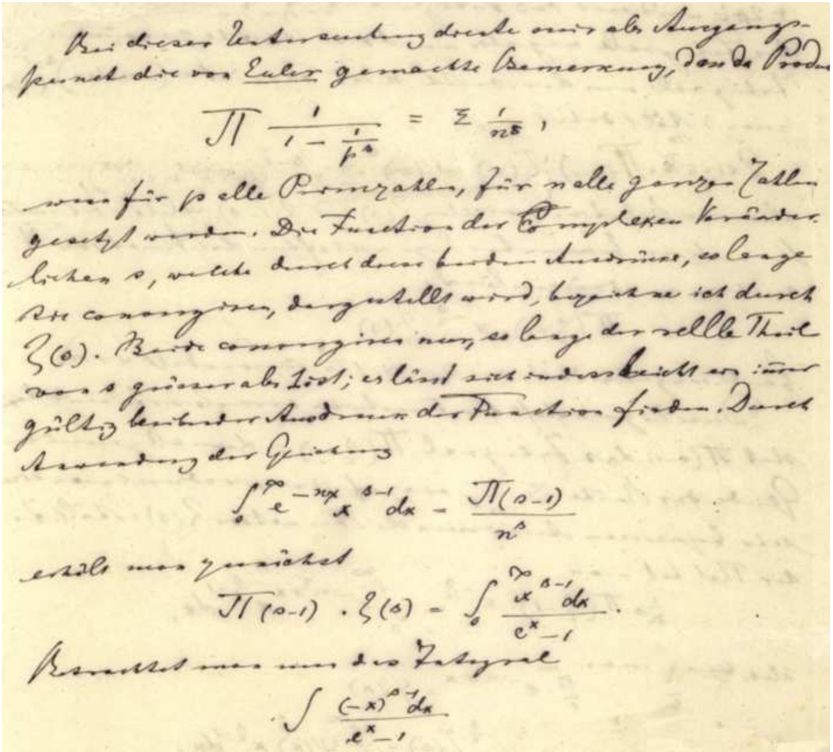
VARIABLE COMPLEJA
(40020)



Resumen de TEORÍA y

EJERCICIOS propuestos

GRADO DE MATEMÁTICAS (394)

Universidad de Valladolid

Luis A. Tristán, Javier Sanz, Félix Galindo, M. Núñez
DPTO. DE ÁLGEBRA, ANÁLISIS MATEMÁTICO, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

40020

1a. Edición

Valladolid, Febrero de 2015

LaTeX

Última compilación: 23 de junio de 2015

Ilustración de portada: fragmento del manuscrito original en alemán de la obra "*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (*sobre el número de primos menores que uno grande dado*)" de Bernhard Riemann, del año 1859.

Contenido

Prólogo

Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe.

El camino mas corto entre dos verdades del campo real pasa por el campo complejo.

JACQUES HADAMARD

Repito aquí las consideraciones generales que hice, en su momento, para el manual de Análisis Matemático. La modesta intención de este documento relativo al Análisis Complejo es la misma: proporcionar un guión, ajustado al temario de la asignatura. Asimismo, la estructura del texto vuelve a presentarse en un resumen teórico, más o menos extenso y glosado de cada uno de los temas, y una colección de enunciados de ejercicios de dificultad variada.

El temario es autocontenido pero, evidentemente, los prerrequisitos son mucho mayores que para las asignaturas de cursos anteriores: aparte de toda la materia previa de Análisis Matemático y los rudimentos de Álgebra y Geometría lineales, se necesitan sólidos conocimientos de Topología General.

En general, para el uso de estas notas de la manera más provechosa, recomendamos que el alumno se anticipe a la presentación de la teoría en las lecciones magistrales, dedicando unos pocos minutos a la lectura somera de la materia que corresponda de forma inminente; esto servirá, al menos, para adquirir un primer contacto con la terminología y notación. Luego, el manejo simultáneo de las notas tomadas en clase con la bibliografía básica recomendada (entraremos luego en detalle sobre este aspecto) permitirá dar forma al cuerpo teórico cuyo esqueleto podemos identificar con este guión.

Vuelvo a insistir en la necesidad del trabajo personal del alumno: tanto en el aspecto teórico, como se ha indicado antes, como en el práctico, mediante la resolución de ejercicios y problemas, o al menos el intento de resolución, buscando respuestas por uno mismo, no leyendo las que se encuentren en la literatura relacionada.

La teoría de funciones de variable compleja es un vasto campo de las matemáticas cuyos recursos se aplican a aspectos, en apariencia tan lejanos, como las Ecuaciones en Derivadas Parciales elípticas (concretamente, en la denominada *teoría del potencial*) o la Teoría de Números. Precisamente, hemos elegido para ilustrar la portada un trabajo de Riemann, padre de la Teoría Analítica de Números; la *hipótesis de Riemann* es uno de los denominados problemas del milenio que aún no está resuelto (ver, por ejemplo, el texto de R. B. Ash [3]).

En esta asignatura, reducida a 6 créditos, no podemos sino establecer los fundamentos de esta materia, intentando mostrar en tan breve plazo los tres puntos de vista: el geométrico de Riemann, el infinitesimal de Cauchy y el analítico de Weierstrass que, sorprendentemente, desde distintos puntos de partida conducen a la misma idea. Aquí, en la equivalencia entre las nociones de *conformidad*, *holomorfía* y *analiticidad* radican la belleza y la potencia del Análisis Complejo. De forma somera, la asignatura se estructura así:

- ▷ Comenzamos con un primer tema que en buena parte consiste en un repaso de conceptos aritméticos y topológicos ya tratados previamente.
- ▷ En el segundo tema se establecen las nociones relativas a la derivación compleja y *holomorfía*, el fundamento de la teoría de Cauchy, y se estudian las funciones elementales.
- ▷ El tercer tema se dedica a la teoría de Weierstrass, la de las funciones analíticas, y se establece una primera relación entre *analiticidad* y holomorfía.
- ▷ En el cuarto tema se presenta la versión local de la teoría integral de Cauchy, estableciendo ya la equivalencia entre analiticidad y holomorfía. Aquí aparecen también resultados

de aplicación tan interesantes como el teorema fundamental del Álgebra, corolario del teorema de Liouville, o los principios de identidad, del módulo máximo, etc. Después prestamos atención a las versiones homológica y homotópica del teorema de Cauchy.

▷ Las aplicaciones del teorema global de Cauchy son tan numerosas que, por razones de extensión, se recogen en los dos siguientes temas. Entre las consecuencias más destacadas se encuentra el teorema de los residuos y sus aplicaciones al cálculo integral en la recta real, que por si mismas justifican el estudio de estos aspectos más avanzados. No somos nada originales repitiendo la cita que se atribuye a Hadamard, pues esa frase es utilizada asiduamente en publicaciones tanto divulgativas como académicas ya que, pese a su simpleza, es muy reveladora.

Lamentablemente, lo apretado del programa impide abordar otros temas tan interesantes como la interpolación y aproximación, funciones enteras, productos infinitos y factorización, funciones meromorfas, espacios de funciones analíticas...

En cuanto a las referencias bibliográficas, se pueden encontrar en la actualidad numerosas obras de gran calidad, abarcando todos los niveles de dificultad. La lista que proporcionamos aquí es sólo una pequeña muestra.

De forma orientativa, el texto de Ash y Novinger [3] bien nos puede servir de referencia básica en la parte teórica, y también da respuestas a la colección de ejercicios que propone. Además, los autores ofrecen esta obra gratuitamente en formato digital.

Otro recurso muy útil son las notas [25] que, generosamente, el profesor F. J. Pérez, del área de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, ofrece en su página web.

El libro de Churchill y Brown [6], el de Marsden y Hoffman [21], o el de Wunsch [34], son también referencias clásicas con varias reediciones en su historial.

Para quienes, además de progresar en el aprendizaje de la materia, estén interesados en los aspectos históricos, los textos de Remmert resultarán muy gratificantes. El temario de la asignatura está completamente contenido en [27]. La biblioteca de la UVa ha adquirido los derechos de versiones digitales de la editorial Springer, entre ellas este libro que, al igual que [28], puede ser consultado en versión pdf.

Para las cuestiones aritméticas y geométricas básicas, además de los textos específicos sobre funciones de variable compleja, es también útil el texto de Apostol [2]. En [10] se encuentra una pequeña colección de ejercicios resueltos relativos al primer tema.

En relación con las funciones elementales debo advertir de un ligero cambio en la notación respecto a ediciones de otras notas elaboradas por mí. La cuestión es que no hay unanimidad en la notación para las funciones trigonométricas e hiperbólicas, y cada cual debe optar por una de las posibilidades, eso sí, de manera coherente. En cualquier caso, estos cambios no afectan a la comprensión del texto, y en cada libro los índices y tablas de propiedades permiten al lector determinar inmediatamente con qué función se está tratando. En resumen, he optado por la notación que se está imponiendo a nivel internacional en detrimento de los antiguos usos de la matemática escrita en español (curiosamente, los defensores más acérrimos de esta tradición se encuentran en México, no en España): así escribiremos “sin” en lugar de “sen” para el seno; “tan” para la tangente, en lugar de “tg”; “sinh”,“cosh” para las funciones hiperbólicas y no “Sh”, “Ch”; etc.

En esta primera edición, en que escribo las notas con pocos días de antelación a la exposición de las lecciones, a buen seguro aparecerán numerosas erratas, espero que de índole menor, fundamentalmente relativas a aspectos gramaticales u ortográficos. Es por ello que pido la máxima colaboración a sus destinatarios. La corrección de errores beneficia tanto a los actuales como a los futuros alumnos. Agradezco de antemano dicha colaboración, que se puede realizar por cualquiera de las vías habituales de comunicación: en persona, mediante los foros del curso virtual, etc.

También quiero señalar que, aunque este material está dirigido a mis alumnos, cualquier persona que desee usarlo para fines no comerciales tiene mi expreso permiso de reproducción. En este sentido, será bien recibidas toda crítica o sugerencia, tanto en el aspecto literario como en el matemático, que ayuden a mejorarlo (email: `ltristan@am.uva.es`).

Valladolid, abril de 2015 — Luis A. Tristán Vega

Tema 1

Números complejos

El Axioma de Completitud de la recta real garantiza que para cada $a \geq 0$ la ecuación $x^2 = a$ tiene al menos una solución en $\mathbb{R}$; no sucede lo mismo si $a < 0$. De forma más general, no todo polinomio con coeficientes reales tiene una raíz real. La recta real es “incompleta” en este sentido. Para subsanar esta deficiencia algebraica se introduce el concepto de número complejo. Esta ampliación de la recta real gozará de las mismas propiedades aritméticas. A cambio se pierde la estructura de orden compatible con la estructura de cuerpo que allí está presente.

La evolución histórica comienza en el siglo XVI, cuando Cardano y Bombelli introducen los números “imaginarios”, que fueron cada vez más utilizados en el siglo XVIII, dando lugar a numerosas paradojas y debates en los que participaron matemáticos de tanto renombre como L. Euler, G. Leibniz, los Bernoulli, y J. D'Alembert. No se produjo una verdadera comprensión de estos números hasta la primera mitad del siglo XIX.

Una etapa importante de este proceso se halla en la interpretación geométrica del número imaginario dada por C. Wessel y J.R. Argand. A partir de esta interpretación, la genialidad de Gauss y de Cauchy logró realizar un álgebra rigurosa de estos números, llamados “complejos”, término que poco a poco sustituyó al de imaginarios (en su tesis doctoral, de 1799, Gauss prueba rigurosamente el teorema fundamental del Álgebra, ver enunciado 1.9).

1.1. El cuerpo de los números complejos

Se consideran en el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ las operaciones suma ‘$+$’ y producto ‘$\cdot$’ definidas como sigue:

i) $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

ii) $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)$

Por supuesto, los signos de suma y producto a la derecha de las igualdades corresponden a las operaciones definidas en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.1. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo. Concretamente:

i) $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano; $(0, 0)$ es el elemento neutro, y el elemento opuesto de (a, b) es el elemento $(-a, -b)$.

ii) $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ es un grupo abeliano; $(1, 0)$ es el elemento unidad, y si $(a, b) \neq (0, 0)$, su inverso es
$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

iii) El producto es distributivo respecto de la suma.

Definición 1.2. La terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se denomina *cuerpo de los números complejos* y se denota por $\mathbb{C}$. Sus elementos son los *números complejos*.

Observaciones 1.3.

i) El subconjunto $\{(x, 0) \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$, con las operaciones heredadas de $\mathbb{C}$, es un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Si se le dota de la relación de orden obvia (la inducida por el orden en $\mathbb{R}$ en la primera componente), verifica el resto de los axiomas que caracterizan $\mathbb{R}$, es decir, el orden es compatible con las operaciones y se tiene el axioma de completitud. Por lo tanto, se puede decir que la recta real es un subcuerpo del de los números complejos.

ii) Cada número complejo (x, y) se puede escribir

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)\,.$$

Denotando por i al número $(0, 1)$ (que se denomina *unidad imaginaria*) e identificando, de acuerdo con lo anterior, $(x, 0)$ e $(y, 0)$ con los números reales x e y, el número (x, y) se representa por $x + i\,y$. Es habitual designar a los números complejos por la letra z, y la representación

$$z = x + i\,y$$

recibe el nombre de *expresión binómica* del número complejo z. En lo sucesivo, salvo que se indique lo contrario, siempre que se escriba un complejo de esta forma se entenderá que se trata de su expresión binómica, de modo que x e y son números reales (véase la siguiente definición).

iii) Por supuesto, se siguen los convenios de notación habituales para operaciones en grupos, anillos o cuerpos, y también se suele escribir, de forma simplificada, $z\,w$ en lugar de $z{\cdot}w$; z^2 por $z\,z$; los símbolos $\sum$ y $\prod$ para abreviar sumatorios y productorios; etc.

iv) Obsérvese que

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1, \quad \text{o bien} \quad i^2 + 1 = 0,$$

de modo que la unidad imaginaria es solución de la ecuación $z^2 + 1 = 0$, que carecía de soluciones reales.

Definición 1.4. Sea $z = x + i\,y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ un número complejo. Los números reales x e y reciben el nombre de *parte real* y *parte imaginaria* de z, respectivamente, y se denotan por $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$.

Observación 1.5. De acuerdo con la obervación 1.3.ii, los números reales son aquellos números complejos que tienen parte imaginaria nula, mientras que los números complejos con parte real nula se denominan *imaginarios* (*puros*).

Definición 1.6. Sea $z = x + i\,y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ un número complejo.

i) El número complejo $x - i\,y$ se denomina *conjugado* de z y se denota por $\overline{z}$.

ii) El número real no negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ se denomina *módulo* de z y se denota por $|z|$.

Observación 1.7.

i) Un número complejo z es real si, y sólo si, $z = \overline{z}$.

ii) Un número complejo z es imaginario si, y sólo si, $z = -\overline{z}$.

iii) Si $z \in \mathbb{C}$ es real, el módulo de z es el valor absoluto de z.

Propiedades 1.8. Sean z y w números complejos. Se verifican las siguientes propiedades:

i) $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}\,.$

ii) $\overline{w\,z} = \overline{w}\ \overline{z}\,.$

iii) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\,i}\,.$

iv) $z\,\overline{z} = |z|^2\,.$

v) Si $z \neq 0$ entonces $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}\,.$

vi) $|z| = |\overline{z}|\,.$

vii) $|\,\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\,\mathrm{Im}(z)| \leq |z|\,.$

viii) $|z| \leq |\,\mathrm{Re}(z)| + |\,\mathrm{Im}(z)|.$

ix) $|z\,w| = |z|\,|w|\,.$

x) Si $w \neq 0$ entonces $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}\,.$

xi) $|z + w| \leq |z| + |w|\,.$

xii) $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|\,.$

Como vemos, los números complejos mantienen todas las propiedades algebraicas de los números reales, y lo mismo le sucede al módulo con respecto al valor absoluto. Además, el cuerpo $\mathbb{C}$ es *algebraicamente cerrado*, como muestra el siguiente resultado (cuya demostración es consecuencia inmediata del teorema de Liouville 4.26, que se presentará en el capítulo 4).

Teorema 1.9 (fundamental del Álgebra). Todo polinomio con coeficientes complejos de grado mayor o igual que uno admite al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

De hecho, si el polinomio es de grado $n \geq 1$, tiene exactamente n raíces (contando sus multiplicidades).

Observaciones 1.10.

i) Como consecuencia del teorema anterior, todo polinomio $Q(z)$ con coeficientes complejos se descompone de forma única como un producto

$$Q(z) = C\,(z-r_1)^{m_1}(z-r_2)^{m_2}\dots(z-r_k)^{m_k},$$

donde C es una constante (el coeficiente del monomio de mayor grado), $r_1,\dots,r_k$ son las raíces de Q, y $m_1,\dots,m_k$ son sus multiplicidades respectivas.

Esto también es relevante en la descomposición en *fracciones simples* de fracciones racionales (es decir, cocientes de polinomios) $F(z) = {}^{P(z)}/_{Q(z)}$, con el grado de P menor que el de Q, que adquiere la forma:

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{b_{1,1}}{(z-r_1)} + \frac{b_{1,2}}{(z-r_1)^2} + \dots + \frac{b_{1,m_1}}{(z-r_1)^{m_1}} \\ &\quad\vdots \\ &+ \frac{b_{k,1}}{(z-r_k)} + \frac{b_{k,2}}{(z-r_k)^2} + \dots + \frac{b_{k,m_k}}{(z-r_k)^{m_k}}\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde los $b_{i,j}$ son números complejos.

ii) En contrapartida, la relación de orden en $\mathbb{R}$ no puede extenderse a $\mathbb{C}$ con las mismas propiedades. Por supuesto, se pueden definir relaciones de orden en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ que al ser restringidas a $\mathbb{R}$ coincidan con la usual de la recta, por ejemplo, la "lexicográfica", pero ninguna de ellas puede ser compatible con la aritmética. Explícitamente, esta compatibilidad se refiere a la monotonía en la suma (si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todo c) y en el producto (si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$).

Véase: si se supone que existe una relación de orden total $\prec$ compatible con la aritmética, entonces el producto de un número por sí mismo será positivo. En particular, $-1 = i^2 \succ 0$ y $1 = 1^2 \succ 0$, lo cual es absurdo.

1.2. Sucesiones y series de números complejos

Definición 1.11. Una *sucesión de números complejos* es una aplicación $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. La terminología general usada para las sucesiones de términos cualesquiera se aplica a este caso, y así una sucesión de números complejos se representa de forma más compacta por el símbolo $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $z_n = \sigma(n)$; z_n se denomina *término n-ésimo* de la sucesión.

El conjunto imagen de la aplicación σ, es decir, $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, se denomina *conjunto de términos* o *rango* de la sucesión.

Una *subsucesión* de una sucesión dada $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la composición de una sucesión estrictamente creciente de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ con aquella, y se representa por $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Observación 1.12. Otra notación de uso frecuente para designar una sucesión es $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. También, en ciertos campos de la Ciencia, cuando la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ representa una *señal discreta* (dicho más correctamente, "*en tiempo discreto*"), es usual representar por $z[n]$ el término z_n. Esto se hace para distinguir de las señales en tiempo continuo, denotadas de la forma usual $f(t)$.

Definición 1.13. Se dice que una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es *convergente* si existe un número complejo z verificando la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada número natural $n \geq n_0$ se tiene que $|z_n - z| < \varepsilon$".

En este caso el número z, que es único, se llama *límite* de la sucesión; se dice que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia z y se escribe

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n\,.$$

Proposición 1.14. Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia z, toda subsucesión suya es convergente hacia el mismo límite z.

Corolario 1.15. Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene dos subsucesiones que convergen hacia distintos límites, o tiene una subsucesión que no converge, entonces no puede ser convergente.

Observación 1.16. Conviene destacar que dar una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ equivale a proporcionar un par de sucesiones de números reales, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, relacionadas mediante las igualdades $z_n = x_n + i\,y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto permite reducir el estudio de propiedades para sucesiones complejas al de esas mismas propiedades para sucesiones reales; así, por ejemplo, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.17. Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes. En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

El concepto de *sucesión de Cauchy* y el *criterio de convergencia de Cauchy* se enuncian exactamente en los mismos términos que para sucesiones de números reales.

Definición 1.18. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Se dice que la sucesión es *de Cauchy* si verifica la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada par de números naturales $n, m \geq n_0$ se tiene que

$$|z_n - z_m| < \varepsilon\text{"}.$$

Proposición 1.19 (Criterio de convergencia de Cauchy). Una sucesión de números complejos es convergente si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy.

El criterio de Cauchy es especialmente útil en ciertas situaciones en las que es imposible determinar, a priori, el posible límite de la sucesión. Nótese que, mientras que para aplicar el criterio de convergencia dado por la misma definición 1.13 es necesario el conocimiento previo de dicho límite, no sucede lo mismo en este caso.

En general, se obtienen las mismas propiedades sobre la aritmética de los límites que en el caso real, pero carece siquiera de sentido enunciar aquéllas que se establecen en términos de la relación de orden de los números reales; por tanto, para sucesiones de números complejos no es lícito hablar de monotonía, ni establecer propiedades como el criterio del sandwich.

Por ese mismo motivo, la noción de *acotación* se ha de establecer en términos del módulo.

Definición 1.20. Se dice que una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es *acotada* si existe $M > 0$ tal que

$$|z_n| = \sqrt{\mathrm{Re}(z_n)^2 + \mathrm{Im}(z_n)^2} \leq M \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 1.21. Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es acotada si, y sólo si, lo son las sucesiones de números reales $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposición 1.22. Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces está acotada.

Teorema 1.23 (de Bolzano-Weierstrass). Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada, existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que es convergente.

Propiedades 1.24.

i) Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada y la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0, entonces la sucesión $\{z_n\, w_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

ii) Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia z, entonces la sucesión $\{|z_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $|z|$. *El recíproco, en general, no es cierto*; no obstante, es inmediato probar a partir de la definición que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 si, y sólo si, la sucesión $\{|z_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0.

iii) Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia z y la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia w, entonces la sucesión $\{z_n + w_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $z+w$, y la sucesión $\{z_n w_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $z\,w$.

iv) Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia z y la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia w, con $w \neq 0$, $w_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{z_n/w_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia z/w .

Estas propiedades pueden verse escritas de forma compacta en la tabla A.1.

Estudiamos a continuación el concepto de serie compleja y sus principales propiedades.

Definición 1.25. Dada una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, se le puede asociar una sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de *sumas parciales*:

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \qquad n \in \mathbb{N}\,;$$

se denomina *serie* de *término general* z_n a la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, que se representa por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$.

Se dice que una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ de números complejos es *convergente* si la sucesión de sus sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. En este caso el número complejo $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ se llama *suma* de la serie y es usual escribir, abusando de la notación,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Observaciones 1.26.

i) Estudiar la *naturaleza o carácter* de una serie consiste en determinar si converge o no. Si la serie es convergente, el problema de *sumar* la serie es el de hallar su suma.

ii) Por diversas razones, en algunas ocasiones las series se indican a partir de un número entero k en adelante, por ejemplo $\sum\limits_{p=-1}^{\infty} z_p\,,\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n\,,\ \sum\limits_{m=2}^{\infty} a_m\,.$ Obviamente, el carácter de una serie de números complejos no se altera cuando se suprimen o se cambian un número finito de sus términos, o cuando todos sus términos se multiplican por una constante compleja no nula; en caso de convergencia, es sencillo analizar cómo estas alteraciones se traducen en la suma correspondiente.

De la proposición 1.19 se deduce el siguiente criterio para series.

Teorema 1.27 (Criterio de convergencia de Cauchy para series). Es condición necesaria y suficiente para que una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ de números complejos sea convergente que para cada número real $\varepsilon > 0$ se pueda determinar un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada par de números naturales p y q con $p > q \geq n_0$, se verifique que

$$|S_p - S_q| = |\,z_{q+1} + \ldots + z_p\,| < \varepsilon\,.$$

Teorema 1.28 (Condición necesaria de convergencia). Si la serie de números complejos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0\,.$

Teorema 1.29. La serie de números complejos de término general z_n es convergente si, y sólo si, las series de números reales $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ son convergentes. En este caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n).$$

Proposición 1.30. Sean $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ dos series convergentes de números complejos. Si α y β son números complejos, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha\, z_n + \beta\, w_n)$ es convergente. Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha\, z_n + \beta\, w_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

Definición 1.31. Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ de números complejos es *absolutamente convergente* si la serie de números reales no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

Teorema 1.32. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si, y sólo si, las series de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$ son absolutamente convergentes, en cuyo caso se tiene que

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \big| \mathrm{Re}(z_n) \big| + \sum_{n=1}^{\infty} \big| \mathrm{Im}(z_n) \big| .$$

Observaciones 1.33.

i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es de términos positivos, y por tanto se le pueden aplicar el criterio de comparación y los criterios usuales de convergencia que de él se derivan, tales como el del cociente, el de la raíz, etc. (para consultar estos resultados ver, p.e., [2] o [10]).

No obstante, por su uso frecuente, mencionaremos que, al igual que en el caso real, una serie *geométrica* de números complejos $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si, y sólo si, $|r| < 1$, y en este caso su suma es $1/(1-r)$; al comparar con series geométricas se deducen:

1. ***Criterio de D'Alembert o del cociente:*** Supongamos que $z_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que existe $\lambda = \lim_{n\to\infty} |z_{n+1}|/|z_n|$, entonces la serie converge absolutamente si $\lambda < 1$, y no converge si $\lambda > 1$.
2. ***Criterio de la raíz:*** Si existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lambda$, entonces la serie converge absolutamente si $\lambda < 1$, y no converge si $\lambda > 1$.

Cabe mencionar que, si se dispone de los conceptos de límite superior e inferior, es posible dar versiones más precisas de estos criterios (ver la observación 3.27.ii).

ii) Asimismo, la ***fórmula de sumación por partes de Abel*** (de índole puramente aritmética) sigue siendo válida: dadas dos sucesiones de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, se define $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, $n \in \mathbb{N}$; $S_0 = 0$. Entonces, para $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geq q$ se tiene que

$$\sum_{k=q}^{p} z_k\, w_k = S_p\, w_{p+1} - S_{q-1}\, w_q + \sum_{k=q}^{p} S_k (w_k - w_{k+1}). \tag{1.2}$$

De ella se deducen diversos criterios de convergencia para series de términos no necesariamente positivos (ver los ejercicios 1.26 y 3.10).

Definición 1.34. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ dos series de números complejos. Si se define

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k} = z_0\, w_n + z_1\, w_{n-1} + \cdots + z_{n-1}\, w_1 + z_n\, w_0, \quad n \geq 0,$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ se llama *producto de Cauchy* de las series dadas.

Teorema 1.35 (criterio de Mertens). Sean $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ dos series de números complejos absolutamente convergentes. Entonces, el producto de Cauchy de ambas es absolutamente convergente, y se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k} \Big) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} z_n \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \Big).$$

1.3. Nociones topológicas en $\mathbb{C}$. Funciones complejas

Nos ocupamos ahora del estudio de las funciones complejas y los conceptos de límite y continuidad para las mismas. Esto requiere precisar la idea de proximidad entre puntos del plano complejo, lo que se traduce en la introducción de una topología en $\mathbb{C}$. Ahora bien, como conjunto, el cuerpo de los números complejos es $\mathbb{R}^2$, si a esto se añade el hecho de que el módulo de un número complejo $z = x + i\,y$ es la norma euclídea del punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$, se concluye que todos los conceptos topológicos ya conocidos en $\mathbb{R}^2$ se pueden trasladar a $\mathbb{C}$. Para la conveniencia del lector, repasamos aquí los conceptos y propiedades básicos.

Definición 1.36. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

se denomina *bola* o *disco abierto* centrado en z_0 y de radio r. Análogamente se define el *disco cerrado* centrado en z_0 y de radio r,

$$\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}\,.$$

Definición 1.37. Sea E un subconjunto de $\mathbb{C}$.

i) Se dice que un punto $z_0 \in E$ es *interior* a E si existe un disco abierto centrado en dicho punto y totalmente contenido en E.

Se llama *interior de* E, denotado por $\overset{\circ}{E}$, al conjunto de los puntos interiores de E.

ii) Se dice que un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es *adherente* a E si cada disco abierto centrado en z_0 tiene intersección no vacía con E.

Se llama *adherencia de* E, denotado por $\overline{E}$, al conjunto de los puntos adherentes a E.

iii) Se dice que un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es de *acumulación* de E si para cada $r > 0$ se tiene que $\big(B(z_0, r) \setminus \{z_0\}\big) \cap E \neq \emptyset$.

El conjunto E' de los puntos de acumulación de E se llama *derivado de* E.

Observación 1.38. Cada punto $z = x + i\,y$ de $\mathbb{C}$ se identifica con el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y cada subconjunto E de $\mathbb{C}$ se considera como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, entonces, resulta que los discos abiertos en $\mathbb{C}$ son las bolas abiertas en $\mathbb{R}^2$ para la norma euclídea:

$$B(z_0, r) \;\simeq\; \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\big\} \;=\; B\big((x_0, y_0), r\big);$$

así, un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ es interior al conjunto $E \subset \mathbb{C}$ si, y sólo si, el punto (x_0, y_0) es interior al conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$. De esta forma, para subconjuntos de $\mathbb{C}$, la noción de ser abierto (todos sus puntos son interiores) coincide con la referida a subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Lo mismo se puede decir respecto a los conceptos de cerrado, acotado o compacto, que se enuncian exactamente igual que en $\mathbb{R}^2$ sustituyendo la norma de los vectores por el módulo complejo.

Nos dedicamos ahora al estudio de las funciones complejas definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}$ (habitualmente, intervalos) o en subconjuntos de $\mathbb{C}$ (o, si se quiere, de $\mathbb{R}^2$). De hecho, puesto que hemos identificado de forma canónica la recta real con un subconjunto de $\mathbb{C}$, basta considerar únicamente el segundo caso; no obstante, la frecuente aparición de funciones complejas definidas en intervalos cuando se tratan las curvas paramétricas en $\mathbb{C}$, las integrales complejas a lo largo de curvas, etc., puede aconsejar hacer un tratamiento específico de esta situación, lo que haremos cuando proceda.

La ya comentada equivalencia topológica entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ permitirá que muchas de las propiedades relativas a límites y continuidad de las funciones en $\mathbb{R}^2$ se trasladen de forma inmediata a las funciones de variable compleja.

Notación: Si f es una función compleja definida en un subconjunto A de $\mathbb{C}$, las expresiones

$$f = u + i\,v \qquad \text{o} \qquad f(z) = f(x + i\,y) = u(x + i\,y) + i\,v(x + i\,y)$$

se utilizarán para significar que $u = \operatorname{Re}(f)$ y $v = \operatorname{Im}(f)$ son la *parte real* y *parte imaginaria*, respectivamente, de f, esto es, que el número complejo $f(x + i\,y)$ tiene parte real $u(x + i\,y)$ y parte imaginaria $v(x+i\,y)$. Así, la función f se puede identificar con la aplicación $\tilde{f}$ definida de $A \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ mediante $\tilde{f}(x, y) = \big(u(x + i\,y), v(x + i\,y)\big)$; y también es usual escribir, observando a u y v con funciones de dos variables reales:

$$f(x + i\,y) \simeq \tilde{f}(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)\,.$$

Los conceptos de acotación, límite y continuidad para funciones reales se adaptan al caso complejo sin más que sustituir el valor absoluto por el módulo.

Definición 1.39. Se dice que una función $f\colon A \to \mathbb{C}$ es *acotada* en A si existe $M \geq 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M \quad \text{para cada } z \in A\,.$$

Obviamente, la acotación de una función compleja equivale a la de sus partes real e imaginaria.

Definición 1.40. Sean A un subconjunto de $\mathbb{C}$, $f\colon A \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de acumulación de A. Se dice que f *tiene límite* $\ell \in \mathbb{C}$ en el punto z_0 si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de ε) de modo que para todo $z \in A$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ se tiene que

$$|f(z) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Proposición 1.41. Con la notación de la definición anterior, la función $f = u + i\,v$ tiene límite ℓ en el punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ si, y sólo si, las funciones reales u y v tienen límites $\operatorname{Re}(\ell)$ e $\operatorname{Im}(\ell)$, respectivamente, en dicho punto.

Observaciones 1.42.

i) Según la proposición anterior, todos los resultados sobre límites que se verifiquen para aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se verifican para funciones complejas de variable compleja. Por ejemplo, el límite, si existe, es único y se escribirá, en las condiciones anteriores, como es usual:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell\,.$$

Son válidos también los criterios secuenciales del límite, las propiedades aritméticas de los límites, etc. Puesto que suponemos conocidas por el lector todas estas propiedades en el caso de aplicaciones a valores en $\mathbb{R}^n$, no insistiremos en estos aspectos y nos limitamos a ilustrar dos propiedades:

1. Supongamos que las funciones complejas $f_1 = u_1 + i\,v_1$ y $f_2 = u_2 + i\,v_2$, definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, tienen límites ℓ_1 y ℓ_2, respectivamente, en un punto z_0 de acumulación de A. La función producto se escribe en términos de u_1, v_1, u_2 y v_2,

$$f_1 f_2 = (u_1 + i\,v_1)(u_2 + i\,v_2) = (u_1u_2 - v_1v_2) + i\,(u_1v_2 + u_2v_1)\,,$$

y puesto que cada una de estas cuatro funciones reales tiene límite en el punto (x_0, y_0) y es $\operatorname{Re}(\ell_1)$, $\operatorname{Im}(\ell_1)$, $\operatorname{Re}(\ell_2)$ e $\operatorname{Im}(\ell_2)$, respectivamente, se deduce que f_1f_2 tiene límite en el punto z_0 y es precisamente $\ell_1\ell_2$.

2. Si la función compleja $f = u + i\,v$, definida en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, tiene límite $\ell \neq 0$ en un punto z_0 de acumulación de A, existe $\delta > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in A$ con $0 < |z - z_0| < \delta$. Entonces la función $1/f$ está definida en $A \cap B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ y se expresa en este conjunto por

$$\frac{1}{f} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i\,\frac{v}{u^2 + v^2}\,.$$

Puesto que u y v tienen límites $\operatorname{Re}(\ell)$ e $\operatorname{Im}(\ell)$, respectivamente, en z_0, la función $1/f$ tiene límite $1/\ell$ en este punto (nótese que $u^2 + v^2 = |f|^2$ y esta función es no nula en los puntos $z = x + i\,y$ en los que $f(z) \neq 0$).

ii) Si A se identifica con un subconjunto de $\mathbb{R}$, se puede decir que la aplicación $f\colon A \to \mathbb{C}$ es una *función compleja de variable real*. Por supuesto, esta situación no es más que un caso particular de lo anterior, aunque se aplican las simplificaciones de notación obvias: si $t \in A$, se escribe $f(t) = u(t) + i\,v(t)$ para indicar las partes real e imaginaria de f, etc.

iii) No tiene sentido en el caso complejo el concepto de límite infinito, $+\infty$ ó $-\infty$, planteado mediante la relación de orden. No obstante, cuando una función compleja verifique que $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ diremos que tiende a infinito en z_0. La consideración de la esfera de Riemann, que trataremos en la sección 1.5, proporciona una interpretación clara y rigurosa de esta terminología.

La noción de continuidad se enuncia en términos de la distancia precisando la idea de que “puntos próximos tienen imágenes próximas”.

Definición 1.43. Sean A un subconjunto de $\mathbb{C}$, $f\colon A \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de A. Se dice que f es *continua* en el punto z_0 si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad z \in A\,,\ |z - z_0| < \delta\,.$$

Se dice que f es *continua en* A si es continua en cada punto de A.

Proposición 1.44. La función $f = u + i\,v$ es continua en $z_0 = x_0 + i\,y_0$ si, y sólo si, las funciones reales u y v son continuas en dicho punto; es decir, si, y sólo si, la aplicación

$$(x, y) \in A \longmapsto \big(u(x, y), v(x, y)\big) \in \mathbb{R}^2$$

es continua en (x_0, y_0).

Observación 1.45. De nuevo, los resultados sobre aplicaciones continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se verifican para funciones complejas de variable compleja (por ejemplo, la continuidad en un punto implica acotación local; la continuidad es preservada por la suma y el producto de funciones, etc.) y por esta razón no se detallan. Citaremos no obstante dos propiedades de uso habitual:

1. Si z_0 es un punto de acumulación de A, la continuidad de la función f en dicho punto equivale a que
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)\,.$$
2. Si la función f está definida en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$, es continua en este punto y $f(z_0) \neq 0$, entonces existe $r > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in B(z_0, r)$. Además la función $1/f$, que está bien definida en este disco, es continua en z_0.

Tratamos a continuación de manera similar el concepto de continuidad uniforme.

Definición 1.46. Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y f una función compleja definida en A. Se dice que f es *uniformemente continua* en A si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que sólo depende de ε) tal que

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon\,,$$

siempre que $z, w \in A$ con $|z - w| < \delta$.

Proposición 1.47. Si f es una función compleja uniformemente continua en el conjunto A, entonces f es continua en A.

Teorema 1.48 (de Heine). Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Si f es una función continua en K, entonces f es uniformemente continua en K.

La adaptación del concepto de derivada es también inmediata, pero existe en este caso una gran diferencia entre las funciones de variable real y aquellas de variable compleja. Mientras el estudio de la derivabilidad para las segundas será el objeto del capítulo 2, indicamos brevemente las propiedades para el primer supuesto.

Definición 1.49. Sea f una función compleja definida en un intervalo real I, y consideremos un punto $a \in I$. Si existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,,$$

se dice que f es *derivable en* a. El valor del límite será un número complejo que se denomina *derivada de* f *en* a, y al que se denota igualmente por $f'(a)$.

El carácter derivable de una función compleja se reduce al de sus partes real e imaginaria.

Proposición 1.50. Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $f(t) = u(t) + i\,v(t)$ una función compleja definida en I. La función f es derivable en el punto $a \in I$ si, y sólo si, lo son $u = \mathrm{Re}(f)$ y $v = \mathrm{Im}(f)$, y en este caso se tiene que

$$f'(a) = u'(a) + i\,v'(a)\,.$$

Este resultado permite generalizar a este contexto las propiedades y las reglas usuales de derivación para las funciones reales, siempre que no intervenga el orden de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, no es posible establecer teoremas de valor medio para funciones complejas, pero la derivabilidad implica la continuidad, se tiene la regla de la cadena, etc.

Ejemplo 1.51. La función

$$g(x) = (x+i)^4 = (x^4 - 6\,x^2 + 1) + i\,(4\,x^3 - 4\,x)$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada es

$$g'(x) = 4\,(x+i)^3 = (4\,x^3 - 12\,x) + i\,(12\,x^2 - 4)\,.$$

De cara a la definición en el contexto complejo de la integral de Riemann, herramienta clásica en el estudio de las funciones reales, se ha de notar que para funciones complejas acotadas carece de sentido considerar sumas de Darboux, en cuya definición interviene de manera crucial el concepto de orden; no obstante, la integración se puede extender al caso complejo mediante la consideración de las sumas de Riemann, que son números complejos perfectamente definidos. Sin entrar en detalles, mencionamos el siguiente resultado, que bien podría tomarse como definición de la integral de Riemann de una función compleja de variable real.

Proposición 1.52. Sea $f = u + i\,v$ una función compleja definida en el intervalo $[a,b]$. f es integrable si, y sólo si, lo son $u = \mathrm{Re}(f)$ y $v = \mathrm{Im}(f)$, en cuyo caso se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx\,.$$

Observación 1.53. Del resultado anterior se deducen similares criterios de integrabilidad y reglas aritméticas de integración que en el caso real. También es cierto que si una función compleja f es integrable en $[a,b]$ lo es su módulo y $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Finalmente, son válidos también para funciones complejas de variable real el teorema fundamental del cálculo, la regla de Barrow, la fórmula de integración por partes y el teorema del cambio de variable.

Ejemplo 1.54. $\displaystyle\int_a^b (x+i)^2\,dx = \left.\frac{(x+i)^3}{3}\right|_{x=a}^{x=b} = \frac{(b+i)^3 - (a+i)^3}{3}\,.$

Compárese con $\int_a^b (x^2-1)\,dx + i\int_a^b 2\,x\,dx$.

Observación 1.55. Otra propiedad topológica importante en el estudio de las funciones de variable compleja es la de conexión. No entraremos en detalles, pues el lector debe estar familiarizado con la teoría de espacios topológicos, en general, y con los espacios euclídeos en particular. Aun así, por su importancia, recordamos algunos aspectos relevantes:

i) Se dice que un subconjunto E de $\mathbb{C}$ es *inconexo* si existen dos abiertos U_1 y U_2 de $\mathbb{C}$, con $E\cap U_1 \neq \emptyset$, $E\cap U_2 \neq \emptyset$, $E\cap U_1\cap U_2 = \emptyset$ y $E\subset U_1\cup U_2$. En caso contrario E es *conexo*.

ii) Un subconjunto E de $\mathbb{C}$ es *conexo por caminos*, *conexo por arcos* o *arcoconexo* si para cada par de puntos $z,w\in E$ existe una aplicación continua $\gamma\colon [a,b]\to E$ tal que $\gamma(a) = z$ y $\gamma(b) = w$ (γ es el arco que une o conecta z con w dentro de E).

iii) Todo subconjunto de $\mathbb{C}$ conexo por arcos es conexo (en general, no es cierto el recíproco).

iv) Un conjunto convexo es estrellado respecto de cualquiera de sus puntos y, en consecuencia, conexo por arcos.

v) Todo subconjunto A de $\mathbb{C}$ que sea abierto y conexo es conexo por arcos.

vi) Es costumbre llamar *dominios* a los subconjuntos que son, simultáneamente, abiertos y conexos. Estos conjuntos son, valga la redundancia, los dominios de definición naturales de las funciones holomorfas o analíticas, a cuyo estudio nos dedicaremos en temas posteriores.

1.4. Argumento de un número complejo. Forma polar

En esta sección haremos uso de las propiedades básicas de las funciones trigonométricas de variable real, tales como periodicidad, puntos de anulación, etc., que suponemos conocidas por el lector.

Denotaremos por $\mathbb{T}$ a la *circunferencia unidad*,

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}\,.$$

Proposición 1.56.

i) Para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\cos(t) + i\,\sin(t) \in \mathbb{T}$.

ii) Para cada $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ se tiene que $z/_{|z|} \in \mathbb{T}$, y existe un número real t tal que $z/_{|z|} = \cos(t) + i\,\sin(t)$.

Esto justifica la siguiente definición.

Definición 1.57. Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se denomina *argumento de* z a cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Dicho valor θ se denota de forma genérica por $\arg(z)$.

Proposición 1.58. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y sea $\theta \in \mathbb{R}$ uno de sus argumentos. Entonces, el conjunto de los argumentos de z es $\{\theta + 2\,k\,\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposición 1.59. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $w \neq 0$. Se verifica que:

i) Los argumentos de $z\,w$ son precisamente los números reales de la forma $\alpha + \beta$, donde α es un argumento de z y β es un argumento de w.

ii) Los argumentos de $z/_w$ son precisamente los números reales de la forma $\alpha - \beta$, donde α es un argumento de z y β es un argumento de w.

iii) Los argumentos de $\overline{z}$ y los de $1/_z$ son precisamente los números reales de la forma $-\alpha$, donde α es un argumento de z.

Ejemplos 1.60.

i) Si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, entonces los argumentos de x son los números reales $2\,k\,\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Si $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, entonces los argumentos de x son los números reales $-\pi + 2\,k\,\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

iii) Los argumentos de i son los números $\pi/_2 + 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

iv) Los argumentos de $2 + 2\,i$ son de la forma $\pi/_4 + 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Observaciones 1.61.

i) Si $t \in \mathbb{R}$ escribiremos, para abreviar,

$$\exp(it) = e^{it} \;:=\; \cos(t) + i\,\sin(t)\,.$$

Más adelante, cuando estudiemos con detalle la función exponencial compleja, quedará perfectamente justificada esta expresión que, de momento, nos conformamos con tomar como un convenio de notación.

ii) Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y θ es un argumento de z, la representación

$$z = |z|\,e^{i\theta} = |z|\,\big(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)\big)$$

se conoce como *expresión polar* del número z. En estas condiciones, es obvio que

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\,\cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}(z) = |z|\,\sin(\theta)\,.$$

Recíprocamente, si $z = x + i\,y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ se escribe como

$$z = \rho\,e^{i\theta} = \rho\,\big(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)\big)\,, \quad \rho > 0\,,$$

entonces

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta \ \text{ es un argumento de } \ z.$$

Observación 1.62. Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, la notación estándar z^n representa el resultado de multiplicar z por sí mismo n veces, de modo que $z^1 = z$, $z^2 = z \cdot z$, etc. Si $n \in \mathbb{Z}$ y $n < 0$, se define $z^n = {}^1\!/_{z^{-n}}$ para cada $z \neq 0$. Por último, se adopta $z^0 = 1$ para cada $z \neq 0$, lo que concuerda con la propiedad, válida para todos $n, m \in \mathbb{Z}$ con $n \neq -m$, de que $z^{n+m} = z^n z^m$ para todo $z \neq 0$. Con este convenio, dicha propiedad es válida para cualquier par de enteros.

El cálculo de las potencias de exponente entero, que acabamos de introducir, se realiza cómodamente en forma polar, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 1.63 (Fórmula de De Moivre). Si $n \in \mathbb{Z}$ y $z = \rho\big(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)\big) \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, entonces

$$z^n = \rho^n\,\big(\cos(n\,\theta) + i\,\sin(n\,\theta)\big)\,.$$

Dicho de otra forma: si $z = \rho\,e^{i\theta}$, entonces $z^n = \rho^n\,e^{i\,n\theta}$,

Proposición 1.64. Sean $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$. Existen exactamente n números complejos distintos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ tales que

$$w_k{}^n = z\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Estos números reciben el nombre de *raíces n-ésimas de z* y se denotan de forma genérica por $\sqrt[n]{z}$. Fijado θ, un argumento de z, se obtienen de la siguiente forma:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\,\exp\left(i\,\frac{\theta + 2\,\pi\,(k-1)}{n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Observación 1.65. Para finalizar relataremos cómo se traducen algunos de los conceptos expuestos anteriormente al contexto de la geometría de $\mathbb{R}^2$, al identificar el número complejo $x + i\,y$ con el afijo del vector (x, y) en la referencia cartesiana usual.

i) El módulo de un número complejo z es la distancia euclídea de este punto al origen; en general, $|z - w|$ es la distancia entre los puntos z y w. Un argumento de z es el ángulo que forman la semirrecta de los números reales positivos y el radio vector que une el origen con el punto z.

ii) La interpretación geométrica de la suma de números complejos es obvia: el vector asociado al punto $z + w$ es el vector suma de los vectores asociados a z y w, respectivamente.

iii) Respecto al producto de números complejos se observa lo siguiente: si $w \neq 0$ se escribe $w = \rho\,e^{i\theta}$, con $\rho > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, el punto que resulta al multiplicar un número complejo z por w es el afijo del vector que se obtiene al aplicar al vector asociado a z la homotecia de razón ρ y girar el vector resultante respecto del origen un ángulo de amplitud θ en sentido antihorario.

iv) El conjugado del número complejo z es el punto que se obtiene por reflexión de éste respecto del eje OX.

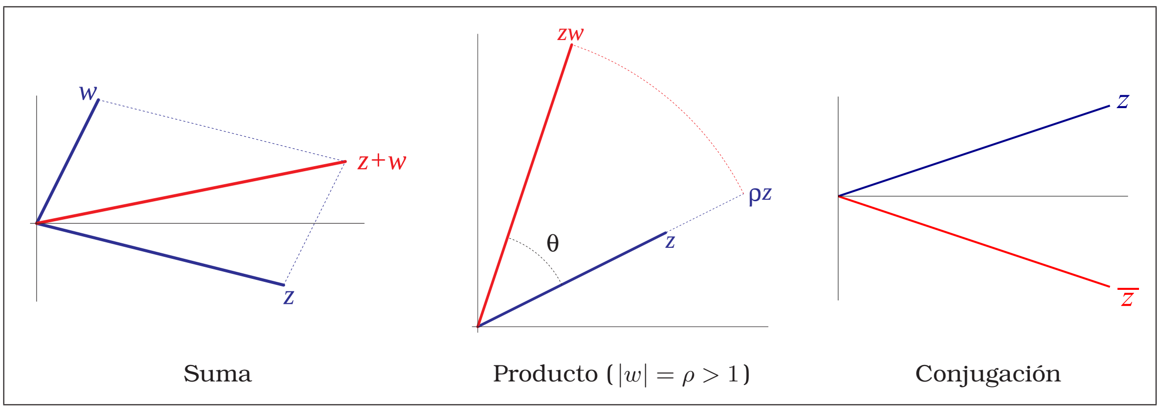


Figura 1.1: Interpretación geométrica de las operaciones en $\mathbb{C}$.

v) Si z es un número complejo no nulo y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, las n raíces n-ésimas de z son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia centrada en el origen y de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

1.5. La esfera de Riemann. El punto del infinito

Las propiedades topológicas de $\mathbb{C}$ (sin entrar en detalles, es un espacio de Hausdorff y localmente compacto) permiten realizar su compactificación mediante la adición de un punto, que se suele llamar el punto del infinito, denotado por ∞. Se consigue así un nuevo espacio topológico compacto $\widehat{\mathbb{C}}$, la llamada *compactificación de Alexandroff* de $\mathbb{C}$, de modo que la topología de subespacio que $\widehat{\mathbb{C}}$ induce en $\mathbb{C}$ coincide con la topología euclídea habitual, mientras que los complementarios de los compactos constituyen un sistema fundamental de entornos del infinito.

Una construcción de esta compactificación que permite además una visualización sencilla de numerosas propiedades y resultados es la proporcionada por la denominada esfera de Riemann, que pasamos a describir.

