $0 < S_k - S_j < 20$, debe ser $S_k - S_j = 10$, es decir, $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{j+1} = 10$ y tenemos dos grupos equilibrados.

d) Supongamos que $a_1 - a_{10}$ y S_j (para algún j) dan el mismo resto. En este caso $S_j - (a_1 - a_{10})$ es múltiplo de 10. Igual que en el caso anterior, esto implica que $S_j - (a_1 - a_{10}) = 10 \Leftrightarrow a_2 + a_3 + \cdots + a_j + a_{10} = 10$ y los grupos equilibrados son $\{a_2, a_3, \cdots, a_j, a_0\}$ y su complementario.

Por lo tanto, en todos los casos se pueden distribuir los 10 objetos en dos grupos equilibrados.

PARA SABER MÁS

Real Sociedad Matemática Española (RSME): http://www.rsme.es/