Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en MATEMÁTICAS

Introducción a la teoría de crecimiento de funciones enteras

Autor: Rubén Rodríguez Ballesteros

Tutor: Javier Sanz Gil

D. JAVIER SANZ GIL, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que el presente trabajo, "Introducción a la teoría de crecimiento de funciones enteras", ha sido realizado bajo su dirección en el Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, por Don Rubén Rodríguez Ballesteros, y constituye su Trabajo Fin de Grado para optar al título de Graduado en Matemáticas.

Que le consta que el trabajo es original e inédito, y que autoriza su presentación.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a uno de septiembre de dos mil quince.

Fdo.: Javier Sanz Gil

Índice general

Introducción

La asignatura obligatoria "Variable Compleja" del tercer curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de Valladolid cubre los contenidos realmente esenciales de la teoría elemental de funciones de variable compleja. Muchos aspectos de esta teoría que resultan accesibles al estudiante tras esta formación inicial quedan necesariamente sin cubrir, y uno de los más significativos es el que concierne a los resultados que relacionan entre sí el estudio del crecimiento de las funciones enteras, la localización de sus ceros y la factorización de las mismas que el conocimiento de dichos ceros permite. El objetivo de este trabajo es presentar una colección de resultados, todos ellos clásicos, en esta dirección.

Como es bien sabido, las funciones polinómicas no ofrecen dificultades en el estudio de estos aspectos: por una parte, el teorema fundamental del álgebra permite determinar un polinomio (salvo un factor constante) a partir de sus ceros, y por otra parte dichas funciones quedan caracterizadas, en virtud de las estimaciones de Cauchy, como aquellas con crecimiento potencial: existen constantes $C, k > 0$ tales que para todo $r > 0$ se tiene que

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leq Cr^k.$$

Por lo tanto, nos centraremos en el estudio de las funciones enteras no polinómicas, denominadas funciones transcendentes. El primer capítulo se dedica inicialmente a la introducción del orden y, si este es finito, el tipo de las funciones enteras como medidas del ritmo de crecimiento de la función $M_f(r)$, y se presentan fórmulas de cálculo para ambos en términos de los coeficientes de la serie de Taylor de f centrada en 0. Esto permite proporcionar ejemplos de funciones con orden y tipo prefijados, y analizar las propiedades de crecimiento de las funciones elementales clásicas. Es posible también realizar un estudio del crecimiento no global, sino en sectores del plano con vértice en el origen, y esto da lugar al teorema de Phragmén-Lindelöf, que relaciona la amplitud de dicho sector con el orden de crecimiento de una función holomorfa en el mismo. Cerramos este capítulo con una aplicación elemental de estas ideas a un problema de solución altamente no trivial: para funciones de orden finito, es posible dar una prueba sencilla del conocido como teorema débil de Picard, que afirma que una función entera toma todo valor complejo salvo a lo más uno.

El segundo capítulo se centra en la obtención de resultados que liguen las propiedades de crecimiento con el conjunto de ceros de una función transcendente, obteniendo resultados tanto de factorización como de interpolación. Se introducen en primer lugar diversas herramientas que juegan un papel clave para lo que sigue: el concepto de exponente de convergencia de la sucesión de ceros no nulos de una función entera, los resultados fundamentales sobre productos infinitos, y las funciones auxiliares conocidas como factores elementales de Weierstrass. Un primer logro, de naturaleza interpolatoria, es el teorema de Weierstrass, que permite construir funciones enteras con un conjunto de ceros arbitrariamente prefijado (sujeto a las condiciones naturales impuestas por el principio de los ceros aislados). De aquí se deduce inmediatamente un primer resultado de factorización para funciones de orden arbitrario. Ahora bien, el producto infinito de factores elementales que aparece en la misma, recogiendo la aportación de la sucesión de ceros no nulos, puede adoptar una forma sencilla cuando el exponente de convergencia de dicha sucesión es finito. El hecho de que esto siempre ocurra cuando la función entera de partida es de orden finito permite dar el teorema de factorización de Hadamard, que proporciona una información más precisa acerca de la factorización de las funciones de orden finito, y el teorema de Borel, que a partir de la misma permite determinar el orden. Se cierra este capítulo con una mejora del teorema débil de Picard para funciones de orden finito y no entero.

El tercer capítulo se dedica al análisis de problemas de interpolación más generales. En particular, se pretende construir funciones enteras con un número finito de derivadas prefijadas en una sucesión de puntos también elegida arbitrariamente (con las restricciones naturales). Para ello, se comienza con el resultado de Mittag-Leffler, que permite construir funciones meromorfas en el plano complejo con polos, y partes principales del desarrollo de Laurent en los mismos, arbitrariamente prefijadas. Una combinación adecuada de este teorema con el de Weierstrass del capítulo previo proporciona el resultado buscado, que se puede generalizar a abiertos del plano complejo.

Por último, se presenta un estudio de la función Γ de Euler y de sus propiedades fundamentales, que permita deducir sus principales características de crecimiento y asintóticas. Se introduce su expresión mediante los teoremas de Weierstrass o Hadamard, se analizan diversas representaciones, entre ellas la clásica integral euleriana de segunda especie, y se concluye probando que $1/\Gamma$ es una función de orden 1 y tipo maximal, e indicando cómo obtener a partir de lo anterior la conocida fórmula de Stirling.

Resumen

En este trabajo de fin de grado se presentan resultados clásicos relativos al crecimiento y la factorización de las funciones trascendentes, y algunas de sus consecuencias. Tras introducir el concepto de orden, se obtiene el teorema de Weierstrass, y los teoremas de Hadamard y Borel para funciones de orden finito. Se deduce de estos resultados una prueba elemental del teorema pequeño de Picard para funciones de orden finito. El teorema de Mittag-Leffler sobre la existencia de funciones meromorfas en el plano con polos y partes principales en los mismos arbitrariamente prefijados permite obtener resultados de interpolación que generalizan el teorema de Weierstrass. Finalmente, se usa la teoría anterior para mostrar la construcción de la función Gamma de Euler y analizar varias de sus propiedades de crecimiento.

Abstract

In this report we present some classical results on the growth and factorization properties of trascendental functions, together with some of its applications. After introducing the concept of order, Weierstrass' theorem is obtained, as well as Hadamard's and Borel's theorems for functions of finite order. From these results, an elementary proof of the little Picard theorem for finite order functions is deduced. The theorem of Mittag-Leffler, concerning the existence of meromorphic functions in the plane with arbitrarily given poles, and prescribed principal parts in them, allows us to obtain some interpolatory results which generalize Weierstrass' theorem. Finally, we use the previous theory in order to present a construction of Euler's Gamma function and to analyze some of its growth properties.

Capítulo 1

Crecimiento, orden y tipo

En este capítulo introduciremos los elementos básicos que nos permiten estudiar el crecimiento de una funcion entera en todo el plano. También daremos resultados sobre cómo calcular estos elementos a partir de la expresión en serie de potencias de la función. Finalmente veremos cómo particularizar esta información a un sector del plano.

1.1. Orden y tipo de una función entera.

Introduzcamos pues la función *módulo máximo*, M_f, asociada a una función entera f, cuyo estudio proporciona información sobre el crecimiento del módulo de la función f. Elementos esenciales serán el orden y el tipo de la función.

Recordemos que una función entera es una aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa en todo el plano. Admitirá, por lo tanto, un desarrollo en serie de potencias centrado en el origen y con radio de convergencia infinito. Esto es,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

En la situación anterior se tiene que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0.$$

Es decir, dicho desarrollo en serie de potencias es precisamente el desarrollo de Taylor.

Definición 1.1. Sea f una función entera. Para cada $r > 0$, se define el valor

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|. \tag{1.1}$$

Cuando no haya ambigüedad omitiremos el subíndice f que especifica la función entera a la que está referido dicho máximo.

Observación 1.2. Vemos que, por el teorema de Weierstrass para funciones continuas en compactos, dicho valor es un número real no negativo.

Además, en virtud del principio de identidad, tendremos que $M_f(r) = 0$ para algún r si, y sólo si, la función f es idénticamente nula. Por lo tanto, cuando f no sea idénticamente nula nos centraremos en el estudio de la función *módulo máximo* de f, $M_f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, dada por el valor (1.1).

Notamos ahora que, como consecuencia del teorema del módulo máximo, la función $M_f(r)$ es estrictamente creciente en $(0, \infty)$ siempre que f no sea constante. De hecho,

$$\lim_{r \to \infty} M_f(r) = \infty,$$

puesto que si no, gracias al teorema de Liouville, llegaríamos a una contradicción.

Veamos a continuación cómo de rápido diverge la función $M_f(r)$, dependiendo de cómo es el desarrollo de Taylor de la función f.

1) Primero, cuando f es un polinomio, está claro que si tomamos un $\mu > \deg(f)$, existirá $r_0 > 0$ tal que $M_f(r) \leq r^\mu$ para todo $r > r_0$.

2) Recíprocamente, suponemos que existe $\mu > 0$ tal que $M_f(r) \leq r^\mu$, para $r > r_0$ suficientemente grande y suponemos que la serie de Taylor de f es como sigue

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Entonces las desigualdades de Cauchy nos muestran que, para $r > 0$, se tiene que $|a_n| < r^{\mu - n}$ y consiguientemente $a_n = 0$ para $n > \mu$, es decir, f es un polinomio de grado, a lo sumo, parte entera de μ.

Puesto que el estudio de polinomios en este contexto no ofrece dificultades, nos centraremos en las llamadas funciones (enteras) trascendentes, es decir, las no polinómicas o aquellas cuyo desarrollo de Taylor tiene infinitos coeficientes no nulos.

Por lo tanto tenemos que f es trascendente si, y sólo si, para todo $\mu > 0$ existe una sucesión de números reales $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ estrictamente creciente hacia infinito de modo que $M_f(r_k) > r_k^\mu$ para todo k. Obsérvese que esta desigualdad es equivalente a que

$$\frac{\log[M(r_k)]}{\log(r_k)} > \mu.$$

En términos de límites esto significa que:

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log[M(r)]}{\log(r)} = \infty.$$

Es por esto que la comparación de $M(r)$ con funciones potenciales, desde el punto de vista del crecimiento, no es apropiada cuando se consideran funciones trascendentes. De forma natural, haciendo uso del conocimiento de las funciones elementales reales, procede comparar $M(r)$ con funciones del tipo e^{r^μ}, con $\mu > 0$. Esto motiva las siguientes definiciones, el *orden* y el *tipo* de una función.

Definición 1.3. Sea f una función entera, decimos que es de *orden finito* cuando:

$$\text{Existen } \mu > 0 \quad \text{y} \quad R(\mu) > 0 \text{ tales que } M(r) < e^{r^\mu} \text{ para todo } r > R(\mu). \tag{1.2}$$

Llamaremos *orden* de la función f al extremo inferior del conjunto

$$\{\mu > 0 : \mu \text{ verifica (1.2)}\}.$$

Habitualmente denotaremos el orden de una función mediante la letra ρ. Si el conjunto anterior es vacío se dirá que f es de *orden infinito*, $\rho = \infty$.

Caractericemos la definición anterior en términos de límites.

Proposición 1.4. Sea f una función entera no constante. Entonces su orden ρ se puede obtener como

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log[M(r)]}{\log(r)}.$$

Demostración. Por la definición de orden como inferior, dado $\varepsilon > 0$, tendremos que:

Por un lado existe $R(\varepsilon)$ tal que $M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$ para cada $r > R(\varepsilon)$. Despejando tendremos que

$$\frac{\log\log[M(r)]}{\log(r)} < \rho + \varepsilon \ , \ \text{ siempre que } r > R(\varepsilon).$$

Por otro lado existen módulos $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ arbitrariamente grandes cumpliendo que $M(r_n) > e^{r_n^{\rho-\varepsilon}}$, es decir,

$$\frac{\log\log[M(r_n)]}{\log(r_n)} > \rho - \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}.$$

De las dos desigualdades anteriores deducimos precisamente que

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log[M(r)]}{\log(r)}.$$

★

Definición 1.5. Sea f una función entera de orden finito ρ, decimos que es de *tipo finito* cuando:

$$\text{Existen } K > 0 \quad \text{y} \quad R(K) > 0 \text{ tales que } M(r) < e^{Kr^\rho} \text{ para } r > R(K). \tag{1.3}$$

Llamaremos *tipo* de la función f al extremo inferior del conjunto

$$\{K > 0 : K \text{ verifica (1.3)}\}.$$

Habitualmente denotaremos el tipo de una función por σ. Nuevamente, si el conjunto anterior es vacío se dirá que f es de *tipo infinito*, $\sigma = \infty$.

De manera similar al orden, caracterizaremos el tipo en términos de límites.

Proposición 1.6. Sea f una función entera no constante de orden finito ρ. Entonces su tipo σ se puede obtener como

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho}.$$

Demostración. Por la definición de tipo como inferior, dado $\varepsilon > 0$, tendremos que:

Primero, por un lado, existe $R(\varepsilon)$ tal que $M(r) < e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho}$para todo $r > R(\varepsilon)$. Despejando esto es

$$\frac{\log M(r)}{r^\rho} < \sigma + \varepsilon \text{ , siempre que } r > R(\varepsilon).$$

Y segundo tendremos que existen módulos $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ arbitrariamente grandes satisfaciendo que $M(r_n) > e^{(\sigma-\varepsilon)r_n^\rho}$, esto es

$$\frac{\log M(r_n)}{r_n^\rho} > \sigma - \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, nuevamente deducimos que

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho}.$$

★

Ejemplo 1.7. 1) Como primer ejemplo estudiemos la función e^z. Puesto que $|e^z| \le e^{|z|}$ tenemos que $M(r) \le e^r$. Como además cuando $z = r \in \mathbb{R}$ se alcanza la igualdad, $|e^r| = e^r$, vemos que dicha función tendrá orden finito $\rho = 1$ y tipo finito $\sigma = 1$.

2) Como ejemplo de función de orden infinito podemos poner a la doble exponencial e^{e^z}. Puesto que la exponencial e^r domina en el infinito a cualquier potencia r^μ tendremos que, para valores de r suficientemente grandes, se cumple que $M(r) \geq e^{e^r} > e^{r^\mu}$ y dicha función no podrá tener orden finito.

3) Calculemos ahora el orden y el tipo de la función $\sin(z)$. Para ello usamos la fórmula

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Como vemos ésta sirve muy bien para nuestros propósitos, puesto que operando vemos que, siendo $z = re^{i\theta}$, entonces $|e^{iz}| = e^{-r\sin(\theta)}$ y en consecuencia, haciendo uso de las dos desigualdades triangulares, tendremos que

$$\frac{-1 + e^r}{2} < M(r) = \max_{|z|=r} |\sin(z)| < \frac{1 + e^r}{2}.$$

Es decir, claramente la función $\sin(z)$ tiene orden y tipo finitos $\rho = \sigma = 1$. De forma similar podemos deducir lo mismo para la función $\cos(z)$.

Expresemos pues el orden y el tipo de una función trascendente entera mediante los coeficientes de su serie de Taylor en el origen.

Lema 1.8. Sean K y μ números reales positivos. Sea además, para cada n natural,

$$g_n(r) = \frac{e^{kr^\mu}}{r^n}, \text{ para } r > 0.$$

Entonces se tiene que

$$\left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu} \leq g_n(r) = \frac{e^{kr^\mu}}{r^n}.$$

Demostración. Veamos que esto es así porque, de hecho

$$\min_{r>0} g_n(r) = \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu}.$$

Esto último se trata de un sencillo problema de optimización. Hacemos uso de la derivada logarítmica para obtener que los candidatos a extremo relativo tendrán que cumplir que

$$\mu K r^{\mu-1} - \frac{n}{r} = 0.$$

Como vemos, manipulando nos queda que $\mu K r^\mu - n = 0$. Claramente vemos que se trata de un mínimo y que despejando y sustituyendo en cada una de las g_n, el valor que toma cada g_n en su mínimo correspondiente es el que nos dice el resultado. ★

Lema 1.9. Sea f una función trascendente con desarrollo de Taylor.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Supongamos además que existen $K, \mu > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, tales que

$$|a_n| < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu} \text{ para todo } n > N.$$

Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $R = R(\varepsilon)$ tal que para $r > R$ se tiene que

$$M(r) < e^{(K+\varepsilon)r^\mu}.$$

Demostración. Separaremos en tres sumas la serie de Taylor de f y acotaremos convenientemente cada uno de ellas usando las siguientes observaciones:

Es inmediato, comparando con cualquier serie geométrica convergente que, para μ y K fijos, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu}$$

es convergente. Por ello existirá un $N_1 = N_1(\mu, K)$, que supondremos mayor que el N del enunciado, $N_1 > N$, cumpliendo que

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu} < 1.$$

Ahora, por el lema 1.8 anterior y por las hipótesis sobre los coeficientes a_n tendremos que, para $n > N$, se cumple que

$$|a_n| < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu} \leq g_n(r) = \frac{e^{Kr^\mu}}{r^n}.$$

Es decir que para $n > N$ tenemos que $|a_n| r^n < e^{Kr^\mu}$.