Definición 1.66. Se llama *esfera de Riemann* al conjunto

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

(la esfera de centro $(0, 0, {}^1\!/_2)$ y radio ${}^1\!/_2$) dotado de la topología inducida desde $\mathbb{R}^3$, es decir, la definida por la distancia euclídea d dada por

$$d\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

S es cerrado y acotado, y por lo tanto compacto.

El “polo norte” N de S es el punto $(0, 0, 1)$. Identificamos el plano complejo $\mathbb{C}$ con el plano horizontal $\{x_3 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, es decir, cada complejo $z = x + iy$ se entiende como el punto $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$, de modo que el “polo sur” de la esfera de Riemann, el punto $(0, 0, 0)$, coincide con origen de $\mathbb{C}$. Se añade a $\mathbb{C}$ un punto, denotado por ∞ y denominado *punto del infinito* (por razones que pronto serán claras), formándose así el *plano completado* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definición 1.67. Se denomina *proyección estereográfica* a la aplicación $\rho\colon S \to \widehat{\mathbb{C}}$ dada por:

i) Si $P = (x_1, x_2, x_3) \in S$ y $P \neq N$, entonces $\rho(P)$ es el resultado de proyectar P sobre $\mathbb{C}$ desde N, es decir, el corte con el plano $x_3 = 0$ de la semirrecta que parte de N y pasa por P;

ii) Se define $\rho(N) = \infty$.

Un sencillo cálculo muestra que

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}, \qquad (x_1, x_2, x_3) \neq N,$$

y que ρ es una biyección de S en $\widehat{\mathbb{C}}$.

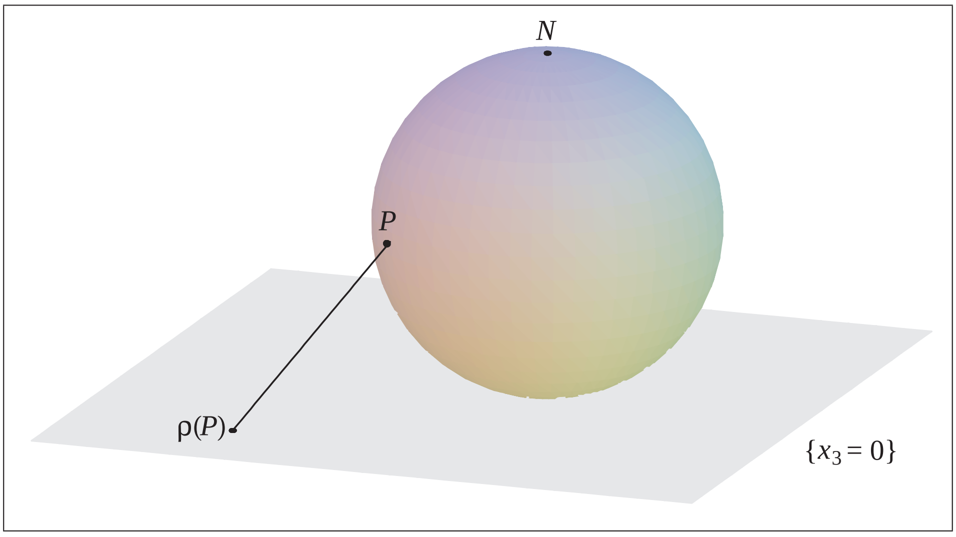


Figura 1.2: Esfera de Riemann y proyección estereográfica

Definición 1.68. Se define sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ la *métrica cordal* δ mediante $\delta(z,w) := d(\rho^{-1}(z), \rho^{-1}(w))$, $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$. En particular, para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\delta(z,w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}; \qquad \delta(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

La propia definición hace a los espacios métricos (S,d) y $(\widehat{\mathbb{C}},\delta)$ isométricos y, por lo tanto, $(\widehat{\mathbb{C}},\delta)$ es un espacio topológico compacto.

Proposición 1.69. Se verifican las siguientes propiedades:

i) La topología usual en $\mathbb{C}$ y la inducida en $\mathbb{C}$ por la métrica cordal coinciden, de modo que $(\widehat{\mathbb{C}},\delta)$, y por lo tanto (S,d), son compactificaciones de $\mathbb{C}$.

ii) Sea $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de puntos de $\mathbb{C}$. Es necesario y suficiente para que $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ converja a ∞ en $\widehat{\mathbb{C}}$ que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

iii) Los abiertos de $\widehat{\mathbb{C}}$ que no contienen a ∞ son precisamente los abiertos habituales de $\mathbb{C}$.

iv) Los abiertos de $\widehat{\mathbb{C}}$ que contienen a ∞ son precisamente la unión de $\{\infty\}$ con un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene un conjunto de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ para $r > 0$ adecuado; equivalentemente, los abiertos de $\widehat{\mathbb{C}}$ que contienen a ∞ son precisamente de la forma $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$, donde K es un compacto de $\mathbb{C}$.

Observaciones 1.70.

i) Existen otras construcciones de “esferas de Riemann” y “proyecciones estereográficas”. Una alternativa frecuente en la literatura consiste en tomar la esfera de radio 1 centrada en $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ e identificar $\mathbb{C}$ con el plano $\{x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ (ver, por ejemplo, [1], [6], [7] o [23]).

ii) De acuerdo con la expresión de la métrica cordal dada en la definición 1.68, la bola (con respecto a δ) centrada en ∞ y de radio $r \in (0,1)$ es

$$\{w \in \widehat{\mathbb{C}} : \delta(w,\infty) < r\} \;=\; \{\infty\} \cup \Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} < r\Big\} \;=\; \{\infty\} \cup \Big\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\Big\}.$$

Se observa entonces que los puntos del plano complejo que están “cerca de ∞” son aquellos de módulo suficientemente grande. Esto concuerda con nuestra noción intuitiva del infinito y justifica la segunda propiedad mencionada en la proposición previa.

iii) En un mismo sentido, si z_0 es punto de acumulación del dominio de una función compleja f queda plenamente justificado utilizar la notación $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ para indicar que se verifica que $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$. Análogamente, para una función definida en un conjunto no acotado de $\mathbb{C}$ la notación $\lim_{z\to\infty} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$ indica que se verifica que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \ell$, y la notación $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ significa que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty$.

Definición 1.71. Se dice que un subconjunto abierto y conexo U de $\widehat{\mathbb{C}}$ es *simplemente conexo* si $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$, su complementario en el plano completado, también es conexo.

Se deduce inmediatamente la siguiente proposición.

Proposición 1.72. Un subconjunto abierto, conexo y acotado U de $\mathbb{C}$ es simplemente conexo si, y sólo si, $\mathbb{C} \setminus U$, su complementario en $\mathbb{C}$, también es conexo.

Observaciones 1.73.

i) Ejemplos sencillos y ya conocidos de abiertos simplemente conexos son los dominios de Jordan, es decir, los conjuntos abiertos, conexos y acotados cuya frontera es el soporte de una curva paramétrica cerrada, simple y de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos.

ii) La idea intuitiva de simplemente conexo es la de un abierto que no tiene ‘agujeros’. Esta propiedad se puede precisar de la siguiente forma:

“Un abierto conexo U (acotado o no) es simplemente conexo si, y sólo si, para cada curva continua, cerrada y simple $\Gamma \subset U$, que sea el borde de un dominio de Jordan D, se tiene que también $D \subset U$”.

iii) Insistiendo en lo anterior, nótese que la proposición 1.72 se refiere a abiertos acotados. Para ilustrar la pertinencia inexcusable de esta restricción consideremos $U_1 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ó $U_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,1)$, que son abiertos, y en ambos casos su complementario en $\mathbb{C}$ es conexo (un punto o un disco), pero $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U_1 = \{0, \infty\}$ no es conexo.

iv) La noción de conexión simple que hemos dado es suficiente para la teoría que expondremos, pero en realidad esta propiedad se puede enunciar en todo espacio topológico (en particular en cualquier subconjunto de $\mathbb{C}$, sea abierto o no) a partir del concepto de *homotopía*. En el caso de abiertos del plano se lee así:

"Un abierto conexo U de $\mathbb{C}$ es simplemente conexo si, y sólo si, su grupo fundamental es el trivial (cada curva continua y cerrada con soporte en U se puede transformar homotópicamente en un punto dentro de U)".

La *transformación continua* u *homotopía* de una curva γ en un punto z_0 consiste en una aplicación continua $H\colon [0,1] \times [0,1] \to U$ tal que $H(s,0) = H(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$ y

$$H(0,t) = \gamma(t) \text{ para todo } t \in [0,1] \qquad \text{y} \qquad H(1,t) = z_0 \text{ para cada } t \in [0,1].$$

Dicho de una manera más visual, si se denota $\gamma_s(t) = H(s,t)$, la familia $\{\gamma_s : 0 \le s \le 1\}$ de curvas continuas, cerradas y con soporte contenido en U "varía de forma continua" cuando s recorre el intervalo $[0,1]$ desde $\gamma_0 = \gamma$ hasta γ_1, que es una curva constante, igual a z_0.

Un par de ejemplos para acabar:

1. Los abiertos U_1 y U_2 contemplados en el apartado anterior se *retractan* mediante la aplicación continua $z \in U_i \mapsto z/|z|$ en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$. Este último espacio topológico no es simplemente conexo (su grupo fundamental es $\mathbb{Z}$) y tampoco pueden serlo U_1 ni U_2.
2. Es fácil comprobar que todo conjunto estrellado es simplemente conexo; concretamente, si E es estrellado respecto del punto $z_0 \in E$ y $\gamma\colon [0,1] \to E$ es una curva continua y cerrada, entonces la aplicación $H\colon [0,1] \times [0,1] \to E$ dada por

$$H(s,t) = s\, z_0 + (1-s)\, \gamma(t)$$

es una homotopía que transforma la curva γ en la curva constante z_0.

Ejercicios

1.1 Sean z_1, z_2 números complejos. Demostrar:

i) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2)$.

ii) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

iii) $z_1 \overline{z}_2 = \dfrac{1}{4}\big(|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2\big) + \dfrac{i}{4}\big(|z_1 + i\, z_2|^2 - |z_1 - i\, z_2|^2\big)$.

iv) $|1 - \overline{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$.

v) Si $|z_1| = 1$ entonces $|1 - \overline{z}_1 z_2| = |z_1 - z_2|$.

1.2 Sea $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$. Probar que:

i) $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$.

ii) Si $a, b \in \mathbb{C}$, entonces $|a + b\, z| = |a\, \overline{z} + b|$.

1.3 Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

i) $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = |z-b|\}$; $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$.

ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| + |z+2| = 8\}$.

iii) $\left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(1/z) < 1/2\right\}$.

iv) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) > 0\}$.

v) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) > \alpha\}$; $\alpha > 0$.

vi) $\{z \in \mathbb{C} : |1-z|^2 \le 1 - |z|^2\}$.

vii) $\{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}(z) \le 1\}$.

viii) $\{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Im}(z) = 2\}$.

1.4 Demostrar que para cada $z \in \mathbb{C}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|\operatorname{Im}(z^n)| \leq n\,|\operatorname{Im}(z)|\,|z|^{n-1}\,.$$

1.5 Sean $z, w \in \mathbb{C}$ ambos no nulos. Demostrar que $z\,\overline{w}$ es real si, y sólo si, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $z = \mu\, w$.

1.6 Sea $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Determinar los números complejos z tales que

$$\frac{z+a}{z-a}$$

es real (resp. imaginario puro).

1.7 Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $|a| = |b| = 1$ y $a \neq b$. Probar que para cada $z \in \mathbb{C}$ el número

$$x = \frac{\overline{z}\,a - z\,b}{a-b}$$

es real.

1.8 Calcular:

i) Las raíces cuadradas de $-4\,,\ 2\,i\,,\ 1+i$ y $\sqrt{3} - i\,.$

ii) Las raíces cúbicas de $8\,,\ -1\,,\ -i$ y $1 - i\,.$

iii) Las raíces cuartas de $1 + \sqrt{3}\,i\,,\ -9\,i$ y ${(1+i)}/{(1-i)}\,.$

1.9 Resolver las ecuaciones:

i) $z^5 + 16\,z = 0\,.$

ii) $z^4 + 2\,z^2 + 1 = 0\,.$

iii) $z^{n-1} = \overline{z}\,, \quad n > 2\,.$

1.10 Hallar todos los complejos cuyo cubo coincide con alguna de sus raíces cúbicas.

1.11 Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1, \\ z_1\, z_2\, z_3 = 1, \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1. \end{cases}$$

1.12 Determinar las raíces de la ecuación

$$(z+1)^{2n} + (1-z)^{2n} = 0.$$

1.13 Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de la ecuación

$$(z+1)^n + z^n = 0\,,$$

entonces $\operatorname{Re}(z) = -{1}/{2}$.

1.14 Sean z_1, z_2 las raíces de la ecuación

$$z^2 - (6+8i)z + 1 + 30\,i = 0\,.$$

i) Hallar z_1 y z_2.

ii) Determinar $z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ de manera que sean vértices opuestos de un cuadrado cuyos otros dos vértices son z_1 y z_2.

1.15 Sea θ un número real. Probar que

$$\cos(3\,\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) \qquad \text{y} \qquad \sin(3\,\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)\,.$$

1.16 Expresar $\sin(5\theta)$ y $\cos(5\theta)$ en función de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$.

1.17 Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar la igualdad

$$\left(1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \ldots + e^{in\theta}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{(n+1)\,\theta}{2}\right)e^{in\theta/2}\,.$$

1.18 Sean $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, y ω una raíz n-ésima de la unidad distinta de 1.

i) Probar que $1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0\,.$

ii) Deducir del apartado anterior el valor de la suma

$$\cos\left(\frac{2\,\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{2\,n\pi}{2n+1}\right).$$

iii) Calcular $1 + 2\,\omega + 3\,\omega^2 + \ldots + n\,\omega^{n-1}\,.$

1.19 Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_j| = 1$, $j = 1,2,3$. Demostrar que estos puntos son los vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1 + z_2 + z_3 = 0\,.$

Sugerencia: Probar que los tres números son las raíces cúbicas de un número complejo de módulo 1. Obsérvese que si z_1, z_2, z_3 son las raíces del polinomio $z^3 - a\,z^2 + b\,z - c$ se tiene que $a = z_1 + z_2 + z_3$, $b = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$ y $c = z_1z_2z_3\,.$

1.20 Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_j| = 1$, $j = 1,2,3,4$. Demostrar que si estos puntos son los vértices de un cuadrado, entonces $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. ¿Es cierto el recíproco?

1.21 Si los números complejos z_1, z_2,..., z_n son los vértices consecutivos de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unidad, demostrar que

$$\prod_{k=2}^{n}\left|z_1 - z_k\right| = n\,.$$

1.22 Resolver la ecuación

$$\prod_{m=1}^{n}\big(\cos(m\,\theta) + i\,\sin(m\,\theta)\big) = 1\,.$$

1.23 Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$, n números complejos no nulos situados a un mismo lado de una recta que pasa por el origen. Demostrar que:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} \neq 0\,.$$

1.24 Estudiar la convergencia de las sucesiones de números complejos de término general:

i) $a_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i\right)^n$ *iii*) $a_n = e^{i\,n\,\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ *v*) $a_n = \left(\frac{-i}{n}\right)^n$

ii) $a_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)^n$ *iv*) $a_n = \dfrac{2 + (n+1)\,i}{n}$ *vi*) $a_n = \dfrac{n^2 + i\,n + 1}{i\,n^2 + n + i}\,.$

1.25 Comprobar la convergencia absoluta de las series de términos complejos siguientes:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}$, $|z| \neq 0.$ *iii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$, $|z| > 1.$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$, $|z| \leq 1.$ *iv*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}.$

1.26 Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales que converge monótonamente hacia 0 y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tal que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ está acotada. Probar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente (*criterio de Dirichlet*). Deducir que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log(n)}$ converge, pero no converge absolutamente.

1.27 Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos con partes reales no negativas. Se supone que las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$ son convergentes. Probar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ es también convergente, pero $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$, en general, no lo es.

1.28 Sea z un número complejo que no es un entero negativo. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z+n}$$

es convergente.

1.29 Sean $n, m \in \mathbb{Z}$. Calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, e^{imx}\, dx$$

según los valores de n y m y deducir el valor de

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x) \sin(m\,x)\, dx\,.$$

1.30 Sea n un número natural arbitrario. Demostrar que el polinomio

$$P_n(z) = z^n - 1$$

puede descomponerse en un producto de polinomios de primer y segundo grado, todos ellos con coeficientes reales.

1.31 Sea S_α un sector circular con vértice en 1, de amplitud $\alpha < \pi$ e interior al disco $B(0,1)$; explícitamente:

$$S_\alpha = \left\{ z \in B(0,1) : \ z = 1 + r\, e^{i\theta}\,,\ r > 0\,,\ \pi - \frac{\alpha}{2} < \theta < \pi + \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Probar que si $0 < \varrho < 2\cos(\alpha/2)$ existe una constante positiva K tal que

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq K \qquad \text{para todo } \ z \in S_\alpha \cap B(1,\varrho)\,.$$

¿Es posible establecer una acotación similar en $B(0,1) \cap B(1,\varrho)$?

1.32 Probar que para cualesquiera $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$1 \leq |1+z_1| + |z_1+z_2| + |z_2+z_3| + |z_3|.$$

1.33 Demostrar que para todos $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1+\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1+|z_k|}.$$

1.34 Demostrar que las isometrías de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ son las funciones de la forma

$$f(z) = u\,z + a \qquad \text{o} \qquad f(z) = u\,\overline{z} + a\,,$$

con $u, a \in \mathbb{C}\,,\ |u| = 1\,.$

1.35 Se considera el polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n\,, \qquad a_n \neq 0\,.$$

Demostrar que existe un número real $R > 0$ tal que para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq R$ se tiene que

$$\frac{1}{2}\,|a_n|\,|z|^n \leq |P(z)| \leq 2\,|a_n|\,|z|^n.$$

1.36 Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ números complejos de módulo menor o igual que 1. Probar que el polinomio

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + 1$$

tiene todas sus raíces en la corona $\{z \in \mathbb{C} \colon {}^1\!/_2 < |z| < 2\}$.

1.37 Sean P un polinomio no constante y $a \in \mathbb{C}$. Se define el conjunto

$$E_a = \{z \in \mathbb{C} : P(z) = a\}.$$

Demostrar que el número de componentes conexas del conjunto E_a no excede al grado de P.

1.38 Se considera el polinomio

$$P(z) = z^n - p_1 z^{n-1} - p_2 z^{n-2} - \ldots - p_{n-1} z - p_n,$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son números reales no negativos tales que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n > 0$. Demostrar que en el intervalo $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ el polinomio P tiene exactamente un cero.

1.39 Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números complejos no todos nulos y sea

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n.$$

Probar que el módulo de cualquier cero de P es menor o igual que el único cero real positivo del polinomio

$$Q(z) = z^n - |a_1| z^{n-1} - \ldots - |a_{n-1}| z - |a_n|.$$

1.40 Sea n un número natural. Probar que la ecuación

$$n\, z^n = 1 + z + \ldots + z^{n-1} + z^n$$

tiene todas sus raíces en el disco cerrado unidad.

1.41 Para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen

$$A_n = \sum_{p \in \mathbb{Z},\, 0 \leq 2p \leq n} (-1)^p \binom{n}{2p} \qquad \text{y} \qquad B_n = \sum_{p \in \mathbb{Z},\, 0 \leq 2p+1 \leq n} (-1)^p \binom{n}{2p+1}.$$

Demostrar que $A_n^2 + B_n^2 = 2^n$.

1.42 Sean D un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f \colon D \to \mathbb{C}$ una función continua en D y tal que

$$|f^2(z) - 1| < 1 \qquad \text{para todo } z \in D.$$

Demostrar que, o bien $|f(z) - 1| < 1$ para todo $z \in D$, o bien $|f(z) + 1| < 1$ para todo $z \in D$.

1.43 Sea $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\mathbb{C}$ y con las siguientes propiedades:

1. $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$.
2. $f(\mathbb{C})$ es un conjunto abierto.

Probar que f es suprayectiva, es decir, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

1.44 Sea $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\mathbb{C}$ y tal que

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0\,.$$

Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{C}$.

1.45 Sean K un conjunto compacto de $\mathbb{C}$ y $f\colon K \to \mathbb{C}$ una función continua y que no se anula en K. Demostrar que existe $r > 0$ tal que

$$f(K) \cap D(0,r) = \emptyset.$$

1.46 Demostrar que si $b \in \mathbb{R}$ es un número irracional, entonces

$$e^{2\pi nbi} \neq e^{2\pi mbi} \qquad \text{para todos } n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq m.$$

1.47 Demostrar que no existe una función $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua y tal que

$$f^2(z) = z \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

1.48 Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de números reales. Demostrar que si las sucesiones $\{e^{i\,x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{e^{i\,x_n\sqrt{2}}\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es convergente.

1.49 Sean S la esfera de Riemann dada por la definición 1.66 y $\rho\colon S \to \widehat{\mathbb{C}}$ la proyección estereográfica (ver definición 1.67).

i) Sea P un punto de S, distino del polo norte, con longitud θ y latitud ϕ, medidas en radianes, de oeste a este y desde el ecuador respectivamente, según los convenios habituales de la cartografía (latitud sur es negativa; norte positiva). Demostrar que

$$\rho(P) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) e^{i\,\theta}.$$

ii) Sean P y Q puntos de la esfera de Riemann, ambos distintos de los dos polos, y sean $z = \rho(P)$ y $w = \rho(Q)$ sus respectivas proyecciones estereográficas. Probar que P y Q son antipodales si, y sólo si, $z\,\overline{w} = -1$.

1.50 Sean S la esfera de Riemann, $\boldsymbol{p}_N = (0,0,1)$ su polo norte, $\boldsymbol{p}_S = (0,0,0)$ su polo sur y $\rho\colon S \to \widehat{\mathbb{C}}$ la proyección estereográfica. Demostrar que, dada una circunferencia $\mathcal{C}$ sobre S, se tiene que:

i) Si $\mathcal{C}$ es un meridiano, $\rho(\mathcal{C} - \{\boldsymbol{p}_N\})$ es una recta en $\mathbb{C}$ que pasa por el origen.

ii) Si $\boldsymbol{p}_N \in \mathcal{C}$ y $\boldsymbol{p}_S \notin \mathcal{C}$, entonces $\rho(\mathcal{C} - \{\boldsymbol{p}_N\})$ es una recta que no pasa por el origen.

iii) Si $\boldsymbol{p}_N \notin \mathcal{C}$ y $\boldsymbol{p}_S \in \mathcal{C}$, $\rho(\mathcal{C})$ es una circunferencia que pasa por el origen.

iv) Si $\boldsymbol{p}_N \notin \mathcal{C}$ y $\boldsymbol{p}_S \notin \mathcal{C}$, $\rho(\mathcal{C})$ es una circunferencia que no pasa por el origen.

Tema 2

Derivación compleja. Holomorfía

En este capítulo se prosigue con el estudio de las funciones complejas de variable compleja, atendiendo ahora al concepto de derivabilidad y sus propiedades. Como se ha indicado, desde el punto de vista topológico no hay diferencia entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$. Sin embargo, la estructura algebraica adicional de $\mathbb{C}$, adquirida con las operaciones de suma y producto, provocará cambios sustanciales en los resultados clásicos de derivabilidad o diferenciabilidad, tanto si se compara con el caso de funciones reales de una variable real, con las que comparte una similitud algebraica, como si se hace con el caso de las funciones vectoriales de dos variables, con las que comparte una similitud topológica. Esas diferencias se harán patentes no sólo en este capítulo sino también en los siguientes.

2.1. Derivabilidad de las funciones complejas de variable compleja

Para funciones de variable compleja el concepto de derivabilidad se define exactamente igual que en el caso de funciones de una variable real, mediante límites de cocientes incrementales, y en principio se obtienen resultados análogos. Ahora bien, la existencia del límite de una función en un punto de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ implica la existencia de límites en todas las direcciones; esto impone una relación entre las partes reales e imaginarias de una función derivable que, como veremos más adelante, proporciona una serie de sorprendentes resultados no válidos en el caso de funciones de variable real.

Definición 2.1. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de U. Se dice que f es *derivable* en z_0 si existe el límite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}\,. \tag{2.1}$$

El límite anterior se denomina *derivada* de f en z_0 y se denota $f'(z_0)$.

Se dice que la función f es *holomorfa* en el punto z_0 si existe un disco $B(z_0,r) \subset U$ tal que f es derivable en cada punto de $B(z_0,r)$. Se dice que f es *holomorfa en* U si es holomorfa en cada punto de U, es decir, si es derivable en cada punto de U.

Definición 2.2. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de U. Se dice que f es *diferenciable* en z_0 si existen una constante $d \in \mathbb{C}$ y una función $\varepsilon\colon U \to \mathbb{C}$ con $\lim\limits_{z\to z_0} \varepsilon(z) = 0 = \varepsilon(z_0)$, tales que

$$f(z)-f(z_0) = d\,(z-z_0) + \varepsilon(z)\,|z-z_0| \quad \text{para todo } \ z \in U\,. \tag{2.2}$$

Proposición 2.3. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de U. Entonces f es derivable en z_0 si, y sólo si, es diferenciable en z_0. En este caso, la constante d de la definición anterior es $f'(z_0)$.

Observaciones 2.4.

i) Al igual que en el caso de una variable real, los conceptos equivalentes de derivabilidad y diferenciabilidad tienen la siguiente lectura: si f es derivable en z_0, entonces la función $f(z)-f(z_0)$ admite, localmente, una aproximación lineal en el punto z_0. Ahora bien, esta linealidad se refiere a la estructura vectorial compleja. Véase que $w \in \mathbb{C} \mapsto f'(z_0)\,w$ es una aplicación lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Pero también se tiene una estructura subyacente de espacio vectorial real (en general, todo espacio vectorial complejo de dimensión n tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión $2n$) y podemos contemplar la linealidad en este contexto. Cuando sea necesario distinguir nos referiremos a la $\mathbb{R}$-*linealidad* o *linealidad en el sentido real*, e igualmente con la $\mathbb{R}$-*diferenciabilidad*.

ii) En la línea del comentario anterior, si pensamos en $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, la base cartesiana usual de $\mathbb{R}^2$, partiendo de la expresión

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z)}{h}$$

y tomando h real (incrementos en la dirección de $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$, si se prefiere) y escribiendo como es habitual $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, se deduce que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i\, \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Análogamente, para $h = i\,k$ imaginario puro (esto es, la derivada direccional según el vector $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$) se deduce que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{k \to 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + k) - u(x_0, y_0)}{i\,k} + i\, \frac{v(x_0, y_0 + k) - v(x_0, y_0)}{i\,k} \right) \\ &= -i\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

En esta disquisición radica la prueba del siguiente resultado.

Teorema 2.5 (Condiciones de Cauchy-Riemann). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f = u + i\,v$ una función compleja definida en U. Es condición necesaria y suficiente para que f sea derivable en un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ de U que las funciones u y v sean $\mathbb{R}$-diferenciables en el punto (x_0, y_0) y verifiquen las *condiciones de Cauchy-Riemann*:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)} \tag{2.3}$$

Corolario 2.6. Sea $f = u + i\,v$ una función compleja en un abierto U tal que u y v son de clase $\mathscr{C}^1$ (en el sentido real) en U y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann (2.3) en cada punto de U. Entonces la función f es holomorfa en U.

Observación 2.7. Con la notación anterior, si se definen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\, \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\,,$$

las condiciones de Cauchy-Riemann se expresan de forma equivalente como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\,,$$

y si f es derivable en el punto z_0 se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - i\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann se pueden expresar utilizando sistemas de coordenadas diferentes, y en ocasiones es útil hacerlo. Así, utilizando las coordenadas polares las condiciones de Cauchy-Riemann se expresan como:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial v}{\partial \theta}\,; \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\, \frac{\partial u}{\partial \theta}\,.$$

y si $r\,e^{i\,\alpha}$ es la expresión polar de z, entonces

$$f'(z) = f'(r\,e^{i\,\alpha}) \;=\; e^{-i\,\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}(r, \alpha) + i\, \frac{\partial v}{\partial \rho}(r, \alpha) \right)\,.$$

Ejemplos 2.8.

i) Si f es una función constante ($f(z) = c \in \mathbb{C}$ para todo z), entonces f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

ii) Si $\mathrm{Id}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ denota la *función identidad* ($\mathrm{Id}(z) = z$ para todo z), Id es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y $\mathrm{Id}'(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

iii) Más general que lo anterior: dado $a \in \mathbb{C}$, si $\lambda_a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la función lineal $\lambda_a(z) = a\,z$, entonces λ_a es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y $\lambda_a'(z) = a$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

iv) Sea $f(z) = \overline{z}$. Como $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$, entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$ pero $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$ en todo punto, lo que implica que f no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

Es evidente que si $L\,z = a\,z$ es una aplicación lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, entonces L es uniformemente continua en $\mathbb{C}$. Como en el caso de espacios euclídeos reales, la aproximación lineal que proporciona la diferencial implica la continuidad. Explícitamente:

Proposición 2.9. Sea f una función compleja definida en un abierto U de $\mathbb{C}$. Si f es derivable en el punto $z_0 \in U$, entonces f es continua en z_0. Como consecuencia, si f es holomorfa en U, entonces f es continua en U.

Recordemos que la continuidad de una función en un punto implica la acotación de la función en un entorno de ese punto. Esta propiedad es fundamental a la hora de establecer la derivabilidad de productos, lo mismo que en el caso real. A continuación se presentan las reglas básicas de derivación, que no ofrecen ninguna novedad respecto al caso de funciones de variable real; de hecho, la prueba es exactamente la misma con las mínimas adaptaciones de cambiar valor absoluto por módulo, intervalos por discos centrados en el punto, etc.

Propiedades 2.10. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, y f, g dos funciones complejas definidas en U.

i) Si f y g son derivables en z_0 y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha\, f + \beta\, g$ es derivable en z_0, y además

$$(\alpha\, f + \beta\, g)'(z_0) = \alpha\, f'(z_0) + \beta\, g'(z_0)\,.$$

ii) Si f y g son derivables en z_0, entonces $f\,g$ es derivable en z_0, y además

$$(f\,g)'(z_0) = f'(z_0)\,g(z_0) + f(z_0)\,g'(z_0)\,.$$

iii) Si f y g son derivables en z_0 y $g(z_0) \neq 0$, entonces f/g (que está definida en un entorno adecuado de z_0) es derivable en z_0, y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\,g(z_0) - f(z_0)\,g'(z_0)}{g(z_0)^2}\,.$$

También la regla de la cadena se enuncia exactamente igual y se prueba de forma similar que en el caso de funciones reales de variable real.

Teorema 2.11 (Derivación de la función compuesta). Sean U y V abiertos de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to V$ y $g\colon V \to \mathbb{C}$ funciones tales que:

1. f es derivable en $z_0 \in U$.
2. g es derivable en $w_0 = f(z_0) \in V$.

Entonces $g \circ f$ es derivable en z_0. Además, se verifica la denominada *Regla de la cadena*:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\,f'(z_0) = g'(w_0)\,f'(z_0)\,.$$

Observaciones 2.12.

i) Con la notación del teorema anterior, y como consecuencia suya, si f es holomorfa en U y g es holomorfa en V, entonces $g \circ f$ es holomorfa en U.

ii) En particular, si f es biyectiva y $g = f^{-1}$, según la fórmula del ejemplo 2.8.ii, ha de ser $g'(f(z))\,f'(z) = 1$. Desde el punto de vista teórico, el problema reside en determinar condiciones para garantizar que existe la inversa y que es también holomorfa. Cerramos esta sección con el estudio del problema citado.

2.1.1. Derivabilidad de las funciones inversas

Comencemos observando que si la función $f = u + i\,v$ es holomorfa en el abierto U de $\mathbb{C}$, la condición de diferenciabilidad en un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in U$ se escribe

$$f(z_0 + h + i\,k) - f(z_0) = f'(z_0)\,(h + i\,k) + \varepsilon(z_0 + h + i\,k)\,|h + i\,k|\,,$$

siendo $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(z_0 + h + ik) = 0$. Ahora bien, la parte lineal se expresa de forma equivalente en términos de la diferencial (en el sentido real) de la aplicación $\tilde{f} = (u, v)\colon U \to \mathbb{R}^2$ como

$$\begin{aligned} f'(z_0)\,(h + i\,k) &= \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Big)(h + i\,k) \\ &\simeq\ (d\tilde{f})_{(x_0,y_0)}(h, k) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann, la matriz jacobiana de la aplicación $\tilde{f}$ en el punto (x_0, y_0) es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

que resulta ser invertible si, y sólo si, su jacobiano es no nulo; éste vale

$$\mathcal{J}\tilde{f}(x_0, y_0) = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Big)^2 \;=\; \big|f'(z_0)\big|^2\,.$$

La relación anterior entre el jacobiano de la aplicación $\tilde{f}$ y el módulo de f' permite obtener el siguiente resultado, que se basa en el homónimo para funciones de varias variables reales.

Teorema 2.13 (de la función inversa). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U tal que su derivada f' es continua en U. Entonces, si $z_0 \in U$ y $f'(z_0) \neq 0$, existen un entorno abierto V de z_0 y un entorno abierto W de $f(z_0)$, tales que:

i) $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in V$.

ii) f aplica biyectivamente V en W.

iii) La función inversa $f^{-1}\colon W \to V$ es holomorfa en W y su derivada viene dada por

$$(f^{-1})'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{para cada } z \in V,$$

o lo que es lo mismo,

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(w)\big)} \quad \text{para cada } w \in W.$$

Observaciones 2.14.

i) Al igual que sucede en el caso real, el teorema anterior tiene carácter local; aunque una función holomorfa tenga derivada continua y distinta de 0 en todo punto no se puede garantizar que sea globalmente inyectiva. Un ejemplo sencillo se presenta con la función exponencial (véase su tratamiento desde la definición 2.16 hasta la proposición 2.24), que es localmente inyectiva (esto es, inyectiva en un entorno adecuado de cada punto) y periódica de periodo $2\pi i$, lo que impide la inyectividad global.

ii) La hipótesis de continuidad de la derivada es necesaria para la aplicación del teorema de las funciones inversas en $\mathbb{R}^2$. Como veremos más adelante, esta hipótesis es redundante, pues resulta que si $f = u + i\,v$ es holomorfa en el abierto U, entonces *¡las funciones reales u y v son de clase $\mathscr{C}^\infty$ en U!*

iii) El teorema anterior permitirá deducir la holomorfía de las inversas de las funciones elementales, tales como ramas del logaritmo, arcos de las funciones trigonométricas, etc., algunas de las cuales presentaremos seguidamente.

2.2. Funciones elementales

La primera clase de funciones elementales, cuya holomorfía se deduce de las propiedades algebraicas de la derivación 2.10, consiste en las funciones racionales. Nótese la similitud con el caso real, pero ¡atención!, mientras que existen polinomios P no constantes y sin raíces en $\mathbb{R}$, lo que permite definir ${}^{1}\!/_{P}$ en toda la recta, no sucede lo mismo en $\mathbb{C}$ (que es algebraicamente cerrado), véase: $R(x) = {}^{1}\!/_{(1+x^2)}$ está bien definida en todo punto de $\mathbb{R}$, pero $R(z) = {}^{1}\!/_{(1+z^2)}$ no está definida en todo $\mathbb{C}$.

2.2.1. Funciones polinómicas y racionales

Proposición 2.15.

i) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la función $p_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $p_n(z) = z^n$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y ${p_n}'(z) = n\, z^{n-1}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

ii) Si P es un polinomio con coeficientes complejos en la variable z,

$$P(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0\,,$$

entonces la función $z \mapsto P(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y

$$P'(z) = n\, a_n\, z^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, z^{n-2} + \ldots + a_1\,.$$

iii) Si P y Q son polinomios con coeficientes complejos en la variable z, puesto que Q tiene un número finito de raíces $r_1, r_2, \ldots, r_m$, la función *racional* R dada por $R(z) = {}^{P(z)}\!/_{Q(z)}$ está bien definida en el abierto $U = \mathbb{C} \setminus \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ y es holomorfa en él; su derivada es a su vez una función racional,

$$R'(z) = \frac{P'(z)\, Q(z) - P(z)\, Q'(z)}{Q(z)^2} \quad \text{para todo } z \in U.$$

Las funciones que presentamos a continuación pueden definirse haciendo uso sólo de la aritmética y la completitud del espacio métrico $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, a partir de sus desarrollos en serie de potencias; volveremos a este punto en el siguiente tema, cuando tratemos la teoría de funciones analíticas. No obstante, es costumbre (casi todos los textos de variable compleja así lo hacen) dar la definición de la exponencial compleja a partir de las funciones exponencial y trigonométricas de variable real, e introducir las funciones logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas de variable compleja a partir de aquella. Hacerlo así tiene la ventaja de disponer pronto de una amplia gama de ejemplos prácticos, además de las fracciones racionales.

2.2.2. Función exponencial

Definición 2.16. Sea $z = x + i\, y \in \mathbb{C}$ ($x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$). Se define la *exponencial de* z, denotada por $\exp(z)$, como

$$\exp(z) := e^x \left(\cos(y) + i\, \sin(y)\right).$$

Propiedades 2.17.

i) Si $z \in \mathbb{R}$ entonces $\exp(z) = e^z$.

ii) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

iii) $\mathrm{Im}(z)$ es un argumento de $\exp(z)$ y $e^{\mathrm{Re}(z)} = |\exp(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

iv) $\exp(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

v) Si $t \in \mathbb{R}$ entonces $\exp(it) = \cos(t) + i\, \sin(t)$.

vi) $\exp(z) = 1$ si, y sólo si, $z = 2\, k\, \pi\, i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

vii) $\exp(z + w) = \exp(z)\, \exp(w)$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$.

viii) $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

ix) $\exp(z) = \exp(w)$ si, y sólo si, $z = w + 2\, k\, \pi\, i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

x) Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y θ es un argumento de z, entonces $z = |z|\, \exp(i\, \theta)$.

Observaciones 2.18.

i) Debido a la propiedad 2.17.i es habitual representar, también cuando $z \notin \mathbb{R}$, $\exp(z) = e^z$.

ii) Es inmediato comprobar que la función exponencial verifica las condiciones de Cauchy-Riemann en todo punto del plano, pues $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$, y

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,.$$

El siguiente resultado es ahora trivial.

Proposición 2.19. La función exponencial es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y se tiene que

$$\exp'(z) = \exp(z) \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

2.2.3. Logaritmos

En el contexto de funciones reales de variable real, es bien conocido que $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ es biyectiva y su inversa es el logaritmo neperiano, $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. No ocurre lo mismo en el caso complejo, ya que la función exponencial $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, como muestra la propiedad 2.17.ix, es periódica y por tanto no inyectiva; sin embargo, su restricción a ciertos dominios sí es inyectiva, lo que permite la construcción de inversas, denominadas “ramas del logaritmo”.

Notación: Dado $c \in \mathbb{R}$ denotaremos por B_c la banda

$$B_c = \{z \in \mathbb{C} : c \leq \mathrm{Im}(z) < c + 2\,\pi\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y < c + 2\,\pi\}.$$

Nótese que si $c \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe en el intervalo $[c, c+2\,\pi)$ un único argumento de z. A partir de aquí no es difícil probar el siguiente resultado.

Proposición 2.20. Para cada $c \in \mathbb{R}$, la aplicación $\exp(z)$ es una biyección (es decir, es inyectiva y suprayectiva) de B_c en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definición 2.21. La aplicación inversa de $\exp\colon B_c \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se denota, de forma genérica, por $\log\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to B_c$ y se denomina *rama* o *determinación del logaritmo con rango* B_c; cuando $c = -\pi$ recibe el nombre particular de *rama principal del logaritmo*.

Observación 2.22. Un sencillo cálculo muestra que si $c \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces la determinación del logaritmo con rango B_c es

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\ \arg(z),$$

donde $\arg(z)$ es el único argumento de z que pertenece al intervalo $[c, c + 2\,\pi)$. En particular, si se toma la rama principal del logaritmo, resulta que

$$\log(x) = \ln(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, donde $\ln$ denota al logaritmo natural o neperiano.

Observación 2.23. Puesto que la derivada de la función exponencial es ella misma, y nunca se anula, el teorema de la función inversa garantiza que es localmente invertible en un entorno de cada punto $z_0 \in \mathbb{C}$, pero podemos decir más: fijado $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < \mathrm{Im}(z_0) < c + 2\,\pi$, el abierto

$$V_c = \overset{\circ}{B_c} = \{z \in \mathbb{C} : c < \mathrm{Im}(z) < c + 2\,\pi\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < c + 2\,\pi\}$$

contiene a z_0 y $\exp$ es una biyección entre V_c y el abierto

$$W_c = \mathbb{C} \setminus \{r\,e^{i\,c} : r \in \mathbb{R}\,,\, r \geq 0\}\,, \tag{2.4}$$

cuya inversa es la correspondiente rama del logaritmo. El teorema de la función inversa proporciona el siguiente resultado.

Proposición 2.24. Para cada $c \in \mathbb{R}$, la rama del logaritmo correspondiente es una función holomorfa en W_c, y su derivada es

$$\log'(w) = \frac{1}{\exp'\big(\log(w)\big)} = \frac{1}{\exp\big(\log(w)\big)} = \frac{1}{w}\,, \quad w \in W_c\,.$$

2.2.4. Potencias

Definición 2.25. Sea z un número complejo, $z \neq 0$. Fijada una rama del logaritmo con rango B_c, se define para $w \in \mathbb{C}$ la *potencia* de base z y exponente w por

$$z^w := \exp\big(w \log(z)\big) .$$

Observación 2.26. En ocasiones, no se especifica la rama del logaritmo, entendiéndose que la expresión z^w denota todos los valores posibles de las potencias en las distintas determinaciones. Por ejemplo:

En la determinación principal, $\log(i) = \pi\, {}^{i}\!/_{2}$, luego

$$i^i = \exp\left(i\, \frac{\pi}{2}\, i\right) = e^{-\pi/2} .$$

En general, los valores en las distintas ramas viene dado por

$$i^i = \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2}\, i + 2\,k\,\pi\, i\right)\right) = e^{-\pi/2 - 2\,k\,\pi}\,, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Las potencias z^w, lo mismo que $\log(z)$, son casos particulares de las denominadas *funciones multivaluadas* o *multiformes*. Sólo a título informativo, mencionaremos que las *superficies de Riemann* son objetos topológicos (variedades analíticas) dónde se definen, al estilo usual, de forma unívoca, las funciones multiformes.

Proposición 2.27. Sea w un número complejo y elijamos la rama del logaritmo correspondiente a $c \in \mathbb{R}$. Entonces, la función potencial

$$f(z) = z^w = \exp\big(w \log(z)\big)\,, \quad z \in W_c\,,$$

es holomorfa en W_c, y su derivada es

$$f'(z) = \exp\big(w \log(z)\big)\, \frac{w}{z} = w\, \frac{z^w}{z} \tag{2.5}$$

Observaciones 2.28.

i) El resultado anterior se sigue inmediatamente de la regla de la cadena, pero nótese que en la fórmula (2.5) no se ha simplificado

$$f'(z) = w\, \frac{z^w}{z} = w\, z^{w-1}\,,$$

identidad cierta cuando z^w y z^{w-1} se construyen con la misma rama del logaritmo. Aprovechemos aquí para insistir en que la expresión z^w puede denotar, de forma genérica mútiples valores.

ii) Para devolver la tranquilidad al lector novel, a continuación enfocamos la atención en casos de particular interés de la potenciación: los que se refieren a exponentes enteros y sus recíprocos. Dichas potencias fueron definidas de otro modo en la observación 1.62. El mensaje tranquilizador es que la nueva definición no altera la original.

Proposición 2.29. Sean $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $n \in \mathbb{Z}$. Para cualquier determinación del logaritmo se tiene que:

i) Si $n > 0$ entonces $z^n = z \cdot z \overset{n \text{ veces}}{\cdots} z$.

ii) Si $n < 0$ entonces $z^n = \dfrac{1}{z \cdot z \overset{-n \text{ veces}}{\cdots} z}$.

En otras palabras, la potenciación con exponentes enteros viene determinada unívocamente (es decir, independientemente de la rama considerada) y coincide con la expresión usual.

En lo que se refiere a potenciación con exponentes racionales, se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.30. Sean $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $r \in \mathbb{Q}$. Entonces el conjunto de todos los valores de z^r en las distintas determinaciones es finito. Concretamente, si r está representado por la fracción irreducible ${}^{m}\!/_{n}$, los valores de z^r son

$${w_k}^m\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

siendo w_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, las raíces n-ésimas de z (introducidas en la proposición 1.64).

2.2.5. Funciones trigonométricas

Definición 2.31. Si $z \in \mathbb{C}$, se definen

$$\cos(z) := \frac{\exp(i\,z) + \exp(-i\,z)}{2}\,, \qquad \sin(z) := \frac{\exp(i\,z) - \exp(-i\,z)}{2\,i}\,,$$

denominadas *coseno* y *seno* de z, respectivamente.

Propiedades 2.32. Si $x \in \mathbb{R}$ se verifica:

i) $\exp(-i\,x) = \overline{\exp(i\,x)}$ y $|\exp(i\,x)| = 1$.

ii) $\cos(x) = \operatorname{Re}\big(\exp(i\,x)\big)$ y $\sin(x) = \operatorname{Im}\big(\exp(i\,x)\big)$.

iii) $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\sin(x)| \leq 1$.

Observación 2.33. Las funciones coseno y seno de variable compleja extienden a las homónimas de variable real. Pero ¡atención!: es un error frecuente en principiantes extender la propiedad 2.32.iii a todo número complejo, lo que es falso. Por ejemplo, pasando al límite en el infinito a través del eje imaginario

$$\lim_{t\to\infty} \cos(i\,t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\exp(i^2 t) + \exp(-i^2 t)}{2} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \infty\,.$$

Esto muestra que el coseno no es una función acotada en $\mathbb{C}$, aunque puede serlo en alguno de sus subconjuntos (como, por ejemplo, $\mathbb{R}$).

Proposición 2.34. Las funciones $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son periódicas, de periodo $2\,\pi$, es decir,

$$\cos(z + 2\,\pi) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \sin(z + 2\,\pi) = \sin(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}\,.$$

En la tabla A.6 se recogen propiedades de utilidad, por su frecuente uso. Todas ellas se deducen inmediatamente de la definición. Ilustraremos, a modo de ejemplo, una de ellas:

Ejemplo 2.35. Deduzcamos la fórmula del seno de la suma. Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\sin(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2\,i} = \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2\,i} = \frac{e^{iz}e^{iw}}{2\,i} - \frac{e^{-iz}e^{-iw}}{2\,i} \\
&= \frac{\big(\cos(z) + i\sin(z)\big)\big(\cos(w) + i\sin(w)\big)}{2\,i} - \frac{\big(\cos(z) - i\sin(z)\big)\big(\cos(w) - i\sin(w)\big)}{2\,i} \\
&= \frac{\cancel{\cos(z)\cos(w)} + i\cos(z)\sin(w) + i\sin(z)\cos(w) - \cancel{\sin(z)\sin(w)}}{2\,i} \\
&\quad - \frac{\cancel{\cos(z)\cos(w)} - i\cos(z)\sin(w) - i\sin(z)\cos(w) + \cancel{\sin(z)\sin(w)}}{2\,i} \\
&= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)\,.
\end{aligned}$$

De la holomorfía de la función exponencial se deduce inmediatamente la siguiente

Proposición 2.36. Las funciones trigonométricas $\sin$, $\cos$ son holomorfas en todo $\mathbb{C}$, y para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sin'(z) = \cos(z), \qquad \cos'(z) = -\sin(z).$$

Definición 2.37. Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq k\,\pi + \pi/2$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = -i\,\frac{\exp(i\,z) - \exp(-i\,z)}{\exp(i\,z) + \exp(-i\,z)}\,,$$

que recibe el nombre de *tangente* de z.

Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, se define

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = i\,\frac{\exp(i\,z) + \exp(-i\,z)}{\exp(i\,z) - \exp(-i\,z)}\,,$$

denominada *cotangente* de z.

Proposición 2.38. La tangente es una función holomorfa en $U = \mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$, y para cada $z \in U$ se tiene que

$$\tan'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)} = 1 + \tan^2(z)\,.$$

La cotangente es holomorfa en $V = \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, y para cada $z \in V$ se tiene que

$$\cot(z) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \qquad \text{y} \qquad \cot'(z) = \frac{-1}{\cos^2(z)} = -1 - \cot^2(z)\,.$$

2.2.6. Funciones hiperbólicas

Definición 2.39. Si $z \in \mathbb{C}$, se definen

$$\cosh(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}\,, \qquad \sinh(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}\,,$$

denominadas *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* de z, respectivamente.

Proposición 2.40. Las funciones $\sinh, \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son periódicas, de periodo $2\pi i$, es decir

$$\cosh(z + 2\pi i) = \cosh(z) \quad \text{y} \quad \sinh(z + 2\pi i) = \sinh(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}\,.$$

La tabla A.7 compendia propiedades básicas de las funciones hiperbólicas, que se deducen de la definición. En realidad, relatar todas esas propiedades es redundante, pues se deducen de la correspondiente propiedad trigonométrica a partir de las siguientes relaciones, que resultan obvias de las definiciones:

$$\sinh(z) = -i\,\sin(i\,z)\,, \quad \sin(z) = -i\,\sinh(i\,z)\,; \qquad \cosh(z) = \cos(i\,z)\,, \quad \cos(z) = \cosh(i\,z).$$

Proposición 2.41. Las funciones hiperbólicas $\sinh$, $\cosh$ son holomorfas en todo $\mathbb{C}$, y para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sinh'(z) = \cosh(z), \qquad \cosh'(z) = \sinh(z).$$

Definición 2.42. Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i\left(k\pi + \pi/2\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$), se define

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{\exp(z) + \exp(-z)}\,,$$

que recibe el nombre de *tangente hiperbólica* de z. Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i\,k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), se define

$$\coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{\exp(z) - \exp(-z)}\,,$$

denominada *cotangente hiperbólica* de z.

