



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS:
SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO
MECÁNICO DE DIFERENTES ELEMENTOS DE
MÁQUINAS**

Autor:

Caldelas Fernández, David

Tutor:

Manso Burgos, Jose Gabriel

Departamento: CMelM

Valladolid, Junio 2015.

Resumen:

El trabajo consta de cinco capítulos donde se da a conocer los principios básicos del Método de elementos finitos y su utilización para el diseño de elementos de máquinas, en especial resortes y pernos.

Inicialmente se comenta los fundamentos teóricos del método, la importancia de su buen conocimiento, sus bondades y sus posibles limitaciones.

En los posteriores capítulos se realiza un estudio particular de los resortes y pernos, en los que se desarrolla una base teórica y una serie de modelos numéricos para poder compararlos y obtener los mejores resultados. Una vez validado el modelo se podrá utilizar para posteriores estudios.

Finalmente se recalca la importancia de aspectos clave comentados a lo largo del trabajo.

Palabras clave:

Elementos finitos, Resortes, Pernos, Máquinas, Simulación.

Índice

1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 JUSTIFICACIÓN	1
1.2 OBJETIVO	2
2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	3
2.1 CONOCIMIENTOS BÁSICOS	3
2.2 FORMULACIÓN	4
2.2.1 Relación tensión-deformación	4
2.2.2 Relación deformación-desplazamiento	4
2.2.3 Condiciones de compatibilidad y equilibrio	5
2.2.4 Funciones de interpolación y de forma	7
2.2.5 Obtención de la matriz de rigidez	8
2.3 TIPOS DE ELEMENTOS	9
2.3.1 Bar: Elemento barra	9
2.3.2 Beam: Elemento viga	12
2.3.3 Elementos planos:	16
2.3.4 brick: elementos tridimensionales	20
2.3.5 Modelado de un sistema	21
2.3.6 Conclusión.....	22
3 CÁLCULO DE RESORTES	23
3.1 RESORTES HELICOIDALES: COMPRESIÓN.....	23
3.1.1 Conceptos básicos	23
3.1.2 Teoría clásica	25
3.1.3 Modelo teórico: Resolución	29
3.1.4 Modelado y Resolución: MEF.....	32
3.1.5 Comparación de resultados y observaciones	40
3.2 RESORTES HELICOIDALES: EXTENSIÓN	42
3.2.1 Conceptos básicos	42
3.2.2 Teoría clásica	43
3.2.3 Modelo teórico: Resolución	44
3.2.4 Comparación de resultados y observaciones	57
3.3 RESORTES: TORSIÓN	59
3.3.1 Conceptos básicos	59
3.3.2 Teoría clásica	59
3.3.3 Modelo teórico: Resolución	62

3.3.4	Modelado y Resolución: MEF.....	64
3.3.5	Comparación de resultados y observaciones.....	70
4	ELEMENTOS DE UNIÓN - PERNOS	72
4.1	DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS.....	72
4.2	CÁLCULO DE TENSIONES EN PERNOS.....	74
4.2.1	Cálculo teórico.....	74
4.2.2	Modelado y resolución.....	76
4.2.3	Resultados y conclusiones.....	83
4.3	UNIONES DESMONTABLES: VARIOS ELEMENTOS	85
4.3.1	Cálculo teórico.....	86
4.3.2	Modelado y resolución.....	88
4.3.3	Resultados y conclusiones.....	93
4.4	UNIONES DESMONTABLES: VIGA SOMETIDA A FLEXIÓN	93
4.4.1	Cálculo teórico.....	94
4.4.2	Modelado	95
4.4.3	Resolución y conclusiones.....	101
5	CONCLUSIONES.....	102
	BIBLIOGRAFÍA.....	104

1

Introducción

1.1 JUSTIFICACIÓN

Cuando se ha de utilizar una herramienta de cálculo como el Método de elementos finitos, se requiere de una serie de conocimientos básicos para obtener correctos resultados.

Hasta la aparición del Método de elementos finitos (MEF o FEA), su cálculo podría llegar a ser complejo. Se trataba de resolver las ecuaciones diferenciales de forma exacta, y en el caso de condiciones de contorno complejas, se convertía en una tarea complicada.

Pero con la llegada de esta herramienta, permitió facilitar su resolución, lo que supuso un gran avance.

En nuestro caso, se trata de una herramienta vital para la elección de los diferentes elementos de máquinas (resortes, pernos, engranajes...) de una forma precisa, rápida y disminuyendo notablemente los costes de experimentación.

Pero...

- ¿Cómo podemos diseñar un resorte o un perno?
- ¿Podemos asegurar que los modelos utilizados en la resolución mediante el MEF coincide con lo desarrollado anteriormente por la teórica clásica?
- ¿Es importante un buen modelo para obtener unos resultados aceptables?
- ¿Es necesario el conocimiento matemático en el que se basa este método?

Generalmente no se conoce la dificultad que entraña este proceso y la necesidad de amplios conocimientos sobre resistencia de materiales y del propio método.

Por lo tanto, el interés por este trabajo reside en **conocer el funcionamiento del método** y de poder **aplicarlo para el diseño de diferentes elementos de máquinas**.

1.2 OBJETIVO

El objetivo principal es asentar unas bases del método de elementos finitos, modelar diferentes elementos de máquinas (resortes y pernos) y posteriormente dar respuesta a una serie de preguntas sobre la importancia de algunos apartados del trabajo.

El siguiente capítulo explica la importancia de un buen conocimiento del método, siendo de vital importancia la base matemática y teórica utilizada en la obtención de tensiones y deformaciones. Así podremos conocer las bondades y limitaciones del uso del MEF.

En los siguientes capítulos se centra en el diseño de resortes y pernos, en el que se seguirá una misma estructura para su desarrollo.

Primero se da a conocer la base teórica utilizada para el diseño de los dos elementos de máquinas estudiados en este trabajo.

Posteriormente para poder comparar soluciones se diseñan modelos numéricos para poder utilizar el método y se da importancia a la necesidad de un análisis preciso de los parámetros y condiciones de contorno para la obtención de unos datos cercanos a la realidad.

Finalmente se estudia la compatibilidad de las soluciones obtenidas mediante el cálculo clásico y el uso del “Método de elementos finitos”. Para cada elemento de máquina estudiado, será necesaria la validación del modelo, siendo necesario para poder aceptar los resultados obtenidos.

En resumen, al final del trabajo seremos capaces de dar respuesta a las siguientes cuestiones:

- 1- Importancia de un amplio conocimiento del método de elementos finitos y del cálculo teórico.
- 2- Elección del modelo (Mallado y condiciones de contorno).
- 3- Validación de los resultados

2

Método de elementos finitos

Antes de comenzar, me gustaría comentar que en esta parte del trabajo me centraré en el cálculo de sistemas en régimen elástico lineal, y en los elementos más utilizados para la resolución de estos.

2.1 CONOCIMIENTOS BÁSICOS

El análisis o método de elementos finitos se basa en la resolución numérica de variables de campo.

Estas variables de campo están definidas mediante ecuaciones diferenciales o expresiones integrales en los métodos numéricos convencionales.

En el caso del MEF, el modelo se discretiza formando lo que se conoce como “**malla**”, formada por elementos.

Los **nodos** del elemento son los puntos donde se resuelven las ecuaciones. En ellos se aplican las cargas y condiciones de contorno.

El mallado se realiza uniendo los nodos mediante **funciones de interpolación**, cuya formulación depende del elemento a utilizar.

En resumen, el método resuelve las ecuaciones de una variable de campo en los diferentes nodos y se supone una variación de la variable entre estos.

Por ello, el modelado del sistema es vital para la obtención de una buena solución, siendo la experiencia y los conocimientos de los analistas fundamentales.

El estudio del Método de elementos finitos puede llegar a ser bastante complejo, por tanto, lo comentado en este capítulo del trabajo serán conceptos básicos y algunos consejos a tener en cuenta antes de la modelización de los elementos de máquinas.

2.2 FORMULACIÓN

Antes de comenzar con la formulación, debemos definir el elemento característico en el que la basaremos. En el caso de la mecánica estructural es conocido como “**Matriz de Rigidez**”.

Este operador nos relaciona las fuerzas y los desplazamientos nodales:

$$[\bar{F}] = [\bar{K}] [\bar{u}]$$

Siendo:

- \bar{F} : Vector de cargas nodales
- \bar{K} : Matriz de Rigidez
- \bar{u} : Vector de desplazamientos

2.2.1 RELACIÓN TENSION-DEFORMACIÓN

Se relacionan directamente por el módulo elástico (E).

$$\sigma = E\varepsilon + \sigma_0 = E(\varepsilon + \varepsilon_0) \quad (2.1)$$

El módulo elástico depende del material.

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}$$

2.2.2 RELACIÓN DEFORMACIÓN-DESPLAZAMIENTO

Al basarse el método en el cálculo de desplazamientos, es imprescindible el conocer la relación existente entre estos para poder calcular las tensiones a partir de las deformaciones.

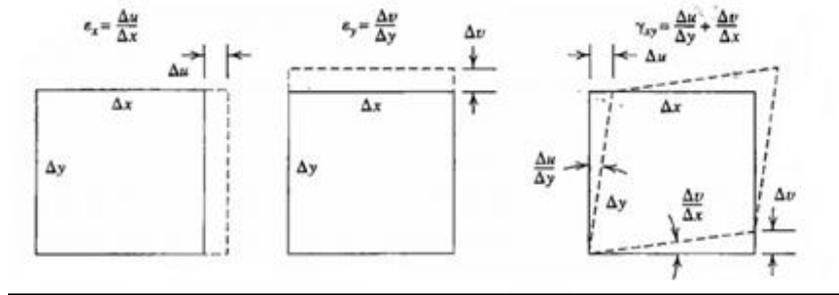


FIGURA 2.1: DEFORMACIÓN EN UN ELEMENTO DIFERENCIAL

En el caso de deformaciones triaxiales:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta z} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta z} & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} & 0 & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

2.2.3 CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD Y EQUILIBRIO

Compatibilidad

Para cumplir esta condición, las funciones de desplazamientos deben ser continuas y con un único valor de la posición.

Condición para el estado plano:

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta^2 y} + \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta^2 x} = \frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} \quad (2.2)$$

Equilibrio

En el caso de equilibrio estático, y para un diferencial de un problema plano:

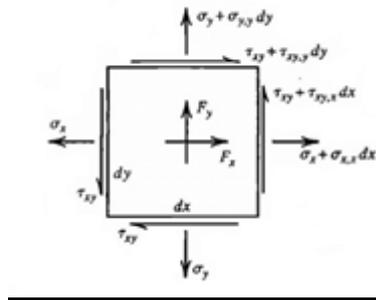


FIGURA 2.2: EQUILIBRIO EN UN ELEMENTO DIFERENCIAL

$F_x, F_y \rightarrow$ Fuerzas de volumen

Para el caso de un diferencial 3D, y si lo expresamos para cada eje:

$$\text{Eje } X \rightarrow \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{zx,z} + F_x = 0$$

$$\text{Eje } Y \rightarrow \sigma_{y,y} + \tau_{xy,y} + \tau_{yz,z} + F_y = 0$$

$$\text{Eje } Z \rightarrow \sigma_{z,z} + \tau_{yz,z} + \tau_{zx,z} + F_z = 0$$

Condiciones de contorno

Se incluyen las tensiones en lados o superficies del cuerpo. Estas deben ser coherentes con el problema a estudiar.

Solución exacta

Para obtener la solución exacta de las tensiones partiendo desde el cálculo de desplazamientos, se debe verificar que se cumplen las condiciones de:

- Compatibilidad
- Equilibrio
- Condiciones de contorno

Estas tres solo se cumplen conjuntamente en casos muy sencillos (solución única), por lo que los valores obtenidos mediante este método suelen ser aproximaciones del valor exacto.

2.2.4 FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN Y DE FORMA

Mediante el método de rigidez solo obtenemos los valores de la variable en los nodos. Y por ello necesitamos de unas funciones de interpolación que nos aproximen al valor de la variable de campo en todo punto del elemento.

$$\begin{aligned}\phi &= [X][a] \\ [X] &= [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^n] \quad y \quad [a] = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n] \\ n &= 1 \text{ Interpolación lineal} \\ n &= 2 \text{ Interpolación cuadrática}\end{aligned}$$

Si tenemos que poner los valores de [a] en función de los valores nodales, necesitamos una función de forma:

$$\begin{aligned}[a] &= [A]^{-1} [\phi_e] \\ \phi_e &\rightarrow \text{valor en el nodo}\end{aligned}$$

Por lo tanto, conociendo el valor en el nodo podemos calcularlo en el resto de puntos:

$$\phi = [X][a] = [X][A]^{-1} [\phi_e] = [N][\phi_e] \quad (2.3)$$

Llamando función de forma al término: $[N] = [X][A]^{-1}$

En resumen, la variable de campo ϕ es interpolada a trozos en toda la malla. Para cada tramo depende del tipo de interpolación impuesta por el elemento (lineal, cuadrática...). Pero entre tramos, la unión depende del grado de continuidad.

El campo es continuo de grado m, si hasta la derivada m-ésima es continua entre elementos.

Esto define notablemente el valor del campo en las zonas más próximas a los nodos.

Nota:

A pesar de la infinidad de elementos disponibles hasta la fecha, en este capítulo solo se tratarán los susceptibles de aplicación en este trabajo:

- Bar (Barra), Beam (Viga), triángulos (LST y CST), rectángulos (LST y CST) y Bricks.

2.2.5 OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Para la obtención de la matriz de rigidez del elemento se utilizará el “Principio de trabajos virtuales”.

Para ello, se impone un desplazamiento virtual y calculamos la energía de deformación:

$$\int [\delta \varepsilon]^T [\sigma] dV = \int [\delta u]^T [F] dV + \int [\delta u]^T [\phi] dS \quad (2.4)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} [\delta u] &= [\delta u \ \delta v \ \delta w]^T \text{ desplazamiento virtual} \\ [\delta \varepsilon] &\text{ vector deformación} \\ [F] &\text{ fuerzas de volumen} \\ [\phi] &\text{ fuerzas de superficie} \end{aligned}$$

Para el caso de calcular el desplazamiento fuera de los nodos, necesitamos una función de forma (2.3):

$$[u] = [N][d]$$

Para el vector deformación:

$$[\delta \varepsilon] = [\partial][u] = [\partial][N][d] = [B][d]$$

Denominamos $[B] = [\partial][N]$ a la matriz deformación – desplazamiento

Si lo sustituimos en la ecuación (2.4) y utilizamos la relación tensión – deformación (2.1):

$$\begin{aligned} [\delta d]^T \left(\int [B]^T [E][B] dV [d] - \int [B]^T [E][\varepsilon_0] dV + \int [B]^T [\sigma_0] dV [d] - \int [N]^T [F] dV \right. \\ \left. - \int [N]^T [\phi] dS \right) = 0 \quad (2.5) \end{aligned}$$

La ecuación (2.5) nos permite calcular la matriz de rigidez para cada elemento. En el caso de tener una malla debemos ensamblar cada elemento obteniendo un sistema de la forma:

$$[K][D] = [R] \quad (2.6)$$

Todos los desplazamientos y condiciones estas definidos bajo el sistema global de la estructura. El ensamblaje de la matriz de rigidez está comentado en apartado dedicado al elemento viga.

2.3 TIPOS DE ELEMENTOS

2.3.1 BAR: ELEMENTO BARRA

Formulación:

Se trata del caso más simple, solo disponemos de cargas y desplazamientos nodales en la dirección de la barra:

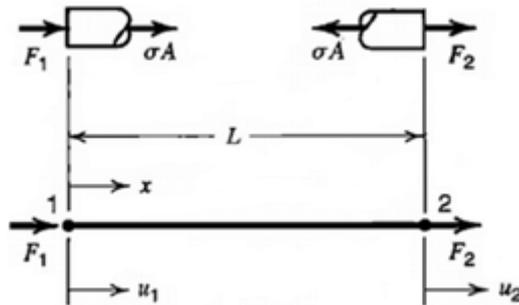


FIGURA 2.3: ELEMENTO BARRA

Aplicamos la condición de equilibrio en las secciones inicial y final:

$$F_1 + A\sigma = 0$$

$$F_2 - A\sigma = 0$$

En la zona elástica lineal se cumple:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Por definición, la deformación unitaria se expresa como:

$$\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

Sustituyendo, podemos relacionar las cargas con los desplazamientos:

$$F_1 = \frac{AE}{L} (u_1 - u_2)$$

$$F_2 = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1)$$

Si lo expresamos en forma matricial obtenemos un sistema con la configuración utilizada en el método directo de rigidez (MDR):

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ donde } k = \frac{AE}{L}$$

Como podemos observar, la barra elástica se comporta como un resorte de constante elástica: $k = \frac{AE}{L}$

Ensamblaje de elementos barra

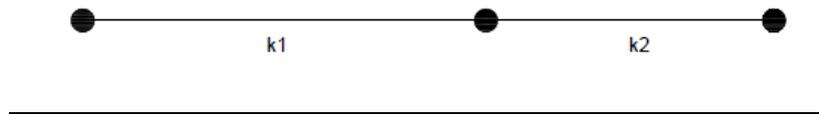


FIGURA 2.4: ENSAMBLAJE DE DOS ELEMENTOS BARRA

Cada barra cumple la condición de equilibrio, y por lo tanto la estructura completa también.

Obtenemos cada columna de la matriz de rigidez utilizando la condición de equilibrio en cada caso.

Expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Si descomponemos la matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que la matriz de la estructura se obtiene fácilmente sumando directamente las matrices de rigidez de cada elemento – siempre que las cargas y desplazamientos estén expresados en el mismo sistema de referencia (global) -.

Por convenio el MDR se suele escribir de la siguiente forma:

$$- [r] = [k] [d]$$

Siendo:

- $[r]$: Las cargas aplicadas por el elemento a la estructura.

$[k]$: Matriz de rigidez del elemento.

$[d]$: Vector de desplazamientos nodales.

Conclusiones

Conociendo la formulación del elemento podemos extraer que su uso solo será recomendable en aquellos elementos sometidos solamente a esfuerzos axiales.

En el caso de que la sección varíe a lo largo de la barra, se deberá dividir en tantos tramos como sea considerado para obtener una solución cercana a la real.

El desplazamiento axial será muy similar al real, pero las tensiones equivalen al de cada tramo de sección constante.

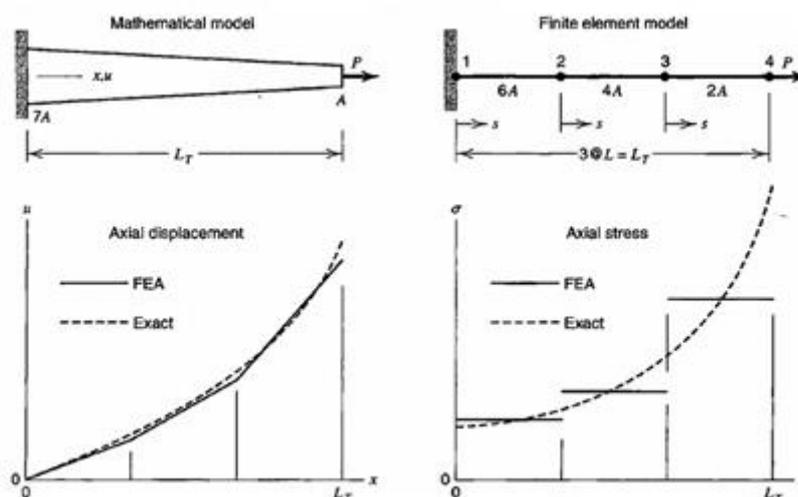


FIGURA 2.5: COMPARACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO Y UTILIZANDO ELEMENTOS BARRA

La principal característica de este elemento es la sencillez de su formulación, lo que resulta de muy baja carga computacional.

2.3.2 BEAM: ELEMENTO VIGA

Deformación plana (6 g.d.l):

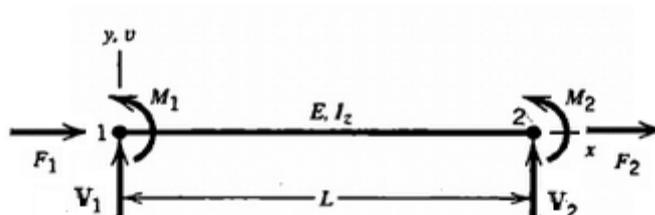


FIGURA 2.6: ELEMENTO VIGA (BEAM) [6 G.D.L.]

Utilizando la siguiente matriz de rigidez podemos calcular los desplazamientos y giros nodales para cualquier viga trabajando a flexión o carga axial.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz está basada en la teoría de vigas de Timoshenko, y se puede obtener de forma sencilla por ejemplo utilizando el “principio de trabajos virtuales”.

Para el cálculo de estructuras, el proceso a seguir es el ensamblaje de las matrices de rigidez y la aplicación de las condiciones de contorno en los nodos.

Si las vigas están definidas por distintos sistemas de referencia, se utiliza un **sistema global** de coordenadas.

Se trata de una forma sencilla de calcular todos los desplazamientos nodales del elemento, pero posee algunas restricciones comentadas más adelante.

Matriz de transformación:

Para convertir las coordenadas de un sistema local en el global y viceversa, se utiliza una matriz de transformación de la forma:

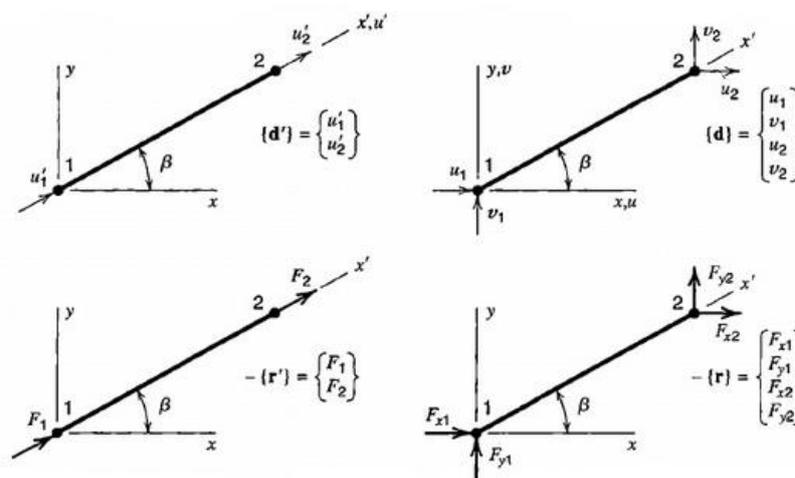


FIGURA 2.7: TRANSFORMACIÓN ENTRE COORDENADAS LOCALES - GLOBALES

Desplazamientos:

$$[d'] = [T] [d] \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \text{sen } \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \text{sen } \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Cargas nodales:

$$[r'] = [T]^T [r] \quad (2.8)$$

Siendo $[T]^T$ la matriz traspuesta a la calculada para los desplazamientos

Matriz de rigidez:

$$[k] = [T]^T [k'] [T] \quad (2.9)$$

Ensamblaje y aplicación de condiciones de contorno:

Cualquier estructura debe cumplir la condición de equilibrio estático, y por tanto es utilizada para la obtención de la matriz de rigidez de la estructura completa. – de la misma forma que para barras -

$$[R] = [K] [D]$$

[K]: *Matriz de rigidez ensamblada:*

Al cumplirse la condición de equilibrio estático se obtiene de la misma forma que para los elementos barra.

Es importante tener en cuenta que al ensamblar la matriz pueden aparecer **singularidades** y provocar un fallo en el método:

- Matriz de rigidez [K] singular: Para este caso no existe solución única del vector desplazamientos [D].
- Esto puede suceder el vector representa un gran desplazamiento. – La teoría utilizada para la formulación de este elemento solo es válida para pequeños desplazamientos
- Si algún nodo se comporta como sólido rígido.
- O condiciones de contorno inadecuadas (Estructura => Mecanismo).

[D]: *Desplazamientos nodales:*

Los desplazamientos y giros prefijados, se deberán aplicar directamente en los nodos.

[R]: *Cargas nodales:*

Estas cargas provienen:

- $[r] = -[k] [d]$: Debidas a la deformación del elemento
- $[r_e]$: Cargas nodales cuando sus grados de libertad son nulos (Cargas térmicas o peso propio)
- $[P]$: Cargas externas aplicadas directamente en los nodos. En el caso de ser cargas distribuidas se deberá buscar un modelo equivalente para poderlas aplicarlas directamente en los nodos.

Se debe cumplir el equilibrio estático:

$$\sum [r] + \sum [r_e] + [P] = [0] \quad (2.10)$$

$$\sum [r] = -\sum [k] [d] = -[K][D] \quad (2.11)$$

$$\sum [r_e] + [P] = [R] \quad (2.12)$$

Si sustituimos (2.10) en (2.11) y definimos la (2.12) obtenemos el MDR para la estructura completa:

$$[K][D] = [R]$$

Deformación tridimensional (12 g.d.l.)

En el caso de una viga tridimensional, su cálculo es extrapolable de la viga 2D, por lo tanto me limitaré a comentar algunos puntos.

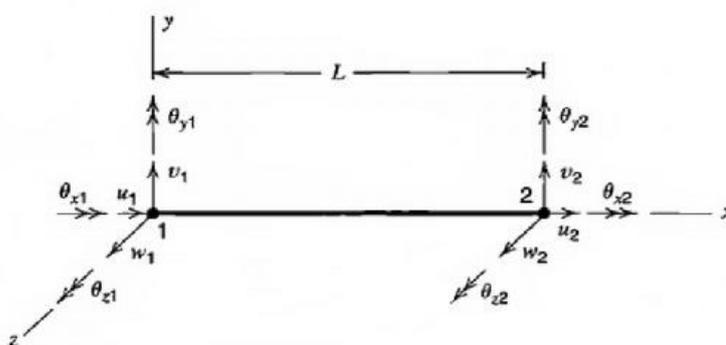


FIGURA 2.8: ELEMENTO VIGA (BEAM) [12 G.D.L.]

Cada nodo posee 3 desplazamientos y 3 giros, y por tanto se pueden representar 2 esfuerzos cortantes, 2 momentos flectores, 1 esfuerzo axial y el esfuerzo torsor en la barra.

Dicho esto, utilizando este elemento podemos modelar vigas sometidas a esfuerzo torsor. La aplicación de condiciones de contorno se realiza de la misma forma que para vigas con 6 g.d.l.

2.3.3 ELEMENTOS PLANOS:

Son utilizados en los casos en los que el campo de desplazamientos solo varía en dos direcciones. En esta parte solo comentaremos singularidades de cuatro elementos (Triángulo CST,LST y rectángulo CST,LST) y dar algún ejemplo de la importancia de la buena elección del elemento.

Triángulo lineal (CST)

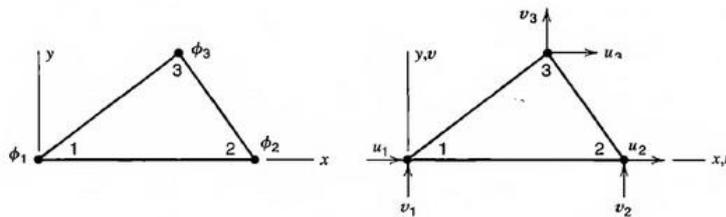


FIGURA 2.9: ELEMENTO TRIANGULAR (CST)

Se caracteriza por tener 3 nodos (6 g.d.l.) y obtener un campo de deformaciones constante debido a su formulación.