Acotemos pues teniendo en consideración todas las observaciones anteriores y suponiendo que $r > 1$:

$$\begin{aligned} M(r) &\leq \sum_{n=N_1+1}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=N+1}^{N_1} |a_n| r^n + \sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n \\ &< 1 + (N_1 - N) e^{Kr^\mu} + r^N \sum_{n=0}^{N} |a_n| \qquad (1.4) \\ &< e^{Kr^\mu} \left[N_1 - N + e^{-Kr^\mu} \left(1 + r^N \sum_{n=0}^{N} |a_n| \right) \right]. \end{aligned}$$

Como vemos, fijado $\varepsilon > 0$, existe un $R(\varepsilon) > 1$ tal que la expresión que figura entre corchetes es menor que $e^{\varepsilon r^{\mu}}$ para $r > R(\varepsilon)$.

En conclusión nos queda que, efectivamente, existe $R(\varepsilon)$ tal que

$$M(r) < e^{Kr^{\mu}} e^{\varepsilon r^{\mu}} = e^{(K+\varepsilon)r^{\mu}} \text{ para } r > R(\varepsilon).$$

★

Proposición 1.10. Sea f una función trascendente y sea su desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Entonces se puede obtener su orden mediante la fórmula:

$$\rho = -\limsup_{n\to\infty} \frac{n\log(n)}{\log|a_n|}.$$

Demostración. Primero, por comodidad, denotamos como

$$\alpha = -\limsup_{n\to\infty} \frac{n\log(n)}{\log|a_n|}.$$

Veremos que:

1) Si ρ es finito, entonces α también lo es y $\rho \geq \alpha$.

2) Si α es finito, entonces ρ lo es y se tiene que $\alpha \geq \rho$.

De 1) y 2) se deduce que si uno de los valores es finito, lo es el otro y coinciden. De esta manera si uno es infinito el otro también y la fórmula se puede considerar válida en cualquier caso.

1) Supongamos que f es de orden finito ρ y veamos pues que α es finito y que $\rho \geq \alpha$. Por definición, para todo $\mu > \rho$ tendremos que existe $R = R(\mu)$ tal que $M(r) < e^{r^{\mu}}$, siempre que $r > R(\mu)$. En virtud de las desigualdades de Cauchy tendremos que

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} < \frac{e^{r^{\mu}}}{r^n} := g_n(r), \text{ para } r > R.$$

Hacemos uso del lema 1.8 previo para refinar lo máximo posible la desigualdad anterior. Este nos da los puntos en los que las funciones $g_n(r)$ alcanzan sus valores mínimos y el valor que toma la función $g_n(r)$ en dichos puntos. Es decir, si llamamos m_n a estos puntos, se tiene que

$$g_n(m_n) = \left(\frac{e\mu}{n}\right)^{n/\mu} \text{ siendo } m_n = \left(\frac{n}{\mu}\right)^{1/\mu}.$$

Nos fijamos en que la información anterior sólo nos será de utilidad cuando se cumpla que $m_n > R$. No obstante, vemos que $m_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ y podremos encontrar un índice N, que dependerá de $R(\mu)$, tal que $m_n > R$ para $n > N$.

En definitiva tendremos que

$$|a_n| < \left(\frac{e\mu}{n}\right)^{n/\mu}, \text{ para cada } n > N.$$

Despejamos ahora μ en la desigualdad anterior con la siguiente consideración: puesto que f es entera en todo $\mathbb{C}$ sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \text{ de donde } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log|a_n|} = 0.$$

Además, $|a_n| < 1$ para n suficientemente grande y consiguientemente tendremos que $\log|a_n| < 0$. Como a continuación tomaremos límite superior cuando $n \to \infty$ podemos suponer que la desigualdad se invertirá cuando multipliquemos por el factor $\log|a_n| < 0$. Nos quedará que

$$\mu > \frac{n[\log(e\mu) - \log(n)]}{\log|a_n|}.$$

Finalmente tomando límite superior nos queda precisamente que

$$\mu \geq -\limsup_{n\to\infty} \frac{n\log(n)}{\log|a_n|} = \alpha.$$

Para terminar, como todo lo anterior es válido para cualquier $\mu > \rho$, obtenemos lo que buscábamos, $\rho \geq \alpha$ y vemos que si ρ es finito entonces α también lo es.

2) Supongamos ahora que $\alpha < \infty$. Por la definición de α vemos que dado cualquier $\mu > \alpha$, existe $N = N(\mu)$ tal que

$$-\frac{n\log(n)}{\log|a_n|} < \mu, \text{ para todo } n > N.$$

De nuevo, por ser f entera en todo el plano podemos asegurar que existe $N = N(f)$ tal que $\log|a_n| < 0$, para todo $n > N$. Es decir para índices suficientemente grandes $n > N(\mu, f)$ podremos despejar $|a_n|$, obteniendo la desigualdad

$$|a_n| < \left(\frac{1}{n}\right)^{n/\mu}, \text{ para todo } n > N(\mu, f).$$

En virtud del lema 1.9 aplicado tomando $N = N(\mu, f)$ y $e\mu K = 1$, es decir, $K = 1/e\mu$ podremos asegurar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $R(\varepsilon)$ tal que

$$M(r) < e^{(K+\varepsilon)r^\mu}, \text{ siempre que } r > R(\varepsilon).$$

De ésto deducimos que f tiene orden finito $\rho \leq \mu$ y como esto es válido para cualquier $\mu > \alpha$ obtenemos la desigualdad buscada $\rho \leq \alpha$. Y vemos que si α es finito entonces ρ también lo será. ★

Proposición 1.11. Sea f una función trascendente entera de orden finito $\rho > 0$ y sea su desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Entonces es posible calcular su tipo despejando en la fórmula:

$$(e\rho\sigma)^{1/\rho} = \limsup_{n\to\infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Demostración. La demostración sigue la misma estructura que la de la proposición anterior. Denotemos primero como

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|}$$

y veamos que:

1) Si σ es finito, entonces β también lo es y $\beta \leq (e\rho\sigma)^{1/\rho}$.

2) Si β es finito, entonces σ lo es y se tiene que $\beta \geq (e\rho\sigma)^{1/\rho}$.

Nuevamente de 1) y 2) se deduce que si uno de los valores es finito, lo es el otro, coinciden y, en definitiva, la fórmula se puede considerar válida en cualquier caso.

1) Supongamos pues que f es de tipo finito σ. De nuevo, para todo $K > \sigma$, en virtud de las desigualdades de Cauchy, tendremos que existe $R(K)$ tal que:

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} < \frac{e^{Kr^\mu}}{r^n} =: g_n(r), \text{ para } r > R(K).$$

Volvemos a utilizar los puntos m_n del plano en los que las funciones $g_n(r)$ presentan un mínimo, que nos vienen dados por el lema 1.8.

$$g_n(m_n) = \left(\frac{e\rho K}{n}\right)^{n/\rho} \text{ siendo } m_n = \left(\frac{n}{\rho K}\right)^{1/\rho}.$$

Igualmente podemos encontrar un índice N, que depende de $R(K)$, de modo que $m_n > R(K)$ si $n > N$ y tendremos la desigualdad

$$|a_n| < \left(\frac{e\rho K}{n}\right)^{n/\rho}, \text{ para } n > N.$$

Esta vez mediante una sencilla manipulación despejamos K en dicha desigualdad para obtener

$$n^{1/\rho}\sqrt[n]{|a_n|} < (e\rho K)^{1/\rho}.$$

Tomando límite superior cuando $n \to \infty$ nos queda que

$$\beta \leq (e\rho K)^{1/\rho}.$$

Por último, una vez más por ser lo anterior válido para cualquier $K > \sigma$, obtenemos la desigualdad pedida.

También vemos que el hecho de que la función f de orden finito ρ tenga tipo finito σ implica que el límite β sea finito.

2) Supongamos ahora que el límite β es finito. Veamos pues que entonces f es de tipo finito σ y se verifica que $\beta \geq (e\rho\sigma)^{1/\rho}$. Consideramos el valor σ' tal que hace que se de la igualdad $\beta = (e\rho\sigma')^{1/\rho}$, es decir,

$$\sigma' = \frac{\beta^\rho}{e\rho}.$$

De nuevo, por la definición de β como límite superior vemos que dado cualquier $K > \sigma'$ existe $N(K)$ tal que

$$n^{1/\rho}\sqrt[n]{|a_n|} \leq (e\rho K)^{\frac{1}{\rho}}, \text{ para todo } n > N.$$

Otra vez despejamos el coeficiente $|a_n|$ obteniendo la desigualdad

$$|a_n| < \left(\frac{e\rho K}{n}\right)^{n/\rho}, \text{ para todo } n > N.$$

Una vez más, en virtud del lema 1.9 aplicado tomando $N = N(K)$ y $\mu = \rho$, podremos afirmar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R(\varepsilon)$ tal que

$$M(r) < e^{(K+\varepsilon)r^\mu}, \text{ siempre que } r > R(\varepsilon).$$

Consecuentemente f tiene tipo finito $\sigma \leq K$, y como este aserto es válido para cualquier $K > \sigma'$, se cumplirá que

$$\sigma \leq \sigma' = \frac{\beta^\rho}{e\rho}, \text{ de donde } \beta \geq (e\rho\sigma)^{1/\rho},$$

como queríamos. ★

Observación 1.12. Veremos ahora que, de hecho, solamente con suponer que para algún número $\mu > 0$ se tiene que es finito el límite

$$\beta = \limsup_{n\to\infty}(n^{1/\mu}\sqrt[n]{|a_n|}) < \infty$$

deducimos que el orden de f es, de hecho, menor o igual que μ.

Para ver ésto razonamos como anteriormente. Por definición de límite dado cualquier $\gamma > \beta$ existe $N(\gamma)$ tal que se cumple que

$$n^{1/\mu}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \gamma, \text{ para todo } n > N(\gamma).$$

De nuevo, despejando, vemos que

$$|a_n| < \left(\frac{\gamma^\mu}{n}\right)^{n/\mu}, \text{ para todo } n > N(\gamma).$$

Y por último, una vez más en virtud del lema 1.9 para N y $e\mu K = \gamma^\mu$ podremos concluir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $R(\varepsilon)$ tal que se verifica que

$$M(r) < \exp\left[\left(\frac{\gamma^\mu}{e\mu} + \varepsilon\right) r^\mu\right], \text{ para todo } r > R.$$

Deducimos pues que el orden es finito y menor o igual que μ. Si resultara que en particular el orden fuera $\rho = \mu$ vemos que tendríamos que su tipo sería

$$\sigma = \frac{\beta^\mu}{e\mu}.$$

Ejemplo 1.13. El ejemplo más interesante en las aplicaciones de funciones trascendentes son las llamadas de tipo exponencial, que son aquellas que tienen orden $\rho = 1$ y tipo finito $\sigma < \infty$ o bien orden $\rho < 1$ y tipo arbitrario. Es decir, son aquellas para las que existen un $C, K > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq Ce^{K|z|}, \text{ para } z \in \mathbb{C}.$$

De la observación anterior vemos que estas funciones quedan completamente determinadas por la condición

$$\limsup_{n\to\infty}\left(n\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \beta < \infty.$$

Además, si su orden es $\rho = 1$, podremos calcular su tipo usando la fórmula $\sigma = \frac{\beta}{e}$.

Ejemplo 1.14. Las proposiciones anteriores son muy útiles a la hora de dar ejemplos de funciones enteras cuyo orden y tipo elegimos nosotros a conveniencia. Lógicamente por la naturaleza de los resultados daremos dichas funciones enteras mediante su desarrollo de Taylor.

1) Demos primero un ejemplo de función trascendente de orden $\rho > 0$ y tipo $\sigma > 0$ finitos. Para ello usamos la expresión que nos aparecía para el coeficiente $|a_n|$ en las demostraciones:

$$a_n = \left(\frac{e\rho\sigma}{n}\right)^{n/\rho}, \text{ es decir, } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e\rho\sigma}{n}\right)^{n/\rho} z^n.$$

Para convencernos de que, efectivamente, el ejemplo es válido podemos calcular los límites α y β, pero, en realidad, no haremos más que repetir manipulaciones que ya hemos hecho en las demostraciones.

2) Busquemos ahora un ejemplo de función entera de orden nulo. De acuerdo con la fórmula obtenida en la proposición 1.10 bastará exigir que los coeficientes de la serie de Taylor de f sean tales que

$$|a_n| = \frac{1}{e^{\delta_n n \log(n)}} = \frac{1}{n^{\delta_n n}},$$

donde $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \infty$. Por ejemplo, dado $\delta > 0$ podemos tomar cualquier función de la forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{e^{n(\log n)^{1+\delta}}},$$

es decir, hemos tomado $\delta_n = (\log n)^{\delta}$.

3) Por último demos un ejemplo de función entera de orden infinito. Nuevamente, en virtud de la proposición 1.10, será suficiente si elegimos los coeficientes de la serie de Taylor de forma que

$$|a_n| = \frac{1}{e^{\varepsilon_n n \log(n)}} = \frac{1}{n^{\varepsilon_n n}},$$

donde $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión con $\varepsilon_n > 0$ y cumpliendo que $\varepsilon_n \to 0$.

No obstante, en este caso hay que tener presente que, puesto que nuestro marco de trabajo son las funciones trascendentes, tendremos que asegurar que se mantiene la condición

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \text{ es decir, } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \log(n) = \infty.$$

Por ejemplo si tomamos $0 < \varepsilon < 1$ será suficiente elegir f como sigue:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{e^{n(\log n)^{\varepsilon}}},$$

es decir, hemos tomado $\varepsilon_n = (\log n)^{\varepsilon-1}$.

1.2. Teorema de Phragmén - Lindelöf

Como comentábamos en la introducción la función $M(r)$ tan sólo nos proporciona información sobre el crecimiento global, en todas las direcciones que parten del origen conjuntamente. No obstante habrá funciones para las que, por su comportamiento poco homogéneo, no resultará de utilidad el estudio anterior.

Veamos la importancia de ésto con un ejemplo y de forma que de pie a introducir resultados que nos ayuden en estos menesteres:

Ejemplo 1.15. Consideremos la función $e^z = e^{r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))}$ que, como vimos, tiene orden y tipo finitos $\rho = \sigma = 1$. Estudiemos ahora el crecimiento de dicha función siguiendo sectores circulares, que supondremos, de ahora en adelante, con vértice situado en el origen. Vemos que, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que:

$$\text{Si } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \Longrightarrow |e^z| = e^{r\cos(\theta)} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

puesto que $\cos(\theta) > 0$. Es decir, efectivamente si tomamos una semirrecta que parte del origen y está contenida en el semiplano derecho $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, entonces el módulo de la función e^z tiende a infinito cuando se la restringe a dicha semirrecta y se hace tender z hacia infinito. Y esto ocurre de modo uniforme en θ cuando se consideran subsectores propios de dicho semiplano. Análogamente:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right) \Longrightarrow |e^z| = e^{r\cos(\theta)} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puesto que $\cos(\theta) < 0$. Resumiendo, el plano queda separado en dos sectores, el derecho y el izquierdo, en cuyos subsectores propios, digamos

$$S_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2}+\varepsilon < \arg(z) < \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right\},$$

$$S_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2}+\varepsilon < \arg(z) < -\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right\},$$

presentando la función e^z un comportamiento asintótico totalmente opuesto:

$$\lim_{z\to\infty, z\in S_1} |e^z| = \infty, \text{ mientras que } \lim_{z\to\infty, z\in S_2} |e^z| = 0.$$

Ejemplo 1.16. Citemos tan sólo las conclusiones para el caso más general en el que el exponente es un polinomio $P(z)$ de grado n, es decir, $f(z) = e^{P(z)}$, siendo $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ con $a_n \neq 0$.

Resulta que la función $e^{P(z)}$ es de orden finito $\rho = \deg(P) = n$ y tipo finito $\sigma = |a_n|$. El estudio por sectores nos revela que el plano quedará dividido en $2n$ sectores circulares abiertos, llamémoslos $g_1, \ldots, g_{2n}$, de amplitud π/n cada uno y numerados en sentido antihorario (de modo que g_2 está situado entre g_1 y g_3 y así hasta g_{2n}, que estará entre g_{2n-1} y g_1).

Si la numeración se hace adecuadamente, se comprueba que por un lado la función $e^{P(z)}$ tiende a infinito en los sectores que tienen índice impar:

$$|e^{P(z)}| \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ en } g_1, g_3, \ldots, g_{2n-1},$$

(en el sentido de que su restricción a cada semirrecta que parte del origen se comporta así, donde esto ocurre uniformemente en los subsectores propios). Sin embargo, para los sectores de índice par tenemos que dicha función tiene hacia cero:

$$|e^{P(z)}| \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } z \in g_2, g_2, \ldots, g_{2n},$$

(en el mismo sentido anterior). La discusión que justifica estas conclusiones es engorrosa y por ello la omitimos.