2.2.7. Funciones recíprocas de trigonométricas e hiperbólicas

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas no son inyectivas, de manera que sus posibles funciones inversas (denominadas *arcos* y *argumentos*, respectivamente) han de buscarse de forma local, o en dominios lo más amplios posibles y garantizando la holomorfía; el problema es exactamente el mismo que se plantea para la función exponencial. En todos los casos se presenta la dificultad de determinar ramas adecuadas del logaritmo que permitan representar de forma elemental dichas funciones entre los subconjuntos abiertos correspondientes, cuya existencia viene garantizada de forma teórica por el teorema de la función inversa. Ilustraremos esto con un ejemplo (ver también los ejercicios 2.25, 2.28, 2.29 y 2.30).

1. Pongamos $w = \sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i}$. Entonces

$$e^{iz}\left(1 - (e^{-iz})^2\right) = 2\,i\,w\,, \quad \text{o bien} \quad 1 - (e^{-iz})^2 = 2\,i\,w\,e^{-iz}\,.$$

Haciendo $s = e^{-iz}$ se obtiene la ecuación de segundo grado

$$s^2 + 2iw\,s - 1 = 0\,,$$

cuyas soluciones son $s = -i\,w \pm \sqrt{1-w^2}$. Nótese que, excepto en el caso $w^2 = 1$, estos dos números complejos corresponden a las dos determinaciones de la raíz cuadrada. De esto se sigue que "$z = i\,\log\big(-i\,w + \sqrt{1-w^2}\big)$", es decir, de manera puramente formal

$$\arcsin(w) = i\,\log\big(-i\,w + \sqrt{1-w^2}\big)\,. \tag{2.6}$$

También, nótese que si $w = \sinh(z) = -i\sin(iz)$, entonces $i\,w = \sin(iz)$, por lo que

$$i\,z = \arcsin(i\,w) = i\,\log\big(-i^2\,w + \sqrt{1-i^2w^2}\big) = i\,\log\big(w + \sqrt{1+w^2}\big)\,,$$

y, en añadidura, obtenemos todos los argumentos del seno hiperbólico:

$$\operatorname{argsinh}(w) = \log\big(w + \sqrt{1+w^2}\big)\,. \tag{2.7}$$

2. Por otro lado, sin cálculos explícitos, la función seno es holomorfa en $\mathbb{C}$ y su derivada, la función coseno, es nula en los puntos de la forma $k\,\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Para el resto de los puntos existe inversa local, que denominaremos de forma genérica un *arcoseno* y denotaremos '$\arcsin$'; en estos puntos se tiene que

$$\arcsin'(w) = \frac{1}{\sin'\big(\arcsin(w)\big)} = \frac{1}{\cos\big(\arcsin(w)\big)} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-w^2}}\,.$$

El signo $\pm$ hace referencia a la determinación o rama particular elegida para la raíz, como la expresión (2.6), a partir de la cual se obtiene también el valor de la derivada de las distintas ramas de $\arcsin$ aplicando la regla de la cadena.

3. El estudio siguiente arrojará alguna luz sobre el problema de determinar abiertos de $\mathbb{C}$ lo más grande posibles donde la función seno sea inyectiva:

Si $k \in \mathbb{Z}$, la función seno transforma biyectivamente la banda vertical

$$U_k = \Big\{z \in \mathbb{C} : k\,\pi - \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < k\,\pi + \frac{\pi}{2}\Big\}$$

en todo el plano complejo menos dos semirrectas del eje real, en concreto, en

$$W = \mathbb{C} \setminus \{r \in \mathbb{R} : |r| \geq 1\}\,.$$

Precisando un poco más, si para $k \in \mathbb{Z}$ se consideran los conjuntos

$$U_k^+ = \Big\{z \in \mathbb{C} : k\,\pi - \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < k\,\pi + \frac{\pi}{2}\,,\ \operatorname{Im}(z) > 0\Big\}\,,$$
$$U_k^- = \Big\{z \in \mathbb{C} : k\,\pi - \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < k\,\pi + \frac{\pi}{2}\,,\ \operatorname{Im}(z) < 0\Big\}\,,$$

la función seno transforma biyectivamente:

a) El intervalo $\big(k\,\pi - \pi/2\,,\ k\,\pi + \pi/2\big)$ en el intervalo $(-1,1) \subset \mathbb{R}$.

b) El abierto U_k^+ en el semiplano $\Pi^+ = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) > 0\}$ si k es par, o en $\Pi^- = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) < 0\}$ si k es impar.

c) El abierto U_k^- en el semiplano $\Pi^- = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) < 0\}$ si k es par, o en $\Pi^+ = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) > 0\}$ si k es impar.

d) Cada una de las dos semirrectas $L_k^+ = \big\{k\,\pi{+}\pi/2{+}i\,t : t > 0\big\}$ y $L_k^- = \big\{k\,\pi{+}\pi/2{+}i\,t : t < 0\big\}$ en el intervalo $(1,\infty)$ si k es par, o en el intervalo $(-\infty,-1)$ si k es impar (nótese que $\sin\big(k\,\pi{+}\pi/2 + i\,t\big) = (-1)^k\cosh(t)$).

El estudio de los dominios de definición y la holomorfía de las restantes funciones inversas de trigonométricas e hiperbólicas, '$\arccos$', '$\arctan$', '$\operatorname{argcosh}$', etc., se realiza de forma similar. En todos los casos se presenta la dificultad de determinar una rama adecuada del logaritmo que permita representar de forma elemental dichas funciones entre los subconjuntos abiertos correspondientes, cuya existencia garantiza, de forma teórica, el teorema de la función inversa.

Ejercicios

2.1

i) Sea $\lambda\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Probar que existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que

$$\lambda(z) = a\,z + b\,\overline{z}\,. \tag{2.8}$$

ii) En las mismas condiciones del apartado anterior, probar λ es $\mathbb{C}$-lineal si, y sólo si, $b = 0$ en (2.8). Volver a deducir las condiciones de Cauchy-Riemann a partir de este hecho.

iii) Escribir, en la forma (2.8) y matricialmente (como aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$): homotecias, giros y simetrías. ¿Cuáles de estas aplicaciones son $\mathbb{C}$-lineales?

2.2 Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función $\mathbb{R}$-diferenciable. Se definen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

i) Probar que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en U si y sólo si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

ii) Si f es holomorfa en $z_0 \in U$, probar que $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

2.3 Probar que la función f definida en $\mathbb{C}$ por

$$f(z) = \begin{cases} (1+i)\,\dfrac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z^2|} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

verifica las condiciones de Cauchy-Riemann en $z_0 = 0$, pero no es derivable en dicho punto.

2.4 Sea $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f(z) = \sqrt{|x\,y|}\;, \qquad x = \operatorname{Re}(z)\,,\ y = \operatorname{Im}(z)\,.$$

¿Es holomorfa dicha función? Estudiar las condiciones de Cauchy-Riemann en $z_0 = 0$.

2.5 Dado $p > 0$, estudiar la derivabilidad de la función $f(z) = |z|^p$ en $z_0 = 0$.

2.6 Sea f una función definida en $\mathbb{C}$ de la forma

$$f(z) = f(x + i\,y) = u(x) + i\,v(y)\,, \qquad u = \operatorname{Re}(f)\,,\ v = \operatorname{Im}(f)\,,$$

y tal que f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Obtener una expresión de f.

2.7 Determinar los valores de los parámetros reales $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ para que la función

$$f(z) = f(x + iy) = \alpha x + \beta y + i(\gamma x + \delta y)$$

sea holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

2.8 Si $f = u + i\,v$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, su derivada f' es también holomorfa y

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,,$$

probar que $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y $\operatorname{Re}(a) = 0$.

2.9 Dado un subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ se define el *conjunto conjugado* de $\widetilde{\Omega}$ por

$$\widetilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Omega\}\,.$$

i) Probar que $\widetilde{\Omega}$ es abierto si, y sólo si, Ω es abierto.

ii) Si Ω es abierto y f es holomorfa en Ω, demostrar que la función $\widetilde{f}$ definida en $\widetilde{\Omega}$ por

$$\widetilde{f}(z) = \overline{f(\,\overline{z}\,)}$$

es holomorfa en $\widetilde{\Omega}$.

2.10 (**Regla de L'Hôpital**) Sean A un abierto de $\mathbb{C}$, $a \in A$ y f y g dos funciones de A en $\mathbb{C}$ holomorfas en A, con $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(a) \neq 0$.

i) Probar que existe un entorno V de a con $V \subset A$ tal que $g(z) \neq 0$ para cada $z \in V \setminus \{a\}$.

ii) Probar que $\displaystyle\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

2.11 Sea A un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f\colon A \to \mathbb{C}$ holomorfa. Pongamos $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$. Demostrar que cada una de las condiciones siguientes implica que f es constante en A:

a) $f'(z) = 0$ para cada $z \in A$.

b) u es constante en A.

c) v es constante en A.

d) Existen $a, b, c \in \mathbb{C}$, con a y b no simultáneamente nulos, y tales que

$$a\,u(z) + b\,v(z) = c \qquad \text{para cada } \; z \in A\,.$$

e) $|f|$ es constante en A.

f) La función conjugada $\overline{f}$ también es holomorfa en A.

g) Existe $\phi \in \mathbb{R}$ tal que ϕ es un argumento de $f(z)$ para todo $z \in A$.

h) Existe $k \neq 0$ tal que $u(z)\,v(z) = k$ para todo $z \in A$.

k) Existe una función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $u(z) = h\bigl(v(z)\bigr)$ para todo $z \in A$.

2.12 Sean P un polinomio de grado $n \geq 1$ y k un complejo no nulo. Se considera el polinomio

$$Q(z) = P(z) - k\,P'(z)\,.$$

Demostrar que si los módulos de los ceros de P son inferiores a un número real $R > 0$, los módulos de los ceros de Q son inferiores a $R + n|k|$.

2.13 Hallar los puntos $z \in \mathbb{C}$ en los que las siguientes funciones son derivables y calcular en ellos la correspondiente derivada:

i) $\sin(\,\overline{z}\,)$

ii) $\cosh(\,\overline{z}\,)$

iii) $z\operatorname{Re}(z)$

iv) $e^{e^z} = \exp(e^z)$

v) $\sin\left(e^z\right)$

vi) $\dfrac{e^z}{z^2+3}$

2.14 Determinar a lo largo de qué semirrectas R partiendo del origen existe el límite

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in R}} \exp(z)\,.$$

2.15 Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en U. Se supone que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que

$$f'(z) = a\,f(z) \quad \text{para todo } z \in U.$$

Demostrar que para cada par de puntos $z, w \in U$ se verifica que

$$f(z) = f(w)\,e^{a\,(z-w)}$$

(ver también el ejercicio 2.16.ii).

2.16

i) Caracterizar las funciones f holomorfas en $\mathbb{C}$ que verifican

$$f(z+w) = f(z) + f(w) \qquad \text{para todos } \; z, w \in \mathbb{C}\,.$$

ii) Caracterizar las funciones f holomorfas en $\mathbb{C}$ tales que

$$f(z+w) = f(z)f(w) \qquad \text{para todos } \; z, w \in \mathbb{C}$$

(ver ejercicio 2.15).

2.17 Sean U, V dos abiertos de $\mathbb{C}$ y f, g funciones complejas definidas en U y V, respectivamente, con $f(U) \subset V$. Se supone que $g \circ f$ y f son holomorfas en U. ¿Se puede asegurar que g es holomorfa en V?

2.18 Determinar los puntos de $\mathbb{C}$ en un entorno de los cuales la función f correspondiente admite inversa holomorfa:

i) $f(z) = z^2 + z + 1$ *ii*) $f(z) = \exp(z^2 + z)$.

2.19 Sean D un abierto conexo del plano complejo y $f\colon D \to \mathbb{C}$ una función continua tal que

$$e^{f(z)} = 1 \qquad \text{para cada } z \in D.$$

Probar que f es constante en D.

2.20 Resolver las ecuaciones:

i) $\sin(2\,z) = 5$ *ii)* $\tan(z + i) = 1$ *iii)* $\cosh(z - 1) = 1 + i\,.$

2.21 Resolver la ecuación

$$|\sin(z)| = |\cos(z)|\,.$$

2.22 Si $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, probar que

$$|\sinh(y)| \le |\sin(z)| \le \cosh(y) \qquad \text{y} \qquad |\sinh(y)| \le |\cos(z)| \le \cosh(y).$$

2.23 Sea f una función holomorfa en $B(1,1)$ tal que para cada $z \in B(1,1)$,

$$f'(z) = \frac{1}{z}\,,$$

y $f(1) = 0$. Demostrar que esta función es la rama principal del logaritmo.

2.24 Dados a, b dos números reales con $a < b$, demostrar que la función

$$f(z) = \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right),$$

donde $\log$ se toma en la rama principal, es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

2.25 Determinar qué rama de la raíz cuadrada hemos de tomar para que la función

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$$

sea holomorfa en $A = \mathbb{C} \setminus \big\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\,,\, |\mathrm{Re}(z)| \ge 1\big\}$.

2.26 Consideremos la función compleja definida en $\mathbb{C}$ por $f(z) = z^2$. Con la notación habitual: $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$, $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$. Se pide:

i) Determinar las imágenes por f de las curvas:

a) $x = \mathrm{cte}$ b) $y = \mathrm{cte}$ c) $y = x$ d) $|z| = \mathrm{cte}$ e) $\arg(z) = \mathrm{cte}$.

ii) Determinar las contraimágenes por f de las rectas:

f) $u = \mathrm{cte}$ g) $v = \mathrm{cte}$.

2.27 Determinar los dominios que se aplican en el semiplano superior por cada una de las siguientes funciones (en todos los casos $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$):

i) $w = z^n$ *iii*) $w = \sin(az)$ *v*) $w = \cosh(az)$

ii) $w = e^{az}$ *iv*) $w = \cos(az)$ *vi*) $w = \sinh(az)$.

2.28 Determinar las ramas de la raíz y del logaritmo que se han de elegir para que la función definida por (2.6) en la bola abierta $B(0,1)$ coincida, al ser restringida a $B(0,1)\cap\mathbb{R}$, con la función real

$$\arcsin:(-1,1)\to\left(-\pi/2,\pi/2\right).$$

2.29 Procediendo como en la sección 2.2.7, pero resolviendo la identidad $2\,i\,w=e^{iz}-e^{-iz}$ en la incógnita $s=e^{iz}$, establecer que las inversas locales del seno viene dadas por la expresión

$$\arcsin(w)=-i\,\log\left(i\,w+\sqrt{1-w^2}\right). \tag{2.9}$$

Explicar la aparente discrepancia entre las fórmulas (2.6) y (2.9).

2.30 Comprobar que, para $z\neq i,-i$ se tiene que

$$\arctan(z)=\frac{i}{2}\big(\log(1-iz)-\log(1+iz)\big).$$

Realizar un estudio similar al de la sección 2.2.7 detallando las regiones transformadas por estas funciones dependiendo de la rama del logaritmo elegida.

Probar que, independientemente de la rama del logaritmo, se tiene que

$$\arctan'(z)=\frac{1}{1+z^2}.$$

2.31 (Funciones Armónicas) Una función g es armónica en un dominio D de $\mathbb{R}^2$ si es de clase $\mathscr{C}^2$ en D y verifica la denominada *Ecuación de Laplace*:

$$\Delta g:=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0.$$

i) Probar que si $f=u+i\,v$ es holomorfa en un dominio D y u y v son de clase $\mathscr{C}^2$ en D (condición que posteriormente veremos que es consecuencia de ser f holomorfa) entonces u y v son armónicas en D.

ii) Probar que si u es real y armónica en un dominio estrellado D, existe una función f holomorfa en D tal que $u=\operatorname{Re}(f)$. En este caso a $v=\operatorname{Im}(f)$ se le denomina *armónica conjugada* de u

Sugerencia: El campo vectorial $(P,Q)=\left(\partial u/\partial x,-\partial u/\partial y\right)$ es conservativo.

iii) En cada uno de los siguientes casos, se pide comprobar que la función real u verifica la ecuación de Laplace y encontrar una función f holomorfa en $\mathbb{C}$ y tal que $u=\operatorname{Re}(f)$.

a) $u(x,y)=x^3-3xy^2+x^2-y^2$,

b) $u(x,y)=e^{-x}(x\sin(y)-y\cos(y))$

c) $u(x,y)=2x^3-6xy^2+x^2-y^2-y$

d) $u(x,y)=x^2-y^2+e^{-y}\sin(x)-e^{y}\cos(x)$.

2.32 (Transformaciones Conformes) Si v_1,v_2 es un par ordenado de números complejos no nulos, observados como vectores de $\mathbb{R}^2$, se puede hablar del *ángulo* que forman, $\widehat{v_1,v_2}$, que es el que corresponde a cualquiera de los argumentos de v_1/v_2 (nótese que $\widehat{v_2,v_1}=-\widehat{v_1,v_2}$). En general, si γ,φ son curvas paramétricas simples en el plano complejo[1] que se cortan en el punto $z_0=\gamma(t_0)=\varphi(s_0)$, en el que ambas son regulares (tienen tangente), el *ángulo* que forman esas curvas en el punto z_0, denotado $\widehat{\gamma,\varphi}(z_0)$, será el que forman $\gamma'(t_0)$ y $\varphi'(s_0)$.

Si V es un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon V\to\mathbb{C}$ es continua, se dice que f es *conforme* en el punto $z_0\in V$ si es $\mathbb{R}$-diferenciable en z_0 con diferencial no nula y conserva ángulos, es decir,

$$\widehat{\gamma,\varphi}(z_0)=\widehat{f\circ\gamma,f\circ\varphi}\left(f(z_0)\right).$$

cualesquiera que sean las curvas paramétricas γ,φ en V que pasan por z_0.

En lo que sigue V es un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0\in V$ y $f=u+i\,v$ una función continua en V.

i) Probar que si, además, f es derivable en z_0 y $f'(z_0)\neq 0$, entonces f es conforme en z_0.

ii) A modo de recíproco. Si f es conforme en z_0 y u,v son $\mathbb{R}$-diferenciables en z_0, entonces f es derivable ($\mathbb{C}$-diferenciable) en z_0 y $f'(z_0)\neq 0$.

[1]Una curva paramétrica en $\mathbb{C}$ no es otra cosa que curva paramétrica en $\mathbb{R}^2$, es decir, una función continua γ definida en un intervalo de la recta, que ahora representamos $\gamma(t)=x(t)+i\,y(t)$. De acuerdo con la proposición 1.50, la regularidad de la curva en $\gamma(t_0)$ equivale a que exista y sea no nulo el número complejo $\gamma'(t_0)=x'(t_0)+i\,y'(t_0)$.

2.33 (Homografías) Una *homografía* es una función T de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z \neq \frac{-d}{c}, \tag{2.10}$$

siendo $a\,d - b\,c \neq 0$. Las homografías son también denominadas *transformaciones de Möbius*, *transformaciones bilineales* o *transformaciones racionales lineales*. La homografía T dada por (2.10) puede identificarse con la matriz

$$M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}),$$

siendo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ el grupo multiplicativo de las matrices invertibles de orden 2 con coeficientes complejos. Dos matrices regulares M y N que verifican $N = \lambda M$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ dan lugar a la misma función T; escribamos $M\mathcal{R}N$ en este caso. Así pues, se puede establecer una biyección entre la familia de homografías y el espacio cociente $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/_{\mathcal{R}}$.

i) Explicar de qué modo se puede prolongar $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ a una función definida en todo el plano complejo ampliado $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, de modo que una homografía pueda considerarse como una función $T\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ biyectiva.

ii) Probar que la composición de homografías es una homografía, y que cada homografía es una función invertible en $\widehat{\mathbb{C}}$ cuya inversa es también una homografía. Determinar las matrices que corresponden a la composición de homografías y a la inversa de una homografía.

iii) Comprobar que dados tres puntos distintos $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, existe una única homografía T tal que $T(z_1) = 0,\ T(z_2) = 1,\ T(z_3) = \infty$. Deducir, que si $w_1,\ w_2,\ w_3$ son también tres puntos distintos, existe una única homografía tal que $T(z_1) = w_1,\ T(z_2) = w_2,\ T(z_3) = w_3$.

iv) Mostrar que toda homografía se puede expresar como composición de no más de 4 transformaciones de los siguientes tipos *elementales* (no necesariamente en el orden que se citan):

- ▷ *traslaciones*: $z \mapsto z + z_0$;
- ▷ *multiplicaciones*: $z \mapsto w_0\, z$ (giros y homotecias, ver observación 1.65.iii);
- ▷ la *inversión*: $z \mapsto {}^1\!/_z$.

v) Probar que toda homografía distinta de la identidad tiene a lo sumo dos puntos fijos.

vi) Probar que toda homografía transforma rectas y circunferencias de $\mathbb{C}$ en rectas y circunferencias, es decir, transforma circunferencias de la esfera de Riemann S en circunferencias de S (ver ejercicio 1.50).

vii) La *razón doble* de cuatro puntos $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4 \in \mathbb{C}$ se define como

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}$$

Probar que toda homografía conserva la razón doble, es decir, que dada una homografía T y cuatro puntos $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4 \in \mathbb{C}$ se verifica

$$[T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]\,.$$

***Nota**: El conjunto de las homografías, con el producto de composición, es un grupo no abeliano con elemento unidad (la homografía identidad* $\mathrm{Id}(z) = z$*) isomorfo al espacio cociente* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/_{\mathcal{R}}$ *que también tiene, obviamente, estructura de grupo, y se conoce con el nombre de* grupo proyectivo lineal general, *denotado usualmente por* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Las transformaciones de Möbius son, según lo anterior, biyecciones conformes *de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *en* $\widehat{\mathbb{C}}$, *denominadas también* automorfismos *(ver el ejercicio 6.22), por lo que el grupo de las homografías se representa también por* $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ (ver, por ejemplo, [14]).

Una pequeña aclaración sobre la terminología: en Análisis se suele hablar del "plano" *complejo* $\mathbb{C}$ *y del* "plano" *complejo completado* $\widehat{\mathbb{C}}$, *atendiendo a la estructura euclídea o de variedad diferenciable real, respectivamente. Pero desde el punto de vista lineal,* $\widehat{\mathbb{C}}$ *es la* recta proyectiva compleja, *obtenida de la recta afín compleja añadiendo el punto del infinito, dicho esto con la simpleza impuesta por la brevedad. Esta estructura geométrica y topológica no es el plano proyectivo real (obtenido del plano afín real añadiendo la recta del infinito).*

La noción de conformidad para funciones definidas entre superficies de Riemann se define en términos de cartas, que son parametrizaciones locales de la variedad tales que los cambios de carta son holomorfos. Una superficie de Riemann es, en particular, una variedad real diferenciable de clase $\mathscr{C}^\infty$ y dimensión 2. La teoría de funciones, según la concepción original de Riemann, se basa precisamente en ese principio de conservación de ángulos.

Las homografías son, también, funciones "meromorfas" *en $\mathbb{C}$. Precisaremos este concepto cuando hablemos de singularidades aisladas y, concretamente, de singularidades polares. De momento mencionaremos que el adjetivo* meromorfa *tiene su raíz etimológica en el griego clásico: "$\mu\acute{\varepsilon}\rho o\varsigma$* (parte) + *$\mu o\rho\varphi\acute{\eta}$* (forma, apariencia)*", en contraposición a "$\acute{o}\lambda o\varsigma$* (todo) + *$\mu o\rho\varphi\acute{\eta}$". No obstante, esta distinción es ociosa si se trabaja en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ donde el polo norte y el polo sur (es decir, ∞ y 0) juegan exactamente el mismo papel, de manera que las funciones holomorfas $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, cuando se restringen a $\mathbb{C}$, son funciones meromorfas.*

El calificativo "holomorfa" *surge en la escuela de Cauchy (se atribuye a Briot y Bouquet, dos de sus discípulos) y es, en la actualidad, el de uso más frecuente; pero a lo largo de la historia se han utilizado también como sinónimos de* holomorfa, *en sentido más o menos general, los adjetivos:* "conforme", "regular", "uniforme", "sinéctica", "monódroma", "monógena" *o* "analítica"*. La noción de* función monógena *en un punto z_0 se refiere a que los límites de los cocientes incrementales $\big(f(z)-f(z_0)\big)/(z-z_0)$ son iguales a través de todas las rectas que pasan por z_0 (ver observación 2.4.ii). En cuanto a la analiticidad, todo el tema siguiente se dedica al estudio de esta propiedad, y en el cuarto tema, con la fórmula integral de Cauchy, se zanjará la cuestión estableciendo la equivalencia entre holomorfía y analiticidad.*

Tema 3

Series de potencias. Funciones analíticas

Recordemos que, si una función de variable real f es suficientemente derivable, es posible aproximarla localmente mediante polinomios, los de Taylor. Esto conduce, para funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$, a considerar el caso límite, que consiste en una serie de potencias. Este tema tiene por objeto desarrollar esta idea desde el punto de vista inverso, es decir, el estudio de las propiedades de las funciones definidas mediante una serie de potencias.

Veremos con posterioridad que el concepto de analiticidad, que introducimos aquí, coincide con el de holomorfía, hecho que puede resultar sorprendente al observar que para este último sólo se exige la existencia de la derivada de primer orden. Este aspecto es uno de los más relevantes en lo que se refiere a las diferencias entre las funciones derivables de variable real y las de variable compleja.

Las series de potencias son un caso particular de series funcionales. El lector debe estar familiarizado con las series de funciones de variable real (ver [10], por ejemplo); piénsese que todo lo dicho en aquel caso se traslada al caso complejo substituyendo el valor absoluto real por el módulo complejo. De hecho, a veces la terminología es la heredada del contexto real, por ejemplo, también en el caso complejo se habla de convergencia *absoluta*, que no *modular*. En cualquier caso, se presenta en primer lugar la teoría general suficiente para el tratamiento de las funciones analíticas, que es el objetivo final.

3.1. Sucesiones funcionales. Modos de convergencia

Si X es un conjunto no vacío se denota por $\mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ al conjunto de las funciones de X en $\mathbb{C}$. Una sucesión de elementos de $\mathscr{F}(X,\mathbb{C})$, se denomina genéricamente *sucesión de funciones complejas* en X. La notación y terminología general de sucesiones (*término* n*-ésimo*, *subsucesión*, etc.) se aplica igualmente en este caso, en particular, la forma usual de denotar una sucesión de funciones es $\{f_n\}_{n=1}^\infty$. Por otra parte, construir una sucesión de funciones en el conjunto X es dar, para cada $x \in X$, una sucesión numérica; los conceptos relativos a estas últimas dan lugar a los que a continuación se presentan.

Definición 3.1. Se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones complejas en X es *puntualmente acotada* si la sucesión numérica $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ es acotada para cada $x \in X$.

Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones complejas en X es *uniformemente acotada* o *totalmente acotada* si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\left|f_n(x)\right| \leq M \quad \text{para todos } x \in X \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Definición 3.2. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones complejas en el conjunto X.

i) Se dice que la sucesión es *puntualmente convergente* si para cada $x \in X$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ es convergente. En este caso la función f definida en X por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,, \quad x \in X,$$

se denomina *límite puntual* de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$.

ii) Se dice que la sucesión es *uniformemente convergente en* X si existe una función f en X verificando la siguiente propiedad:

“Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para todo número natural $n \geq n_0$ se tiene que

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \quad \text{para cada } x \in X\text{”}.$$

Proposición 3.3. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas en un conjunto X. Si la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de funciones acotadas en X y es uniformemente convergente, entonces el límite puntual f es una función acotada y la sucesión está uniformemente acotada.

Proposición 3.4. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones en un mismo conjunto X, que convergen uniformemente en X hacia las funciones f y g, respectivamente.

i) La sucesión $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia $f+g$ en X.

ii) Si, además, ambas sucesiones están uniformemente acotadas en X, entonces $\{f_n\, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en X hacia $f\,g$.

Proposición 3.5. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas que converge puntualmente en un conjunto X hacia la función f. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$m_n = \sup\left\{|f_n(x) - f(x)| \, : \, x \in X\right\},$$

con el convenio de que $m_n = \infty$ si el conjunto $\left\{|f_n(x) - f(x)| \, : \, x \in X\right\}$ no es acotado. Son equivalentes los siguientes asertos:

a) La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en X hacia f.

b) Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \geq n_0$ y la sucesión de números reales $\{m_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ converge hacia 0.

Corolario 3.6. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones complejas que converge puntualmente en un conjunto X hacia la función f y existe una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales convergente hacia 0 y tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq \mu_n$ para todos $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, entonces la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en X hacia f.

Definición 3.7. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas en el conjunto X. Se dice que la sucesión es *uniformemente de Cauchy* en X si verifica la siguiente propiedad:

"Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que para cada par de números naturales $n, m \geq n_0$ se tiene que

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon \quad \text{para cada } x \in X\text{''}.$$

Proposición 3.8 (Criterio de convergencia uniforme, de Cauchy). Una sucesión de funciones complejas en el conjunto X es uniformemente convergente en X si, y sólo si, es uniformemente de Cauchy en X.

Teorema 3.9 (Continuidad del límite puntual uniforme). Sean $X \subset \mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente en X hacia la función f. Si $z_0 \in X$ es tal que f_n es continua en z_0 para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua en z_0. En consecuencia, si f_n es continua en X para cada $n \in \mathbb{N}$, la función límite f es continua en X.

3.1.1. Series de funciones

En cuanto a las series de funciones, comencemos recordando que una serie numérica no es otra cosa que una sucesión, la de sumas parciales, construida a partir de otra sucesión, la de los términos de la serie. Explícitamente:

Dada una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones complejas en un conjunto no vacío X, se denomina *serie* de *término general* f_n a la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n = \sum_{j=1}^{n} f_j, \quad n = 1, 2, \ldots$$

S_n recibe el nombre de *suma parcial n-ésima* y f_n se denomina *término* n*-ésimo* de la serie.

Es usual representar una serie de término general f_n de forma abreviada por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

En consecuencia todo lo que se ha expuesto antes tiene su correspondiente traducción al caso de sumas parciales de sucesiones de funciones. Las nociones de acotación y convergencia, tanto puntual como uniforme, para una serie de funciones son obvias: las que se refieren a la sucesión funcional de las sumas parciales. En particular:

Una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en un conjunto X es *puntualmente convergente* si la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas parciales de la misma es puntualmente convergente en X. En este caso la función f definida en X por $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ se denomina *función suma* de la serie y se suele denotar también, en un abuso de notación, por $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, esto es,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,, \quad x \in X.$$

Además de lo dicho en general para sucesiones funcionales, aparecen ahora nuevas nociones de convergencia, relacionadas con la convergencia absoluta de series numéricas.

Definición 3.10. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones complejas en un conjunto X.

i) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ es puntualmente convergente en X se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es *absolutamente convergente* (de forma puntual) en X. Obviamente, toda serie absolutamente convergente es puntualmente convergente.

ii) Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge normalmente* en X si existe una serie convergente de números reales no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\big|f_n(x)\big| \leq m_n \quad \text{para cada } x \in X.$$

Observación 3.11. La convergencia *normal* o *en norma* se denomina así por lo siguiente: si en el espacio vectorial $\mathscr{B}(X,\mathbb{C})$ de las funciones complejas y acotadas en X se considera

$$\|f\|_{\infty} = \sup\big\{|f(x)| \,:\, x \in X\big\}\,,$$

entonces $\|\cdot\|_{\infty}$ es realmente una norma en $\mathscr{B}(X,\mathbb{C})$. El modo de convergencia normal es más fuerte que los otros mencionados, explícitamente:

Proposición 3.12 (Criterio de Weierstrass). Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones complejas en el conjunto X. Si la serie converge normalmente en X, entonces converge absolutamente y uniformemente en X.

Observación 3.13. En ocasiones conviene tratar las nociones de convergencia de una sucesión o serie de funciones complejas atendiendo por separado a sus partes reales e imaginarias. Esto no supone ningún cambio desde el punto de vista conceptual; a partir de las desigualdades

$$\max\big\{|u|,|v|\big\} \leq |f| \leq |u| + |v| \qquad (f = u + i\,v)$$

resulta inmediato comprobar que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones complejas en un conjunto X verifica una de las siguientes propiedades:

a) Es puntualmente acotada en X;

b) Está uniformemente acotada en X;

c) Es puntualmente convergente en X;

d) Es absolutamente convergente en X;

e) Converge uniformemente en X;

f) Converge normalmente en X;

si, y sólo si, las dos series de funciones reales $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(f_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(f_n)$ verifican la correspondiente propiedad.

3.2. Series de potencias

Dirigimos ahora la atención al caso particular en que $X \subset \mathbb{C}$ y los términos de la serie sean monomios del tipo $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, $z \in \mathbb{C}$. Para incluir a las funciones constantes (polinomios de grado 0), en este contexto, se sigue el convenio de notación $(z - z_0)^0 = 1$ para cada $z \in \mathbb{C}$, incluido $z = z_0$, lo que permite dar una expresión compacta de la suma. Concretamente:

Definición 3.14. Sea z_0 un número complejo. Si $a_0 \in \mathbb{C}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos, la serie funcional

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

se denomina *serie de potencias centrada en el punto* z_0.

Observación 3.15. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el polinomio $f_n(z) = a_n (z - z_0)^n$ define una función holomorfa (indefinidamente derivable, de hecho) en $\mathbb{C}$. Se suscitan entonces de forma natural las siguientes cuestiones:

1. El estudio de la convergencia de este tipo de series funcionales.
2. Determinar las propiedades que hereda la función suma de los términos de la serie.

En esta sección y en la siguiente se dará respuesta a estas dos preguntas.

Las distintas nociones de convergencia se concretan al caso de series de potencias, pero con nuevos matices más interesantes. En particular, en lo que se refiere a la convergencia absoluta y a la convergencia normal, nótese que si $|a_n (z_1 - z_0)^n| \leq m_n$ para algún $z_1 \in \mathbb{C}$ con $z_1 \neq z_0$, entonces, poniendo $r = |z_1 - z_0| > 0$, se tiene que para todo $z \in B(z_0, r)$,

$$|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n (z_1 - z_0)^n| \leq m_n.$$

Proposición 3.16 (Lema de Abel). Se considera la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Si R es un número real estrictamente positivo tal que la sucesión de números reales positivos $\{|a_n| R^n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada, entonces la serie de potencias es absolutamente convergente en $B(z_0, R)$. Es más, la serie converge normalmente en los discos de la forma $\overline{B}(z_0, r)$ para todo r con $0 < r < R$.

Corolario 3.17. Si la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge en el punto $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, entonces converge absolutamente en $B(z_0, |z_1 - z_0|)$, y converge normalmente en los discos compactos $\overline{B}(z_0, r)$, con $0 < r < |z_1 - z_0|$.

Los resultados precedentes muestran que el conjunto de puntos donde una serie de potencias converge puede ser:

1. Sólo el punto z_0 en el que está centrada.
2. Un disco abierto centrado en el punto z_0, junto con algunos puntos de su frontera.
3. Todo el plano.

Esto da sentido a la siguiente definición.

Definición 3.18. Dada la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, se define su *radio de convergencia*, que denotaremos por ρ, como:

i) Si la serie converge únicamente en el punto z_0, entonces $\rho = 0$.

ii) Si la serie converge en cada punto de $\mathbb{C}$, se dice que $\rho = \infty$.

iii) En otro caso, su radio de convergencia se define como el superior del conjunto de los números reales positivos r tales que la serie numérica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ es convergente.

Proposición 3.19. El número real $\rho \geq 0$ es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ si, y sólo si, la serie converge en todo punto z con $|z - z_0| < \rho$ y no converge en cada punto z con $|z - z_0| > \rho$.

Definición 3.20. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ con radio de convergencia $\rho > 0$, el disco abierto $B(z_0, \rho)$ se denomina *abierto de convergencia* de la serie (en el caso de que $\rho = \infty$ se entiende que dicho disco coincide con $\mathbb{C}$). El conjunto de los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde la serie converge se denomina *campo de convergencia* de la serie.

Observaciones 3.21.

i) El campo de convergencia de una serie de potencias contiene al abierto de convergencia y, si su radio de convergencia ρ es finito, está contenido a su vez en el disco cerrado $\overline{B}(z_0, \rho)$. Puede ser que la serie converja en todos los puntos de la circunferencia $\{|z - z_0| = \rho\}$; en ninguno; etc. El ejercicio 3.18 ilustra las distintas situaciones que se pueden presentar.

ii) El radio de convergencia de una serie de potencias depende únicamente de sus *coeficientes* a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es decir, las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tienen el mismo radio de convergencia; el campo de convergencia de la primera es el trasladado por z_0 del de la segunda.

Proposición 3.22 (Fórmula de D'Alembert-Cauchy). Se supone que existe, finito o infinito, el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda.$$

Entonces, si ρ es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, se tiene que

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad \lambda = 0; \\ 0 & \text{si} \quad \lambda = \infty; \\ \dfrac{1}{\lambda} & \text{si} \quad 0 < \lambda < \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

(esta es la denominada *Fórmula de la raíz o de Cauchy*).

En particular, si todos los coeficientes de la serie son no nulos, al menos a partir de un término en adelante, y existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

este límite coincide con ρ (*Fórmula del cociente o de D'Alembert*).

Los límites contemplados anteriormente no tienen por qué existir; no obstante, es posible dar una versión más fuerte del resultado anterior, para lo cual es necesario el concepto que se define a continuación.

Definición 3.23. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Se dice que un número real a es un *valor de adherencia* de la sucesión si existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la dada que converge hacia a.

Dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos se define su *límite superior*, denotado por

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \qquad \text{o} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\,,$$

como sigue

1. $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$ si la sucesión no está acotada superiormente.
2. $\limsup_{n\to\infty} x_n$ es el superior de sus valores de adherencia si la sucesión está acotada.

Proposición 3.24. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera $X_n = \sup\{x_m : m \geq n\}$. Entonces, la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y converge hacia $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, en particular, se verifica que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf\left\{ \sup\{x_m : m \geq n\} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Observación 3.25. Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, tiene un único valor de adherencia, que es precisamente su límite y su límite superior (y su *límite inferior*, definido de forma análoga: $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\left\{ \inf\{x_m : m \geq n\} : n \in \mathbb{N}\right\}$).

Proposición 3.26 (Fórmula de Cauchy-Hadamard). El radio de convergencia ρ de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ viene dado según la fórmula (3.1), siendo

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{3.2}$$

Observaciones 3.27.

i) A diferencia del límite ordinario, el límite superior de una sucesión de números reales positivos está definido siempre, por lo que la fórmula anterior es aplicable a toda serie de potencias. No obstante, en algunas situaciones que se presentan con frecuencia, resulta que una subsucesión de la de coeficientes es nula (términos pares, o impares, etc.), y la subsucesión de los términos no nulos es tal que se le pueden aplicar las técnicas de cocientes o raíces. Incluso en algunas situaciones en las que no es aplicable el criterio de d'Alembert resulta sencillo recurrir a la definición 3.18, simplemente analizando la convergencia absoluta de las series numéricas correspondientes a cada punto z. El ejercicio 3.16.viii ilustra muy bien estos comentarios.

ii) Con los conceptos de límite inferior y superior, se pueden dar versiones mejoradas de los criterios que aparecieron en las observaciones 1.33.i:

1. ***Criterio de D'Alembert o del cociente:*** Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos no nulos. Si $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, entonces la serie converge absolutamente, y si $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, la serie no converge.

2. ***Criterio de la raíz:*** Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos. Si existe

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

entonces la serie converge absolutamente si $\lambda < 1$, y no converge si $\lambda > 1$.

3.3. Funciones definidas por series de potencias

En lo que sigue consideraremos series de potencias con radio de convergencia no nulo. La convergencia normal, y por tanto uniforme, de este tipo de series en los subconjuntos compactos del abierto de convergencia permite concluir interesantes resultados sobre las propiedades de la función suma.

Teorema 3.28. Sea $\rho > 0$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Si para cada $z \in B(z_0, \rho)$ se denota por $f(z)$ a la suma de la serie numérica correspondiente, resulta que f es continua en $B(z_0, \rho)$.

Este resultado es válido también para $\rho = \infty$, en cuyo caso f es continua en todo $\mathbb{C}$.

De la continuidad de la función suma se sigue la siguiente propiedad.

Teorema 3.29. Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$, y tal que alguno de sus coeficientes a_n es no nulo. Se denota por f a la función suma de la serie. Existe entonces un número real δ, con $0 < \delta \leq \rho$, tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$.

Dicho de otra forma: si una serie de potencias tiene suma nula en un entorno del punto en el que está centrada, entonces es la serie idénticamente nula.

Corolario 3.30 (Principio de identidad). Si las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$ tienen radios de convergencia no nulos ρ_1 y ρ_2, respectivamente, y existe un número real δ, con $0 < \delta < \min\{\rho_1, \rho_2\}$, de manera que las sumas de ambas series coinciden para cada $z \in B(z_0, \delta)$, entonces las series son iguales, es decir,

$$a_n = b_n \quad \text{para cada } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para abordar el problema de la derivabilidad de una serie de potencias se hace uso del siguiente lema, que es consecuencia de la fórmula de Cauchy-Hadamard.

Lema 3.31. Sea ρ el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$. La *serie derivada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a_{n+1}\,(z-z_0)^n$$

tiene también radio de convergencia ρ.

Teorema 3.32. Sea f la función suma de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$, definida en el abierto de convergencia $B(z_0, \rho)$. Entonces f es holomorfa en este disco y

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a_{n+1}\,(z-z_0)^n \quad \text{para cada } z \in B(z_0, \rho)\,.$$

Corolario 3.33. Si $f(z)$ es la suma de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ en el abierto de convergencia $B(z_0, \rho)$, entonces f admite derivadas de cualquier orden en $B(z_0, \rho)$. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)\,a_{n+m}\,(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!}\,a_{n+m}\,(z-z_0)^n$$

para todo $z \in B(z_0, \rho)$. En particular,

$$f^{(m)}(z_0) = m!\,a_m \qquad \text{ó} \qquad a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \qquad \text{para cada } \ m \geq 0\,.$$

Teorema 3.34. Sea f la función suma de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$, definida en el abierto de convergencia $B(z_0, \rho)$. Si $C \in \mathbb{C}$, la función F, suma de la serie de potencias

$$C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(z-z_0)^{n+1} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\,(z-z_0)^n\,,$$

es una primitiva de f en $B(z_0, \rho)$, es decir, $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in B(z_0, \rho)$.

Definición 3.35. Dadas las series de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$, se define la serie *suma* de ambas por

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\,(z-z_0)^n\,,$$

y la serie *producto de Cauchy* como

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n\,, \quad \text{siendo } \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,b_{n-k}\,, \quad n \geq 0\,.$$

No existe un criterio general que permita determinar el radio de convergencia de una suma o un producto de series, sin embargo es posible dar una estimación del mismo.

Teorema 3.36. Se supone que las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$ tienen radios de convergencia ρ_1 y ρ_2, respectivamente. Entonces las series suma y producto de Cauchy de las anteriores tienen radios de convergencia mayores o iguales que $\rho_0 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$.

Definición 3.37. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función compleja definida en A. Se dice que f es *analítica* en un punto $z_0 \in A$ si existen un número $\delta > 0$ tal que $B(z_0, \delta) \subset A$, y una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ convergente en $B(z_0,\delta)$, tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n \quad \text{para cada } z \in B(z_0,\delta).$$

Se dice que f es *analítica en A* si es analítica en cada punto de A. Las funciones analíticas en todo el plano complejo se denominan *funciones enteras*.

Observaciones 3.38.

i) El concepto de analiticidad, de índole marcadamente algebraica, es el punto de partida de la teoría de funciones de Weierstrass que, inspirado por Lagrange, conserva para el Análisis Complejo la terminología usada por él (cf. J.L. Lagrange: *Théorie des Fonctions Analytiques*, 1797). Para Lagrange las funciones analíticas eran, simplemente, aquéllas que trataba el Análisis, pues pensaba que todas las aplicaciones del Cálculo se obtenían de las propiedades que se pueden deducir de las series de Taylor. El carácter analítico impone, aparentemente, condiciones mucho más fuertes que, o sin relación con, la derivabilidad de Cauchy, de corte infinitesimal, o la visión geométrica de las transformaciones conformes de Riemann; pero sólo aparentemente.

ii) En las condiciones de la definición anterior es habitual obviar el dominio de definición de la función f; lo que en realidad es relevante es el radio de convergencia de la serie que la representa en un entorno del punto z_0. Así, en lo sucesivo, al referirnos a una tal función, diremos simplemente que f es analítica en el punto z_0.

iii) El teorema 3.36 muestra que la suma y el producto de funciones analíticas en un punto z_0 son también funciones analíticas en dicho punto.

iv) En virtud del corolario 3.33, si f es analítica en el punto z_0, entonces es holomorfa en z_0, e incluso indefinidamente derivable en un entorno $B(z_0,\delta)$ de dicho punto. Más aún, f es la suma de su *serie de Taylor en z_0*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n, \qquad |z-z_0| < \delta\,.$$

v) Si f es analítica en z_0, puesto que f es indefinidamente derivable en un disco $B(z_0,\delta)$, es posible considerar la serie de Taylor de f centrada en cualquier otro punto z_1 de dicho abierto; esto suscita de forma natural la pregunta de si esta serie representa también a f en un entorno de z_1. La respuesta es afirmativa y es el contenido del siguiente resultado.

Teorema 3.39. Se supone que la función f es analítica en el punto z_0, esto es, f se representa en un entorno $B(z_0,\delta)$ mediante la suma de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$. Entonces f es analítica en cada punto $z_1 \in B(z_0,\delta)$.

Observación 3.40. Concretando un poco más el teorema anterior, si $\varepsilon = \delta - |z_1 - z_0|$, f se representa en el disco $B(z_1,\varepsilon)$ (que está contenido en $B(z_0,\delta)$) mediante la serie que se obtiene al reordenar en potencias crecientes de $(z-z_1)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_1+z_1-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z_1-z_0)^{n-k}\,(z-z_1)^k\,.$$

La dificultad de la prueba estriba en garantizar la convergencia de esta reordenación formal. No obstante, la integral compleja, tratada en el siguiente tema, nos proporcionará herramientas muy potentes a partir de las cuales se obtienen estos resultados de manera sencilla.

En lo que respecta a la división de series de potencias, es decir, de funciones analíticas, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.41. Sean f y g dos funciones analíticas en el punto z_0. Si $g(z_0) \neq 0$, entonces la función f/g es analítica en z_0.

Observaciones 3.42.

i) En las condiciones del teorema anterior, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$ en un entorno de z_0, para calcular los coeficientes de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$ que representa a f/g se puede proceder efectuando la división formal de las dos series anteriores en potencias crecientes de $(z-z_0)$, lo cual es posible ya que $b_0 = g(z_0) \neq 0$ (en particular, $c_0 = a_0/b_0$). Sin embargo, es más cómodo proceder mediante el método de los coeficientes indeterminados: teniendo en cuenta que se debe verificar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n\right),$$

se identifican los coeficientes a_n con los correspondientes al producto de Cauchy de las otras dos series. Esto da lugar a un sistema (infinito) de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0\,c_0 \\ a_1 &= b_0\,c_1 + b_1\,c_0 \\ a_2 &= b_0\,c_2 + b_1\,c_1 + b_2\,c_0 \\ &\vdots \\ a_n &= b_0\,c_n + b_1\,c_{n-1} + \ldots + b_n\,c_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

cuyas incógnitas c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, se despejan recurrentemente.

ii) Obviamente, todo lo anterior carece de sentido si $g(z_0) = 0$. Ahora bien, la consideración de cocientes de funciones analíticas en un punto z_0 y que puedan, eventualmente, anularse en él constituye un problema muy interesante que tratamos más adelante, al hablar de singularidades aisladas.

Por último, para la composición de funciones analíticas se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.43 (de sustitución de series). Sean g una función analítica en el punto z_0, y f una función analítica en el punto $w_0 = g(z_0)$. Entonces la función $f \circ g$ (que está bien definida en un entorno de z_0 por ser g continua) es analítica en z_0.

Observación 3.44. Sin entrar en detalles, supuesto que f y g se representen por

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(w-w_0)^n\,; \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n\,, \quad (\text{nótese que } b_0 = w_0)\,,$$

entonces la serie que representa a $f \circ g$ en z_0 se obtiene al desarrollar formalmente la expresión

$$f\big(g(z)\big) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\,(z-z_0)^m\right)^n,$$

donde la potencia n-ésima que acompaña a a_n se entiende como el correspondiente producto de Cauchy. El estudio de la convergencia de la serie así obtenida es un problema no demasiado complicado desde un punto de vista conceptual, pero sí muy laborioso. Ahora bien, señalaremos que cuando la función g es un polinomio los productos de Cauchy contemplados se reducen a productos de polinomios; por ejemplo, si

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(w-w_0)^n \qquad \text{y} \qquad g(z) = w_0 + b\,(z-z_0)^2,$$

entonces

$$f\big(g(z)\big) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,b^n\,(z-z_0)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,b^n\,(z-z_0)^{2n}\,.$$

Como hemos anunciado en la introducción, en el próximo capítulo se obtendrá que toda función holomorfa en un abierto es analítica en dicho abierto. La constatación de este asombroso hecho requiere de otra propiedad no menos espectacular, la fórmula integral de Cauchy.

Lo anterior se aplica, en particular, a las funciones exponencial, trigonométricas e hiperbólicas de variable compleja, que hemos introducido en el tema anterior mediante las homónimas de variable real. Ahora bien, estas funciones se pueden definir directamente como sumas de series de potencias y obtener de sus series de Taylor todas las propiedades de periodicidad, ceros, etc. Véase, por ejemplo, el prólogo del texto de W. Rudin [29]. No obstante, la analiticidad de otras muchas funciones elementales se deduce de la propia definición y los teoremas expuestos en este tema; algunos ejercicios están orientados en este sentido (sumas aritmético-geométricas, fracciones racionales, etc.).