Para cada nodo:

$$u = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad v = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ 0 & 0 \\ \delta & \delta \\ \delta y & \delta x \end{bmatrix} [u] = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_6 \\ a_3 + a_5 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Constante}$$

Resultados

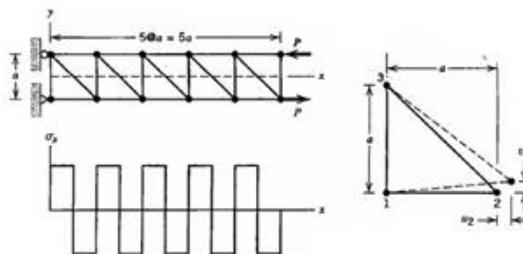


FIGURA 2.10: REPRESENTACIÓN DE LA TENSIÓN σ_x

Al obtener un campo de deformaciones constante, en una viga a flexión, es incapaz de representar la variación lineal de la tensión σ_x . (Figura 2.10)

Por lo tanto para vigas de este tipo no es aconsejable este elemento, y para ello existe otro elemento triangular que si tiene en cuenta la variación lineal de la tensión a lo largo del elemento (LST)

Triángulo cuadrático (LST)

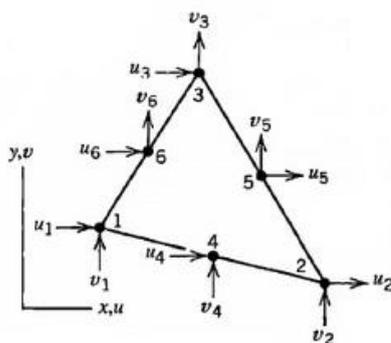


FIGURA 2.11: ELEMENTO TRIANGULAR (LST)

Dispone de 6 nodos (12 g.d.l.) y una interpolación entre nodos que permite la variación lineal del campo deformación.

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$

$$v = a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}x^2 + a_{11}xy + a_{12}y^2$$

Y mediante la relación deformación-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ 0 & 0 \\ \delta & \delta \\ \delta y & \delta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_x = a_2 + 2a_4x + a_5y$$

$$\varepsilon_y = a_9 + a_{11}x + 2a_{12}y$$

$$\gamma_{xy} = (a_3 + a_8) + (a_5 + 2a_{10})x + (2a_6 + a_{11})y$$

Puede deformarse según curvas cuadráticas y modelar estados de flexión pura perfectamente.

Normalmente, a pesar de poder usar menos elementos LST dan mejores resultados que los elementos CST.

Rectángulo Q4

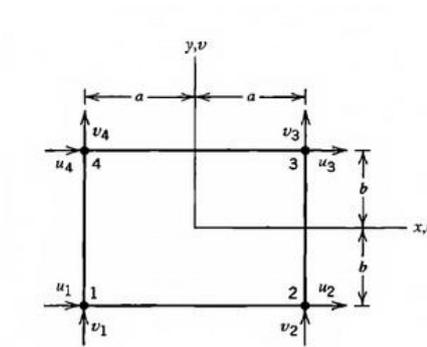


FIGURA 2.12: ELEMENTO RECTANGULAR Q4

Elemento plano caracterizado por tener 4 nodos (8.g.d.).

Su formulación es:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$

$$v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

La variación de la deformación entre nodos utilizando la ecuación (2.13):

$$\varepsilon_x = a_2 + a_4y$$

$$\varepsilon_y = a_7 + a_8x$$

$$\gamma_{xy} = (a_3 + a_6) + a_4x + a_8y$$

No da buenos resultados en problemas de flexión, como podemos observar con ε_x , si calculamos la tensión σ_x , esta es independiente de x , lo que provoca un error considerable. Para problemas de este tipo es mejor utilizar elementos con más grados de libertad, como el rectángulo Q8.

Rectángulo Q8

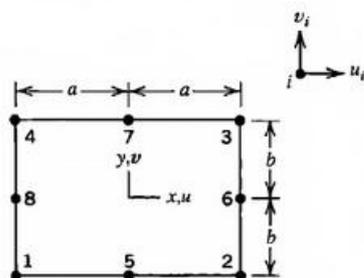


FIGURA 2.13: ELEMENTO RECTANGULAR Q8

Se trata de un elemento con 8 nodos (16 g.d.l.).

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2$$

$$v = a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}x^2 + a_{13}xy + a_{14}y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}xy^2$$

Si calculamos las deformaciones:

$$\varepsilon_x = a_2 + 2a_4x + a_5y + 2a_7xy + a_8y^2$$

$$\varepsilon_y = a_{11} + a_{13}x + 2a_{14}y + a_{15}x^2 + 2a_{16}xy$$

$$\gamma_{xy} = (a_3 + a_{10}) + (a_5 + 2a_{12})x + (2a_6 + a_{13})y + a_7x^2 + (2a_8 + 2a_{15})xy + a_{16}y^2$$

Al poder modelar problemas de flexión pura, es más recomendable en estos casos.

Comparación de elementos

Problema de viga en voladizo:

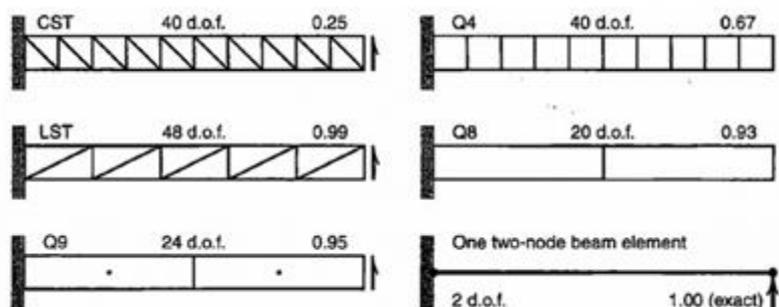


FIGURA 2.14: COMPARACIÓN DEL CÁLCULO DE UNA VIGA CON DIFERENTES ELEMENTOS

El valor obtenido es la relación del valor calculado con respecto al real.

- Como era de esperar, para un problema tan sencillo el elemento viga (beam) da el valor exacto.
- Comentado anteriormente, los elementos CST y Q4 no modelan bien vigas a flexión.
- Aunque el LST calcula casi el valor exacto, necesita de más nodos que el Q8.

2.3.4 BRICK: ELEMENTOS TRIDIMENSIONALES

En el caso de tener un campo de deformaciones que varíe en las tres direcciones del espacio, necesitamos una extensión de los elementos planos comentados anteriormente. Si nos basamos en los elementos rectangulares planos para la construcción de un elemento tridimensional, obtenemos los conocidos como “brick”.

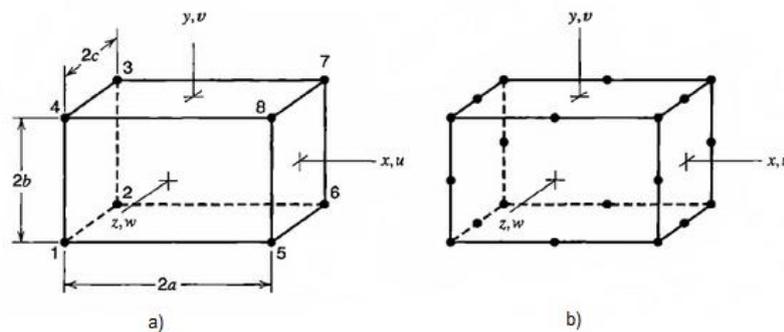


FIGURA 2.15: ELEMENTOS BRICKS - A) BRICK 8 NODOS , B) BRICK 20 NODOS

Por analogía a los elementos rectangulares visto anteriormente, comentaremos los bricks de 8 y 20 nodos.

El elemento brick de 8 nodos se comporta de una forma parecida al Q4, y el de 20 nodos al Q8. Dependiendo del problema, o de la capacidad de cálculo será recomendable uno de ellos.

Estos elementos permiten modelar problemas de flexión y torsión, pero es más recomendable el Q8.

En caso de que una de las dimensiones sea pequeña con respecto a las otras dos, es recomendable utilizar el elemento “**Shell**”.

Este elemento permite modelar de una forma más precisa por ejemplo, chapas, debido a que las tensiones generan fuerzas tipo membrana con la dirección de la tangente de la superficie del elemento además de momentos flectores y torsores.

2.3.5 MODELADO DE UN SISTEMA



Al realizar un modelo de un sistema real, se idealiza la geometría, condiciones de contorno, cargas... y esta depende directamente de la experiencia y conocimiento del analista, por lo tanto se produce un **error de modelado** (1) en esta etapa.

Se debe crear una malla de elementos finitos para su resolución, provocando la aparición de un **error de discretización** (2). Este dependerá directamente del tipo de elemento, y el número de estos.

El método matemático utilizado como base en el MEF, es un método numérico que solo resuelve las variables en los nodos e interpola en el resto. Al utilizar este método y no la resolución directa de las ecuaciones diferenciales, aparece un **error numérico** (3) a tener en cuenta.

Se suele representar las tensiones con el criterio de Von Mises debido a que el valor obtenido es independiente del sistema de coordenadas, además de predecir el comienzo de deformación plástica en materiales dúctiles.

En el caso de los programas informáticos, promedian estos resultados en las zonas próximas a los nodos, creando así un contorno "continuo".

En cambio si el contorno es discontinuo podemos apreciar la calidad de la malla y así refinarla en las zonas donde las discontinuidades sean mayores.

Por lo tanto será recomendable un mayor número de elementos en las zonas con un mayor gradiente de tensiones para obtener la mejor solución posible.

2.3.6 CONCLUSIÓN

Una de las partes más importantes a la hora de realizar simulaciones con este tipo de herramientas es el modelado del sistema, y no solo una correcta elección en las cargas y condiciones de contorno nos proporcionarán buenos resultados. Estos pueden diferir considerablemente dependiendo del elemento elegido y para ello es necesario su conocimiento y de los esfuerzos a los que está sometida la pieza.

En posteriores simulaciones se podrá comprobar esta afirmación dependiendo de la definición de un elemento brick (8 y 20 nodos).

Por lo tanto se debe conocer la formulación teórica y el campo de aplicación de cada elemento, y los esfuerzos teóricos a los que está sometida la pieza para saber su compatibilidad.

En cuanto a la realización del mallado es aconsejable conocer teóricamente las posibles zonas más críticas y así poder refinarla en esas zonas para poder mostrar de una forma más precisa la variable de campo representada.

Antes de dar los resultados por buenos, siempre hay que validarlos mediante un modelo teórico.

Comentado esto, es imprescindible tener en cuenta todos estos aspectos a la hora de realizar simulaciones y resaltar que solo la experiencia y el conocimiento del analista proporcionarán resultados aceptables.

3

Cálculo de resortes

El resorte es un elemento muy utilizado en el diseño de máquinas. Debido a su gran utilidad se ha realizado a lo largo de los años un meticuloso estudio para dar al resorte las capacidades requeridas por el diseñador.

Estos son utilizados en casos de: necesidad de absorber energía (choques, vibraciones...), como fuente de energía -relojes – o para mantener el contacto entre dos piezas –levas- entre otros.

Les hay de diferentes tipos: helicoidales, planos o de formas especiales; de sección cuadrada, circular, rectangular...

En este capítulo estudiaremos el comportamiento del método de los elementos finitos para el cálculo de resortes, comprobando si se cumplen las ecuaciones que rigen el cálculo clásico.

Para nuestro estudio nos centramos en un resorte con un ciclo de trabajo muy bajo donde el fallo por fatiga del material no llega a suceder. Realizamos esta simplificación porque el interés del trabajo es la comparación del método clásico con el método de elementos finitos, y este fenómeno es muy difícil de simular mediante este tipo de herramientas.

3.1 RESORTES HELICOIDALES: COMPRESIÓN

3.1.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Los resortes helicoidales se fabrican enrollando un hilo de una determinada sección en forma de hélice, y deben sus características mecánicas a su configuración:

Los de sección circular consiguen una menor tensión máxima con respecto a las otras. Pueden ser de paso uniforme (Teóricamente relación lineal fuerza-deformación) o de paso variable.

Pueden ser enrollados a izquierdas o derecha, cónicos, cilíndricos o planos (ondulados), y para un mejor apoyo se suele reducir el paso en los extremos y si es necesario rectificarlos.

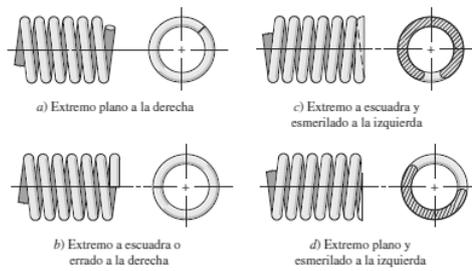


FIGURA 3.1: TIPOS DE EXTREMOS PARA RESORTES DE COMPRESIÓN

En nuestro caso, utilizaremos un resorte de compresión de sección circular, cilíndrica y con paso uniforme,

Los principales parámetros que definen un resorte de compresión son:

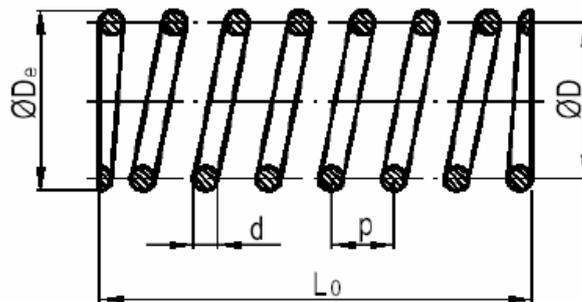


FIGURA 3.2: CONFIGURACIÓN DE UN RESORTE DE COMPRESIÓN

- d – Diámetro del alambre: Suele ser el resultado más importante en el cálculo de resortes. Se suele fabricar para una gama de diámetros estándar.
- D – Diámetro medio: Está definido por la diferencia entre el diámetro exterior y el del alambre.
- P – Paso: Distancia paralela al eje del resorte entre el centro de una espira y el centro de la contigua.
- Lo – Longitud libre: Longitud entre extremos para el estado sin carga.

En el caso del número de espiras, se distingue entre el número de espiras totales (N_t), y el de espiras activas (N_a).

Existen otros parámetros importantes relacionados con los anteriores:

- Índice del resorte – C: Relación entre el diámetro medio y el diámetro del alambre. Existe un rango de valores óptimos dependiendo del autor. Hace referencia a la curvatura de las espiras.

$$C = \frac{D}{d}$$

- Constante elástica del resorte – k: Define la relación entre la fuerza aplicada y la deflexión del resorte. En el caso de paso uniforme se considera lineal, pero en la realidad, para resortes de compresión, esta deja de serlo al disminuir el número de espiras activas (contacto entre ellas).

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta \delta}$$

3.1.2 TEORÍA CLÁSICA

Inicialmente definimos un resorte helicoidal de compresión fabricado mediante alambre circular y sometido a una fuerza axial de valor “F”.

Se elige una sección del resorte y se dibuja el efecto del resto del resorte en dicha sección.

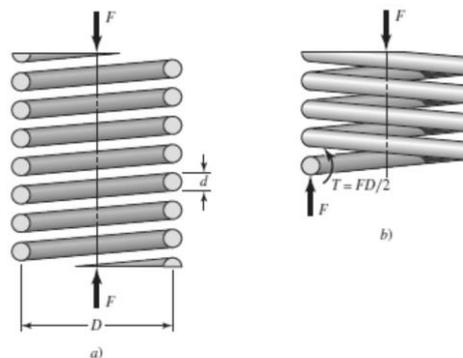


FIGURA 3.3: CÁLCULO DE RESORTES DE COMPRESIÓN

Cálculo de tensiones

La distribución de esfuerzos está definida por el esfuerzo cortante directo y el esfuerzo cortante torsional. Por lo tanto el valor será el obtenido por la superposición de ambos.

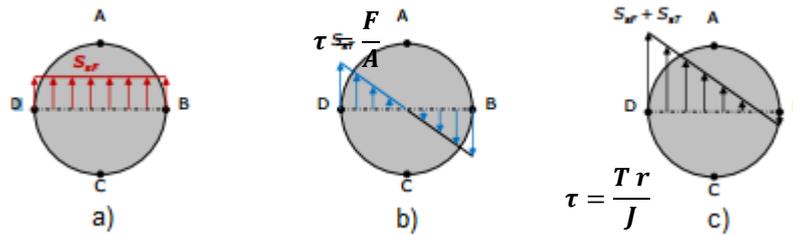


FIGURA 3.4: DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN LA SECCIÓN DEL ALAMBRE
 A) PRODUCIDAS POR LA FUERZA F; B) PRODUCIDAS POR EL PAR DE TORSIÓN T; C) DISTRIBUCIÓN TOTAL DE ESFUERZOS CORTANTES

$$\tau = \frac{T r}{J} + \frac{F}{A} \quad (3.1)$$

La tensión para cualquier punto de la sección será:

- Par de torsión: $T = \frac{F D}{2}$
- Momento polar (sección circular): $J = \frac{\pi d^4}{32}$
- Área: $A = \frac{\pi d^2}{4}$

$$\tau = \frac{16 F D r}{\pi d^4} + \frac{4 F}{\pi d^2} \quad (3.2)$$

Y en especial, la **tensión máxima** se encuentra en la zona interior del resorte:

- Posición fibra interna: $r = \frac{d}{2}$

$$\tau_{max} = \frac{8 F D}{\pi d^3} + \frac{4 F}{\pi d^2}$$

Definimos el índice del resorte:

$$C = \frac{D}{d}$$

Este valor suele permanecer dentro del intervalo: $4 \leq C \leq 12$.

Si aplicamos este parámetro a la ecuación (3.1) y la reordenamos:

$$\tau_{max} = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (3.3)$$

K_s se conoce como "factor de corrección del esfuerzo cortante":

$$K_s = \frac{2C + 1}{2C} \quad (3.4)$$

La ecuación (3.2) se basa en un resorte que permanece siempre recto, pero en el caso de que exista una curvatura hay que modificar el factor de corrección del resorte. Este factor tiene en cuenta el aumento de las tensiones en el interior de resorte y la pequeña disminución en el exterior.

Para ello utilizamos cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$K_w = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0.615}{C} \quad \text{Factor de Wahl}$$

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} \quad \text{Factor de Bergsträsser}$$

Como solo difieren en un 1% se suele utilizar la más simple de las dos.

Definimos el "factor de corrección por curvatura" como:

$$K_C = \frac{K_B}{K_s} = \frac{2C(4C + 2)}{(4C - 3)(2C + 1)}$$

Por lo tanto, para calcular la tensión máxima utilizaremos el criterio de Bergsträsser:

$$\tau_{max} = K_B \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (3.5)$$

Se dispone de una gran variedad de materiales para su fabricación, tanto materiales ferrosos (aceros al carbono, de aleación resistentes a la corrosión) como no ferrosos (bronce, latón...).

Para comprobar la validez del material necesitaremos el valor de la resistencia a la fluencia torsional, podemos estimarlo en relación con el valor de S_{ut} que obtenemos en los ensayos de tracción. Generalmente la resistencia de fluencia (S_y) suele estar comprendido entre un 60% y un 90% del valor de la resistencia a la tensión S_{ut} .

Si utilizamos la teórica de la energía de distorsión podemos determinar el valor de la resistencia de fluencia a la torsión ($S_{ys} = 0.577S_y$).

Dependiendo del autor, el esfuerzo máximo admisible se estima de diferente forma.

En nuestro caso, utilizando la teoría de la energía de distorsión, la estimamos basándonos en la correlación entre la resistencia de fluencia (S_y) y la de rotura (S_{ut}).

En el caso de aceros utilizados para la fabricación de alambres:

$$\text{La correlación aproximada: } S_y = 0.75S_{ut}$$

Y por lo tanto podemos estimar la resistencia a la fluencia torsional como:

$$S_{ys} = 0.577S_y \rightarrow S_{ys} = 0.577(0.75S_{ut}) = 0.433S_{ut} \approx 0.45S_{ut}$$

Deflexión

Para calcular la deflexión del resorte utilizaremos la energía de deformación. En nuestro caso la relación entre la fuerza y la deflexión es lineal, siendo la energía de deformación el producto de la fuerza promedio y la deflexión:

$$U = \frac{1}{2}Fy = \frac{F^2}{2k} \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) es general, pero puede aplicarse también para momentos si adaptamos el valor de k. En nuestro caso, el resorte está sometido a un esfuerzo cortante directo y a un esfuerzo torsor.

$$U = \frac{T^2l}{2GJ} + \frac{F^2l}{2AG} \quad (\text{Energía de deformación torsor} + \text{cortante directo})$$

Para nuestro resorte helicoidal: ($r = \frac{d}{2}$, $T = \frac{FD}{2}$, $J = \frac{\pi d^4}{32}$, $A = \frac{\pi d^2}{4}$)

$$U = \frac{4F^2D^3N_a}{d^4G} + \frac{2F^2DN_a}{d^2G}$$

Para relacionar la deflexión y la energía de deformación utilizamos el *teorema de Castigliano*:

- Cuando actúan fuerzas sobre sistemas elásticos sujetos a desplazamientos pequeños:

El desplazamiento es igual a la derivada parcial de la energía de deformación total con respecto a la fuerza colineal a dicho desplazamiento.

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

Aplicando el teorema:

$$y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{8FD^3N_a}{d^4G} + \frac{4FD^3N_a}{d^2G}$$

Reordenamos la ecuación utilizando el índice del resorte:

$$y = \frac{8FD^3N_a}{d^4G} \left(1 + \frac{1}{2C^2}\right) \approx \frac{8FD^3N_a}{d^4G} \quad (3.7)$$

Sabiendo que la constante del resorte se define como $k=F/y$:

$$k = \frac{d^4G}{8D^3N_a} \quad (3.8)$$

3.1.3 MODELO TEÓRICO: RESOLUCIÓN

El cálculo está centrado en la obtención de la tensión máxima teórica a la que está sometido el resorte y en la deflexión teórica.

El resorte tiene las siguientes características geométricas:

Características geométricas: Resorte A		
Diámetro exterior (D_e)		50 mm
Sección alambre	Diámetro (d)	5 mm
	Tipo	Circular
Número de vueltas (N_t)		12
Extremos		Plano y esmerilado

TABLA 3-1: CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS RESORTE A

Y para el modelo teórico se ha establecido las siguientes condiciones de contorno:

Cargas y condiciones de contorno: Resorte A – Modelo Teórico (Figura 3.3)	
Extremo Inferior	Empotramiento
Extremo superior	Libre
Cargas	Fuerza puntual: ($F_{m\acute{a}x} = 50\text{ N}$)

TABLA 3-2: CARGAS Y CONDICIONES DE CONTORNO - RESORTE A

Para calcular la tensión máxima que se encuentra en el punto de la sección circular más cercano al eje del resorte utilizamos la ecuación (3.5):

$$\tau_{max} = K_B \frac{8FD}{\pi d^3}$$

Conocemos las características geométricas del resorte y la fuerza máxima a la que está sometido. Y para la constante de Bergsträsser solo necesitamos conocer el índice del resorte.

$$C = \frac{D}{d} = \frac{45}{5} = 9$$

Siendo el diámetro medio: $D = 50 - 5 = 45\text{ mm}$

$$\text{Factor de Bergsträsser: } K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4 * 9 + 2}{4 * 9 - 3} = 1.1515$$

$$\tau_{max} = K_B \frac{8FD}{\pi d^3} = 1.1515 \frac{8 * 50 * 45}{\pi 5^3} = 52.78\text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{max} = 52.78\text{ MPa}$$

Como el objetivo final es compararlo con los resultados obtenidos mediante el MEF, elijo un material de los que dispone la librería de Autodesk y lo más parecido al acero ASTM A228 utilizado normalmente:

Acero	E (N/mm ²)	G (N/mm ²)	S _{ut} (N/mm ²)
ASTM A242	199947.96	77499.20	480

TABLA 3-3: PROPIEDADES ASTM A242

Al disponer solo de los datos obtenidos mediante el ensayo a tracción de este material, utilizo unos coeficientes de correlación para aproximar el valor de la resistencia de fluencia torsional:

$$S_{ys} = 0.577S_y \rightarrow S_{ys} = 0.577(0.75S_{ut}) = 0.433S_{ut} \approx 0.45S_{ut}$$

$$S_{ys} = 0.45 * 480 = 216 \text{ MPa}$$

$$S_{ys} = 216 \text{ MPa} > \tau_{max} = 52.78 \text{ MPa} \quad OK$$

Para el cálculo de la deflexión total necesitamos conocer el índice del resorte (ec. 3.8) y para ello primero se ha de calcular el número de espiras activas (Figura 3.6)

Término	Plano	Plano y esmerilado	A escuadra y cerrado	A escuadra y esmerilado
Espiras de extremo, N _e	0	1	2	2
Espiras totales, N _t	N _a	N _a + 1	N _a + 2	N _a + 2
Longitud libre, l ₀	pN _a + d	p(N _a + 1)	pN _a + 3d	pN _a + 2d
Longitud sólida, L _s	d(N _t + 1)	dN _t	d(N _t + 1)	dN _t
Paso, p	(l ₀ - d)/N _a	l ₀ /(N _a + 1)	(l ₀ - 3d)/N _a	(l ₀ - 2d)/N _a

FIGURA 3.5: CARACTERÍSTICAS DEL RESORTE SEGÚN LOS EXTREMOS

Plano y esmerilado:

$$N_a = N_t - 1 = 11 \text{ vueltas}$$

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} = \frac{5^4 77.5(10^3)}{8 * 45^3 11} = 6.04 \text{ N/mm}$$

$$k = 6.04 \text{ N/mm}$$

$$y = \frac{F}{k} = \frac{50}{6.04} = 8.27 \text{ mm}$$

$$y = 8.27 \text{ mm}$$

Utilizando la (Figura 3.6) también podemos obtener otros parámetros característicos del resorte:

$$L_s = (N_t)d = (12) 5 = 60 \text{ mm}$$

Para que no haya problemas la longitud libre mínima debe ser de:

$$L_0 = y + L_s = 8.27 + 60 = 68.27 \text{ mm}$$

$$p = \frac{L_0}{N_a + 1} = \frac{68.27}{12} = 5.69 \text{ mm}$$

Se define un paso superior a $p = 5.69 \text{ mm}$:

$$P = 9.66 \text{ mm}$$

Resultados: Resorte A – Modelo Teórico (Figura 3.3)		
Tensión máxima: ($\tau_{m\acute{a}x}$)	52.78 MPa	OK
Material	ASTM A242	
Constante del resorte: (k)	6.04 N/mm	
Deflexión: (y)	8.27 mm	
Paso	9.66 mm	

TABLA 3-4: RESULTADOS RESORTE A

3.1.4 MODELADO Y RESOLUCIÓN: MEF

El objetivo de este apartado es el de verificar mediante simulaciones en “Autodesk Simulation Mechanical” si el cálculo mediante elementos finitos es correcto comparándolo con el teórico, y así dar validez a lo calculado.

MODELADO 3D DEL RESORTE

Definimos las características geométricas del resorte. En nuestro caso para poder compararlo con el modelo teórico utilizaremos el “Resorte A” (Tabla 3-2):

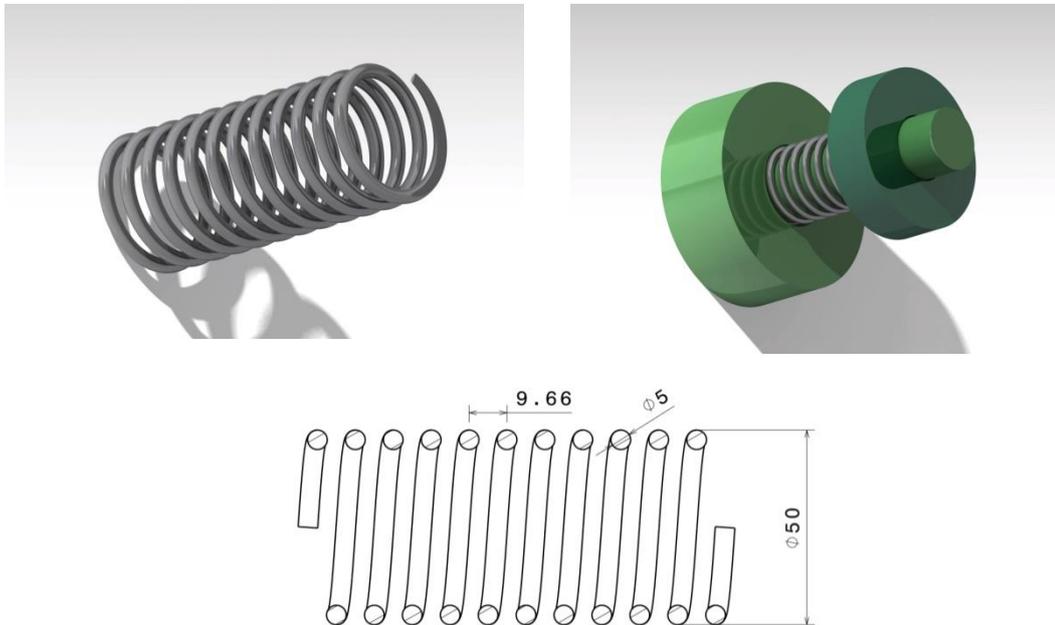


FIGURA 3.6: MODELO 3D - RESORTE A
 IZQ: RESORTE A – DCHA: RESORTE A CON LOS SOPORTES – INF: DIMENSIONES

Resorte A		
Diámetro exterior (D_e)		50 mm
Sección alambre	Diámetro (d)	5 mm
	Tipo	Circular
Número de vueltas (N_t)		12
Extremos		Plano y esmerilado
Eje del resorte		Eje Z
Material		ASTM – A242

Soportes	
Diámetro Interior	39.5 mm
Material	ABS

TABLA 3-5: MODELADO RESORTE A

CONDICIONES DE CONTORNO

Se trata de una parte tremendamente importante en el proceso. Ya que los valores obtenidos dependerán mucho de la elección del analista. Se debe buscar un modelo lo más parecido a la realidad pero teniendo en cuenta que a mayor complejidad, mayor tiempo de cálculo.