Observación 1.17. Como vemos en los ejemplos anteriores, si tomamos un sector de abertura suficientemente pequeña, del hecho de que la función esté acotada en los lados de dicho sector deducimos también la acotación de la función en el interior del sector.

¿Cuál es el significado de «suficientemente pequeña»?

En el ejemplo anterior vemos que bastará con que el ángulo de los sectores sea menor que π/n. Demos pues un resultado que, dada una función entera cualquiera acotada en los lados de un sector, nos muestre exactamente qué ángulos serán suficientemente pequeños.

Dicho resultado estará estrechamente relacionado con el orden de la función y es una versión del conocido como teorema de Phragmén - Lindelöf.

Teorema 1.18. Sea f una función trascendente de orden finito ρ. Supongamos además que $|f(z)| \leq C$ en los lados de un sector circular G con vértice en el origen y apertura $\pi\alpha$, siendo $\alpha < 1/\rho$.

Entonces se tiene también que $|f(z)| \leq C$ para los z que están en el interior del sector.

Demostración. Supongamos que el sector está centrado en el eje real positivo (siempre podemos llegar a esta situacion mediante un giro adecuado). Por lo tanto podemos escribir

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \frac{\pi\alpha}{2} \right\}.$$

Sean ahora $0 < \rho < \rho_1 < \rho_2 < 1/\alpha$ y denotemos por G_R al sector acotado

$$G_R = \{z \in G : |z| < R\}.$$

Básicamente, dado $\varepsilon > 0$, vamos a aplicar el principio del módulo máximo a la función auxiliar $F_\varepsilon(z) = f(z)\exp(-\varepsilon z^{\rho_2})$ tomando como recinto el sector acotado G_R.

Acotemos pues la función F_ε en la frontera del recinto G_R con vistas a aplicar dicho principio:

1) Sea z un punto del plano perteneciente a los lados de G_R expresado como $z = re^{i\theta}$. Entonces se tiene que

$$|F_\varepsilon(z)| \leq C|\exp(-\varepsilon z^{\rho_2})| = C\exp(-\varepsilon r^{\rho_2}\cos(\rho_2\theta)).$$

Veamos ahora que el exponente del término de la derecha es negativo para poder concluir: puesto que z pertenece a un lado del sector de ángulo $\pi\alpha$ centrado en el eje real, observamos que

$$|\theta| = \frac{\alpha\pi}{2} \text{ y que } \rho_2 < \frac{1}{\alpha},$$

es decir, tendremos que

$$|\rho_2\theta| < \frac{\alpha\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2} \text{ y, efectivamente, } \cos(\rho_2\theta) > 0.$$

Consecuentemente podemos concluir que $|F_\varepsilon(z)| \leq C$.

2) Sea, esta vez, z un punto de la frontera situado en el arco circular de radio R, es decir, $z = Re^{i\theta}$ con $|\theta| \leq \pi\alpha/2$. Tendremos que, por definición de orden, $|f(z)| \leq M_f(R) < \exp(R^{\rho_1})$ para cada $R > R_1$ adecuado. Por consiguiente nos queda que

$$|F_\varepsilon(z)| < \exp(R^{\rho_1} - \varepsilon R^{\rho_2}\cos(\rho_2\theta)) < \exp(R^{\rho_1} - \varepsilon R^{\rho_2}\cos(\frac{\rho_2\alpha\pi}{2})) \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Es decir, para todo R suficientemente grande tendremos que $|F_\varepsilon(z)| \leq C$ en la frontera del recinto G_R y, en virtud del principio del módulo máximo, obtenemos que dicha acotación es también válida en el sector G_R y consecuentemente en G.

Observemos que lo anterior es válido para todo $\varepsilon > 0$. Ahora bien, si calculamos el límite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|F_\varepsilon(z_0)| = \lim_{\varepsilon\to 0}|f(z_0)\exp(\varepsilon z_0^{\rho_2})| = |f(z_0)|.$$

Finalmente podemos concluir que $|f(z_0)| \leq C$, para todo $z_0 \in G$. ★

Observación 1.19. Del resultado anterior deducimos que, dada una función trascendente, si trazamos un sistema de rayos con vértice en el origen y separados por ángulos menores que π/ρ, en al menos uno de los rayos la función no estará acotada.

Esto es así puesto que si no tendríamos que la función está acotada en todo el plano, lo que implicaría que es constante, en contradicción con el hecho de que f sea trascendente.

Cabe mencionar que el teorema sigue siendo válido en sectores de amplitud exactamente π/ρ para funciones de orden ρ y tipo $\sigma = 0$. Sin embargo, si el tipo σ no es igual a cero, el resultado deja de ser cierto, lo vemos tomando como ejemplo la función $\sin(z)$, de orden $\rho = 1$ y tipo $\sigma = 1$, y el siguiente sector circular de ángulo igual a π/ρ,

$$G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

es decir, el semiplano superior. Vemos que en su frontera, la función $\sin(z)$ está acotada en módulo por el valor 1 y sin embargo es arbitrariamente grande en el interior de dicho conjunto.

1.3. Versión débil del teorema pequeño de Picard.

Ilustremos el tipo de conclusiones que se pueden obtener acerca de la distribución de los valores que toma una función entera mediante el mero estudio de su crecimiento. En particular podremos establecer una versión débil del teorema pequeño de Picard.

Esto nos servirá también como preámbulo para el capítulo 3, que expone los resultados sobre factorización de funciones enteras.

Proposición 1.20. Sea $f(z)$ una función entera y tal que no toma cierto valor A. Entonces existe una función entera $g(z)$ tal que f se puede expresar como

$$f(z) = A + e^{g(z)}$$

Demostración. Usaremos el teorema de Cauchy para probarlo: por hipótesis vemos que la función $f(z) - A$ no se anulará y será holomorfa en los puntos finitos del plano, que forman un abierto simplemente conexto del plano extendido. En virtud del teorema de Cauchy, podemos afirmar que la función $f(z) - A$ admite logaritmo analítico en dicho abierto, es decir, que existe una función entera $g(z)$ tal que

$$f(z) - A = e^{g(z)}.$$

De donde obviamente se deduce que

$$f(z) = A + e^{g(z)}.$$

★

Probaremos ahora dos lemas.

Lema 1.21. Sea $f(z)$ una función analítica en la bola $B(0, R)$ con desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Suponemos que para cierto valor U real se tiene que

$$\operatorname{Re} f(z) \leq U, \text{ siempre que } z \in B(0, R).$$

Entonces, para cada $n \geq 1$, se cumple que

$$|a_n| \leq \frac{2U - 2\operatorname{Re}(a_0)}{R^n}.$$

Demostración. Si expresamos la función f en polares $f(z) = f(r, \theta)$ y aplicamos la fórmula de Cauchy para los coeficientes de la serie de Taylor de la función $U - f(z)$, sabemos que para $n \geq 1$ y $0 < r < R$ se cumple que

$$-a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} [U - \operatorname{Re} f(r, \theta)] e^{-in\theta} d\theta.$$

Tomando módulos e integrando vemos que

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} (U - \operatorname{Re} f(r, \theta) d\theta) = \frac{2U}{r^n} - \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(r, \theta) d\theta.$$

Pero vemos que manipulando y otra vez en virtud de la fórmula de Cauchy el segundo sumando nos queda

$$\frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(r, \theta) d\theta = \frac{2}{r^n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(r, \theta) d\theta \right) = \frac{2\operatorname{Re}(a_0)}{r^n}.$$

Hemos probado que para todo $r < R$ se verifica que

$$|a_n| \leq \frac{2[U - \operatorname{Re}(a_0)]}{r^n}.$$

Tomando límite cuando r tiende hacia R concluímos. ★

Lema 1.22. Sea $f(z) = f(r, \theta)$ una función entera verificando que existe R_0 tal que para todo $R > R_0$ se cumple que

$$\operatorname{Re} f(R, \theta) \leq R^{\mu}.$$

Entonces la función $f(z)$ es, de hecho, un polinomio de grado menor o igual que la parte entera de μ.

Demostración. Sea $R > R_0$, por nuestras hipótesis y en virtud del principio del módulo máximo estamos en condiciones de asegurar que $\operatorname{Re} f(r, \theta) \leq R^{\mu}$, para todo $r < R$. Supongamos pues que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

en virtud del lema 1.21 anterior, tendremos que

$$|a_n| \leq \frac{2R^{\mu} - 2\operatorname{Re}(a_0)}{R^n}.$$

Como esto es válido para cualquier $R > R_0$ si tomamos límite cuando $R \to \infty$ vemos que, para todo índice $n > \mu$ se tiene que $|a_n| \leq 0$.

En conclusión $a_n = 0$ para todo n mayor que la parte entera de μ y f es un polinomio de grado menor o igual que la parte entera de μ. ★

Observación 1.23. El segundo lema será de una importancia fundamental puesto que permite deducir que $g(z)$ es un polinomio partiendo de que la función $f(z)$ tiene orden finito ρ, es decir, el orden de la función es información suficiente sobre el crecimiento para saber si la función $g(z)$ asociada es polinómica.

Proposición 1.24. Sea $f(z)$ una función entera tal que no toma cierto valor A. Si se supone además que f tiene orden finito ρ, entonces $\rho \in \mathbb{N}$ y existe un polinomio $P(z)$ de grado ρ con

$$f(z) = A + e^{P(z)}.$$

Demostración. Vemos primero que en virtud de la proposición 1.20 podremos expresar $f(z)$ en la forma

$$f(z) = A + e^{g(z)},$$

para alguna función entera $g(z)$. Ahora, por la segunda desigualdad triangular, tomando módulo tenemos que

$$|e^{g(z)}| - |A| \leq |e^{g(z)} + A| = |f(z)|.$$

Despejando en la desigualdad anterior vemos que, por tener la función $f(z)$ orden finito ρ, tendremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $R(\varepsilon)$ tal que se tiene que

$$|e^{g(z)}| < e^{r^{\rho+\varepsilon/2}} + |A|, \text{ para cada } r > R(\varepsilon).$$

Sea ahora $R'(\varepsilon)$, que supondremos mayor que el $R(\varepsilon)$ anterior, tal que si $r > R'(\varepsilon)$ se cumple que

$$e^{r^{\rho+\varepsilon/2}} + |A| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Es decir, de lo anterior hemos obtenido que, para $r > R'(\varepsilon)$, se tiene que

$$|e^{g(z)}| = e^{\operatorname{Re} g(z)} < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Ahora, puesto que la exponencial real es una función creciente e inyectiva, esto significa que $\operatorname{Re}(g) < r^{\rho+\varepsilon}$ y por el lema 1.22 conluimos que $g(z)$ es un polinomio $P(z)$ (cuyo grado es menor o igual que la parte entera de $\rho + \varepsilon$).

Veamos por último que se verifica que $\rho \in \mathbb{N}$ y que $\rho = \deg(P)$. Para ello recordemos que el orden de una función del tipo $e^{P(z)}$ es precisamente el grado del polinomio $P(z)$. Finalmente, nos damos cuenta de que el orden de la función $f(z)$ es, obviamente, el mismo que el de $f(z) - A = e^{P(z)}$. ★

Proposición 1.25. Sea $f(z)$ una función entera que toma el valor A exactamente en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ con multiplicidades $k_1, k_2, \ldots, k_n$ respectivamente. Entonces $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = A + (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_n)^{k_n} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera.

Demostración. Consideremos, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, la función

$$\frac{f(z) - A}{(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_n)^{k_n}}.$$

Esta función presenta singularidades evitables en cada uno de los puntos z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, por ser el orden de z_k como cero del numerador el mismo que como cero del denominador. Por lo tanto, admite una extensión por continuidad a todo $\mathbb{C}$ (con valor no nulo en cada uno de estos puntos), que será de hecho entera y que no se anula en ningún punto. Gracias a ésto podemos aplicar la proposición 1.20 a dicha función y tendremos que existe una función entera $g(z)$ tal que se cumple que

$$\frac{f(z) - A}{(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_n)^{k_n}} = e^{g(z)},$$

como queríamos. ★

Proposición 1.26. Sea $f(z)$ una función entera y tal que toma el valor A en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ con multiplicidades $k_1, k_2, \ldots, k_n$ respectivamente. Si además se supone que tiene orden finito ρ, entonces se tiene que $\rho \in \mathbb{N}$ y existe un polinomio $P(z)$ de grado ρ cumpliendo que

$$f(z) = A + (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_n)^{k_n} e^{P(z)}.$$

Demostración. Vemos primero que, en virtud de la proposición anterior $f(z)$ será de la forma

$$f(z) = A + (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_n)^{k_n} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera. Por lo tanto, para cada $z \in \mathbb{C} \backslash \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ se tiene que

$$e^{g(z)} = \frac{f(z) - A}{(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_n)^{k_n}}.$$

Probemos a partir de esta igualdad que dicha exponencial tiene orden ρ para poder hacer uso de la proposición 1.24 y concluir.

Primero vemos que para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ se tiene que

$$|e^{g(z)}| < \frac{|f(z) - A|}{|z - z_1|^{k_1}|z - z_2|^{k_2} \ldots |z - z_n|^{k_n}}.$$

Para valores de r suficientemente grandes tendremos que

$$|e^{g(z)}| < |f(z)| + |A| < r^{\rho+\varepsilon}, \text{ para } |z| = r.$$

En consecuencia dicha función $e^{g(z)}$ es de orden finito menor o igual que ρ.

Por otro lado, por reducción al absurdo, si el orden fuera menor que ρ tendríamos que existen $\varepsilon > 0$ y $R(\varepsilon)$ tales que

$$|e^{g(z)}| < e^{r^{\rho-2\varepsilon}}, \text{ para } r > R(\varepsilon).$$

Por lo tanto, sustituyendo vemos que

$$|f(z)| < |A| + e^{r^{\rho-2\varepsilon}}(r + |z_1|)^{k_1}(r + |z_2|)^{k_2} \ldots (r + |z_n|)^{k_n}, \text{ para } r > R(\varepsilon).$$

Como se tiene que

$$\lim_{r \to \infty} \frac{|A| + e^{r^{\rho-2\varepsilon}}(r + |z_1|)^{k_1}(r + |z_2|)^{k_2} \ldots (r + |z_n|)^{k_n}}{e^{r^{\rho-\varepsilon}}} = 0,$$

para valores de r suficientemente grandes (mayores también que nuestro R anterior) finalmente tendremos que

$$|f(z)| < e^{r^{\rho-\varepsilon}}, \text{ si } |z| = r,$$

en contradicción con que ρ es el orden de la función f. En consecuencia $e^{g(z)}$ tendrá orden finito ρ, como queríamos.

★

Observación 1.27. El teorema pequeño de Picard establece que una función entera no constante toma todo valor complejo salvo quizás uno. Mediante el uso de las proposiciones anteriores, procederemos a dar una demostración elemental del teorema pequeño de Picard para funciones enteras de orden finito. El resultado es cierto también para funciones de orden no finito, pero ésto no somos capaces de demostrarlo sin herramientas más sofisticadas. No obstante, la hipótesis sobre el orden permite obtener información adicional sobre los conjuntos de la forma $f^{-1}(\{z\})$, $z \in \mathbb{C}$, y sobre el aspecto de la función.

Teorema 1.28 (Teorema pequeño de Picard, versión débil)**.** Sea $f(z)$ una función trascendente entera y de orden finito ρ.

Entonces para todo $A \in \mathbb{C}$ el cardinal del conjunto $f^{-1}(\{A\})$ es infinito excepto, a lo sumo, para un único valor A_0, a este valor lo llamamos valor excepcional de Picard.

Si existiera dicho valor excepcional tendríamos, que $\rho \in \mathbb{N}$ y existen unos polinomios $p(z), P(z)$ tales que $f(z) = A_0 + p(z)e^{P(z)}$.

Demostración. En virtud del teorema 1.26 anterior vemos que si existe un valor A tal que el cardinal del conjunto $f^{-1}(\{A\})$ es finito tendremos que $\rho \in \mathbb{N}$ y f será de la forma

$$f(z) = A + (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_n)^{k_n} e^{P(z)}.$$

Sólo nos queda pues ver que no es posible que ésto ocurra para dos valores A_1, A_2 diferentes.