En la tabla A.8 se presentan desarrollos en serie de potencias de algunas funciones. Todos los desarrollos se refieren al punto $z_0 = 0$. En cada caso se relaciona el abierto de convergencia de la correspondiente serie de potencias, donde dicha serie representa a la función.

Ejercicios

3.1 Demostrar que la serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

converge uniformemente en los compactos de $U = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

3.2 Probar que la serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}$$

converge uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en $A = \mathbb{C} \setminus \{n\, i : n \in \mathbb{Z}\}$.

3.3 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos no nulos y de módulo menor que 1, tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{|a_n|}{a_n} \frac{z - a_n}{\overline{a}_n z - 1}\right)$$

converge uniformemente en cada bola cerrada $\overline{B}(0, r)$ con $0 < r < 1$.

3.4 Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin(nz)$$

converge en $A = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$. Estudiar si esta convergencia es uniforme en A.

3.5 Demostrar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$$

converge uniformemente en los subconjuntos compactos de $\{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\}$.

3.6 Estudiar la convergencia de la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{z}{2n}\right) - 1\right).$$

3.7 Probar que:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ converge uniformemente en los compactos de $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n}$ converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3.8 Se considera la rama principal del logaritmo (entonces $r^z = e^{z\ln(r)}$ para $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$).

i) Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Probar que la serie funcional

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

converge uniformemente en los compactos de A, pero no converge uniformemente en A.

ii) Probar para $\mathrm{Re}(z) > 1$ las siguientes igualdades

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^z} = \left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = \left(1 - 2^{1-z}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Nota: *A pesar de que la serie no converge para* $\mathrm{Re}(z) < 1$, *la función suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ *se prolonga a una función holomorfa en todo el plano complejo, excepto en* $z_0 = 1$, *la denominada* función ζ de Riemann[1]. *Es usual hoy en día mantener la notación original de Riemann* $s = \sigma + i\,t$ *para números complejos* s *con* $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, $t = \mathrm{Im}(s)$, *así que es frecuente encontrar la expresión* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ *(ver la ilustración de la portada). En realidad, esta serie fue estudiada con anterioridad, para valores reales de* s, *por Euler, que intuyó ya su conexión con los números primos. La* hipótesis de Riemann, *una conjetura sobre los ceros de la función* ζ, *es uno de los grandes problemas matemáticos abiertos, de gran trascendencia en la Teoría de Números.*

3.9 Probar que la serie funcional

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

converge uniformemente en los compactos de $B(0,1)$ hacia una función holomorfa que se ha de calcular. Estudiar la misma cuestión respecto a los compactos de $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

3.10 Sean X un conjunto no vacío, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sendas sucesiones de funciones complejas definidas en X. Para cada $n > 0$ y para cada $x \in X$ se denota $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

i) Se supone que la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente acotada en X. A partir de la fórmula de sumación por partes de Abel (1.2) probar que la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ converge uniformemente en X si, además, se verifica cualquiera de las condiciones siguientes:

1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|g_n(x) - g_{n+1}(x)\right|$ converge uniformemente en X, y la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 uniformemente en X (***criterio de Dedekind***).

2) La sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de funciones reales, monótona decreciente y uniformemente convergente hacia 0 en X (***criterio de Dirichlet***).

3) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en X y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de funciones reales, monótona decreciente, uniformemente acotada y uniformemente convergente en X (***criterio de Abel***, *versión débil*).

ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en X y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de funciones reales, monótona y uniformemente acotada en X, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ converge uniformemente en X (***criterio de Abel***).

Sugerencia: Súmese de nuevo por partes, pero ahora póngase $f_n = R_{n-1} - R_n$, siendo $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de los restos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

[1]la letra griega ζ, cuya mayúscula es Z, se debe leer algo así como "*dseta*"; el sonido zeta en español se corresponde más con la θ, Θ griega

3.11 Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de números reales con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Probar que:

i) Si $0 < \delta < 2$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |z-1| \geq \delta\}$.

ii) Si $0 < \alpha < \pi$, las series
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(nt) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$
convergen uniformemente en el intervalo $[\alpha, 2\pi - \alpha]$.

3.12 (**Series de Dirichlet**) Dada una sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-z \ln(n)}\,, \tag{3.3}$$
se denomina *serie de Dirichlet* asociada a la sucesión.

i) Sea $w \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(w) > 0$. Probar que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^w} - \frac{1}{(n+1)^w} \right|$$
es convergente y deducir del criterio de Dedekind que si la serie (3.3) converge en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, también converge para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$.

Se define la abscisa de convergencia λ *de la serie* (3.3) *como el ínfimo del conjunto de los números reales σ tal que la serie converge en algún punto z con $\mathrm{Re}(z) = \sigma$. Por supuesto, $\lambda = \infty$ si la serie no converge en ningún punto y $\lambda = -\infty$ si converge en todo punto.*

ii) Supongamos que la serie (3.3) tiene abscisa de convergencia $\lambda < \infty$. Comprobar que la serie converge uniformemente en los compactos del semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \lambda\}$.

3.13 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Se considera la serie funcional $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ definida en el abierto $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\}$ por
$$f_n(z) = \frac{a_n z^n}{1 - z^n}\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

i) Demostrar que si la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, la serie funcional $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en los compactos de U.

ii) Supongamos que la serie de potencias $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $0 < \rho \leq 1$. Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en los compactos de $B(0, \rho)$.

iii) Probar que, si la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ no converge para ningún $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > \rho$.

3.14 Demostrar que si la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia no nulo, entonces la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$$
converge para cada $z \in \mathbb{C}$.

3.15 Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos verificando
$$a_0 = 1\,; \qquad \frac{a_0}{(n+1)!} + \frac{a_1}{n!} + \cdots + a_n = 0\,, \quad n \geq 1\,.$$
Demostrar que $|a_n| \leq 1$ para $n = 1, 2, \ldots$ y concluir que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es mayor o igual que 1.

3.16 Determinar el abierto de convergencia de las siguientes series de potencias:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(z+3)^n$

iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\,(z-1+i)^n$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3n}}\,(z-2i)^n$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,4^n}\,(z-1)^n$

vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\,(z+5\,i)^n$

vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\Big(z+\frac{1}{2}\Big)^n$

viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\,z^{3n}$

ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2n}$

x) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n,\ |q|<1$

xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+b^n}{n}\,z^n\ ,\ a,b\in\mathbb{C}\,.$

xii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(z-i)^{n^2}.$

xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,n^2}{2n-1}\,(z-2)^n$

xiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(z+1)^n}{n\,2^n}$

xv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^n}\,z^n$

xvi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)^{n^2} z^n$

xvii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh(n)}{\cosh(n)}\,z^n$

xviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\cos(1/n)\big)^n z^n$

3.17 Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Determinar el radio de convergencia y la función suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, cuyos coeficientes están dados por

$$a_{2n+1}=\alpha^{2n+1},\qquad a_{2n}=\beta^{2n},\quad n\ge 0\,.$$

3.18 Determinar el radio de convergencia ρ de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^\alpha}\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}\,,$$

y estudiar su convergencia en la circunferencia $C=\{z\in\mathbb{C}:|z|=\rho\}$.

3.19 Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias. Se supone que existen $p\in\mathbb{N}$ y números complejos $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_p$ de modo que

$$a_n+\beta_1\,a_{n-1}+\beta_2\,a_{n-2}+\ldots+\beta_p\,a_{n-p}=0 \quad \text{para cada } n\ge p\,. \tag{3.4}$$

i) Demostrar que esta serie tiene radio de convergencia no nulo.

ii) Demostrar que en el abierto de convergencia de la serie su suma $S(z)$ verifica que

$$(1+\beta_1\,z+\beta_2\,z^2+\ldots+\beta_p\,z^p)\,S(z)=P(z)\,,$$

siendo P un polinomio de grado menor o igual que $p-1$.

iii) Recíprocamente, si $S=P/Q$ es una fracción racional con el grado de P menor que el de Q y tal que $Q(0)\neq 0$, probar que los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de S en $z_0=0$ satisfacen una ecuación en diferencias del tipo (3.4).

iv) Aplíquese lo anterior para sumar la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ cuyos coeficientes son los de la *sucesión de Fibonacci*:

$$a_0=a_1=1\,;\qquad a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\,,\quad n\ge 2\,.$$

3.20 Supongamos que f es la suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en el disco $B(0,1)$.

i) ¿Pueden verificarse las desigualdades

$$|f^{(n)}(0)|\ge n!\,2^n,\quad \text{para infinitos índices } n?$$

ii) Supongamos que existe una constante $M>0$ de modo que $|f^{(n)}(0)|\le M^n$, $n=0,1,\dots$ Probar que existe una función entera F que prolonga a f.

3.21 En los siguientes supuestos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ denotará una serie de potencias convergente en todo $\mathbb{C}$ y $f(z)$ su función suma.

i) Probar que si f es *par* (i.e., $f(-z) = f(z)$ para cada z), entonces $a_{2n+1} = 0$ para todo $n = 0, 1, \ldots$ Análogamente, si f es *impar*, entonces $a_{2n} = 0$ para cada $n = 0, 1, \ldots$

ii) Se supone ahora que f es *homogénea* de grado $k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$f(\lambda\, z) = \lambda^k f(z) \quad \text{para todos} \quad \lambda, z \in \mathbb{C}\,.$$

Probar que f es un monomio de grado k: $f(z) = a_k z^k$.

iii) Si f no es constante y existe $\omega \neq 1$ tal que

$$f(\omega\, z) = f(z) \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

probar que existe un $m \in \mathbb{N}$ para el cual $\omega^m = 1$. Además, si m es el más pequeño de esos naturales, existe una función entera g tal que

$$f(z) = g(z^m) \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

3.22

i) Calcular la derivada cuadragésimotercera de la función $f(z) = z^9\, e^z$ en el punto $z_0 = 0$.

ii) Calcular la derivada trigésima de la función $f(z) = (z^7 - 3\, z^5) \log(1 - z)$ en $z_0 = 0$.

iii) Calcular la derivada vigésimoséptima de la función $f(z) = \dfrac{(z-i)^{14}}{z^2}$ en el punto $z_0 = i$.

3.23 Sea f la suma de la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ que se supone con radio de convergencia $\rho > 0$. Supongamos además que $f'(0) = a_1 \neq 0$. Sin hacer uso del teorema de la función inversa, probar que existe $r \in (0, \rho]$ tal que f es inyectiva en la bola abierta $B(0, r)$.

3.24 Demostrar que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n}}{4^n\, (n!)^2}.$$

tiene radio de convergencia $\rho = \infty$ y que su función suma f satisface la ecuación diferencial

$$z\, f''(z) + f'(z) + z\, f(z) = 0 \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

3.25 (Sumas geométricas) Para $z \neq 1$ pongamos

$$g(z) = \frac{1}{1-z}\,.$$

i) Deducir del desarrollo de Taylor de g en $z_0 = 0$ los desarrollos de $g', g'', \ldots$ y de la primitiva de g que se anula en $z_0 = 0$.

ii) Calcular la serie de potencias centrada en el punto $z_0 = 0$ que representa a la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}\,.$$

iii) Calcular el abierto de convergencia y la suma en él de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(3\, n^2 + 4\, i\, n + 5\big)\, z^n\,.$$

iv) Calcular el abierto de convergencia y la función suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}\, z^n\,.$$

v) Sean w_0 un punto de $\mathbb{C}$ y k un número natural. Comprobar que la función f definida en en el abierto $U = \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ por

$$f(z) = \frac{1}{(z - w_0)^k}$$

es analítica y determinar el desarrollo de Taylor de f en cada punto $z_0 \in U$.

vi) Calcular el desarrollo de Taylor de la función

$$f(z) = \frac{z^4 + z^2 + 1}{z^2\,(z-1)}$$

en el punto $z_0 = i$, indicando su abierto de convergencia.

3.26 Supongamos que la función f es analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$ y consideremos $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ (ver ejercicio 2.9). Estudiar la relación que existe entre las series de potencias que representan a $f(z)$ en z_0 y a $g(z)$ en $\overline{z_0}$.

En particular, si $z_0 \in \mathbb{R}$ y f forma valores reales en un intervalo $(z_0 - \delta, z_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$, ¿qué se puede decir de los coeficientes de estas series?

3.27 Desarrollar en serie de potencias en un entorno de $z_0 = 0$ las siguientes funciones:

i) $\dfrac{2\,z}{1+z^4}$ *ii*) $\dfrac{e^{-z}}{1+z}$ *iii*) $\dfrac{\log(1-z)}{z-1}$ *iv*) $\sin^2(z)$.

3.28 Determinar el desarrollo de Taylor de la función f en el punto z_0 que se indica en cada uno de los siguientes casos:

i) $f(z) = e^z\,;\;\; z_0 = i$.

ii) $f(z) = \dfrac{z+8}{(z^2 - 3\,i\,z - 2)^2}\,;\;\; z_0 = 1$.

iii) $f(z) = \cos^4(z)\,;\;\; z_0 = 0$.

iv) $f(z) = z^3 \sin(z)\,;\;\; z_0 = \pi$.

3.29 Consideremos la rama principal del logaritmo. Si $|z| < 1/2$, probar que

$$\frac{|z|}{2} \le \big|\log(1+z)\big| \le \frac{3\,|z|}{2}\,,$$

y deducir que, dada una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, la serie numérica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge si, y sólo si, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\log(1+z_n)|$ converge.

3.30 Supongamos que la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,z^n$ tiene radio de convergencia $\rho > 0$ y denotemos por $f(z)$ a su suma en el disco $B(0,\rho)$. Se considera también un polinomio P de grado k con coeficientes complejos:

$$P(x) = c_k\,x^k + c_{k-1}\,x^{k-1} + \ldots + c_1\,x + c_0\,.$$

i) Probar que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)\,a_n\,z^n$$

tiene también radio de convergencia igual a ρ. Denotemos por g a su función suma.

ii) Para cada entero no negativo m sea φ_m la función definida en $B(0,\rho)$ por

$$\varphi_m(z) = z^m\,f^{(m)}(z)\,.$$

Comprobar que g es combinación lineal de las $k+1$ funciones φ_m con $0 \le m \le k$.

iii) Se definen las funciones ψ_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$ mediante la siguiente relación de recurrencia:

$$\psi_0 = f\,; \qquad \psi_{m+1}(z) = z\,\psi_m'(z)\,, \quad m \ge 0$$

Probar que también g es combinación lineal de las $k+1$ funciones ψ_m con $0 \le m \le k$.

iv) Sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\,n^2 - 2\,i\,n - i}{n!}\,z^n$.

3.31 Determinar la suma de las siguientes series de potencias, indicando su abierto de convergencia:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2-i)^{2n}}{2\,n}$ *viii*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+2)\,n!}$ *xv*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n)!}\,(z-i)^{2n}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}$ *ix*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(2\,i)^n}\,z^n$ *xvi*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{i^n(2n)!}\,z^{2n}$

iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(z-i)^n}{n\,(n-1)}$ *x*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n)!}\,(z+3)^{2n}$ *xvii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)}\,z^n$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,2n}{(2n+1)!}\,z^{2n+1}$ *xi*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{n!}\,(z+i)^n$ *xviii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n!}\,(z+1)^n$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{2^n\,(n+1)}$ *xii*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2\,n+1)\,z^{2n}$ *xix*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\,z^{2n}$

vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\,(z+2)^{n-1}$ *xiii*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}\,z^{2n+1}$ *xx*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+1}{n!}\,z^n$

vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^3+1)\,z^{n-1}$ *xiv*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n+2)(n+1)}$ *xxi*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!}\,z^n$

3.32 Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho=1$ y $f(z)$ su suma en el disco unidad $B(0,1)$. Supongamos además que la serie converge en $z_1=1$, esto es, que la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, y denotemos por $s_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$ a sus sumas parciales y por $s=\lim_{n\to\infty} s_n$ a su suma.

i) Probar que $f(z)-s=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-s)\,z^n$ para cada $z\in B(0,1)$.

ii) Sea S_α un sector angular con vértice en 1, de amplitud $\alpha<\pi$ e interior al disco $B(0,1)$. Utilícese la acotación obtenida en el ejercicio 1.31 para deducir que

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in S_\alpha}} f(z)=s\,. \qquad \text{(\textbf{\textit{teorema del límite, de Abel}})}$$

iii) Generalizar lo anterior al caso en que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ tenga radio de convergencia $\rho<\infty$ y converja en algún punto z_1 con $|z_1-z_0|=\rho$.

iv) Calcular las sumas de las siguientes series condicionalmente convergentes:

$$1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad\qquad 2)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+1}\,.$$

3.33 Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}=z+z^2+z^4+z^8+\ldots$$

(véase: $a_k=1$ si $k=2^n$ es una potencia de 2 y $a_k=0$ en el resto de los casos).

i) Si f es la función suma de la serie, comprobar que para cada $m\in\mathbb{N}$ existe un polinomio P_m tal que

$$f(z^{2^m})=f(z)-P_m(z)\,, \qquad |z|<1\,.$$

ii) Deducir que f no está acotada en ningún radio del disco unidad $D=B(0,1)$ con extremo en puntos de la forma $z_{m,k}=\exp(2\pi k\,i/2^m)$, $m,k\in\mathbb{N}$.

iii) Comprobar que el conjunto $\{z_{m,k}\,:\,m,k\in\mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{T}$ y deducir que no puede prolongarse f de forma continua a ningún punto de la adherencia de D.

3.34 (Ecuaciones diferenciales lineales) Consideremos una ecuación diferencial lineal de orden p, es decir, del tipo

$$c_p(t)\,y^{(p)}(t) + c_{p-1}(t)\,y^{(p-1)}(t) + \ldots + c_1(t)\,y'(t) + c_0(t)\,y(t) = b(t) \tag{3.5}$$

Si los coeficientes c_k y el término independiente b son funciones analíticas en un entorno del punto t_0 y, además, $c_p(t_0) \neq 0$, la ecuación (3.5) se puede reinterpretar en la incógnita $y(z)$, como función analítica en un entorno de $z_0 = t_0$

$$y^{(p)}(z) + \gamma_{n-1}(z)\,y^{(p-1)}(z) + \ldots + \gamma_1(z)\,y'(z) + \gamma_0(z)\,y(z) = \beta(z) \tag{3.6}$$

con $\gamma_k = {}^{c_k}\!/_{c_p}$, $1 \leq k < p$ y $\beta = {}^{b}\!/_{c_p}$.

Al sustituir en (3.6) cada función por su serie de potencias en torno a z_0 se obtienen ecuaciones cuyas incógnitas son los coeficientes de la serie de potencias que representa a $y(z)$, y que pueden ser resueltas recurrentemente (ver también la observación 3.42.i) a partir de los coeficientes de orden $0, 1, \ldots, p-1$, esto es, los valores iniciales del *problema de Cauchy* asociado.

Se pide comprobar lo anterior en las situaciones siguientes y comparar lo obtenido con la teoría clásica de ecuaciones diferenciales en intervalos de la recta.

i) $\begin{cases} y'(t) - t\,y(t) = 0, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$

ii) $\begin{cases} y'(t) - t\,y(t) = t, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$

iii) $\begin{cases} y''(t) + \omega^2\,y(t) = 0\,, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \end{cases}$

iv) $\begin{cases} y'''(t) + y''(t) = 0\,, \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ y''(0) = y_2. \end{cases}$

3.35 Resolver, en forma de serie de potencias, los siguientes problemas de Cauchy:

i) $\begin{cases} (1 - z^2)\,f''(z) - 4\,z\,f'(z) - 2\,f(z) = 0, \\ f(0) = y_0, \quad f'(0) = y_1. \end{cases}$

ii) $\begin{cases} (1 + z^2)\,f''(z) + 2\,z\,f'(z) - 2\,f(z) = 0, \\ f(0) = y_0, \quad f'(0) = y_1. \end{cases}$

iii) $\begin{cases} f''(z) - 2\,z\,f'(z) - 2\,f(z) = 0, \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 0. \end{cases}$

iv) $\begin{cases} f''(z) + z\,f'(z) + f(z) = 0, \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \end{cases}$

v) $\begin{cases} (1 - z^2)f''(z) - f(z) = 0, \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 0. \end{cases}$

3.36 Pruébese que no existe ninguna función holomorfa en un entorno de 0 verificando que

$$z^2 f'(z) + f(z) = z\,.$$

Tema 4

Integración compleja

El objeto fundamental de este capítulo es proporcionar la fórmula integral (de Cauchy) para funciones holomorfas. El hecho de que una condición aparentemente tan simple como la de derivabilidad proporcione una representación integral, que no admite análogo en ninguna otra clase de funciones, permitirá obtener una serie de asombrosos resultados, algunos de los cuales han sido ya anunciados anteriormente.

4.1. Integración a lo largo de curvas

Una función compleja definida y continua en un intervalo de la recta, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, se llama también *curva* o *arco*. La imagen de la curva γ es su *soporte* y se representa por γ^*. Diremos que γ proporciona una *parametrización* de γ^*. Si A es un subconjunto de $\mathbb{C}$ diremos que γ es una curva en A si su soporte está contenido en A; en este caso, escribiremos $\gamma\colon [a,b] \to A$.

Los puntos *inicial* y *final* de una curva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ son los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, respectivamente. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ decimos que la curva es *cerrada*. Si $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ para $s \neq t$, con la excepción de $\gamma(a) = \gamma(b)$ para curvas cerradas, diremos que γ es una curva *simple*.

Una curva paramétrica $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ se puede entender también como una curva en $\mathbb{C}$, y viceversa; así, los conceptos de regularidad (derivabilidad a trozos, tangentes, etc.) enunciados para las primeras se trasladan a este otro contexto, la única diferencia es que ahora escribimos $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$, e incluso $z(t) = x(t) + i\,y(t)$.

Igualmente, diremos que dos curvas $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\varphi\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ son *equivalentes* si existe un cambio de variable $\vartheta\colon [a,b] \to [c,d]$ tal que $\gamma(t) = \varphi\big(\vartheta(t)\big)$ para todo t; obviamente curvas equivalentes tienen el mismo soporte. En esas condiciones, decimos que además las curvas tienen la misma *orientación* si $\vartheta'(t) > 0$ para todo t.

Asimismo, se puede considerar la concatenación o *suma* de curvas, consistente en enlazar una curva con otra cuyo punto inicial es el punto final de la primera (por ejemplo, el borde de un dominio poligonal es suma de segmentos). Habitualmente, cada una de estas curvas que se suman admite una parametrización simple, de clase $\mathscr{C}^1$ y regular, y estas expresiones bastan para trabajar con la curva suma, sin necesidad de reparametrizar la curva completa en un único intervalo mediante una aplicación de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos.

En ocasiones, por ejemplo al tratar con bordes de dominios, confundiremos curvas paramétricas regulares y simples γ (que no se cortan a sí mismas) con su soporte γ^*, es decir, con la *curva geométrica* que parametrizan, obviando estos objetos y hablando simplemente de curvas, incluso cuando se tenga en mente que se está trabajando en el conjunto soporte.

Es frecuente encontrar en la literatura matemática el término *camino* (*path*, en inglés) como sinónimo de curva de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos. Asimismo, la palabra *contorno* se usa para designar el borde orientado de un dominio de Jordan.

Definición 4.1. Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos.

i) La *longitud* de la curva es el número real no negativo

$$\operatorname{long}(\gamma) := \int_a^b \big|\gamma'(t)\big|\,dt\,. \tag{4.1}$$

ii) Si f es una función compleja definida y continua en $\gamma*$, el soporte de la curva, la *integral de f en γ* es el número complejo

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt\,. \tag{4.2}$$

En lo que sigue, aunque no se mencione explícitamente, y salvo que se diga lo contrario, las curvas consideradas serán de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos (serán caminos, si se prefiere decir así). El próximo resultado es consecuencia del teorema del cambio de variable para integrales.

Lema 4.2. Sean γ y φ dos curvas equivalentes en $\mathbb{C}$, y f una función compleja definida y continua en $\gamma^* = \varphi^*$.

i) $\operatorname{long}(\gamma) = \operatorname{long}(\varphi)$.

ii) Si γ y φ tienen la misma orientación, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz\,.$$

Pero si las orientaciones de γ y φ son opuestas, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_\varphi f(z)\,dz\,.$$

Propiedades 4.3. Sean γ una curva de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos y f, g dos funciones complejas definidas y continuas en γ^*. Se verifica que:

i) Si $a, b \in \mathbb{C}$, entonces $\displaystyle\int_\gamma (a\,f + b\,g)(z)\,dz = a\int_\gamma f(z)\,dz + b\int_\gamma g(z)\,dz$.

ii) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \sup\big\{|f(z)| : z \in \gamma^*\big\}\ \operatorname{long}(\gamma)\,.$

Observaciones 4.4.

i) Si Γ es una curva geométrica orientada y de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos y f es una función compleja continua en Γ, en virtud del lema 4.2.ii, tiene sentido hablar de la *integral de f a lo largo de Γ*, que estará dada, sin ambigüedad, por

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz\,,$$

siendo γ cualquier parametrización simple de $\Gamma = \gamma^*$ coherente con su orientación. Lo mismo respecto a la longitud de Γ, concepto para el que es irrelevante la orientación.

ii) Adviértase que, en el punto anterior, la condición de ser γ simple (inyectiva) no es ociosa. Piénsese, por ejemplo, en las curvas $t \in [0, 2\pi n] \longmapsto \gamma_n(t) = e^{it}$, cuyo soporte es, para todo $n \in \mathbb{N}$, la circunferencia unidad $\mathbb{T}$. En otras palabras, no se debe confundir la longitud de una curva, observada como conjunto, con la longitud de las trayectorias o recorridos que se efectúan sobre dicha curva. Lo mismo se puede decir, claro está, acerca de la integral de una función f.

iii) Aunque las definiciones y propiedades anteriores se han enunciado para funciones continuas en el soporte de las curvas, lo que es suficiente, en los casos interesantes sucede que las funciones están definidas en abiertos que contienen al soporte de las curvas.

iv) Si f se escribe en términos de sus partes real e imaginaria, $f = u + i\,v$, su integral a lo largo de la curva $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$, $t \in [a, b]$, se escribe

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \int_a^b \Big(u\big(\gamma(t)\big)\,x'(t) - v\big(\gamma(t)\big)\,y'(t)\Big)\,dt \;+\; i\int_a^b \Big(v\big(\gamma(t)\big)\,x'(t) + u\big(\gamma(t)\big)\,y'(t)\Big)\,dt\,,$$

y cada una de estas dos integrales representa la integral de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ a lo largo de la curva $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a, b]$; concretamente

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \int_\gamma u\,dx - v\,dy \;+\; i\int_\gamma v\,dx + u\,dy \;=\; \int_\gamma (u, -v)\cdot d\boldsymbol{r} \;+\; i\int_\gamma (v, u)\cdot d\boldsymbol{r}\,. \qquad (4.3)$$

La relación (4.3) tiene más relevancia de la que en principio parece. De hecho, en muchos textos elementales de variable compleja se presentan algunos teoremas sobre integración, que veremos un poco más adelante, como consecuencia de la fórmula de Riemann-Green. Invitamos a que se vuelva a revisar este punto tras la lectura del teorema 4.11 y su corolario 4.12.

4.1.1. Primitivas

Los resultados que presentamos ahora deben resultar familiares por su similitud con la integración de campos conservativos y el estudio de la existencia de potenciales (lema de Poincaré, etc.). Baste señalar que las condiciones necesarias y suficientes para que los dos campos vectoriales reales de (4.3) sean conservativos en dominios simplemente conexos son, ni más ni menos, que las de Cauchy-Riemann. Aunque desarrollaremos la teoría de forma independiente a la de campos vectoriales, sirva este comentario para hacer una primera llamada de atención sobre el cuidado que se ha de tener con la geometría del dominio.

Definición 4.5. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua en U. Se dice que f tiene una *primitiva* en U si existe una función F definida y holomorfa en todo el abierto U de tal manera que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in U$.

Proposición 4.6 (Regla de Barrow). Sea f una función continua en el abierto U con primitiva F en dicho conjunto, y sea $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ una curva de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz = F\big(\boldsymbol{\gamma}(b)\big) - F\big(\boldsymbol{\gamma}(a)\big)\,.$$

Teorema 4.7. Sean U un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua. Son equivalentes los siguientes enunciados:

i) La integral de f a lo largo de una curva con soporte contenido en U sólo depende de los extremos de la curva, es decir, si $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ y $\boldsymbol{\varphi}\colon [c,d] \to U$ son de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos y con los mismos extremos ($\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\varphi}(c)$, $\boldsymbol{\gamma}(b) = \boldsymbol{\varphi}(d)$), entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f(z)\,dz.$$

ii) La integral de f a lo largo de cualquier curva cerrada con soporte contenido en U es nula, esto es, si $\boldsymbol{\gamma}\colon [a,b] \to U$ es una curva cerrada de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, entonces

$$\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz = 0.$$

iii) f tiene una primitiva en U.

Observaciones 4.8.

i) El símbolo $\oint$ que aparece en la condición 4.7.ii sólo sirve para enfatizar el carácter cerrado de la curva y es opcional, bien se puede poner $\int_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz$, como en el caso general.

ii) La equivalencia de 4.7.i y 4.7.ii se deduce del lema 4.2.ii, y la condición 4.7.iii implica 4.7.i y 4.7.ii como consecuencia de la regla de Barrow 4.6. Por último, si se verifica 4.7.i, fijado un punto $z_0 \in U$ y elegida para cada $z \in U$ una curva $\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}$ de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, con origen z_0 y extremo z y con soporte contenido en U, la función F dada por

$$F(z) = \int_{\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}} f(w)\,dw \quad \text{si } z \in U\,,$$

está bien definida y es una primitiva de f en U.

iii) Si el abierto U es estrellado (respecto de uno de sus puntos, digamos z_0), para la construcción de una primitiva de f es suficiente con que la condición 4.7.ii se verifique para los bordes de triángulos contenidos en U, y la curva $\boldsymbol{\gamma}_{z_0,z}$ del apartado anterior se puede tomar como el segmento de extremos z_0 y z.

iv) El comentario anterior sugiere prestar atención a estas curvas sencillas: dados dos puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, denotaremos por $[z_1, z_2]$ al *segmento orientado* de extremos z_1 y z_2, que se puede parametrizar, por ejemplo, $t \in [0,1] \longmapsto z_1 + t\,(z_2 - z_1)$. Para una función f continua en el segmento incluso se escribe

$$\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$$

imitando a las integrales en intervalos de la recta real, que no dejan de ser un caso particular de éstas.

Como consecuencia inmediata del teorema 4.7, es posible estudiar la existencia de logaritmos holomorfos (o analíticos, como veremos) para una función holomorfa en un abierto, concepto que pasamos a definir.

Definición 4.9. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Se dice que una función compleja g definida en U es un *logaritmo analítico u holomorfo* de f en U si g es holomorfa en U y

$$\exp\big(g(z)\big) = f(z) \quad \text{para cada} \quad z \in U\,.$$

Obviamente, una función que admita logaritmo analítico en U no puede anularse en U.

Proposición 4.10. Sea f una función holomorfa en el abierto U y que no se anula en U. Son equivalentes:

a) f admite logaritmo analítico en U.

b) f'/f admite primitiva en U.

c) La integral de f'/f a lo largo de cualquier curva cerrada de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos con soporte contenido en U es nula.

4.2. Fórmula integral de Cauchy. Primeras consecuencias

El primer resultado que se presenta, y que es el punto de arranque de la teoría que conduce a la fórmula que da título a esta sección, se basa en la aproximación lineal que proporciona la derivada, $f(z)-f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0)+o(z-z_0)$, junto con el hecho de que todo polinomio admite primitiva en todo $\mathbb{C}$ (en particular, $f'(z_0)(z-z_0)$).

Teorema 4.11 (de Cauchy-Goursat para triángulos). Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua en U y derivable en todos los puntos de U excepto quizá en una cantidad finita de ellos. Si T es un triángulo cuya adherencia está contenida en U, es decir, la unión de T y su borde o frontera ∂T es tal que $T \cup \partial T \subset U$, entonces

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0\,.$$

Procediendo como se indicó en la observación 4.8.iii se deduce el siguiente

Corolario 4.12 (Teorema de Cauchy-Goursat en dominios estrellados). Sean U un abierto estrellado de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua en U y derivable en todos los puntos de U excepto quizá en una cantidad finita de ellos. Entonces f tiene primitiva en U y por tanto

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

para toda curva γ cerrada y de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos con soporte contenido en U.

Observación 4.13. Una versión más débil del teorema de Cauchy-Goursat es la siguiente:

Si se supone f holomorfa en todo el abierto U y f' continua en U, para el caso en que la curva cerrada $\Gamma = \partial D$ sea el borde de un *dominio de Jordan* D con $\overline{D} \subset U$, la igualdad

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 0$$

se deduce inmediatamente de la fórmula de Riemann-Green, aplicada a las integrales de campo que aparecen en (4.3), y teniendo en cuenta las condiciones de Cauchy-Riemann.

Pero la continuidad de la derivada, como ya se ha anunciado, es una hipótesis redundante que se obtendrá como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy, que establece una enorme diferencia en el tratamiento y los resultados aplicables a esta clase de funciones. No deja de ser asombroso el hecho de que una condición aparentemente tan simple como la de la derivabilidad proporcione una representación integral como la que se presenta a continuación.

Notación: Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, se denotará por $C(z_0, r)$ a la circunferencia de centro z_0 y de radio r, como borde orientado del disco $B(z_0, r)$, o si se prefiere, parametrizada y orientada de forma simple por $\boldsymbol{\gamma}_{z_0,r} \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, siendo

$$\boldsymbol{\gamma}_{z_0,r}(t) = z_0 + r\,e^{it}\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,. \tag{4.4}$$

En particular, $C(z_0, r) = \boldsymbol{\gamma}^*_{z_0,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}\,.$

Lema 4.14. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Se tiene que:

i) Si $|z - z_0| > r$, entonces $\displaystyle\oint_{C(z_0,r)} \frac{1}{w - z}\,dw = 0\,.$

ii) Si $|z - z_0| < r$, entonces

$$\oint_{C(z_0,r)} \frac{1}{w - z}\,dw = \oint_{C(z_0,r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw = 2\,\pi\,i\,.$$

Teorema 4.15 (Fórmula integral de Cauchy para circunferencias). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $f \colon U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo U y $z_0 \in U$. Si el disco cerrado $\overline{B}(z_0, r)$ está totalmente contenido en U, entonces para todo $z \in B(z_0, r)$ se verifica que

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z}\,dw \tag{4.5}$$

La representación como suma geométrica de $(w - z)^{-1}$ utilizada en 4.14.ii sirve también para probar el siguiente resultado de *holomorfía bajo el signo integral*:

Lema 4.16. Sean $\boldsymbol{\gamma}$ una curva de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos en $\mathbb{C}$ y h una función continua en $\boldsymbol{\gamma}^*$. La función f definida en $\mathbb{C} \setminus \boldsymbol{\gamma}^*$ por

$$f(z) = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{h(w)}{w - z}\,dw$$

es analítica en $\mathbb{C} \setminus \boldsymbol{\gamma}^*$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f^{(n)}(z) = n! \int_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{h(w)}{(w - z)^{n+1}}\,dw\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \boldsymbol{\gamma}^*\,.$$

Recordemos que toda función analítica, es decir, que se puede representar en un entorno de cada punto como la suma de una serie de potencias, es holomorfa (teorema 3.32). A partir de la fórmula integral de Cauchy y el lema anterior se obtiene el recíproco.

Teorema 4.17. Si f es una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$, entonces f es analítica en U. En particular, f es indefinidamente derivable en dicho abierto.

Observación 4.18. El teorema anterior tiene también otra lectura muy interesante: si $B(z_0, R)$ es el mayor disco abierto centrado en z_0 y contenido en U, entonces la *serie de Taylor de f en el punto z_0*, esto es, la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n \tag{4.6}$$

tiene radio de convergencia mayor o igual que R. En particular, si $U = \mathbb{C}$, la serie (4.6) converge en todo $\mathbb{C}$. Esto viene a justificar el adjetivo de *enteras* que se ha dado a las funciones analíticas en todo $\mathbb{C}$. Resulta que la serie que representa, en el sentido de la definición 3.37, a una de tales funciones alrededor de un punto z_0, no sólo converge en un entorno del punto, sino en todo el plano, es una serie *entera*.

Corolario 4.19. Si f es una función en un abierto U de $\mathbb{C}$ y tiene una primitiva en U, entonces es holomorfa en dicho abierto.

Corolario 4.20. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función continua en todo U y derivable en todos los puntos de U excepto quizá en una cantidad finita de ellos, $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Entonces f es holomorfa en todo U.

Observaciones 4.21.

i) En otras palabras, el corolario 4.20 dice que en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ la función f tiene *singularidades aisladas evitables*, concepto que trataremos ampliamente en temas posteriores.

ii) Es posible generalizar la fórmula de Cauchy a curvas cerradas, simples y de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, siempre que su soporte junto con el *dominio de Jordan* que encierran se encuentre contenido en el abierto de holomorfía correspondiente. Una vez que se dispone del carácter indefinidamente derivable de la función son aplicables los argumentos presentados en la observación 4.13.

Teorema 4.22 (Fórmula integral de Cauchy para curvas de Jordan). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo U. Si D es un dominio de Jordan tal que su adherencia $D \cup \partial D$ está contenida en U, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \quad \text{para todo } z \in D, \tag{4.7}$$

considerando en ∂D la orientación inducida por D. En consecuencia, si $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw \quad \text{para todo } z \in D. \tag{4.8}$$

Cerramos esta sección con el recíproco del teorema de Cauchy-Goursat, que es consecuencia del corolario 4.19 y de la observación 4.8.iii.

Teorema 4.23 (de Morera). Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función continua en U tal que

$$\oint_{\partial T} f(z)\, dz = 0$$

para cada triángulo T con $\overline{T} \subset U$. Entonces f es holomorfa en U.

4.3. Otras consecuencias de la fórmula de Cauchy

El siguiente resultado garantiza la holomorfía de la función límite de una sucesión de funciones holomorfas bajo condiciones naturales. Al contrario que en los teoremas análogos sobre funciones de variable(s) real(es), en que la convergencia uniforme de las sucesiones de derivadas es condición a priori, ahora la convergencia de las derivadas es resultado de la mera convergencia uniforme de la sucesión de funciones. Sin entrar en detalles, el teorema de Weierstrass establece la completitud del espacio métrico $\mathcal{H}(U)$ de las funciones holomorfas en U (ver también la sección 6.4).

Teorema 4.24 (de Weierstrass). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en U que converge uniformemente en los compactos de U hacia la función f. Entonces, f es holomorfa en U, y para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de U hacia $f^{(k)}$.

Otra consecuencia interesante de la fórmula integral de Cauchy es el hecho de que las derivadas de una función holomorfa se puedan acotar en términos de los valores de la función.

Proposición 4.25 (Desigualdades de Cauchy para las derivadas). Sea f una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$. Si el disco cerrado $\overline{B}(z_0, r)$ está contenido en U, entonces, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, se verifica que

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup \left\{ \left|f(w)\right| : |w - z_0| = r \right\}.$$

Corolario 4.26 (Teorema de Liouville). Sea f una función compleja definida y holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Si f es acotada, es decir, si existe $M > 0$ con $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

Corolario 4.27. Si $f = u + i\,v$ es una función entera no constante, entonces su imagen es densa en $\mathbb{C}$, esto es, $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$. Por tanto, las imágenes de sus partes real e imaginaria son toda la recta: $u(\mathbb{C}) = v(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$.

Corolario 4.28 (Teorema fundamental del Álgebra). Si P es un polinomio de grado mayor o igual que 1 con coeficientes complejos, P tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. De hecho, si el grado de P es $n \geq 1$, entonces P se escribe

$$P(z) = a_n\, z^n + \ldots + a_1\, z + a_0 \;=\; a_n\,(z - r_1)^{m_1}(z - r_2)^{m_2} \cdots (z - r_k)^{m_k}\,,$$

siendo m_j la multiplicidad de la raíz r_j y $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

4.3.1. Ceros de funciones holomorfas. Principios de identidad

En el corolario 3.30 dábamos una versión del principio de identidad para funciones analíticas. Ahora mejoraremos dicho resultado a partir de la noción de *orden de un cero* que definimos a continuación.

Definición 4.29. Sean f una función holomorfa en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y k un número natural. Se dice que f tiene un *cero de orden* k en el punto z_0 si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f^{(k)}(z_0) \neq 0\,.$$

Observaciones 4.30.

i) En ocasiones convendrá admitir que también pueda ser $k = 0$ el orden del cero de f en el punto z_0, entendiendo en este caso que $f(z_0) \neq 0$. No obstante, cuando hablemos en general de los ceros de una función siempre se entenderá que lo son en sentido propio, esto es, que el orden k es al menos 1.

ii) Si f es holomorfa en un disco $B(z_0, \delta)$ y tiene en el punto z_0 un cero de orden $k \geq 1$, entonces para cada $z \in B(z_0, \delta)$ se tiene que

$$f(z) \;=\; \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \;=\; (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-k} \;=\; (z - z_0)^k\, \varphi(z)\,,$$

siendo φ una función holomorfa en $B(z_0, \delta)$ y tal que $\varphi(z_0) = f^{(k)}(z_0)/_{k!} \neq 0$.
Recíprocamente, si f se escribe en $B(z_0, \delta)$ como $f(z) = (z - z_0)^k\, \varphi(z)$, siendo $k \geq 1$ y φ holomorfa en este disco y con $\varphi(z_0) \neq 0$, entonces f tiene en z_0 un cero de orden k.

Teorema 4.31 (Principio de los ceros aislados). Sea f una función holomorfa en un abierto conexo U de $\mathbb{C}$. Supongamos que existe un subconjunto $A \subset U$ tal que:

1. $f(a) = 0$ para cada $a \in A$.
2. A tiene al menos un punto de acumulación en U (es decir, $A' \cap U \neq \emptyset$).

Entonces f es la función idénticamente nula en U. De otro modo, y de ahí el nombre del resultado, los ceros de una función holomorfa no idénticamente nula en un abierto conexo han de ser aislados.

Corolario 4.32 (Principio de identidad). Sean f y g dos funciones holomorfas en un mismo abierto conexo U de $\mathbb{C}$ que coinciden en un subconjunto A que tiene al menos un punto de acumulación en U. Entonces $f(z) = g(z)$ para cada $z \in U$.

Observaciones 4.33.

i) Por supuesto, los dos resultados anteriores son falsos si el abierto U no es conexo.

ii) La forma práctica habitual de aplicar el principio de identidad, fruto de la caracterización secuencial de la topología euclídea, consiste en considerar como conjunto A el rango de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de U, con $a_n \neq a_m$ si $n \neq m$, y que converge hacia un punto $a \in U$.

iii) Quizá el lector se haya preguntado si es posible extender las funciones de variable real (exponenciales, trigonométricas, hiperbólicas) a $\mathbb{C}$ de otra forma distinta a la expuesta en el tema 2. La respuesta es obviamente que no: si dos funciones enteras coinciden en un segmento de la recta real, que tiene infinitos puntos de acumulación, han de ser iguales en todo el plano.

4.3.2. Principio del módulo máximo

La siguiente aplicación de la fórmula integral de Cauchy, la propiedad de la media, está íntimamente ligada a la de funciones armónicas y subarmónicas. A partir de ella se obtiene fácilmente el principio del módulo máximo en sus distintas versiones.

Lema 4.34 (Propiedad de la media). Sea f una función holomorfa en un abierto que contiene al disco cerrado $\overline{B}(z_0, r)$. Entonces

i) El valor de f en z_0 es el promedio de los valores de $f(z)$ sobre la circunferencia $C(z_0, r)$, es decir, se verifica la denominada *Propiedad de la media de Gauss*:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\big(z_0 + r\,e^{i\,t}\big)\,dt\,. \tag{4.9}$$

ii) Como consecuencia,

$$\big|f(z_0)\big| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|f\big(z_0 + r\,e^{i\,t}\big)\Big|\,dt\,. \tag{4.10}$$

Observación 4.35. Si denotamos en la forma habitual $f = u + i\,v$, tomando partes reales e imaginarias en (4.9) se deduce la misma propiedad para u y v. En general, esta propiedad la verifican las funciones armónicas (ver ejercicio 2.31).

Una función real g definida en un abierto U se llama *subarmónica* si sus promedios en los bordes de cada disco cerrado contenido en U son mayores que el valor que toma en el centro del disco. Toda función armónica es, evidentemente subarmónica, y la propiedad (4.10) dice que $|f|$ es *subarmónica*.

Las funciones subarmónicas y no constantes en un dominio D no pueden alcanzar máximos relativos en ningún punto del abierto. Esto se concreta en los siguientes resultados.

Teorema 4.36 (del módulo máximo). Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Entonces:

i) Si $|f|$ presenta un máximo local en un punto $z_0 \in U$, es decir, si existe un entorno V de z_0 con $V \subset U$ y de modo que $|f(z_0)| \ge |f(z)|$ para todo $z \in V$, entonces f es constante en U.

ii) Supongamos además que U es acotado y que f es continua en $\overline{U}$. Entonces, $|f|$ alcanza su máximo absoluto en la frontera de U; es decir, existe un punto $\xi \in \mathrm{Fr}(U)$ tal que $|f(\xi)| \ge |f(z)|$ para todo $z \in U$.

Corolario 4.37 (Teorema del módulo mínimo). Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U tal que $f(z) \ne 0$ para cada $z \in U$. Entonces:

i) Si $|f|$ presenta un mínimo local en un punto $z_0 \in U$, es decir, existe un entorno V de z_0 con $V \subset U$ y de modo que $|f(z_0)| \le |f(z)|$ para todo $z \in V$, entonces f es constante en U.

ii) Supongamos además que U es acotado y que f es continua en $\overline{U}$. Entonces, $|f|$ alcanza su mínimo absoluto en $\mathrm{Fr}(U)$; es decir, existe un punto ξ de la frontera de U tal que $|f(\xi)| \le |f(z)|$ para todo $z \in U$.

Corolario 4.38. Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f = u + iv$ una función holomorfa en U. Entonces:

i) Si la parte real u, o la parte imaginaria v, de f presentan un extremo local (máximo o mínimo) en un punto de U, entonces f es constante en U.

ii) Supongamos además que U es acotado y f es continua en $\overline{U}$. Entonces, u y v alcanzan sus extremos (máximo y mínimo) absolutos en la frontera de U.

Una consecuencia muy útil del teorema del módulo máximo es el resultado siguiente.

Lema 4.39 (de Schwarz). Sea $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le 1$ para todo $z \in B(0,1)$. Entonces:

i) Para todo $z \in B(0,1)$ se tiene que $|f(z)| \le |z|$ y $|f'(0)| \le 1$.

ii) Si para algún $z \in B(0,1) \setminus \{0\}$ se tiene que $|f(z)| = |z|$, o si $|f'(0)| = 1$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$ tal que $f(z) = c\,z$ para todo $z \in B(0,1)$.

4.3.3. Comportamiento local de las funciones analíticas

Los resultados previos nos permiten ahora mejorar, de forma sustancial, la primera versión el teorema de las funciones inversas 2.13. Lo primero es que, aunque la derivada de una función holomorfa y no constante sea nula en un punto, la función transforma entornos del punto en entornos de su imagen, no necesariamente de forma inyectiva, claro. Luego podremos precisar, si no hay inyectividad, de qué manera se pueden repetir valores.

Teorema 4.40 (de la aplicación abierta). Sea f una función holomorfa y no constante en un abierto conexo U. Entonces f es una aplicación abierta, es decir, para cada abierto $V \subset U$ se tiene que $f(V)$ es abierto.

El siguiente resultado es consecuencia del teorema de Cauchy-Goursat 4.12 y la proposición 4.10. Más adelante, dentro de la teoría global de Cauchy, daremos una versión general del mismo en dominios simplemente conexos.

Lema 4.41. Si D es un dominio estrellado (un disco abierto, por ejemplo) y f es una función holomorfa y no nula en D, entonces f tiene un logaritmo analítico en D y, en consecuencia, raíces analíticas de cualquier grado.

Teorema 4.42 (Variación local de una función holomorfa). Sean U un dominio, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa y no constante en U. Sea $m \geq 1$ el orden del cero de la función $g(z) = f(z) - f(z_0)$ en el punto z_0. Entonces existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B(z_0, \delta) \subset U$ y para cada $w \in B\big(f(z_0), \varepsilon\big) \setminus \{f(z_0)\}$ hay exactamente m puntos distintos $z_j \in B(z_0, \delta)$, $1 \leq j \leq m$, tales que $f(z_j) = w$.

Observaciones 4.43.

i) La interpretación geométrica del teorema 4.42 es sencilla: viene a decir que si f se escribe en los términos de la observación 4.30.ii, $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$, entonces la variación de f es similar a la del monomio $P(z) = \varphi(z_0)\,(z - z_0)^m$. Véase que para $w \neq 0$ la igualdad $P(z) = w$ significa que $z - z_0$ es una raíz m-ésima de ${}^{w}\!/_{\varphi(z_0)}$.

ii) Cuando se particulariza en el caso $m = 1$, se obtiene la equivalencia entre el carácter localmente inyectivo de f en z_0 y el hecho de que $f'(z_0) \neq 0$; a partir de aquí se sigue la conclusión del teorema 2.13, es decir, que f es una biyección local con inversa holomorfa.

Si la inyectividad se verifica de forma global se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.44. Si f es una función holomorfa e inyectiva en un abierto U de $\mathbb{C}$, entonces f es biholomorfa, esto es $f^{-1} \colon f(U) \to U$ es también holomorfa.

4.4. Teoría general de Cauchy

La materia expuesta hasta este momento se suele denominar, dependiendo de autores, *teoría elemental*, o *local, de Cauchy*, en cuanto a que la fórmula de Cauchy se establece integrando en bordes de dominios sencillos (triángulos o discos), suficiente si se trabaja en abiertos convexos, o estrellados, sin más. Aunque los resultados contemplados hasta este momento dan respuesta a numerosos problemas, algunos han sido resueltos sólo parcialmente o en situaciones especiales. Algunas preguntas naturales son las que se recogen en las siguientes observaciones.