Por eso la experiencia y el conocimiento del analista juegan un papel importante en esta fase.

Para nuestro resorte voy a utilizar tres modelos diferentes para poderlos comparar con la solución teórica y así decidir cuál será el utilizado para la exposición de resultados.

Resorte A – Modelo 1

El primer modelo será el más sencillo, se utilizará solo el resorte A y se aplicarán las cargas y condiciones de contorno directamente sobre algunos nodos de este.

Inicialmente se debe mallar el resorte utilizando una serie de elementos que sean compatibles con las condiciones del problema:

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Al tratarse de un modelo 3D necesitamos elementos de este tipo (Brick o Tetrahedron).

También podríamos utilizar el elemento “Spring”, pero no serviría para calcular las tensiones en el resorte.

Por lo tanto utilizaremos el elemento “Brick”, y debemos definir el número de nodos y la interpolación entre estos (Orden de integración).

La distribución de esfuerzos está definida por el esfuerzo cortante directo y el esfuerzo cortante torsional.

En el apartado 2.3.4 donde se trata los elementos bricks, nos comenta que tanto los de 8 nodos como los de 20 permiten el cálculo de esfuerzos de flexión-torsión.

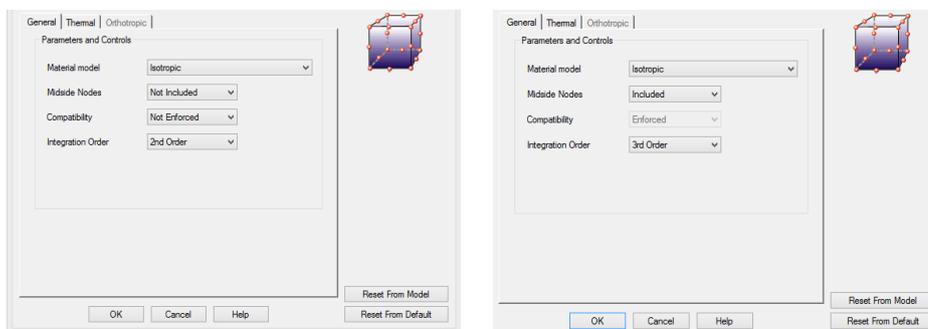


FIGURA 3.7: TIPOS DE BRICKS - MODELO 1
 IZQ: BRICK 8 NODOS – DCHA: BRICK 20 NODOS

Para comprobar cual da mejor resultado, se realizará dos análisis para el modelo 1 con los dos tipos de bricks.

MALLADO:

Una vez elegido el elemento, se realizará una primera iteración con un mallado grueso, y si este no fuera aceptable, se refinará en todo el resorte o solo en las zonas más críticas.

Nota:

No se ha tenido en cuenta el peso del resorte en ninguno de los casos.

RESOLUCIÓN:

Resorte A – Modelo 1	
Extremo Inferior	Fijo
Extremo superior	Desplazamiento y giros en X e Y restringido
Cargas	Fuerza puntual: ($F_{m\acute{a}x} = 50\ N$)
Mallado	Bricks (8 y 20 nodos)
Tamaño del elemento	2 mm

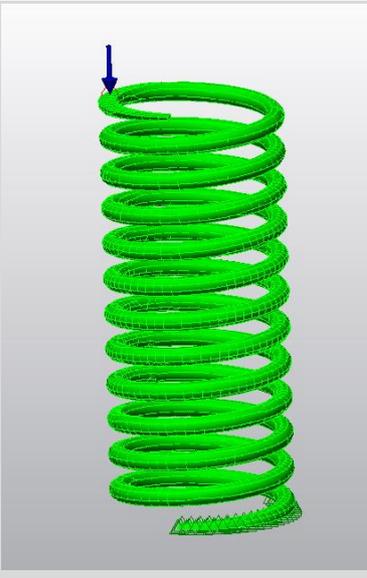


TABLA 3-6: RESORTE A - MODELO 1

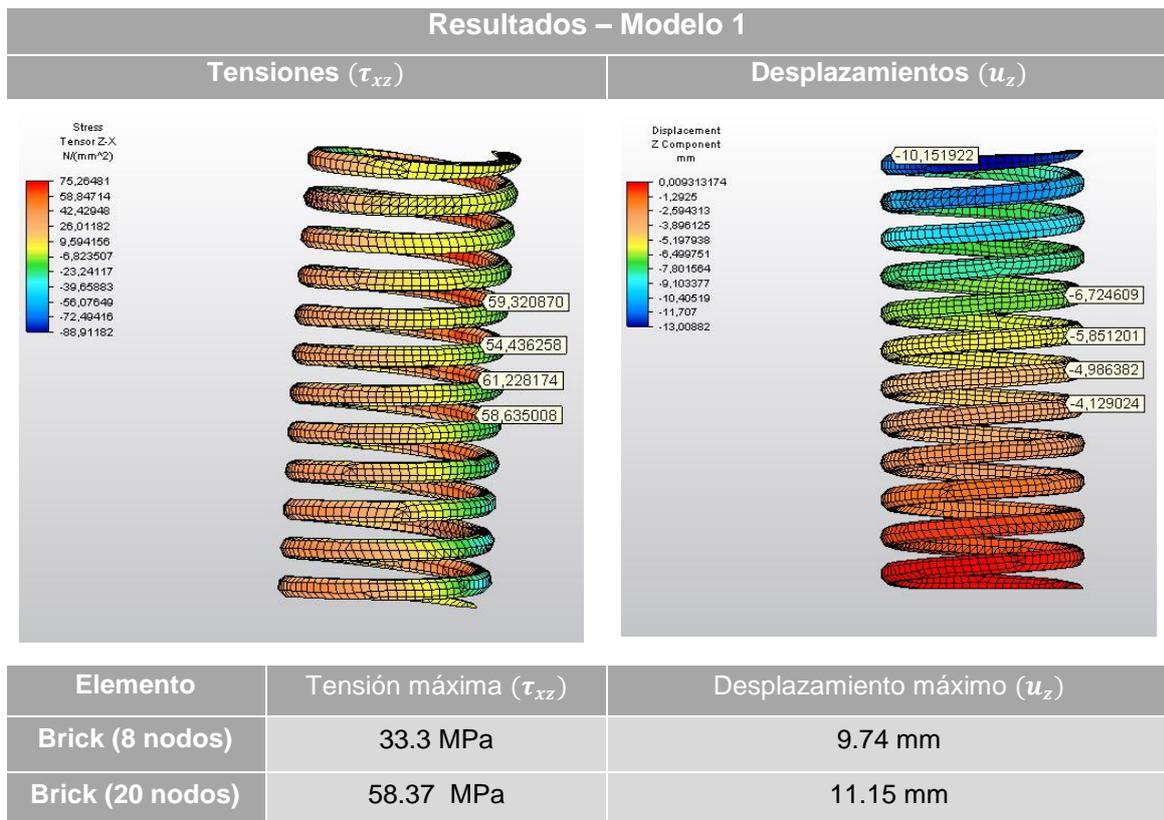


TABLA 3-7: RESULTADOS: RESORTE A - MODELO 1

Resorte A – Modelo 2

En este modelo se modifica la aplicación de la carga, de una forma más real la carga se distribuye a lo largo de toda la superficie esmerilada. Esto supondrá teóricamente una disminución en la tensión máxima.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

A la vista de los resultados del apartado anterior, el brick de 20 nodos da mejores resultados que el de 8 nodos, y por eso solo se mallará con el de 20 nodos.

MALLADO:

El tamaño del elemento de 2 mm ha dado resultados aceptables en tensiones, y por ello no es necesario refinar más la malla.

RESOLUCIÓN:

Resorte A – Modelo 2		
Extremo Inferior	Desplazamiento en Z - Restringido	
Extremo superior	Desplazamiento y giros en X e Y restringido	
Cargas	Fuerza distribuida ($F_{m\acute{a}x} = 50\text{ N}$)	
Mallado	Bricks (20 nodos)	
Tamaño del elemento	2 mm	

TABLA 3-8: RESORTE A - MODELO 2

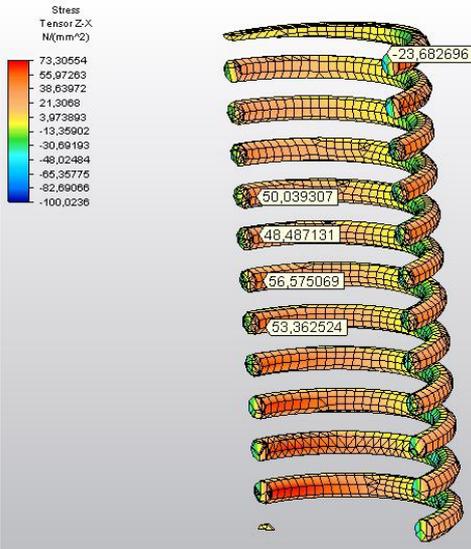
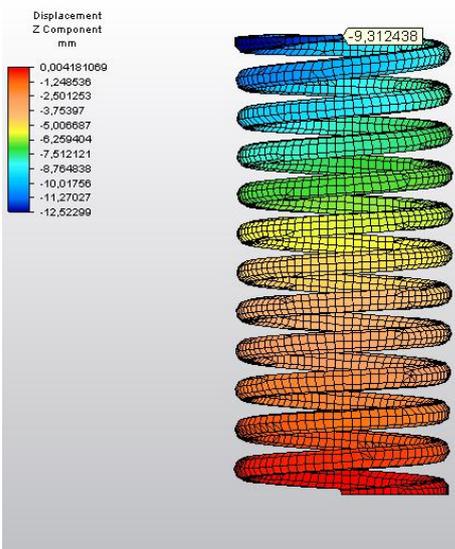
Resultados – Modelo 2		
Tensiones (τ_{xz})	Desplazamientos (u_z)	
		
Elemento	Tensión máxima (τ_{xz})	Desplazamiento máximo (u_z)
Brick (20 nodos)	52.1 MPa	10.9 mm

TABLA 3-9: RESULTADOS: RESORTE A – MODELO 2

Resorte A – Modelo 3

Se trata de un modelo más parecido a la realidad, debido a que ahora se tiene en cuenta la interacción del resorte con los soportes a los que va unido.

Para realizar la simulación de este caso, se debe imponer unas condiciones de contorno de “contacto” entre resorte y soportes (considerando sin fricción). Se aplicará al soporte superior una carga puntual en el centro (no nos interesan las tensiones en este) y en el inferior se restringirán todos los grados de libertad.

No se ha tenido en cuenta el peso de los soportes ni del resorte.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Por el mismo análisis que para el apartado anterior se realizarán los cálculos con los Bricks (20 nodos).

MALLADO:

Para el caso del resorte se dimensionará los bricks de 2 mm.

En el caso de los soportes se realizará un mallado “grosso” para intentar reducir el tiempo de cálculo.

RESOLUCIÓN:

Resorte A – Modelo 3		
Extremo Inferior	Contacto con soporte inferior (Surface)	
Extremo superior	Contacto con soporte superior (Surface)	
Cargas	Fuerza distribuida ($F_{m\acute{a}x} = 50\ N$)	
Mallado	Bricks (20 nodos)	
Tamaño del elemento	2 mm	
Soporte inferior	Base del soporte fijada	

Soporte superior

Permitido solo desplazamiento axial

TABLA 3-10: RESORTE A - MODELO 3

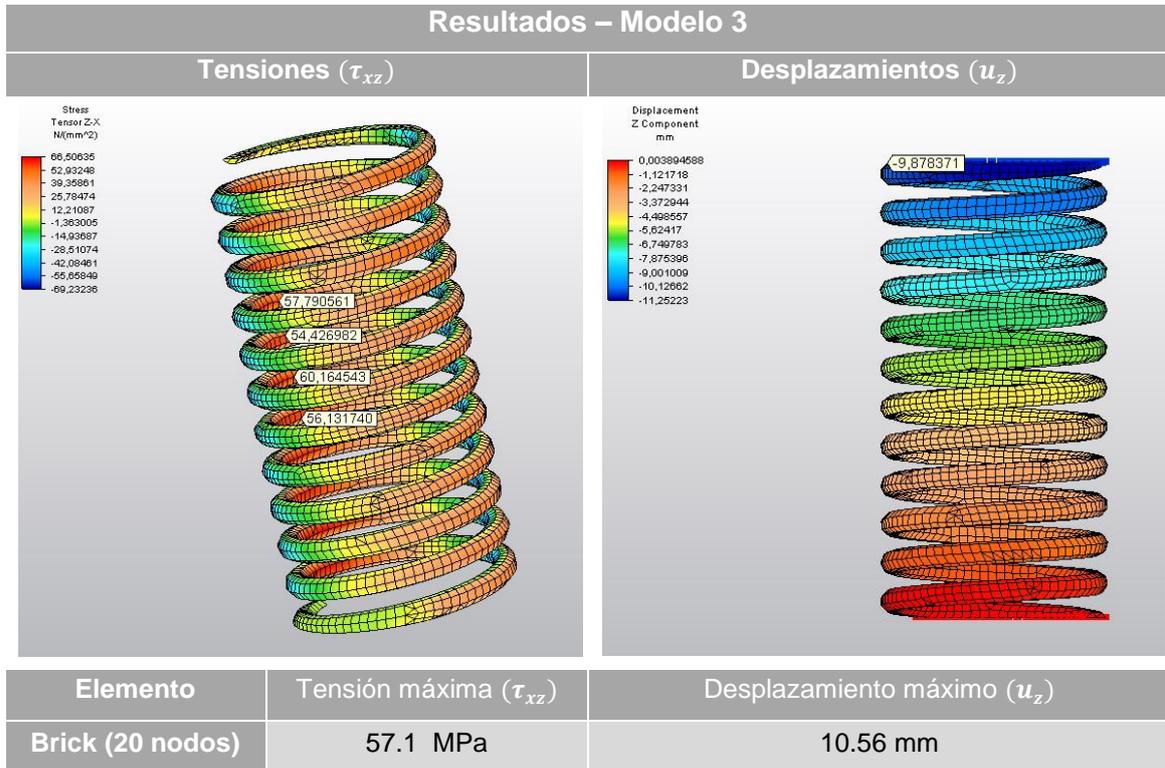


TABLA 3-11: RESULTADOS: RESORTE A - MODELO 3

Resorte A – Modelo 4

Mediante este modelo solo podremos calcular el desplazamiento del extremo libre. Es de esperar que nos dé el mejor resultado en cuanto a desplazamientos.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Utilizamos el elemento “Spring”, con la misma longitud en z que el modelo 3D del resorte y su constante elástica.

RESOLUCIÓN:

Resorte A – Modelo 4	
Extremo inferior	Empotramiento
Extremo superior	Libre
Cargas	Fuerza puntual extremo superior ($F_{m\acute{a}x} = 50\text{ N}$)
Elemento	Spring
Tamaño del elemento	110 mm
Resultado	Desplazamiento máximo: $u = 8.27\text{ mm}$



TABLA 3-12: RESULTADOS: RESORTE A – MODELO 4

3.1.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS Y OBSERVACIONES

Resultados – RESORTE A				
Modelo	Tensión máxima (MPa)	Error	Desplazamiento (mm)	Error
Teórico	52,78	Ref	8,27	Ref
Modelo 1 (Bricks - 8)	33,30	36,91 %	9,74	17,78 %
Modelo 1 (Bricks - 20)	58,37	10,59 %	11,15	34,82 %
Modelo 2 (Bricks - 20)	52,10	1,29 %	10,90	31,80 %
Modelo 3 (Bricks - 20)	57,10	8,18 %	10,56	27,69 %
Modelo 3 (Spring)	-	-	8,27	0,00 %

TABLA 3-13: COMPARACIÓN DE RESULTADOS - RESORTE A

CÁLCULO DE TENSIONES:

- Antes de comentar los resultados, en el modelo teórico la tensión máxima es la misma en todas las espiras activas, pero al calcularlo mediante el MEF me

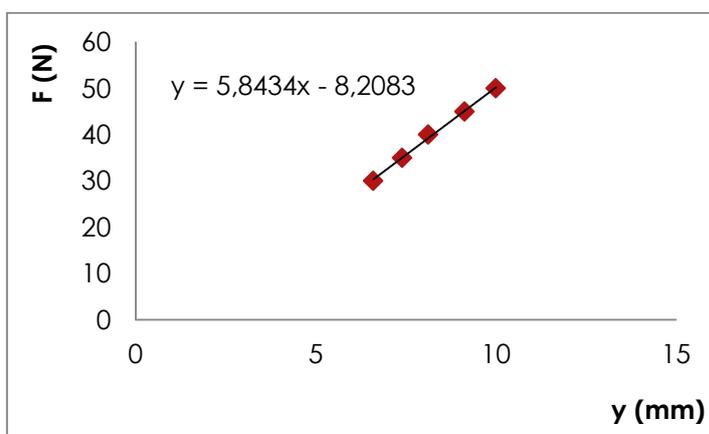
encontraba con una pequeña variación, y por eso utilizo la media entre las 4 espiras intermedias para dar un resultado. También he de comentar que en el teórico la aplicación de la carga es en el centro, lo que se supone imposible en el MEF debido a que hay que aplicarla sobre los nodos. Por ello serán aceptables valores cercanos.

- El elemento brick de 8 nodos no da buenos resultados y por ello es menos recomendable utilizarlo.
- Por lo general al cambiar al brick de 20 nodos da resultados aceptables en el cálculo de la tensión máxima en el interior del resorte.
- Los resultados obtenidos dependiendo de las condiciones de contorno son muy parecidos. En particular se ha utilizado el Modelo 2 para representar la constante elástica por dar resultados más parecido al teórico y ser más simple que el Modelo 3, pero este también es un buen modelo para experimentar.

CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS:

- La obtención de resultados parecidos al teórico en este apartado se preveía complicado. En el modelo teórico utilizado se considera que toda la sección plana (esmerilada) se desplaza de la misma forma sin atender a posibles defectos de **inestabilidad**. Pero una vez calculado en el MEF se podía observar la diferencia existente. Para ello se ha dado un valor medio entre los dos extremos de la zona esmerilada superior.
- Los resultados no son demasiado buenos, excepto el Modelo 4 que como se esperaba se obtiene la solución exacta.

REPRESENTACIÓN DE LA CONSTANTE ELÁSTICA:



Valor teórico	6.04 N/mm
Valor obtenido	5.84 N/mm
Error	3.31 %

FIGURA 3.8: REPRESENTACIÓN DE LA CONSTANTE ELÁSTICA - RESORTE A

3.2 RESORTES HELICOIDALES: EXTENSIÓN

3.2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Los resortes de extensión poseen numerosas semejanzas a los de compresión, siendo el cálculo en la zona interior del resorte el mismo que para estos. Se definen las mismas características geométricas en esta zona que para los de compresión (Figura 3.2)

Pero al soportar cargas de tracción, es necesario un soporte que transmita esa carga. Este puede ser un tapón roscado o un gancho. Les hay de diferentes formas (Figura 3.9)

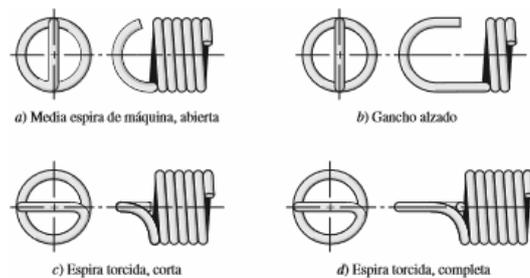


FIGURA 3.9: TIPOS DE GANCHOS

En nuestro caso utilizaremos los extremos definidos de la siguiente forma:

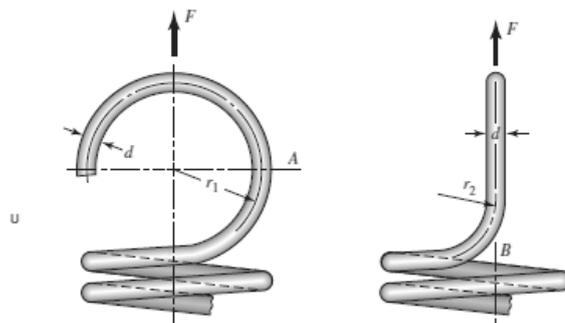


FIGURA 3.10: CARACTERÍSTICAS DEL GANCHO SELECCIONADO

Además el interior de este tipo de resorte está sometido a una tensión inicial.

3.2.2 TEORÍA CLÁSICA

CÁLCULO DE TENSIONES (ZONA INTERIOR)

Como se ha comentado anteriormente, este cálculo se realiza de la misma forma que para los resortes de compresión:

3.1.2 – Teoría clásica (Resortes de compresión) – Cálculo de tensiones.

CÁLCULO DE TENSIONES (EXTREMOS)

Para un resorte de tracción de sección circular y extremos en forma de gancho (Figura 3.6):

El esfuerzo máximo debido a flexión y carga axial en el punto A se calcula como:

$$\sigma_A = F \left[(K)_A \frac{16D}{\pi d^3} + \frac{4}{\pi d^2} \right] \quad (3.11)$$

Siendo $(K)_A$ el factor de corrección del esfuerzo de flexión de la curvatura:

$$(K)_A = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} \quad C_1 = \frac{2r_1}{d}$$

Para el cálculo de la componente torsional utilizamos el punto B (figura 3.10) y se obtiene como:

$$\tau_B = (K)_B \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (3.12)$$

Denominamos a $(K)_B$ como factor de concentración del esfuerzo de la curvatura:

$$(K)_B = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} \quad C_2 = \frac{2r_2}{d}$$

Al fabricarse, para mantener la longitud libre con mayor precisión, se tiende a aplicar una tensión inicial en el enrollamiento.

Por lo tanto la relación carga-deflexión es:

$$F = F_i + ky$$

La longitud libre total se puede calcular como:

$$L_0 = 2(D - d) + (N_b + 1)d = (2C - 1 + N_b)d \quad (3.13)$$

N_b : Número de espiras del cuerpo; D : Diámetro medio del resorte; C : índice del resorte.

Para el cálculo de espiras activas se utiliza:

$$N_a = N_b + \frac{G}{E} \quad (3.14)$$

G : Módulo de cizalladura; E : Módulo elástico.

Deflexión

En el caso de la deflexión, al definirse de la misma forma que para los de compresión, se aplican las mismas ecuaciones:

3.1.2 – Teoría clásica (Resortes de compresión) – Deflexión.

Como comentario final, los ganchos de los resortes son la parte más débil y por tanto debe ser estudiada con atención.

3.2.3 MODELO TEÓRICO: RESOLUCIÓN

El objetivo es obtener una solución teórica para la tensión máxima y la deflexión en el extremo libre para así poder validar las soluciones obtenidas por el cálculo de elementos finitos.

El resorte tiene las siguientes características geométricas:

Características geométricas: Resorte B		
Diámetro exterior (D_e)		12 mm
Sección alambre	Diámetro (d)	1.5 mm
	Tipo	Circular
Extremos	Gancho circular	$r_1 = 5$ mm
		$r_2 = 1.5$ mm
Número de vueltas (N_b)		13

TABLA 3-14: CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS RESORTE B

Y para el modelo teórico se ha establecido las siguientes condiciones de contorno:

Cargas y condiciones de contorno: Resorte B – Modelo Teórico (Figura 3.10)	
Extremo Inferior	Empotramiento
Extremo superior	Libre
Cargas	Fuerza puntual: ($F_{m\acute{a}x} = 15\text{ N}$)

TABLA 3-15: CONDICIONES DE CONTORNO MODELO TEÓRICO RESORTE B

En este caso vamos a utilizar un material con una mayor resistencia de rotura.

Acero	E (N/mm ²)	G (N/mm ²)	S_{ut} (N/mm ²)
ASTM A514	199947.96	77499.20	688

Lo primero es calcular la tensión máxima a la que va a estar sometido el resorte en la parte central para poder comenzar en la elección del material, ya que después debe ser verificado que en los extremos no excede la tensión máxima de la zona elástica de este.

DIÁMETRO MEDIO:

$$D = D_e - d = 12 - 1.5 = 10.5\text{ mm}$$

ÍNDICE DEL RESORTE:

$$C = \frac{D}{d} = \frac{10.5}{1.5} = 7$$

LONGITUD LIBRE:

$$L_0 = 2(D - d) + (N_b + 1)d = (2C - 1 + N_b)d = (2 * 7 - 1 + 13) * 1.5 = 39\text{mm}$$

La tensión máxima en esta zona se calcula mediante la ecuación 3.5, de la misma forma que para los resortes de compresión:

$$\tau_{max} = K_B \frac{8 F_{max} D}{\pi d^3}$$

$$\text{Siendo: } K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(7) + 2}{4(7) - 3} = 1.2$$

Por lo tanto:

$$\tau_{max} = K_B \frac{8 F_{max} D}{\pi d^3} = 1.2 \frac{8 * 15 * 10.5}{\pi * 1.5^3} = 142.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{max} = 142.6 \text{ MPa}$$

$$S_{ys} = 0.577 S_y \rightarrow S_{ys} = 0.577(0.7 S_{ut}) = 0.4039 S_{ut} \approx 0.4 S_{ut}$$

$$S_{ys} = 0.4 * 688 = 275.2 \text{ MPa}$$

$$S_{ys} = 275.2 \text{ MPa} > \tau_{max} = 142.6 \text{ MPa} \quad \text{OK}$$

Para la zona central cumple holgadamente, ahora hay que validarlo para la zona más crítica, los extremos:

El esfuerzo máximo debido a flexión y carga axial en el punto A (ec 3.11) (Figura 3.10):

$$\sigma_A = F_{max} \left[(K)_A \frac{16D}{\pi d^3} + \frac{4}{\pi d^2} \right] = 15 \left[1.125 \frac{16 * 10.5}{\pi (1.5)^3} + \frac{4}{\pi (1.5)^2} \right] = 275.86 \text{ N/mm}^2$$

Siendo $(K)_A$ el factor de corrección del esfuerzo de flexión de la curvatura:

$$(K)_A = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} = \frac{4(6.7)^2 - (6.7) - 1}{4(6.7)(6.7 - 1)} = 1.125$$

$$\text{Donde: } C_1 = \frac{2r_1}{d} = \frac{2(5)}{1.5} = 6.7$$

$$\text{Flexión: } S_y = 688 * 0.7 = 481.6 \text{ MPa} > \sigma_A = 276.86 \text{ OK}$$

Para el cálculo de la componente torsional en el punto B (Figura 3.10) utilizamos la ecuación 3.12:

$$\tau_B = (K)_B \frac{8 F_{max}(2r_1)}{\pi d^3} = 1.75 \frac{8 * 15 * 10}{\pi 1.5^3} = 198.05 \text{ N/mm}^2$$

Dónde:

$$(K)_B = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} = \frac{4(2) - 1}{4(2) - 4} = 1.75$$

$$C_2 = \frac{2r_2}{d} = \frac{2 * 1.5}{1.5} = 2$$

Torsión: $S_{ys} = 688 * 0.4 = 275.2 \text{ Mpa} > \tau_B = 198.05 \text{ MPa} \quad \text{OK}$

Con el material ya definido podemos calcular el desplazamiento obtenido para la carga de servicio:

Número de espiras activas (ec. 3.14):

$$N_a = N_b + \frac{G}{E} = 13 + \frac{77.5}{199.95} = 13.38$$

ASTM A514

El índice del resorte lo calculamos de la misma forma que para el modelo de compresión:

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} = \frac{1.5^4 * 77.5(10^3)}{8 * 10.5^3 * 13.38} = 3.1663 \text{ N/mm}$$

En el caso de los resortes de extensión se fabrican con una pretensión inicial y esta hay que tenerla en cuenta para calcular el desplazamiento (ec. 3.12):

$$F_{max} = ky \quad \rightarrow \quad y = \frac{F_{max}}{k} = \frac{15}{3.1663} = 4.73 \text{ mm}$$

Resultados:		
Resorte B – Modelo Teórico		
Tensión máxima –Interior-: ($\tau_{m\acute{a}x}$)	142.6 MPa	OK
Material	ASTM A514	
Tensión máxima –Pto A-: (σ_a')	275.86 N/mm ²	Ok
Tensión máxima –Pto B-: (τ_B')	198.05 N/mm ²	Ok
Desplazamiento (y)	4.73 mm	
Constante del resorte (k)	3.1663 N/mm	

TABLA 3-16: RESULTADOS MODELO TEÓRICO - RESORTE B

MODELADO 3D DEL RESORTE

Definimos las características geométricas del resorte. Utilizamos un resorte con las mismas características que el usado en el modelo teórico:

Características geométricas: Resorte B		
Diámetro exterior (D_e)		12 mm
Sección alambre	Diámetro (d)	1.5 mm
	Tipo	Circular
Extremos	Gancho circular	$r_1 = 1.5$ mm
		$r_2 = 5$ mm
Número de vueltas (N_b)		13
Eje del resorte		Eje Z

Soportes	
Material	ABS

TABLA 3-17: MODELADO 3D - RESORTE B

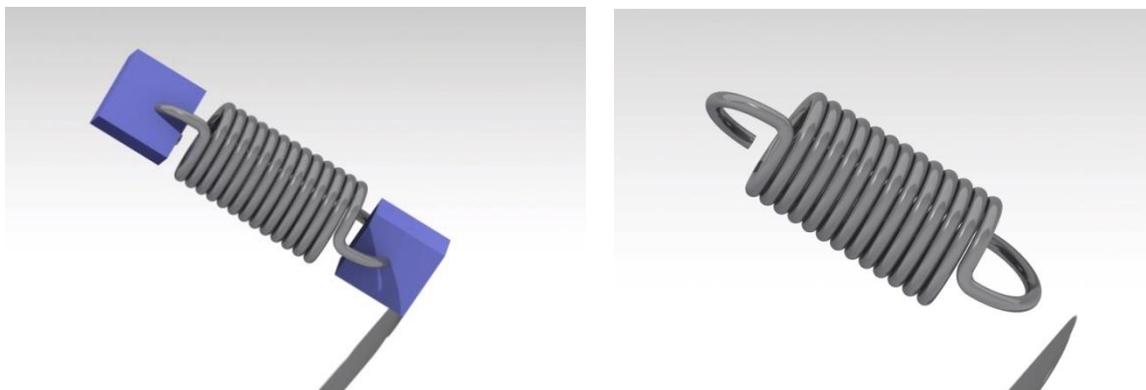


FIGURA 3.11: MODELO 3D - RESORTE B

CONDICIONES DE CONTORNO

En este caso utilizaré tres modelos diferentes y comprobaré los resultados con los valores teóricos para poder validarlos:

Resorte B – Modelo 1

Se trata del caso más parecido al modelo teórico, en el que se aplican directamente las condiciones de contorno sobre el resorte.