Razonemos por reducción al absurdo: supongamos pues que esto ocurre para dos valores A_1, A_2 diferentes y veamos que ocurriría entonces. Primero, por el teorema 1.26, tendremos que existen polinomios $p(z), q(z)$, no nulos, y $P(z), Q(z)$, no constantes (por ser la función f trascendente) tales que

$$f(z) = A_1 + p(z)e^{P(z)} \quad \text{y} \quad f(z) = A_2 + q(z)e^{Q(z)}.$$

Es decir,

$$A_2 - A_1 = p(z)e^{P(z)} - q(z)e^{Q(z)}.$$

Derivando obtenemos que

$$\left[p'(z) + p(z)P'(z)\right] e^{P(z)} - \left[q'(z) + q(z)Q'(z)\right] e^{Q(z)} \equiv 0. \tag{1.5}$$

Si suponemos primero que

$$p'(z) + p(z)P'(z) \equiv 0,$$

vemos que se obtiene que, para cada z con $p(z) \neq 0$,

$$P'(z) = \frac{-p'(z)}{p(z)}.$$

De aquí deducimos que $p(z)$ será constante, pues en caso contrario, p se anularía en un punto z_0, y entonces P' tendría un polo simple en dicho punto, lo que es absurdo. En consecuencia, $P'(z)$ será idénticamente nula, pero esto es también imposible ya que $P(z)$ es no constante. Por lo tanto, $p'(z)+p(z)P'(z) \not\equiv 0$, e igualmente podemos probar que $q'(z)+q(z)Q'(z) \not\equiv 0$. Al haber excluido la situación anterior vemos que podemos despejar en (1.5) de la siguiente manera:

$$e^{Q(z)-P(z)} = \frac{p'(z) + p(z)P'(z)}{q'(z) + q(z)Q'(z)},$$

para los z que no anulen el denominador. Deducimos entonces que la función racional que figura en el segundo miembro, al igual que la expresión a la izquierda, no tiene polos ni ceros en ningún punto del plano, es decir, es constante. Esto significa que $Q(z) - P(z)$ es constante. Ahora bien, como

$$(A_2 - A_1)e^{-P(z)} = p(z) - q(z)e^{Q(z)-P(z)},$$

observamos que la función de la derecha es polinómica, luego de orden 0, y puesto que hemos supuesto que $A_1 \neq A_2$, sólo puede ser entonces que $P(z)$ sea constante, lo que es absurdo. ★

Del teorema anterior deducimos que las funciones enteras de orden finito no entero toman cada valor complejo infinitas veces.

Ejemplo 1.29. Utilicemos lo anterior para estudiar el número de ceros que tiene la ecuación $\sin(z) - Az = 0$, para un número complejo A dado.

Despejando, nos damos cuenta de que esto es equivalente a hallar el cardinal del conjunto $g^{-1}(\{A\})$, siendo g la función dada por

$$g(z) = \frac{\sin(z)}{z}.$$

Como el orden de $g(z)$ es entero, $\rho = 1$, no queda descartada la posibilidad de que para algún valor patológico de A el conjunto de las raíces tenga cardinal finito.

Para solucionar este problema introducimos la función

$$f(z) = \frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$$

y su ecuación correspondiente, $\sin(\sqrt{z})-A\sqrt{z}=0$. A cada cero de esta nueva ecuación le corresponden dos ceros en la ecuación original, es decir, bastará probar que el cardinal del conjunto $f^{-1}(\{A\})$ es infinito para concluir que la ecuación $\sin(z) - Az = 0$ tiene infinitos ceros. Pero la función entera $f(z)$ tiene orden $\rho = \frac{1}{2}$, que es un número fraccionario y, en virtud del teorema pequeño de Picard (versión débil), podemos concluir.

Para verificar que, efectivamente, el orden de $f(z)$ es igual a $1/2$, podemos calcularlo a mano, usando la expresion del $\sin(\sqrt{z})$ en términos de la exponencial, de forma análoga a como calculamos el orden de $\sin(z)$ en el ejemplo 1.7. También podemos comprobarlo usando la fórmula que expresa el orden mediante los coeficientes de la serie de Taylor de una función entera, teorema 1.10.

Capítulo 2

Teoremas de factorización de funciones enteras.

Una función trascendente que se anule un número finito de veces puede ser expresada como el producto

$$f(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_n)^{k_n} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera. Nos interesará ahora obtener un resultado de esta índole, que nos permita expresar la función como un producto de una exponencial (que no se anula) y unos factores, que provengan de los ceros de f, en el caso en el que la función se anule un número infinito de veces. Además, en el caso de que f sea de orden finito veremos que g puede tomarse polinómica.

2.1. Exponente de convergencia.

Con el propósito comentado en la introducción a este capítulo en mente, introduciremos en primer lugar el concepto de exponente de convergencia de una sucesión y, por supuesto, veremos cómo calcularlo.

Definición 2.1. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, distintos de cero y cumpliendo que $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ y que $a_n \to \infty$.

Llamaremos *exponente de convergencia* de la sucesión al valor

$$\tau = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}} < \infty \right\}.$$

Si ningún exponente real hiciera converger la serie anterior, es decir, si el conjunto anterior fuera vacío, diremos que la sucesión tiene exponente de convergencia infinito.

Ejemplo 2.2. Como primeros ejemplos de exponente de convergencia de una sucesión vemos, por un estudio elemental propio del Cálculo Infinitesimal, que las sucesiones

$$\{e^n\}_{n=0}^{\infty}, \ \left\{n^{1/\tau}\right\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{y} \quad \{\log(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$$

tienen, respectivamente, exponente de convergencia $0, \tau, \infty$.

Proposición 2.3. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos no nulos cumpliendo que $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ y $a_n \to \infty$. Podemos calcular su exponente de convergencia mediante la fórmula

$$\tau = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\log|a_n|}.$$

Demostración. De forma similar a cuando probábamos la fórmula del orden y la del tipo, denotamos como

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\log|a_n|}.$$

Veamos pues que:

1) Si α es finito, entonces τ lo es y se tiene que $\tau \leq \alpha$.

2) Si τ es finito, entonces α también lo es y $\alpha \leq \tau$.

Por supuesto, nuevamente de 1) y 2) se deduce que si uno de los valores es finito, lo es el otro y coinciden y la fórmula se puede considerar válida en cualquier caso.

1) Supongamos, pues, que $\alpha < \infty$. Por la definición de límite superior vemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon)$ tal que

$$\frac{\log(n)}{\log|a_n|} < \alpha + \varepsilon, \text{ para todo } n > n(\varepsilon).$$

Luego, tomando exponenciales y manipulando convenientemente, tenemos la siguiente acotación

$$\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{n^{1/(\alpha+\varepsilon)}}$$

En consecuencia, vemos que si tomamos $\lambda > \alpha + \varepsilon$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}}$$

será convergente y por lo tanto τ será finito. Además, como lo anterior es válido para todo $\varepsilon > 0$, tendremos que $\tau \leq \alpha$.

2) Supongamos ahora que $\tau < \infty$, es decir que para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\tau+\varepsilon}} < \infty.$$

Puesto que el término general de la serie es decreciente vemos que tendrá que cumplirse que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|a_n|^{\tau+\varepsilon}} = 0.$$

En particular, para n suficientemente grande tendremos que

$$|a_n| > 1 \quad \text{y} \quad \frac{n}{|a_n|^{\tau+\varepsilon}} < 1,$$

de donde obtenemos que

$$\frac{\log(n)}{\log|a_n|} \leq \tau + \epsilon$$

a partir de un n adecuado. Como queríamos, se deduce que α es finito y por ser ε arbitrariamente pequeño concluimos que $\alpha \leq \tau$.

Vemos que de nuevo podemos usar la fórmula obtenida en cualquier caso, sin preocuparnos de si este es finito o no. ★

Observación 2.4. Se establecerá ahora un convenio. Para ello observamos que siempre que consideremos el conjunto de ceros $Z(f)$ de una función entera f no idénticamente nula se sigue que

1) $Z(f)$ es a lo sumo numerable ya que, en caso contrario, escribiendo

$$\mathbb{C} = \cup_{n=1}^{\infty} \bar{B}(0, n),$$

se deduce que existe n_0 tal que f tendrá infinitos ceros en el compacto $\bar{B}(0, n_0)$. En consecuencia $Z(f)$ tiene un punto de acumulación finito, en contra del principio de los ceros aislados.

2) Por lo anterior se tiene que se pueden enumerar los elementos no nulos de $Z(f)$ y lo haremos siempre de la forma $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ con $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$, es decir, en sucesión de módulo creciente y repitiendo cada cero tantas veces como su multiplicidad.

Es claro que, si la sucesión es infinita, ha de ser $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. De este modo, tiene perfecto sentido hablar del exponente de convergencia de la sucesión de ceros no nulos de f. Cuando dicha sucesión sea finita, podemos adoptar por convenio que el exponente de convergencia es 0.

Recíprocamente podemos plantearnos qué sucesiones de números complejos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ pueden ser los ceros no nulos de una función entera. Supondremos siempre que se ha ordenado la sucesión de modo que

$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$, que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ y que el número de veces que se repite un término indica la multiplicidad deseada para el cero. (El caso de un número finito de ceros queda inmediatamente resuelto por funciones polinómicas).

De ahora en adelante pues, siempre que enfrentemos un problema interpolatorio de este tipo, por convenio, supondremos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ha sido preparada de esta manera. Obsérvese que si se desea que f tenga un cero de orden k en el punto cero basta con introducir en su expresión el factor z^k.

2.2. Productos infinitos.

En esta sección se establecerán unas definiciones y resultados propios de la teoría de productos infinitos que necesitaremos más adelante. Por ser dicha teoría clásica, los resultados se darán sin demostración.

Definición 2.5. Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos y consideremos el $n-$ésimo *producto parcial*

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Diremos que el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge* si la sucesión de productos parciales $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ es convergente a un número complejo P. En este caso escribiremos

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Observación 2.6. Notamos que, en la notación de la definición anterior, si

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0,$$

entonces se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = 1.$$

En consecuencia vemos que el hecho de que $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ es condición necesaria para que el producto infinito $P = \prod_{k=1}^{\infty} z_k$ converja a un límite distinto de cero.

Proposición 2.7. Sea el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$, con $a_k \neq 0$ para cada k natural.

Entonces dicho producto infinito converge con límite distinto de cero si, y sólo si, converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log(a_k),$$

donde por $\log(z)$ entendemos la rama principal del logaritmo, es decir, aquella que cumple que $-\pi \leq \mathrm{Im}(\log z) < \pi$.

Proposición 2.8. Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales mayores o iguales que 0.

Entonces el producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ converge si, y sólo si, converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Definición 2.9. Dado un producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ diremos que este *converge absolutamente* cuando converge el producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|a_k|)$

Observación 2.10. Como vemos, en virtud de la proposición anterior, tenemos que la convergencia absoluta de $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ es equivalente a que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converja absolutamente.

Proposición 2.11. Si el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ converge absolutamente, entonces converge.

Proposición 2.12. Sean $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas, definidas en un conjunto S y acotadas en módulo. Si suponemos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$ converge uniformemente en S entonces el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1+g_k)$ convergerá absoluta y uniformente en S.

De hecho, si además definimos

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+g_k(z)), \text{ para } z \in S,$$

entonces, para cada $z \in S$, se tiene que $f(z) = 0$ si, y sólo si, $1 + g_k(z) = 0$ para algún k natural.

Teorema 2.13. Sean $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas analíticas en un abierto Ω del plano. Si suponemos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k - 1|$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω, entonces la función f, definida como

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z),$$

será analítica en Ω.

De hecho, para cada $z \in \Omega$, se tiene que $f(z) = 0$ si, y sólo si, $f_k(z) = 0$ para algún k natural. Además, para $z \in \Omega \setminus Z(f)$, donde por $Z(f)$ denotamos el conjunto de los ceros de f, se tiene que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)},$$

con convergencia uniforme en los compactos de $\Omega \setminus Z(f)$.

Con este último teorema finalizamos con todo lo que necesitamos sobre productos infinitos.

2.3. Teoremas de factorización.

Tratemos pues el problema mencionado en la introducción: veamos cómo construir una función entera con infinitos ceros, elegidos a conveniencia.

Definición 2.14. Se definen, para cada k natural, los conocidos como *factores de Weierstrass* de la siguiente manera

$$E_0(z) = 1 - z \quad \text{y} \quad E_k(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}\right).$$

Observación 2.15. Mantendremos la notación de la definición anterior de ahora en adelante, es decir, por $E_k(z)$ entenderemos siempre que nos referimos al factor de Weierstrass correspondiente.

Obsérvese que, en la bola $B(0,1)$ se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} E_k(z) = (1-z)e^{-\log(1-z)} = 1,$$

donde $\log(z)$ denota la rama principal del logaritmo. De ahora en adelante fijaremos por convenio que $\log(z)$ se refiere siempre a la rama principal. Siguiendo con lo anterior vemos que, de hecho, $E_k(z)$ converge a 1 uniformemente en los compactos de la bola $\bar{B}(0,1)$. También se tiene que las funciones $E_k(z)$ son enteras y que tienen exactamente un cero de orden 1 en el punto 1.

Lema 2.16. Para todos los números complejos z pertenecientes a la bola cerrada $\bar{B}(0,1)$ y para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ los factores de Weierstrass cumplen que

$$|1 - E_k(z)| \leq |z|^{k+1}.$$

Demostración. Vemos que la desigualdad es obvia para $k = 0$. Para el caso en que $k \geq 1$ primero observamos que, como muestra un cálculo sencillo,

$$E_k'(z) = -z^k \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}\right).$$

De este modo se obtiene que

$$[1 - E_k(z)]' = -E_k'(z) = z^k \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}\right).$$

Como vemos los coeficientes de la serie de Taylor de $[1 - E_k(z)]'$ serán positivos y dicha función tiene un cero en 0 de orden k. Puesto que $1 - E_k(0) = 0$ se sigue que $1 - E_k(z)$ tiene un cero de orden $k+1$ y por lo tanto la función

$$\frac{1 - E_k(z)}{z^{k+1}}$$

tendrá una singularidad evitable en el punto 0 y será entera, es decir, admitirá un desarrollo de Taylor válido en todo el plano

$$\frac{1 - E_k(z)}{z^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$

Además, los coeficientes de dicho desarrollo serán también positivos. Por todo lo anterior, finalmente, para los z pertenecientes a la bola $\bar{B}(0,1)$, se tiene que

$$\frac{|1 - E_k(z)|}{|z|^{k+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n||z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \frac{1 - E_k(1)}{1^{k+1}} = 1, \text{ para } z \in \bar{B}(0,1),$$

como queríamos. ★

Procedamos pues a establecer el Teorema de Weierstrass, que nos muestra cómo construir una función entera con infinitos ceros, elegidos a conveniencia.

Teorema 2.17 (Teorema de Weierstrass)**.** Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos como en el convenio de la observación 2.4. Entonces existe una función entera $f(z)$ cuyos ceros coinciden exactamente con los números de la sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

De hecho, existe una sucesión de enteros no negativos $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que la función f es de la forma

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{m_k}\left(\frac{z}{a_k}\right).$$

Demostración. Para dar una demostración lo más general posible, consideremos una sucesión $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ de enteros no negativos con la propiedad de que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_k|} \right)^{m_k+1} < \infty, \text{ para cada } r > 0.$$

Veamos que existen sucesiones con esta propiedad. Notamos que para cualquier $r > 0$ fijo, a partir de un índice suficientemente grande, se tiene que $r/|a_k| < 1/2$. Consiguientemente la sucesión dada por $m_k = k - 1$, por ejemplo, cumple las suposiciones requeridas.

Ahora bien, para cualquier $r > 0$ fijo, en virtud del lema 2.16 anterior se sigue que, si $|z| < r$,

$$\left| 1 - E_{m_k} \left(\frac{z}{a_k} \right) \right| \leq \left| \frac{z}{a_k} \right|^{m_k+1} \leq \left(\frac{r}{|a_k|} \right)^{m_k+1}.$$

Esto significa que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - E_{m_k} \left(\frac{z}{a_k} \right) \right|$$

converge uniformemente en la bola $B(0, r)$. Ya que el radio r es arbitrario, dicha serie convergerá uniformemente en los compactos del plano y, en virtud del teorema 2.13 podemos concluir que la función

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{m_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)$$

es entera y cumple nuestros requisitos, pues cada factor tiene un cero simple en el punto a_k correspondiente. ★

Corolario 2.18. Sea $f(z)$ una función entera con un cero de orden n en el punto cero y sea $\{a_k\}_{n=0}^{\infty}$ su sucesión de ceros no nulos. Entonces f es de la forma

$$f(z) = e^{g(z)} z^n \prod_{k=1}^{\infty} E_{m_k} \left(\frac{z}{a_k} \right),$$

donde $g(z)$ y $\{m_k\}_{n=0}^{\infty}$ son una función entera y una sucesión de enteros adecuados, respectivamente.

Demostración. Como ya hemos mencionado si f tiene un número finito de ceros el resultado es inmediato. Si no, en virtud del teorema de Weierstrass, si consideramos la función

$$\varphi(z) = z^n \prod_{k=1}^{\infty} E_{m_k} \left(\frac{z}{a_k} \right),$$

tendremos (razonando como en la demostración de la proposición 1.25) que $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ es una función que admite una extensión entera y que no se anula en ningún punto del plano. En consecuencia, por la proposición 1.3 tendremos que

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = e^{g(z)},$$

para alguna función $g(z)$ entera, como queríamos. ★

Observación 2.19. Veremos ahora cómo dar una versión más fuerte del teorema de Weierstrass, el llamado teorema de Hadamard, para funciones enteras de orden finito. Atendiendo a la demostración del teorema de Weierstrass vemos que sería interesante poder sustituir la sucesión $\{m_k\}_{n=0}^{\infty}$ que aparece en el producto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{m_k}\left(\frac{z}{a_k}\right),$$

por un valor, llamémoslo χ, lo más pequeño posible y de modo que el producto

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{\chi}\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

siga siendo uniformemente convergente en los compactos del plano.