Observaciones 4.45.

i) Dado un abierto U, uno puede preguntarse a lo largo de qué curvas cerradas en U se tiene que la integral de cualquier función holomorfa en U es nula, o para qué curvas es posible generalizar adecuadamente la fórmula integral de Cauchy para representar a toda función holomorfa en U. La respuesta rigurosa a ambas cuestiones requiere del concepto de índice de una curva respecto de un punto en el complementario de su soporte.

ii) Otra cuestión interesante es la de para qué abiertos U la integral de cualquier función holomorfa en U a lo largo de cualquier curva cerrada en U es nula. Como se ha visto en el teorema 4.7, este hecho está íntimamente ligado con la posibilidad de construir primitivas para toda función holomorfa en el abierto. La función $f(z) = {}^1\!/_z$ definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ muestra un ejemplo de abierto en el que no toda función holomorfa admite primitiva (ver también el ejercicio 4.13). Por otra parte, el corolario 4.12 proporciona una clase de abiertos, los estrellados, para los que esta construcción sí es posible, lo que pone de relieve la importancia de la geometría del abierto. Veremos que la condición de conexión simple (ver definición 1.71) es la adecuada para caracterizar estas propiedades.

Definición 4.46. Sean X un espacio topológico y $f\colon X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua.

i) Se dice que f tiene un *argumento continuo* si existe una función continua $\vartheta\colon X \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que $\vartheta(x)$ es un argumento de $f(x)$.

ii) Se dice que f tiene un *logaritmo continuo* si existe una función continua $g\colon X \to \mathbb{C}$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que $f(x) = e^{g(x)}$.

Lema 4.47. Sea X un espacio topológico. Una función continua $f\colon X \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tiene logaritmo continuo si, y sólo si, tiene argumento continuo. Concretando más:

i) Si g es un logaritmo continuo de f entonces $\operatorname{Im}(g)$ es un argumento continuo de f.

ii) Si ϑ es un argumento continuo de f, entonces $\ln|f| + i\,\vartheta$ es un logaritmo continuo de f.

Observaciones 4.48.

i) Es obvio que si la imagen de f está contenida en una de las regiones W_c, ver (2.4), entonces f tiene logaritmo continuo (y argumento continuo según el lema 4.47); basta considerar la composición de f con la correspondiente rama del logaritmo: $g = \log_c \circ f$. Pero este es el caso menos interesante.

ii) También es evidente que si f es holomorfa en un dominio $U \subset \mathbb{C}$, no se anula en ningún punto y admite logaritmo holomorfo en U (ver definición 4.9 y proposición 4.10), entonces dicho logaritmo holomorfo es también un logaritmo continuo de f.

iii) No se debe confundir la existencia de argumentos continuos de una función $f\colon X \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ con la continuidad del argumento en su imagen $f(X) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. El ejemplo siguiente es sencillo, pero muy significativo:

Es imposible definir de forma continua una función $\theta\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(z)$ sea un argumento de z para cada $z \in \mathbb{T}$. Ahora bien, la curva $\boldsymbol{\gamma}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $\boldsymbol{\gamma}(t) = e^{it}$ tiene argumento continuo, que es precisamente $\vartheta(t) = t$, aunque su soporte sea $\boldsymbol{\gamma}^* = \mathbb{T}$.

El caso de la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = e^{it}$ no es más que uno particularmente sencillo del resultado que recoge el siguiente teorema (ver también el ejercicio 4.9).

Teorema 4.49. Sea $\boldsymbol{\gamma}\colon [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua. Entonces $\boldsymbol{\gamma}$ tiene argumentos continuos. Además, si ϑ_1 y ϑ_2 son dos argumentos continuos de $\boldsymbol{\gamma}$, se verifica que

$$\vartheta_1(b) - \vartheta_1(a) \;=\; \vartheta_2(b) - \vartheta_2(a)\,.$$

Este teorema avala la coherencia de la siguiente definición.

Definición 4.50. Sea $\boldsymbol{\gamma}\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ continua y $z \notin \boldsymbol{\gamma}^*$.

i) La *variación del argumento de* $\boldsymbol{\gamma}$ alrededor de z es la cantidad $\vartheta(b) - \vartheta(a)$, siendo ϑ cualquier argumento continuo de la curva $\boldsymbol{\gamma} - z$.

ii) Si $\boldsymbol{\gamma}$ es cerrada, el *índice de* $\boldsymbol{\gamma}$ *respecto de* z es

$$\operatorname{Ind}_{\boldsymbol{\gamma}}(z) = \frac{\vartheta(b) - \vartheta(a)}{2\,\pi}\,. \tag{4.11}$$

El número entero $\operatorname{Ind}_{\boldsymbol{\gamma}}(z)$ representa el *número de vueltas* (el signo indica la orientación) que da la curva γ alrededor del punto z.

Proposición 4.51. Sea γ una curva cerrada y de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos en $\mathbb{C}$. Para cada $z \notin \gamma^*$ pongamos

$$\eta(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dw}{w - z}. \tag{4.12}$$

Entonces

i) $\eta(\gamma, z)$ es un número entero para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

ii) La función $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* \mapsto \eta(\gamma, z)$ es constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

iii) $\eta(\gamma, z) \equiv 0$ en la única componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

iv) Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ es $\eta(\gamma, z) = \operatorname{Ind}_\gamma(z)$, el *índice de γ respecto de z* dado por (4.11).

Observaciones 4.52.

i) No hay unanimidad sobre la notación a usar para representar el índice. De ahora en adelante nosotros utilizaremos $\eta(\gamma, z)$, incluso cuando γ no sea de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos. Nótese que la noción de índice dada por (4.11) tiene sentido aunque la curva no sea rectificable, a diferencia de la expresión (4.12), dada por una integral.

ii) Tampoco hay unanimidad en la terminología y, dependiendo de autores, se puede leer también "*índice de z respecto γ*" en lugar de "*índice de γ respecto de z*". Quizá esto se deba a la forma de pensar en el número entero $\eta(\gamma, z)$: en el primer caso como función de z para una curva fija γ, más acorde con la notación $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$; o como función de γ fijado el punto z, visión que se adapta más a la nomenclatura que hemos adoptado. De cualquier forma esta discrepancia no supone ninguna traba en el desarrollo de la teoría.

iii) Un ejemplo sencillo: si $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y $\gamma_{z_0,r}$ es la curva definida por (4.4), es fácil comprobar que

$$\eta(\gamma_{z_0,r}, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in B(z_0, r), \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r). \end{cases} \tag{4.13}$$

En la situación considerada en el teorema 4.15, la fórmula integral de Cauchy para circunferencias, si f es holomorfa en U y $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ y elegimos $z \in U \setminus \overline{B}(z_0, r)$, entonces

$$\oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = 0, \tag{4.14}$$

pues $f(w)/(w - z)$ es holomorfa en un convexo $B(z_0, s) \subset U$ con $r < s < |z - z_0|$. Por lo tanto, a la vista de (4.13), para todo $z \in U \setminus \gamma^*_{z_0,r}$ las igualdades (4.5) y (4.14) se pueden escribir en una sola:

$$\eta(\gamma_{z_0,r}, z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw. \tag{4.15}$$

Como veremos a continuación, esta es la forma general que adopta la fórmula integral de Cauchy para curvas cuyo índice respecto de cada punto fuera de U es siempre 0.

Antes proporcionamos una generalización del lema de derivación 4.16.

Lema 4.53 (Holomorfía bajo el signo integral). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, γ una curva en $\mathbb{C}$ y $F \colon U \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua en $U \times \gamma^*$. Se define

$$f(z) := \int_\gamma F(z, w)\, dw, \qquad z \in U.$$

Entonces la función f es continua en U.

Si, además, F es holomorfa respecto de z (explícitamente: para cada $w \in \gamma^*$ la función $F_w(z) := F(z, w)$ es holomorfa en U), entonces f es holomorfa en U y

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial F}{\partial z}(z, w)\, dw.$$

Estamos en condiciones de establecer el teorema de Cauchy en su versión homológica, que proporciona respuesta a la pregunta planteada en la observación 4.45.i.

Teorema 4.54 (de Cauchy, versión homológica). Sean U un abierto y γ una curva cerrada y de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos en U. Son equivalentes los siguientes enunciados:

a) Para todo $z \notin U$ se tiene que $\eta(\gamma, z) = 0$.

b) Para toda función f holomorfa en U se tiene que $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

c) Para toda función f holomorfa en U y para todo $z \in U \setminus \gamma^*$ se tiene que

$$\eta(\gamma, z)\, f(z) = \frac{1}{2\,\pi\, i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw. \tag{4.16}$$

Observaciones 4.55.

i) Es usual referirse a la implicación a) ⇒ b) del teorema 4.54 como *Teorema de Cauchy*, mientras que a) ⇒ c) es, específicamente, la *Fórmula Integral de Cauchy*.

ii) Si γ es una curva cerrada con soporte contenido en U y tal que $\eta(\gamma, z) = 0$ para todos los $z \in \mathbb{C} \setminus U$, se dice que γ es *homóloga a* 0, o *nulhomóloga, respecto de* U.

Es obvio que si una curva es nulhomóloga respecto del abierto U, entonces también lo será respecto de otro abierto más grande $V \supset U$, pues en este caso $\mathbb{C} \setminus V \subset \mathbb{C} \setminus U$, pero no recíprocamente.

iii) El teorema homológico 4.54 se puede generalizar considerando objetos geométricos más complicados que las curvas, las denominadas cadenas y ciclos, que presentamos a continuación. Estos objetos son, asimismo, necesarios para la correcta interpretación de la naturaleza de los abiertos simplemente conexos, que gozan de las propiedades indicadas para dar respuesta positiva a la cuestión planteada en la observación 4.45.ii.

Definición 4.56. Dadas curvas paramétricas y de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ y números enteros $k_1, k_2, \ldots, k_m$, la combinación formal[1]

$$\gamma := \sum_{j=1}^{m} k_j\,\gamma_j = k_1\,\gamma_1 + k_2\,\gamma_2 + \ldots + k_m\,\gamma_m \tag{4.17}$$

se llama *cadena de curvas*. Un *ciclo* es una *cadena cerrada*, esto es, tal que todas las curvas γ_j que figuran en (4.17) son cerradas. Para una cadena se definen:

i) El *soporte* de la cadena (4.17) es la unión de los soportes de las curvas que la componen,

$$\gamma^* := \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_j^*\,.$$

Diremos que γ es una cadena en U si $\gamma^* \subset U$.

ii) La *longitud* de la cadena (4.17) es el número real no negativo

$$\mathrm{long}(\gamma) := \sum_{j=1}^{m} |k_j|\,\mathrm{long}(\gamma_j)\,.$$

iii) Para una función f continua en γ^*, la *integral* de f a lo largo de γ es

$$\int_\gamma f(w)\,dw := \sum_{j=1}^{m} k_j \int_{\gamma_j} f(w)\,dw\,. \tag{4.18}$$

iv) Si γ es un ciclo, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ el *índice* de γ respecto de z es

$$\eta(\gamma, z) := \sum_{j=1}^{m} k_j\,\eta(\gamma_j, z). \tag{4.19}$$

Como en el caso de curvas cerradas, si γ es un ciclo en U tal que $\eta(\gamma, z) = 0$ para todos los $z \in \mathbb{C} \setminus U$, se dice que γ es *homólogo a* 0, o *nulhomólogo, respecto de* U. El abierto U se denomina *homológicamente conexo* si todo ciclo en U es nulhomólogo. En general, se dice que dos ciclos γ y φ en U son *homológicamente equivalentes* respecto de U si

$$\eta(\gamma, z) = \eta(\varphi, z) \qquad \text{para cada } z \in \mathbb{C} \setminus U\,. \tag{4.20}$$

[1] El adjetivo *formal* se refiere a que esta suma no es la de la aritmética compleja. Esto queda más patente si se consideran curvas geométricas; ver los ejemplos citados en las observaciones 4.57.i y 4.57.ii a continuación.

Observaciones 4.57.

i) La noción de ciclo permite considerar de forma natural conjuntos como la frontera de una *corona circular* (ver definición 5.13) $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$: atendiendo a la orientación que induce un abierto de Jordan en su borde, dicho borde queda parametrizado por el ciclo $\gamma_{z_0,R} + (-1)\gamma_{z_0,r}$, que también se representa $\gamma_{z_0,R} - \gamma_{z_0,r}$, incluso $C(z_0,R) - C(z_0,r)$, expresión que responde a la idea de que la circunferencia exterior se recorre una vez en sentido antihorario, mientras que la interior se recorre una vez en sentido horario (como sugiere el signo menos). El ciclo $\gamma_{z_0,R} - \gamma_{z_0,r}$ es nulhomólogo respecto de $U = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

ii) De acuerdo con las definiciones anteriores, es sencillo comprobar que siguen siendo vigentes las propiedades 4.3 para toda cadena y que para todo ciclo γ y todo $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ se sigue teniendo la igualdad (4.12). Así, por ejemplo, el ciclo $k\gamma_{z_0,r}$ se puede interpretar como la curva que consiste en recorrer $|k|$ veces la circunferencia soporte $C(z_0,r)$; en sentido horario si $k < 0$; y en sentido positivo si $k > 0$. Si $k > 0$ la curva φ dada por

$$t \in [0, 2k\pi] \longmapsto \varphi(t) = z_0 + r\,e^{it}$$

y el ciclo $k\gamma_{z_0,r}$ son homológicamente equivalentes:

$$\eta(\varphi, z) = k\,\eta(\gamma_{z_0,r}, z) = \begin{cases} k & \text{si } |z - z_0| < r\,; \\ 0 & \text{si } |z - z_0| > r\,. \end{cases}.$$

iii) El lema 4.53 y, en consecuencia, el teorema de Cauchy en su versión homológica 4.54 son válidos para ciclos. En particular, si dos ciclos γ y φ son *homológicamente equivalentes* respecto de U, entonces $\gamma - \varphi$ es nulhomólogo respecto de U y

$$\oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\,dw = \oint_{\varphi} \frac{f(w)}{w - z}\,dw$$

para cada función f holomorfa en U. Esto se incluye en el siguiente teorema que recoge buena parte de los resultados previos.

Teorema 4.58. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$. Son equivalentes los siguientes enunciados:

a) Para todo ciclo γ en U y para todo $z \notin U$ se tiene que $\eta(\gamma, z) = 0$.

b) Para toda f holomorfa en U y para todo ciclo γ en U se tiene que $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

c) Para toda f holomorfa en U, para todo ciclo γ en U y para todo $z \in U \setminus \gamma^*$ se tiene que

$$\eta(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$

d) Toda función holomorfa en U admite una primitiva en U.

e) Toda función holomorfa en U y que no se anule en U admite un logaritmo analítico en U.

f) Toda función f holomorfa en U y que no se anule en U admite raíces n-ésimas analíticas en U, $n = 2, 3, \dots$ (es decir, existe g holomorfa en U tal que $g^n(z) = f(z)$ para todo $z \in U$).

g) Toda función real y armónica en U es la parte real de una función holomorfa en U.

4.4.1. Versión homotópica del teorema de Cauchy

Al estudiar las transformaciones homotópicas es cómodo trabajar siempre en un mismo intervalo de parametrización. El siguiente resultado es inmediato de las definiciones de índice, tanto en el sentido de la fórmula (4.11) como en el de (4.12), y nos permite trabajar bajo esa premisa sin pérdida de generalidad, habida cuenta que todos los intervalos compactos son difeomorfos entre sí.

Lema 4.59. Sean $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\varphi\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ dos curvas equivalentes, en el sentido de que existe un cambio de variable $\sigma\colon [a,b] \to [c,d]$ tal que $\gamma(t) = \varphi(\sigma(t))$ para todo $t \in [a,b]$. Entonces, para cada z que no está en $\gamma^* = \varphi^*$ se tiene que $\eta(\gamma, z) = \eta(\varphi, z)$.

Lema 4.60. Sean $\gamma, \varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Supongamos que $z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma^* \cup \varphi^*)$ y que

$$|\gamma(t) - \varphi(t)| < |\gamma(t) - z| \qquad \text{para todo } t \in [0,1]\,.$$

Entonces $\eta(\gamma, z) = \eta(\varphi, z)$.

Observación 4.61. Aunque la noción de homotopía (ver observación 1.73.iv) se establece en términos de curvas continuas, cuando se trata de abiertos de $\mathbb{C}$ se pueden sustituir (aproximar, mejor dicho) por curvas rectificables en el problema de calcular su índice respecto de puntos fuera de U. Descrito vagamente: si γ es una curva continua en el abierto U y $2\,r > 0$ es menor que la distancia de γ^* a la frontera de U, entonces los discos centrados en puntos de γ^* y radio r están contenidos en U y forman un recubrimiento del compacto γ^*. Extrayendo un subrecubrimiento finito y ordenándolo adecuadamente se puede construir una poligonal φ formada por segmentos contenidos en esos discos y cuyos extremos están en γ^*; esa poligonal φ es de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos y para cada $z \in \mathbb{C}\setminus U$ se verifica la condición del lema 4.60.

Corolario 4.62. Sean γ y φ dos curvas cerradas y de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos en un abierto U que son homotópicamente equivalentes en U, es decir, existe una homotopía $H\colon [0,1]\times[0,1] \to U$ tal que $H(0,t) = \gamma(t)$, $H(1,t) = \varphi(t)$. Entonces γ y φ son homológicamente equivalentes respecto de U, esto es, $\eta(\gamma, z) = \eta(\varphi, z)$ para cada $z \notin U$. Dicho de otra forma, el ciclo $\gamma - \varphi$ es nulhomólogo respecto de U.

Teorema 4.63 (de Cauchy, versión homotópica). Sea U un abierto de $\mathbb{C}$. Si γ y φ son curvas de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, cerradas y homotópicamente equivalentes en U, entonces para cada función f holomorfa en U se tiene que

$$\oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \oint_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Proposición 4.64. Sea U un dominio de $\mathbb{C}$ tal que $\widehat{\mathbb{C}}\setminus U$ es conexo (*equivalentemente, tal que* $\mathbb{C}\setminus U$ *no tiene componentes conexas acotadas*). Entonces U es homológicamente conexo (*i.e.*, $\eta(\gamma, z) = 0$ *para todo ciclo* γ *en* U *y* $z \notin U$).

Proposición 4.65. Sea U un dominio de $\mathbb{C}$ en el que toda curva cerrada es homotópicamente equivalente a un punto. Entonces U es homológicamente conexo.

Observaciones 4.66.

i) También es cierto el recíproco de la proposición 4.64, pero es un asunto muy delicado que se trata con desigual fortuna en la literatura existente. Si se aborda de forma elemental el problema reside en construir, para un compacto K en $\mathbb{C}\setminus U$, un ciclo γ en U, nulhomólogo respecto de U y tal que $\eta(\gamma, z) = 1$ para cada $z \in K$ (ver [3] o [25]). Otra posibilidad es acudir a métodos más avanzados, como el teorema de Runge (cf. [7] o [28]).

ii) Aunque nosotros hemos definido los abiertos simplemente conexos como aquellos cuyo complementario en $\widehat{\mathbb{C}}$ es conexo, en realidad el adjetivo *simplemente conexo* se aplica en espacios topológicos a aquellos cuyo grupo fundamental es trivial (toda curva cerrada es homotópicamente equivalente a un punto). Obviamente la ligereza en la nomenclatura usada se debe a que también son equivalentes estas dos nociones cuando se trata de abiertos conexos de $\mathbb{C}$. Las tres propiedades establecen de forma rigurosa la idea de que el abierto no tenga agujeros.

iii) Asumiendo la equivalencia de los tres conceptos, podemos añadir al teorema 4.58 los enunciados

  a) U es homológicamente conexo.

  $\vdots$

  h) El complementario de U no tiene componentes conexas acotadas.

  i) Toda curva cerrada en U es homotópicamente equivalente a un punto.

  Y aquí, asombrosamente, no acaba la cosa. Podríamos añadir: **j)** Toda función holomorfa en U se puede aproximar por polinomios uniformemente en los compactos de U; **k)** U es homeomorfo al disco unidad $B(0,1)$; **l)** U es $\mathbb{C}$ o existe $f\colon U \leftrightarrow B(0,1)$ biholomorfa ... pero eso es totalmente inalcanzable en el ámbito de esta diminuta asignatura.

Ejercicios

4.1 Calcular $\int_\Gamma \mathrm{Re}(z)\,dz$ en los siguientes casos:

i) Γ es el segmento de extremos 0 y $1+i$.

ii) Γ es la circunferencia centrada en 0 y de radio 1.

iii) Γ es el borde del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.

4.2 Calcular $\int_\Gamma |z|\,dz$ en los siguientes casos:

i) Γ es el segmento de extremos i y $-i$.

ii) Γ es el arco de la circunferencia centrada en 0 y de radio 1 que une los puntos i y $-i$ en el semiplano $\{\mathrm{Re}(z)\geq 0\}$.

iii) Γ es el arco de la circunferencia centrada en 0 y de radio 1 que une los puntos i y $-i$ en el semiplano $\{\mathrm{Re}(z)\leq 0\}$.

4.3 Sean $z_0\in\mathbb{C}$ y $r>0$. Si $C(z_0,r)$ es la circunferencia centrada en z_0 y de radio r, calcular

$$\oint_{C(z_0,r)} \frac{dz}{z-z_0} \qquad \text{y} \qquad \oint_{C(z_0,r)} \frac{dz}{|z-z_0|}.$$

4.4 Sean z_0 un punto de $\mathbb{C}$ y D el cuadrado de vértices $z_0-a-i\,a$, $z_0+a-i\,a$, $z_0+a+i\,a$, $z_0-a+i\,a$ ($a>0$). Demostrar que, al considerar en el borde de D la orientación inducida por D, se tiene que

$$\oint_{\partial D} \frac{dz}{z-z_0} = 2\,\pi\,i.$$

4.5 En cada uno de los casos siguientes calcular $\oint_{\partial D} f(z)\,dz$:

i) $D=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<2\,,\ \mathrm{Im}(z)>0\}\,;\ \ f(z)=\dfrac{z}{\overline{z}}\,.$

ii) $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\,,\ \mathrm{Im}(z)>0\}\,;\ f(z)=|z|\,\overline{z}\,.$

4.6 Probar las desigualdades siguientes:

i) Si Γ es el arco de la circunferencia centrada en 0 que une el punto 2 con $2\,i$, y recorrido en sentido positivo, entonces

$$\Big|\int_\Gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz\Big| \leq \frac{\pi}{3}.$$

ii) Si Γ es el borde del triángulo de vértices 0, -4 y $3\,i$, entonces $\Big|\oint_\Gamma (e^z-\overline{z})\,dz\Big|\leq 60.$

iii) Si $w,z\in\mathbb{C}$, entonces $|e^w-e^z|\leq |w-z|\,e^{\max\{\mathrm{Re}(w),\mathrm{Re}(z)\}}$.

4.7 Calcular:

i) $\int_\Gamma \sin(2z)\,dz$, donde Γ es el segmento que une $1+i$ con $-i$.

ii) $\int_\Gamma z\,e^{z^2}\,dz$, siendo Γ una circunferencia.

4.8 Calcular la integral de la función $f(z)=\exp(i\,z^2)$ a lo largo del borde del sector circular de radio $R>0$, en el primer cuadrante, y comprendido entre el eje real y la bisectriz de dicho cuadrante. Utilizando que $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}/2$, deducir el valor de las *integrales de Fresnel*:

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

4.9 Sea $[a,b]$ un intervalo real, y sean $r\colon[a,b]\to(0,\infty)$ y $\theta\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones de clase $\mathscr{C}^1$. Probar que la curva $\boldsymbol{\gamma}\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ dada por $\boldsymbol{\gamma}(t)=r(t)\,e^{i\theta(t)}$ es de clase $\mathscr{C}^1$, que $0\notin\boldsymbol{\gamma}^*$ y que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{\gamma}}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\ln\Big(\frac{r(b)}{r(a)}\Big) + \frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}.$$

4.10 Demostrar que la función F definida en $\mathbb{C}$ por

$$F(z) = \int_{[0,z]} \frac{\sin(w)}{w}\, dw, \quad z \in \mathbb{C},$$

es entera y encontrar el desarrollo de Taylor de F en el punto $z_0 = 0$.

4.11 Sea $g\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ una función continua y

$$f(z) = \int_0^1 g(t)\, e^{zt}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demostrar que f es entera y hallar su derivada.

4.12 Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n}$ converge en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y uniformemente sobre los compactos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Calcular su integral alrededor de la circunferencia unidad.

4.13 Se considera la función $f(z) = {}^1\!/_z$ definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

i) ¿Admite la función $f(z) = {}^1\!/_z$ primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

ii) ¿Puede existir una sucesión de polinomios que converja hacia f uniformemente en los compactos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

iii) Si γ es una curva cerrada en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$, probar que la integral de f en γ es 0.

4.14 Calcular la integral $\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^2}$ en los siguientes casos:

i) Γ es la elipse de ecuación $x^2 + 4\,y^2 = 1$.

ii) Γ es la elipse de ecuación $4\,x^2 + y^2 = 4$.

4.15 Sea D un disco abierto. Calcular $\int_{\partial D} \frac{e^z}{z\,(1-z)^3}\, dz$ en las siguientes situaciones:

i) El punto 0 pertenece a D y 1 no pertenece a $\overline{D}$.

ii) El punto 0 no pertenece a $\overline{D}$ y 1 pertenece a D.

iii) Los puntos 0 y 1 pertenecen ambos a D.

4.16 Calcular el valor de las siguientes integrales a lo largo de circunferencias

i) $\oint_{C(0,4)} \frac{\sinh(z)}{z^8}\, dz$

ii) $\oint_{C(0,2)} \frac{1}{z^2+2z-3}\, dz.$

iii) $\oint_{C(-2,{}^5\!/_2)} \frac{2z+5}{z(z+2)^2(z-1)}\, dz$

iv) $\int_{C(0,1)} \frac{e^{iz}}{z^2}\, dz$

v) $\int_{C(0,2)} \frac{z}{1+z^2}\, dz$

vi) $\int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\, dz$

4.17 En los siguientes casos calcular la integral de la función f a lo largo de la curva cerrada correspondiente (cuando se cite su soporte Γ se entiende que se ha de parametrizar de forma simple y positivamente orientada):

i) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^3}$; Γ es el borde del cuadrado de vértices $1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i$.

ii) $f(z) = \frac{\sqrt[m]{z}}{(z-1)^m}$, la raíz en la determinación principal; $\gamma(t) = 1 + \frac{e^{it}}{2},\ t \in [0, 2\,\pi]$.

iii) $f(z) = \frac{z^2+1}{z\,(z^2+4)}$; Γ es una circunferencia de centro 0 y radio $r \neq 2$.

iv) $f(z) = \dfrac{\log(z)}{(z-1)^2}$, tomando el logaritmo en la rama principal; Γ es la circunferencia de centro 1 y radio $1/2$.

v) $f(z) = \dfrac{\log(z)}{(z+1)^2}$, siendo $\log(z) = \ln(|z|) + i\,\arg(z)$ con $\arg(z) \in (0, 2\pi)$; Γ es la curva de ecuación implícita $4(x+1)^2 + y^2 = 1$.

vi) $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z(z+1)}$; $\gamma(t) = \dfrac{e^{it}}{2} - 1$, $t \in [0, 2\pi]$.

vii) $f(z) = \dfrac{\cosh(z)}{z^2(z+1+i)}$; Γ es el borde del cuadrado de vértices $1, i, -1$ y $-i$.

viii) $f(z) = \dfrac{\cos(z) + \cosh(z)}{z^3}$; Γ es el borde del triángulo de vértices 1, $-1+i$ y $-1-i$.

ix) $f(z) = \dfrac{(z^2+1)\cos(z)}{z^5}$; Γ es el borde del cuadrado de vértices 1, i, -1 y $-i$.

x) $f(z) = \dfrac{e^{\sin(z)}}{z^3}$; Γ es la circunferencia centrada en $z_0 = 1+i$ y de radio 3.

4.18 Sea f una función entera. Para todo número entero $k \in \mathbb{Z}$ y para todo número real $r > 0$, evaluar la integral

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, e^{ki\theta}\, d\theta\,.$$

4.19 Integrando la función $f(z) = \dfrac{e^z}{z^{n+1}}$ a lo largo de $C(0,1)$ deducir el valor de

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \cos\big(n\,t - \sin(t)\big)\, dt\,.$$

4.20 Sea α un número real positivo, $\alpha \neq 2$. Si Γ es la circunferencia centrada en $z_0 = 0$ y de radio $R = 2$, calcular, según los valores de α, la integral

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z^2+\alpha^2)(z-i)}\, dz\,.$$

4.21 Sea α un número complejo con $|\alpha| \neq 1$. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\,\alpha\cos(\theta) + \alpha^2}.$$

Sugerencia: Integrar $f(z) = \dfrac{1}{(z-\alpha)(z-1/\alpha)}$ en $C(0,1)$ (ver también la subsección 5.4.1).

4.22 Sean a, b dos números reales estrictamente positivos. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\,.$$

Sugerencia: Integrar la función $f(z) = 1/z$ a lo largo de la elipse centrada en $z_0 = 0$ y de semiejes a y b.

4.23 Si f es una función holomorfa en un abierto que contiene a la bola cerrada $B = \overline{B}(0,1)$, demostrar que

$$\frac{1}{\pi}\iint_B f(x+iy)\, dx\, dy = f(0)\,.$$

4.24 Sean f una función holomorfa en el disco $B(0,r)$ y $0 < s < r$. Se define la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ por $\gamma(t) = f(se^{it})$. Demuéstrese que

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi s}\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi s}\,\mathrm{long}(\gamma)\,.$$

4.25 Sea U un abierto conexo y acotado de $\mathbb{C}$ con $0 \in U$, y f una función holomorfa en U con $f(U) \subseteq U$ y $f(0) = 0$. Se define la sucesión

$$f_1 = f, \quad f_n = f \circ f_{n-1} \quad \text{si} \quad n \geq 2\,.$$

Probar que la sucesión $\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, y deducir que $|f'(0)| \leq 1$.

4.26 Sea $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0,\ \mathrm{Im}(z) = 0\}$. Se define en D la función f por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z-1}{\log(z)} & \text{si } z \neq 1, \\ 1 & \text{si } z = 1, \end{cases}$$

donde $\log$ es la determinación principal del logaritmo. Demuéstrese que f es una función holomorfa en D.

4.27 Si f es analítica en una región que contiene a $\overline{B}(0,\rho)$ y R_n es el resto n-ésimo de la serie de Taylor de f centrada en 0, es decir,

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, z^k,$$

probar que:

i) Si $|z| < r \leq \rho$, entonces

$$R_n(z) = \frac{z^{n+1}}{2\,\pi\, i} \int_{C(0,\,r)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}(\xi - z)}\, d\xi\,.$$

ii) Si $M = \sup\limits_{|z|=\rho} |f(z)|$ y $|z| \leq r < \rho$, entonces

$$\bigl|R_n(z)\bigr| \leq M\Bigl(\frac{r}{\rho}\Bigr)^{n+1} \frac{1}{1 - {}^{r}\!/_{\rho}}.$$

4.28 Sea f una función entera.

i) Si existen $n \in \mathbb{N}$ y $r, M > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq M\,|z|^n \quad \text{si } |z| \geq r\,,$$

demostrar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

ii) Si $|f'(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, probar que existen $a, b \in \mathbb{C}$ con $|b| \leq {}^{1}\!/_{2}$ tales que

$$f(z) = a + b\,z^2 \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}\,.$$

iii) Si $\lim\limits_{z\to\infty} \bigl|{}^{f(z)}\!/_{z}\bigr| = 0$, probar que f es constante.

iv) Si $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{z\to\infty} {}^{f(z)}\!/_{z}$ existe y es finito, probar que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = c\,z \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

4.29 Sea f una función holomorfa en un abierto que contiene a la bola cerrada unidad, de modo que $|f(z)| \leq 1$ si $|z| \leq 1$. Sea $r \in (0,1)$ y sean z_1, z_2 números complejos distintos con $|z_1| \leq r$ y $|z_2| \leq r$. Demostrar que

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \leq \frac{1}{1-r}\,.$$

Sugerencia: Acotar primero $|f'|$ en el segmento $[z_1, z_2]$ integrando en circunferencias de radio $1 - r$.

4.30 Sea $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una función holomorfa en el disco $B(0,R)$. Se considera la función $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} {}^{a_n z^n}\!/_{n!}$. Probar que F es una función entera y demostrar que para cualquier número real ρ con $0 < \rho < R$ existe un número $A(\rho)$, que depende únicamente de ρ, tal que

$$|F(z)| \leq A(\rho)\, e^{|z|/\rho} \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

4.31 Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una función entera. Supongamos que existen constantes positivas A, λ y R tales que

$$\bigl|f(z)\bigr| \le e^{A|z|^\lambda} \qquad \text{siempre que } \ |z| > R\,. \tag{4.21}$$

i) Demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n| \le \left(\frac{A\lambda e}{n}\right)^{n/\lambda} \qquad \text{para todo } \ n \ge n_0\,.$$

ii) Pongamos $M(r) = \sup\bigl\{\bigl|f(z)\bigr| : |z| = r\bigr\}$. Probar que si existen constantes positivas A y λ tales que

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\bigl(M(r)\bigr)}{r^\lambda} = A,$$

entonces, para $B > A$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de B) de modo que

$$|a_n| < \left(\frac{B\lambda\, e}{n}\right)^{n/\lambda} \qquad \text{para todo } \ n \ge n_0\,.$$

iii) Probar que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1/\lambda} a_n z^n$ es menor o igual que $(A\lambda)^{-1/\lambda}$.

***Nota**: Las funciones enteras que satisfacen una desigualdad del tipo* (4.21) *se denominan de* orden finito. *Dados $A, \lambda, R > 0$, es obvio que si se verifica* (4.21) *para $|z| > R$, entonces cualquiera que sea $\mu > \lambda$, es posible encontrar un radio $R^* > 0$ (quizá deba ser $R^* > R$) tal que*

$$\bigl|f(z)\bigr| \le e^{|z|^\mu}, \qquad |z| > R^*. \tag{4.22}$$

El ínfimo de los números λ para los que se verifica (4.21) *para algunos $A, R > 0$, es también el ínfimo de los números μ para los que se verifica* (4.22) *con algún $R^* > 0$. Este valor común es el denominado* orden de la función f.

iv) Comprobar que si P es una función polinómica, entonces P es de orden nulo.

v) ¿Es la función $f(z) = \exp(z^2)$ de orden finito? ¿y $f(z) = \exp(\cos(z))$?

4.32 Sea f una función holomorfa en $B(0,2)$ tal que $|f(z)| \le 7$ para todo $z \in B(0,2)$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que si $z_1, z_2 \in B(0,1)$, $|z_1 - z_2| \le \delta$, entonces

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le \frac{1}{10}.$$

Hallar un valor numérico explícito δ que cumpla lo anterior.

4.33 Sea f una función entera.

i) Se supone que existen $z_0, w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $z_0 \ne \lambda w_0$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que

$$f(z) = f(z + z_0) = f(z + w_0) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}\,.$$

Probar que f es constante.

ii) Si existen constantes $R, \varepsilon > 0$ tales que

$$|f(z)| \ge \varepsilon \quad \text{si } |z| \ge R,$$

probar que f es constante o tiene algún cero en $B(0,R)$.

iii) Si existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z)| \ge \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

iv) Si $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, probar que f se anula al menos en un punto.

v) Si f no es constante, demostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe algún $z_\varepsilon \in \mathbb{C}$ con $|f(z_\varepsilon)| \le \varepsilon$. Dedúzcase de lo anterior que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$. ¿Puede ser $f(\mathbb{C}) \ne \mathbb{C}$?

vi) Si existe una constante $M > 0$ tal que $\operatorname{Re}(f(z)) \le M$ para cada $z \in \mathbb{C}$, probar que f es constante.

vii) Si $f(0) = 0$ y $\lim_{z\to\infty} \operatorname{Re}(f(z))$ existe y es finito, probar que f es idénticamente nula.

4.34 Si f es una función holomorfa en el disco $B(0,1)$ y $f(0)=0$, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ converge uniformemente en los compactos del disco.

4.35 Sea f una función holomorfa en el disco $B(0,1)$ verificando que

$$\left|f\Big(\frac{1}{n}\Big)\right| \leq e^{-n} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Probar que f es la función idénticamente nula.

4.36 Discutir si existen funciones holomorfas f en un abierto conexo U de $\mathbb{C}$ que contenga al segmento $[-1,1]$ y tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$:

i) $f\Big(\frac{1}{2n}\Big) = f\Big(\frac{1}{2n+1}\Big) = \frac{1}{n}$

ii) $f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(\frac{-1}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}$

iii) $f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(\frac{-1}{n}\Big) = \frac{-1}{n^3}$

iv) $f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n+1}$.

4.37 Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, f y g funciones holomorfas en U tales que $\overline{f}g$ es holomorfa en U. Probar que $g=0$ en U o f es constante en U.

4.38 Supongamos que f es una función entera tal que para cada $z \in \mathbb{C}$ existe un número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (que depende de z) tal que $f^{(n)}(z) = 0$. Demostrar que f es un polinomio.

4.39 Sean f y g dos funciones holomorfas en un mismo abierto conexo D que no se anulan en ningún punto de D. Supongamos que existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de D que converge hacia un punto $a \in D$, con $a_n \neq a$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y tal que

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = c\,g(z)$ para cada $z \in D$.

4.40 Sea f una función entera.

i) Si existe una sucesión acotada de números reales distintos dos a dos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ también es una sucesión de números reales, probar que

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Deducir que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

ii) Si $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ y $f(i\mathbb{R}) \subseteq i\mathbb{R}$, probar que f es impar (por $i\mathbb{R}$ denotamos al eje imaginario: $i\mathbb{R} = \{ix : x \in \mathbb{R}\}$).

iii) Si $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ y $f(i\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, probar que f es par.

iv) Si $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|\operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Im}(z)|$, probar que f es par.

v) Si existe una sucesión de números positivos $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, convergente hacia 0 y tal que $f(b_n) = -f(-b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, demostrar que entonces f es impar.

vi) Si $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ y existen sucesiones acotadas de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $b_{n+1} < a_n < b_n$ y $f(a_n) = f(b_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, probar que f es constante.

4.41 Sea P un polinomio de grado n, $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, con $a_n \neq 0$.

i) Si $|P(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0,1)$, probar que

$$|P(z)| \leq |z|^n \quad \text{si } |z| \geq 1.$$

Sugerencia: Considérese la función $Q(z) = z^n\, P\big(1/z\big)$.

ii) Si $|a_n| \geq 1$, probar que o bien $P(z) = a_n z^n$ o bien existe un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, con $|z_0| = 1$, tal que $|P(z_0)| > 1$.

iii) Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$, puntos del plano, no todos ellos iguales a cero. Demuéstrese que existe un punto z_0 sobre la circunferencia unidad tal que

$$|z_0 - z_1|\,|z_0 - z_2| \cdots |z_0 - z_n| > 1.$$

4.42 Identificar todas las funciones enteras tales que

$$f \circ f = f\,.$$

4.43 Sea f una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$ que contiene a $\overline{B}(0,1)$. Se supone que $f(0) = 0$ y que $|f(z)| \le 1$, para cada $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$. Demostrar que

$$\left|e^{f(z)} - 1\right| \le (1+e)\,|z|, \quad \text{para cada } z \in \overline{B}(0,1).$$

4.44 Sean U un abierto conexo y acotado de $\mathbb{C}$ y f y g dos funciones holomorfas en U y continuas en $\overline{U}$.

i) Si f no es constante en U, pero $|f|$ es constante en $\mathrm{Fr}(U)$, probar que f tiene al menos un cero en U.

ii) Si $|f(z)| = |g(z)|$ para cada $z \in \mathrm{Fr}(U)$, y f y g no se anulan en $\overline{U}$, demostrar que existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| = 1$, tal que $f = \lambda g$.

iii) Si $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(g(z))$ para cada $z \in \mathrm{Fr}(U)$, demostrar que existe una constante $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + i\beta$.

4.45 Sean P un polinomio de grado $n \ge 1$ y $a > 0$. Se considera el conjunto abierto

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| < a\}.$$

Probar que n es el número máximo de componentes conexas que puede tener H.

4.46 Demostrar que, si $1 \le |z| \le 2$, se tiene

$$\frac{e^{-2}}{2} \le \left|\frac{e^{iz}}{z}\right| \le \frac{e^2}{2}\,.$$

4.47 Sea f una función continua en $\overline{B}(0,1)$ y holomorfa en $B(0,1)$. Se supone que

$$|f(z)| \le 2 \quad \text{si} \quad |z| = 1 \;\; \text{e} \;\; \mathrm{Im}(z) \ge 0\,, \qquad \text{y} \qquad |f(z)| \le 3 \quad \text{si} \quad |z| = 1 \;\; \text{e} \;\; \mathrm{Im}(z) \le 0\,.$$

Demostrar que $|f(0)| \le \sqrt{6}$.

Sugerencia: Considerar la función $g(z) = f(z)f(-z)$.

4.48 Sean D el interior de un polígono regular cerrado de n lados centrado en el origen y f una función compleja definida y continua en $\overline{D}$ y holomorfa en D. Denotaremos por $L_1, L_2, \ldots, L_n$ los n lados del polígono.

i) Supongamos que existen constantes $M_1, M_2, \ldots, M_n$ tales que

$$|f(z)| \le M_k \quad \text{si } z \in L_k,\; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Probar que $|f(0)| \le (M_1 M_2 \cdots M_n)^{1/n}$.

Sugerencia: El giro de amplitud ${2\pi}/{n}$: $z \mapsto z\,e^{2\pi i/n}$, dejan invariante a D

ii) Si $f = 0$ en algún lado L_k del polígono, probar que $f = 0$ en D.

4.49 Sean $R > 0$ y f una función holomorfa en $B(0,R)$ no constante. Definamos para cada $r \in [0, R)$

$$A(r) = \max\{|f(z)| \,:\, |z| = r\}\,.$$

Probar que la función $r \in [0,R) \to A(r)$ es continua y estrictamente creciente.

4.50

i) Sea f una función holomorfa en el disco abierto $B(0,R)$ y continua en el disco cerrado $\overline{B}(0,R)$, que verifica que

$$|f(z)\,\mathrm{Im}(z)| \le M \quad \text{si } |z| = R.$$

Demostrar que

$$|f(z)| \le \frac{8M}{3R} \quad \text{si } z \in \overline{B}\Big(0, \frac{R}{2}\Big).$$

Sugerencia: Considerar la función $g(z) = (z^2 - R^2)f(z)$.

ii) Si f es una función entera, sea $M(r) = \sup\left\{|f(z)\operatorname{Im}(z)| : |z| = r\right\}$. Probar que si f no es un polinomio, entonces para cualquier $p \geq 1$ se tiene que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r^p} = +\infty .$$

4.51 Calcular el máximo de las siguientes funciones en los conjuntos que se indican:

i) $|\sin(z)|$ en $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2\,\pi\,,\, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2\,\pi\right\}$.

ii) $|e^{z^2}|$ en $\overline{B}(0,1)$.

iii) $\operatorname{Re}(z^3)$ en $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\,,\, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\right\}$.

4.52 Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos distintos dos a dos y C una circunferencia de modo que todos ellos se encuentran en su interior. Se define

$$Q(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)\,.$$

Probar que, si f es una función holomorfa en un abierto convexo que contiene a C, entonces

$$P(z) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_C \frac{f(\xi)}{Q(\xi)}\,\frac{Q(\xi) - Q(z)}{\xi - z}\,d\xi\,,$$

es el único polinomio de grado $n-1$ que coincide con f en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

4.53 Calcular el índice de las curvas siguientes respecto de $z = 0$:

i) $\boldsymbol{\gamma}(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $|a| \neq r$.

ii) $\boldsymbol{\gamma}(t) = re^{-2it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $r > 0$.

iii) $\boldsymbol{\gamma}(t) = \dfrac{1}{2}\cos(t) + i\sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

iv) $\boldsymbol{\gamma}(t) = 2\cos(t) - i\sin(t)$, $0 \leq t \leq 6\pi$.

v) $\boldsymbol{\gamma}(t) = 1 + i\sin^2(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4.54 Sean $\boldsymbol{\gamma}_1$ y $\boldsymbol{\gamma}_2$ dos curvas cerradas continuamente diferenciables a trozos con $0 \notin \boldsymbol{\gamma}_1^*$ y $0 \notin \boldsymbol{\gamma}_2^*$, y ambos parametrizadas en el mismo intervalo $[a,b]$. Probar que si $|\boldsymbol{\gamma}_1(t)| < |\boldsymbol{\gamma}_2(t)|$ para todo $t \in [a,b]$, entonces $0 \notin (\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2)^*$ y además $\eta(\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2, 0) = \eta(\boldsymbol{\gamma}_2, 0)$.

4.55 Sea $\{\boldsymbol{\gamma}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de curvas cerradas continuamente diferenciables a trozos, parametrizadas en el intervalo $[a,b]$. Se supone que la sucesión converge uniformemente en $[a,b]$ hacia el arco cerrado continuamente diferenciable a trozos $\boldsymbol{\gamma}$.

Si $w \notin \boldsymbol{\gamma}^*$, probar que existe un número natural n_0 tal que para cada número natural $n \geq n_0$ se tiene que $w \notin \boldsymbol{\gamma}_n^*$ y $\eta(\boldsymbol{\gamma}, w) = \eta(\boldsymbol{\gamma}_n, w)$.

4.56 Sean $z_1, \ldots, z_n$ números complejos, distintos dos a dos, y $m_1, \ldots, m_n$ números enteros no nulos. Demostrar que la función $f(z) = (z - z_1)^{m_1}\cdots(z - z_n)^{m_n}$ admite un logaritmo analítico en un abierto conexo U si, y sólo si,

$$m_1\,\eta(\gamma, z_1) + \ldots + m_n\,\eta(\gamma, z_n) = 0$$

para cada curva γ en U, cerrada y de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos.

4.57 Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en U y $\boldsymbol{\gamma}$ una curva cerrada y $\mathscr{C}^1$ a trozos en U. Probar que:

i) La aplicación $f \circ \boldsymbol{\gamma}$ es una curva cerrada y $\mathscr{C}^1$ a trozos (en $\mathbb{C}$).

ii) Si $z \in \mathbb{C} \setminus (f \circ \boldsymbol{\gamma})^*$, se tiene que

$$\eta(f \circ \boldsymbol{\gamma}, z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{f'(w)}{f(w) - z}\,dw. \tag{4.23}$$

4.58 Sea f una función holomorfa que no se anula en un subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$. Demostrar que f tiene logaritmo analítico en U si, y sólo si, f tiene raíces k-ésimas analíticas, para todo $k = 2, 3, \ldots$ (cf. [3]).

4.59 Si γ es una curva cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, n un número natural y $g(z) = z^n$, probar que

$$\eta(g \circ \gamma, 0) = n\,\eta(\gamma, 0)\,.$$

4.60 Dado el polinomio $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ y la curva $\gamma_r(t) = r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, probar que si r es suficientemente grande, entonces $0 \notin (P \circ \gamma_r)^*$ y $\eta(P \circ \gamma_r, 0) = n$.

Aplicando lo anterior, dar una nueva demostración del Teorema Fundamental del Álgebra.

4.61 Sea $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de curvas cerradas tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\eta(\gamma_n, 0) = 1$, y si ponemos $\delta_n = \inf\{|w| : w \in \gamma_n^*\}$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \infty$. Probar que dado $z \in \mathbb{C}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $z \notin \gamma_n^*$ y $\eta(\gamma_n, z) = 1$.

4.62 Sea U un abierto del plano, γ una curva cerrada en U y tal que $\eta(\gamma, z) = 0$, si $z \notin U$. Sea f una función holomorfa en U tal que $|f(z)| \leq 1$, para todo $z \in \gamma^*$. Demostrar que

$$\sup\left\{|f(w)| : w \in U \setminus \gamma^* \text{ y } \eta(\gamma, w) \neq 0\right\} \leq 1\,.$$

4.63 Sea $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$, $z \neq 1$.

i) Probar que f admite un logaritmo analítico en

$$V = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0, |\operatorname{Re}(z)| \geq 1\}.$$

ii) ¿Se puede asegurar lo mismo para cualquier función g holomorfa en el abierto V y que no se anule en él?

iii) Probar que f admite un logaritmo analítico en $U = \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,1)$.

iv) ¿Se puede asegurar lo mismo para cualquier función g holomorfa en el abierto U y que no se anule en él?

4.64 Sean a y b dos números complejos distintos, $U = \mathbb{C} \setminus [a, b]$ y

$$f(z) = (z-a)(z-b)\,, \quad z \in U = \mathbb{C} \setminus [a, b]\,.$$

Demostrar que f tiene una raíz cuadrada analítica pero no un logaritmo analítico sobre U.

4.65 Demostrar que una función entera f tiene un número finito de ceros si, y sólamente si, existen un polinomio P y una función entera g tales que

$$f(z) = P(z)\,e^{g(z)} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

4.66 Sea U un abierto con $0 \in U$, y f holomorfa en U con $f(0) = 0$. Probar que, dado un natural m, existen un abierto $V \subset U$ con $0 \in V$ y una función g holomorfa en V tales que

$$f(z^m) = (g(z))^m \qquad \text{para todo } z \in V\,.$$

4.67 Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, γ un ciclo en U tal que para cada $z \notin U$ se tiene que $\eta(\gamma, z) = 0$, y f una función holomorfa en U. Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $z \in U \setminus \gamma^*$ se tiene que

$$\eta(\gamma, z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw.$$

4.68 Caracterizar las funciones enteras f y g tales que

$$f^2 + g^2 = 1\,.$$

Sugerencia: Los factores de $f^2 + g^2$ son $f + ig$ y $f - ig$.