Se restringirán los grados de libertad de los nodos inferiores de un gancho y se le aplicará una carga puntual en el otro gancho.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Inicialmente para este resorte se volverá a comparar los dos tipos de bricks utilizados anteriormente, y se optará por el que mejor resultados consiga.

MALLADO:

Se realizarán dos tipos de mallado, uno de 0.75 mm de longitud del elemento, y otro más “fino” de 0.3 mm, para comprobar la importancia del tamaño del elemento.

Nota:

No se ha tenido en cuenta el peso del resorte en ninguno de los modelos.

RESOLUCIÓN:

Resorte B – Modelo 1.1	
Extremo Inferior	Fijo
Extremo superior	Libre
Cargas	Fuerza puntual: ($F_{m\acute{a}x} = 15\ N$)
Mallado	Bricks (20 nodos)
Tamaño del elemento	0.75 mm



TABLA 3-18: RESORTE B - MODELO 1.1

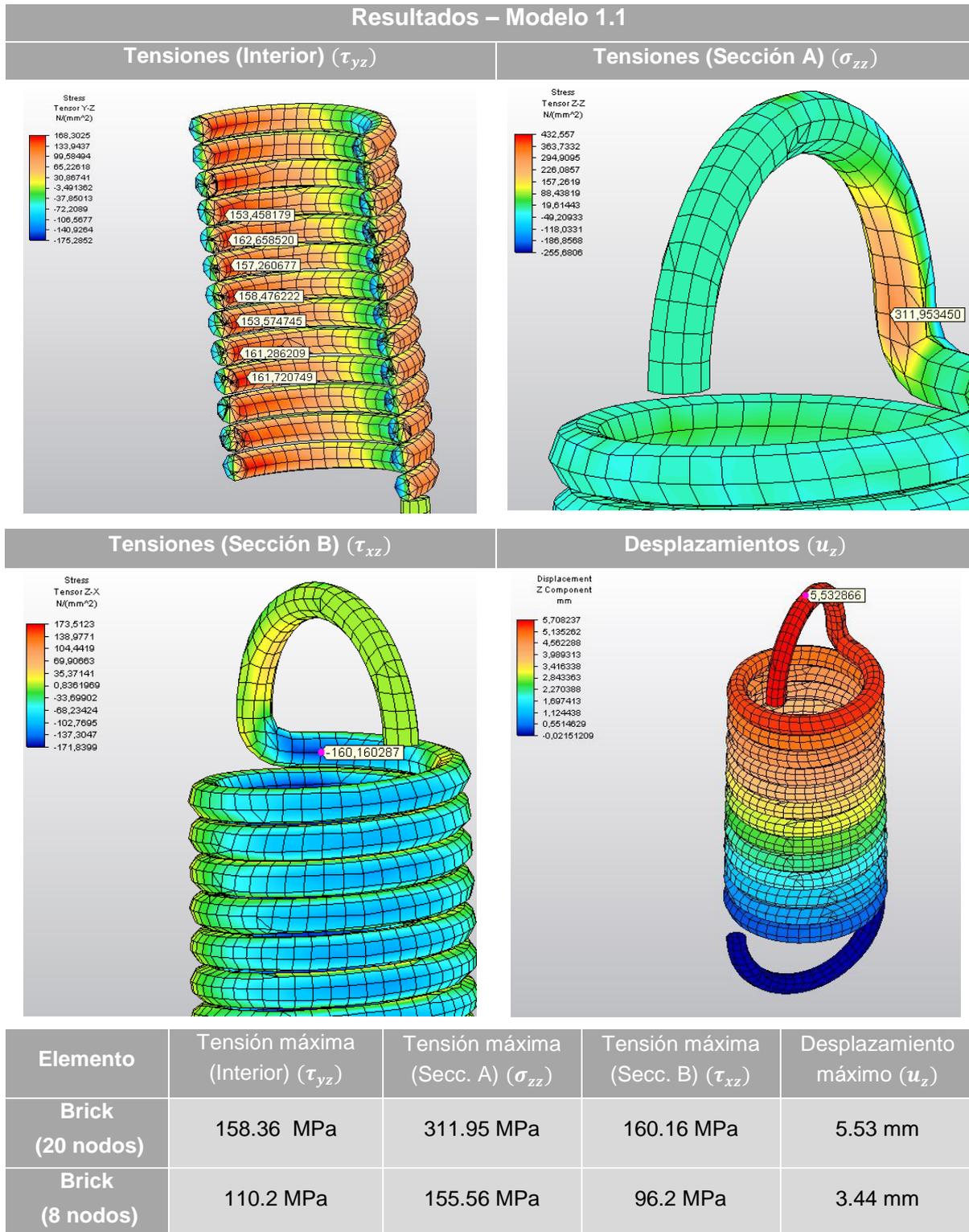


TABLA 3-19: RESULTADOS RESORTE B - MODELO 1.1

En el modelo 1.2 se utilizan las mismas condiciones de contorno, pero se realiza un mallado más fino para saber si se pueden obtener mejores resultados.

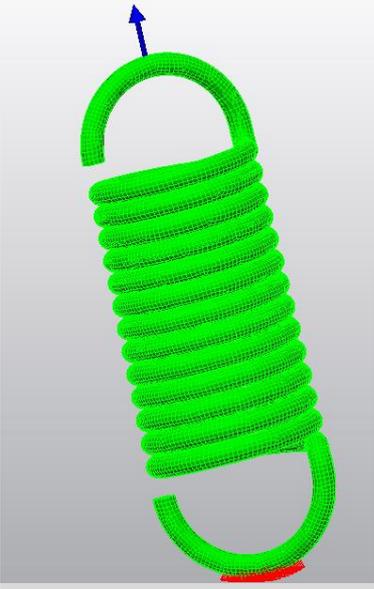
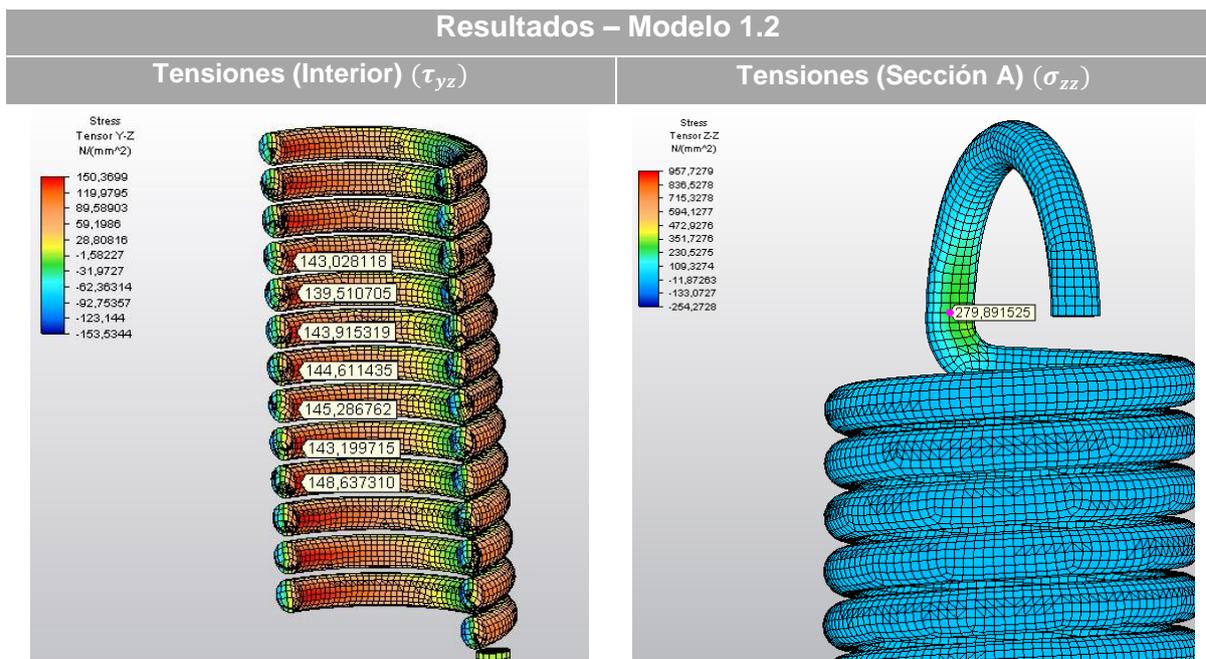
Resorte B – Modelo 1.2		
Extremo Inferior	Fijo	
Extremo superior	Libre	
Cargas	Fuerza puntual: ($F_{m\acute{a}x} = 15\text{ N}$)	
Mallado	Bricks (20 nodos)	
Tamaño del elemento	0.3 mm	

TABLA 3-20: RESORTE B - MODELO 1.2



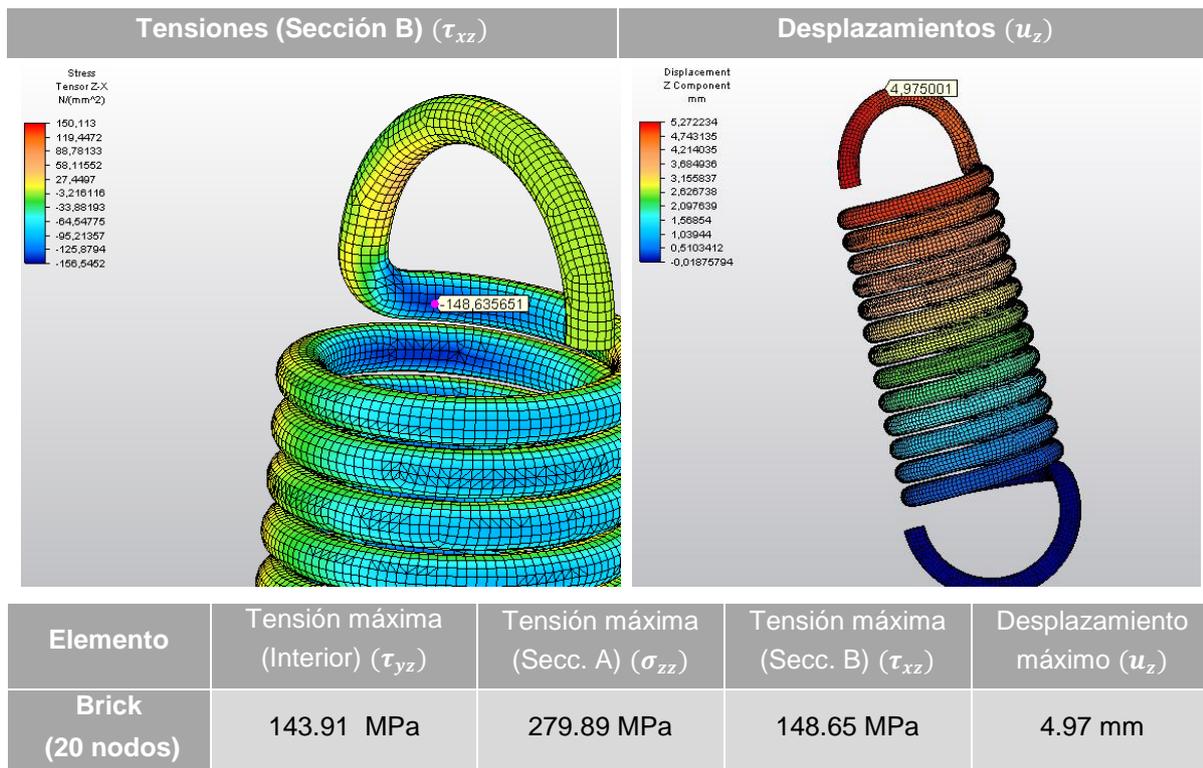


TABLA 3-21: RESULTADOS RESORTE B - MODELO 1.2

Resorte B – Modelo 2

Para dicho modelo también se tendrá en cuenta la influencia de los soportes. Se trata de una representación más cercana a la realidad y por tanto se espera que mejores los resultados.

Para definir la interacción soporte – resorte se utilizará las condiciones de “contacto por superficie” (sin fricción).

Tampoco se ha tenido en cuenta el peso de los soportes ni del resorte.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Vistos los primeros resultados, sigue siendo conveniente utilizar el brick de 20 nodos.

MALLADO:

Para el caso del resorte se dimensionará los bricks de 0.75 y 0.3 mm.

En el caso de los soportes el mallado no adquiere mayor relevancia ya que no nos interesan las tensiones en estas piezas. El propio programa modificará el tamaño en las zonas de contacto para compatibilizar las piezas.

RESOLUCIÓN:

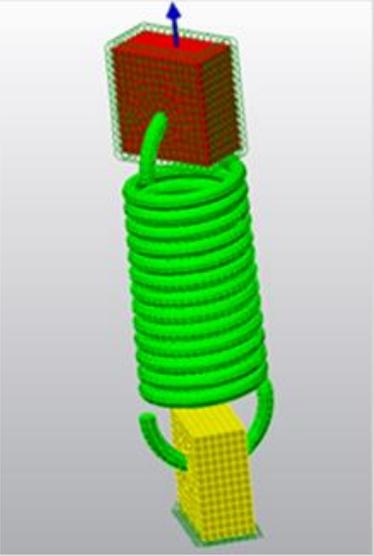
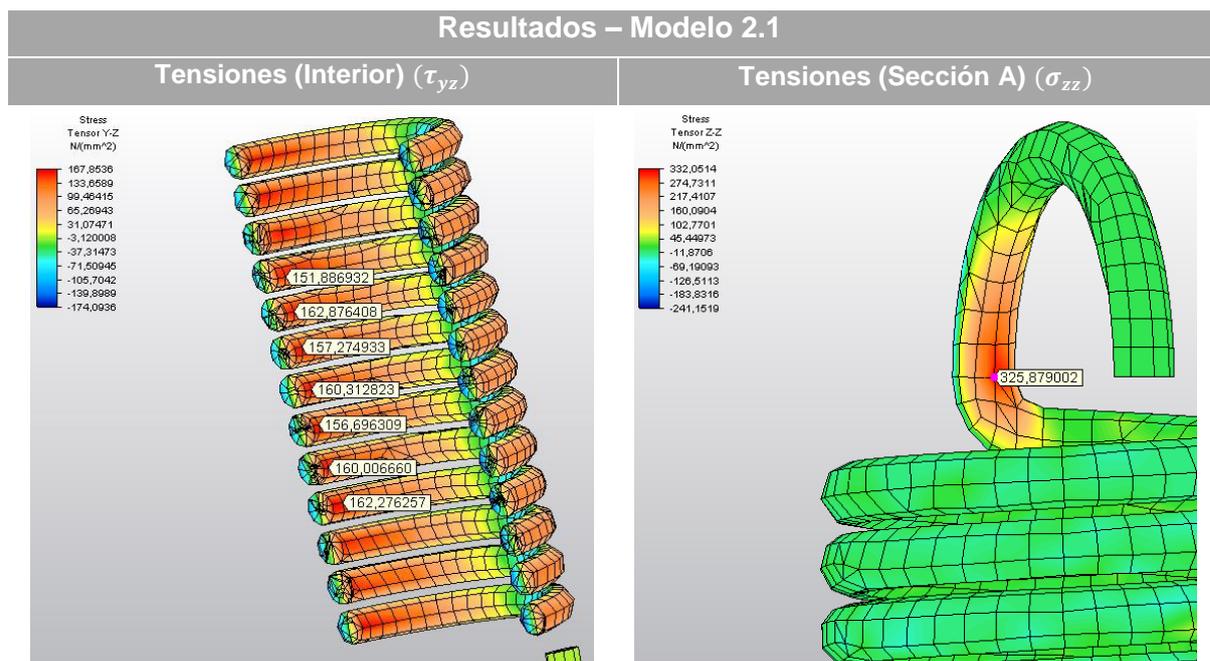
Resorte B – Modelo 2.1		
Extremo Inferior	Contacto con soporte inferior (Surface)	
Extremo superior	Contacto con soporte superior (Surface)	
Cargas	Fuerza puntual: ($F_{m\acute{a}x} = 15\text{ N}$) Sobre centro del soporte superior	
Mallado	Bricks (20 nodos)	
Tamaño del elemento	0.75 mm	
Soporte inferior	Base fijada	
Soporte superior	Solo desplazamiento en Z y carga puntual en el centro	

TABLA 3-22: RESORTE B - MODELO 2.1



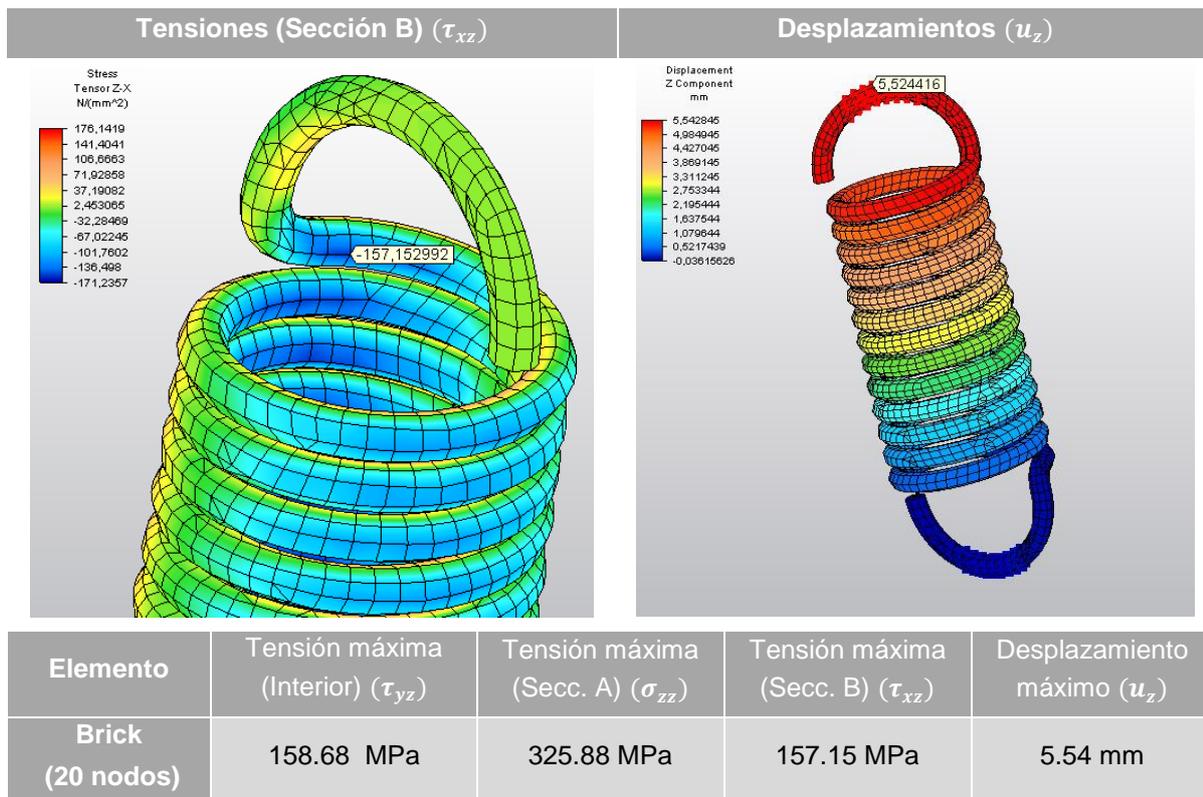


TABLA 3-23: RESULTADOS RESORTE B - MODELO 2.1

Resorte B – Modelo 2.2		
Extremo Inferior	Contacto con soporte inferior (Surface)	
Extremo superior	Contacto con soporte superior (Surface)	
Cargas	Fuerza puntual: ($F_{m\acute{a}x} = 15\text{ N}$) Sobre centro del soporte superior	
Mallado	Bricks (20 nodos)	
Tamaño del elemento	0.3 mm	
Soporte inferior	Base fijada	
Soporte superior	Solo desplazamiento en Z y carga puntual en el centro	

TABLA 3-24: RESORTE B - MODELO 2.2

Para este modelo se vuelve a comprobar los resultados con un tamaño de elemento menor.

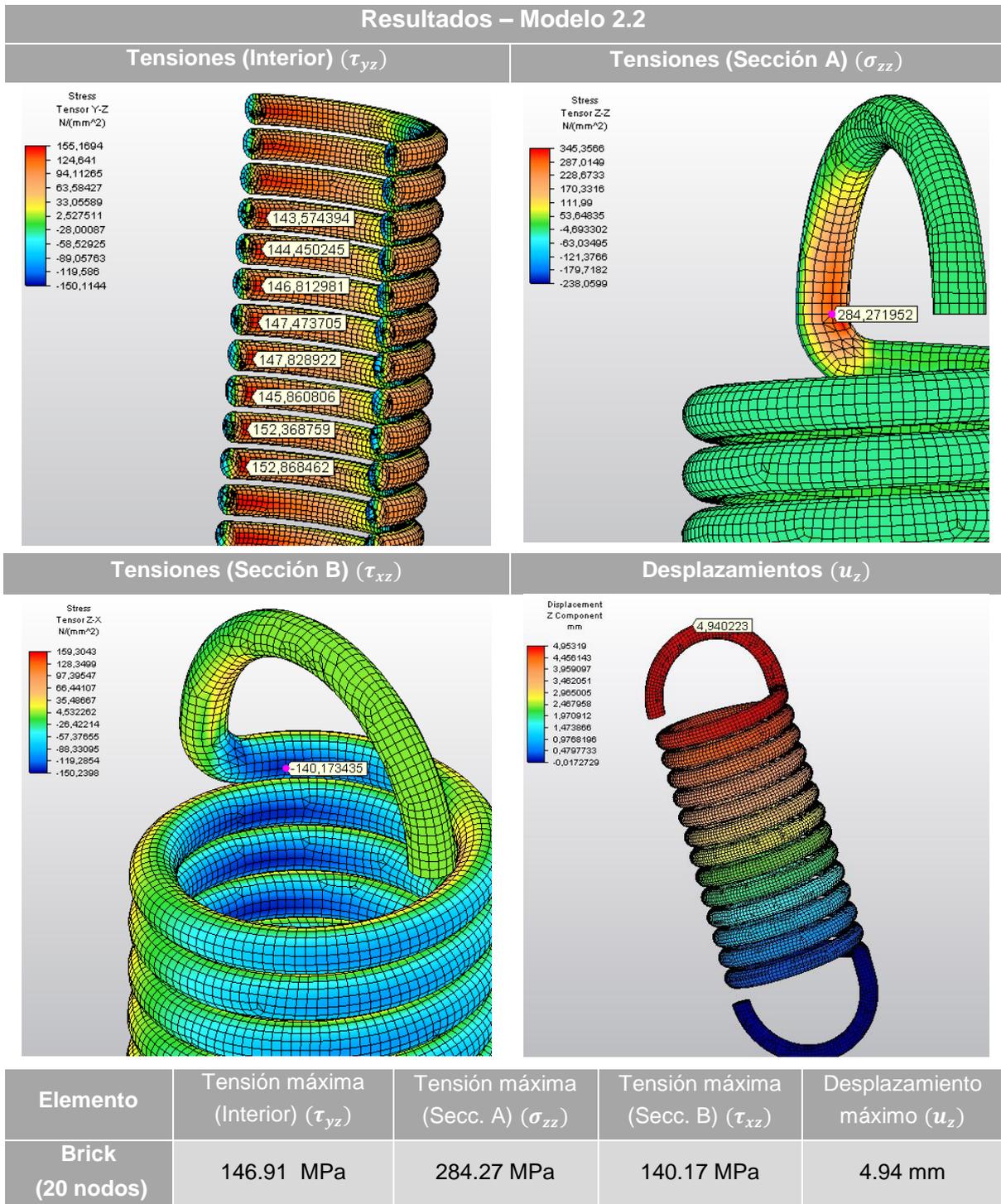


TABLA 3-25: RESULTADOS RESORTE B - MODELO 2.2

Resorte B – Modelo 3

Este modelo solo será utilizado para comprobar el cálculo de desplazamientos.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Dividimos el modelo en tres trozos para simular el resorte interior y los dos ganchos. Como solo me interesa el desplazamiento en Z, los ganchos los represento mediante elementos barra (Truss) con la sección del alambre.

En el caso del resorte interior utilizo “spring” con la constante elástica obtenida mediante el modelo teórico.

RESOLUCIÓN:

Resorte B – Modelo 3		
Extremo Inferior	Empotramiento	
Extremo superior	Libre	
Cargas	Fuerza puntual extremo superior ($F_{m\acute{a}x} = 15\text{ N}$)	
Elemento	Spring	
Resultado	Desplazamiento máximo: $u = 4.73\text{ mm}$	

TABLA 3-26: RESORTE B - MODELO 3

Como ocurría para los resortes de compresión, al tratarse de un modelo tan sencillo se consigue la solución exacta.