Veamos esto último en detalle. Siguiendo la pauta de la demostración del teorema de Weierstrass vemos que, en virtud del lema 2.18 se sigue que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|1 - E_{\chi}\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{z}{a_k}\right|^{\chi+1}.$$

Ahora, para cada $R > 0$, sea $z \in \bar{B}(0, R)$ y tomemos un $k(R)$ tal que $|a_k| > R$ para todo $k > k(R)$. Por lo anterior obtenemos que

$$\sum_{k=k(R)}^{\infty}\left|1 - E_{\chi}\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| \leq R^{\chi+1}\sum_{k=k(R)}^{\infty}\left(\frac{1}{|a_k|^{\chi+1}}\right).$$

Puesto que $R^{\chi+1}$ es simplemente un número, vemos que será suficiente para nuestros propósitos tomar un χ tal que se cumple que converge la serie

$$\sum_{k=k(R)}^{\infty}\left(\frac{1}{|a_k|^{\chi+1}}\right).$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.20. Sea f una función entera y sea $\{a_k\}_{n=0}^{\infty}$ su sucesión de ceros no nulos. Se dice que f es de *rango finito* cuando existe $p \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{p+1}} < \infty. \tag{2.1}$$

Llamaremos *rango* de la función f al mínimo p para el que esto ocurre y habitualmente lo designaremos por χ. Equivalentemente, χ es el mayor número entero para el cual la serie anterior diverge.

Observación 2.21. En la notación de la definición anterior, si τ es el exponente de convergencia de la sucesión y es finito, se cumple que $\chi \leq [\tau]$; en particular, si τ es finito entonces χ también lo será. Esto se debe a que $[\tau] + 1 > \tau$ y por definición de τ se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{[\tau]+1}} < \infty.$$

De hecho nos damos cuenta de que, en general, $\chi = [\tau]$ y tendremos que $\chi = [\tau] - 1$ para el caso exclusivo en el que τ es un número natural y, además,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\tau}} < \infty.$$

Para estar en condiciones de poder probar el teorema de Hadamard necesitaremos primero un lema previo que nos relacione el crecimiento de una función trascendente con la velocidad a la que diverge en módulo su sucesión de ceros.

Lema 2.22. Sea $f(z)$ una función trascendente de orden finito ρ. Sea también $\{a_k\}_{n=0}^{\infty}$ su sucesión de ceros no nulos y sea τ el exponente de convergencia de dicha sucesión.

Entonces se tiene que

$$\tau \leq \rho.$$

Demostración. Para probar esto partiremos de la conocida como desigualdad de Jensen, escrita en la forma

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r} dr \leq \log\left(\frac{M(R)}{\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} R^k}\right),$$

donde $n(r)$ denota el número de ceros de f situados en la bola cerrada $\bar{B}(0,r)$ y k es el orden de 0 como cero de la función f (ver [2], section 4.8.5). Tomamos ahora un θ arbitrario cumpliendo que $0 < \theta < 1$. Vemos que se tiene que

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r} dr \geq n(\theta R) \int_{\theta R}^R \frac{dr}{r} = n(\theta R) \log(1/\theta).$$

Por lo tanto, si introducimos la cota anterior en la desigualdad de Jensen y manipulamos la expresión obtenemos que

$$n(\theta R) < \frac{\log M(R) - \log\left(\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} R^k\right)}{\log(1/\theta)}.$$

De donde, observando que, para k fijo, se tiene que $M(R) >> R^k$, se sigue que

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{n(\theta R)}{\log M(R)} \leq \frac{1}{\log(1/\theta)}.$$

Si ahora tenemos en cuenta que, por definición de orden, para todo $\mu > \rho$ se tiene que $\log M(R) < R^\mu$ para $R > R(\mu)$, y hacemos el cambio $\theta R = R$, en la desigualdad anterior nos queda

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{n(R)}{R^\mu} \leq \frac{1}{\theta^\mu \log(1/\theta)}.$$

Refinemos esta desigualdad todo lo posible minimizando el segundo miembro. Un cálculo sencillo muestra que el mínimo es $e\mu$ y se alcanza en el punto θ_0, siendo éste $0 < \theta_0 = e^{-1/\mu} < 1$. Resulta que

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{n(R)}{R^\mu} \leq e\mu.$$

Se observa ahora que si tomamos $R = |a_k|$ entonces se sigue que $k \leq n(R)$ y se puede hacer esta sustitución en la desigualdad anterior, sin que esta cambie. Consiguientemente queda que

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{k}{|a_k|^\mu} \leq e\mu.$$

Esto significa que, dado $\varepsilon > 0$, para un índice k suficientemente grande tenemos que

$$\frac{1}{|a_k|^\mu} \leq \frac{e(\mu+\varepsilon)}{k}.$$

Finalmente, elevamos la desigualdad anterior al exponente $(\mu+\varepsilon)/\mu$ para obtener que

$$\frac{1}{|a_k|^{\mu+\varepsilon}} \leq \frac{[e(\mu+\varepsilon)]^{(\mu+\varepsilon)/\mu}}{k^{(\mu+\varepsilon)/\mu}}.$$

Puesto que $(\mu+\varepsilon)/\mu > 1$ podemos concluir que, para cualquier $\lambda > \mu$, converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\lambda}}.$$

En consecuencia dicha serie convergerá para $\lambda > \rho$ y, como queríamos, $\tau \leq \rho$. ★

Teorema 2.23 (Teorema de Hadamard)**.** Sea $f(z)$ una función trascendente de orden finito ρ con un cero de orden n en el punto cero. Sea además $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ su sucesión de ceros no nulos y τ el exponente de convergencia de dicha sucesión.

Entonces existe un polinomio $p(z)$ de grado menor o igual que la parte entera de ρ satisfaciendo que

$$f(z) = e^{p(z)} z^n \prod_{k=1}^{\infty} E_{\chi}\left(\frac{z}{a_k}\right),$$

donde χ es el rango de la sucesión anterior.

Demostración. Primero notamos que gracias a la observación 2.21 y al lema 2.22 anteriores se tiene que τ y χ son finitos también.

Ahora, como ya sabemos, en virtud del corolario 2.18 y la observación 2.19, existe una función entera $g(z)$ tal que

$$f(z) = e^{g(z)} z^n \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right) e^{P_k(z)}, \text{ siendo } P_k(z) = \frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^{\chi}}{\chi a_k^{\chi}}.$$

El objetivo será ver que los coeficientes del desarrollo de Taylor de $g(z)$ son nulos para todo $n > \rho$, con lo que g será un polinomio de grado menor o igual que $[\rho]$ y habremos terminado.

Dado $R > 1$, tomemos $k(R)$ tal que $|a_k| > R$ siempre que $k > k(R)$ y $|a_k| \leq R$ si no, y reescribimos pues f de la siguiente manera

$$f(z) = z^n \prod_{k=\lambda}^{k(R)}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\left[e^{g(z)+\sum_{k=1}^{k(R)} P_k(z)} \prod_{k=k(R)+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right) e^{P_k(z)}\right],$$

Obsérvese que, si $|z| < R$ se tiene que $1 - z/a_k \in B(1,1)$. Denotamos como $H_R(z)$ la expresión entre corchetes y, puesto que es entera, para los $|z| < R$, buscamos una función $h_R(z)$ que cumpla que $H_R(z) = e^{h_R(z)}$. Consideramos

$$h_R(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{k(r)} P_k(z) + \sum_{k=k(R)+1}^{\infty} \left(\log(1 - \frac{z}{a_k}) + P_k(z) \right),$$

donde log es la rama principal del logaritmo. Vemos que, en virtud de la observación 2.19 anterior, la serie que aparece en la expresión anterior convergerá uniformemente en $B(0,R)$. Es decir, tendremos que $h_R(z)$ está bien definida y efectivamente $H_R(z) = e^{h_R(z)}$ en dicho círculo.

Querremos ahora interpretar la igualdad anterior en términos de los coeficientes de sus series de Taylor. Para ello suponemos que

$$h_R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ y que } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

despejamos en dicha igualdad los b_n y tomamos módulos. Puesto que los polinomios $P_k(z)$ tienen grado χ, para $n > \chi$ nos queda

$$|b_n| \leq |c_n| + \sum_{k=k(R)+1}^{\infty} \frac{1}{n a_k^n}.$$

Acotaremos ahora los $|c_n|$ usando la hipótesis de que $f(z)$ es de orden finito ρ. Recordemos que se tenía que

$$f(z) = H_R(z) z^n \prod_{k=1}^{k(R)} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

Como vemos, para z con $|z| = 2R$ tendremos que

$$|f(z)| \geq |H_R(z)| \left| (2R)^n \prod_{k=1}^{k(R)} \left(1 - \frac{2R}{R}\right) \right| \geq |H_R(z)|,$$

cierto por cómo hemos escogido el índice $k(R)$ y por ser $R > 1$. Vemos que esto significa que

$$\max_{|z|=2R} |H_R(z)| \leq \max_{|z|=2R} |f(z)|.$$

Y como $H_R(z)$ es una función entera, por el principio del módulo máximo, obtenemos que, en particular para z con $|z| < R$, se sigue que

$$|H_R(z)| = e^{\operatorname{Re} h_R(z)} \leq \max_{|z|=2R} |f(z)| = M_f(2R) \leq e^{(2R)^{\rho+\varepsilon}}, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Aplicamos ahora el lema 1.21 a la función $h_R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ que, por lo anterior, verifica que $\operatorname{Re} h_R(z) < U = (2R)^{\rho+\varepsilon}$, en el círculo $|z| < R$. Deducimos que los coeficientes c_n cumplen que:

$$|c_n| \leq \frac{2(2R)^{\rho+\varepsilon} - 2Re(c_0)}{R^n}.$$

Consiguientemente, volviendo a los b_n tenemos que, para los $n > \chi$, se cumple que

$$|b_n| \leq \frac{2(2R)^{\rho+\varepsilon} - 2Re(c_0)}{R^n} + \sum_{k=k(R)+1}^{\infty} \frac{1}{n a_k^n}.$$

Puesto que todo lo anterior es válido para cualquier $R > 1$ y $n > \chi$, veamos para qué índices de n (mayores que χ), ambos sumandos se hacen arbitrariamente pequeños a medida que $R \to \infty$.

Para el primero, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{2(2R)^{\rho+\epsilon} - 2\operatorname{Re}(c_0)}{R^n} = 0, \text{ para los } n > \rho + \varepsilon.$$

Para el segundo, por definición de χ se sigue que si $n > \chi$, entonces $\sum_{k\geq 1} 1/{a_k}^n$ converge y como $k(R)$ tiende a infinito cuando $R \to \infty$, se deduce que

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{k=k(R)+1}^{\infty} \frac{1}{n a_k^n} = 0, \text{ para los } .$$

Esto significa que, tomando un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, vemos que podemos concluir que los b_n son nulos para cada $n > \max(\chi, \rho)$. Finalmente, apoyándonos en la observación 2.21 anterior deducimos que $\chi \leq \tau \leq \rho$ y consiguientemente tenemos que $b_n = 0$ para los $n > [\rho]$, es decir, concluímos que la función $g(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que ρ.

★

Ejemplo 2.24. Usemos el resultado anterior para deducir el desarrollo en producto infinito de la funcion $\sin(z)$. Como sabemos $\sin(z)$ tiene orden finito $\rho = 1$ y su sucesión de ceros no nulos es

$$\{-\pi, \pi, -2\pi, 2\pi, \ldots, -k\pi, k\pi, \ldots\}.$$

Es fácil comprobar que su exponente de convergencia es $\tau = \chi = 1$. En definitiva su desarrollo en producto infinito es de la forma

$$\operatorname{sen}(z) = e^{g(z)} z \prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{z}{k\pi}} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{-\frac{z}{k\pi}} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) = e^{g(z)} z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

siendo, en virtud del teorema de Hadamard, la función g un polinomio de grado menor o igual que uno: $g(z) = A + Bz$. Manipulemos y evaluemos en la expresión para determinar los coeficientes:

$$e^{g(z)} = \frac{\sin(z)}{z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}.$$

Lo más fácil ahora es observar que $e^{g(z)}$ será una función par, por ser cociente de dos impares, es decir tenemos que

$$e^{A+Bz} = e^{A-Bz} \Longrightarrow e^{2Bz} = 1 \Longrightarrow B = 0.$$

Ahora tomamos límites cuando $z \to 0$. Vemos que $e^{g(z)} \to 1$ de lo que deducimos finalmente que $A = 0$ también, es decir, $e^{g(z)} = 1$. Finalmente nos queda que

$$\sin(z) = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Mostraremos ahora un resultado que, hasta cierto punto, se puede considerar inverso del teorema de Hadamard, es decir, partiremos de una función entera con desarrollo en producto infinito y daremos conclusiones sobre su orden e incluso su tipo.

Teorema 2.25 (Teorema de Borel)**.** Sea $f(z)$ una función entera con un cero de orden $\lambda \geq 0$ en el punto cero, sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ su sucesión de ceros no nulos, siendo $\tau < \infty$ el exponente de convergencia de dicha sucesión. Sea también f tal que se puede expresar como

$$f(z) = e^{p(z)}z^{\lambda}\prod_{k=1}^{\infty}E_{\chi}\left(\frac{z}{a_k}\right) = e^{p(z)}z^{\lambda}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_k}\right)e^{P_k(z)},$$

siendo los polinomios $P_k(z)$ definidos igual que en el teorema de Hadamard y $p(z)$ un polinomio de grado n.

Entonces f será de orden finito ρ siendo $\rho = \max(\tau, n)$.

Demostración. Acotaremos en módulo todos los factores que intervienen en la expresión dada por el enunciado y veremos qué orden nos queda.

Primero acotemos el factor $e^{p(z)}$, sea $p(z) = A_0 + \cdots + A_n z^n$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ vemos que existe un $r(\varepsilon)$ tal que se cumple que

$$|z^n e^{p(z)}| \leq |z|^{\lambda}e^{|A_0|+\ldots|A_n||z|^n} < e^{(|A_n|+\varepsilon)|z|^n}, \text{ para } z \text{ con } |z| > r(\varepsilon).$$

Vamos ahora con el producto infinito, por comodidad hacemos el cambio $\xi = z/a_k$, vemos que un término cualquiera del producto infinito se expresa como

$$E_\chi(\xi) = (1-\xi)\exp\left(\xi + \frac{\xi^2}{2} + \cdots + \frac{\xi^\chi}{\chi}\right).$$

Acotemos pues en módulo uno de estos términos. Separaremos en dos casos según el módulo de ξ. Para $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ tendremos que

$$\begin{aligned} |E_\chi(\xi)| &\leq \left|\exp\left(\log(1-\xi) + \xi + \cdots + \frac{\xi^\chi}{\chi}\right)\right| = \\ &= \left|\exp\left(-\frac{\xi^{\chi+1}}{\chi+1} - \frac{\xi^{\chi+2}}{\chi+2} - \dots\right)\right| \leq \\ &\leq \exp\left(|\xi|^{\chi+1}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots)\right) = e^{2|\xi|^{\chi+1}}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde vemos que, dado que $|\xi| \leq \frac{1}{2}$, es lícito considerar la rama principal del logaritmo, $\log(1-\xi)$. En resumen, si suponemos que $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ vemos que para cada $\mu_1 \leq \chi + 1$ se sigue que $|\phi(\xi)| \leq e^{2|\xi|^{\mu_1}}$. Ahora, si suponemos que $|\xi| > \frac{1}{2}$, tendremos que

$$\begin{aligned} |E_\chi(\xi)| &\leq (1+|\xi|)\exp\left(|\xi| + |\xi|^2 + \cdots + |\xi|^\chi\right) \leq \\ &\leq (1+|\xi|)\exp\left[|\xi|^\chi\left(\frac{1}{|\xi|^{\chi-1}} + \frac{1}{|\xi|^{\chi-2}} + \cdots + 1\right)\right] \leq \\ &\leq \exp\left[\log(1+|\xi|) + 2^\chi|\xi|^\chi\right] \leq e^{C|\xi|^{\mu_2}}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

verificándose la última desigualdad para todo $\mu_2 \geq \chi$ y para un cierto valor $C = C(\mu_2)$.