4.69 (cf. Jones & Singerman [14]) Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Para $n \in \mathbb{Z}$ denotaremos por γ^n a la curva en Ω dada por

$$\gamma^n(t) = e^{2n\pi i\, t}\,, \quad t \in [0,1]\,.$$

i) Comprobar que $\eta(\gamma^n, 0) = n$ (ver ejercicio 4.59).

ii) Si $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ es una curva cerrada con $\eta(\varphi, 0) = n \in \mathbb{Z}$, póngase $\varphi(t) = \rho(t)\, e^{i\vartheta(t)}$, siendo $\rho(t) = \left|\varphi(t)\right| > 0$ y ϑ un argumento continuo de φ. Definamos

$$\begin{cases} R(s,t) &= (1-s)\,\rho(t) + s\,; \\ \Theta(s,t) &= (1-s)\,\vartheta(t) + 2\,n\,\pi\, s\, t\,; \end{cases} \qquad \text{y} \qquad H(s,t) = R(s,t)\, e^{i\,\Theta(s,t)}\,.$$

Probar que la aplicación $H\colon [0,1]\times[0,1] \to \Omega$ es una homotopía entre φ y γ^n.

iii) Deducir que una curva cerrada en Ω es nulhomóloga respecto de Ω si, y sólo si, es homotópicamente equivalente a un punto.

4.70 (cf. Ash & Novinger [3]) Sean a y b dos números complejos distintos y $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{a,b\}$. Probar que existen curvas cerradas en Ω, nulhomólogas respecto de Ω, pero no homotópicamente equivalentes a un punto.

Sugerencia: Estudiar la curva de la figura 4.1.

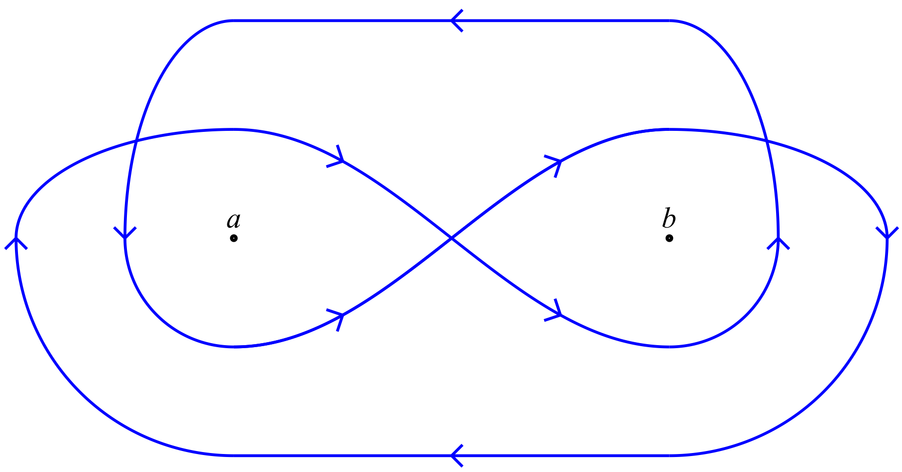


Figura 4.1: $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.

Nota*: La versión homotópica del teorema de Cauchy 4.63 establece que, cualquiera que sea el abierto U de* $\mathbb{C}$, si una curva es homotópicamente equivalente en U a un punto, entonces es homológicamente equivalente en U a un punto. *Lo que pone de manifiesto este ejercicio es que, en general, el recíproco no es cierto.*

Al comparar con el resultado del ejercicio 4.69.iii se intuye que el número de componentes conexas acotadas que tenga $\mathbb{C} \setminus U$ es crucial en relación con esta propiedad. Hablando en un tono muy superficial, en el caso de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lo que se prueba es que la identificación del grupo fundamental $\pi_1(\Omega) \simeq (\mathbb{Z}, +)$ se realiza mediante la asignación $\gamma \longmapsto n = \eta(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$. En general, el grupo fundamental de $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ es el grupo libre *generado por k elementos, una estructura tanto más complicada cuanto más grande sea k.*

Tema 5

Singularidades aisladas

Entre las consecuencias del teorema de Cauchy, citamos como resultado principal de este tema el denominado *teorema de los residuos* y sus aplicaciones. Recordemos que el valor de una función holomorfa f en un punto z_0 de su dominio de definición U puede ser obtenido por integración de la función

$$g_0(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

en una curva adecuada, y lo mismo se puede decir sobre el valor de sus derivadas sucesivas en dicho punto considerando las funciones $g_n(z) = f(z)\,(z - z_0)^{-(n+1)}$. Estas funciones resultan ser holomorfas en todo U excepto en el punto z_0, lo que da lugar al concepto de *punto singular* o *singularidad*. Además, aunque se pierde el carácter analítico de la función original sigue siendo posible representar las funciones g_n en un entorno de z_0 mediante series de potencias, admitiendo en este caso la aparición de exponentes negativos; surgen así las denominadas *series de Laurent*, cuyo estudio es otro de los aspectos que tratamos aquí.

5.1. Singularidades aisladas y su clasificación

Un punto singular (en sentido estricto) de una función holomorfa es un punto adherente a su dominio natural de definición en el cual es imposible definir un valor para extender, al menos de forma continua, la función original.

El uso del adjetivo "natural" en el comentario previo es impreciso, pero trata de evitar situaciones como la siguiente: consideremos la función $f(z) = e^{-1/z}$ definida en el conjunto

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \pi/4\}.$$

Entonces, como se puede ver en el ejercicio 5.1, se tiene que

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S}} f(z) = 0,$$

de modo que f admite extensión continua al punto 0, que no sería un punto singular de f cuando su dominio es S. Sin embargo, el ejemplo 5.2.iii muestra que 0 es una singularidad de f cuando se la define en su dominio natural, que es $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Como un segundo ejemplo, si se considera la rama principal del logaritmo, la función

$$f(z) = \frac{\log(z)}{z^2 + 1}$$

está definida y es holomorfa en el abierto

$$U = \mathbb{C} \setminus \Big(\big\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\,,\ \mathrm{Re}(z) \le 0\big\} \cup \{i, -i\}\Big)\,;$$

los puntos de la semirrecta real negativa son todos adherentes a U y es imposible definir en ellos de forma continua una prolongación de f (puesto que es imposible definir el logaritmo de forma continua). Además, en cualquier entorno de uno de estos puntos hay infinitos puntos del mismo tipo, esto es, singulares para f.

Otra cosa bien distinta sucede en i y $-i$: en estos puntos sigue siendo imposible extender la función f de forma continua, puesto que no está acotada en ningún entorno suyo, pero la función es holomorfa en cualquier conjunto del tipo

$$B(i, \delta) \setminus \{i\} \qquad \text{o} \qquad B(-i, \delta) \setminus \{-i\},$$

con $0 < \delta < 1$. Este último tipo de singularidades es el objeto de nuestro estudio.

Definición 5.1. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $z_0 \in U$. Si f es una función definida y holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$, se dice que f presenta o tiene una *singularidad aislada* en el punto z_0. En estas condiciones:

i) Si existe y es finito $\lim_{z\to z_0} f(z)$, se dice que la singularidad es *evitable*.

ii) Si $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$, se dice que la singularidad es *polar* o que z_0 es un *polo* de la función f.

iii) Si la singularidad en el punto z_0 no es evitable ni polar, se dice que es *esencial*.

Ejemplos 5.2.

i) La función definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por $f(z) = \dfrac{\sinh(z)}{z}$ tiene una singularidad aislada evitable en el punto $z_0 = 0$ pues
$$\lim_{z\to 0} \frac{\sinh(z)}{z} = \sinh'(0) = \cosh(0) = 1.$$

ii) La función definida en $\mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ por $f(z) = \dfrac{z}{\sin(z)}$ tiene singularidades aisladas en los puntos de la recta real de la forma $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

1. El punto $z_0 = 0$ es una singularidad evitable de f pues
$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\sin(z)/z} = \frac{1}{\sin'(0)} = \frac{1}{\cos(0)} = 1.$$

2. Las demás singularidades de f son de tipo polar ya que, si $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, se tiene que
$$\lim_{z\to k\pi} \left|\frac{z}{\sin(z)}\right| = \lim_{z\to k\pi} \frac{|z|}{|\sin(z)|} = \infty,$$
pues el numerador converge hacia $|k|\pi \neq 0$ y $\lim_{z\to k\pi} |\sin(z)| = 0$.

iii) La función definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por $f(z) = \exp\left(1/z\right)$ tiene una singularidad aislada de tipo esencial en el punto $z_0 = 0$ pues
$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x\in\mathbb{R}}} \exp\left(1/x\right) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{\substack{x\to 0^-\\ x\in\mathbb{R}}} \exp\left(1/x\right) = 0;$$
el primer límite muestra que la singularidad no puede ser evitable mientras que del segundo se deduce que tampoco puede ser polar.

Observación 5.3. Es habitual obviar el dominio de definición de las funciones a tratar cuando, como sucede en los ejemplos anteriores, sus puntos singulares vienen dados de forma evidente como aquéllos para los que carece de sentido la fórmula que las define.

Los dos teoremas siguientes proporcionan otros criterios para la clasificación de singularidades aisladas que resultan en ciertas ocasiones de aplicación más sencilla que los de la definición.

Teorema 5.4 (Caracterización de singularidades evitables). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Son equivalentes:

a) z_0 es una singularidad evitable de f.

b) Existe una función g holomorfa en U tal que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$.

c) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}(z_0, \varepsilon) \subset U$ y f está acotada en $\overline{B}(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$.

d) $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)\, f(z) = 0$.

Observación 5.5. En la situación del enunciado previo, si la singularidad z_0 es evitable es claro que la función dada por
$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in U \setminus \{z_0\}, \\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z) & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$
es continua en U y holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$, de modo que, según el corolario 4.20, g es holomorfa en U y es precisamente la función mencionada en el apartado **b)**. Así, la extensión por continuidad de f al punto z_0 proporciona una función holomorfa en todo el abierto.

Teorema 5.6 (Caracterización de singularidades polares). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Son equivalentes:

a) z_0 es una singularidad polar de f.

b) Existe una función g holomorfa en U, con $g(z_0) \neq 0$, y un número natural m tales que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \text{para cada } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

c) Existe un número natural m tal que el límite $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existe, es finito y no nulo.

Observación 5.7. En las condiciones del teorema 5.6, si z_0 una singularidad polar de f, entonces el número natural m que se cita en los apartados 5.6,**b)** y 5.6,**c)** resulta ser el mismo y se denomina *orden del polo* de f en z_0. Se dice en este caso que f *presenta un polo de orden* m *en* z_0, o que z_0 *es un polo de orden* m *de* f. Asimismo, las locuciones *polo simple*, *doble* o *triple* son habituales para referirse a los casos $m = 1, 2$ y 3, respectivamente.

Observación 5.8. En numerosas ocasiones las singularidades aisladas aparecen al considerar cocientes de dos funciones holomorfas en los que el denominador se anula en algunos puntos del dominio de definición, siendo estas singularidades aisladas en virtud del principio de los ceros aislados.

Recordemos que en la observación 4.30.ii se indicó que una función f holomorfa en un disco $B(z_0, \delta)$ tiene en el punto z_0 un cero (aislado) de orden $k \geq 1$ si, y sólo si, se puede escribir como $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, siendo φ holomorfa en este disco y con $\varphi(z_0) \neq 0$. A partir de esta caracterización y de 5.6,**b)** se obtienen sin dificultad los siguientes resultados, simplemente examinando la naturaleza de los cocientes

$$\frac{(z - z_0)^p}{(z - z_0)^q} = (z - z_0)^{p-q} = \frac{1}{(z - z_0)^{q-p}}.$$

Proposición 5.9. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f y g dos funciones definidas y holomorfas en U tales que f tiene un cero de orden p en z_0 y g tiene un cero de orden q en z_0. Entonces la función f/g tiene una singularidad aislada en el punto z_0 y se verifica que:

i) La singularidad es evitable si, y sólo si, $p \geq q$. En este caso f/g tiene (tras la extensión natural por continuidad mencionada en la observación 5.5) un cero de orden $p - q$ en z_0 (entendiendo que si $p = q$ el valor del límite de f/g en z_0 será no nulo).

ii) La singularidad es polar si, y sólo si, $p < q$. En esta situación f/g tiene un polo de orden $q - p$ en z_0.

Proposición 5.10. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f y g dos funciones holomorfas en $U \setminus \{z_0\}$ tales que f tiene un polo de orden p en z_0 y g tiene un polo de orden q en z_0. Entonces la función f/g tiene una singularidad aislada en el punto z_0 y se verifica que:

i) La singularidad es evitable si, y sólo si, $p \leq q$. En este caso f/g tiene un cero de orden $q - p$ en z_0.

ii) La singularidad es polar si, y sólo si, $p > q$. En este caso f/g tiene un polo de orden $p - q$ en z_0.

Teorema 5.11 (de Casorati-Weierstrass). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Son equivalentes:

a) z_0 es una singularidad esencial de f.

b) Para cada $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset U$, se tiene que $f\big(B(z_0, r) \setminus \{z_0\}\big)$ es un subconjunto denso en $\mathbb{C}$.

Por último, presentamos la noción de función meromorfa, de momento sólo como nomenclatura. Con posterioridad examinaremos con más detalle este concepto.

Definición 5.12. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$. Se dice que una función f es *meromorfa* en U si existe un subconjunto A sin puntos acumulación en U, tal que f es holomorfa en $U \setminus A$ y cada $a \in A$ es una singularidad evitable o polar de f.

5.2. Series de Laurent

A la hora de considerar series de Laurent las coronas juegan un papel análogo al de los discos en los desarrollos de Taylor.

Definición 5.13. Si r y R son números reales con $0 < r < R$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, el conjunto dado por

$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} = B(z_0, R) \setminus \overline{B}(z_0, r)$$

se denomina *anillo* o *corona circular* (*abierta*) centrada en z_0 de radios r y R. El concepto de corona se generaliza admitiendo la posibilidad de que $r = 0$ o $R = \infty$. Concretamente:

En el caso particular de que $r = 0$ y $R \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} = B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$$

se representa por $B^*(z_0, R)$ y se denomina *disco punteado* de centro z_0 y radio R.

Si $R = \infty$, la corona centrada en z_0 y de radios r e ∞ es

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0|\},$$

es decir, el complementario de la bola cerrada $\overline{B}(z_0, r)$ si $r > 0$, o $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ si $r = 0$.

Lema 5.14. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Se supone que $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 \le r < R \le \infty$ son tales que la corona $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ está contenida en U. Sean además ρ_1, ρ_2 tales que $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ y $C(z_0, \rho_1)$, $C(z_0, \rho_2)$ las circunferencias centradas en z_0 y de radios ρ_1 y ρ_2, respectivamente, orientadas ambas en sentido positivo. Entonces, para cada número complejo z, con $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$, se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, \rho_2)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, \rho_1)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,. \tag{5.1}$$

Observación 5.15. El resultado previo es consecuencia inmediata de la versión homológica del teorema de Cauchy para ciclos. No obstante, es posible razonar también observando que la corona $A = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$ es un abierto de Jordan cuyo borde es el ciclo $\partial A = C(z_0, \rho_2) - C(z_0, \rho_1)$ (ver observación 4.57.i). Además, si $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$, la función

$$g_z(w) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z, \end{cases}$$

es holomorfa en U (la singularidad en $w_0 = z$ es evitable) y el resultado se obtiene de la fórmula de Riemann-Green, como el teorema 4.22, siguiendo la pauta mencionada en la observación 4.13.

Teorema 5.16 (Desarrollos de Laurent). Sea f una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$ que contiene a la corona $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$. Entonces existen:

1. Una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ que converge absolutamente en $B(z_0, R)$ y
2. Una serie de potencias negativas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \dfrac{1}{(z - z_0)^n}$ que converge absolutamente en el complementario de $\overline{B}(z_0, r)$,

tales que, para cada $z \in A$, se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n}. \tag{5.2}$$

Además, Los coeficientes de estas series vienen dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, \rho)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, \rho)} f(w)\, (w - z_0)^{n-1}\, dw, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{5.3}$$

siendo $C(z_0, \rho)$ cualquier circunferencia centrada en z_0 y de radio ρ, $r < \rho < R$, orientada positivamente.

Observaciones 5.17.

i) Las fórmulas (5.3) muestran que la expresión de f en A dada por (5.2) es única, y se denomina el *desarrollo en serie de Laurent* de f en la corona A; la primera serie es la *parte regular* del desarrollo y la segunda la *parte residual* o *singular*.

ii) Es usual denotar, para $n \geq 1$, $b_n = a_{-n}$ y así la expresión (5.2) se escribe de forma más compacta como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n, \tag{5.4}$$

y las fórmulas dadas en (5.3) se resumen en una:

$$a_n = \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_{C(z_0,\,\rho)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw\,, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.5}$$

iii) La demostración de este teorema es similar a la del teorema 4.17, donde se muestra que toda función holomorfa es analítica. Ahora haciendo uso de la fórmula (5.1) y pasando al límite cuando ρ_1 tiende hacia r y ρ_2 hacia R. En ese otro caso se obtenía que la serie de Taylor en torno a z_0 representaba a la función en el mayor disco abierto centrado en dicho punto y contenido en el abierto donde es holomorfa la función; lo que se concluye aquí es que f es representable en serie de Laurent (serie de potencias positivas y negativas) en la mayor corona centrada en z_0 y contenida en U.

iv) Caso de particular interés es el que se refiere a funciones holomorfas en abiertos del tipo $U = V \setminus \{z_0\}$, es decir, con una singularidad aislada en el punto z_0, en los que el radio menor r es nulo. En esta situación la parte regular del desarrollo de Laurent de f define una función holomorfa en $B(z_0, R)$, mientras que la parte residual, si es no nula, aporta el carácter singular de la función en dicho punto. El siguiente resultado precisa esta consideración.

Teorema 5.18 (Clasificación de singularidades según el desarrollo de Laurent). Sean f una función holomorfa en un disco punteado $B^*(z_0, R)$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\frac{1}{(z - z_0)^n}$$

su desarrollo de Laurent en $B^*(z_0, R)$. Entonces:

i) z_0 es una singularidad evitable de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo es nula, es decir, si $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) z_0 es un polo de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo es una suma finita, es decir, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_m \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > m$. En este caso m es el orden del polo.

iii) z_0 es una singularidad esencial de f si, y sólo si, la parte residual del desarrollo tiene infinitos términos no nulos.

El problema de determinar el desarrollo de Laurent de una función, es decir, de encontrar los coeficientes a_n y b_n, es en general difícil si se hace uso de las fórmulas dadas en (5.3). En la práctica se recurre a otro tipo de argumentos basados en las propiedades de series ya conocidas, el producto de Cauchy de series, etc. Ilustraremos esto con unos ejemplos.

Ejemplos 5.19.

i) A la hora de calcular desarrollos de Laurent de fracciones racionales resultan de utilidad los desarrollos de Taylor de la suma geométrica y sus derivadas. Recordemos:

$$\frac{k!}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)\,w^n\,, \quad k \geq 0\,, \qquad |w| < 1$$

Resulta inmediato comprobar que el desarrollo de Laurent de una suma finita de funciones holomorfas en una corona es la suma de los desarrollos de Laurent de cada una de ellas, y puesto que toda fracción racional se escribe como la suma de un polinomio y una combinación lineal de fracciones simples del tipo $1/(z - r_j)^m$, siendo las r_j las raíces del denominador, es suficiente determinar los desarrollos de estas últimas:

1. En primer lugar, si $z_0 = r_j$, la fracción
$$\frac{1}{(z-r_j)^m} = \frac{1}{(z-z_0)^m}$$
es ya el desarrollo de Laurent (que consta de un sólo sumando) de la función que representa en la corona $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

2. Si $z_0 \neq r_j$, se puede escribir
$$\begin{aligned}\frac{1}{z-r_j} &= \frac{1}{(z-z_0)-(r_j-z_0)} = \frac{-1}{r_j-z_0}\,\frac{1}{1-(z-z_0)/(r_j-z_0)}\\ &= \frac{-1}{r_j-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(r_j-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(r_j-z_0)^{n+1}}\,(z-z_0)^n;\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-r_j)^m} &= \frac{1}{\big((z-z_0)-(r_j-z_0)\big)^m} = \frac{(-1)^m}{(r_j-z_0)^m}\,\frac{1}{\big(1-(z-z_0)/(r_j-z_0)\big)^m}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(r_j-z_0)^m}\,\frac{(n+m-1)\cdots(n+1)}{(m-1)!}\,\frac{(z-z_0)^n}{(r_j-z_0)^n} \quad \text{si } m \geq 2,\end{aligned}$$
que es el desarrollo de Taylor de dicha función, válido en el disco $B(z_0, |r_j - z_0|)$, puesto que esta serie converge si
$$\left|\frac{z-z_0}{r_j-z_0}\right| < 1.$$
También se puede considerar el desarrollo en la corona $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > |r_j - z_0|\}$, en este caso se escribe
$$\begin{aligned}\frac{1}{z-r_j} &= \frac{1}{(z-z_0)-(r_j-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-(r_j-z_0)/(z-z_0)}\\ &= \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r_j-z_0)^n}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r_j-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}};\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-r_j)^m} &= \frac{1}{\big((z-z_0)-(r_j-z_0)\big)^m} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\,\frac{1}{\big(1-(r_j-z_0)/(z-z_0)\big)^m}\\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m-1)\cdots(n+1)}{(m-1)!}\,\frac{(r_j-z_0)^n}{(z-z_0)^n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m-1)\cdots(n+1)}{(m-1)!}\,(r_j-z_0)^n\,\frac{1}{(z-z_0)^{n+m}} \quad \text{si } m \geq 2,\end{aligned}$$
siendo ésta una serie en potencias negativas de $(z - z_0)$ que converge si
$$\left|\frac{r_j-z_0}{z-z_0}\right| < 1.$$

ii) La función f definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por
$$f(z) = z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$
tiene una singularidad aislada en el punto $z_0 = 0$. Para calcular su desarrollo de Laurent en la corona $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, es decir, en potencias de z, basta recurrir a la serie de Taylor de la función exponencial en torno al punto $w_0 = 0$; así, para $z \neq 0$,
$$f(z) = z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^n} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}\,\frac{1}{z^n},$$
siendo este último el desarrollo de Laurent en la citada corona; la parte regular del desarrollo es el polinomio $z^2 + z + \dfrac{1}{2}$ y la parte residual la última serie.

5.3. Residuos

Dedicamos esta sección al concepto de *residuo* y a los métodos de cálculo de residuos que se utilizan de forma constante en las aplicaciones que se expondrán posteriormente.

Definición 5.20. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, f una función holomorfa en un disco punteado $B^*(z_0, R)$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$ el desarrollo de Laurent de f en $B^*(z_0, R)$. El número complejo $b_1 = a_{-1}$ se denomina *residuo* de f en z_0 y se denota por $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

Observación 5.21. En las condiciones de la definición anterior, el residuo de f en el punto z_0 se obtiene, de acuerdo con las fórmulas (5.3) o (5.5), mediante la integral

$$b_1 = a_{-1} = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{C(z_0,\,\rho)} f(w)\,dw, \tag{5.6}$$

siendo $C(z_0, \rho)$ la circunferencia centrada en z_0 y de radio ρ, con $0 < \rho < R$, orientada positivamente. En este sentido, el nombre de “residuo” elegido para b_1 es adecuado, pues (salvo la constante $2\pi i$) es lo que queda cuando se integra la función en circunferencias suficientemente pequeñas que rodean al punto z_0.

La evaluación de las integrales (5.6) es, salvo en casos muy concretos, de gran dificultad, y se recurre en la práctica a otros argumentos. Concretamente, en el caso particular de que el punto z_0 sea una singularidad polar de la función f, los siguientes resultados proporcionan diversos métodos de cálculo, obtenidos a partir de las propiedades ya expuestas de las funciones analíticas y las singularidades aisladas.

Proposición 5.22. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$ que tiene una singularidad de tipo evitable en el punto z_0. Entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0\,.$$

Corolario 5.23. Sean f y g dos funciones holomorfas en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que tienen un cero del mismo orden en z_0. Entonces

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = 0.$$

Lo mismo sucede si el orden del cero de f en z_0 es superior al del cero de g.

Corolario 5.24. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f, g dos funciones holomorfas en $U \setminus \{z_0\}$ que tienen un polo del mismo orden en z_0. Entonces

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = 0.$$

Lo mismo se puede decir si el orden del polo de g en z_0 es superior al del polo de f.

Proposición 5.25. Sea g una función holomorfa en un disco $B(z_0, r)$ con $g(z_0) \neq 0$. Si $m \in \mathbb{N}$, la función f definida en el disco punteado $B^*(z_0, r)$ por

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

tiene un polo de orden m en el punto z_0 y

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Observación 5.26. Toda función f que tenga un polo de orden m en el punto z_0 se puede escribir como en la proposición anterior, pero puede resultar extremadamente laborioso determinar en situaciones concretas esa función g. Seguidamente se presentan algunos resultados relativos a singularidades polares de orden pequeño, que surgen al considerar cocientes de funciones, y que permiten soslayar ese inconveniente.

Proposición 5.27. Sean f y g funciones holomorfas en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f no se anula en z_0 y g tiene un cero simple en z_0, es decir,

$$f(z_0) \neq 0, \qquad g(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g'(z_0) \neq 0.$$

Entonces $f/_g$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

El resultado anterior se generaliza en la siguiente

Proposición 5.28. Sean f y g dos funciones holomorfas en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f tiene un cero de orden m en z_0 y g tiene un cero de orden $m+1$ en z_0. Entonces $f/_g$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) = (m+1)\,\frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m+1)}(z_0)}.$$

Proposición 5.29. Sean f y g funciones holomorfas en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f no se anula en z_0 y g tiene un cero doble en z_0, es decir,

$$f(z_0) \neq 0\,, \qquad g(z_0) = g'(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g''(z_0) \neq 0.$$

Entonces $f/_g$ tiene un polo doble en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) \;=\; 2\,\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2}{3}\,\frac{f(z_0)\,g'''(z_0)}{\big(g''(z_0)\big)^2}.$$

Proposición 5.30. Sean f y g funciones holomorfas en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f tiene un cero simple en z_0 y g tiene un cero de orden 3 en z_0, es decir,

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) \neq 0, \qquad g(z_0) = g'(z_0) = g''(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g'''(z_0) \neq 0.$$

Entonces $f/_g$ tiene un polo doble en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f}{g}, z_0\Big) \;=\; 3\,\frac{f''(z_0)}{g'''(z_0)} - \frac{3}{2}\,\frac{f'(z_0)\,g^{(4)}(z_0)}{\big(g'''(z_0)\big)^2}.$$

Proposición 5.31. Sea f una función holomorfa en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ en el que tiene un cero de orden $m \in \mathbb{N}$. Entonces la función $f'/_f$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f'}{f}\,, z_0\Big) = m\,.$$

Proposición 5.32. Sea f una función holomorfa en un disco punteado centrado en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$, en el que tiene un polo de orden $m \in \mathbb{N}$. Entonces $f'/_f$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f'}{f}\,, z_0\Big) = -m\,.$$

Observación 5.33. Es posible generalizar la fórmula de la proposición 5.29 al caso de cocientes $f/_g$ con $f(z_0) \neq 0$, y g con un cero de orden m en z_0; el algoritmo consiste en el determinante de una matriz de $\mathscr{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ cuyos coeficientes están dados en términos de las derivadas de f y g en z_0 (ver [21]). Pero, por supuesto, dicho algoritmo es tanto más costoso cuanto mayor sea el orden del polo y sólo tiene interés como fórmula cerrada. En la práctica es más cómodo recurrir a los desarrollos de Laurent de las funciones involucradas; concretamente: poniendo $z_0 = 0$ para abreviar, si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$ y $g(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} c_n\, z^n$, entonces $f/_g = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} a_n\, z^n$ y los coeficientes a_n, en particular a_{-1}, se obtienen de la igualdad $g\,h = f$, es decir, despejándolos de las ecuaciones que aparecen en el producto de Cauchy:

$$\Big(c_m\, z^m + c_{m+1}\, z^{m+1} + \dots\Big)\Big(\frac{a_{-m}}{z^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots\Big) \;=\; b_0 + b_1\, z + \dots$$

con la ventaja de que este procedimiento se aplica igual cualquiera que sea el orden de los ceros de f y g, e incluso si z_0 es singularidad polar de f y g (ver tabla A.11).

5.4. Teorema de los residuos. Aplicaciones al Cálculo

La idea clave del teorema que da nombre a esta sección es bien simple: utilizar el concepto de residuo para calcular integrales complejas. Las numerosas aplicaciones de este teorema, algunas de las cuales presentaremos aquí, justifican sobradamente el interés de este resultado. La versión general, que constituye el siguiente enunciado, es consecuencia de la versión homológica del teorema de Cauchy para ciclos; sin embargo, como se comenta en las observaciones 5.36.iii, la versión que proporcionamos en el corolario inmediatamente posterior, para la integración a lo largo del borde de dominios de Jordan dentro del abierto se puede demostrar con técnicas más elementales y es suficiente para muchas de las aplicaciones prácticas, en particular, las que se relatan luego.

Teorema 5.34 (de los residuos). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función definida y holomorfa en U salvo quizá en una familia de puntos $A \subset U$ que son todos ellos singularidades aisladas de f (es decir, $A' \cap U = \emptyset$). Sea γ un ciclo de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos en $U \setminus A$ (es decir, γ no pasa por singularidades de f) y nulhomólogo respecto de U (i.e., para todo $z \notin U$ se tiene que $\eta(\gamma, z) = 0$). Entonces, hay un número finito $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de singularidades de f tales que $\eta(\gamma, z_j) \neq 0$, y se tiene que

$$\oint_\gamma f(w)\, dw = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \eta(\gamma, z_j)\ \mathrm{Res}(f, z_j)\,. \tag{5.7}$$

Corolario 5.35 (teorema de los residuos para dominios de Jordan). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función definida y holomorfa en U salvo quizá en una familia de puntos $A \subset U$ que son todos ellos singularidades aisladas de f. Supongamos que D es un dominio de Jordan con $\overline{D} \subset U$ y tal que ninguna de las singularidades de f está en la curva ∂D. Entonces, si $z_1, z_2, \ldots, z_m$ son las singularidades de f en el interior de D. y en ∂D se considera la orientación natural inducida por D, se tiene que

$$\oint_{\partial D} f(w)\, dw \;=\; 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_j)\,. \tag{5.8}$$

Observaciones 5.36.

i) En las condiciones del teorema 5.34 o del corolario 5.35 la función f tiene una cantidad numerable de singularidades aisladas. Además, en cada subconjunto compacto del abierto U (en particular, en $\overline{D}$) sólo puede haber un número finito de puntos de A.

ii) Concentrémonos en la situación del corolario 5.35. La definición de dominio de Jordan garantiza que $\eta(\partial D, z) = 0$ para todo $z \notin \overline{D}$ y $\eta(\partial D, z) = 1$ para todo $z \in D$, de ahí la expresión simplificada (5.8) de la fórmula (5.7).

iii) Otra forma de obtener el resultado en la versión sencilla 5.35 consiste en lo siguiente: considerando discos cerrados $B_j = \overline{B}(z_j, \varepsilon)$ centrados en cada una de las singularidades z_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, y de radio suficientemente pequeño para que sean disjuntos dos a dos, la fórmula (5.8) equivale a

$$\oint_{\partial D} f(w)\, dw = \sum_{j=1}^{m} \oint_{\partial B_j} f(w)\, dw\,,$$

igualdad que se deduce de la fórmula de Riemann-Green aplicada al abierto de Jordan $V = D \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ (ver figura 5.1).

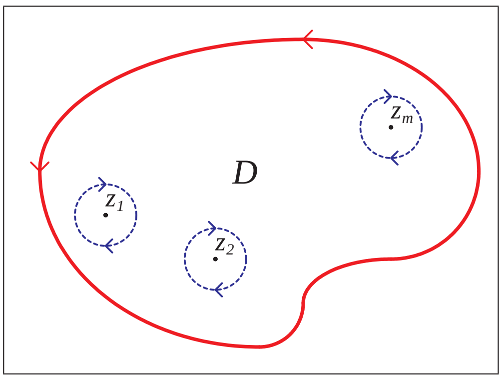


Figura 5.1: $V = D \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j$

Los resultados que se presentan a continuación son consecuencia del teorema de los residuos y proporcionan métodos prácticos para la evaluación de cierto tipo de integrales en intervalos que en ocasiones son imposibles de obtener mediante el cálculo de primitivas.

5.4.1. Integrales racionales trigonométricas

El primer resultado de aplicación es sencillo de describir: para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, se tiene que ${}^1\!/_z = \overline{z}$, y si $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, entonces $2\cos(t) = z + \overline{z}$ y $2\,i\sin(t) = z - \overline{z}$, esto es,

$$\cos(t) = \frac{1}{2}\left(z + {}^1\!/_z\right), \qquad \sin(t) = \frac{1}{2\,i}\left(z - {}^1\!/_z\right).$$

De aquí se deduce fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 5.37. Sea $R(x, y)$ una función racional cuyo denominador no se anula en la circunferencia unidad; explícitamente, $R = {}^P\!/_Q$, siendo P y Q polinomios en las variables reales x e y, con $Q(x, y) \neq 0$ si $x^2 + y^2 = 1$. Si f es la función definida por

$$f(z) = \frac{1}{i\,z}\,R\Big(\frac{1}{2}\left(z + {}^1\!/_z\right), \frac{1}{2\,i}\left(z - {}^1\!/_z\right)\Big)$$

y $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son sus polos en el disco abierto $B(0, 1)$, entonces

$$\int_0^{2\pi} R\big((\cos(t), \sin(t)\big)\,dt \;=\; 2\,\pi\,i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, a_j)\,. \tag{5.9}$$

5.4.2. Integrales en la recta real

Proposición 5.38.

i) Supongamos que f es una función holomorfa en un conjunto abierto que contiene al semiplano superior cerrado $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, excepto para un número finito de singularidades aisladas ninguna de las cuales está en el eje real, y tal que existen constantes $M > 0$ y $p > 1$ y un número real R tales que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p} \quad \text{si } z \in H \text{ y } |z| \geq R. \tag{5.10}$$

Entonces f es integrable en $\mathbb{R}$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; 2\,\pi\,i \sum_{\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}(f, a). \tag{5.11}$$

ii) Si se verifican las condiciones de 5.38.i sustituyendo H por el semiplano inferior cerrado $L = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$, entonces f es integrable en $\mathbb{R}$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; -2\,\pi\,i \sum_{\mathrm{Im}(b)<0} \mathrm{Res}(f, b). \tag{5.12}$$

Observaciones 5.39.

i) Las sumas que aparecen en (5.9), o en (5.11), o en (5.12) tienen perfecto sentido pues son finitas, ya que $\mathrm{Res}(f, z) = 0$ salvo, quizá, cuando $z = a$ es una singularidad de f.

En lo sucesivo aparecerán sumatorios similares, es decir, extendidos a los puntos de cierto abierto del plano. La consideración será la misma que aquí: en realidad la suma se concreta en las singularidades aisladas de cierta función, que serán en cantidad finita. No mencionaremos más este asunto.

ii) Se verifican las condiciones de 5.38.i y 5.38.ii, y por tanto las fórmulas (5.11) y (5.12), si $f = {}^P\!/_Q$, donde P y Q son polinomios tales que $\mathrm{grado}(Q) \geq \mathrm{grado}(P) + 2$, y Q no tiene ceros en la recta real. En realidad, para que la integral impropia de f converja, aunque no absolutamente, basta con que $z\,f(z)$ tienda hacia 0 cuando $z \to \infty$, lo que ocurre, tanto en H como en L, si $f = {}^P\!/_Q$ con $\mathrm{grado}(Q) > \mathrm{grado}(P)$.

iii) Las fórmulas anteriores se obtienen aplicando el teorema de los residuos al borde de semicírculos del tipo

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\,,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \qquad \text{y} \qquad \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\,,\ \mathrm{Im}(z) \leq 0\}\,,$$

respectivamente; estas curvas consisten en la unión del segmento $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ y una semicircunferencia. Para radios R suficientemente grandes, todas las singularidades de la función en el semiplano correspondiente se encuentran en el interior del semicírculo, y el resultado se deduce al pasar al límite cuando $R \to \infty$.

Lema 5.40 (de Jordan).
Sea f una función holomorfa en un disco punteado $B^*(z_0,r)$ y tal que en el punto z_0 tiene un polo simple.

Para cada ε con $0<\varepsilon<r$, sea γ_ε un arco de circunferencia de centro z_0, ángulo fijo de amplitud α y radio ε, recorrido en sentido antihorario (i.e., $\gamma_\varepsilon(t)=z_0+\varepsilon\, e^{i(t+\beta)}$, $t\in[0,\alpha]$; ver figura 5.2). Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz \;=\; \alpha\, i\,\operatorname{Res}(f,z_0). \qquad (5.13)$$

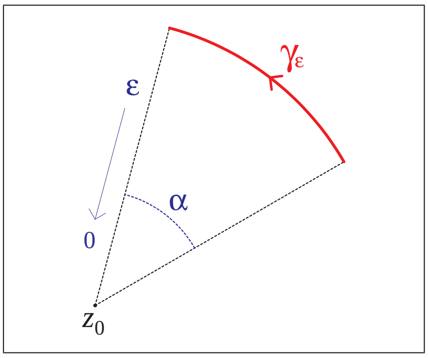


Figura 5.2: Con amplitud α fija, el radio ε decrece hacia 0.

El lema de Jordan es independiente del teorema de los residuos, y combinado con éste proporciona nuevas herramientas de cálculo entre las que se encuentra el método expuesto a continuación.

5.4.3. Valor principal de Cauchy

Antes de dar la definición presentaremos un ejemplo sencillo que a buen seguro arrojará mucha luz sobre el asunto que tratamos:

Consideremos la función definida en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por $f(x)={}^1\!/_x$. Es de sobra conocido que f no es integrable en ningún intervalo que tenga a 0 por extremo. Ahora bien, fijados α, $\beta\in\mathbb{R}$ tales que $\alpha<0<\beta$, para cada ε, con $0<\varepsilon<\min\{-\alpha,\beta\}$, se tiene que

$$\int_\alpha^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_\varepsilon^\beta\frac{dx}{x}=\ln\left(\frac{\beta}{-\alpha}\right)\quad\text{y por tanto}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\alpha^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_\varepsilon^\beta\frac{dx}{x}\right)=\ln\left(\frac{\beta}{-\alpha}\right).$$

El valor de este límite no es el de ninguna integral impropia; es el denominado *valor principal de Cauchy* de la integral de f en (α,β) y se escribe $VP\int_a^b {dx}/_x=\ln\left({\beta}/_{-\alpha}\right)$.

Definición 5.41. Sea f una función compleja definida y continua en $\mathbb{R}$ excepto en un número finito de puntos $x_1<x_2<\ldots<x_n$. Si f es integrable en $(-\infty,x_1-\varepsilon)$ y $(x_n+\varepsilon,\infty)$ para todo $\varepsilon>0$ (o simplemente, si las correspondientes integrales impropias convergen) y existe y es finito el límite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx\right), \qquad (5.14)$$

dicho límite se denomina *valor principal de Cauchy* de la integral de f en $\mathbb{R}$ y se denota por

$$VP\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Nótese que toda integral impropia convergente $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ puede ser observada como un valor principal; su convergencia asegura la existencia y finitud del límite (5.14).

Proposición 5.42.

i) Sean U un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al semiplano superior cerrado H y f una función holomorfa en U excepto en un número finito de singularidades aisladas. Sean $x_1,\ldots,x_m$ las posibles singularidades de f en el eje real y supongamos que todas ellas son polos simples. Si se verifica además la condición (5.10), entonces existe el valor principal de Cauchy de f en $\mathbb{R}$ y se tiene que

$$VP\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; 2\pi i\sum_{\operatorname{Im}(a)>0}\operatorname{Res}(f,a)\;+\;\pi i\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Res}(f,x_j)\,. \qquad (5.15)$$

ii) Si se sustituye H por L, el semiplano inferior cerrado, y se verifican las restantes condiciones de 5.42.i, entonces

$$VP\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; -2\pi i\sum_{\operatorname{Im}(b)<0}\operatorname{Res}(f,b)\;-\;\pi i\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Res}(f,x_j)\,. \qquad (5.16)$$

Observación 5.43. La prueba de 5.42 se lleva a cabo de forma similar a como se indicó en la observación 5.39.iii, modificando las curvas en las que se integra para evitar las singularidades en el eje real; para ello se consideran semicircunferencias centradas en los puntos x_j y de radio ε que se hace tender hacia 0, calculando el límite mediante (5.13). En la figura 5.3 se presenta un ejemplo de curva adecuada para el caso 5.42.i.

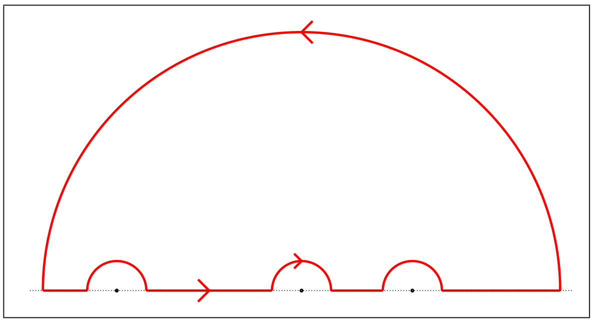


Figura 5.3: Las singularidades en $\mathbb{R}$ se "saltan".

5.4.4. Transformadas de Fourier

Definición 5.44. Dada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y un número real ω, si la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$ es convergente, su valor se denomina *transformada de Fourier* de f en el punto ω y se denota por $\widehat{f}(\omega)$. En particular, si f es integrable en $\mathbb{R}$, $\widehat{f}$ está definida para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Proposición 5.45.

i) Sea $\omega < 0$. Sea también f una función holomorfa en un conjunto abierto U que contiene al semiplano $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, excepto para un número finito de singularidades aisladas ninguna de las cuales está en el eje real. Supongamos asimismo que

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in H}} f(z) = 0\,. \tag{5.17}$$

Entonces existe $\widehat{f}(\omega)$ y

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\, x} f(x)\,dx \;=\; 2\,\pi\, i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega\, z} f(z), a)\,. \tag{5.18}$$

ii) Sea $\omega > 0$. Si se verifican las condiciones de 5.45.i sustituyendo H por el semiplano inferior $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}$, entonces existe $\widehat{f}(\omega)$ y

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\, x} f(x)\,dx \;=\; -2\,\pi\, i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega\, z} f(z), b). \tag{5.19}$$

Observaciones 5.46. Sean U un abierto que contiene a H o L, según corresponda, y f una función holomorfa en U salvo en un número finito de singularidades, ninguna de ellas en $\mathbb{R}$.

i) El valor de la transformada de Fourier de f en $\omega = 0$ se obtiene, cuando se verifican las condiciones oportunas, según lo expuesto en la proposición 5.38 (nótese que en este caso resulta $e^{i0x} f(x) = f(x)$).

ii) Las fórmulas anteriores se obtienen aplicando el teorema de los residuos al borde de rectángulos de vértices

$$-R,\ R,\ R(1+i),\ R(-1+i) \qquad \text{y} \qquad -R,\ R,\ R(1-i),\ R(-1-i)\,,$$

respectivamente, pasando luego al límite cuando $R \to \infty$; de la condición (5.17) se deduce, entre otras cosas, que la integral impropia de $e^{-i\omega x} f(x)$ en $\mathbb{R}$ converge.

iii) Si existen $R, M > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \quad \text{si} \quad |z| \geq R\,, \tag{5.20}$$

entonces el límite (5.17) es trivial (lo mismo en el semiplano L). La acotación (5.20) es posible, en particular, si $f = {}^{P}\!/_{Q}$, con P y Q son polinomios tales que $\operatorname{grado}(Q) > \operatorname{grado}(P)$ (además Q no puede tener ceros en $\mathbb{R}$ por la hipótesis realizada sobre f).

iv) Si existen $R, M > 0$ y $p > 1$ tales que en el correspondiente semiplano se verifica (5.10) entonces $\widehat{f}(\omega)$ existe como integral (o integral impropia absolutamente convergente).

v) En general, en todos estos enunciados, las condiciones (5.10), (5.20) o (5.17) sirven para probar que la integral a lo largo de arcos "lejanos" tiende hacia 0; en ocasiones se puede obtener esta propiedad bajo hipótesis menos restrictivas que las expuestas.

5.4.5. Valor principal de Cauchy de transformadas de Fourier

Proposición 5.47.

i) Supongamos que f es una función holomorfa en un abierto que contiene al semiplano $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, excepto para un número finito de singularidades aisladas. Sean $x_1, \ldots, x_m$ las singularidades en el eje real, todas ellas polos simples. Supongamos que $\lim\limits_{z\to\infty,\ z\in H} f(z) = 0$. Entonces, para cada $w < 0$ se tiene que

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x)\, dx = 2\,\pi\, i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(e^{-iwz} f(z), a) + \pi\, i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(e^{-iwz} f(z), x_j)\,. \tag{5.21}$$

ii) Si se verifican las condiciones de 5.47.i sustituyendo H por el semiplano inferior cerrado $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}$, entonces, para cada $w > 0$ se tiene que

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x)\, dx = -2\,\pi\, i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(e^{-iwz} f(z), b) - \pi\, i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(e^{-iwz} f(z), x_j)\,. \tag{5.22}$$

Observación 5.48. Para la prueba del resultado anterior se procede como se relata en 5.43, modificando en este caso las curvas que se citan en 5.46.ii.

En las dos situaciones es esencial que las singularidades sobre el eje real sean polos simples para garantizar la existencia del valor principal, o si se prefiere, para poder aplicar el lema de Jordan.

Las aplicaciones del teorema de los residuos al cálculo de integrales definidas que aquí se han expuesto son de carácter más o menos general, pero existen otras muchas; la elección de una función holomorfa con singularidades aisladas y una curva adecuadas puede resolver problemas concretos muy difíciles de abordar por otros métodos: por ejemplo, en [21], [25], [26], [27] o [32] se pueden encontrar procedimientos para calcular, mediante residuos, integrales de los siguientes tipos:

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx\,; \qquad \int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx\,; \qquad \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \ln(x)^m \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx\,; \qquad \int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \ldots$$

(P, Q hacen referencia a polinomios, $a < b$ son números reales). Véanse también los ejercicios 5.32, 5.34 o 5.35, que contemplan el estudio de funciones específicas en curvas ad hoc para obtener los valores de integrales de funciones reales en intervalos de $\mathbb{R}$, pero difícilmente abordables mediante el Análisis de variable real.

Para finalizar esta sección presentamos una aplicación del teorema de los residuos al cálculo de sumas infinitas.

5.4.6. Sumación de series

Teorema 5.49. Sea f holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un conjunto finito de singularidades aisladas, $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Para $N \in \mathbb{N}$ sea C_N el borde del cuadrado con vértices en $(N + 1/2)(\pm 1 \pm i)$.

i) Supongamos que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} \cot(\pi\, z)\, f(z)\, dz = 0. \tag{5.23}$$

Entonces se tiene la siguiente *fórmula de sumación*:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S,\, |n|\leq N} f(n) \;=\; -\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\big(\cot(\pi\, z)\, f(z), a_j\big)\,. \tag{5.24}$$

ii) Supongamos que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} \frac{f(z)}{\sin(\pi\, z)}\, dz = 0\,. \tag{5.25}$$

Entonces se tiene la siguiente *fórmula de sumación*:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S,\, |n|\leq N} (-1)^n f(n) \;=\; -\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\Big(\frac{f(z)}{\sin(\pi\, z)}, a_j\Big)\,. \tag{5.26}$$

Observaciones 5.50.

i) Las fórmulas (5.24) y (5.26) se deben interpretar tal como están escritas: para fijar ideas pensemos que f no tiene singularidades en $\mathbb{Z}$; aun así, de (5.23) no se puede deducir que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ sea convergente, esto es, que converjan $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f(-n)$. Lo mismo para el caso 5.49.ii.

ii) Si f es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en singularidades aisladas y se verifica la condición (5.20) entonces se verifican las dos condiciones (5.23) y (5.25) y por tanto son válidas las dos fórmulas (5.24) y (5.26). Nótese también que, si se cumple la condición más fuerte (5.10), entonces $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S} f(n)$ converge absolutamente, en virtud del criterio de comparación.

Ejercicios

5.1 Consideremos la función $f(z) = e^{-1/z}$, definida en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

i) Comprobar que si $S = \{z\in\mathbb{C} : |\arg(z)| < \pi/4\}$, se verifica que

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S}} f(z) = 0.$$

ii) Consideremos para cada $\alpha\in(0,2]$ el sector (abierto) con vértice en el origen, cuya recta bisectriz es el eje real positivo, y con apertura $\alpha\pi$, es decir, $S_\alpha = \{z\in\mathbb{C} : |\arg(z)| < \alpha\pi/2\}$ (en el apartado *i*) es $\alpha = 1/2$). ¿Para qué valores de α se puede obtener que

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_\alpha}} f(z) = 0?$$

iii) Determinados dichos valores, probar que la función g_n, $n\in\mathbb{N}$, definida en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ por $g_n(z) = z^{-n} f(z)$ tiene el mismo comportamiento en S_α.

5.2 Analizar las singularidades de las siguientes funciones:

i) $\dfrac{e^z(z-3)}{(z-1)(z-5)}$

ii) $\dfrac{e^z-1}{z}$

iii) $z\,e^{-z}$

iv) $\dfrac{\cos(z)}{1-z}$

v) $\dfrac{1}{z-z^3}$

vi) $\tan(z)$

vii) $\dfrac{\tan(z)}{\sin(z^3)}$

viii) $\exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$

ix) $\dfrac{e^z-2}{z}$

x) $\tanh(z)$

xi) $\dfrac{z^4}{1+z^4}$

xii) $\cos\left(\dfrac{1}{z-i}\right)$

5.3 Sean $a\in\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en el disco punteado $B^*(a,r)$. Si a es un polo de orden m de f, probar que a es un polo de $f^{(n)}$ y deducir cuál es su orden.