3.2.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS Y OBSERVACIONES

Resultados – Resorte B								
Modelo	Tensión máxima – Interior (MPa)	Error	Tensión máxima - Pto A (MPa)	Error	Tensión máxima - Pto B (MPa)	Error	Desplazamiento (mm)	Error
Teórico	142,6	Ref	275,86	Ref	198,05	Ref	4,73	Ref
Modelo 1.1 (Bricks - 8)	110,2	22,72 %	155,56	43,61 %	96,2	51,43 %	3,44	27,27 %
Modelo 1.1 (Bricks - 20)	158,36	11,05 %	311,95	13,08 %	160,16	19,13 %	5,53	16,91 %
Modelo 1.2 (Bricks - 20)	143,91	0,92 %	279,89	1,46 %	148,65	24,94 %	4,97	5,07 %
Modelo 2.1 (Bricks - 20)	158,68	11,28 %	325,88	18,13 %	157,15	20,65 %	5,54	17,12 %
Modelo 2.2 (Bricks - 20)	146,91	3,02 %	284,27	3,05 %	140,17	29,22 %	4,94	4,44 %
Modelo 3 (Spring)	-	-	-	-	-	-	4,73	0,00

TABLA 3-27: RESULTADOS RESORTE B

TENSIÓN MÁXIMA INTERIOR

- El mallado más fino mejora notablemente los resultados.
- El Modelo 1.2 es el más parecido al caso teórico y por ello tiene un error menor al 1%.
- El modelo 2.2 es el más parecido a la realidad, y posiblemente se acerque más a posibles ensayos.

TENSIÓN MÁXIMA – PTO A

- El mallado de 0.3 mm vuelve a mejorar los resultados.
- Con el Modelo 1.2 se obtienen mejores resultados comparándolos con los teóricos.

TENSIÓN MÁXIMA – PTO B

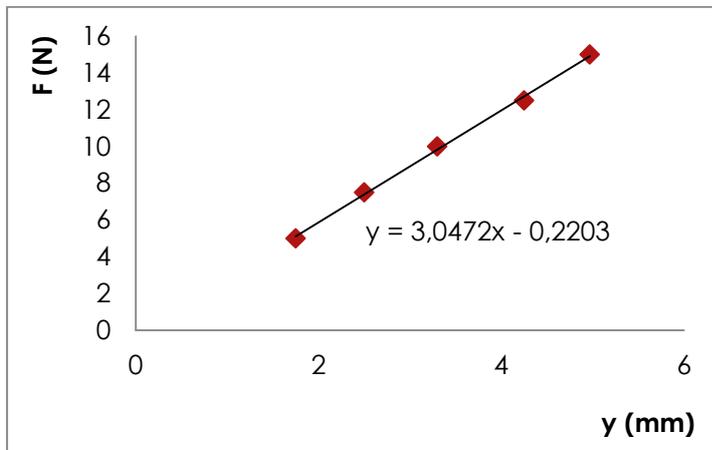
- Los resultados no son realmente buenos con estos modelos.

DESPLAZAMIENTOS

- Al igual que para el cálculo de tensiones, los modelos 1.2 y 2.2 dan resultados muy parejos.

Finalmente se elige el Modelo 1.2 como el más representativo por sus buenos resultados y una mayor simpleza en las condiciones de contorno.

REPRESENTACIÓN DE LA CONSTANTE ELÁSTICA

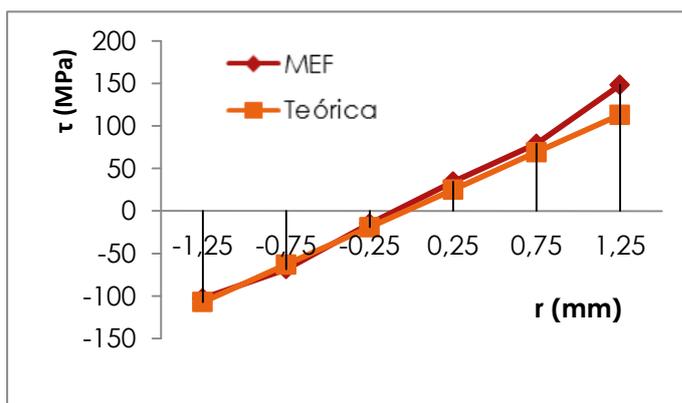


Valor teórico	3.16 N/mm
Valor obtenido	3.05 N/mm
Error	3.5 %

FIGURA 3.12: REPRESENTACIÓN DE LA CONSTANTE ELÁSTICA - RESORTE B

DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES A LO LARGO DE LA SECCIÓN

Parece interesante comparar cómo se comporta el MEF en el cálculo de tensiones en el interior de la sección de una espira. Para ello elijo una espira intermedia y comparo los valores obtenidos con los teóricos. Es importante comentar que no se ha tenido en cuenta la posible afectación de la curvatura en el cálculo teórico.



Valor teórico	3.16 N/mm
Valor obtenido	3.05 N/mm
Error	3.5 %

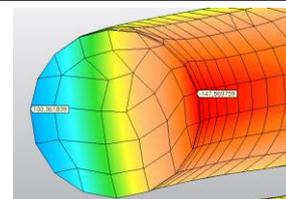


FIGURA 3.13: DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES - SECCIÓN RESORTE B

Excepto en el extremo donde la tensión máxima y puede afectar más la curvatura los resultados son realmente parecidos.

3.3 RESORTES: TORSIÓN

3.3.1 CONCEPTOS BÁSICOS

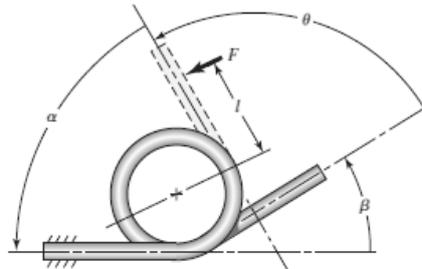


FIGURA 3.14: RESORTE DE TORSIÓN

Los resortes de torsión son utilizados principalmente cuando necesitamos almacenar la energía o absorber un par. Al someter al resorte a una fuerza F desplazada una distancia l del eje de la hélice que conforman las espiras interiores, este trabaja totalmente a flexión. Se suelen ayudar de un vástago interior para mantener su posición, y hay que tener en cuenta que al aumentar la carga el diámetro interior se reduce y puede comprimir el vástago aumentando así la tensión en esos puntos.

Aunque existen resortes de torsión de doble y único cuerpo, en mi caso para el cálculo, utilizaré un resorte de sección circular y cuerpo único.

El número de vueltas de cuerpo N_b está definido por este ángulo.

$$N_b = \text{entero} + \frac{\beta}{360^\circ} \quad (3.15)$$

3.3.2 TEORÍA CLÁSICA

Resorte de cuerpo único y sección circular:

CÁLCULO DE LAS TENSIONES

Como hemos comentado anteriormente, estos resortes están sometidos únicamente a un esfuerzo de flexión:

$$\sigma = K \frac{Mc}{I}$$

K es un factor de corrección del esfuerzo, este depende del tipo de sección y si lo queremos calcular en el interior o exterior:

$$\text{Interior: } K_i = \frac{4C^2 - C - 1}{4C(C - 1)} \quad \text{Exterior: } K_e = \frac{4C^2 + C - 1}{4C(C + 1)}$$

Siendo C el índice del resorte. Como K_e es inferior a la unidad, utilizaremos para el cálculo la tensión en el interior:

Para nuestro caso: $M = Fr$, Sección circular: $\frac{I}{c} = \frac{\pi d^3}{32}$

$$\sigma = K_i \frac{32Fr}{\pi d^3} \quad (3.16)$$

DEFLEXIÓN ANGULAR

Deflexión en los extremos del resorte:

Como en el extremo de un viga en voladizo de longitud l, el ángulo girado es y/l. El desplazamiento en el extremo es de:

$$y = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3l), \text{ En el extremo: } x = l$$

$$\theta_e = \frac{y}{l} = \frac{Fl^2}{3E\left(\frac{\pi d^4}{64}\right)} = \frac{64Ml}{3\pi d^4 E} \quad (3.17)$$

Deflexión en el interior del resorte:

Nos basaremos en el teorema de Castigliano de una forma similar a lo realizado para el caso de resortes de tracción-compresión.

La energía de deformación para esfuerzos de flexión:

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

La fuerza F se deflectará a una distancia $r\theta$ donde θ es la deflexión angular en el cuerpo de espiras.

$$r\theta = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^{\pi DN_b} \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{F^2 r^2 dx}{2EI} \right) = \int_0^{\pi DN_b} \left(\frac{Fr^2 dx}{EI} \right)$$

Momento de inercia sección circular: $I = \frac{\pi d^4}{64}$

$$\theta = \frac{64FrDN_b}{d^4E} = \frac{64MDN_b}{d^4E} \quad (3.18)$$

La deflexión total será la suma de la deflexión angular del interior más la de los dos extremos:

$$\theta_T = \frac{64MDN_b}{d^4E} + \frac{64Ml_1}{3\pi d^4E} + \frac{64Ml_2}{3\pi d^4E} = \frac{64MD}{d^4E} \left(N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D} \right) \quad (3.19)$$

Por lo tanto definimos en número de vueltas activas N_a como:

$$N_a = N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D} \quad (3.20)$$

CONSTANTE DEL RESORTE

Definimos la constante del resorte k:

$$k = \frac{Fr}{\theta_T} = \frac{M}{\theta_T} = \frac{d^4E}{64DN_a} \quad (3.21)$$

Si lo expresamos en “par de torsión/vuelta” la ecuación se transforma en:

$$k' = \frac{d^4E}{64DN_a} 2\pi = \frac{d^4E}{10.2DN_a}$$

Se ha demostrado que si tenemos en cuenta la fricción entre espiras, esta constante aumenta un poco:

$$k' = \frac{d^4E}{10.8DN_a} \quad (3.22)$$

3.3.3 MODELO TEÓRICO: RESOLUCIÓN

Se define un resorte de torsión con las siguientes características:

Características geométricas: Resorte C		
Diámetro interior (D_i)		15 mm
Sección alambre	Diámetro (d)	2.5 mm
	Tipo	Circular
Extremos	Extremos de torsión directa	
Número de vueltas (N_b)		6 ¼

TABLA 3-28: CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS RESORTE C

El resorte para el cálculo teórico se ha modelado de la siguiente forma:

Cargas y condiciones de contorno: Resorte C – Modelo Teórico	
Extremo inferior	Empotramiento
Extremo superior	Libre
Cargas	Fuerza puntual: ($F_{m\acute{a}x} = 25\text{ N}$) a 15 mm del centro "O"

TABLA 3-29: MODELO TEÓRICO RESORTE C

Se ha elegido el mismo material que para el resorte A:

Acero	E (N/mm ²)	G (N/mm ²)	S_{ut} (N/mm ²)
ASTM A242	199947.96	77499.20	480

En este caso el tipo de material en el que se va a fabricar el resorte está establecido, y sus dimensiones también, por lo tanto debemos comprobar su diseño para la carga máxima de trabajo.

Como se ha comentado en la teoría las tensiones máximas se encontrarán en la zona interior (ec. 3.16).

INTERIOR

Índice del resorte:

$$C = \frac{D}{d} = \frac{17.5}{2.5} = 7$$

Siendo el diámetro medio: $D = D_i + d = 15 + 2.5 = 17.5$

Factor de corrección de esfuerzo:

$$K_i = \frac{4C^2 - C - 1}{4C(C - 1)} = \frac{4(7)^2 - (7) - 1}{4(7)(7 - 1)} = 1.12$$

$$M = Fr, \text{ Sección circular: } \frac{I}{c} = \frac{\pi d^3}{32}$$

Trabaja solo a flexión:

$$\sigma = K_i \frac{32F_{max}r}{\pi d^3} = 1.12 \frac{32(25)(15)}{\pi(2.5)^3} = 273.8 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 273.8 \text{ MPa}$$

$$\text{Flexión: } S_y = 480 * 0.7 = 336 \text{ MPa} > \sigma_{m\acute{a}x} = 273.8 \text{ OK}$$

Número de espiras activas (ec.3.20) :

$$N_a = N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D} = 6.25 + \frac{2 + 2}{3\pi(17.5)} = 6.27$$

CONSTANTE DEL RESORTE (EC. 3.22):

Teniendo en cuenta la fricción entre espiras:

$$k' = \frac{d^4 E}{10.8 D N_a} = \frac{2.5^4 * 199.95 * 10^3}{10.8(17.5)(6.27)} = 6591.01 \text{ Nmm/vuelta}$$

$$k' = 1049 \text{ Nmm/rad}$$

DEFLEXIÓN ANGULAR TOTAL (EC. 3.19)

$$\theta_T = \frac{64MD}{d^4 E} N_a = \frac{64(25 * 15)(17.5)}{2.5^4 * 199.95 * 10^3} 6.27 = 0.33 \text{ rad}$$

$$\theta_T = 0.33 \text{ rad}$$

Resultados: Resorte C – Modelo Teórico		
Tensión máxima: ($\sigma_{m\acute{a}x}$)	273.8 MPa	OK
Material	ASTM A242	
Deflexión angular (θ_T)	0.33 rad	
Constante del resorte (k)	1049 Nmm/rad	

TABLA 3-30: RESULTADOS MODELO TEÓRICO - RESORTE C

3.3.4 MODELADO Y RESOLUCIÓN: MEF

MODELADO 3D DEL RESORTE

Se realiza un modelo 3D de un resorte de torsión con los extremos a 90°, con las siguientes características geométricas:

Características geométricas: Resorte C		
Diámetro interior (D_i)		15 mm
Sección alambre	Diámetro (d)	2.5 mm
	Tipo	Circular
Extremos	Extremos de torsión directa	
Número de vueltas (N_b)		6 ¼

Soporte interior	
Material	BASF
Diámetro	15 mm

TABLA 3-31: MODELADO 3D - RESORTE C

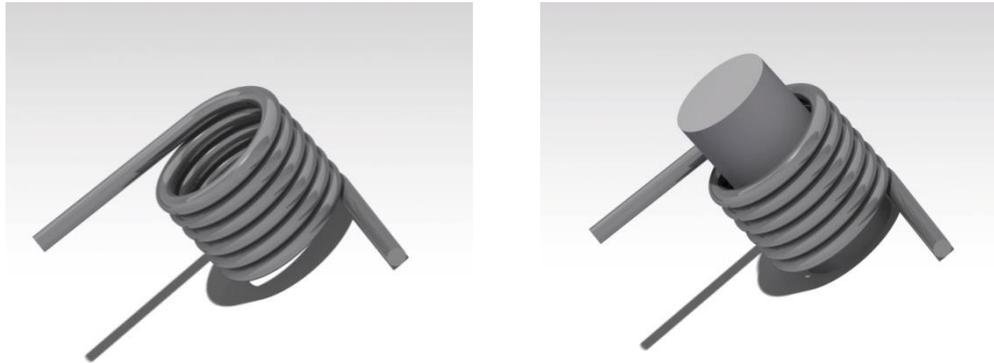


FIGURA 3.15: MODELO 3D - RESORTE C

El uso del soporte interior es imprescindible para poder restringir los desplazamientos de sólido rígido del interior.

Resorte C – Modelo 1

En el primer modelo se utilizará una carga puntual en uno de los extremos.

Los desplazamientos del interior del resorte están restringidos por el soporte interior de plástico, y en extremo inferior está fijado.

Se trata del caso más parecido al teórico.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO

Habiendo comprobado la eficacia del elemento brick de 20 nodos y al tratarse de un modelo sencillo, se utilizará este elemento para todos los casos.

MALLADO

Se realizarán dos tipos de mallado, uno de 1.25 mm de longitud del elemento, y otro más “fino” de 0.75 mm.

Nota:

No se ha tenido en cuenta el peso del resorte en ninguno de los modelos.

RESOLUCIÓN:

Resorte C – Modelo 1.1	
Extremo Inferior	Fijo
Extremo superior	Libre
Cargas	Fuerza puntual: ($F_{m\acute{a}x} = 25\text{ N}$) a 15 mm del centro O
Mallado	Bricks (20 nodos)
Tamaño del elemento	1.25 mm

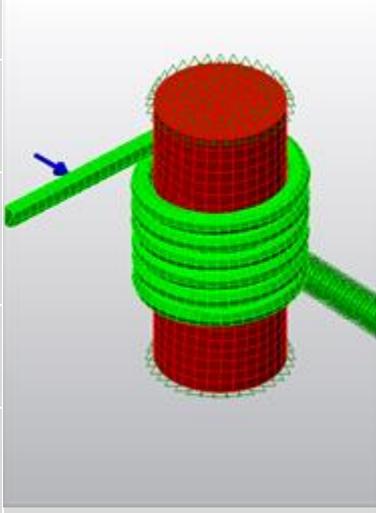


TABLA 3-32: RESORTE C - MODELO 1.1

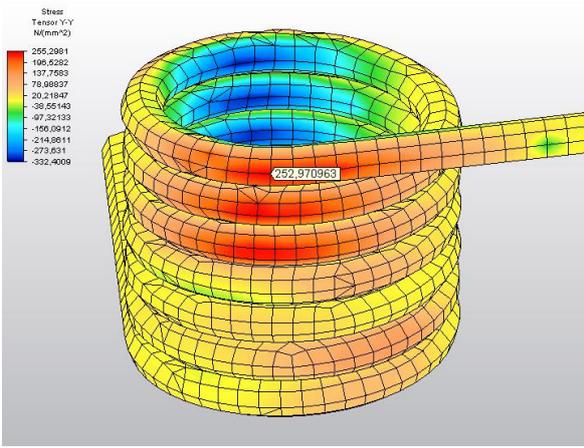
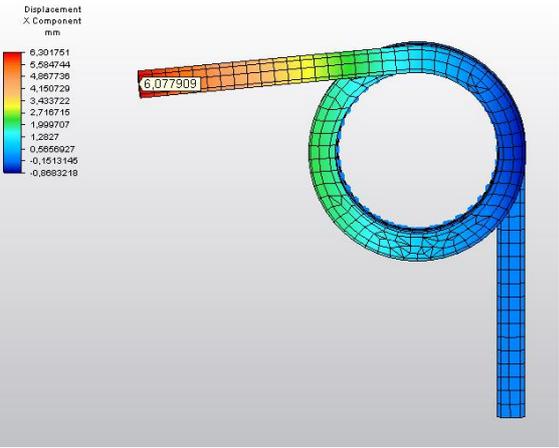
Resultados – Modelo 1.1		
	Tensiones (σ_{yy})	Desplazamientos (u_x)
		
Elemento	Tensión máxima (σ_{yy})	Desplazamiento máximo (u_x)
Brick (20 nodos)	252.97 MPa	0.273 rad

TABLA 3-33: RESULTADOS RESORTE C - MODELO 1.1

En el Modelo 1.2 se aplica las mismas condiciones de contorno, pero se realiza un mallado más fino para comprobar su eficacia.

Resorte C – Modelo 1.2	
Extremo Inferior	Fijo
Extremo superior	Libre
Cargas	Fuerza puntual: ($F_{m\acute{a}x} = 25\text{ N}$) a 15 mm del centro O
Mallado	Bricks (20 nodos)
Tamaño del elemento	0.75 mm

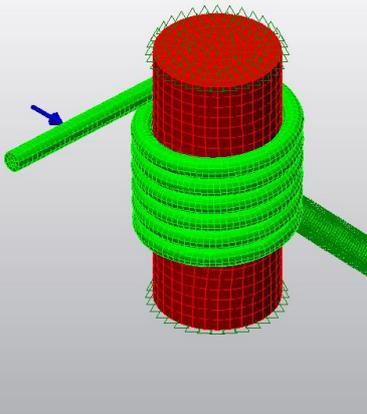


TABLA 3-34: RESORTE C - MODELO 1.2

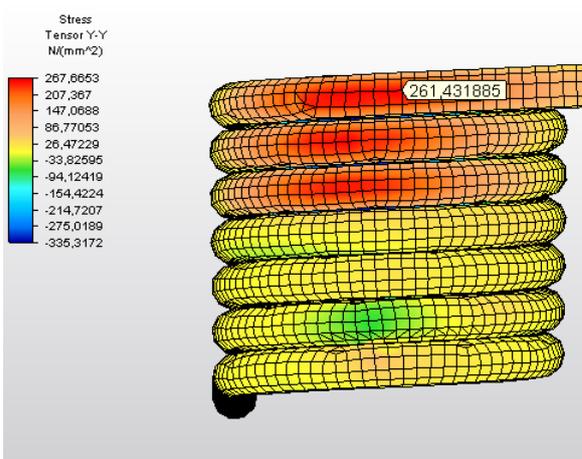
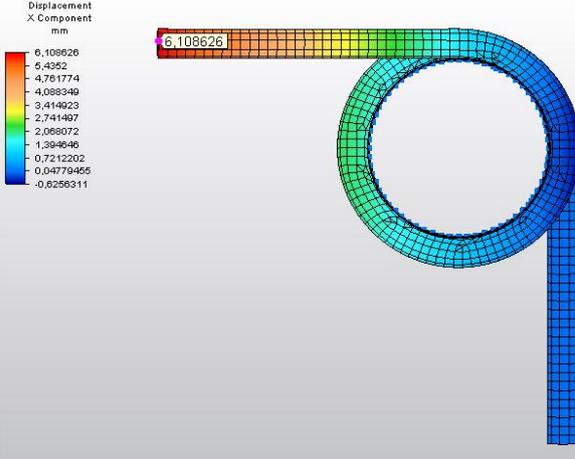
Resultados – Modelo 1.2								
Tensiones (σ_{yy})	Desplazamientos (u_x)							
 <p>Stress Tensor Y-Y N/(mm²)</p> <p>267,6653 207,367 147,0688 86,77053 26,47229 -33,82595 -94,12419 -154,4224 -214,7207 -275,0189 -335,3172</p> <p>261,431885</p>	 <p>Displacement X Component mm</p> <p>6,108626 5,4952 4,761774 4,088349 3,414923 2,741497 2,068072 1,394646 0,7212202 0,04779455 -0,6256311</p> <p>0,108626</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Elemento</th> <th>Tensión máxima (σ_{yy})</th> <th>Desplazamiento máximo (u_x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Brick (20 nodos)</td> <td>261.43 MPa</td> <td>0.283 rad</td> </tr> </tbody> </table>	Elemento	Tensión máxima (σ_{yy})	Desplazamiento máximo (u_x)	Brick (20 nodos)	261.43 MPa	0.283 rad
Elemento	Tensión máxima (σ_{yy})	Desplazamiento máximo (u_x)						
Brick (20 nodos)	261.43 MPa	0.283 rad						

TABLA 3-35: RESULTADOS RESORTE C - MODELO 1.2

Resorte C – Modelo 2

Se diferencia con el modelo anterior en la aplicación de la carga. En este caso se trata de una carga distribuida a lo largo de 5 nodos. Se trata de un caso más cercano a la realidad.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Elemento brick de 20 nodos.

MALLADO:

Se realizarán los mismos dos tipos de mallado, uno de 1.25 mm de longitud del elemento, y otro más “fino” de 0.75 mm.

Nota:

No se ha tenido en cuenta el peso del resorte en ninguno de los modelos.

RESOLUCIÓN:

Resorte C – Modelo 2.1	
Extremo Inferior	Fijo
Extremo superior	Libre
Cargas	Carga distribuida: ($F_{m\acute{a}x} = 25\text{ N}$) a 15 mm del centro O (5 nodos)
Mallado	Bricks (20 nodos)
Tamaño del elemento	1.25 mm

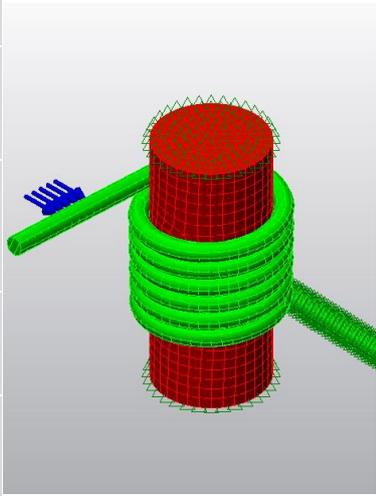


TABLA 3-36: RESORTE C - MODELO 2.1

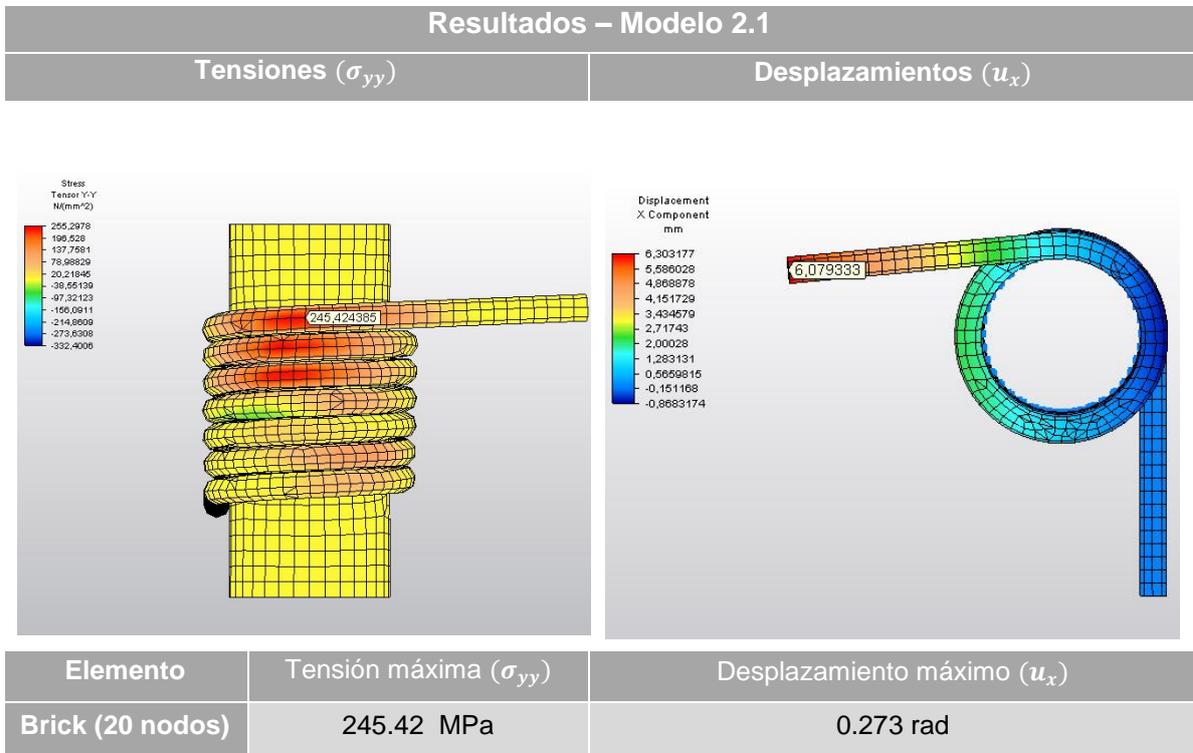


TABLA 3-37: RESULTADOS RESORTE C - MODELO 2.1



TABLA 3-38: RESORTE C - MODELO 2.2

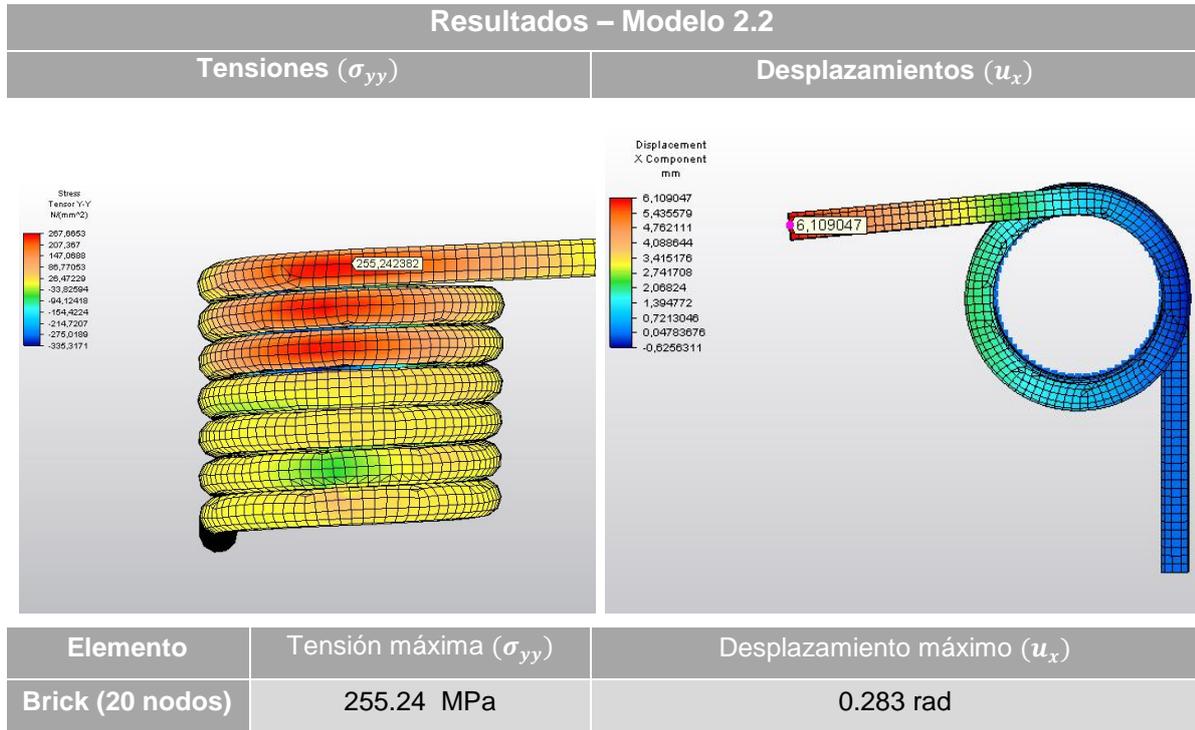


TABLA 3-39: RESULTADOS RESORTE C - MODELO 2.2

3.3.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS Y OBSERVACIONES

Resultados – Resorte C				
Modelo	Tensión máxima (MPa)	Error	Desplazamiento (rad)	Error
Teórico	273,8	Ref	0,33	Ref
Modelo 1.1 (Bricks - 20)	252,97	7,61 %	0,273	17,27 %
Modelo 1.2 (Bricks - 20)	261,43	4,52 %	0,283	14,24 %
Modelo 2.1 (Bricks - 20)	245,42	10,37 %	0,273	17,27 %
Modelo 2.2 (Bricks - 20)	255,24	6,78 %	0,283	14,24 %

TABLA 3-40: COMPARACIÓN DE RESULTADOS - RESORTE C

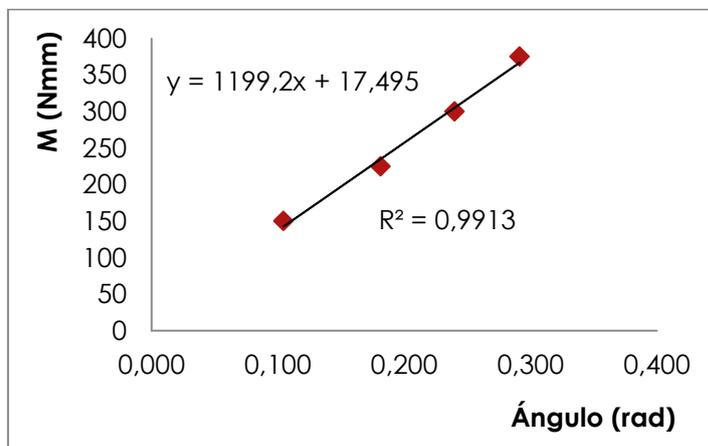
CÁLCULO DE TENSIONES:

- La reducción del tamaño del elemento mejora los resultados, pero no demasiado.
- El Modelo 1 obtiene resultados más parecidos al teórico porque es el más parecido.
- Como cabía esperar el utilizar una carga distribuida disminuye la tensión máxima.
- A pesar de dar peores resultados, es posible que el Modelo 2.2 al ser más parecido al modelo real, obtenga resultados más cercanos a un ensayo real.