Juntando los dos casos obtenemos que si μ es tal que $\chi \leq \mu \leq \chi + 1$ se cumple que

$$\left|E_\chi\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| \leq \exp\left(C\frac{|z|^\mu}{|a_k|^\mu}\right), \text{ para todo } k.$$

Es decir, por todo lo anterior, nos queda que para cada z con $|z| > r(\varepsilon)$ se tiene que

$$|f(z)| < \exp\left[(|A_n| + \varepsilon)|z|^n + \left(C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^\mu}\right)|z|^\mu\right], \text{ para } \chi \leq \mu \leq \chi + 1. \tag{2.4}$$

Como vemos, en la ecuación anterior podemos tomar un μ tal que sea convergente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^\mu}.$$

Efectivamente, si resulta que el exponente de convergencia τ hace convergente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|a_k|^{\tau}$, entonces $\chi < \tau \leq \chi+1$ y podemos tomar $\mu = \tau$. En caso contrario, se tiene que $\chi \leq \tau < \chi + 1$ y basta tomar μ tal que $\tau < \mu < \chi + 1$.

Recapitulando, para cada $|z| > r(\varepsilon)$ y un μ adecuado tenemos que los coeficientes

$$(|A_n| + \varepsilon) \quad \text{y} \quad \left(C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\mu}} \right)$$

son acotados y en consecuencia de la ecuación (2.4) se deduce que

$$\rho \leq \text{máx}\,(\mu, n)\,.$$

No obstante, o bien $\mu = \tau$, o bien se puede tomar μ arbitrariamente próximo a τ, luego tendremos que

$$\rho \leq \text{máx}(\tau, n).$$

Por otro lado, en virtud del Teorema de Hadamard, una función entera de orden finito ρ y exponente de convergencia τ tiene que cumplir que $\tau \leq \rho$ y que $n \leq \rho$, siendo n el grado del polinomio $p(z)$. Por ello ha de ser $\rho = \text{máx}(\rho, n)$, como queríamos demostrar. ★

Corolario 2.26. En los términos del teorema de Borel si suponemos que, además, $\tau < n$, ó que $\tau \geq n$ y es convergente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\tau}}, \tag{2.5}$$

entonces f será de tipo finito.

Demostración. Nos damos cuenta de que es prácticamente trivial usando la siguiente desigualdad, que ya hemos probado en la demostración anterior:

$$|f(z)| < \exp\left[(|A_n| + \varepsilon)|z|^n + \left(C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\mu}} \right) |z|^{\mu}\right], \text{ para } \chi \leq \mu \leq \chi + 1.$$

Por un lado si $n > \tau$, es decir, si el orden es $\rho = n$, en dicha desigualdad podemos tomar un μ tal que $\tau < \mu < n$, de forma que la serie que aparece en la desigualdad es convergente. Observamos que f tendrá tipo finito

$$\sigma \leq |A_n| + \varepsilon.$$

Por otro lado, si $\tau \geq n$ y la serie (2.5) converge, será $\rho = \tau$, podremos tomar $\mu = \tau$ en dicha desigualdad y tendremos que el tipo es finito. ★

Observación 2.27. Recapitulando, por los teoremas de Borel y Hadamard vemos que hemos obtenido una característica propia de las funciones enteras de orden finito: la existencia de un desarrollo de la forma

$$f(z) = e^{p(z)} z^{\lambda} \prod_{k=\lambda}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_k}) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^{\chi}}{\chi a_k^{\chi}}\right),$$

donde χ es el rango y $p(z)$ un polinomio.

Definición 2.28. Sea f una función entera de orden finito, es decir, tal que admite una expresión del tipo

$$f(z) = e^{p(z)} z^{\lambda} \prod_{k=\lambda}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_k}) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^{\chi}}{\chi a_k^{\chi}}\right)$$

donde $n = \deg(p)$ y χ es el mayor entero para el cual diverge la serie

$$\sum_{k=\lambda}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\chi}}.$$

Llamamos *género* de la función f, y lo denotamos con la letra p, al entero

$$p = \max(n, \chi).$$

Observación 2.29. Enlacemos esta nueva definición con los conceptos que ya conocíamos: como se tiene que $\rho = \max(n, \tau)$ y se cumple siempre que $\tau \geq \chi$ deducimos que $\rho \geq p$.

Por otro lado $\tau \leq \chi + 1$, es decir, $\rho \leq \max(n, \chi) + 1 = p + 1$. Consiguientemente,

$$p \leq \rho \leq p + 1.$$

Es decir, vemos que generalmente tendremos que $p = [\rho]$ y excepcionalmente $p = [\rho] - 1$ cuando, y sólo cuando, $\rho = p + 1$.

El hecho de que $\rho = p+1$, es equivalente a que τ es entero, $\rho = \tau$ y $p = \chi$, siendo $n < \tau$ (pudiendo suceder que $p = \chi = n$). Esto es equivalente a que $n < \tau$, donde τ es un número entero, y a que sea convergente la serie

$$\sum_{k=\lambda}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\tau}}.$$

Ejemplo 2.30. Ilustremos con dos ejemplos que funciones de distinto orden pueden tener el mismo género. Sea

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

Vemos que para esta función el polinomio es $p(z) \equiv 0$, luego $n = 0$. Como ya vimos también, se tiene que $\tau = \chi = 1$. En consecuencia

$$\rho = \text{máx}(n, \tau) = 1,$$

$$p = \text{máx}(n, \chi) = 1.$$

Sin embargo, sea ahora

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k[\log(k+1)]^2}\right).$$

En este otro caso tenemos que $n = 0$ y vemos claramente que $\tau = 1$ y que $\chi = 0$ por lo que

$$\rho = \text{máx}(n, \tau) = 1,$$

$$p = \text{máx}(n, \chi) = 0.$$

Observación 2.31. Vemos que las funciones de género 0 quedan caracterizadas completamente por la existencia de un desarrollo del tipo

$$f(z) = Cz^{\lambda} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right),$$

donde es convergente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|}.$$

Podemos dar a continuación un complemento a la versión débil del teorema de Picard para funciones de orden finito y no entero.

Teorema 2.32. Sea $f(z)$ una función entera de orden $\rho \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$. Dado $A \in \mathbb{C}$, el exponente de convergencia de la sucesión de ceros no nulos asociada a la función $f(z) - A$ no depende de A y coincide con el orden ρ de la función.

Demostración. Si $f(z)$ es una función de orden finito ρ, para cualquier $A \in \mathbb{C}$ tendremos que la función $f(z) - A$ tiene también orden finito ρ.

Por el teorema de Hadamard sabemos que ambas admiten desarrollos de la forma

$$f(z) = e^{p(z)} z^{\lambda} \prod_{k=\lambda}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_k}) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^{\chi}}{\chi a_k^{\chi}}\right),$$

$$f(z) - A = e^{q(z)} z^{\mu} \prod_{k=\mu}^{\infty} (1 - \frac{z}{b_k}) \exp\left(\frac{z}{b_k} + \cdots + \frac{z^{\nu}}{\nu b_k^{\nu}}\right),$$

siendo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ las sucesiones de ceros asociadas a las funciones $f(z)$ y $f(z) - A$, respectivamente. Sean, además, n y m los grados de los polinomios $p(z)$ y $q(z)$ y sean τ y τ_A los exponentes de convergencia de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, respectivamente.

Como los órdenes de dichas funciones son iguales, en virtud del teorema de Borel tendremos que

$$\rho = \text{máx}(n, \tau) = \text{máx}(m, \tau_A).$$

Pero al ser ρ no perteneciente a $\mathbb{N}$ y siendo como son n y m enteros, tendremos que $\rho \neq n$ y $\rho \neq m$ y en consecuencia, como queríamos,

$$\rho = \tau = \tau_A.$$

★

Observación 2.33. Recordemos que de la versión débil del teorema pequeño de Picard que dimos (teorema 1.28) únicamente se deduce que, dado un número complejo A, la función $f(z) - A$ tiene infinitos ceros.

En términos del desarrollo en producto infinito de una función, esto significa solamente que la sucesión de ceros no nulos de $f(z) - A$ tiene exponente de convergencia finito, por serlo el orden, y no negativo, por no ser finita la sucesión de ceros.

Con toda la teoría que hemos desarrollado en este capítulo, ahora vemos que podemos asegurar que dicho exponente de convergencia no depende del número A y, de hecho, es igual a ρ.

Por otro lado, para las funciones de orden entero, $\rho \in \mathbb{N}$, puede haber algún valor, denominado valor excepcional boreliano, para el que dicho exponente de convergencia es menor que ρ. Tal valor boreliano puede ser, por ejemplo, el valor excepcional de Picard, es decir el A_0 para el cual el cardinal de $f^{-1}(A_0)$ es finito. Vemos que esto es así puesto que la sucesión de ceros no nulos asociada a la función $f(z) - A_0$ tendrá exponente de convergencia nulo $\tau_{A_0} = 0$.

Ejemplo 2.34. Ilustremos la primera parte de la observación anterior con la función que en su momento usamos para ilustrar el teorema pequeño de Picard,

$$\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}.$$

Ésta función tiene orden $\rho = 1/2$. Podemos asegurar, de acuerdo con el teorema 2.32, que para cualquier valor de A el exponente de convergencia de la sucesión de ceros de la función $f(z) - A$ es $1/2$. En concreto, vemos que para $A_0 = 0$, efectivamente se cumple: la sucesión

$$\left\{(k\pi)^2\right\}_{k=1}^{\infty}$$

tiene obviamente exponente de convergencia igual a $1/2$.

Para ilustrar la segunda parte pueden servir las funciones e^z y $p(z)e^{P(z)}$, donde $p(z)$ y $P(z)$ son polinomios. Vemos que la primera tiene orden 1 y no toma el valor 0 y la segunda, de orden $\deg(P)$, se anula un número finito de veces. Es decir, en estos casos el valor excepcional de Picard es boreliano.

Finalmente, veamos que el valor excepcional boreliano puede no ser de Picard. Sea la función de orden finito $\rho = 2$, $e^{z^2}\sin(z)$, cuyos ceros coinciden con los de $\sin(z)$, es decir, su exponente de convergencia será $\tau = 1$. En consiguiente, 0 es un valor excepcional boreliano sin ser de Picard.

Capítulo 3

Teorema de Mittag - Leffler y consecuencias.

Definición 3.1. Sea U un abierto del plano. Se dice que una función f es *meromorfa* en U si existe $P \subset U$ tal que el conjunto $P' \cap U$ es vacío y de modo que $f : U \setminus P \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $U \setminus P$ y para cada $p \in P$ se tiene que f presenta un polo en el punto p.

En otras palabras f es holomorfa en U salvo en un conjunto discreto en U de singularidades, siendo todas ellas polares.

Proposición 3.2. Una función $f(z)$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ si, y sólo si, se puede expresar como cociente de dos funciones enteras, es decir, existen $g(z), h(z)$ enteras tales que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \text{ siendo } h(z) \not\equiv 0.$$

Demostración. Supongamos primero que la función $f(z)$ es meromorfa, es decir, que sus singularidades son polares y vayamos separando los diferentes casos en creciente dificultad para ver que $f(z)$ se puede expresar como cociente de funciones enteras.

Para el caso trivial en el que la función $f(z)$ no tiene singularidades, ella misma será entera.

Supongamos ahora que $f(z)$ tiene un número $n \geq 1$ finito de polos en los puntos $a_1, \ldots, a_n$ de órdenes $k_1, \ldots, k_n$. Para razonar con comodidad consideraremos el polinomio

$$P(z) = (z - a_1)^{k_1} \ldots (z - a_n)^{k_n}.$$

Está claro que la función producto $f(z)p(z)$ admite una extensión entera, que denotamos igual, $f(z)p(z)$. En consecuencia podemos expresar f como el cociente de funciones enteras

$$f(z) = \frac{f(z)p(z)}{p(z)}.$$

Finalmente, supongamos que $f(z)$ posee un conjunto infinito de polos. Notamos que en las bolas acotadas sólo puede haber una cantidad finita de ellos. En caso contrario tendríamos que existe un punto finito del plano que es de acumulación del conjunto de polos, en contra de que $f(z)$ sea meromorfa. Es decir, podemos ordenar las singularidades crecientemente según su módulo $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Sean $k_1, \ldots, k_n, \ldots$ sus órdenes respectivos. Como $|a_n| \to \infty$, por el teorema de Weierstrass sabemos que existe una función entera $h(z)$ cuyos ceros son exactamente éstos. Una vez más el producto $f(z)h(z)$ admite una extensión entera y consiguientemente podemos expresar $f(z)$ como el cociente

$$f(z) = \frac{f(z)h(z)}{h(z)}.$$

Veamos pues a continuación que, en los puntos finitos del plano, una función que sea cociente de funciones enteras las únicas singularidades que puede tener son polos. Sea

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

En efecto, para que $f(z)$ tenga una singularidad es condición necesaria que la función $h(z)$ presente un cero. Veamos lo que sucede si dicho cero coincidiera con uno de la función $g(z)$. Sea z_0 un cero de orden k de la función h y, a su vez, un cero de orden $l \geq 0$ de g. Si $k > l$, entonces f presenta un polo de orden $k-l$ en z_0 y si no z_0 es una singularidad evitable, un cero de orden $l-k$, de hecho. En consecuencia vemos que. a lo sumo, z_0 será una singularidad evitable o polar, pero en ningún caso esencial.

Por ser la función denominador h entera, el conjunto de ceros de h no puede tener ningún punto de acumulación en un punto finito del plano. En consecuencia el conjunto de polos de la función $f(z)$ tampoco.

★

Observación 3.3. Si una función es meromorfa en $\mathbb{C}$ y posee infinitos polos, entonces el punto del infinito será un punto de acumulación del conjunto de polos y, en consecuencia, presentará una singularidad esencial en el infinito.

En la siguiente proposición caracterizaremos lo que sucede cuando, en el punto del infinito, una función meromorfa presenta una singularidad evitable o polar.

Proposición 3.4. Una función $f(z)$ meromorfa en $\mathbb{C}$ es racional si, y sólo si, dicha función tiene una singularidad evitable o polar en el punto del infinito.

Demostración. Sea f meromorfa en $\mathbb{C}$ y que presenta una singularidad evitable o polar en el infinito. Por lo que hemos visto en la observación anterior la función f tendrá un número finito de polos $a_1, \ldots, a_n$. Sean $k_1, \ldots, k_n$ sus órdenes y sean, respectivamente, $g_1(z), \ldots, g_n(z)$ las partes principales de los desarrollos de Laurent de la función $f(z)$ en entornos de dichos polos. Es decir,

$$g_j(z) = \frac{A_{k_j}}{(z-a_j)^{k_j}} + \cdots + \frac{A_1}{(z-a_j)},$$

con $A_1, \ldots, A_{k_j}$ adecuados. Sea además $g_0(z)$ la parte principal correspondiente al entorno del punto del infinito, $g_0(z) = b_1 z + \cdots + b_p z^p$, con $b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{C}$ adecuados. Consideremos la función

$$\varphi(z) = f(z) - \sum_{j=0}^{n} g_j(z).$$

Como vemos $\varphi(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, donde cada a_j es una singularidad evitable de φ, puesto que en cada a_j la función g_j anula todos los términos de potencias negativas del desarrollo de Laurent de f:

$$\varphi(z) = f(z) - g_j(z) - g_0(z) + \cdots + g_{j-1}(z) + g_{j+1}(z) \cdots + g_n(z).$$

El punto del inifinito es una singularidad evitable de φ por un argumento similar. En consecuencia $\varphi(z)$ es idénticamente constante pues es entera y presenta una singularidad evitable en el infinito. Por lo tanto

$$f(z) = c + \sum_{j=0}^{n} g_j(z).$$

Y como queríamos $f(z)$ es una suma finita de funciones racionales, es decir, racional.

La otra implicación es obvia puesto que una función racional presenta en el infinito una singularidad evitable o polar. ★

Definición 3.5. Dada una función $f(z)$ racional arbitraria llamamos *desarrollo en fracciones simples* de la función a la expresión hallada en la demostración anterior

$$f(z) = c + \sum_{j=0}^{n} g_j(z).$$

Es decir, a la suma de una constante más las partes principales de los desarrollos de Laurent de la función en los entornos de cada uno de sus polos.

Observación 3.6. Como ya sabemos, siguiendo la notación anterior, vemos que dada $f(z)$ con un polo de orden k_j en el punto a_j, en un entorno adecuado, podemos expresar la función como

$$f(z) = g_j(z) + B_0 + B_1(z - a_j) + \dots,$$

siendo g_j la parte principal de $f(z)$ en el polo a_j.

En el siguiente resultado veremos que podemos encontrar una función meromorfa en $\mathbb{C}$ cuyos polos y cuyas correspondientes partes principales las prefijamos nosotros a conveniencia. Además veremos cómo encontrar tales funciones.

Teorema 3.7 (Teorema de Mittag - Leffler)**.** Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión divergente y creciente en módulo de números complejos y sea $\{G_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de la forma

$$G_k(z) = \frac{A_{-i_k}^{(k)}}{(z - a_k)^{i_k}} + \dots + \frac{A_{-1}^{(k)}}{(z - a_k)}.$$

Entonces existe una función meromorfa $f(z)$ que tiene polos exactamente en los puntos a_k y cuyas partes principales en dichos puntos son precisamente las funciones $G_k(z)$.