5.4 Sea f una función holomorfa en el disco punteado $B^*(z_0,R)$.

i) Probar que z_0 es una singularidad evitable o un polo de orden a lo sumo p si y sólo si

$$\lim_{r\to 0^+} r^{p+1}\max\{|f(z)| : |z-z_0| = r\} = 0.$$

ii) Supongamos que existe $c>0$ tal que

$$|f(z)| \le \frac{c}{\sqrt{|z-z_0|}} \quad \text{para cada } z\in B^*(z_0,R),$$

demostrar que la singularidad en z_0 es evitable.

iii) Si existe $c>0$ tal que, para la rama principal del logaritmo, se tiene que

$$|f(z)| \le c\,|\log(z-z_0)| \quad \text{para todo } z\in B^*(z_0,R).$$

Estúdiese la singularidad de f en z_0.

5.5 Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, z_0 un punto de U y f una función meromorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Si A es el conjunto de polos de f, se supone que z_0 es un punto de acumulación de A. Si $B(z_0, R) \subset U$, demostrar que $f(B^*(z_0, R) \setminus A)$ es denso en $\mathbb{C}$.

5.6 Proporcionar los desarrollos de Laurent en potencias de z para la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$, especificando las regiones donde son válidos cada uno de ellos.

5.7 Desarrollar en serie de Laurent la función $f(z) = \dfrac{4\,i-3}{(i\,z+4)(z-3)}$ en las siguientes coronas:

i) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 3\}$

ii) $\{z \in \mathbb{C} : 3 < |z| < 4\}$

iii) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 4\}$

iv) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 4\,i| < 5\}$

v) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4\,i| > 5\}$

vi) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 3| < 5\}$

5.8 Desarrollar en serie de Laurent la función

$$f(z) = \log\Big(\frac{z^2}{z^2-1}\Big)$$

en la corona $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ cuando se considera la determinación principal del logaritmo.

5.9 Sean t un número real fijo, f la función compleja definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por

$$f(z) = \exp\Big(\frac{t}{2}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big),$$

y $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)\, z^n$ el desarrollo de Laurent de f en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ demostrar que:

i) $J_n(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\big(t\sin(\theta) - n\theta\big)\, d\theta.$

ii) $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$.

***Nota**: Los coeficientes $J_n(t)$ reciben el nombre de* funciones de Bessel.

5.10 Los *números de Bernoulli* B_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, son los coeficientes de z^n multiplicados por $n!$ en el desarrollo de Laurent en un disco punteado centrado en $z_0 = 0$ de la función

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}\,.$$

i) Determinar el abierto de validez del citado desarrollo.

ii) Probar que $B_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 1$.

iii) Encontrar una expresión integral de la forma

$$B_n = \int_0^{2\,\pi} g_n(t)\, dt\,.$$

iv) Probar que $B_0 = 1$ y, si $n > 1$,

$$\binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0\,.$$

v) Obtener el desarrollo de Laurent en un disco punteado centrado en $z_0 = 0$ de la función cotangente a partir de la identidad:

$$\cot(z) = i\left(1 + \frac{2}{(e^{2iz}-1)}\right)$$

vi) Probar que

$$\tan(z) = \cot(z) - 2\cot(2z) \qquad \text{y} \qquad \csc(z) = \cot(z) + \tan\left({}^{z}\!/_{2}\right)$$

y deducir el desarrollo de Laurent en un disco punteado centrado en $z_0 = 0$ de las funciones $\tan(z)$ y $\csc(z)$.

5.11 Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $z_0 = 0$ es un polo simple de f. Si la imagen por f de la circunferencia unidad es un subconjunto de $\mathbb{R}$, probar que existen $b \in \mathbb{C}$ no nulo y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(z) = az + b + \frac{\overline{a}}{z} \quad \text{para cada } z \neq 0\,.$$

5.12 Sean f y g dos funciones enteras tales que

$$\big|f(z)\big| \leq \big|g(z)\big| \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Demostrar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| \leq 1$, tal que

$$f(z) = \lambda\, g(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}\,.$$

5.13 Sea f una función holomorfa en $B^*(a,r)$ y tal que existe una constante M con

$$\operatorname{Re}(f)(z) \leq M \quad \text{para todo } z \in B^*(a,r),$$

demostrar que f tiene una singularidad evitable en a.

5.14 Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Si z_0 es una singularidad esencial de f y P es un polinomio no constante, probar que z_0 es también una singularidad esencial de $P \circ f$.

5.15 Sea f una función holomorfa en un disco punteado centrado en $a \in \mathbb{C}$ que tiene un polo en dicho punto. Probar que:

i) Si el polo es simple, entonces $\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} (z-a)\, f(z)\,.$

ii) Si el polo es doble, entonces $\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} \big(2\,(z-a)\, f(z) + (z-a)^2 f'(z)\big)\,.$

5.16 Determinar, clasificándolas, las singularidades de las siguientes funciones y calcular en ellas los residuos correspondientes:

i) $\dfrac{e^z}{z\,(z-1)}$

ii) $z \sin\left(1/z\right)$.

iii) $\dfrac{z^3+z^2+2}{z\,(z^2-1)^2}$

iv) $\tan(z)$

v) $\dfrac{\big(1-\cos(z)\big)^2}{z^4}$

vi) $(z-1)^2 \exp\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$.

vii) $\dfrac{e^{\pi z}}{1+z^2}$

viii) $\sin\left(1/z\right)$

ix) $\dfrac{1}{\sinh(z^2)}$

x) $\dfrac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$

xi) $\dfrac{z^2}{e^z-1}$

xii) $\dfrac{z^2-1}{\sin(\pi z)}$

xiii) $\dfrac{z}{\cos(z)-1}$

5.17 Calcular el desarrollo de Laurent de las funciones siguientes en la mayor bola punteada centrada en el punto que se indica, indicando el radio de la misma. Determinar el tipo de singularidad que presenta la función en ese punto y el valor del residuo $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

i) $f(z) = \dfrac{1}{z\,(z-1)} + \cosh\left(1/z\right)$ en $z_0 = 0$.

ii) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2} + \cos\left(1/z\right)$ en $z_0 = 0$.

iii) $f(z) = \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{(z-2)^2}$ en $z_0 = 0$.

iv) $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z-1}$ en $z_0 = 1$.

v) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2} + e^{z+1} + \dfrac{1}{z}$ en $z_0 = 0$.

vi) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2} + e^{z+1} + \dfrac{1}{z}$ en $z_0 = 2i$.

vii) $f(z) = e^{1/z} + \dfrac{1}{(z-2)^2}$ en $z_0 = 0$.

viii) $f(z) = 2\,\dfrac{z^3+z-1}{z^2+1}$ en $z_0 = i$.

ix) $f(z) = \dfrac{z^4+z^2}{z^2+4}$ en $z_0 = 2\,i$.

x) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ en $z_0 = i$.

xi) $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \sin(z-1)$ en $z_0 = 1$.

xii) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-\pi)^2} + \dfrac{1}{z(z-\pi)}$ en $z_0 = \pi$.

xiii) $f(z) = \dfrac{z}{z^2-4}$ en $z_0 = 2$.

xiv) $f(z) = \left(a\,z + \dfrac{b}{z}\right)^n$ en $z_0 = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

xv) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$ en $z_0 = i$.

xvi) $f(z) = \dfrac{z^3 + 3\,z}{z^2 - 2\,i\,z - 1}$ en $z_0 = i$.

xvii) $f(z) = \sin\Big(\dfrac{1}{z}\Big) + \dfrac{1}{1 - z}$ en $z_0 = 0$.

xviii) $f(z) = \dfrac{1}{(z^3 + 1)^2} + e^z$ en $z_0 = 0$.

xix) $f(z) = \exp\Big(\dfrac{1}{z}\Big) + \dfrac{1}{z\,(z - 1)^2}$ en $z_0 = 0$.

xx) $f(z) = z^k \sin\big({}^1\!/_z\big)$ $(k \in \mathbb{N})$ en $z_0 = 0$.

xxi) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^k}$ $(k \in \mathbb{N})$ en $z_0 = 0$.

xxii) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 - 1)^2} + e^{z-2}$ en $z_0 = 1$.

xxiii) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z - i)^2} + \sin(z)$ en $z_0 = i$.

xxiv) $f(z) = \dfrac{1}{(z^3 + 1)^2}$ en $z_0 = 0$.

xxv) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + 1)^2}$ en $z_0 = i$.

xxvi) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2 + 1} + \log(z)$ en $z_0 = i$.
(considerando la rama principal del logaritmo)

5.18 Sean $r > 1$ y f una función holomorfa en $B(0, r) \setminus \{1\}$. Si $z_0 = 1$ es un polo simple de f, probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = -\operatorname{Res}(f, 1).$$

5.19 Determinar y clasificar las singularidades de las funciones siguientes y calcular la integral a lo largo de la curva Γ que se indica:

i) $f(z) = \dfrac{z^2}{e^z - 1}$; $\Gamma = C(\pi\,i, 4)$.

ii) $f(z) = \dfrac{z^2}{e^z - e^{-z}}$; $\Gamma = C(\pi\,i, 4)$.

iii) $f(z) = \dfrac{z - 1}{z^5 + z^4 - 2z^3}$; $\Gamma = C(0, {}^3\!/_2)$.

iv) $f(z) = \dfrac{z}{\big(4\,z^2 - a^2\big)^2}$; Γ es el borde de $\Big\{x + i\,y : x > 0\,,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1\Big\}$ $(a, b > 0)$.

v) $f(z) = z\sin\Big(\dfrac{1}{z^2}\Big)$; $\Gamma = C(0, 2)$.

vi) $f(z) = \dfrac{\log(z)}{(z - 1)^2}$, $\log$ en la rama principal; $\Gamma = C(2, {}^3\!/_2)$.

vii) $f(z) = \dfrac{\log(z)}{(z - \alpha)^2}$, $\log$ en la rama principal; $\Gamma = C(1, {}^1\!/_2)$.

viii) $f(z) = \dfrac{\cosh(\alpha\,z)}{e^z - 1}\,dz$, $0 < \alpha < 1$; $\Gamma = C(0, 3\,\pi)$.

ix) $f(z) = \dfrac{\tan(z)}{z^2}\,dz$; $\Gamma = C(0, 1)$.

x) $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{z^2 - \alpha^2}$, $\alpha \geq 0$; $\Gamma = C(0, 1)$.

xi) $f(z) = \dfrac{z}{a - e^{-iz}}$, $a > 0$; Γ es el borde del rectángulo de vértices π, $\pi + ai$, $-\pi + ai$, $-\pi$.
Indicación: Para cada $a > 1$ se verifica $0 < \ln(a) < a$.

xii) $f(z) = \dfrac{z\,e^z}{(z^2 + \alpha^2)^2}$, $|\alpha| \neq 1$; $\Gamma = C(0, 1)$.

xiii) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2\,z + 5}$; $\Gamma = C(0, 3)$.

xiv) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2\,z + 5}$; Γ es el borde del triángulo de vértices 0 , $2 + 3\,i$, $3\,i$.

xv) $f(z) = \dfrac{1 + z}{1 - \cos(z)}$; $\Gamma = C(0, 7)$.

5.20 Si P es un polinomio de grado mayor o igual que 2, demostrar que la suma de los residuos de ${}^{1}/_{P(z)}$ en todos los ceros de P es cero.

5.21 Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$. Se supone que 1 y -1 son polos de f y que

$$\operatorname{Res}(f,1) = -\operatorname{Res}(f,-1)\,.$$

Sea $A=\mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Probar que f tiene una primitiva en A.

5.22 Sean $a>0$ y $n\in\mathbb{N}$. Calcular las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos(\theta)}\,,\quad a\neq 1.$

ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos(\theta)+3}$

iii) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^{2n}(\theta)\,d\theta$

Sugerencia: $\sin^2(\theta)=\sin^2(2\pi-\theta)$ si $\theta\in[\pi,2\pi]$.

iv) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\left(a+\sin^2(\theta)\right)^2}$

Sugerencia: $\sin(\theta)=\sin(\pi-\theta)$ si $\theta\in[{}^{\pi}/_{2},\pi]$.

v) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos(4\theta)}{2+\cos(\theta)}\,d\theta$

Sugerencia: $\cos(4\theta)=\operatorname{Re}\left((\cos\theta+i\sin\theta)^4\right)$.

vi) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{4-2\cos(\theta)}{5-4\cos(\theta)}\,d\theta$

vii) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(\theta)}{2+\sin(\theta)}\,d\theta$

viii) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin^2(\theta)}\,d\theta\,.$

5.23 Calcular el valor de las siguientes integrales impropias:

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)}$

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2x+4}$

iv) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,dx,\quad a>0.$

v) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$

vi) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^4+1)(x^2+1)}$

5.24 Calcular el valor de los siguientes valores principales:

i) $\displaystyle VP\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x\,(x^2-1)}.$

ii) $\displaystyle VP\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-a)^2\,(x-1)},\quad \operatorname{Im}(a)>0.$

iii) $\displaystyle VP\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4-16}\,dx\,.$

5.25 Calcular las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x-\sin(x)}{x^3(x^2+a^2)}\,dx,\ a\in\mathbb{R},\ a>0.$

Sugerencia: Cacular el valor principal de la intergal en $\mathbb{R}$ de $f(z)=\dfrac{(1+iz-e^{iz})}{z^3\,(z^2+a^2)}$.

ii) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2(x^2+1)}\,dx.$

Sugerencia: Cacular el valor principal de la intergal en $\mathbb{R}$ de $f(z)=\dfrac{(1-e^{iz})}{z^2\,(z^2+1)}$.

iii) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx\,.$

Sugerencia: Cacular el valor principal de la intergal en $\mathbb{R}$ de $f(z)=\dfrac{(1-e^{2iz})}{z^2}$.

iv) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^3(x)}{x^3}\,dx\,.$

Sugerencia: Cacular el valor principal de la intergal en $\mathbb{R}$ de $f(z)=\dfrac{(e^{3iz}-3e^{iz}+2)}{z^3}$.

5.26 Para cada $\omega \in \mathbb{R}$ calcular

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{(x-1)^2+9}\,dx$ *ii)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\frac{2\,x+i}{(x^2+4)(x+i)}\,dx\,.$

5.27 Sean a, b números reales positivos. Calcular la siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+b^2}\,dx$

ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(a\,x)}{\left(x^2+b^2\right)^2}\,dx$

iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin(a\,x)}{x^2+1}\,dx$

iv) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin(x)}{(x^2+1)^2}\,dx$

v) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\sin(x)}{(x^2+1)\,(x^2+a^2)}\,dx$
Sugerencia: Distinguir $a=1$ ó $a\neq 1$.

vi) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(a\,x)}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

5.28 Para cada $\omega \in \mathbb{R}$ calcular:

i) $\displaystyle VP\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x\,(x-i)^2}\,dx$ *ii)* $\displaystyle VP\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{(x^2+1)\,(x-\pi)}\,dx\,.$

5.29 Calcular el valor de las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\,x)}{x\,(x+1)\,(x^2+1)}\,dx$

iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{4\,x^2-\pi^2}\,dx$

v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x\,(x^2+4)}\,dx$

vi) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x\,(x^2+9)^2}\,dx\,.$

5.30 Sean $a>0$ y $b\notin\mathbb{Z}$. Demostrar que:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a)-\frac{1}{2a^2}$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a)$

vii) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+b)^2} = \frac{1}{2\,b^2}-\frac{\pi}{2\,b}\coth(\pi\,b)$

viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-b^2} = \frac{1}{2\,b^2}-\frac{\pi}{2\,b}\coth(\pi\,b)\,.$

5.31 Sea z un número complejo, no entero.

i) Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

son series absolutamente convergentes.

ii) Probar que

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right).$$

5.32 (Transformadas de Mellin) Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$, excepto para un número finito de singularidades, ninguna de las cuales se halla en la semirrecta $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Pongamos $V = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Supongamos también que $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ es tal que

$$\lim_{z \to 0} z^a f(z) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{z \to \infty} z^a f(z) = 0\,, \tag{5.27}$$

Para $0 < r < R$ considérense los segmentos $\Gamma_1 := [r+i\,r, R+i\,r]$, $\Gamma_3 := [R-i\,r, r-i\,r]$ y los arcos de circunferencia Γ_2 y Γ_4 centrados en 0 y que unen los extremos de Γ_1 y Γ_2 dentro de V, y la cadena $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ (ver figura 5.4). Defínase la potencia z^w tomado argumentos $0 \leq \arg(z) < 2\,\pi$, e integrando en Γ deducir que

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} f(x)\,dx = -\frac{\pi e^{-\pi a i}}{\sin(a\pi)} \sum_{b \in V} \operatorname{Res}(z^{a-1} f(z), b). \tag{5.28}$$

La integral $\mathfrak{M}f(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} f(x)\,dx$ se denomina *transformada de Mellin* de f en a.

Aplicando la fórmula (5.28) obtener el valor de las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^n}\,, \quad 0 < a < n\,, a \notin \mathbb{N}\,.$

ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^b(x+1)}\,, \quad 0 < b < 1.$

iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/3}\,(x^2+1)}\,.$

iv) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+4}\,dx\,.$

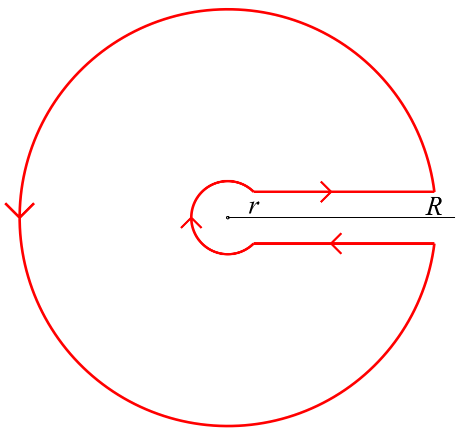


Figura 5.4: $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$

5.33 Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}\,.$$

Sugerencia: Integrar la función $\dfrac{\cos(z)}{e^z + e^{-z}}$ en rectángulos de vértices $-r\,, r\,, r+i\,\pi\,, -r+i\,\pi\,.$

5.34 Sea $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < \pi$. Integrando la función $f(z) = \dfrac{e^{az}}{\sinh(\pi\,z)}$ a lo largo de curvas como la de la figura 5.5, probar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh(a\,t)}{\sinh(\pi\,t)}\,dt = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{a}{2}\right).$$

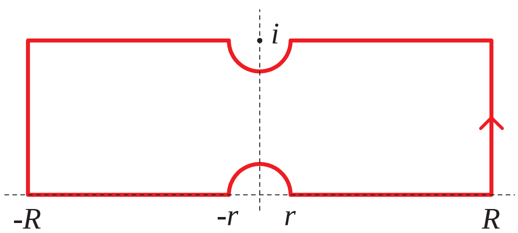


Figura 5.5: $0 < r < 1/2 < R$

5.35 Integrando a lo largo de curvas como la de la figura 5.6, la función f dada por

$$f(z) = \frac{\log(z)}{z^4+1}\,,$$

donde log representa la determinación principal el logaritmo, calcular el valor de la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^4+1}\,dx\,.$$

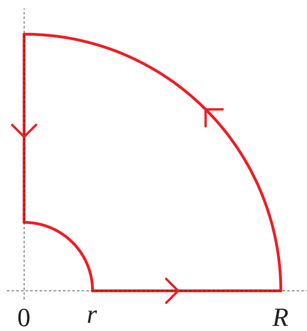


Figura 5.6: $0 < r < 1 < R$

5.36 Integrando la función

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2}$$

en curvas como las del ejercicio 5.35 (figura 5.6) deducir el valor de las integrales

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x} - \sin(x)}{x^2}\, dx\,.$$

5.37 Sea α un número real con $0 < \alpha + 1 < 4$. Se considera la función

$$f(z) = \frac{z^\alpha}{1 + z^4}$$

donde la potencia $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$ se define con la rama principal del logaritmo. Integrando f en curvas como las del ejercicio 5.35 (figura 5.6) deducir que

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1 + x^4}\, dx = \frac{\pi}{4 \sin\bigl(\pi(\alpha + 1)/4\bigr)}\,.$$

5.38 Sea $f(z) = \dfrac{\log(z)}{z^2 + 1}$, donde el logaritmo se define tomando $-\pi/2 < \arg(z) < 3\pi/2$.

Para cada par de números reales R, r con $0 < r < 1 < R$ se considera el abierto de Jordan

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\,,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}\,,$$

cuyo borde denotaremos por $\Gamma_{R,r}$ (figura 5.7). Integrando f en las curvas $\Gamma_{R,r}$ deducir el valor de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2 + 1}\, dx\,.$$

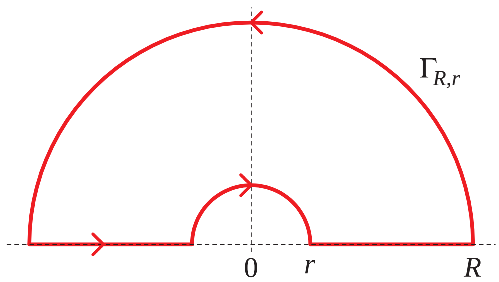


Figura 5.7: $0 < r < 1 < R$

5.39 Sean $a, b > 0$. Integrando la función

$$f(z) = \frac{\exp\bigl(i\,(a\,z - b/z)\bigr)}{z^2 + 1}\,.$$

en las curvas $\Gamma_{R,r}$ definidas en el ejercicio 5.38 (figura 5.7) deducir el valor de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos(a\,x - b/x)}{1 + x^2}\, dx\,.$$

5.40 Se considera la función f definida por

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^{-iz}}\,.$$

i) Determinar y clasificar las singularidaes aisladas de f.

ii) Dado $R > 0$, sea Γ_R el borde del rectángulo de vértices $\pi, \pi + iR, -\pi + iR, -\pi$ recorrido en sentido positivo. Calcular $\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz$ y deducir que

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}\, dx \;=\; 2\,\pi \int_0^\infty \frac{1}{1 + e^x}\, dx \;=\; 2\,\pi \ln(2)\,. \tag{5.29}$$

Sugerencia: El grueso del problema consiste en probar la primera de las igualdades de (5.29), lo que se consigue pasando al límite cuando $R \to \infty$. La segunda igualdad se obtiene simplemente mediante el cambio de variable $e^x = t$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + e^x}\, dx \;=\; \int_1^\infty \frac{1}{t\,(1 + t)}\, dt \;=\; \int_1^\infty \Bigl(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 + t}\Bigr)\, dt\,.$$

5.41 Dado $\alpha > 0$ se considera la función

$$f(z) = \frac{\log(z + i\alpha)}{z^2 + \alpha^2},$$

siendo $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, $-\pi/2 < \arg(z) < 3\pi/2$. Por otro lado, para $r > \alpha$ se considera el abierto $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\,,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Integrando f en las curvas ∂D_r calcular

$$\int_0^\infty \frac{\log(x^2 + \alpha^2)}{x^2 + \alpha^2}\,dx\,.$$

5.42 Para $z \in \mathbb{C}$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ se considera

$$F(z,\theta) = \frac{1 - z^2}{1 + 2\,z\sin(\theta) + z^2}\,.$$

i) Fijado θ, estudiar las singularidades de la función $F_\theta(z)$ y utilizar lo obtenido para expresar la fracción que define F en función de z y de $\xi = i\,e^{i\theta}$.

$$F(z,\theta) = \Phi(z,\xi)\,.$$

ii) A partir de la expresión anterior calcular

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - z^2}{1 + 2\,z\sin(\theta) + z^2}\,d\theta\,,$$

para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$.

Sugerencia: Considerar la curva $\boldsymbol{\xi}(\theta) = i\,e^{i\theta}$.

iii) Comparar $F(z,\theta)$ con $F(1/z,\theta)$, y deducir el valor de f para los $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > 1$.

Tema 6

Aspectos de la teoría geométrica

Recogemos en este capítulo final diversos resultados, en apariencia sin relación entre sí, pero que versan sobre propiedades de funciones analíticas en las que su comportamiento en la frontera del dominio de definición juega un papel destacado. De ahí el adjetivo "geométrica" que aparece en el título del tema; por otro lado, el que nos refiramos a "aspectos" se debe a que el tratamiento riguroso requiere de herramientas más avanzadas que la limitación de tiempo no nos permite desarrollar, y sólo podemos hacer frente con detalle a las dos primeras secciones, mientras que de la integral de Poisson y la aplicación de Riemann nos limitaremos a mostrar su utilidad, que no es poco.

6.1. Singularidades aisladas en el punto del infinito

Dedicamos este apartado al estudio de las singularidades aisladas en infinito.

Definición 6.1. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Si existe $R > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subset U$, se dice que ∞ es una *singularidad aislada* de f.

Notación: Por brevedad en la escritura, $B^*(\infty, R)$ denotará el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Obsérvese que esta notación, utilizada previamente para las bolas punteadas centradas en puntos del plano, tiene sentido, pues $B^*(\infty, R)$ coincide de hecho con la bola punteada, con respecto de la métrica cordal, centrada en ∞ y con radio $1/\sqrt{R^2+1}$, de acuerdo con lo indicado en la observación 1.70.ii.

Observación 6.2. Si ∞ es una singularidad aislada de una función f y tomamos $R > 0$ como en la definición, la función g dada por

$$g(z) = f(1/z), \qquad z \in B^*(0, 1/R), \tag{6.1}$$

está bien definida y es holomorfa en $B^*(0, 1/R)$, de modo que 0 es una singularidad aislada de g. Esta observación da sentido a la siguiente definición.

Definición 6.3. Sea f una función holomorfa en $B^*(\infty, R)$. Se dice que f presenta en ∞ una singularidad *evitable*, *polar* o *esencial* si la función g definida en (6.1) presenta ese tipo de singularidad en $z_0 = 0$. En caso de que la singularidad sea polar, se define el *orden* de ∞ como polo de f como el orden de 0 como polo de g.

Los siguientes resultados de caracterización se prueban fácilmente recurriendo a los correspondientes para las singularidades en un punto del plano, en particular el 0. El uso de límites en ∞ o con valor ∞ se hace de acuerdo con lo comentado en la observación 1.70.iii.

Teorema 6.4 (Caracterización de singularidades evitables en infinito). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ tal que existe $R > 0$ con $B^*(\infty, R) \subset U$, y f una función holomorfa en U. Son equivalentes:

a) ∞ es una singularidad evitable de f.

b) Existe $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$.

c) Existe $r > 0$ tal que f está acotada en $B^*(\infty, r)$.

d) $\lim_{z\to\infty} f(z)/z = 0$.

e) El desarrollo de Laurent de f en $B^*(\infty, R)$ es de la forma $f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$.

Teorema 6.5 (Caracterización de singularidades polares en infinito). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ tal que existe $R > 0$ con $B^*(\infty, R) \subset U$, y f una función holomorfa en U. Son equivalentes:

a) ∞ es una singularidad polar de f de orden $m \in \mathbb{N}$.

b) Existe una función φ holomorfa en $B^*(\infty, R)$ con $\lim_{z\to\infty} \varphi(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, de modo que $f(z) = z^m \varphi(z)$ para cada $z \in B^*(\infty, r)$.

c) Existe un número natural m tal que el límite $\lim_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z^m}$ existe, es finito y no nulo.

d) El desarrollo de Laurent de f en $B^*(\infty, R)$ es de la forma $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$, $a_m \neq 0$.

Teorema 6.6 (Caracterización de singularidades esenciales en infinito). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ tal que existe $R > 0$ con $B^*(\infty, R) \subset U$, y f una función holomorfa en U. Son equivalentes:

a) ∞ es una singularidad esencial de f.

b) Para cada $r > R$, el conjunto $f(B^*(\infty, r))$ es denso en $\mathbb{C}$.

c) El desarrollo de Laurent de f en $B^*(\infty, R)$ es del tipo $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$, siendo $a_n \neq 0$ para infinitos índices n.

Ahora estamos en disposición de introducir el concepto de función meromorfa. La motivación surge del intento de cerrar (algebraicamente) el conjunto $\mathcal{H}(U)$ de las funciones holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ con respecto a las operaciones usuales (suma y producto). Mientras sumas y productos de funciones holomorfas son de nuevo holomorfas, el cociente de dos funciones holomorfas f y g en U, con denominador no idénticamente nulo, será una función holomorfa en U salvo posiblemente en los ceros de g, necesariamente aislados en U, y que pueden generar la aparición de polos (pero no singularidades esenciales) para el cociente. Así, parece adecuado considerar funciones f holomorfas en U salvo en un conjunto A de polos aislados. Obsérvese que en esta situación, si se define $f(a) = \infty$ para cada $a \in A$, se está obteniendo una nueva función, que denotamos por la misma letra, $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$, y que es ahora continua en todo U de acuerdo con el teorema 5.6 y por la forma en que se introdujo la topología en $\widehat{\mathbb{C}}$. Todo lo anterior, junto con el tratamiento dado al punto del infinito en cuanto a singularidad aislada, justifica la siguiente definición.

Definición 6.7. Sea U un abierto de $\widehat{\mathbb{C}}$ y una aplicación $f\colon U \to \widehat{\mathbb{C}}$. Se dice que f es una función *meromorfa* en U si:

i) f es continua en U.

ii) $A = \{a \in U : f(a) = \infty\}$ es un conjunto de puntos aislados en U (es decir, $A' \cap U = \emptyset$).

iii) La función $f\colon U \setminus (A \cup \{\infty\}) \to \mathbb{C}$ es holomorfa.

Al conjunto de las funciones meromorfas en un abierto U de $\widehat{\mathbb{C}}$ lo denotamos por $\mathcal{M}(U)$.

Observaciones 6.8.

i) Si $\infty \notin U$, una función meromorfa en U se puede ver simplemente como una función holomorfa en U salvo en un conjunto de singularidades aisladas que son todas polos. En caso de que ∞ sea una singularidad aislada de f, puede ser de cualquier tipo.

ii) Si $\infty \in U$, la singularidad en ∞ sólo puede ser evitable o polar, y el resto de singularidades serán aisladas en U y polares.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de la definición de función meromorfa y de los resultados 4.30.ii, 4.31, 5.6, 5.9 y 5.10.

Proposición 6.9. Si U es un abierto de $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces $\mathcal{M}(U)$ es un cuerpo conmutativo con las operaciones de suma y producto usuales.

Ejemplo 6.10. Las funciones meromorfas en todo $\widehat{\mathbb{C}}$ son precisamente las fracciones racionales (ejercicio 6.1).

6.1.1. Residuos en el infinito

Si f es holomorfa en $B^*(\infty, R)$ y en esa corona se escribe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, entonces la función g definida en (6.1) tiene desarrollo de Laurent

$$g(z) = f(1/z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n .$$

De modo que el coeficiente de z^{-1} en esta última serie es

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,\rho)} g(w)\,dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\rho\, e^{it})\, \rho\, e^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(1/\rho e^{it})}{(1/\rho e^{it})^2} \frac{e^{-it}}{\rho}\, dt ,$$

cualquiera que sea $\rho < 1/R$. Esto, y que la inversión $z \mapsto 1/z$ cambie la orientación natural de las circunferencias imagen $C(0, 1/\rho)$ motiva la siguiente definición.

Definición 6.11. Sea f una función holomorfa en $B^*(\infty, R)$ y sea h la función definida por

$$h(z) = \frac{-1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big), \qquad z \in B^*(0, 1/R) . \tag{6.2}$$

Se define el residuo de f en ∞ como

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := \operatorname{Res}(h, 0) . \tag{6.3}$$

Lema 6.12. Sea f una función holomorfa en $B^*(\infty, R)$. Para todo $r > R$ se tiene que

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} f(w)\, dw .$$

Teorema 6.13. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$, excepto en un conjunto finito de singularidades aisladas. Sea también D un dominio de Jordan tal que en ∂D no hay singularidades de f y denotemos $A = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} = \{\infty\} \cup \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Si en ∂D se considera la orientación inducida por D, entonces se tiene que

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = -2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a) . \tag{6.4}$$

Observación 6.14.

i) La suma que aparece en (6.4) contempla también el punto $a = \infty$. A la vista de esta fórmula compacta se termina de justificar la razón de la definición 6.11.

ii) Si se integra en una familia de curvas que se “alejan” del origen como, por ejemplo, las que se describen en las observaciones 5.39.iii o 5.46.ii, entonces a partir de un momento sólo queda fuera de las curvas la singularidad $a = \infty$, por lo que el cálculo de residuos resulta mucho más sencillo si se aplica la fórmula (6.4).

6.2. Principio del argumento. Teorema de Rouché

Como consecuencia también del teorema de los residuos, se obtienen dos resultados teóricos, los que dan título a esta sección, que aportan información acerca del número de ceros y polos de una función en un dominio.

Notación: Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función meromorfa y no constante en U (recordemos que eso significa que f es holomorfa salvo en un subconjunto de U de singularidades aisladas; ver definición 6.7). Por Z_f y P_f denotaremos a los conjuntos

$$Z_f = \{a \in U : a \ \text{ es cero de } \ f\} ; \qquad P_f = \{b \in U : b \ \text{ es polo de } \ f\} .$$

Nótese que, puesto que P_f es discreto en U, entonces $U \setminus P_f$ también es conexo y el principio de identidad muestra que, como f no es constante, Z_f también es un subconjunto discreto de U. En particular, P_f y Z_f son numerables.

Si $a \in Z_f$ la multiplicidad del cero de f en a se denotará por $m(f, a)$. Si $b \in P_f$ el orden del polo de f en b será denotado por $n(f, b)$.

Teorema 6.15 (Principio del argumento). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, f una función meromorfa y no constante en U y γ un ciclo de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos en $U \setminus (P_f \cup Z_f)$ y nulhomólogo respecto de U (es decir, γ no pasa por ceros ni polos de f y $\eta(\gamma, z) = 0$ para todo $z \notin U$). Entonces, el conjunto $\{c \in P_f \cup Z_f : \eta(\gamma, c) \neq 0\}$ es finito y

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw \;=\; \sum_{a \in Z_f} \eta(\gamma, a)\, m(f, a) \;-\; \sum_{b \in P_f} \eta(\gamma, b)\, n(f, b)\,. \tag{6.5}$$

Observaciones 6.16.

i) El nombre dado al teorema 6.15 se debe a que la expresión integral que se calcula no es otra cosa (ver el ejercicio 4.57) que $\eta(f \circ \gamma, 0)$, el índice de la curva $f \circ \gamma$ respecto del origen, y por lo tanto da una medida de la variación del argumento de un punto que recorra dicha curva.

ii) En el caso en que γ parametrice el borde de un dominio de Jordan D con $D \cup \partial D \subset U$, resulta que $\eta(\gamma, z) = 1$ para todo $z \in D$, y la fórmula (6.5) se escribe en este caso como

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw \;=\; \sum_{a \in Z_f \cap D} m(f, a) \;-\; \sum_{b \in P_f \cap D} n(f, b)\,, \tag{6.6}$$

es decir, la integral contemplada es la diferencia entre el número de ceros y el de polos (contados ambos según su multiplicidad) que tiene f en D.

iii) En el ejercicio 6.2.iv se presenta una versión un poco más general de este teorema, cuya principal aplicación se desarrolla a continuación.

Corolario 6.17 (Teorema de Rouché, versión débil). Sean U un abierto conexo $\mathbb{C}$ y f, g funciones holomorfas y no constantes en U. Si γ es un ciclo en U, nulhomólogo respecto de U y tal que

$$\big|f(z) - g(z)\big| < \big|f(z)\big| + \big|g(z)\big| \qquad \text{para todo } z \in \gamma^*\,, \tag{6.7}$$

entonces

$$\sum_{a \in Z_f} \eta(\gamma, a)\, m(f, a) \;=\; \sum_{a \in Z_g} \eta(\gamma, a)\, m(g, a)\,. \tag{6.8}$$

Observaciones 6.18.

i) En las condiciones del corolario 6.17 ni f ni g pueden anularse en ningún punto de γ^*.

ii) En el caso en que γ parametrice el borde de un dominio de Jordan D con $D \cup \partial D \subset U$, la igualdad (6.8) se escribe como

$$\sum_{a \in Z_f \cap D} m(f, a) \;=\; \sum_{a \in Z_g \cap D} m(g, a)\,. \tag{6.9}$$

es decir, las funciones f y g no se anulan en ∂D y en D tienen la misma cantidad de ceros contado multiplicidades (finita, pues según el principio de identidad Z_f es discreto y $\overline{D}$ compacto).

iii) En la práctica el teorema de Rouché se suele aplicar verificando la condición

$$\big|f(z) - g(z)\big| < \big|g(z)\big| \qquad \text{para todo } z \in \gamma^* \tag{6.10}$$

que, evidentemente, implica (6.7).

Por ejemplo, si $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ y $g(z) = z^n$, para circunferencias $\gamma^* = C(0, R)$ con radio suficientemente grande se verifica (6.10). Esto proporciona otra demostración del *Teorema fundamental del Álgebra*, pues la conclusión es que $P(z)$ tiene tantos ceros como z^n en $B(0, R)$, es decir, exactamente n.

iv) Si asumimos que, dados K compacto y U abierto de $\mathbb{C}$ con $K \subset U$, existe un ciclo γ en U, nulhomólogo respecto de U y tal que $\eta(\gamma, z) = 1$ para todo $z \in K$ (ver observación 4.66.i), se puede dar una versión más fuerte del teorema de Rouché, que es la que se presenta a continuación, aunque la que hemos denominado “versión débil” es suficiente en la inmensa mayoría de los casos de aplicación.

Teorema 6.19 (de Rouché). Sean U un abierto conexo y acotado de $\mathbb{C}$ y f, g funciones holomorfas en U y continuas en el compacto $\overline{U}$. Supongamos que

$$\big|f(z) - g(z)\big| < \big|f(z)\big| + \big|g(z)\big| \qquad \text{para todo } \ z \in \mathrm{Fr}(U)\,.$$

Entonces, el número de ceros de f y de g en U, contados según su multiplicidad, coincide.

El siguiente resultado se podría haber anticipado al tema anterior, pues se puede obtener a partir del principio del módulo máximo (teorema 4.36). No obstante, el teorema de Rouché proporciona una prueba sensiblemente más breve.

Teorema 6.20 (de Hurwitz). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en U que converge uniformemente en los compactos de U hacia una función f.

i) Supongamos que $\overline{B}(a,r) \subset U$ y que f no se anula en $C(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f_n tiene tantos ceros como f en $B(a,r)$ para cada $n \geq n_0$.

ii) Como consecuencia de lo anterior, si D es un abierto acotado tal que el compacto $\overline{D}$ está contenido en U y f no se anula en ningún punto de $\mathrm{Fr}(D)$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de D) tal que f_n tiene tantos ceros como f en D para cada $n \geq n_0$.

Corolario 6.21. Sean U un dominio de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en U que converge uniformemente en los compactos de U hacia una función f y tal que

$$f_n(z) \neq 0 \quad \text{para cada } \ n \in \mathbb{N} \quad \text{ y para cada } \ z \in U\,,$$

entonces o bien f no se anula en ningún punto de U, o bien es idénticamente nula.

Corolario 6.22. Sean U un dominio de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en U que converge uniformemente en los compactos de U hacia una función f. Entonces o bien f es inyectiva, o bien f es constante en U.

6.3. Integral de Poisson. Problema de Dirichlet en el disco unidad

Notación: En lo que sigue D denotará el disco unidad abierto $D := B(0,1)$ y abreviaremos también $C := C(0,1)$ para designar su borde orientado de forma positiva.

La fórmula integral de Cauchy proporciona un procedimiento para resolver el *problema de Dirichlet* (la ecuación de Laplace con condición de frontera):

$$\begin{cases} \Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,; \\ u_{|\partial D} = u_0\,. \end{cases}$$

Luego, la posibilidad de transformar todo dominio de Jordan en el disco D (sección 6.4), resuelve el problema por completo.

Lema 6.23. Sea f una función continua en $\overline{D}$ y holomorfa en D. Entonces

i) $\displaystyle\oint_C f(w)\,dw = 0\,.$

ii) Para cada $z \in D$ se tiene que $\displaystyle f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$

Definición 6.24. Para cada $z \in D$ se definen las funciones $Q_z, P_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por

$$Q_z(t) = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,; \qquad\qquad P_z(t) = \mathrm{Re}\big(Q_z(t)\big) = \frac{1-|z|^2}{\big|e^{it}-z\big|^2}\,.$$

La función Q_z es el denominado *núcleo (integral) de Cauchy*, y P_z se denomina *núcleo de Poisson*. Nótese que P_z y Q_z son 2π periódicas. Además, si $|z| = \rho < 1$, $z = \rho\, e^{i\theta}$, entonces

$$P_z(t) = \frac{1-\rho^2}{\big|e^{it} - \rho\, e^{i\theta}\big|^2} = \frac{1-\rho^2}{\big|e^{i(t-\theta)} - \rho\big|^2} = P_\rho(t-\theta)\,.$$

Proposición 6.25 (Fórmula integral de Poisson). Sea $f = u + i\,v$ una función continua en $\overline{D}$ y holomorfa en D. Entonces para cada $z \in D$ se verifica que

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} P_z(t)\, f(e^{it})\, dt\,. \tag{6.11}$$

En particular,

$$u(z) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} P_z(t)\, u(e^{it})\, dt \qquad \text{y} \qquad v(z) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} P_z(t)\, v(e^{it})\, dt\,. \tag{6.12}$$

Cualquier otro disco se transforma en D mediante una traslación y una homotecia, lo que permite establecer

Proposición 6.26 (Fórmula integral de Poisson general). Sea f una función continua en $\overline{B}(z_0, r)$ y holomorfa en $B(z_0, r)$. Para cada $z = z_0 + \rho\, e^{i\theta} \in B(z_0, r)$ pongamos $w = {(z - z_0)}/{r} = e^{i\theta}\rho/r$. Entonces se verifica que

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} P_w(t)\, f(z_0 + r\, e^{it})\, dt = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} P_{\rho/r}(t - \theta)\, f(z_0 + r\, e^{it})\, dt\,. \tag{6.13}$$

Observaciones 6.27.

i) Recordemos que la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son funciones reales y armónicas. Los resultados anteriores muestran el camino para resolver el mencionado problema de Dirichlet en discos, ya que en los abiertos convexos (o estrellados, sin más) cada funcións armónica es la parte real de una función holomorfa (esto ya se propuso en el ejercicio 2.31).

ii) Nótese que, ahora, con toda la herramienta que proporciona la integral de Cauchy podemos afirmar que:

Corolario 6.28. *Toda función real y armónica en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en U.*

Corolario 6.29. *Toda función armónica verifica la propiedad de la media y, en consecuencia, si u es real y continua en un disco cerrado $\overline{B}$, armónica en el interior B y nula en ∂B, entonces u es idénticamente nula en B.*

El último resultado es la clave de la unicidad en el problema de Dirichlet con ecuación de Laplace, que abordamos a continuación.

Teorema 6.30. Sea $u_0\colon C \to \mathbb{R}$ una función continua. Definamos $U\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ mediante

$$u(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} P_z(t)\, u_0(e^{it})\, dt & \text{si} \ \ |z| < 1\,; \\ u_0(z) & \text{si} \ \ |z| = 1\,. \end{cases} \tag{6.14}$$

Entonces u es continua en $\overline{D}$, armónica en D y coincide con u_0 en C; además, u es la única función que satisface estas condiciones.

Corolario 6.31. Si f es una función armónica en un abierto de $\mathbb{R}^2$ y verifica la propiedad de la media (4.9) cualquiera que sea el disco cerrado $\overline{B}(z_0, r) \subset U$, entonces f es armónica en U.

Observación 6.32. Supongamos A y B son abiertos de $\mathbb{C}$, que $g\colon A \to B$ es holomorfa y que $u\colon B \to \mathbb{R}$ es armónica. Entonces u es, localmente (en los convexos de B), la parte real de una función holomorfa $f = u + i\,v\colon B \to \mathbb{C}$ y, obviamente, $u \circ g = \operatorname{Re}(f \circ g)$ también es una función armónica, en este caso definida en el abierto A.

Si g es biyectiva y no constante, entonces se pueden intercambiar los papeles de A y B, con g^{-1} en lugar de g (ver corolario 4.44), así pues, la familia de funciones armónicas en A determina la familia de funciones armónicas en B, y viceversa.

Esto ya, por si mismo, justifica la consideración de los conceptos que se definen a continuación, esto es, el estudio de la existencia de biyecciones holomorfas entre abiertos del plano complejo.

6.4. Notas sobre la aplicación de Riemann

Definición 6.33. Sean U y V abiertos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Se dice que una aplicación f de U en V es un *isomorfismo conforme*, o simplemente *isomorfismo*, si es meromorfa en U y biyectiva. Si $U = V$ se dice que f es un *automorfismo* de U.

Ejemplos 6.34.

i) Los automorfismos de $\mathbb{C}$ son exactamente las funciones de la forma $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$ (ver el ejercicio 6.21).

ii) Los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ son exactamente las homografías (ver el ejercicio 6.22).

iii) Los automorfismos de $D = B(0,1)$ son exactamente las funciones de la forma

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $|a| < 1$ (ver el lema 4.39 y el ejercicio 6.23).

Todo isomorfismo conforme es, en particular, un homeomorfismo topológico, así que dos abiertos isomorfos U y V cumplirán simultáneamente: ser conexos o no conexos; tendrán, en general, el mismo número de componentes conexas; serán simplemente conexos (en el sentido de que toda curva sea homotópicamente equivalente a un punto) o no, etc.

Por lo tanto, si se desea establecer un isomorfismo entre un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y el disco unidad D, dicho abierto deberá ser conexo y simplemente conexo. El propio $U = \mathbb{C}$ verifica esas propiedades topológicas, pero el teorema de Liouville 4.26 establece que las únicas funciones holomorfas $f\colon \mathbb{C} \to D$ son las constantes; en el resto de los casos existe tal isomorfismo que, genéricamente, se denomina *aplicación de Riemann* (*Riermann mapping*, en inglés). Esto es el contenido de los siguientes resultados.

La pruebas modernas de este resultado, muy diferentes del estudio original de Riemann, se suelen basar en el comportamiento de sucesiones de funciones analíticas, para lo que es necesario establecer una topología métrica en el espacio $\mathcal{H}(U)$ de las funciones holomorfas en U (ver [3] o [25]).

Teorema 6.35 (de la representación conforme, de Riemann). Sea $\Omega \neq \mathbb{C}$ un dominio (abierto conexo) de $\mathbb{C}$ tal que toda función holomorfa en Ω y que no se anula en ningún punto admite raíz cuadrada analítica en Ω. Entonces Ω es isomorfo a D.

Además, dado un punto $z_0 \in \Omega$ existe un único isomorfismo $\phi\colon \Omega \to D$ tal que $\phi(z_0) = 0$ y $\phi'(z_0)$ es real y positivo.

La conjunción de la proposición 4.65, el teorema 4.58 y el teorema de Riemann 6.35 establecen:

Corolario 6.36. Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$. Son equivalentes:

a) Toda función holomorfa en Ω y que no se anula en ningún punto admite raíz cuadrada analítica en todo Ω.

b) Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, entonces Ω es conformemente isomorfo a D.

c) Ω es homeomorfo a D.

d) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ es conexo.

e) El grupo fundamental de Ω es trivial.

Observación 6.37. Merece la pena insistir en lo que ya comentábamos en la observación 4.66.ii: en el resultado 6.36 es indispensdable la hipótesis de que Ω sea abierto. Nótese que las condiciones **c)**, **d)** y **e)** son de índole puramente topológica (no interviene la noción de analiticidad) y se pueden enunciar para espacios topológicos arbitrarios, incluyendo subconjuntos de $\mathbb{C}$ de naturaleza tan rara como se quiera: estructuras fractales, etc. Por ejemplo, la denominada *circunferencia polaca* es simplemente conexa en el sentido homotópico, pero separa a $\widehat{\mathbb{C}}$ en dos componentes conexas (ver el ejercicio 6.53 y el texto de Munkres [22], donde se denomina *closed topologist's sine curve*) .

Corolario 6.38. Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios isomorfos a D. Fijados $z_1 \in \Omega_1$ y $z_2 \in \Omega_2$, existe un único isomorfismo $\phi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ tal que $\phi(z_1) = z_2$ y $\phi'(z_1)$ es real y positivo.

Volviendo al asunto del problema de Dirichlet con ecuación de Laplace, pongamos ahora que Ω es un dominio de Jordan, es decir, que Ω es un abierto conexo y acotado, cuya frontera $\partial\Omega$ es el soporte de una curva cerrada y simple (de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, si se quiere). Si el isomorfismo $\phi\colon \Omega \to D$ "conserva" el borde, explícitamente: si ϕ se extiende a un homeomorfismo entre $\overline{\Omega}$ y $\overline{D}$, cualquier función u_0 continua en $\partial\Omega$ determina de forma biunívoca una función continua en C mediante la composición $v_0 = u_0 \circ \phi^{-1}$, y los problemas

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = u_0 \end{cases} \quad [1] \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \Delta v = 0 \\ v_{|C} = v_0 \end{cases} \quad [2]$$

son equivalentes en el sentido señalado en la observación 6.32, pero el segundo ya se ha resuelto en el teorema 6.30. Conocida la solución v de [2] se recupera la solución u de [1] mediante $u = v \circ \phi$.

En general, un isomorfismo conforme entre abiertos no tiene por qué extenderse de forma continua a las fronteras, pero en la situación contemplada, afortunadamente, se verifica esta propiedad. Un tratado exhaustivo de este problema puede verse en el volumen 2 de la obra de Markushevich [20], aquí nos limitamos a presentar un resultado parcial, suficiente para responder a las cuestiones que hemos planteado.