DESPLAZAMIENTOS:

- En la obtención de resultados se ha utilizado el desplazamiento longitudinal en x, y conociendo la distancia en el otro eje del plano, se ha aproximado el ángulo del desplazamiento.
- Los resultados obtenidos se pueden considerar aceptables en todos los modelos.
- El hecho de cambiar la aplicación de la carga no afecta al desplazamiento máximo obtenido.

REPRESENTACIÓN DE LA CONTANTE ELÁSTICA:



Valor teórico	1049 Nmm/rad
Valor obtenido	1199 Nmm/rad
Error	14.3 %

FIGURA 3.16: REPRESENTACIÓN DE LA CONSTANTE ELÁSTICA - RESORTE C

4

Elementos de unión - Pernos

El perno se trata de una de las uniones desmontables más utilizadas en la industria, por sus características mecánicas y su montaje.

Y no solo se utilizan como método de unión, también son sistemas de transmisión de potencia, transformando un movimiento angular en lineal, pero este caso no será estudiado en el trabajo.

A día de hoy se siguen estudiando los diferentes métodos de unión para optimizarlos, en cuanto a pernos existen numerosos tipos de roscas o cabezas, algunas definidas mediante cálculos sencillos, u otras en las que hace falta un estudio más exhaustivo.

4.1 DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

El perno es un elemento mecánico utilizado para la unión de ensamblajes capaz de soportar momentos, esfuerzos cortantes o combinación de ellos, de una forma eficaz.

La unión se puede realizar de diferentes maneras, las más comunes son la utilización de una tuerca o el roscado interior de una de las piezas a ensamblar.

Es muy común añadir una arandela para distribuir mejor la carga y evitar que las posibles rebabas o bordes agudos puedan provocar concentradores de tensiones en la rosca.

El método de unión es muy simple, consta de hacer girar la tuerca – el perno en el caso de agujeros roscados – para crear un esfuerzo de tracción en el perno, y por lo tanto una compresión que une los elementos del ensamblaje.

Dependiendo de los requerimientos mecánicos necesarios, existen distintos tipos de cabezas y roscas.

En la figura 4.1 se pueden observar distintos tipos de cabezas:

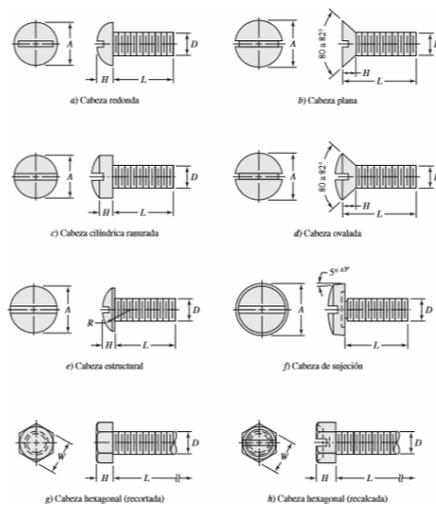


FIGURA 4.1: TIPOS DE CABEZA DE TORNILLO

Para mis cálculos y simulaciones utilizaré la cabeza **hexagonal recortada**.
Las roscas están definidas por unos parámetros característicos:

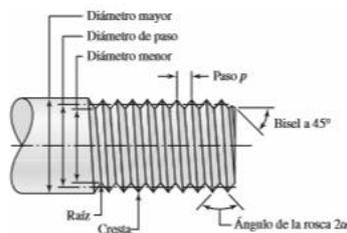


FIGURA 4.2: CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE UNA ROSCA

- **Paso:** Distancia entre dos cuerdas (filetes) medidas en dirección paralela al eje de la rosca.
 - Diámetro mayor, diámetro menor, diámetro de paso.
 - **Avance:** Es la distancia longitudinal que avanza el perno a dar una vuelta.
- Existen roscas múltiples (dobles, triples...) siendo el avance en una rosca doble, 2 veces el paso.

Aunque se han diseñado numerosos tipos de roscas (UNC, UNF, UNEF, SN, cuadrada, métrica...) en este trabajo me limitaré a modelar la rosca métrica:

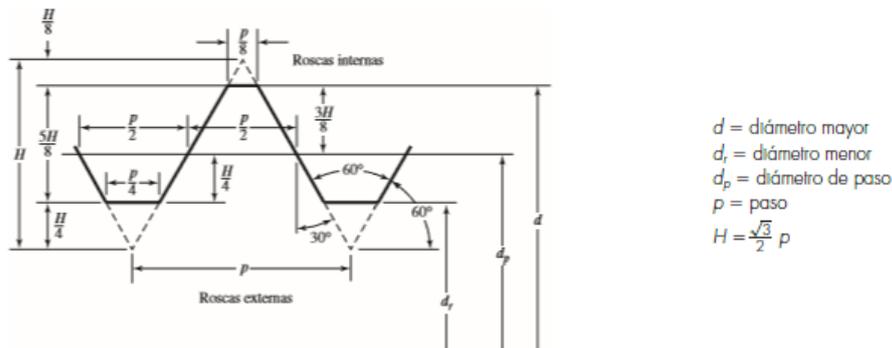


FIGURA 4.3: DEFINICIÓN DE LA ROSCA MÉTRICA

4.2 CÁLCULO DE TENSIONES EN PERNOS

Uno de los apartados más importantes en el estudio de pernos es el cálculo de tensiones, en especial en la rosca o filetes, donde aparece una concentración de tensiones en la raíz o en el inicio de estos.

Es interesante este apartado para no sobrecargar los pernos, un riesgo siempre presente.

4.2.1 CÁLCULO TEÓRICO

Para este apartado conviene diferenciar entre el cuerpo del perno y la rosca. Si se define un perno con rosca métrica de la siguiente forma (figura 4.4) el cálculo de tensiones será el siguiente:

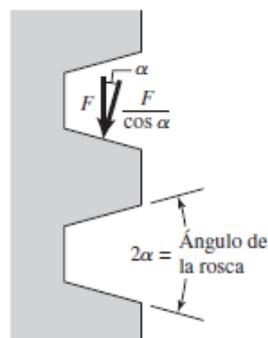


FIGURA 4.4: ÁNGULO DE ROSCA

CUERPO

Se trata de un cuerpo cilíndrico de diámetro d_r . Está sometido a un esfuerzo axial debido a la fuerza F y a un esfuerzo torsional.

- Tensiones normales: Esfuerzo axial

Para una sección circular sometido a una carga F:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d_r^2} \quad (4.1)$$

- Tensiones tangenciales: Esfuerzo torsional

$$\tau = \frac{16T}{\pi d_r^3} \quad (4.2)$$

ROSCA

Las tensiones en los filetes del perno poseen dos componentes, una componente normal producida por flexión y una tangencial por el esfuerzo cortante al que están sometidos

- Tensiones normales: Flexión (Secc. A)

Para la representación de la figura 4.4:

Sea n_t el número de roscas del perno:

$$\sigma = \frac{M}{\frac{I}{c}} = \frac{F * 3\sqrt{3}p * 96}{16 * 9\pi d_r n_t p^2} = 3.46 \frac{F}{\pi d_r n_t p} \quad (4.3)$$

- Momento: $M = F \frac{3\sqrt{3}p}{16}$
- Siendo el Módulo resistente de una sección rectangular (Secc. A):

$$\frac{I}{c} = \frac{bh^2}{6} = \frac{(\pi d_r n_t) \left(\frac{3p}{4}\right)^2}{6} = \frac{9\pi d_r n_t p^2}{96}$$

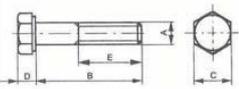
- Tensiones tangenciales: Esfuerzo cortante

Las tensiones tangenciales en la raíz de la rosca es debido al cortante producida por la fuerza F:

$$\tau = \frac{3V}{2A} = \frac{3}{2} \frac{F}{(\pi d_r n_t) \left(\frac{3p}{4}\right)} = \frac{2F}{\pi d_r n_t p} \quad (4.4)$$

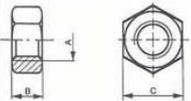
4.2.2 MODELADO Y RESOLUCIÓN

Mediante el uso de CATIA crea un perno M20x100 y la tuerca correspondiente. Me baso en la normalización para definir los elementos:



A	M4	M5	M6	M7	M8	M10	M12	M14	M16	M18	M20	M22	M24	M27	M30	M33	M36	M39	M42	M45	M48	M52	M56	M60	M64
Paso	0,7	0,8	1	1	1,25	1,5	1,75	2	2	2,5	2,5	2,5	3	3	3,5	3,5	4	4	4,5	4,5	5	5	5,5	5,5	6
E (B≤125)	14	16	18	20	22	26	30	34	38	42	46	50	54	60	66	72	78	84	90	96	102	-	-	-	-
E (125<B≤200)	-	2	24	26	28	32	36	40	44	48	52	56	60	66	72	78	84	90	96	102	108	116	124	132	140
E (B>200)	-	-	-	-	-	45	49	53	57	61	65	69	73	79	85	91	97	103	109	115	121	129	137	145	153
D	2,8	3,5	4	4,8	5,3	6,4	7,5	8,8	10	11,5	12,5	14	15	17	18,7	21	22,5	25	26	28	30	33	35	38	40
C	7	8	10	11	13	17	19	22	24	27	30	32	36	41	46	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95

(Todas las medidas están expresadas en mm.)



A	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M10	M12	M14	M16	M18	M20	M22	M24	M27	M30	M33	M36	M39	M42	M45	M48	M52	M56	M60	M64	M68
Paso	0,4	0,5	0,7	0,8	1	1	1,25	1,5	1,75	2	2	2,5	2,5	2,5	3	3	3,5	3,5	4	4	4,5	4,5	5	5	5,5	5,5	6	6
B	1,6	2,4	3,2	4	5	5,5	6,5	8	10	11	13	15	16	18	19	22	24	26	29	31	34	36	38	42	45	48	51	54
C	4	5,5	7	8	10	11	13	17	19	22	24	27	30	32	36	41	46	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100

(Todas las medidas están expresadas en mm.)

FIGURA 4.5: NORMALIZACIÓN PERNO - TUERCA

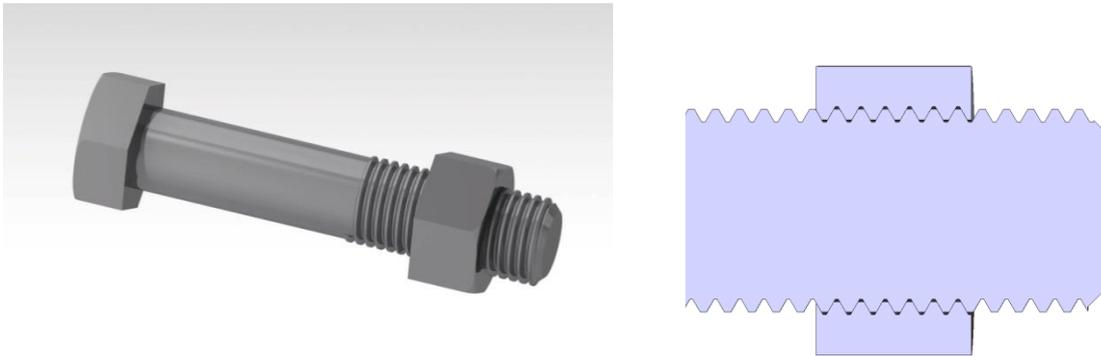


FIGURA 4.6: MODELO 3D: PERNO - TUERCA

Perno - Tuerca	
Eje del cuerpo	Eje Z
Material	Acero AISI-4150



FIGURA 4.7: DIMENSIONES PERNO - TUERCA

Cálculo de tensiones: Perno – Modelo teórico

Se calcula las tensiones de forma teórica para un perno de las dimensiones de la figura 4.8:

Cargas y condiciones de contorno: Perno – Modelo Teórico (Figura 4.7)	
Perno	M20x100
Tuerca	M20
Cargas	Par de apriete: T=4 Nm

TABLA 4-1: CARGAS Y CONDICIONES DE CONTORNO - MODELO TEÓRICO

Conociendo el par de apriete se puede calcular la carga de tracción F mediante la siguiente fórmula. Esta se obtiene mediante el estudio de un plano inclinado.

$$T = \frac{Fd}{2} \left(\frac{l + \pi f d \sec(\alpha)}{\pi d - fl \sec(\alpha)} \right)$$

Siendo:

- Diámetro medio: $d = 20 \text{ mm}$
- Coeficiente de fricción: $f = 0.08$
- Rosca simple: $l = p = 2.5 \text{ mm}$
- Rosca métrica: $\alpha = 30^\circ$

$$F = \frac{2T}{d} \left(\frac{l + \pi f d \sec(\alpha)}{\pi d - fl \sec(\alpha)} \right)^{-1} = \frac{2 * 4}{0.02} \left(\frac{0.0025 + \pi * 0.08 * 0.02 * \sec(30)}{\pi * 0.02 - 0.08 * 0.0025 * \sec(30)} \right)^{-1} = 3015.4 \text{ N}$$

$$F = 3015.4 \text{ N}$$

CUERPO

- Tensiones normales: Esfuerzo axial (ec.4.1)
-

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d_r^2} = \frac{4 * 3015.4}{\pi * 20^2} = 9.6 \text{ MPa}$$

- Tensiones tangenciales: Esfuerzo torsional (ec.4.2)

$$\tau = \frac{16T}{\pi d_r^3} = \frac{16 * 4}{\pi * 20^3} = 2.54(10)^{-3} \text{ MPa}$$

Se puede observar que las tensiones tangenciales producidas por el esfuerzo torsional son despreciables con respecto a las normales. Por ello no serán calculadas mediante el método de elementos finitos.

ROSCA

- Tensiones normales: Flexión (Secc. A) (ec.4.3)

$$\sigma = 3.46 \frac{F}{\pi d_r n_t p} = 3.46 \frac{3015.4}{\pi 20 * 7 * 2.5} = 9.48 \text{ MPa}$$

- Tensiones tangenciales: Esfuerzo cortante (ec 4.4)

$$\tau = \frac{2F}{\pi d_r n_t p} = \frac{2 * 3015.4}{\pi * 20 * 7 * 2.5} = 5.48 \text{ MPa}$$

Cálculo de tensiones: Perno – Modelo 1

Este modelo se caracteriza por distribuir la carga a toda la rosca que contacta con la tuerca. Se trata de un caso parecido al modelo teórico en el que no se tiene en cuenta la diferencia de carga que soporta cada filete. Por lo tanto se aplicará la fuerza directamente en la rosca.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Si solo se quisiera calcular las tensiones en la zona del cuerpo con elementos bricks de 8 nodos posiblemente sería suficiente, pero la rosca soporta esfuerzos cortantes y de flexión, y será más recomendable utilizar solo el brick de 20 nodos.

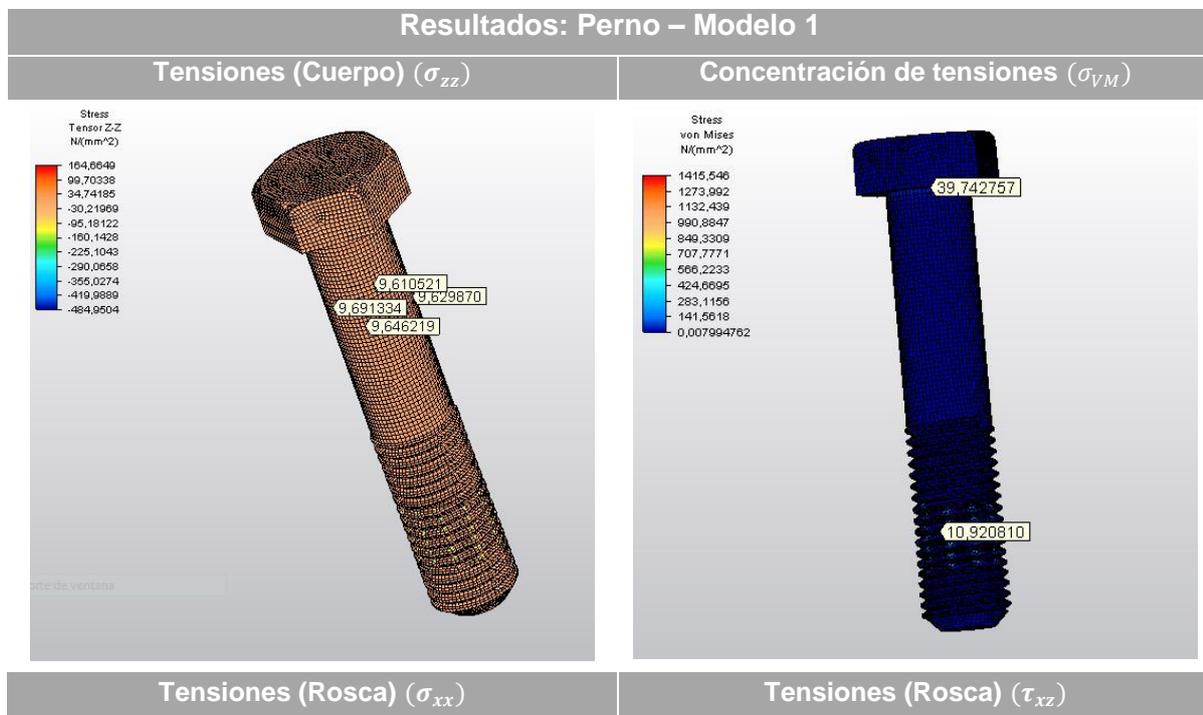
MALLADO:

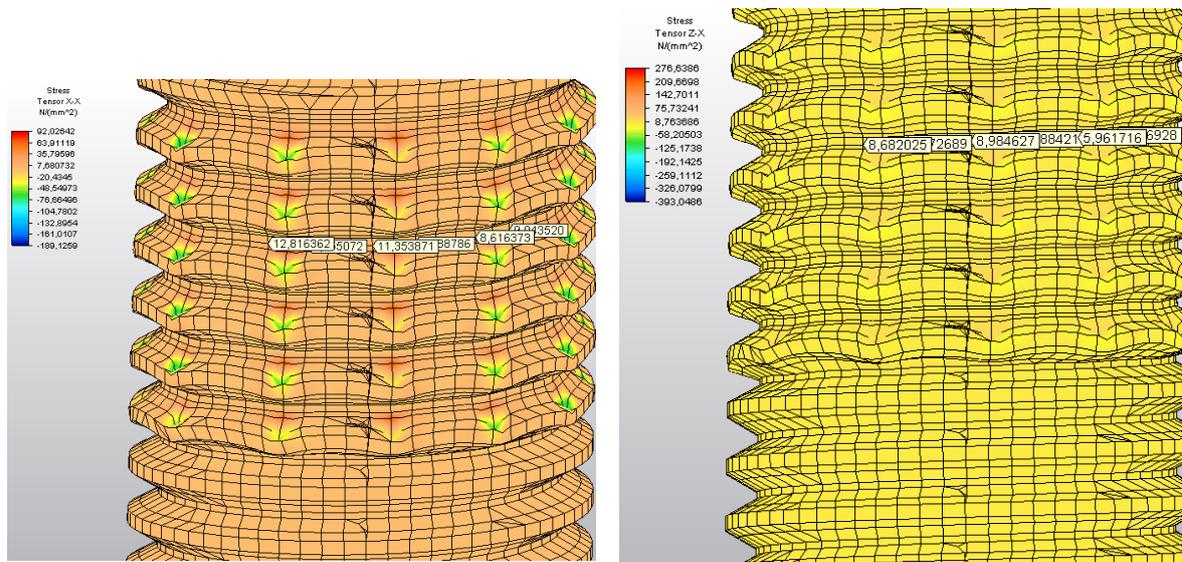
Para el cuerpo del perno no hace falta un mallado muy fino, pero si se quieren obtener buenos resultados en la rosca conviene que se disponga de varios elementos. Inicialmente se define un tamaño de 1 mm, y si aparecen zonas donde no sea suficiente se reducirá este tamaño.

RESOLUCIÓN:

Cálculo de tensiones: Perno – Modelo 1		
Cabeza	Fijo	
Rosca	Solo desplazamiento axial	
Cargas	Fuerza distribuida: ($F_{m\acute{a}x} = 3015.4 N$) Distribuida a lo largo de 7 roscas consecutivas.	
Mallado	Bricks (20 nodos)	
Tamaño del elemento	1 mm	

TABLA 4-2: PERNO - MODELO 1





Elemento	Tensión media (Cuerpo) (σ_{zz})	Tensión media (Rosca) (σ_{xx})	Tensión media (Rosca) (τ_{xz})
Brick (20 nodos)	9.64 MPa	9.74 MPa	7.59 MPa

TABLA 4-3: RESULTADOS PERNO - MODELO 1

Cálculo de tensiones: Perno – Modelo 2

Ahora se tiene en cuenta la interacción entre las roscas del perno y la tuerca. Se trata de un modelo más real. Se considerará como condiciones de contorno una unión (bonded) entre los elementos

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Vistos los resultados obtenidos se sigue utilizando el brick de 20 nodos.

MALLADO:

Para comparar los resultados con el modelo anterior, se utiliza el mismo tamaño de elemento. En el caso de la tuerca se utiliza un tamaño de 1.5 mm porque el cálculo de tensiones solo se realiza en la rosca del perno.

Al tratarse de un modelo más real, la primera rosca estará más cargada que las demás, pero para poder compararlo con el teórico se utilizará el valor medio entre la primera y la segunda rosca cargada.