Demostración. Siendo $P_k(z)$ polinomios, vamos a buscar una función en las condiciones pedidas mediante una serie de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_k(z) - P_k(z)\right].$$

Puesto que al sumar polinomios la función $f(z)$ seguirá siendo meromorfa y tampoco se alterarán las singularidades ni sus partes principales asociadas, bastará con ver que podemos elegir los polinomios $P_k(z)$ de modo que la serie anterior sea uniformemente convergente en los compactos de $\mathbb{C}$.

Procederemos como otras veces: sea $R > 0$, consideraremos el círculo $|z| < R$. Sabemos que existe $k(R)$ tal que si $k \geq k(R)$, los polos a_k estarán fuera de la bola de, por ejemplo, radio $2R$.

Como la función $G_k(z)$ es analítica en el círculo $|z| < |a_k|$, su desarrollo de Taylor en el origen,

$$G_k(z) = A_0^{(k)} + A_1^{(k)} z + \dots + A_n^{(k)} z^n + \dots,$$

será uniformemente convergente en el círculo $|z| < \frac{|a_k|}{2}$. Podemos elegir pues un $n_k \in \mathbb{N}$ de tal forma que, en dicho círculo,

$$|G_k(z) - (A_0^{(k)} + A_1^{(k)} z + \dots + A_{n_k}^{(k)} z^{n_k})| < \frac{1}{2^k}.$$

Lógicamente tomamos

$$P_k(z) = A_0^{(k)} + A_1^{(k)} z + \cdots + A_{n_k}^{(k)} z^{n_k}.$$

Observamos que para todo $K \geq k(R)$ tendremos que si $|z| < R$, entonces se cumple que $|z| < \frac{|a_k|}{2}$ y en definitiva tendremos que

$$|G_k(z) - P_k(z)| < \frac{1}{2^k}, \text{ si } |z| < R \text{ y } k \geq K(R).$$

En definitiva deducimos que la serie

$$\sum_{k=k(R)}^{\infty} (G_k(z) - P_k(z))$$

es absoluta y uniformemente convergente dentro del círculo $|z| < R$, y representa una función analítica en dicho círculo, llamémosla $\varphi_R(z)$.

Recapitulando, veamos que para dicha elección de los $P_k(z)$ tendremos que la serie original

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (G_k(z) - P_k(z))$$

es una función meromorfa y que cumple nuestros requisitos. Para esto expresamos $f(z)$ como

$$f(z) = \sum_{k=0}^{k(R)} (G_k(z) - P_k(z)) + \varphi_R(z).$$

Se deduce que los polos de la función $f(z)$ coinciden exactamente con los puntos a_n y cuyas partes principales, en entornos adecuados, son las $G_n(z)$.

★

Corolario 3.8. Sea $f(z)$ una función meromorfa, sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ su sucesión ordenada en módulo de polos y tal que las partes principales de $f(z)$ en cada polo sean correspondientemente $\{G_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$.

Entonces, la función f se puede expresar como la serie

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (G_k(z) + P_k(z)),$$

donde $g(z)$ es una función entera y $P_k(z)$ ciertos polinomios.

Demostración. Para demostrarlo, primero, por el teorema de Mittag - Leffler, sabemos que existe una función meromorfa $\varphi(z)$ que comparte los polos y sus correspondientes partes principales con la función $f(z)$. Por la demostración de dicho teorema sabemos que dicha expresión se puede obtener en la forma

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(G_k(z) + P_k(z)),$$

donde los $P_k(z)$ son ciertos plinomios adecuados. Es claro que la función $g(z) = f(z) - \varphi(z)$ es analítica en todos los puntos finitos del plano y, en consiguiente, una función entera, es decir,

$$f(z) = g(z) + \varphi(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(G_k(z) + P_k(z)).$$

★

Ejemplo 3.9. Veremos ahora un ejemplo que dará pie a otra generalización diferente del teorema de Weierstrass: no sólo podemos contruir una función entera con los ceros elegidos a conveniencia, con este nuevo teorema, dado un conjunto adecuado de puntos del plano, podremos elegir el valor que toman sus primeras derivadas en dichos puntos (un número finito de ellas, que no tiene por qué ser el mismo para todos los puntos).

En este ejemplo vamos a ver cómo interpolar unos valores escogidos a conveniencia en un número finito de puntos del plano, es decir, escogeremos el valor de la derivada de orden cero en dichos puntos.

Sea pues $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos ordenada en módulo (los nodos). Sea también $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos.

Primero, gracias al teorema de Weierstrass, construímos una función entera $h(z)$ que tenga ceros simples en los puntos a_k (y sólo en ellos):

$$h(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{a_k}) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^k}{ka_k^k}\right).$$

Buscaremos ahora una expresión para cada punto a_k que interpole como deseamos. El objetivo será usar luego el teorema de Mittag-Leffler para encontrar una función entera $f(z)$ que interpole ya en todos los a_k. Consideramos pues, para cada k, la función

$$G_k(z) = \frac{B_k}{h'(a_k)}\frac{1}{z - a_k}.$$

Vemos que cada producto $G_k h(z)$ interpola como necesitamos puesto que

$$\lim_{z\to a_k} h(z)G_k(z) = \lim_{z\to a_k} \frac{h(z)}{z-a_k} G_k(z)(z-a_k) = \lim_{z\to a_k} \frac{h(z)}{z-a_k}\frac{B_k}{h'(a_k)} = B_k.$$

Aplicamos a continuación el teorema de Mittag-Leffler para encontrar una función meromorfa $\varphi(z)$ con polos simples en los a_k y cuyas partes principales correspondientes sean las funciones $G_k(z)$,

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(G_k(z) + P_k(z)\right),$$

donde los $P_k(z)$ están elegidos adecuadamente.

Notamos que cuando una función h presenta un polo de orden k en un punto y otra función φ presenta un cero de orden l en dicho punto, el producto, $h\varphi$, tendrá un polo de orden $k-l$ si $k>l$ o una singularidad evitable si $k \leq l$, de hecho, un cero de orden $l-k$. Por el comentario anterior está claro que la función producto $f(z) = h(z)\varphi(z)$ es una función entera, todas sus posibles singularidades, es decir, los polos simples de la función meromorfa $\varphi(z)$, quedan compensados por los ceros de la función entera $h(z)$.

Finalmente, puesto que, en un entorno adecuado de cada polo a_k, la función $\varphi(z)$ se comporta como su parte principal, vemos que se cumple lo que buscamos:

$$f(a_k) = \lim_{z\to a_k} h(z)\varphi(z) = \lim_{z\to a_k} \frac{h(z)}{z-a_k}\varphi(z)(z-a_k) = B_k.$$

Observación 3.10. En el ejemplo anterior, fácilmente nos dimos cuenta de cómo teníamos que escoger $G_k(z)$ para que el límite $\lim_{z\to a_k} G_k(z)h(z)$ fuera precisamente B_k. Generalicemos esto al caso en el que queremos interpolar también sus n primeras derivadas.

Sea A un número complejo. Sea $h(z)$ una función analítica en A y con un cero de orden n en dicho punto. Sean además, $C_1, C_2, \dots, C_n$ ciertos números complejos dados. Consideraremos la función racional dada como

$$G(z) = \frac{C_1}{z-A} + \dots + \frac{C_n}{(z-A)^n}.$$

Como vemos, la función $h(z)G(z)$ tendrá una singularidad evitable en el punto A y por ello existirán números complejos $B_0, B_1, B_2, \dots$ tales que en un entorno adecuado de A se tiene que

$$h(z)G(z) = B_0 + B_1(z-A) + \dots + B_{n-1}(z-A)^{n-1} + \dots$$

Por otro lado escribimos la serie de Taylor de la función h, sea

$$h(z) = A_0(z-A)^n + A_1(z-A)^{n+1} + \cdots + A_{n-1}(z-A)^{2n-1} + \dots$$

Como los coeficientes del polinomio de Taylor de $h(z)G(z)$ deberán de ser únicos obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0C_n, \\ B_1 &= A_0C_{n-1} + A_1C_n, \\ &\dots \\ B_{n-1} &= A_0C_1 + A_1C_2 + \cdots + A_{n-1}C_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Es decir, dada la función $h(z)$, si suponemos que los $C_1, C_2, \dots, C_n$ vienen dados vemos que los $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ quedarán determinados por las ecuaciones anteriores. Y a su vez, si partimos de los $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$, como $A_0 \neq 0$ si resolvemos iremos obteniendo recursivamente $C_n, C_{n-1}, \dots, C_1$.

Vemos que esta segunda implicación es justo lo que buscamos: dada una función $h(z)$ vemos cómo podemos obtener una función fraccionaria $G(z)$ tal que los primeros sumandos de la serie de Taylor del producto $h(z)G(z)$ en A sean elegidos por nosotros a conveniencia (y por tanto el valor de las derivadas). Obsérvese que en el ejemplo anterior se trató el caso más sencillo, $n = 1$, en el que bastó utilizar la solución a la primera ecuación de (3.1) y tomar, por lo tanto,

$$C_1 = \frac{B_0}{A_0} = \frac{B_0}{h'(A)}.$$

Enunciemos y demostremos pues el teorema que veníamos anticipando.

Teorema 3.11. Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos ordenada en módulo. Sean también dados, para cada k, un número n_k y unos valores complejos

$$B_0^{(k)}, B_1^{(k)}, \dots, B_{n_k}^{(k)}.$$

Entonces existe una función entera $f(z)$ cumpliendo que, para todo k,

$$\begin{aligned} f(a_k) &= B_0^{(k)}, \\ f'(a_k) &= B_1^{(k)}, \\ &\dots \\ \frac{f^{(n_k)}(a_k)}{n_k!} &= B_{n_k}^{(k)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Demostración. Primero, siguiendo la pauta anterior, hacemos uso del teorema de Weierstrass para encontrar una función entera $h(z)$ tal que para todo k tenga un cero en el punto a_k de orden $n_k + 1$.

De nuevo, buscaremos ahora una expresión, en la forma $h(z)G_k(z)$, tal que para cada punto a_k interpole como pide el enunciado. Como vemos necesitaremos, para cada k, unos números complejos

$$C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, \ldots, C_{n_k+1}^{(k)}$$

que en un entorno adecuado de a_k cumplan que

$$g(z)\left(\frac{C_1^{(k)}}{z-a_k} + \cdots + \frac{C_{n_k+1}^{(k)}}{(z-a_k)^{n_k+1}}\right) = B_0^{(k)} + \cdots + B_{n_k}^{(k)}(z-a_k)^{n_k} + \ldots$$

Como este era precisamente el problema que nos resolvía la observación anterior, tomamos, para cada k

$$G_k(z) = \frac{C_1^{(k)}}{z-a_k} + \cdots + \frac{C_{n_k+1}^{(k)}}{(z-a_k)^{n_k+1}}.$$

Consiguientemente vemos que con estos $C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, \ldots, C_{n_k}^{(k)}$ hemos resuelto el problema localmente en cada punto a_k, es decir, cada función entera

$$(gR_k)(z) = B_0^{(k)} + B_1^{(k)}(z-a_k) + \cdots + B_{n_k}^{(k)}(z-a_k)^{n_k} + \ldots$$

cumple nuestros requerimientos sobre las derivadas para cada punto a_k. Busquemos obtener una función que lo cumpla globalmente, en todos los a_k y que además sea entera.

Por el teorema de Mittag-Leffler existe una función $\varphi(z)$ meromorfa y tal que tiene polos exactamente en la sucesión de puntos ordenada crecientemente en módulo $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ y cuyas partes principales son precisamente las funciones $G_k(z)$. Obviamente la función $f(z) = h(z)\varphi(z)$ cumple los requisitos pedidos:

Está claro que es una función entera, todas sus posibles singularidades, es decir, los polos de la función meromorfa $\varphi(z)$, quedan compensados por los ceros de la función entera $h(z)$.

Por otro lado, puesto que la función $\varphi(z)$ se comporta como su parte principal en un entorno adecuado de cada polo a_k vemos que φ cumplirá lo que buscamos. ★

Ejemplo 3.12. Veamos ahora algunos casos particulares que muestran como los desarrollos dados por el teorema de Mittag-Leffler pueden ser sustituídos por otros más sencillos.

Consideremos el caso en el que queremos construir una función $f(z)$ con polos simples en una sucesión de puntos del plano $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ordenada crecientemente en módulo, con partes principales correspondientes $1/(z-a_k)$. Suponemos también que esta sucesión no toma el valor cero, para aligerar notación.

Para ello construímos, en virtud del teorema de Weierstrass, una función entera $\varphi(z)$ con ceros simples en dicha sucesión:

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{P_k(z)}.$$

De acuerdo con el teorema 2.13, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k, \dots\}$ se tiene que

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_k} + P_k'(z) \right).$$

Si consideramos los polinomios $P_k(z)$ como en el teorema de Weierstrass vemos que tendremos

$$P_k'(z) = \frac{1}{a_k} + \frac{z}{a_k^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{a_k^k}.$$

En resumen, siendo $g(z)$ una función entera, vemos que la solución más general a nuestro problema es

$$F(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} + \frac{z}{a_k^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{a_k^k} \right).$$

Pasemos ahora a generalizar el teorema de Mittag-Leffler para funciones meromorfas en un dominio G del plano ampliado que no contenga el punto del infinto.

Teorema 3.13. Sea G un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $\infty \notin G$, sea $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en G tal que el conjunto $A' \cap G$ es vacío, y sea $\{G_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones racionales de la forma

$$G_k(z) = \frac{A_{i_k}^{(k)}}{(z - a_k)^{i_k}} + \cdots + \frac{A_1^{(k)}}{(z - a_k)},$$

de modo que $G_k(z)$ tiene exactamente un polo de orden i_k en el punto a_k.

Entonces existe una función f meromorfa en G y tal que tiene polos exactamente en los puntos a_k y cuyas partes principales en dichos puntos son precisamente las funciones $G_k(z)$.

Demostración. Nos apoyaremos en el esquema de demostración que hicimos para el teorema de Mittag-Leffler, introduciendo cambios debidamente cuando sea necesario.

Llamamos Γ a la frontera de G y reordenaremos la sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ en distancia decreciente (positiva) a dicha frontera Γ. Denotaremos además por ρ_k a la distancia entre el punto a_k y la frontera Γ, y por γ_k a un punto de la frontera en el que se alcanza dicha distancia, es decir:

$$|a_k - \gamma_k| = \rho_k, \text{ para todo } k.$$

La función $G_k(z)$ admitirá un desarrollo de Laurent en el conjunto $|z-\gamma_k| > \rho_k$, es decir,

$$G_k(z) = \frac{B_1^{(k)}}{z-\gamma_k} + \cdots + \frac{B_n^{(k)}}{(z-\gamma_k)^n} + \ldots$$

Además, dicho desarrollo será uniformemente convergente en el dominio

$$|z-\gamma_k| \geq 2\rho_k.$$

Vemos que estos dominios asumen el papel que tenían las bolas $|z| < |a_k|$ y $|z| \leq \frac{|a_k|}{2}$ en la versión original del teorema.

Nuevamente dicha convergencia uniforme nos ayuda a elegir las correcciones adecuadas: elegimos n_k natural tal que, para cada z con $|z-\gamma_k| \geq 2\rho_k$ se cumpla que

$$\left| G_k(z) - \frac{B_1^{(k)}}{z-\gamma_k} + \cdots + \frac{B_{n_k}^{(k)}}{(z-\gamma_k)^{n_k}} \right| = |G_k(z) - P_k(z)| < \frac{1}{2^k}.$$

Formamos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(G_k(z) + P_k(z) \right).$$

Sea ahora F un subconjunto compacto arbitrario del dominio G. Si llamamos ρ a la distancia entre F y Γ vemos que, existe $k(\rho)$ tal que para todo $k > k(\rho)$, tendremos que $\rho_k < \rho/2$ y consiguientemente todos los puntos de F pertenecen al dominio de los $\{z \in G : |z-\gamma_k| \geq 2\rho_k\}$. En consecuencia la serie anterior es uniformemente convergente en cada dominio compacto F contenido en G y dicha serie cumple los requisitos pedidos por el teorema. ★

Observación 3.14. Modificando adecuadamente la construcción del teorema interpolatorio de Weierstrass, es posible contruir funciones holomorfas en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ con ceros prefijados. Si se continua este resultado con el anterior, se puede demostrar el siguiente teorema:

Sea G un abierto de $\mathbb{C}$, sea $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en G tal que el conjunto $A' \cap G$ es vacío. Sean también dados, para cada k, un número n_k y unos valores complejos

$$B_0^{(k)}, B_1^{(k)}, \dots, B_{n_k}^{(k)}.$$

Entonces existe una función meromorfa en G tal que, para todo k, se cumple que

$$\frac{f^{(i)}(a_k)}{i!} = B_i^{(k)}, \quad 0 \leq i \leq n_k.$$

Capítulo 4

La función Gamma.