Teorema 6.39 (correspondencia de fronteras en la aplicación de Riemann). Sea Ω un abierto conexo y acotado de $\mathbb{C}$, isomorfo a D mediante la aplicación de Riemann $\phi\colon \Omega \leftrightarrow D$. La condición necesaria y suficiente para que ϕ se extienda a un homeomorfismo topológico $\bar{\phi}\colon \overline{\Omega} \leftrightarrow \overline{D}$ es que la frontera de Ω sea una curva de Jordan, es decir, el soporte de una curva continua γ cerrada y simple.

Corolario 6.40. Sea Ω_1 y Ω_2 dominios de Jordan. Existe un homeomorfismo topológico $\phi\colon \overline{\Omega}_1 \leftrightarrow \overline{\Omega}_2$ tal que la restricción $\phi\colon \Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2$ es biholomorfa.

Observación 6.41. En las condiciones del último resultado, nótese que el carácter conforme no se traslada a la frontera: por ejemplo, un cuadrado y un círculo son analíticamente isomorfos, pero el ángulo en los vértices del cuadrado no existe en la imagen; dicho de otra forma, la correspondencia entre los bordes no respeta el carácter regular de los puntos (en el sentido de existencia de recta tangente a la curva).

El asunto es mucho más espectacular, incluso desde el punto de vista estético, si se piensa en dominios de Jordan cuyo borde no es regular en ningún punto como, por ejemplo, la curva de *von Koch*, también conocida popularmente como *curva copo de nieve* (*snowflake*, en inglés).

La figura 6.1 muestra uno de los primeros iterantes (de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos) que aproximan a esta curva fractal. No es difícil probar, con técnicas elementales de Análisis, que la curva límite es de Jordan: continua, cerrada y simple, homeomorfa, por tanto, a una circunferencia. Pero lo que afirma el teorema de Riemann es mucho más: también su interior es, además de homeomorfo al disco, conformemente isomorfo.

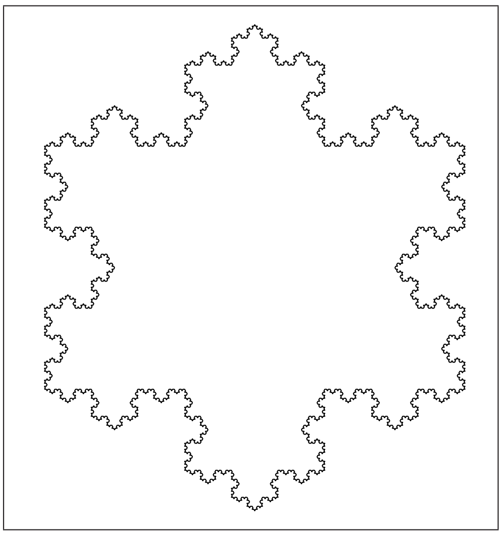


Figura 6.1: Curva de von Koch.

Ejercicios

6.1 Sea f una función entera.

i) Demostrar que f es un polinomio si, y sólo si, $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

ii) Demostrar que f no es un polinomio si, y sólo si, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tiende hacia infinito tal que $\sup\{|f(z_n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

iii) Dar un ejemplo de una función entera f que no sea un polinomio y que tienda hacia infinito a lo largo de cualquier semirrecta partiendo del origen (i.e., para cada $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim_{r\to\infty} f(re^{i\theta}) = \infty$).

iv) Caracterizar las funciones meromorfas en $\widehat{\mathbb{C}}$.

6.2 Sean U abierto de $\mathbb{C}$, $a \in U$ y h una función holomorfa en U.

i) Si f es una función holomorfa en U, a es un cero de orden n de f y

$$g(z) = \frac{h(z)f'(z)}{f(z)}, \quad z \in U \setminus \{a\},$$

probar que $\operatorname{Res}(g, a) = n\, h(a)$.

ii) Si f es una función holomorfa en $U \setminus \{a\}$, a es un polo de orden m de f y

$$g(z) = \frac{h(z)f'(z)}{f(z)}, \quad z \in U \setminus \{a\},$$

probar que $\operatorname{Res}(g, a) = -m\, h(a)$.

Además, en ambos casos g tiene un polo simple en a si $h(a) \neq 0$ y tiene una singularidad evitable en a si $h(a) = 0$.

iii) Sean n un número natural y $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Probar que los residuos de la función $f(z) = \dfrac{z^{n-1}}{z^n + a^n}$ en sus singularidades son todos iguales a $1/n$.

iv) **(Principio del argumento generalizado)** Supongamos que f es una función meromorfa en U cuyos ceros son aislados, que h es holomorfa en U y que D es un dominio de Jordan con $\overline{D} \subset U$ y tal que ni los ceros ni los polos de f están en ∂D. Si en ∂D se considera la orientación natural inducida por D, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f'(w)}{f(w)}\, h(w)\, dw \;=\; \sum_{a\in Z_f\cap D} h(a)\, m(f,a) \;-\; \sum_{b\in P_f\cap D} h(b)\, n(f,b)\,.$$

6.3 Calcular

$$\int_{|z|=2} \frac{z^5 - 1}{z^6 - 6z + 5}\, dz.$$

6.4 Sean $p \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$. Probar que la ecuación

$$(z-1)^p = ae^{-z}$$

tiene en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ exactamente p raíces, todas simples, y que de hecho están en $B(1,1)$.

6.5 Determinar el número de soluciones de la ecuación

$$z^4 + iz^3 + 3z^2 + 2iz + 2 = 0$$

que se encuentran en el semiplano superior abierto.

6.6 Para $n \in \mathbb{N}$ sea

$$S_n(z) := 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}\,.$$

Demostrar que para todo $r > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S_n(z)$ no tiene ceros en el disco $B(0,r)$ si $n \geq n_0$.

6.7 Sea $0 < r < 1$. Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que los polinomios

$$P_n(z) = 1 + 2\,z + 3\,z^2 + \cdots + n\,z^{n-1}$$

no tienen ceros en el disco $B(0,r)$ si $n \geq n_0$.

6.8 Sea γ una circunferencia y f una función holomorfa en un abierto que contiene a γ^* y a su interior B. Si todos los puntos del conjunto imagen $f(B)$ tienen índice uno respecto a la curva $f \circ \gamma$, entonces la función f es inyectiva en B.

6.9 Sea $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$, con $a_n \neq 0$. Digamos que los ceros de este polinomio son los puntos $w_1, \ldots, w_k$ con multiplicidades $n_1, \ldots, n_k$, respectivamente. Sea ε un número positivo tal que $0 < \varepsilon < \inf\{|w_i - w_j| : i \neq j\}$. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que cualquier polinomio $Q(z) = b_n z^n + \ldots + b_0$ que verifica que $|b_m - a_m| < \delta$, $m = 0, 1, \ldots, n$, tiene exactamente n_j ceros, contando multiplicidades, en cada uno de los discos $D(w_j, \varepsilon)$.

6.10 Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene a $\overline{B}(0,1)$, y sea f holomorfa en U. Si $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, probar que f posee un único punto fijo en $B(0,1)$.

6.11 Sea P un polinomio mónico de grado n. Supongamos que

$$|P(z)| < 1 \quad \text{si } |z| = 1\,.$$

Demostrar que P tiene una raíz de módulo 1.

6.12 Sea $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ un función polinómica de grado $n \geq 2$ tal que

$$\sum_{k=2}^{n} k|a_k| \leq |a_1|\,.$$

Probar que f es inyectiva en el disco $B(0,1)$.

6.13 Sea $\lambda > 1$. Determinar el número de raíces de la ecuación

$$e^{z-\lambda} = z$$

en el disco $B(0,1)$.

6.14 Sea α un número real, $\alpha > 1$. Demostrar que la función

$$f(z) = z\,e^{\alpha - z} - 1$$

tiene exactamente un cero en el disco abierto unidad y que este cero es real y positivo.

6.15 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$. Probar que existe un único punto $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) < 0$ y tal que

$$z - e^z + \alpha = 0\,.$$

6.16 Demostrar que $P(z) = z^4 + 5\,z + 1$ tiene un cero en la bola unidad, y tres en $A(0,1,2)$, la corona centrada en 0 de radios 1 y 2.

6.17 Determinar el número de ceros de $P(z) = 7\,z^3 - 5\,z^2 + 4\,z - 2$ en $\overline{B}(0,1)$.
Sugerencia: multiplicar $P(z)$ por $z + 1$.

6.18 Sea f una función holomorfa en un abierto que contiene al disco cerrado $\overline{B}(0,r)$. Se supone que

$$|f(0)| + r\,|f'(0)| < m = \inf\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Pruébese que f tiene al menos dos ceros (contando con su orden de multiplicidad) en el disco abierto $B(0,r)$.

6.19 Sea f una función holomorfa en la bola unidad y sea $0 < r < 1$. Si se define

$$\mu(r) = \inf\{\, |f(z)| : \ |z| = r \,\}$$

y $m(r)$ representa el número de ceros de f en $B(0,r)$, demostrar que

$$\mu(r) \leq |f(0)| + |f'(0)| + \cdots + \left|\frac{f^{(m(r))}(0)}{(m(r))!}\right|.$$

6.20 Sean f y g dos funciones holomorfas en un abierto U que contiene a $\overline{B}(0,1)$, tales que:

i) $f(z) \neq g(z)$ si $|z| = 1$, y

ii) $|f(z)| < |g(z)|$ si $|z| = 1$.

Demostrar que si n es el número de ceros de g en U, entonces $z_0 = 0$ es un cero de orden k, con $0 \leq k \leq n$, de la función $f - g$. ¿Qué ocurre si la desigualdad de ii) no es estricta?

6.21 Determinar los automorfismos de $\mathbb{C}$.
Sugerencia: Estudiar el carácter de la singularidad en el punto del infinito.

6.22 Determinar los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$.
Sugerencia: Estas transformaciones sólo pueden tener un polo que, mediante homografías, se puede llevar a ∞. Luego aplicar lo obtenido en el ejercicio 6.21.

6.23 Determinar los automorfismos de la bola unidad $B(0,1)$.
Sugerencia: Si $f(0) = 0$ se puede aplicar el lema de Schwarz. El caso general se reduce al anterior mediante homografías.

6.24 Sean f y g dos funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que:

i) $f(n) = n^2 g(n)$ para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

ii) Existen y son finitos los siguientes límites

$$\lim_{z \to \infty} f(z) \qquad \text{y} \qquad \lim_{z \to \infty} z^2 g(z).$$

Probar que $f(z) = z^2 g(z)$ si $z \neq 0$.
Sugerencia: Comprobar que $F(z) = f(1/z)$ se prolonga de forma holomorfa a $z_0 = 0$.

6.25 Sea f una función holomorfa de $B(0,1)$ en $B(0,1)$, biyectiva. Demostrar que f debe ser de la forma

$$f(z) = e^{ia} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}, \quad \text{para } z \in B(0,1),$$

donde $|z_0| < 1$, $a \in \mathbb{R}$.

6.26 Sea $f : \overline{B}(0,1) \to \overline{B}(0,1)$, holomorfa en $B(0,1)$ y continua en $\overline{B}(0,1)$. Supongamos que f tiene n ceros ($n \geq 1$) en $B(0,1)$, $z_1, \ldots, z_n$ con multiplicidades $k_1, \ldots, k_n$, respectivamente. Demostrar que

$$|f(z)| \leq \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{z - z_j}{1 - \overline{z}_j z} \right|^{k_j} \quad \text{si } z \in \overline{B}(0,1).$$

Si la igualdad se alcanza en algún punto de $B(0,1) \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, demostrar que existe una constante c, con $|c| = 1$ tal que

$$f(z) = c \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z - z_j}{1 - \overline{z}_j z} \right)^{k_j} \quad \text{para cada } z \in \overline{B}(0,1).$$

6.27 Pruébese que si f es una función entera, no constante, con módulo constante en la circunferencia $C(0,1)$, entonces deben existir $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(z) = a\, z^n \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

6.28 Sea D un abierto conexo y acotado del plano, $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ una aplicación continua en $\overline{D}$, holomorfa en D y no constante. Supongamos que

$$|f(z)| = 1 \quad \text{para todo } z \in \mathrm{Fr}(D).$$

Demostrar que $f(D) = B(0,1)$.

6.29 Sea f una función holomorfa en $B(0,1)$ tal que $|f(z)| < 1$ si $z \in B(0,1)$. Si existen dos puntos distintos a y b de $B(0,1)$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, demostrar que f es la función identidad.

6.30 Sea f una función holomorfa en el disco $B(a,\rho)$ tal que $|f(z)| < M$ para cada $z \in B(a,\rho)$. Probar que, si además $f(a) = 0$, entonces se tiene que

$$\big|f(z)\big| \leq \frac{M\,|z-a|}{\rho}\,.$$

6.31 Sea f holomorfa de $B(0,R)$ en $B(0,M)$. Demostrar que

$$\big|f(z) - f(0)\big| \leq \frac{2\,r\,M}{R} \quad \text{si} \quad |z| = r < R\,.$$

6.32 Sean f una función holomorfa de la bola abierta unidad en sí misma y $z_0 \in B(0,1)$.

i) Probar que

$$\Big|\frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(0)}\,f(z)}\Big| \;\leq\; \Big|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}\,z}\Big|, \quad z \in B(0,1), \quad \text{y} \quad |f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}.$$

ii) Probar que $|f'(0)| < 1$ ó $f(z) = a\,z$, con $|a| = 1$.

iii) ¿Puede existir una función holomorfa del disco unidad en si mismo tal que

$$f(1/2) = 3/4 \quad \text{y} \quad f'(1/2) = 2/3?$$

iv) Si $f(0) = 1/2$, probar que

$$|f(z)| \leq \frac{3\,|z| + 1}{2} \quad \text{si} \quad |z| < 1.$$

6.33 Sea f una función holomorfa definida en el disco unidad tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ y $|f'(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0,1)$. Demostrar que

$$\big|f(z)\big| \leq \frac{1}{2}\,|z|^2 \quad \text{si} \quad z \in B(0,1)\,.$$

6.34 Sea H el semiplano superior abierto, y sea f holomorfa en H tal que $\mathrm{Im}(f(z)) > 0$ para cada $z \in H$. Demostrar que

$$\Big|\frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) - \overline{f(z_0)}}\Big| \leq \Big|\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\Big|, \quad z, z_0 \in H,$$

y deducir que

$$\frac{|f'(z)|}{\mathrm{Im}(f(z))} \leq \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}, \quad z \in H.$$

6.35 Sea f una función holomorfa en $B(0,1)$ tal que $\mathrm{Im}\, f > 0$ y $f(0) = i$. Probar que

$$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \quad z \in B(0,1)\,.$$

6.36 Sea f una función holomorfa en el abierto $U = \{\, z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0 \,\}$. Se supone que $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in U$, y que existe $b \in U$ con $f(b) = 0$. Demostrar que

$$|f(z)| \leq M\Big|\frac{b - z}{\bar{b} + z}\Big|, \quad z \in U.$$

6.37 Sea f holomorfa en $B(0,1)$ tal que $\mathrm{Re}\, f > 0$. Probar que

$$\big|f(0)\big|\,\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq \big|f(z)\big| \leq \big|f(0)\big|\,\frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

si $0 < |z| < 1$ y $\big|f'(0)\big| \leq 2\,\big|\mathrm{Re}\, f(0)\big| \leq 2\big|f(0)\big|$.

6.38 Sea f holomorfa en H, donde $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$, tal que $|f| \leq 1$.

¿Cómo de grande puede ser $\big|f'(i)\big|$?

6.39 Hallar las regiones del plano en las que se transforman respectivamente

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < \pi/4 \} \qquad \text{y} \qquad B = \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2 \}$$

por la homografía $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)}$.

6.40 Determínese la imagen del cuarto de disco $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ y > |x|\}$ por la homografía $T(z) = \dfrac{z-1}{z}$.

6.41 Hallar en qué región del plano se transforma:

i) $\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1 \}$, por la homografía $f(z) = \dfrac{z-1}{z-2}$.

ii) $\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0,\ \operatorname{Im}(z) > 0 \}$, por la homografía $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

6.42 Hallar la homografía que transforma los puntos -1, 0 y 1 en 1, i y -1, respectivamente, e indicar qué región corresponde al semiplano superior por esta transformación.

6.43 Encontrar una homografía que transforme el semicírculo $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ en el sector $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Determínar la imagen del segmento $[0, i]$ por dicha homografía.

6.44 En los siguientes casos constrúyase una homografía que aplique A en B:

i) $A = \big\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\,,\ |z-1| > \sqrt{2}\big\}$; $B = \big\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < {}^{\pi}\!/_{4}\big\}$;

ii) $A = \big\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\,,\ |z-1| > 1\big\}$; $B = B(0,1)$;

iii) $A = \big\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\,,\ |z+1| > 1\big\}$; $B = \big\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\big\}$.

6.45 Sea $\Omega = B(0,1) \setminus \overline{B}({}^1\!/_4, {}^1\!/_4)$, es decir, Ω es la región comprendida entre las circunferencias $C(0,1)$ y $C({}^1\!/_4, {}^1\!/_4)$. Hallar una homografía que transforme Ω en una corona circular $A(0,r,1)$, limitada exteriormente por $C(0,1)$ e interiormente por una circunferencia $C(0,r)$, cuyo radio $0 < r < 1$ se debe determinar.

6.46 Encontrar un isomorfismo de $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\,,\ |z-1| < 1\}$ en $B(0,1)$.

6.47 Dado $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$, encontrar un isomorfismo f de Ω en $B(0,1)$ con $f(0) = 0$ y $f'(0) > 0$. Calcular $f'(0)$.

6.48 Dar un isomorfismo de la bola unidad en

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \le -{}^1\!/_4\,,\ \operatorname{Im}(z) = 0 \},$$

tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) > 0$.

6.49 Transformar el sector formado por los complejos de argumento entre 0 y ${}^{\pi}\!/_{4}$ en el disco unidad, de modo que el punto $e^{i\pi/8}$ se transforme en el origen y el origen vaya al 1.

6.50 Dar una transformación ϕ que lleve el semiplano superior en la bola unidad y tal que $\phi(2\,i) = 0$ y $\arg\big(\phi'(2\,i)\big) = 0$.

6.51 Encontrar transformaciones biholomorfas que lleven:

i) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1 \}$ en $B = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1 \}$;

ii) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \ge 0,\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z) + 1\}$ en $B(0,1)$;

iii) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0,\ 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ en el primer cuadrante;

iv) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ |z-i| > 1 \}$ en $B(0,1)$;

v) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ en $B(0,1)$;

vi) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1\}$ en $B(0,1)$;

vii) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ en $B(0,1)$;

6.52 Hállese el dominio que se aplica sobre el semiplano superior $H = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) > 0\}$ para cada una de las siguientes funciones $w = f(z)$:

i) $w = \dfrac{i(1+z)}{1-z}$ *iii*) $w = \Big(\dfrac{1+z}{1-z}\Big)^2$ *v*) $w = \Big(\dfrac{1+z^n}{1-z^n}\Big)^2$

ii) $w = \dfrac{i\,z + i\,e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z}\,,\ \theta \in \mathbb{R}$ *iv*) $w = i\Big(\dfrac{1+z^n}{1-z^n}\Big)$ *vi*) $w = \dfrac{1}{z^n}\,.$

6.53 (cf. Munkres [22]) Considérese el subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ siguiente:

$$S = \big\{z = t + i\,\sin(\pi/t)\ :\ 0 < t \le 2\big\}\,.$$

El conjunto $\Sigma = S \cup [-i, i]$ es la adherencia de S en $\mathbb{C}$. Es bien conocido que Σ es conexo por ser la adherencia de un conexo, pero no es conexo por arcos. Para “cerrar esta curva” (la parte en negro, o más oscura, de la figura 6.2) construiremos un arco de circunferencia entre los puntos $-i \in S$ y $2 + i \in S$, por ejemplo, la centrada en $2 - i$ y de radio 2 (trazo azul de la figura 6.2), es decir, el arco Γ parametrizado por

$$\gamma(t) = 2 - i + 2\,e^{it}\,, \qquad t \in [-\pi, 3\pi/2]\,.$$

La unión de estos dos conjuntos $P = \Sigma \cup \Gamma$, dotada de la topología de subespacio de $\mathbb{C}$, es la denominada *circunferencia polaca*[1] (o cualquier subespacio de $\widehat{\mathbb{C}}$ homeomorfo a P, atendiendo únicamente a la estructura topológica, obviando la métrica. En [22] se denomina *closed topologist's sine curve*).

i) Probar que P es simplemente conexo en el sentido de que toda curva cerrada en P se deforma homotópicamente en un punto.

Sugerencia: La idea es proceder de manera similar a como se hace para probar que Σ no es arco-conexo; vagamente hablando, no se puede pasar al segmento $[-i, i]$ desde S mediante curvas en Σ.

ii) Probar que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus P$ tiene exactamente dos componentes conexas.

Sugerencia: Nótese que $A = \widehat{\mathbb{C}} \setminus P$ es abierto, pues P es compacto. Por otra parte si $z_0 \in A$ está en el “exterior” de P se puede escapar desde z_0 hacia ∞ por segmentos verticales que no cortan a S, dentro de A; si un punto z_0 de A está en el “interior” de P es posible unir z_0, también mediante segmentos verticales, con un punto $z_1 \in \big\{|z - 2 + i| < 2\,,\ \operatorname{Im}(z) < -1\big\}$.

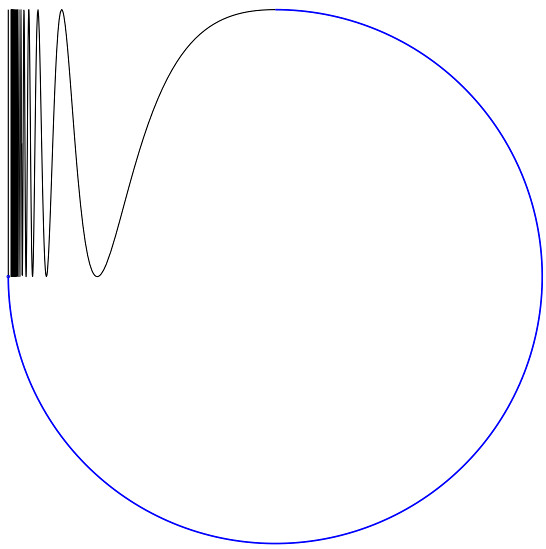


Figura 6.2: Circunferencia polaca.

iii) Probar que Ω, la componente conexa acotada de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus P$, es un dominio simplemente conexo.

Sugerencia: Toda curva cerrada en Ω se puede “trasladar verticalmente” y de forma continua al semidisco abierto $\big\{|z - 2 + i| < 2\,,\ \operatorname{Im}(z) < -1\big\} \subset \Omega\,.$

Nota: *El teorema de la representación conforme de Riemann asegura que Ω es analíticamente isomorfo a $B(0,1)$, pero es imposible extender un isomorfismo $\phi\colon \Omega \to B(0,1)$ a un homeomorfismo de $\overline{\Omega} = \Omega \cup P$ en $\overline{B}(0,1)$, pues de ser así resultaría que $P = \partial\Omega$ sería homeomorfo a $C(0,1)$, imposible, pues P es simplemente conexo y $C(0,1)$ no lo es.*

A la hora de prolongar la aplicación ϕ, los puntos problemáticos de $\partial\Omega$ son los de $[-i, i]$; en los demás puntos de P se puede extender el isomorfismo de forma continua, pues esos puntos son “accesibles” *y* “simples” (ver [20] o [3]).

[1] El nombre se debe a que este ejemplo surgió en la escuela matemática polaca durante la primera mitad del siglo XX, una época de esplendor que contribuyó enormemente al desarrollo de la Topología, entre otros campos, con personajes de la talla de Sierpiński, Mazurkiewicz, Kuratowski, Tarski, etc. Como dato simpático, ver el logotipo de *Warsaw Center of Mathematics and Computer Science*: `http://wcmcs.edu.pl/`

Apéndice A

Tablas

$\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n\|$	=	$\left\|\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right\|$	$\lim\limits_{z\to z_0} \left\|f(z)\right\|$	=	$\left\|\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\right\|$
$\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n)$	=	$\lim\limits_{n\to\infty} z_n + \lim\limits_{n\to\infty} w_n$	$\lim\limits_{z\to z_0} \big(f(z) + g(z)\big)$	=	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) + \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$
$\lim\limits_{n\to\infty} (z_n w_n)$	=	$\lim\limits_{n\to\infty} z_n \lim\limits_{n\to\infty} w_n$	$\lim\limits_{z\to z_0} \big(f(z)\, g(z)\big)$	=	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty} (z_n w_n) = 0$	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$ y $g(z)$ acotada	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{z\to z_0} \big(f(z)\, g(z)\big) = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n}$	=	$\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}$	$\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)}$	=	$\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$

Tabla A.1: Artimética de los límites.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$	=	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha\, z_n + \beta\, w_n)$	=	$\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$
$\left\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n \right\|$	$\leq$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|z_{n+1}\|}{\|z_n\|} < 1$ o $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|z_n\|} < 1$	$\Rightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$ converge
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|z_{n+1}\|}{\|z_n\|} > 1$ o $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|z_n\|} > 1$	$\Rightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$ diverge
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} z_k w_{n-k} \right)$	=	$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n \right) \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n \right)$
$\sum\limits_{n=m}^{\infty} r^n$	=	$\dfrac{r^m}{1-r}, \quad \|r\| < 1$

Tabla A.2: Propiedades de las series convergentes.

Notación:	$f = u + i\,v$ $z = x + i\,y$	$\Rightarrow$	$u = \mathrm{Re}(f)\,,\ v = \mathrm{Im}(f)$ $x = \mathrm{Re}(z)\,,\ y = \mathrm{Im}(z)$
Condiciones de Cauchy-Riemann: Existe	$f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$	$\Rightarrow$	$\dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0);\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0)$
	$(\alpha\, f + \beta\, g)'(z_0)$	=	$\alpha\, f'(z_0) + \beta\, g'(z_0)$
	$(f\, g)'(z_0)$	=	$f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0)$
	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0)$	=	$\dfrac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{g(z_0)^2}$
	$P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$	$\Rightarrow$	$P'(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, a_k z^{k-1}$
Regla de la cadena:	$(g \circ f)'(z_0)$	=	$g'(f(z_0))\, f'(z_0)$
Derivada de la inversa: $(f \circ f^{-1})(w) = w\,,\ (f^{-1} \circ f)(z) = z$	$\left(f^{-1}\right)'(w)$	=	$\dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(w)\big)}$

Tabla A.3: Propiedades de la derivación.

$\exp(z) = e^z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}\,;\qquad e^{x+iy} := e^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big)$
$e^{z+w} = e^z e^w\,,\ \exp(z+w) = \exp(z)\,\exp(w)$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$
$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ para todo $z \in \mathbb{C}$
$\lvert\exp(z)\rvert = e^{\mathrm{Re}(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Im}(z)$ *es un argumento de* $\exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$
$\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$
$e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$
$e^z = 1$ si, y sólo si, $z = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$
$\theta := \arg(z)$ si $\exp(i\theta) = \dfrac{z}{\lvert z\rvert}$
$\exp$ *es periódica de periodo* $2\pi i$: $e^{z+2k\pi\, i} = e^z$ para todo $k \in \mathbb{Z}$
$\exp$ *es holomorfa en todo* $\mathbb{C}$ *y*: $\exp'(z) = \exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$

Tabla A.4: Propiedades de la función exponencial.

$w = \log_c(z) \;\Leftrightarrow\; e^w = z\,, \quad c \le \operatorname{Im}(w) < c + 2\pi$
$\log_c(z) = \ln(\lvert z\rvert) + i\,\theta\,, \quad \theta = \arg(z)\,,\; c \le \theta < c + 2\pi$
$z^w := \exp\big(w \log_c(z)\big)\,,\;\; z \neq 0,\; w \in \mathbb{C}.$
Si $n \in \mathbb{N}$: $\quad z^n = z \cdot z \overset{n \text{ veces}}{\cdots} z\,; \qquad z^{-n} = \dfrac{1}{z \cdot z \overset{n \text{ veces}}{\cdots} z}$
Si $z \neq 0$, θ es un argumento de z y $n \in \mathbb{N}$, entonces: $z^n = \lvert z\rvert^n \big(\cos(n\,\theta) + i\,\sin(n\,\theta)\big)$ $\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{\lvert z\rvert}\,\exp\left(i\,\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 2, \ldots, n-1$
Todas las ramas del logaritmo son derivables y: $\log_c'(z) = \dfrac{1}{z} \quad$ para todo $z \in W_c$

Tabla A.5: Propiedades de logaritmos y potencias.

$\cos(z) := \dfrac{\exp(i\,z) + \exp(-i\,z)}{2}$	$\sin(z) := \dfrac{\exp(i\,z) - \exp(-i\,z)}{2\,i}$
$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$	$\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z)$
$\cos(z + 2\,\pi) = \cos(z)$	$\sin(z + 2\,\pi) = \sin(z)$
$\sin(z) = -\sin(-z)$	$\cos(z) = \cos(-z)$
$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$	$\sin\left(\pi/4\right) = \cos\left(\pi/4\right) = 1/\sqrt{2}$
$\cos(0) = 1, \qquad \sin\left(\pi/2\right) = 1$	$\cos(\pi) = -1, \qquad \sin\left(3\pi/2\right) = -1$
$\sin(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z = k\,\pi,\;\; k \in \mathbb{Z}$	$\cos(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \pi/2 + k\,\pi,\; k \in \mathbb{Z}$
$\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$	$\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
$\sin(z + \pi) = -\sin(z),\;\; \cos(z + \pi) = -\cos(z)$	$\sin\left(\pi/2 - z\right) = \cos(z),\;\; \cos\left(\pi/2 - z\right) = \sin(z)$
$\sin(2\,z) = 2\,\sin(z)\cos(z)$	$\cos(2\,z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$
$\sin^2(z) = \dfrac{1 - \cos(2z)}{2},\;\; \cos^2(z) = \dfrac{1 + \cos(2z)}{2}$	$\sin(z)\cos(w) = \dfrac{\sin(z + w) + \sin(z - w)}{2}$
$\sin(z)\sin(w) = \dfrac{\cos(z - w) - \cos(z + w)}{2}$	$\cos(z)\cos(w) = \dfrac{\cos(z - w) + \cos(z + w)}{2}$
$\sin(z) + \sin(w) = 2\,\sin\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\cos\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$	$\sin(z) - \sin(w) = 2\,\cos\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\sin\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$
$\cos(z) + \cos(w) = 2\cos\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\cos\left(\dfrac{z - w}{2}\right)$	$\cos(z) - \cos(w) = 2\sin\left(\dfrac{z + w}{2}\right)\sin\left(\dfrac{w - z}{2}\right)$

Tabla A.6: Propiedades de las funciones trigonométricas.

$\sinh(z) := \dfrac{\exp(z)-\exp(z)}{2} = -i\sin(iz)$	$\cosh(z) := \dfrac{\exp(z)+\exp(-z)}{2} = \cos(iz)$
$\exp(z) = \cosh(z)+\sinh(z)$	$\exp(-z) = \cosh(z)-\sinh(z)$
$\cosh(z+2\,\pi\,i) = \cosh(z)$	$\sinh(z+2\,\pi\,i) = \sinh(z)$
$\sinh(z) = -\sinh(-z)$	$\cosh(z) = \cosh(-z)$
$\cosh^2(z)-\sinh^2(z) = 1$	$\cosh(0) = 1, \qquad \sinh\big(0\big) = 0$
$\cosh(z) = 0 \ \Leftrightarrow\ z = {}^{\pi\,i}\!/_2 + k\,\pi\,i,\ k\in\mathbb{Z}$	$\sinh(z) = 0 \ \Leftrightarrow\ z = k\,\pi\,i,\ \ k\in\mathbb{Z}$
$\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w)+\cosh(z)\sinh(w)$	$\sinh(2\,z) = 2\,\sinh(z)\cosh(z)$
$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w)+\sinh(z)\sinh(w)$	$\cosh(2\,z) = \cosh^2(z)+\sinh^2(z)$
$\sinh^2(z) = \dfrac{\cosh(2z)-1}{2}$	$\cosh^2(z) = \dfrac{\cosh(2z)+1}{2}$

Tabla A.7: Propiedades de las funciones hiperbólicas.

$e^z = \exp(z)$	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,z^n,$	$z\in\mathbb{C}$
$\sin(z)$	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,z^{2n+1},$	$z\in\mathbb{C}$
$\cos(z)$	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,z^{2n},$	$z\in\mathbb{C}$
$\sinh(z)$	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\,z^{2n+1},$	$z\in\mathbb{C}$
$\cosh(z)$	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\,z^{2n},$	$z\in\mathbb{C}$
$\dfrac{1}{1-z}$	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$	$z\in B(0,1)$
$\dfrac{m!}{(1-z)^{m+1}}$	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!}\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)\cdots(n+1)\,z^n,$	$z\in B(0,1)$
$\log(1-z)$ (*rama principal*)	=	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}\,z^n,$	$z\in B(0,1)$
$\dfrac{1}{1+z^2}$	=	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,z^{2n},$	$z\in B(0,1)$
$\arctan(z)$ (*rama principal*)	=	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2\,n+1}\,z^{n+1},$	$z\in B(0,1)$

Tabla A.8: Desarrollos en series de Taylor.

Curvas ($\mathscr{C}^1$ a trozos):	$\gamma(t)$	=	$z(t) = x(t) + i\,y(t)\,,\ \ t \in [a,b]$
	$\gamma'(t)$	=	$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)\,,\ \ t \in [a,b]$
Circunferencias:	$C(z_0, r)$		Circunferencia de centro z_0 y radio r
Parametrización:	$\gamma_{z_0,r}(t)$	=	$z_0 + r\,e^{i\,t}\,,\ \ t \in [0, 2\pi]$
Segmentos:	$[z, w]$		Segmento de extremos z y w
Parametrización:	$\gamma_{[z,w]}(t)$	=	$z + t\,(w - z)\,,\ \ t \in [0,1]$
Longitud:	long(γ)	=	$\displaystyle\int_a^b \lvert\gamma'(t)\rvert\,dt$
Integral:	$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$	=	$\displaystyle\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt\,,$ $\quad f$ continua en γ^*
Fórmula Integral de Cauchy:			f holomorfa en $U \supset \overline{B}(z_0, r)$
Si $\lvert z - z_0\rvert < r:$	$f^{(n)}(z)$	=	$\displaystyle\frac{n!}{2\,\pi\,i}\oint_{C(z_0,\,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$
Si $\lvert z - z_0\rvert > r:$	0	=	$\displaystyle\oint_{C(z_0,\,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$
Desigualdades de Cauchy:			f holomorfa en $U \supset \overline{B}(z_0, r)$
	$\big\lvert f^{(n)}(z_0)\big\rvert$	$\leq$	$\displaystyle\frac{n!}{r^n}\sup\big\{\big\lvert f(w)\big\rvert : \lvert w - z_0\rvert = r\big\}\,,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$
Índice:	$\eta(\gamma, z)$	=	$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{dw}{w-z}\,,\qquad z \notin \gamma^*$
Fórmula Integral de Cauchy: ***(versión homológica)***			$\gamma^* \subset U\,;\ \eta(\gamma, \xi) = 0$ para todo $\xi \notin U$ f holomorfa en U
	$\eta(\gamma, z)\,f(z)$	=	$\displaystyle\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw$

Tabla A.9: Fórmulas integrales de Cauchy.

Singularidad aislada: f holomorfa en $B^*(z_0,r) = B(z_0,r) \setminus \{z_0\}$

Serie de Laurent: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in B^*(z_0,r)$

Caracterización de singularidades evitables. *Son equivalentes:*

a) Existe $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

b) Existe g holomorfa en $B(z_0,r)$ tal que $f = g$ en $B^*(z_0,r)$

c) f está acotada en $B(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\}$ para algún $0 < \varepsilon < r$

d) $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)\, f(z) = 0$

e) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ($b_n = a_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$)

Caracterización de singularidades polares. *Son equivalentes:*

a) Existe $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

b) Existen g holomorfa en $B(z_0,r)$, $g(z_0) \neq 0$, y $m \in \mathbb{N}$ con $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ en $B^*(z_0,r)$

c) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = L$, $L \in \mathbb{C}$, $L \neq 0$

d) $f(z) = \sum_{n=1}^{m} b_n/(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\,;\ b_m = a_{-m} \neq 0$

Caracterización de singularidades esenciales. *Son equivalentes:*

a) z_0 es una singularidad esencial de f

b) $f\big(B^*(z_0,\delta)\big)$ es denso en $\mathbb{C}$ para todo $0 < \delta < r$

c) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ con $b_n \neq 0$ para infinitos índices n

Tabla A.10: Clasificación de singularidades aisladas.

Residuo de f ***en*** z_0: Si $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ en $B^*(z_0,r)$,	$\mathrm{Res}(f,z_0)$	$:=$	a_{-1}
Fórmula integral: para $0<\rho<r$,	$\mathrm{Res}(f,z_0)$	$=$	$\dfrac{1}{2\,\pi\, i}\displaystyle\oint_{C(z_0,\rho)} f(w)\,dw,$
z_0 es sing. evitable de f:	$\mathrm{Res}(f,z_0)$	$=$	0
z_0 es cero de f y g de igual orden:	$\mathrm{Res}\left(f/g, z_0\right)$	$=$	0
z_0 es polo de f y g de igual orden:	$\mathrm{Res}\left(f/g, z_0\right)$	$=$	0
$f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ con $g(z_0)\neq 0$:	$\mathrm{Res}(f,z_0)$	$=$	$\dfrac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$
$f(z_0)\neq 0,\ \ g(z_0)=0,\ \ g'(z_0)\neq 0$:	$\mathrm{Res}\left(f/g, z_0\right)$	$=$	$\dfrac{f(z_0)}{g'(z_0)}$
z_0 es cero de orden m de f y z_0 es cero de orden $m+1$ de g:	$\mathrm{Res}\left(f/g, z_0\right)$	$=$	$\dfrac{(m+1)\,f^{(m)}(z_0)}{g^{(m+1)}(z_0)}$
$f(z_0)\neq 0$, $g(z_0)=g'(z_0)=0$, $g''(z_0)\neq 0$:	$\mathrm{Res}\left(f/g, z_0\right)$	$=$	$2\,\dfrac{f'(z_0)}{g''(z_0)}-\dfrac{2}{3}\,\dfrac{f(z_0)\,g'''(z_0)}{\left(g''(z_0)\right)^2}$
$f(z_0)=0,\ \ f'(z_0)\neq 0,$ $g(z_0)=g'(z_0)=g''(z_0)=0,\ g'''(z_0)\neq 0$:	$\mathrm{Res}\left(f/g, z_0\right)$	$=$	$3\,\dfrac{f''(z_0)}{g'''(z_0)}-\dfrac{3}{2}\,\dfrac{f'(z_0)\,g^{(4)}(z_0)}{\left(g'''(z_0)\right)^2}$
z_0 es cero de orden m de f:	$\mathrm{Res}\left(f'/f, z_0\right)$	$=$	m
z_0 es polo de orden m de f:	$\mathrm{Res}\left(f'/f, z_0\right)$	$=$	$-m$

Cálculo de residuos mediante series de Laurent:

Si $z_0=0$ es polo o cero de f y g, existen $p,q\in\mathbb{Z}$ con $f(z)=\sum\limits_{n=p}^{\infty} b_n\,z^n$, $g(z)=\sum\limits_{n=q}^{\infty} c_n\,z^n$, entonces $f/g=\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n\,z^n$ con $m=p-q$. Si $p<q$ (el orden del polo de f es mayor que el de g, o el orden del cero de f es menor que el de g), entonces f/g tiene en $z_0=0$ un polo de orden $|m|=q-p$:

$$\left(c_q\,z^q+c_{q+1}\,z^{q+1}+\dots\right)\left(a_{p-q}\,z^{p-q}+\dots+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+\dots\right) \;=\; b_p\,z^p+b_{p+1}\,z^{p+1}+\dots$$

Es decir, para $l\geq p$ se tiene que $b_l=\sum\limits_{j+k=l} c_j\,a_k=\sum\limits_{j=q}^{q-p+l} c_j\,a_{l-j}$:

$$c_q\,a_{p-q}=b_p \quad\Longrightarrow\quad a_{p-q}=\frac{b_p}{c_q}\,;$$

$$c_q\,a_{p-q+1}+c_{q+1}\,a_{p-q}=b_{p+1} \quad\Longrightarrow\quad a_{p-q+1}=\frac{b_{p+1}}{c_q}-c_{q+1}\,\frac{b_p}{c_q^2}\,;$$

$$\vdots$$

$$c_q\,a_{-1}+c_{q+1}\,a_0+\dots+c_{2q-p-1}\,a_{p-q}=b_{q-1} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Res}(f/g,0)=a_{-1}=\frac{-1}{c_q}\sum_{j=q+1}^{2q-p-1} c_j\,a_{q-1-j}$$

Para $z_0\neq 0$ el algoritmo es exactamente igual, sólo se ha puesto $z_0=0$ para abreviar.

Tabla A.11: Cálculo de residuos.

Condiciones:	***Fórmula***:
$R = {}^{P}/_{Q}$ fracción racional en las variables reales x, y; $Q(x,y) \neq 0$ si $x^2+y^2=1$ $f(z) = \frac{1}{i\,z} R\Big(\frac{1}{2}\left(z + {}^1/_z\right), \frac{1}{2\,i}\left(z - {}^1/_z\right)\Big)$:	$\int_0^{2\pi} R\big((\cos(t), \sin(t)\big)\,dt = 2\pi i \sum_{\lvert a\rvert<1} \operatorname{Res}(f,a)$
f holomorfa en $U \supset \{\operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ excepto en un número finito de singularidades, ninguna singularidad en $\mathbb{R}$ $\lvert f(z)\rvert \leq \frac{M}{\lvert z\rvert^p}$, $p>1$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, $\lvert z\rvert \geq R$:	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(f,a)$
f holomorfa en $U \supset \{\operatorname{Im}(z) \leq 0\}$ excepto en un número finito de singularidades, ninguna singularidad en $\mathbb{R}$ $\lvert f(z)\rvert \leq \frac{M}{\lvert z\rvert^p}$, $p>1$, $\operatorname{Im}(z) \leq 0$, $\lvert z\rvert \geq R$:	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(f,b)$
f holomorfa en $U \supset \{\operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ excepto en un número finito de singularidades, algunos polos simples $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ $\lvert f(z)\rvert \leq \frac{M}{\lvert z\rvert^p}$, $p>1$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, $\lvert z\rvert \geq R$:	$VP\int_{-\infty}^{\infty} f = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(f,a) + \pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f,x_j)$
f holomorfa en $U \supset \{\operatorname{Im}(z) \leq 0\}$ excepto en un número finito de singularidades, algunos polos simples $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ $\lvert f(z)\rvert \leq \frac{M}{\lvert z\rvert^p}$, $p>1$, $\operatorname{Im}(z) \leq 0$, $\lvert z\rvert \geq R$:	$VP\int_{-\infty}^{\infty} f = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(f,b) - \pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f,x_j)$
f holomorfa en $U \supset \{\operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ excepto en un número finito de singularidades, ninguna singularidad en $\mathbb{R}$ $\lvert f(z)\rvert \leq \frac{M}{\lvert z\rvert}$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, $\lvert z\rvert \geq R$, $\omega < 0$:	$\widehat{f}(\omega) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega\,z} f(z), a)$
f holomorfa en $U \supset \{\operatorname{Im}(z) \leq 0\}$ excepto en un número finito de singularidades, ninguna singularidad en $\mathbb{R}$ $\lvert f(z)\rvert \leq \frac{M}{\lvert z\rvert}$, $\operatorname{Im}(z) \leq 0$, $\lvert z\rvert \geq R$, $\omega > 0$:	$\widehat{f}(\omega) = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(b)<0} \operatorname{Res}(e^{-i\omega\,z} f(z), b)$
f holomorfa en $\mathbb{C}$, excepto en un conjunto finito $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, C_N poligonal con vértices $(N+{}^1/_2)(\pm 1 \pm i)$ $\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} \cot(\pi\,z)\,f(z)\,dz = 0$:	$\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n\notin S}}^{N} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\big(\cot(\pi\,z) f(z), a_j\big)$
f holomorfa en $\mathbb{C}$, excepto en un conjunto finito $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, C_N como arriba, $\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} \frac{f(z)}{\sin(\pi\,z)}\,dz = 0$:	$\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n\notin S}}^{N} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\Big(\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}, a_j\Big)$

Tabla A.12: Aplicaciones del teorema de los residuos.

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors: *Complex Analysis*, Ed. McGraw-Hill, 1979.

[2] T. M. Apostol: *Análisis Matemático*, Ed. Reverté, 1976.

[3] R. B. Ash R.B., W.P. Novinger: *Complex Variables*, Ed. Dover, 2007.
(versión digital accesible en la URL: `http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/CV.html`)

[4] R. B. Burckel: *An Introduction To Classical Complex Analysis*, Ed. Birkhäuser, 1979.

[5] B. Chabat: *Introduction à l'analyse complexe I: Fonctions d'une variable*, Ed. MIR, 1990.

[6] R. V. Churchill, J. W. Brown: *Variable Compleja y Aplicaciones*, Ed. McGraw-Hill, 1990.

[7] J. B. Conway: *Functions of One Complex Variable I*, Ed. Springer, 1978.

[8] J. A. Fernández Viña: *Análisis Matemático III. Integración y Cálculo Exterior*, Ed. Tecnos, 1992.

[9] J. A. Fernández Viña, E. Sánchez Mañes: *Ejercicios y Complementos de Análisis Matemático III*, Ed. Tecnos, 1994.

[10] F. Galindo, J. Sanz, L. A. Tristán: *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en una Variable Real*, Ed. Thomson, 2003.

[11] F. Galindo, J. Sanz, L. A. Tristán: *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en Varias Variables*, Ed. Thomson, 2005.

[12] P. Henrici: *Applied and computational Complex Analysis, 3 Tomos*, Ed. Wiley, 1974.

[13] E. Hille: *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, Ed. Wiley, 1976.

[14] G. A. Jones, D. Singerman: *Complex Functions, an algebraic and geometric viewpoint*, Ed. Cambridge U.P., 1987.

[15] K. Knopp: *Theory and Applications of Infinite Series*, Ed. Blackie & Son, 1947.

[16] K. Knopp: *Problem Book in Theory of Functions, 2 tomos*, Ed. Dover, 1948.

[17] S. G. Krantz: *A Guide to Complex Variables*, Ed. AMS, 2007.

[18] M. Lavrentiev, B. Chabat: *Méthodes de la Théorie des Fonctions d'une Variable Complexe*, Ed. MIR, 1972.

[19] E. Linés Escardó: *Análisis Matemático IV: Teoría de Funciones Complejas, 2 Tomos*, UNED, 1986.

[20] A. Markushevich: *Teoría de las Funciones Analíticas, 2 Tomos*, Ed. MIR, 1970.

[21] J. E. Marsden, M.J. Hoffman *Basic Complex Analysis*, Ed. Freeman, 1999.

[22] J. R. Munkres: *Topología, 2ª Edición*, Pearson Educación, 2002.

[23] B. P. Palka: *An Introduction to Complex Function Theory*, Ed. Springer, 1990.

[24] E. Pap: *Complex Analysis through Examples and Exercises*, Ed. Kluwer, 1999.

[25] F. J. Pérez González: *Funciones de variable compleja*, 2004.
`http://www.ugr.es/~fjperez/`

[26] D. Pestana, J. M. Rodríguez, F. Marcellán: *Variable compleja. Un curso práctico*, Ed. Síntesis, 1999.

[27] R. Remmert: *Theory of Complex Functions*, Ed. Springer, 1990.

[28] R. Remmert: *Classical Topics in Complex Function Theory*, Ed. Springer, 1997.

[29] W. Rudin: *Análisis Real y Complejo*, Ed. McGraw-Hill, 1988.

[30] M. R. Spiegel: *Variable Compleja*, Serie Schaum, Ed. McGraw-Hill, 2011.

[31] G. Vera Botí: *Variable Compleja: problemas y complementos*, Ed. eLectoLibris & RSME (Real Sociedad Matemática Española), 2013.

[32] L. I. Volkovyski, G. L. Lunts, I. G. Aramanovich: *Problemas Sobre la Teoría de Funciones de Variable Compleja*, Ed. MIR, 1977.

[33] E. T. Whittaker, G. N. Watson: *A course of modern analysis*, Ed. Cambridge Univ., 1927.

[34] A. D. Wunsch: *Complex Variables with Applications*, Ed. Pearson, 2005.

Índice alfabético

M

N

O

P

R

S

Índice de notación

$C(z_0, r)$	Circunferencia de centro z_0 y radio r, pag. 59
$\gamma_{z_0,r}$	Parametrización natural de $C(z_0, r)$: $\gamma_{z_0,r}(t) = z_0 + r\,e^{it}$, pag. 59
$\mathcal{H}(U)$	Espacio de las funciones holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, pag. 60
$\eta(\gamma, z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z)$	Índice de la curva γ respecto del punto z, pag. 65
$A(z_0, r, R)$	Corona circular centro z_0 y radios $r < R$, pag. 82
$B^*(z_0, R)$	Disco punteado de centro z_0 y radio R, pag. 82
$\mathrm{Res}(f, z_0)$	Residuo de la función f en el punto z_0, pag. 85
$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$	Valor principal de Cauchy de la integral de f en $\mathbb{R}$, pag. 89
$\widehat{f}(\omega)$	Transformada de Fourier de f, pag. 90
$B^*(\infty, R)$	Bola punteada de centro ∞ y radio R, pag. 101
Z_f, P_f	Conjuntos de ceros y polos, resp., de la función meromorfa f, pag. 103
$m(f, a)$	Orden o multiplicidad del cero de f en el punto a, pag. 103
$n(f, b)$	Orden del polo de f en el punto b, pag. 103
$\mathcal{M}(U)$	Espacio de funciones meromorfas en un abierto $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$, pag. 102
$Q_z(t)$	Núcleo integral de Cauchy, pag. 105
$P_z(t)$	Núcleo integral de Poisson, pag. 105