RESOLUCIÓN

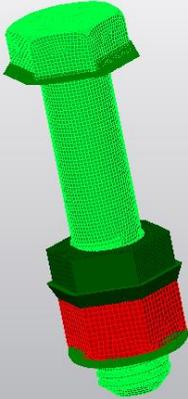
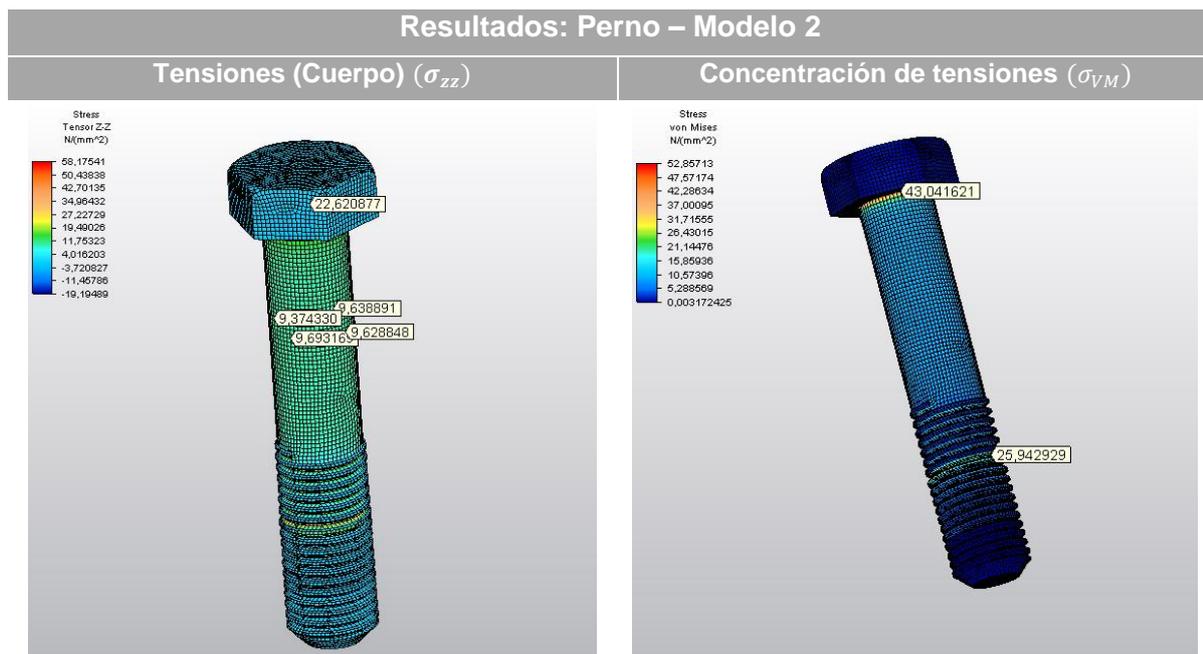
Cálculo de tensiones: Perno – Modelo 2		
Cabeza	Fijo	
Tuerca	Solo desplazamiento en el eje Z (Dirección: eje-perno) Perno-Tuerca: Unido (“Bonded”)	
Cargas	Fuerza distribuida: ($F_{m\acute{a}x} = 3015.4\text{ N}$) Distribuida en la cara superior de la tuerca.	
Mallado	Bricks (20 nodos)	
Tamaño del elemento	Perno: 1 mm Tuerca: 1,5 mm	

TABLA 4-4: PERNO - MODELO 2



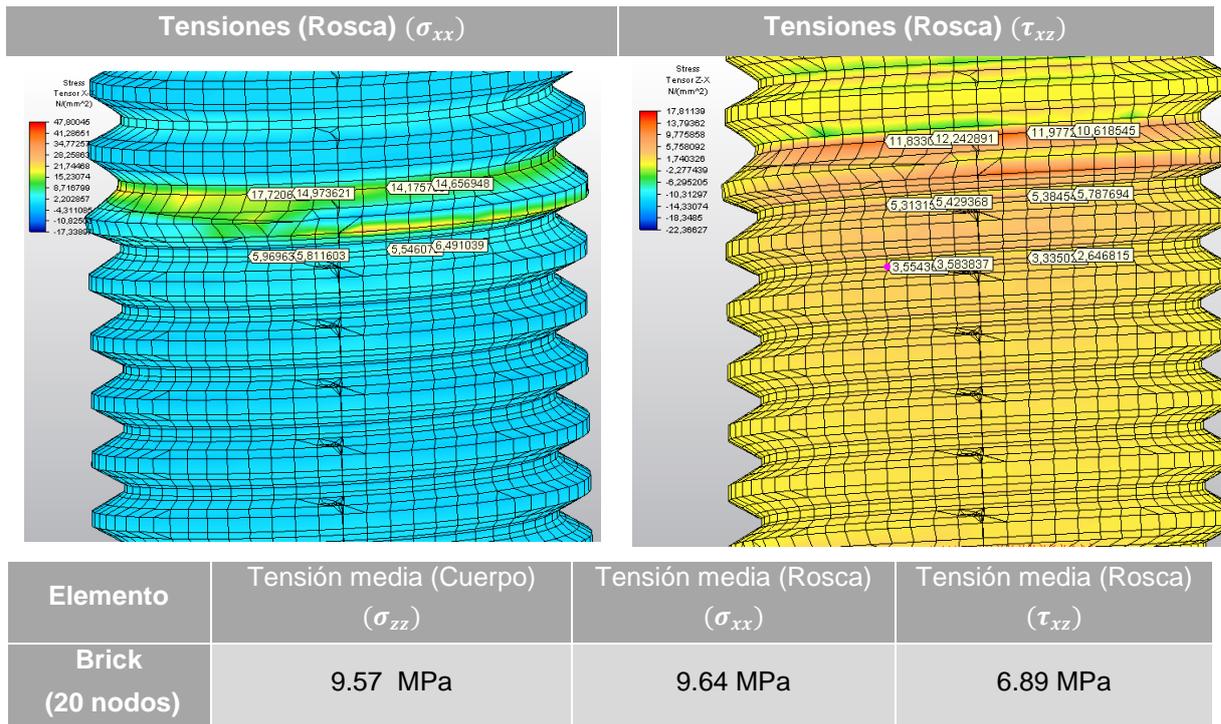


TABLA 4-5: RESULTADOS PERNO - MODELO 2

4.2.3 RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Resultados – Cálculo de tensiones: Perno						
Modelo	Cuerpo (MPa)	Error	Rosca – T. Normal (MPa)	Error	Rosca – T. Tangencial (Mpa)	Error
Teórico	9,6	Ref	9,48	Ref	5,48	Ref
Modelo 1	9,64	0,42 %	9,74	2,74 %	7,59	38,50 %
Modelo 2	9,57	0,31 %	9,64	1,69 %	6,89	25,73 %

TABLA 4-6: COMPARACIÓN DE RESULTADOS - TENSIONES EN PERNOS

TENSIONES – CUERPO

- Los resultados obtenidos son muy buenos – error menor al 1% en los dos casos.-
- Al tratarse de un cálculo sencillo eran previsibles estos resultados.

TENSIONES – ROSCA

- El cálculo de las tensiones normales provocadas por la flexión de la rosca se consigue de forma bastante precisa en los dos modelos.

- El Modelo 2 obtiene mejores resultados, pero se ha de comentar que se trata en este caso de un valor medio entre las primeras roscas cargadas.
- En el caso de las tensiones tangenciales aparece un mayor error. Se debe recordar que para el cálculo teórico se realizó una aproximación del cortante, y esto puede afectar a la diferencia obtenida. De todas formas en el apartado siguiente se calculará la tensión de Von Mises en la zona más crítica que será la que defina realmente al perno.

Plastificación de los primeros hilos:

En el modelo 2 con el elemento brick de 20 nodos se tiene en cuenta que los primeros hilos inicialmente están más cargados que el resto, y posteriormente **plastifican** donde se produce una **redistribución de la carga** en el resto de hilos.

CONCENTRACIÓN DE TENSIONES

Es muy útil desactivar la opción que tienen los programas de elementos finitos de promediar los valores en las zonas cercanas a los nodos para apreciar mejor si la malla es lo suficientemente “fina” en las zonas con una concentración de tensiones.

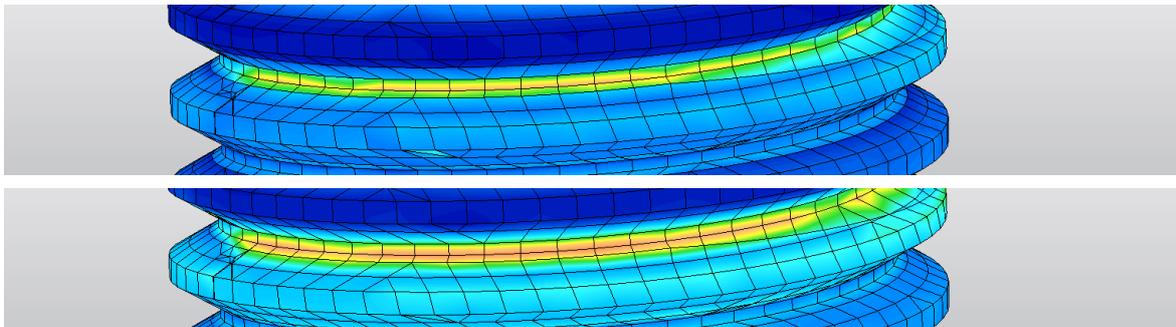


FIGURA 4.8: PROMEDIANDO VALORES - SUP) SIN PROMEDIAR, INF) PROMEDIADOS

En la figura 4.8 superior se puede observar en algunos puntos una gran variación de un elemento al siguiente, lo que puede indicar la necesidad de un mayor número de elementos si se quiere captar mejor la variación de la tensión en esta zona.

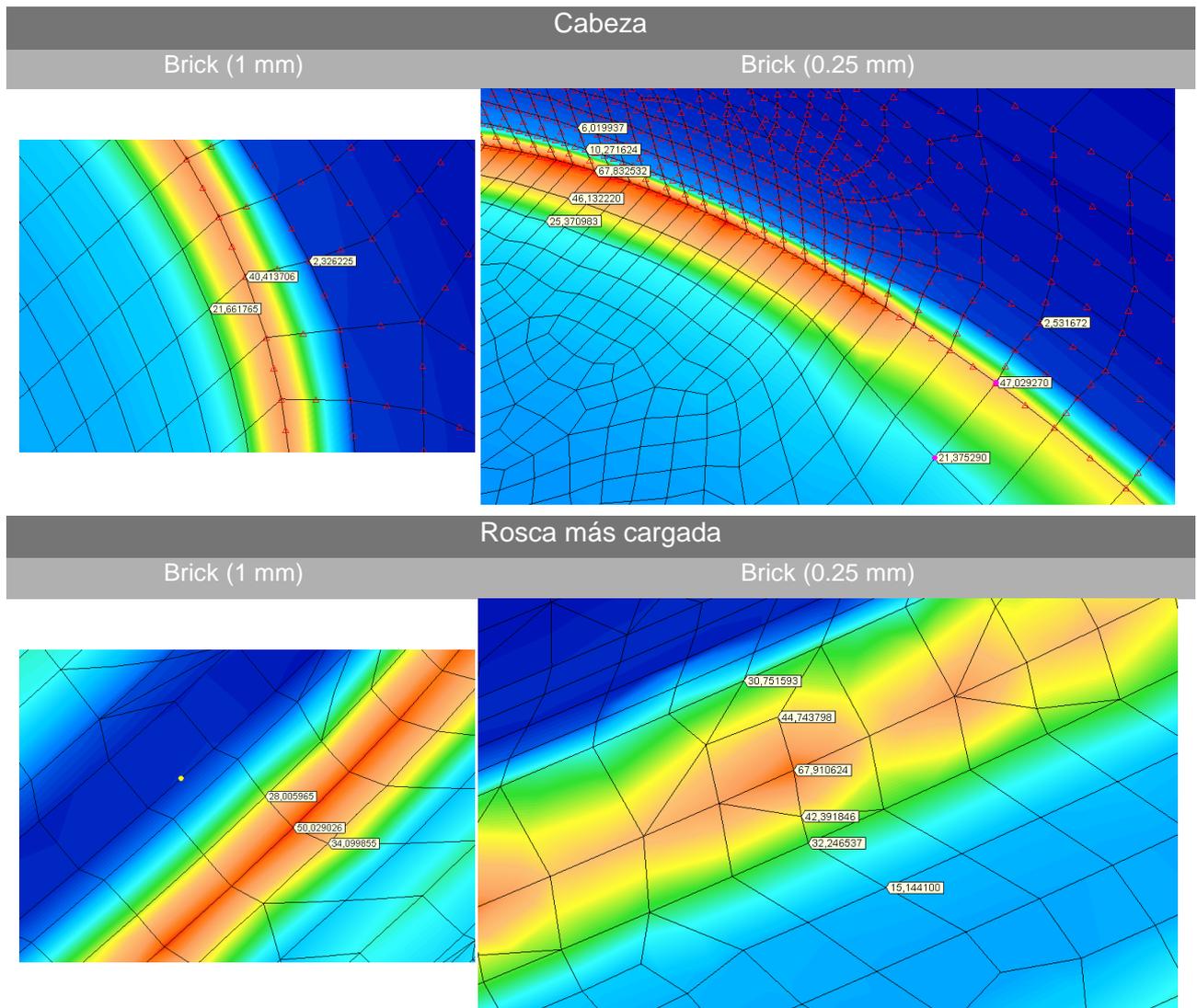


FIGURA 4.9: COMPARACIÓN CONCENTRACIÓN DE TENSIONES

Como resultado se consigue de una forma más precisa la variación de la tensión en dichas zonas. Además al tratarse de una mallado con más elementos los resultados obtenidos son más precisos.

4.3 UNIONES DESMONTABLES: VARIOS ELEMENTOS

La unión de piezas mediante uniones desmontables es muy común en la industria debido a la posibilidad de soportar grandes cargas y de utilizar métodos no-destructivos para el desamblaje.

El objetivo es conocer cómo afecta la fuerza de apriete a las piezas unidas. Para ello es necesario conocer la rigidez de dichos elementos.

4.3.1 CÁLCULO TEÓRICO

El estudio de la rigidez puede resultar complicado si no se puede despreciar la rigidez de algún elemento por ser pequeña con respecto a las demás, no es necesario obtenerla por experimentación. En algunos casos si es posible calcularla fácilmente, por ejemplo mediante el método del cono de presiones (Figura 4.10).

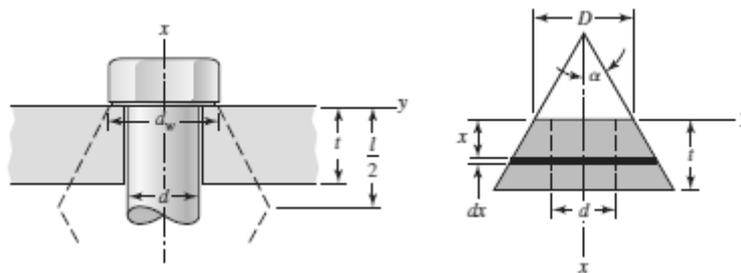


FIGURA 4.10: GEOMETRÍA CONO DE PRESIONES

Se ha observado mediante experimentación que la tensión va disminuyendo a medida que nos alejamos del perno, formando una especie de cono.

Dicho cono puede definirse mediante un ángulo α . El libro de Shigley comenta que diversos autores han estudiado el valor de este ángulo. Inicialmente se pensó en $\alpha = 45^\circ$, pero este sobreestimaba la rigidez de sujeción. Finalmente se considera un intervalo de $25^\circ \leq \alpha \leq 33^\circ$.

En este caso se utilizará un valor de $\alpha = 30^\circ$ para el cálculo de la rigidez.

Basándose en la Figura 4.10 la elongación de un elemento del cono (dx) debido a una carga P será:

$$d\delta = \frac{P dx}{EA} \quad (4.5)$$

Siendo:

$$A = \pi (r_0^2 - r_i^2) = \pi \left[\left(x \tan \alpha + \frac{D}{2} \right)^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right] = \pi \left(x \tan \alpha + \frac{D+d}{2} \right) \left(x \tan \alpha + \frac{D-d}{2} \right)$$

Sustituyendo la ecuación 4.5 en el cálculo del área e integrando se obtiene:

$$\delta = \frac{P}{\pi E} \int_0^t \frac{dx}{\left(x \tan \alpha + \frac{D+d}{2} \right) \left(x \tan \alpha + \frac{D-d}{2} \right)}$$

Resolviendo:

$$\delta = \frac{P}{\pi E d \tan \alpha} \ln \frac{(2t \tan \alpha + D - d)(D + d)}{(2t \tan \alpha + D + d)(D - d)}$$

Por lo tanto la rigidez del elemento será:

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{\pi E d \tan \alpha}{\ln \frac{(2t \tan \alpha + D - d)(D + d)}{(2t \tan \alpha + D + d)(D - d)}} \quad (4.6)$$

Para el ángulo $\alpha = 30^\circ$:

$$k = \frac{0.5774 \pi E d}{\ln \frac{(1.155t + D - d)(D + d)}{(1.155t + D + d)(D - d)}} \quad (4.7)$$

Una vez calculado la rigidez de cada elemento, se calcula la rigidez total considerando que se trata de un conjunto de resortes en serie:

$$\frac{1}{k_m} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_i} \quad (4.8)$$

4.3.2 MODELADO Y RESOLUCIÓN

Mediante un modelo teórico se obtendrá el valor de la rigidez de los elementos de la unión y posteriormente se comprobará mediante el MEF si coincide con lo calculado.

Para ello se define dos piezas a unir con las siguientes características:

Pieza 1	
Diámetro del agujero	25 mm
Espesor	30 mm
Material	ASTM A572
Pieza 2	
Diámetro del agujero	25 mm
Espesor	40 mm
Material	ASTM A572

TABLA 4-7: PIEZAS ENSAMBLAJE

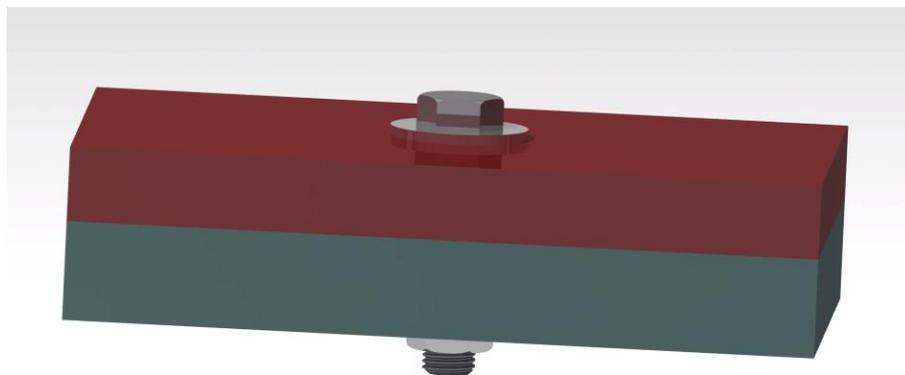


FIGURA 4.11: MODELO 3D - ENSAMBLAJE

Rigidez de la unión – Modelo teórico

En este apartado también es interesante conocer cómo afecta el uso de la arandela en una unión. Por ello se calculará la rigidez cuando se dispone de una arandela y cuando no.

Diámetro del taladro: $d=25$ mm

Diámetro de la cabeza del tornillo: $D=30$ mm

Diámetro exterior de la arandela: $D=55$ mm

Rigidez pieza superior:

Utilizando la ecuación 4.7 y las características de la pieza de la tabla 4-7 se obtiene:

$$k_1 = \frac{0.5774 \pi * 199948 * 25}{\ln \frac{(1.155 * 30 + 30 - 25)(30 + 25)}{(1.155 * 30 + 30 + 25)(30 - 25)}} = 5731353.56 \text{ N/mm}$$

Rigidez pieza superior:

$$k_2 = \frac{0.5774 \pi * 199948 * 25}{\ln \frac{(1.155 * 40 + 30 - 25)(30 + 25)}{(1.155 * 40 + 30 + 25)(30 - 25)}} = 5282394.76 \text{ N/mm}$$

Rigidez pieza superior con arandela:

$$k'_1 = \frac{0.5774 \pi * 199948 * 25}{\ln \frac{(1.155 * 30 + 55 - 25)(55 + 25)}{(1.155 * 30 + 55 + 25)(55 - 25)}} = 22227699.38 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Rigidez total (sin arandela):

$$\frac{1}{k_{sa}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{sa} = 2748861.8 \text{ N/mm}$$

Rigidez total (con arandela):

$$\frac{1}{k_{ca}} = \frac{1}{k'_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{ca} = 4268087.27 \text{ N/mm}$$

Deflexión (sin arandela):

$$F = k_{sa} y_{sa} \Rightarrow y_{sa} = \frac{F}{k_{sa}} = \frac{3015.4}{2748861.8} = 0.001097 \text{ mm}$$

Deflexión (con arandela):

$$F = k_{ca} y_{ca} \Rightarrow y_{ca} = \frac{F}{k_{ca}} = \frac{3015.4}{4268087.27} = 0.000706 \text{ mm}$$

Rigidez de la unión – Modelo 1

El modelo está compuesto por las dos piezas a unir mediante un perno y una tuerca. Se calculará el desplazamiento en la cara superior de la pieza 1 y en la cara inferior de la pieza 2 para obtener la deflexión de la unión y así comprobar su rigidez. Una vez obtenida la rigidez se verificará la distribución de las tensiones en forma de cono.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Tratándose de esfuerzos de compresión se puede obtener buenos resultados mediante elementos brick de 8 nodos

MALLADO:

Se utiliza un tamaño del elemento de 2 mm para las dos piezas a unir.

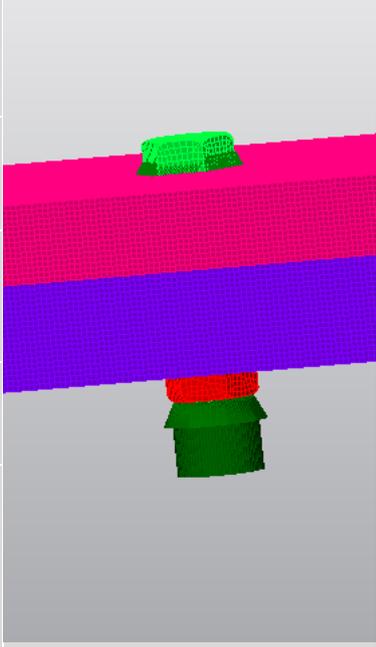
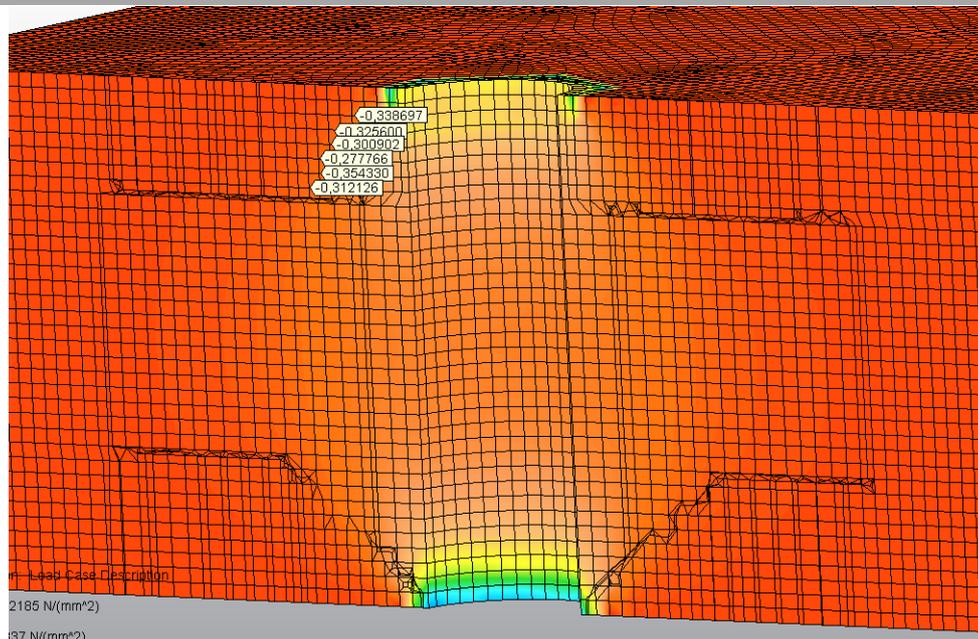
Rigidez de la unión – Modelo 1		
Perno	Cabeza: Fijados los g.d.l. de la cara inferior	
Tuerca	Condición: Unión	
Cargas	Fuerza distribuida: ($F_{m\acute{a}x} = 3015.4 N$) Distribuida en la cara inferior de la tuerca	
Mallado	Bricks (8 nodos)	
Tamaño del elemento	- Pieza de unión 1: 2 mm - Pieza de unión 2: 2 mm	

TABLA 4-8: RIGIDEZ DE LA UNIÓN – MODELO 1

Resultados : Rigidez de la unión - Modelo 1

Tensiones (σ_{zz}) – Cono de presiones



Elemento	Compresión de toda la unión (y)
Brick (8 nodos)	0.0012 mm

TABLA 4-9: RESULTADOS RIGIDEZ DE LA UNIÓN - MODELO 1

Rigidez de la unión – Modelo 2

Para el ensamblaje anterior se añade una arandela. Se comprobará la variación de la rigidez total. De la misma forma se calculará la deflexión y comprobará la distribución de tensiones.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Se utiliza el mismo elemento para comprar resultados.

MALLADO:

Las piezas conservan el mismo tamaño de elemento (2 mm).

Rigidez de la unión – Modelo 2	
Perno	Cabeza: Fijados los g.d.l. de la cara inferior
Tuerca	Condición: Unión
Cargas	Fuerza distribuida: ($F_{m\acute{a}x} = 3015.4 N$) Distribuida en la cara inferior de la tuerca
Mallado	Bricks (8 nodos)
Tamaño del elemento	- Pieza de unión 1: 2 mm - Pieza de unión 2: 2 mm

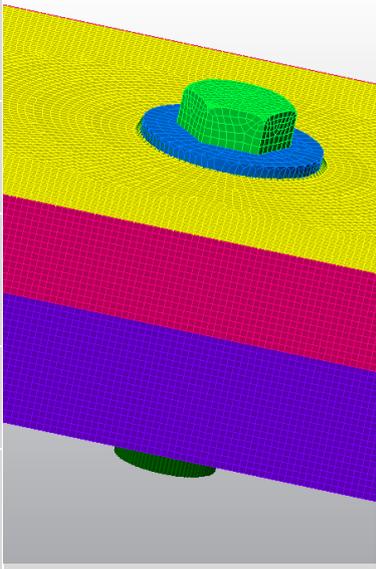


TABLA 4-10: RIGIDEZ DE LA UNIÓN - MODELO 2

Para una mejor visualización de los próximos resultados, se ha modificado la legenda de colores en el programa de elementos finitos para que solo represente los valores de la tensión σ_{zz} dentro del intervalo (-4,0).

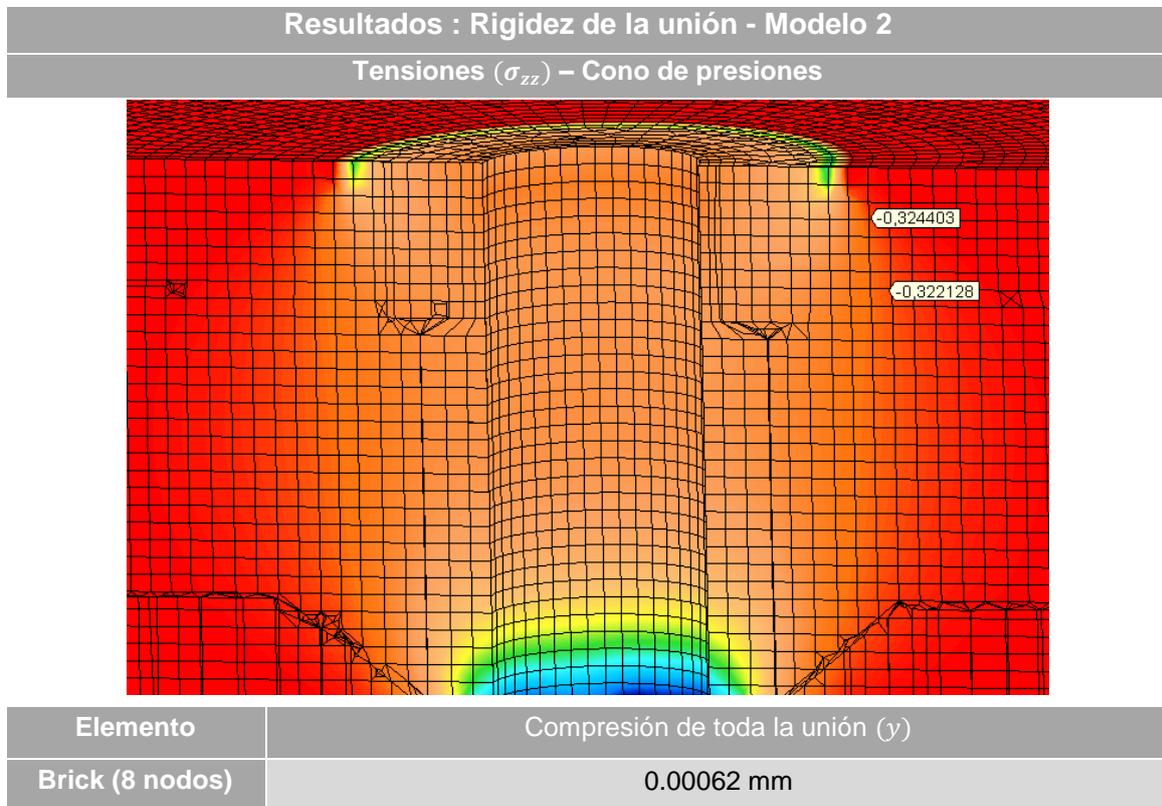


TABLA 4-11: RESULTADOS RIGIDEZ DE LA UNIÓN - MODELO 2

4.3.3 RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Resultados: Rigidez de la unión	
Sin arandela	
Modelo teórico	0.001097 mm
Modelo 1	0.0012 mm
Error	9.4 %
Con arandela	
Modelo teórico	0.000706 mm
Modelo 2	0.00062 mm
Error	12.24 %

TABLA 4-12: COMPARACIÓN DE RESULTADOS - RIGIDEZ DE LA UNIÓN

- El método del cono de presiones utilizado para el cálculo de la rigidez consigue resultados muy cercanos a los obtenidos por el MEF. Esto sucede cuando se impone un ángulo fijo igual a 30°.
- En las tablas 4.9 y 4.11 se puede apreciar la distribución de las tensiones por compresión en forma de cono.
- Por lo tanto este método es una forma bastante precisa de calcular la rigidez.

4.4 UNIONES DESMONTABLES: VIGA SOMETIDA A FLEXIÓN

Cuando se realiza una unión mediante pernos es necesaria una precarga consiguiendo que el perno sufra únicamente un esfuerzo axial mitigando el cortante y anulando los efectos de concentración de esfuerzo en el agujero de las piezas a ensamblar.

Si se pierde la precarga el perno empieza a sufrir el cortante y posteriormente fallan el resto de pernos. Por ello es interesante conocer el estudio de uniones a cortante.

4.4.1 CÁLCULO TEÓRICO

Para dicho análisis es necesario conocer la posición del centroide o centro del movimiento relativo entre elementos.