En este capítulo, para finalizar el trabajo, pondremos en uso toda la teoría expuesta para introducir la función Gamma de Euler y estudiar luego su comportamiento asintótico y las integrales eulerianas de segunda especie.

4.1. Contrucción de la función Gamma.

En esta sección definiremos la función Gamma de Euler haciendo uso de la expresión de funciones como producto infinito.

La función $\Gamma(z)$ es una función compleja introducida en la ciencia por Euler con el objetivo de que interpole al factorial en los números naturales y que, a su vez, generalice la propiedad que lo caracteriza en el resto del plano complejo. Dicha propiedad es

$$n(n-1)! = n!, \text{ siendo } 1! = 1.$$

Es decir, estamos buscando una función compleja $\Gamma(z)$ tal que satisfaga la ecuación funcional

$$zf(z) = f(z+1), \text{ siendo } f(1) = 1. \tag{4.1}$$

Vemos que esto no es suficiente para definir la función con unicidad puesto que si $f_0(z)$ satisface la relación (4.1) y por otro lado consideramos una función meromorfa cualquiera, $\varphi(z)$, de periodo 1 y con $\varphi(1) = 1$, el producto $f_0(z)\varphi(z)$ también verificará la ecuación anterior.

Estudiemos ahora las singularidades que presentará una función que verifique tal ecuación. Como vemos

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} f(z+1) = 1.$$

Es decir, forzosamente tenemos un polo simple en 0 cuyo residuo es 1. Usando recurrentemente la ecuación funcional vemos que, en general, tenemos que para $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{z\to -m}(z+m)f(z) = \frac{(-1)^m}{m!}\lim_{z\to 0} f(z+1) = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Consecuentemente tendremos polos simples en los puntos $-m$, $m \in \mathbb{N}$ cuyos residuos serán $\frac{(-1)^m}{m!}$. Impongamos la condición de que éstas sean nuestras únicas singularidades.

Esto nos permite considerar la función entera

$$F(z) = \frac{1}{f(z)},$$

que presentará ceros simples en 0 y en los puntos $\{1, 2, 3, \dots\}$, con exponente de convergencia 1 y con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$, con lo que $\chi = 1$. En virtud de los teoremas de Hadamard y Weierstrass y F será de la forma

$$F(z) = e^{g(z)} z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k},$$

donde g es entera, o polinómica si se quiere que F sea de orden finito. Expresamos ahora $f(z)$, para ello sacamos el límite fuera y manipulamos la expresión para juntar todos los términos exponenciales. Nos queda, para cada $z \notin \{0, -1, -2, \dots\}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{-g(z)}}{z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}} && (4.2)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-g(z)}}{z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}} && (4.3)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!e^{-g(z)+\sum_{k=1}^{n}\frac{z}{k}}}{z(z+1)\dots(z+n)}. && (4.4)\end{aligned}$$

Veamos qué restricciones impone nuestra ecuación funcional, en términos del producto infinito:

1) Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{zf(z)}{f(z+1)} &= \lim_{n\to\infty}(z+n+1)e^{-g(z)+g(z+1)-\sum_{k=1}^{n}1/k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z+1}{n}\right)e^{-g(z)+g(z+1)-\left(\sum_{k=1}^{n}1/k-\log(n)\right)} && (4.5)\\ &= e^{-g(z)+g(z+1)-C},\end{aligned}$$

donde C denota la constante de Euler,

$$C = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1/k - \log(n) = 0{,}5772\dots$$

Para que $\frac{zf(z)}{f(z+1)} = 1$ nos basta con que la función entera $g(z)$ cumpla que

$$g(z+1) - g(z) = C + 2k\pi i.$$

2) Para que $f(1) = 1$, ha de ser

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-g(1)+\sum_{k=1}^{n} 1/k - \log(n)}}{1+1/n} = e^{-g(1)+C}.$$

Vemos que es necesario que

$$g(1) = C + 2k\pi i.$$

Entre las funciones enteras que satisfacen las condiciones requeridas, la más simple es la función entera $g(z) = Cz$. Tomando esta elección tenemos nuestra definición de la función Gamma de Euler:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-Cz}}{z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}}, \quad z \notin \{0,-1,-2,\dots\}$$

Vemos que, en virtud del teorema de Borel, el orden ρ de la función $1/\Gamma(z)$ es $\rho = \max(\tau, n) = 1$.

Proposición 4.1. Sea $\Gamma(z)$ la función Gamma de Euler, tenemos que se cumple que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

Y además, en particular,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Demostración. De la expresión anterior deducimos que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}.$$

Recordando la expresión en producto infinito de la función $\sin(z)$ nos damos cuenta de que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} &= -z^2\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)\\ &= -\frac{z}{\pi}\left[\pi z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi^2 z^2}{\pi^2 k^2}\right)\right] \qquad (4.7)\\ &= -\frac{z\sin(\pi z)}{\pi}.\end{aligned}$$

Ahora, manipulando y haciendo uso de las propiedades de la función Gamma, vemos que

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(z)[-z\Gamma(-z)]} = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)},$$

luego como queríamos, para $z \notin \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

De aquí, en particular, resulta que

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi.$$

Y, puesto que $\Gamma(1/2) > 0$, también vemos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

★

Proposición 4.2. La función Gamma de Euler puede expresarse, para cada $z \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, como

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Demostración. Como curiosidad esta fórmula fue obtenida por primera vez por Euler, aunque en muchos libros de texto figura bajo el nombre de Gauss. La demostración, a partir de la construcción que hicimos es pura manipulación:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{e^{-Cz}}{z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\exp\left(z\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k - C\right)\right)}{z(z+1)\dots(z+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\exp\left(z\left(\log(n) + z\sum_{k=1}^{n} 1/k - C - \log(n)\right)\right)}{z(z+1)\dots(z+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

★

4.2. Integrales eulerianas.

Teorema 4.3. En el semiplano positivo $\mathrm{Re}(z) > 0$ la función Gamma de Euler admite la siguiente expresión integral, conocida como integral euleriana de segunda especie:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Demostración. Por comodidad denotamos por $F(z)$ a la expresión buscada

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Consideraremos ahora una sucesión de funciones auxiliar

$$F_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

Obsérvese que, para cada n natural, las funciones F y F_n están bien definidas en $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, pues el integrando es integrable:

$$|e^{-t} t^{z-1}| \le e^{-t} t^{\mathrm{Re}(z)-1} \in L^1(0, \infty).$$

Veremos primero que $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z)$ para cada z con $\mathrm{Re}(z) > 0$ y probaremos después que para esos mismos puntos se cumple que $F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z)$.

1) En la expresión de $F_n(z)$ hacemos el cambio de variable $t = n\tau$. Nos queda que

$$F_n(z) = n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau.$$

Seguidamente integramos por partes n veces para obtener que

$$\frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau = \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Por la proposición 4.2 anterior vemos que, al pasar al límite, tendremos el valor $\Gamma(z)$.

2) Probemos pues que para $\mathrm{Re}\, z > 0$ se tiene que $F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z)$. Equivalentemente, probaremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1} dt = 0.$$

Primero observamos que, para $|t|/n < 1$, se tiene que

$$1 + \frac{t}{n} \le e^{t/n} \le \frac{1}{1 - t/n}.$$

Esto se deduce simplemente de ver que en el valor 0 se tienen igualdades y del estudio del crecimiento de las funciones involucradas, para $|t|/n < 1$. De forma más cómoda, se puede escribir

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \quad \text{y} \quad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Se deduce que

$$0 \leq e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] \leq e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right] =$$

$$= e^{-t}\frac{t^2}{n^2}\left[1+\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^{n-1}\right] \leq \frac{t^2e^{-t}}{n},$$

donde tan solo hemos hecho uso de las dos desigualdades precedentes, manipulado las expresiones, aplicado la fórmula de la suma de términos en progresión geométrica, y acotado teniendo en cuenta que $|t|/n < 1$.

Volviendo a lo que queremos probar vemos que

$$\left|\int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt\right| < \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{Re(z)+1}dt < \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^{Re(z)+1}dt.$$

Puesto que, para z fijo, la expresión anterior converge a cero cuando n tiende a infinito, podemos concluir. ★

Corolario 4.4. La función Gamma de Euler admite el siguiente desarrollo en fracciones simples:

$$\Gamma(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(z+m)} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad z \notin \{0,-1,-2,\dots\}$$

siendo la función integral entera.

Demostración. Nos apoyamos en la integral euleriana de segunda especie,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Llamaremos $\varphi(z)$ al valor dado por la primera integral. Si en la integral entre 0 y 1 sustituímos la función e^{-t} por su serie de potencias e integramos término a término, lo cual es válido gracias a la convergencia uniforme en $[0,1]$, vemos que nos queda

$$\varphi(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\int_0^1 t^{m+z-1}dt = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(z+m)}.$$

Vemos que, aunque esta fórmula la hemos establecido para $\mathrm{Re}(z) > 0$, de hecho, la serie anterior es uniformemente convergente en cualquier compacto de $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Además, en estos puntos vemos claramente que $\varphi(z)$ presenta un polo simple, cuyo residuo coincide con el residuo de la función Gamma. Es decir, $\varphi(z)$ es una función meromorfa y $\varphi(z) - \Gamma(z)$ es una función entera, como queríamos. ★

4.3. Crecimiento y comportamiento asintótico

En esta sección comentaremos el comportamiento asintótico de la función Gamma, las manipulaciones no se harán con demasiado detalle.

Partimos primero de la fórmula de Euler

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Manipulando, a partir de esta vemos que

$$\log \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \left[-(z-1)\log(n) + \sum_{k=0}^{n} (\log(z+k) - \log(1+k)) + 2\pi i m_n \right],$$

para enteros adecuados m_n. Querremos ahora sustituir la suma infinita que nos aparece por algo más manejable. Para ello utilizaremos la siguiente relación elemental entre sumas e integrales, que representa un caso particular de la fórmula de sumación de Euler.

Lema 4.5. (Fórmula de sumación de Euler). Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$ y continua junto con su derivada. Entonces se cumple la relación

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt = \frac{f(0) + f(n)}{2} + \int_0^n f'(t) \left[\{t\} - \frac{1}{2} \right] dt,$$

donde denotamos por $\{t\}$ a la parte fraccionaria de t, es decir, $\{t\} = t - [t]$.

Podemos aplicar la fórmula a la función $\log(z+t)$. A continuación, operamos en la relación y despejamos para obtener la siguiente expresión

$$\sum_{k=0}^{n} \log(z+k) = \left(z + n + \frac{1}{2} \right) \log(z+n) - \left(z - \frac{1}{2} \right) \log(z) - n + \int_0^n \frac{\{t\} - \frac{1}{2}}{z+t} dt.$$

Por comodidad denotamos

$$I_n(z) = \int_0^n \frac{\{t\} - \frac{1}{2}}{z+t} dt.$$

Seguidamente evaluamos en $z = 1$ la expresión que hemos obtenido para $\sum_{k=0}^{n} \log(z+k)$ y las restamos término a término. Nos queda que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}&(\log(z+k) - \log(1+k)) \\ &= \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\log(z+n) - \left(n+\frac{3}{2}\right)\log(1+n) \\ &\qquad - \left(z-\frac{1}{2}\right)\log(z) + I_n(z) - I_n(1). \quad (4.9)\end{aligned}$$

Consecuentemente tenemos que

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n\to\infty}[-(z-1)\log(n) + \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\log(z+n) \\ &- \left(n+\frac{3}{2}\right)\log(1+n) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\log(z) + I_n(z) - I_n(1) + 2\pi i m_n].\end{aligned} \quad (4.10)$$

Nos centramos ahora en los tres términos que contienen logaritmos dependientes de n, vemos que podemos reagrupar dichos términos como las siguientes integrales:

$$(z-1)\int_{n}^{z+n}\frac{dw}{w} + \left(n+\frac{3}{2}\right)\int_{1+n}^{z+n}\frac{dw}{w}.$$

Si ahora hacemos, respectivamente, los cambios de variable $w = \xi + n - 1$ y $w = \xi + n$, enfocados a eliminar la n en los límites de integración, nos queda

$$(z-1)\int_{1}^{1+z}\frac{d\xi}{\xi+n-1} + \int_{1}^{z}\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)d\xi}{\xi+n}.$$

Vemos que al tomar el límite cuando n tiende a infinito estos tres términos tienden a $z-1$. Pasamos ahora a transformar la expresión de $I_n(z)$. Para ello consideramos

$$\varphi(t) = \int_0^t \left(\{s\} - \frac{1}{2}\right) ds.$$

La función $\varphi(t)$ es continua y periódica, y es sencillo probar que para todo t se tiene que

$$-\frac{1}{8} \leq \varphi(t) \leq 0.$$

Integrando por partes $I_n(z)$ obtenemos que

$$I_n(z) = \frac{\varphi(n)}{z+n} + \int_0^n \frac{\varphi(t)}{(z+t)^2}dt, \text{ luego } \lim_{n\to\infty} I_n(z) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{(z+t)^2}dt,$$

y por lo tanto

$$\log\frac{1}{\Gamma(z)}=(z-1)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\log(z)+\int_0^\infty\frac{\varphi(z)dt}{(z+t)^2}-\int_0^\infty\frac{\varphi(z)dt}{(1+t)^2}+2\pi i m(z). \tag{4.11}$$

Introduciendo la acotación anterior, si suponemos que $z=x+iy$, nos queda que

$$|\lim_{n\to\infty}I_n(z)|=\left|\int_0^\infty\frac{\varphi(t)dt}{(z+t)^2}\right|\leq\frac{1}{8}\int_0^\infty\frac{dt}{(x+t)^2+y^2}.$$

Para todo $\delta>0$, sea G_δ la semibanda de anchura 2δ centrada en el eje real negativo

$$G_\delta=\{z\in\mathbb{C}\text{ tales que }\operatorname{Re}(z)<\delta\text{ e }|\operatorname{Im}(z)|<\delta\}.$$

Ahora, bien calculando la integral o bien por estimación directa, es sencillo comprobar que si $z\in\mathbb{C}\setminus G_\delta$ entonces se cumple que

$$\left|\int_0^\infty\frac{\varphi(t)dt}{(z+t)^2}\right|\leq\frac{\pi}{8\delta}.$$

Teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores obtenemos que

$$\log\frac{1}{\Gamma(z)}=(z-1)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\log(z)+C(z)+2\pi i m(z),$$

donde $m(z)$ es un número entero y $|C(z)|<\pi/(4\delta)$ cuando z no pertenece a la semibanda G_δ. Tomando partes reales obtenemos la siguiente fórmula

$$\log\frac{1}{|\Gamma(z)|}=\operatorname{Re}(z)-1-\left(\operatorname{Re}(z)-\frac{1}{2}\right)\log|z|+\operatorname{Im}(z)\arg(z)+\operatorname{Re}C(z). \tag{4.12}$$

Esta fórmula es la que nos permite deducir que el tipo de $1/\Gamma(z)$ es maximal. Fijemos una semirrecta que parte del origen con argumento $\alpha\in(-\pi,\pi)$. Sea z perteneciente a dicha semirrecta, $z=|z|e^{i\alpha}=|z|\cos(\alpha)+i|z|\sin(\alpha)$. Para $|z|$ suficientemente grande es claro que se puede aplicar la fórmula anterior (4.12) y deducir que

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\log\frac{1}{|\Gamma(z)|}}{|z|\log|z|}=-\cos(\arg(z)).$$

Y por lo tanto vemos que, por definición de límite,

$$e^{\log|z|(-\cos(\arg(z))+\varepsilon)|z|}>\frac{1}{|\Gamma(z)|}>e^{\log|z|(-\cos(\alpha)-\varepsilon)|z|}.$$

Puesto que $|\log(z)|$ tiende a infinito cuando $|z|$ tiende a infinito, vemos que la función $1/\Gamma(z)$, que tiene orden $\rho=1$, será de tipo maximal.

Observación 4.6. Utilizando la fórmula (4.6) se puede evaluar la expresión (4.11) para los puntos $z = iy$, con $y > 0$, y tomando límites cuando $y \to \infty$ se deduce que

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{2} \log(2\pi) - 1.$$

Entonces, obtenemos la *fórmula de Stirling*

$$\Gamma(z) = z^{z-1/2} \sqrt{2\pi} \exp\left(-z - \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{(z+t)^2} \right) dt.$$

Ahora, como en todo dominio $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \pi\varepsilon\}$, con $\varepsilon > 0$, la integral que figura en la exponencial tiende a cero, se sigue que

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\Gamma(z)}{z^{z-1/2} \sqrt{2\pi} e^{-z}} = 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Bibliografía

[1] A. Markushevich, Teoría de las funciones analíticas, Vol.2 (1970).

[2] R.B. Ash and W.P. Novinger, Complex Variables, disponible en la red en http://www.math.uiuc.edu/ r-ash/CV.html. Último acceso el 1 de septiembre de 2015.

[3] J. B. Conway, Functions of one complex variable I. Graduate Texts in Mathematics 11. Springer-Verlag, New York, 1973.