Si se dispone de cinco pernos en unas posiciones determinadas, y sea A_i el área de sección transversal correspondiente a cada perno, entonces las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) del centroide se obtienen de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5} = \frac{\sum_1^n A_i x_i}{\sum_1^n A_i} \quad (4.9)$$

$$\bar{y} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + A_4y_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5} = \frac{\sum_1^n A_i y_i}{\sum_1^n A_i} \quad (4.10)$$

x_i, y_i son las distancias hasta el centro del área i-ésima.

Si se trata de una distribución con alguna simetría el cálculo es más sencillo.

Para su estudio se define una viga con una carga distribuida en el centro y está unida a los pilares mediante cuatro pernos iguales y distribuidos de la siguiente forma:

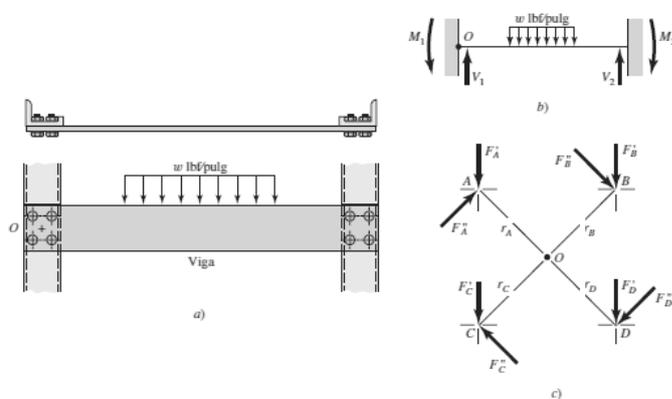


FIGURA 4.12: UNIÓN DE UNA VIGA MEDIANTE PERNOS

En el momento del estudio los pernos empiezas a sufrir el esfuerzo cortante por la insuficiencia de la precarga.

En la figura 4.6-c se observan las fuerzas resultantes que actúan sobre los pasadores, siendo la fuerza neta y el momento igual y opuesto a V_1 y M_1 .

- Carga en cada perno (Pernos iguales):

El cortante V_1 se distribuye igualmente entre ellos (n el número de pernos), por ello definimos como:

$$\text{Cortante primario } F'_i = \frac{V_1}{n} \quad (4.11)$$

Por la influencia del momento M_1 se define una carga adicional, denominada cortante secundario (F''), a cada elemento. Dichas cargas y el momento M_1 están relacionados de la siguiente forma:

$$M_1 = F''_A r_A + F''_B r_B + F''_C r_C + F''_D r_D \quad (4.12)$$

$$\frac{F''_A}{r_A} = \frac{F''_B}{r_B} = \frac{F''_C}{r_C} = \frac{F''_D}{r_D} \quad (4.13)$$

Por lo tanto al sumar la fuerzas vectorialmente, la fuerza que soporta cada perno dependerá de su distancia al centroide (O).

El más alejado será el que soporte la mayor carga y el que debe ser estudiado para comprobar su resistencia y definir las características del conjunto de pernos.

4.4.2 MODELADO

En la realización de este estudio se define una viga empotrada mediante cuatro pernos iguales. Los pernos son los mismos de la Figura 4.6 y se simula que han perdido la carga de apriete y empiezan a sufrir el efecto del cortante.

Perno - Tuerca	
Tamaño	M20X100
Material	AISI 4150
Placa de agarre	
Tamaño	340 mm x 340 mm x 30 mm
Material	ASTM A572
Viga	
Tamaño	1200 mm x 340 mm x 40 mm
Material	ASTM A572

TABLA 4-13: MODELADO 3D - VIGA SUJETADA MEDIANTE PERNOS

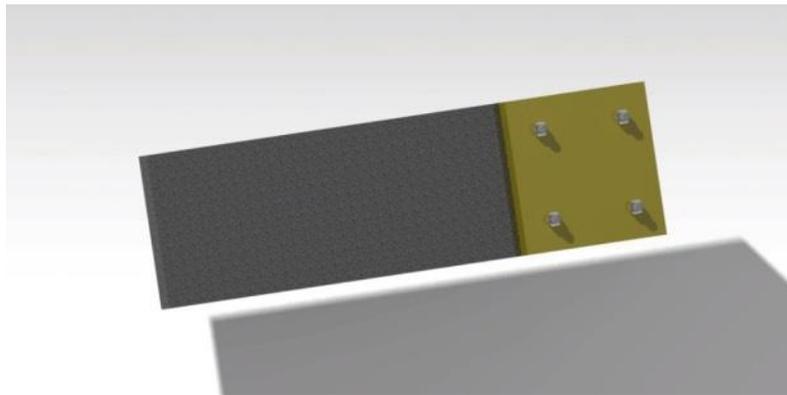


FIGURA 4.13: MODELO 3D: VIGA FIJADA MEDIANTE PERNOS

Fijación de una viga mediante pernos – Modelo Teórico

Una viga empotrada mediante pernos está sometida a una carga F (10 kN) en el extremo libre.

Se ha perdido el apriete y es necesario un estudio de la influencia del esfuerzo cortante en los elementos de unión.

Se trata de una distribución de pernos muy sencilla, por lo que se puede obtener el centroide por simetría.

La figura 4.10 representa el mismo caso al estudiado aquí, y por lo tanto:

- El cortante aplicado en el centroide (distribución es constante a lo largo de la viga, e igual a la carga puntual F):

$$V = F = 10 \text{ kN}$$

- El momento con respecto al centroide:

$$M = 10000 \text{ N} * 1030 \text{ mm} = 10,3(10^6) \text{ Nmm}$$

La distancia de cada perno al centroide es de:

$$r_i = \sqrt{100^2 + 100^2} = 141.42 \text{ mm}$$

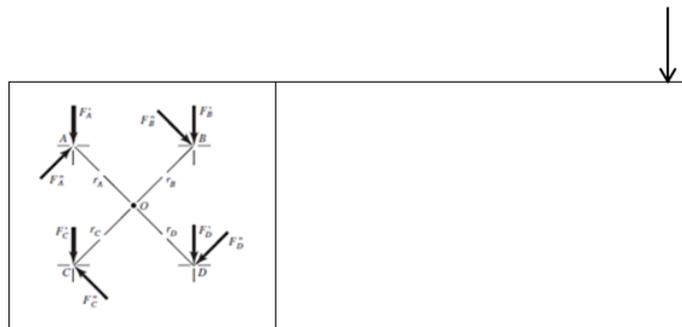
El cortante primario se distribuye de forma equitativa entre los pernos:

$$F' = \frac{V}{4} = \frac{10000}{4} = 2500 \text{ N}$$

El cortante secundario se calcula utilizando la ecuación 4.8:

$$F'' = \frac{M}{4r_i} = \frac{10,3(10^6)}{4 * 141,42} = 18208 \text{ N}$$

Si sumamos vectorialmente los cortantes en cada perno como en la figura 4.10:



- Perno A:

$$F_A = \sqrt{(18208 \cos(45))^2 + (2500 - 18208 \sin(45))^2} = 16535 \text{ N}$$

- Perno B:

$$F_B = \sqrt{(18208 \cos(45))^2 + (2500 + 18208 \sin(45))^2} = 20054 \text{ N}$$

- Perno C:

$$F_C = \sqrt{(18208 \cos(45))^2 + (2500 - 18208 \sin(45))^2} = 16535 \text{ N}$$

- Perno D:

$$F_D = \sqrt{(18208 \cos(45))^2 + (2500 + 18208 \sin(45))^2} = 20054 \text{ N}$$

Los pernos B y D son los más cargados, y por tanto los que deben ser la referencia para el dimensionamiento de los demás.

La placa tiene 30 mm de espesor, y el cuerpo del perno sin roscar 54 mm. Entonces el cortante lo sufrirá el cuerpo con un diámetro de 20 mm.

Fijación de una viga mediante pernos – Modelo MEF

El modelo consta de cuatro pernos con sus respectivas tuercas, una placa de fijación con una de sus caras con todos sus grados de libertad fijados y una viga sometida a una carga en el extremo. Para poder calcular el cortante, la interacción entre el soporte y la viga es un contacto por superficie sin fricción.

ELECCIÓN DEL ELEMENTO:

Se utiliza el brick de 20 nodos para obtener una mayor precisión.

MALLADO:

Por las dimensiones del perno el esfuerzo cortante será soportado por su cuerpo, y con un tamaño de 3 mm será suficiente.

Fijación de una viga mediante pernos – Modelo MEF	
Pernos	Brick (20 nodos): 3 mm
Tuercas	Brick (8 nodos): 3 mm
Placa (fijación)	Brick (8 nodos): 10 mm Taladros: 20 mm Fijados todos los g.d.l.
Viga	Brick (8 nodos): 10 mm Taladros: 20 mm Contacto por superficie (Placa)
Cargas	Fuerza distribuida: ($F_{m\acute{a}x} = 10 \text{ kN}$) Distribuida en el extremo libre

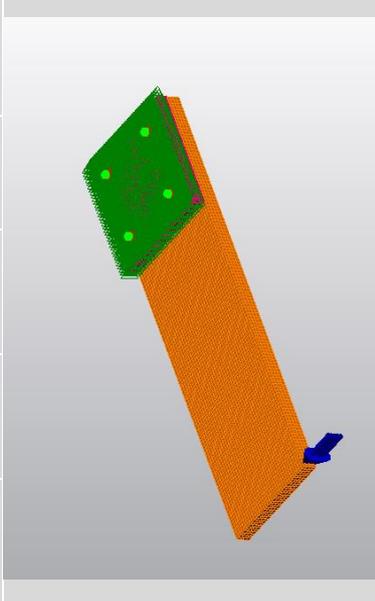


TABLA 4-14: FIJACIÓN VIGA - MODELO MEF

Una vez obtenidas las fuerzas internas, estas se sumarán vectorialmente para cada perno y así poder aproximar al cortante teórico.

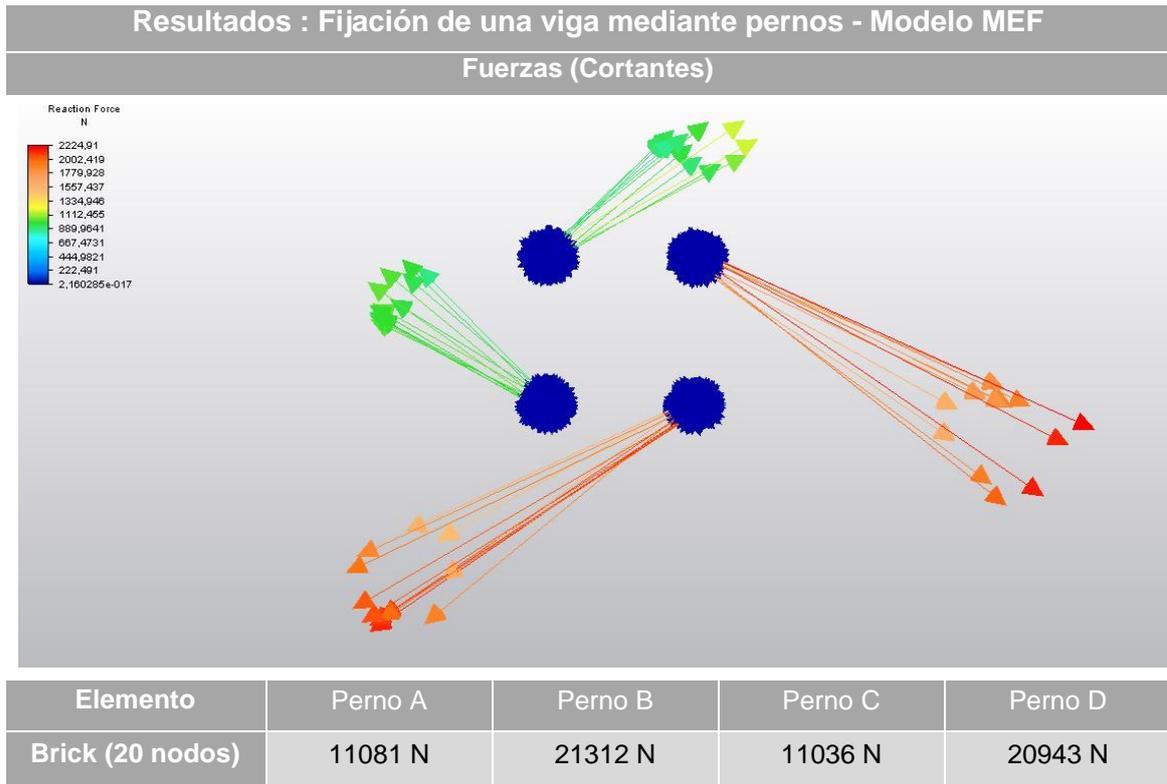


TABLA 4-15: RESULTADOS FIJACIÓN VIGA - MODELO MEF

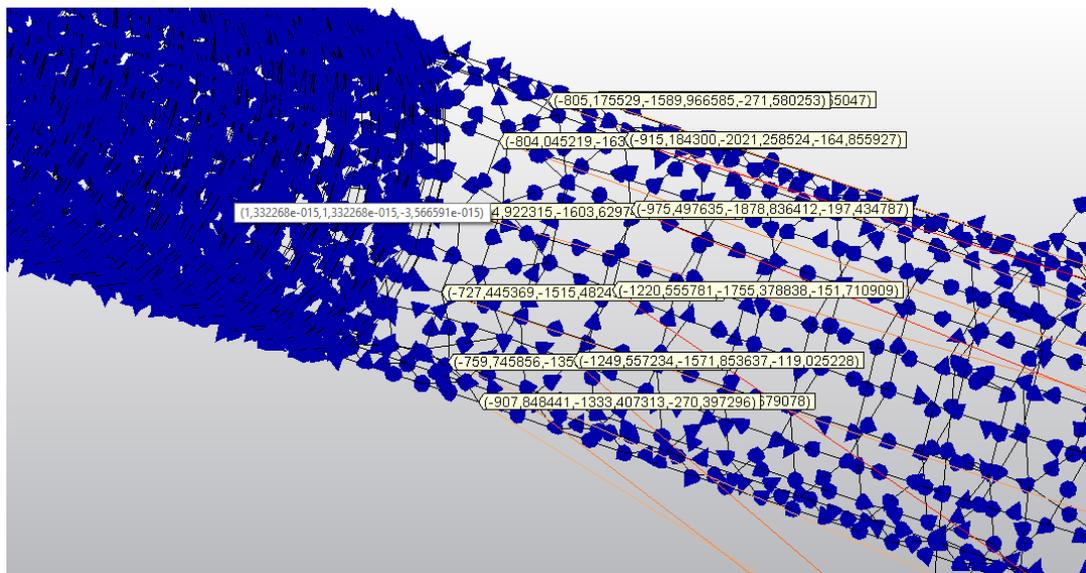


FIGURA 4.14: CÁLCULO PERNO

Perno	Perno A			Perno B		
Componente	Fx (N)	Fy (N)	Fz (N)	Fx (N)	Fy (N)	Fz (N)
	612	613	295	1131	1511	155
	618	650	251	1249	1571	119
	612	599	281	907	1333	270
	553	651	182	1220	1755	151
	583	701	267	759	1359	382
	567	698	128	975	1878	270
	516	729	153	727	1515	508
	625	787	104	915	2021	165
	470	811	91	695	1603	466
	644	955	94	803	1691	232
	504	943	62	804	1635	359
	566	1008	60	805	1589	271
ΣFi	6870	8532	1673	10990	17950	3348
Ftotal	11081 N			21312 N		
Perno	Perno C			Perno D		
Componente	Fx (N)	Fy (N)	Fz (N)	Fx (N)	Fy (N)	Fz (N)
	607	717	89	1161	1404	439
	630	493	71	1127	1657	495
	676	687	53	930	1286	345
	495	890	255	848	1757	89
	651	783	53	930	1286	346
	437	893	234	1122	1708	414
	601	839	70	725	1284	257
	468	856	208	665	1437	156
	503	831	105	1085	1645	298
	475	863	201	781	1692	78
	480	842	153	1087	1713	228
	493	791	167	1021	1740	138
ΣFi	6516	8768	1570	11482	17205	3283
Ftotal	11036 N			20943 N		

TABLA 4-16: CARGAS EN LOS PERNOS (MEF)

Todas las fuerzas obtenidas están aplicadas en el cuerpo del perno, como era de esperar por las dimensiones de la viga y del propio perno.

4.4.3 RESOLUCIÓN Y CONCLUSIONES

Modelo	Perno A	Perno B	Perno C	Perno D
Modelo Teórico	16535 N	20054 N	16535 N	20054 N
Modelo MEF	11081 N	21312 N	11036 N	20943 N
Error	32.98 %	6.27 %	33.25 %	4.43 %

TABLA 4-17: COMPARACIÓN DE RESULTADOS - FIJACIÓN DE UNA VIGA MEDIANTE PERNOS

- Al igual que en el modelo teórico los pernos más cercanos al extremo libre soportan una mayor carga que los otros dos, y además los valores entre A-C y B-D son muy parecidos.
- Los valores obtenidos para los pernos más cargados (B,D) son muy cercanos a los teórico siendo ligeramente superiores.
- En el caso de A y C el error es considerablemente mayor, obteniéndose valores muy por debajo de lo que se había calculado anteriormente.
- Aunque en el modelo teórico se considera un caso bidimensional, al calcularlo en el MEF se ha tenido en cuenta las tres componentes, pero es cierto que una de ellas no aporta nada significativo.
- Por lo tanto el modelo teórico utilizado es suficientemente preciso.
- Además se puede comprobar el aumento de las tensiones en el perno cuando está sometido a esfuerzos cortantes comparados cuando solamente aguantan la precarga.

5

Conclusiones

A lo largo del trabajo se han ido comentando los puntos más relevantes de los diferentes apartados y destacando los posibles problemas que pueden ir apareciendo en el modelado de piezas.

Se ha desarrollado de una forma sencilla los conceptos básicos a tener en cuenta antes de comenzar a utilizar el método de elementos finitos y posibles consejos a la hora de elegir elementos dependiendo de los esfuerzos presentes.

Una base teórica para resortes y pernos, siendo muy útil como referencia para el modelado. Existen infinitos modelos para un mismo problema, por lo que se ha intentado utilizar los modelos más sencillos pero a la vez adecuados para la obtención de resultados.

Con todo esto se podrá dar respuesta a las cuestiones utilizadas como objetivos:

1- Importancia de un amplio conocimiento del método de elementos finitos y del cálculo teórico.

Como se ha podido apreciar en los diferentes modelos, de la elección del elemento depende mucho el resultado. Existen elementos que no son capaces de calcular algunos tipos de esfuerzos provocando unos resultados inservibles. Conociendo una mayor cantidad de elementos serás capaz de generar mejores modelos. Y para su elección primero debes conocer los esfuerzos a los que está sometido una determinada pieza, siendo necesario el conocimiento de la teoría clásica y si es posible ser capaz de crear modelos que se puedan resolver con ecuaciones sencillas.

2- Elección del modelo (Mallado y condiciones de contorno).

Conociendo el funcionamiento del método de elementos finitos es evidente que generalmente un mayor número nodos darán mejores resultados. Pero no siempre es así, y se deberá ser capaz de definir el número necesario de nodos para cada zona

intentando alcanzar la mayor eficiencia, debido a que en modelos complejos el tiempo de cálculo puede llegar a ser considerable.

También prestar especial atención en las zonas más críticas, donde puede existir concentración de tensiones y es necesario un estudio más exhaustivo.

Una vez mallado el modelo se buscan los mejores resultados y por ello la elección de las condiciones de contorno es vital. En los diferentes modelos utilizados en el cálculo de resortes y pernos, estas se han ido modificando para conocer la repercusión que tienen en los resultados, siendo en algunos casos considerable.

3- Validación de los resultados

Se trata de un aspecto fundamental a la hora de aceptar resultados. Siempre que sea posible es indispensable unos valores teóricos para poder obtener una idea de la magnitud para los valores obtenidos.

Siempre se ha de validar los resultados antes de presentarlos, ya sea de forma teórica o mediante la experiencia de anteriores trabajos.

Para concluir he de reconocer que este trabajo me ha servido para darme cuenta de la dificultad que este proceso supone, y de la necesidad de ampliar mis conocimientos, no solo sobre resistencia de materiales sino del propio método, que supone un gran avance en la materia, y se ha convertido en una herramienta indispensable en el área de diseño.

Bibliografía

LIBROS

- [1] Cook, R. - *Concepts and applications of finite element analysis* (2002)
- [2] Zienkiewicz, O., Taylor, R. – *El método de los elementos finitos* (4ª edición)
- [3] G. Budynas, R. y Keith Nisbett, J. - *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley* (8ª Edición)
- [4] Faires, V. – *Diseño de elementos de máquinas* (4ª edición)
- [5] Norton, R. – *Diseño de maquinaria* (3ª edición)
- [6] Mott R. – *Diseño de elementos de máquinas* (4ª edición)
- [7] Bickford J. – *An introduction to the design and behavior of bolted joints*
- [8] Gere M. – *Timoshenko: Resistencia de materiales*

PROYECTOS Y TRABAJOS

- [T1] Martinez Lopez, E.. – *Cálculo de resortes helicoidales de compresión* (U.P. de Cartagena)
- [T2] Gerez, C. – *Resortes mecánicos helicoidales*
- [T3] UCLM – *Unión de elementos*

PÁGINAS WEB

- [W1] <http://www.rationalstock.es/>
- [W2] <http://www.ag.com.ar/>

Índice de tablas

Tabla 3-1: Características geométricas resorte A	29
Tabla 3-2: Cargas y condiciones de contorno - Resorte A.....	30
Tabla 3-3: Propiedades ASTM A242	31
Tabla 3-4: Resultados Resorte A	32
Tabla 3-5: Modelado Resorte A.....	33
Tabla 3-6: Resorte A - Modelo 1	35
Tabla 3-7: Resultados: Resorte A - Modelo 1.....	36
Tabla 3-8: Resorte A - Modelo 2	37
Tabla 3-9: Resultados: Resorte A – Modelo 2.....	37
Tabla 3-10: Resorte A - Modelo 3	39
Tabla 3-11: Resultados: Resorte A - Modelo 3	39
Tabla 3-12: Resultados: Resorte A – Modelo 4.....	40
Tabla 3-13: Comparación de resultados - Resorte A	40
Tabla 3-14: Características geométricas Resorte B	44
Tabla 3-15: Condiciones de contorno Modelo teórico Resorte B.....	45
Tabla 3-16: Resultados Modelo Teórico - Resorte B.....	47
Tabla 3-17: Modelado 3D - Resorte B	48
Tabla 3-18: Resorte B - Modelo 1.1	49
Tabla 3-19: Resultados Resorte B - Modelo 1.1	50
Tabla 3-20: Resorte B - Modelo 1.2.....	51
Tabla 3-21: Resultados Resorte B - Modelo 1.2.....	52
Tabla 3-22: Resorte B - Modelo 2.1	53
Tabla 3-23: Resultados Resorte B - Modelo 2.1	54
Tabla 3-24: Resorte B - Modelo 2.2.....	54
Tabla 3-25: Resultados Resorte B - Modelo 2.2.....	55
Tabla 3-26: Resorte B - Modelo 3.....	56
Tabla 3-27: Resultados Resorte B.....	57
Tabla 3-28: Características geométricas Resorte C	62
Tabla 3-29: Modelo teórico Resorte C	62
Tabla 3-30: Resultados Modelo teórico - Resorte C	64
Tabla 3-31: Modelado 3D - Resorte C	64
Tabla 3-32: Resorte C - Modelo 1.1	66
Tabla 3-33: Resultados Resorte C - Modelo 1.1	66
Tabla 3-34: Resorte C - Modelo 1.2.....	67
Tabla 3-35: Resultados Resorte C - Modelo 1.2	67
Tabla 3-36: Resorte C - Modelo 2.1	68
Tabla 3-37: Resultados Resorte C - Modelo 2.1	69
Tabla 3-38: Resorte C - Modelo 2.2.....	69
Tabla 3-39: Resultados Resorte C - Modelo 2.2	70
Tabla 3-40: Comparación de resultados - Resorte C.....	70
Tabla 4-1: Cargas y condiciones de contorno - Modelo teórico.....	77
Tabla 4-2: Perno - Modelo 1	80
Tabla 4-3: Resultados Perno - Modelo 1	81
Tabla 4-4: Perno - Modelo 2	82
Tabla 4-5: Resultados Perno - Modelo 2	83
Tabla 4-6: Comparación de resultados - Tensiones en pernos.....	83
Tabla 4-7: Piezas ensamblaje	88
Tabla 4-8: Rigidez de la unión – Modelo 1	90
Tabla 4-9: Resultados Rigidez de la unión - Modelo 1	91
Tabla 4-10: Rigidez de la unión - Modelo 2.....	92

Tabla 4-11: Resultados Rigidez de la unión - Modelo 2.....	92
Tabla 4-12: Comparación de resultados - Rigidez de la unión	93
Tabla 4-13: Modelado 3D - Viga sujeta mediante pernos	95
Tabla 4-14: Fijación viga - Modelo MEF.....	98
Tabla 4-15: Resultados Fijación viga - Modelo MEF	99
Tabla 4-16: Cargas en los pernos (MEF)	100
Tabla 4-17: Comparación de resultados - Fijación de una viga mediante pernos.....	101

Índice de figuras

[1]

Figura 2.1: Deformación en un elemento diferencial	5
Figura 2.2: Equilibrio en un elemento diferencial	6
Figura 2.3: Elemento barra.....	9
Figura 2.4: Ensamblaje de dos elementos barra	10
Figura 2.5: Comparación del modelo matemático y utilizando elementos barra	11
Figura 2.6: Elemento viga (Beam) [6 g.d.l.]	12
Figura 2.7: Transformación entre coordenadas locales - globales	13
Figura 2.8: Elemento viga (Beam) [12 g.d.l.]	15
Figura 2.9: Elemento Triangular (CST).....	16
Figura 2.10: Representación de la tensión σ_x	16
Figura 2.11: Elemento triangular (LST)	17
Figura 2.12: Elemento rectangular Q4.....	18
Figura 2.13: Elemento rectangular Q8.....	19
Figura 2.14: Comparación del cálculo de una viga con diferentes elementos	19
Figura 2.15: Elementos Bricks - a) Brick 8 nodos , b) Brick 20 nodos.....	20
Figura 3.1: Tipos de extremos para resortes de compresión.....	24
Figura 3.2: Configuración de un resorte de compresión.....	24
Figura 3.3: Cálculo de resortes de compresión	25
Figura 3.4: Distribución de esfuerzos en la sección del alambre a) Producidas por la fuerza f; b) Producidas por el par de torsión T; c) Distribución total de esfuerzos cortantes	26
Figura 3.5: Características del resorte según los extremos.....	31
Figura 3.6: Modelo 3D	33
Figura 3.7: Tipos de Bricks	34
Figura 3.8: Representación de la constante elástica - Resorte A.....	41
Figura 3.9: Tipos de ganchos	42
Figura 3.10: Características del gancho seleccionado.....	42
Figura 3.11: Modelo 3D - Resorte B.....	48
Figura 3.12: Representación de la constante elástica - Resorte B	58
Figura 3.13: Distribución de tensiones - Sección Resorte B.....	58
Figura 3.14: Resorte de torsión	59
Figura 3.15: Modelo 3D - Resorte C.....	65
Figura 3.16: Representación de la constante elástica - Resorte C	71
Figura 4.1: Tipos de cabeza de tornillo.....	73
Figura 4.2: Características geométricas de una rosca	73
Figura 4.3: Definición de la rosca métrica	74
Figura 4.4: Ángulo de rosca.....	74
Figura 4.5: Normalización perno - tuerca	76
Figura 4.6: Modelo 3D: Perno - Tuerca	77
Figura 4.7: Dimensiones Perno - Tuerca.....	77

Figura 4.8: Promediando valores - Sup) Sin promediar, Inf) Promediados	84
Figura 4.9: Comparación concentración de tensiones	85
Figura 4.10: Geometría cono de presiones.....	86
Figura 4.11: Modelo 3D - Ensamblaje	88
Figura 4.12: Unión de una viga mediante pernos	94
Figura 4.13: Modelo 3D: Viga fijada mediante pernos.....	96
Figura 4.14: Cálculo Perno.....	99